Calculo

Profesores: Alejandro García y David Aleja

Diego Rodríguez

Estudiante de Matemáticas e Ingeniería Informática
Universidad Rey Juan Carlos
Curso 2023-2024
Página web
GitHub

d.rodriguezto.2023@alumnos.urjc.es

Índice

1 La recta real y el conjunto de los numeros reales $\mathbb{R}$

§1.1 Numeros reales

§1.1.1 Propiedades algebraicas

En el conjunto $\mathbb{R}$ de los numeros reales hay dos operaciones binarias, denotadas por $+$ y $\cdot$, a las que se llama adicion y multiplicacion, respectivamente. Estas operaciones satisfacen las siguientes propiedades:

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$ para toda $a, b, c \in \mathbb{R}$ (propiedad asociativa de la suma)
2. $a+b = b+a$ para toda $a, b \in \mathbb{R}$ (propiedad conmutativa de la suma)
3. existe un elemento 0 en $\mathbb{R}$ tal que $0+a = a$ y $a+0 = a$ para toda a en $\mathbb{R}$ (existencia del elemento neutro)
4. para cada a a en $\mathbb{R}$ existe un elemento $-a$ en $\mathbb{R}$ tal que $a+(-a) = 0$ y $(-a)+a = 0$ (elementos opuestos)
5. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ para toda a, b, c en $\mathbb{R}$ (propiedad asociativa de la multiplicacion)
6. $a \cdot b = b \cdot a$ para toda $a, b \in \mathbb{R}$ (propiedad conmutativa de la multiplicacion)
7. existe un elemento 1 en $\mathbb{R}$ diferente de 0 tal que $1 \cdot a = a$ y $a \cdot 1 = a$ para toda a en $\mathbb{R}$ (existencia del elemento neutro)
8. para cada $a \neq 0$ en $\mathbb{R}$ existe un elemento a^{-1} en $\mathbb{R}$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$ y $a^{-1} \cdot a = 1$ (elemento inverso)
9. $a \cdot (b+c) = (a \cdot b)+(a \cdot c)$ y $(b+c) \cdot a = (b \cdot a)+(c \cdot a)$ para toda $a, b, c \in \mathbb{R}$ (propiedad distributiva de la multiplicacion sobre la adicion).

Por satisfacer estas propiedades (axiomas) se dice que el conjunto $\mathbb{R}$ tiene estructura de cuerpo respecto de la suma y producto habituales, o tambien que la terna $(R, +, \cdot)$ es un cuerpo. Las propiedades anteriores, que constituyen los primeros 9 axiomas de la definicion axiomatica $\mathbb{R}$, permiten obtener otras propiedades. Algunas de estas son las siguientes:

- $\forall x \in \mathbb{R}$ si $x+x = x$ necesariamente $x = 0$. En efecto, si $x+x = x$ entonces $(-x)+(x+x) = (-x)+x \overset{A1}{\Rightarrow} (-x+x)+x = 0 \Rightarrow 0+x = 0 \Rightarrow x = 0$.
- $\forall a \in \mathbb{R}$ se verifica que $0a = 0$. En efecto, $0a = (0+0)a = 0a+0a$ y, haciendo uso de la propiedad anterior, $0a = 0$.

- El elemento opuesto de un numero es unico. Supongamos que existen dos elementos $b, c \in \mathbb{R}$ tal que $b + a = 0$ y $c + a = 0$. En ese caso, $a + b = 0 = a + c$ y, por tanto, $b = b + 0 = b + (a + c) \overset{A2}{=} (b + a) + c = 0 + c = c$.
- $(-1)a = -a$. En efecto, $a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = 0$ por lo que teniendo en cuenta la unicidad del elemento opuesto tenemos que $(-1)a = -a$.
- Si $ab = 0$ y $a \neq 0$, entonces $b = 0$. Si $a \neq 0$ entonces podemos multiplicar ambos lados de la igualdad por a^{-1}, obteniendo $a^{-1}ab = a^{-1}0 \Rightarrow 1b = 0 \Rightarrow b = 0$.
- La ecuacion $ax + b = 0$ tiene una unica solucion, siempre que $a \neq 0$.

§1.1.2 Propiedades del orden

En el conjunto de los numeros reales se considera una relacion de orden $\leq$ que tiene las siguientes propiedades:

10. $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \leq a$ (reflexiva)
11. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $b = a$
12. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.
13. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces o $a \leq b$ o $b \leq a$ (relación de orden total).
14. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, si $a \leq b$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $a + c \leq b + c$ (compatibilidad con las operaciones algebraicas).
15. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, si $a \leq b$ y $0 \leq c$, entonces $ac \leq bc$.

Observación 1.1. Hay que tener en cuenta los otros tres simbolos de orden:

- $a \geq b$ quiere decir $b \leq a$.
- $a < b$ quiere decir $a \leq b$ y $a \neq b$
- $a > b$ quiere decir $b < a$.

A partir de estas propiedades podemos definir los siguientes conjuntos:

Definición 1.1.

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$
$$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$$

Proposición 1.1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces

$$a \leq b \Rightarrow -a \geq -b$$

Proof.

$$a \leq b \Rightarrow a + (-a) \leq b + (-a) \Rightarrow 0 \leq b + (-a) \Rightarrow -b + 0 \leq -b + (b + (-a))$$
$$\Rightarrow -b \leq (-b + b) + (-a) \Rightarrow -b \leq 0 + (-a) \Rightarrow -b \leq -a \Rightarrow -a \geq -b$$

■

§1.1.3 Intervalos

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \leq b$, entonces se definen:

- el intervalo abierto de extremos a y b como el conjunto $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
- el intervalo cerrado de extremos a y b como el conjunto $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ (en algunos textos llaman a estos intervalos semiabiertos o semicerrados)
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Definición 1.2. Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$.

a) Se dice que S está **acotado superiormente** si existe un numero $u \in \mathbb{R}$ tal que $s \leq u$ para todo $s \in S$. A cada uno de estos numeros u se le llama cota superior de S.

b) Se dice que el conjunto S está **acotado inferiormente** si existe un numero $w \in \mathbb{R}$ tal que $w \leq s$ para todo $s \in S$. A cada w se le llama cota inferior de S.

c) Se dice que un conjunto está acotado si está acotado tanto superior como inferiormente; en caso contrario, se dice que es no acotado.

Definición 1.3. Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$.

a) Si S está acotado superiormente, entonces se dice que un numero u es un supremo de S si satisface las condiciones:

- u es una cota superior de S, o equivalentemente, $s \leq u \ \forall s \in S$.
- si v es cualquier cota inferior de S, entonces $u \leq v$.

b) Si S está acotado inferiormente, entonces se dice que un numero w es un infimo de S si satisface las condiciones:

- w es una cota inferior de S, o equivalentemente, $w \leq s \ \forall s \in S$.
- si t es cualquier cota inferior de S, entonces $t \leq w$.

Además, si S tiene supremo o infimo se les denotará, respectivamente, por

$$\sup S \quad \text{e} \quad \inf S.$$

Si $\sup S \in S$, diremos que es el **máximo** de S. Por otro lado, si $\inf S \in S$, recibe el nombre de **mínimo** de S.
Un conjunto S que no esté acotado superiormente no tendrá supremo (ni cotas superiores). En este caso a veces se escribe que $\sup A = +\infty$.

§1.1.4 Axioma del supremo

Para terminar la axiomática de los numeros reales, se añade la siguiente propiedad:

16. Todo subconjunto de los numeros reales no vacio y acotado superiormente tiene supremo.

La propiedad análoga para los infimos se puede deducir a partir del axioma del supremo. Supongamos que S esta acotado inferiormente. Entonces existe el infimo de A y se tiene que

$$\inf(A) = -\sup(-A)$$

siendo $-A = \{-a \mid a \in A\}$.

Proof.

Veamos que $\exists \inf(A)$ y $\inf(A) = -\sup(-A)$. En primer lugar, $-A \neq \varnothing$ porque $A \neq 0$. Sea $m \in \mathbb{R}$ con $a \geq m \ \forall a \in A$, que existe por estar A acotado inferiormente. Entonces $-a \leq -m \ \forall a \in A$, es decir, $-a \leq -m \ \forall -a \in -A$, con lo que $-A$ está acotado superiormente y, por el axioma del supremo, existe $\sup(-A)$.
Por otro lado, se tiene que $-a \leq \sup(-A) \ \forall -a \in -A \Rightarrow a \geq -\sup(-A) \ \forall -a \in -A \Leftrightarrow a \geq -\sup(-A) \ \forall a \in A$, es decir, $-\sup(-A)$ es cota inferior de A.
Veamos que $-\sup(-A)$ es la mayor de las cotas inferiores de A. Sea $m \in \mathbb{R}$ con $m \leq a \ \forall a \in A$. Entonces

$$\begin{aligned} m \leq a \ \forall a \in A \Leftrightarrow -m \geq -a \ \forall a \in A \Leftrightarrow -m \geq -a \ \forall -a \in -A \\ \Rightarrow -m \text{ es una cota superior de } -A \Rightarrow -m \geq \sup(-A) \Rightarrow m \leq -\sup(-A) \end{aligned}$$

Luego, $-\sup(-A) = \inf(A)$. ■

§1.2 Números naturales, enteros y racionales

Los otros tres conjuntos numericos más conocidos son:

- Los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Los números enteros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- Los números racionales $\mathbb{Q} = \{[\frac{p}{q}] \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$, donde $[\frac{p}{q}]$ es la clase de equivalencia o conjunto de todas las fracciones que representan dicho numero racional. Es decir, $[\frac{p}{q}]$ está formado por $\frac{p}{q}$ y todas las fracciones $\frac{s}{t}$ tales que $\frac{p}{q} = \frac{s}{t}$.

Se tiene que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Los numeros racionales satisfacen los 15 primeros axiomas de $\mathbb{R}$.

§1.3 Los numeros irracionales

El primer problema con las fracciones apareció en la Grecia antigua, en la escuela pitagórica. Estos descubrieron que cantidades muy sencillas como la diagonal de un cuadrado de lado unidad ($\sqrt{2}$) no podian ser expresadas como fracciones.
En particular, la ecuacion $x^2 - 2 = 0$ no tiene solucion en $\mathbb{Q}$. Ademas, los teoremas basicos del analisis real descansan en la estructura de dichos numeros y la gran mayoria serian falsos si consideramos solo numeros racionales.
Por ejemplo, tiene sentido considerar el resultado de la "operacion" $2^{\sqrt{2}}$? Sí, pues considerando el conjunto $A = \{2^{\frac{p}{q}} \in \mathbb{R} \mid \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \wedge \frac{p}{q} \leq \sqrt{2}\}$, que es un conjunto que está acotado superiormente, resultará que $2^{\sqrt{2}} = \sup A$. En general, dados $x, y \in \mathbb{R}$, con $x > 0$, se define x^y del siguiente modo:

- Si $x > 1$ entonces $x^y = \sup\{x^r \mid r \in \mathbb{Q} \mid r \leq y\}$
- Si $x < 1$ entonces $x^y = \inf\{x^r \mid r \in \mathbb{Q} \mid r \geq y\}$

§1.4 Propiedades topológicas de los numeros reales

§1.4.1 Propiedad arquimediana

Proposición 1.2 — Propiedad de Arquimedes. El conjunto de los numeros naturales no está acotado superiormente en $\mathbb{R}$, o equivalentemente, si $x \in \mathbb{R}$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < n$.[a]

[a] No visto en clase.

Proof.

Supongamos que $\mathbb{N}$ esta acotado. Como es un subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacÍo, entonces existirÁ

el supremo de $\mathbb{N}$, al que denotaremos p. Como p es una cota superior mínima de $\mathbb{N}$, el numero $p-1$ no puede ser una cota superior, con lo que debe haber algun numero natural $n \in \mathbb{N}$, de manera que $p-1 < n \leq p$. Pero, en ese caso, sumando 1 a n, tendríamos que $p < n+1$, con $n+1 \in \mathbb{N}$, por lo que p no puede ser el supremo de $\mathbb{N}$.
Hemos llegado a una contradiccion. No hay supremo de $\mathbb{N}$ y, por tanto, $\mathbb{N}$ no puede estar acotado. ∎

A partir de esta propiedad se siguen consecuencias muy importantes que permiten relacionar los naturales, enteros y racionales con los numeros reales:

Proposición 1.3 — Propiedad arquimediana de los numeros reales. Si $x, y \in \mathbb{R}$ con $0 < x$, $\exists n \in \mathbb{N}$ de manera que $y < nx$.

Proof.
Consideramos el número real $\frac{y}{x}$. Como los naturales no están acotados en $\mathbb{R}$, existirá algun numero natural n de manera que $\frac{y}{x} < n$, y multiplicando ambos lados de la desigualdad por x llegamos a que $y < nx$. ∎

§1.4.2 Principio de los intervalos encajados

Supongamos que tenemos $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$ con $n \in \mathbb{N}$ infinitos intervalos cerrados. Estos intervalos estan encajados cuando se verifica que $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$, es decir, cuando cada intervalo esta contenido en el anterior. Cuando tenemos infinitos intervalos cerrados encajados ocurre el "principio de los intervalos encajados de Cantor": Si $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$ son infinitos intervalos encajados, entonces hay al menos un punto comun a todos los intervalos ya que, si consideramos el conjunto $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ formado por todos los extremos izquierdos de los intervalos, al estar todos los intervalos encajados, resulta que:

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots$$

De la misma manera resulta que $a_n \leq b_m$ para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$, ya que en caso contrario los intervalos dejarian de estar encajados.
En particular, el conjunto A es acotado. Sea $a = \sup A$. Por un lado $a_n \leq a$, ya que es una cota superior de A. Por otro lado, como cualquier b_n es cota superior de A, por lo que el supremo sera menor, es decir, $a \leq b_n$. Esto quiere decir que sea cual sea $n, a \in [a_n, b_n]$, y por tanto a es un punto comun a todos estos intervalos.[1]

§1.4.3 Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$

Entre dos numeros reales distintos cualesquirea siempre existe un numero racional (de hecho, infinitos)[1]. Concretamente:

[1] No visto en clase.

Proposición 1.4.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y, \exists r \in \mathbb{Q} \text{ tal que } x < r < y$$

Proof.

Si $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, resulta que $0 > (y - x)$ y, por la propiedad arquimediana aplicada a los numeros 1 e $(y-x) > 0$ tendremos que $\exists n \in \mathbb{N}$ de manera que $1 < n(y-x)$ por lo que $(1 + nx) < ny$. Si $p \in \mathbb{Z}$ es la parte entera de nx, es decir, $p \leq nx < (p+1)$ tendremos que $nx < p + 1 \leq nx + 1 < ny$ y, en particular, que $nx < p + 1 < ny$. Así pues, siendo $r = \dfrac{p+1}{n}$ que, obviamente, es un numero racional, obtendremos que $x < r < y$. ■

§1.4.4 Valor absoluto de un numero real

Dado $x \in \mathbb{R}$ se define su valor absoluto como $|x| = max\{x, -x\} = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0, \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

Algunas propiedades del valor absoluto son:

- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \; \forall x, y \in \mathbb{R}$. Veamos la demostracion.

  Sabemos que $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$ y $|y| = \begin{cases} y \text{ si } y \geq 0 \\ -y \text{ si } y < 0 \end{cases}$.

  Por tanto, $|x \cdot y| = \begin{cases} x \cdot y \text{ si } xy \geq 0 \\ -x \cdot y \text{ si } xy < 0 \end{cases}$

  Consideramos los 4 casos segun el valor de x e y.

  - Si $x \geq 0$, $y \geq 0$, $|x| \cdot |y| = x \cdot y = |x \cdot y|$
  - Si $x \geq 0$, $y < 0$, entonces $|x| \cdot |y| = x \cdot (-y) = -(x \cdot y) = |x \cdot y|$.
  - Si $x < 0$, $y \geq 0$, entonces $|x| \cdot |y| = (-x) \cdot y = -(x \cdot y) = |x \cdot y|$
  - Si $x < 0, y < 0$, $|x| \cdot |y| = (-x)(-y) = x \cdot y = |x \cdot y|$

- Dados $x \in \mathbb{R}$ y $a \geq 0$, se tiene que $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

  $|x| = max\{x, -x\} \leq a \Leftrightarrow x \leq a$ y $-x \leq a \Leftrightarrow x \leq a$ y $x \geq -a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

  Ejemplo 1.1. $|x-a| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x-a \leq \varepsilon \Leftrightarrow x-\varepsilon \leq x \leq a+\varepsilon \Leftrightarrow x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$

  $|x - a| < \varepsilon \Leftrightarrow x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

- Es falso que $|x + y| = |x| + |y| \; \forall x, y \in \mathbb{R}$. Consideramos un contraejemplo: $|3 + (-3)| = |3| + |-3| = 6 \neq 0$.

- $|x + y| \leq |x| + |y|$, o equivalentemente, $-(|x| + |y|) \leq |x + y| \leq |x| + |y|$. Veamos la demostración:

$$\begin{array}{c} -|x| \leq x \leq |x| \\ -|y| \leq y \leq |y| \\ \hline -|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y| \end{array}$$

- En general, es falso que dados $x, y \in \mathbb{R}$ $|x-y| \leq |x|-|y|$ ya que, por ejemplo, si tomamos $x = 3$ y $y = -2$, se cumple $\underbrace{|x-y|}_{=5} > \underbrace{|x|}_{=3} - \underbrace{|y|}_{=2} = 1$

§1.4.5 Entornos, puntos interiores, puntos adherentes, puntos de acumulacion

Dado un numero real $x \in \mathbb{R}$, se denomina entorno de x a cualquier intervalo (a, b) tal que $x \in (a, b)$. Habitualmente se suelen considerar entornos centrados en el punto x, de manera que si $\varepsilon > 0$, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ es un entorno de x. También se considera lo que se denomina "entorno reducido" del punto x, que es cualquier entorno de x en el que se ha eliminado el propio punto x, por ejemplo, $(x-\varepsilon, x) \cup (x, x+\varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) - \{x\}$. Dado $A \subset \mathbb{R}$ se dice que:

- $x \in A$ es un punto interior de A si existe un entorno de x completamente contenido en A, es decir, si existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$.
- $x \in \mathbb{R}$ es punto adherente de A si en cualquier entorno de x hay puntos de A, es decir, si $\forall \varepsilon > 0$ se verifica que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$.
- $x \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulacion de A si en cualquier entorno reducido de x hay puntos de A, es decir, si $\forall \varepsilon > 0$ se verifica que $((x-\varepsilon, x+\varepsilon) - \{x\}) \cap A \neq \varnothing$.

$$A' = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ es un punto de acumulacion de } A\}$$

Dado ahora $A \subset \mathbb{R}$,

- al conjunto $\mathring{A}$ formado por todos los puntos interiores de A se le denomina interior de A. Obviamente $\mathring{A} \subset A$.
- al conjunto $\overline{A}$ formado por todos los puntos adherentes de A se le denomina adherencia de A. Evidentemente $\overline{A} \subset A$. Si $\overline{A} = A$ se dice que el conjunto A es cerrado.

Ejemplo 1.2. Consideramos $A \subset \mathbb{R}$ con $A = (1, 2)$.
En este caso, $\mathring{A} = (1, 2) = A$, $A' = [1, 2]$, $\overline{A} = [1, 2]$.
$\mathring{A} = A \Rightarrow A$ es abierto. $\overline{A} \supseteq A \Rightarrow A$ no es cerrado.

Ejemplo 1.3. Sea $A = [1, 2)$. En este caso, $\mathring{A} = (1, 2)$, con lo que A no es abierto, $A' = [1, 2]$ y $\overline{A} = [1, 2]$, luego tampoco es cerrado.

Ejemplo 1.4. Consideramos $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Dado cualquier punto, ningún entorno suyo estará completamente contenido en A. Luego $\mathring{A} = \varnothing$.
Como $\frac{1}{n}$ tiende hacia cero, $A' = \{0\}$. Por la misma razon, $\overline{A} = A \cup \{0\}$.

§1.5 Principio de inducción. Conjuntos finitos y numerables.

§1.5.1 El principio de inducción

Proposición 1.5 — Propiedad del buen orden de $\mathbb{N}$. Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene un elemento menor.

Proposición 1.6 — Principio de inducción matemática. Sea S un subconjunto de $\mathbb{N}$ que tenga las dos propiedades:

1. El numero $1 \in S$
2. Para toda $k \in \mathbb{N}$, si $k \in S$, entonces $k + 1 \in S$.

Entonces se tiene que $S = \mathbb{N}$.

El principio de induccion matematica suele exponerse en el contexto de propiedades relativas a numeros naturales.
En este contexto, el principio de induccion matematica puede formularse de la manera siguiente.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $P(n)$ una proposicion acerca de n. Suponer que:

1. $P(1)$ es verdadera
2. Para cualquier $k \in \mathbb{N}$, si $P(k)$ es verdadera, entonces $P(k + 1)$ es verdadera.

Entonces $P(n)$ es verdadera para toda $n \in \mathbb{N}$.

§1.5.2 Conjuntos finitos y numerables

Se dice que dos conjuntos A y B son equipotentes o coordinables si es posible definir una funcion biyectiva $f\colon A \to B$ entre dichos conjuntos. Si un conjunto A es equipotente con el subconjunto de los numeros naturales $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ se dice que el cardinal de A es n y se escribe $|A| = n$. Si A es equipotente con $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ se dice que A es finito. Por otra parte, si A es coordinable con el conjunto $\mathbb{N}$, se dice que A es numerable.
Tambien se podra demostrar que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los numeros racionales es numerable.

2 Sucesiones de números reales

§2.1 Sucesiones de números reales

Definición 2.1. Una sucesión de numeros reales es una función[a] $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, de manera que a cada número natural $n \in \mathbb{N}$ se le asocia un único numero real $x(n)$. En general a $x(n)$ se le llama término n-ésimo de la sucesion y se le representa por x_n. De la misma manera, la notación para representar la sucesión es $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o $\{x_n\}$.

[a]Definición vista en Lógica.

Definición 2.2. Dadas dos sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ podemos definir las siguientes operaciones en $\mathbb{R}$ entre ellas:

- la suma sería la sucesión $\{x_n + y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
- el producto por un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ sería la sucesión $\{\alpha x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
- la resta sería la sucesión $\{x_n - y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
- el producto sería la sucesión $\{x_n y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
- el cociente no siempre se puede realizar. Primero hay que asegurarse de que $y_n \neq 0$ para cualquier natural n, definiéndose entonces como la sucesión $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

§2.1.1 Sucesiones recurrentes

La posibilidad de definir sucesiones por recurrencia se debe al siguiente resultado:

Teorema 2.1 — de definición por recursión. Dados un conjunto, $A \neq \varnothing$, una función $H\colon \mathbb{N} \times A \to A$ y un elemento $a \in A$, existe una función $f\colon \mathbb{N} \to A$, que además es unica, y que satisface las condiciones

1. $f(1) = a$
2. $\forall n \in \mathbb{N}\ f(n+1) = H(n, f(n))$.

Ejemplo 2.1. Algunos ejemplos de sucesión definida de forma recurrente es:

$$x_n = \begin{cases} 1 \text{ para } n = 1 \\ \sqrt{1 + x_{n-1}} \ \forall n \geq 2 \end{cases}$$

$$x_n = \begin{cases} 2 \text{ si } n = 1 \\ x_{n-1} + 3 \ \forall n \geq 2 \end{cases}$$

$$x_n = \begin{cases} 3 \text{ si } n = 1 \\ 2x_{n-1} \ \forall n \geq 2 \end{cases}$$

o la sucesión de Fibonacci:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \ \forall n \geq 3 \end{cases}$$

Es posible definir las progresiones aritmeticas de manera recursiva $x_1 = a$ y $x_n = x_{n-1} + d$ para $n \geq 2$ o, también, explicitando el término general de la sucesión: $x_n = a + (n-1)d$, es decir, la sucesión quedaría $\{a + (n-1)d\}$. Así, por ejemplo, si $a = 3$ y $d = 2$, la sucesión sería $\{3, 5, 7, \ldots\}$. De manera análoga se pueden definir las progresiones geométricas: $x_1 = a$ y $x_n = rx_{n-1}$ y también explicitando el término general: $\{a \cdot r^{n-1}\}$. Así, por ejemplo, si $a = 2$ y $r = 3$ la progresión geométrica sería $\{2 \cdot 3^{n-1}\} = \{2, 6, 18, \ldots\}$.

Proposición 2.1. El sumatorio de los elementos de la progresión geométrica desde 1 hasta n es $S_n = a(1 - r^n) = \dfrac{a \cdot (1 - r^n)}{1 - r}$ si $r \neq 1$.

Proof.

$$\begin{aligned} S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} &\Leftrightarrow -rS_n = -(ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n) \\ \Leftrightarrow S_n - rS_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1} - ar - ar^2 - \cdots - ar^n &\Leftrightarrow (1 - r)S_n = a - ar^n \\ &\Leftrightarrow S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \end{aligned}$$

■

Como consecuencia,

$$S_\infty = x_1 + x_2 + \cdots = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \begin{cases} \dfrac{a}{1 - r} & \text{si } r < 1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a = \begin{cases} +\infty \text{ si } a > 0 \\ 0 \text{ si } a = 0 \\ -\infty \text{ si } a < 0 \end{cases} & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

La suma de los n primeros términos de una progresion aritmética de primer término a y diferencia d es $S_n = \frac{(a + [a + (n-1)d])n}{2} = \frac{(x_1 + x_n) \cdot n}{2}$. Se puede demostrar por el principio de inducción.

§2.1.2 Subsucesiones

Definición 2.3. Una subsucesión de una sucesión (x_n) es una sucesión de la forma (x_{n_k}), donde (n_k) es una sucesión estrictamente creciente de números naturales.

Ejemplo 2.2. Una subsucesion de $(\frac{1}{n})$ es $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots$ o $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \dots$

Una notacion generalizada para indicar que (x_{n_k}) es una subsucesion de (x_n) consiste en escribir $(x_{n_k}) \prec (x_n)$.

§2.2 Sucesiones monótonas y acotadas

Definición 2.4. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es:

- creciente si $\forall n \in \mathbb{N}$ se verifica que $x_n \leq x_{n+1}$.
- estrictamente creciente si $\forall n \in \mathbb{N}$ se verifica que $x_n < x_{n+1}$.
- decreciente si $\forall n \in \mathbb{N}$ se verifica que $x_n \geq x_{n+1}$.
- estrictamente decreciente si $\forall n \in \mathbb{N}$ se verifica que $x_n > x_{n+1}$.

En cualquiera de estos casos se dice que la sucesión es monótona.

Definición 2.5. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada superiormente si se puede encontrar un $M \in \mathbb{R}$ de manera que $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \leq M$, acotada inferiormente si se puede encontrar un $m \in \mathbb{R}$ de manera que $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \leq x_n$, y se dice que está acotada si lo está superior e inferiormente.

Ejemplo 2.3. Sucesiones acotadas superiormente, pero no acotadas, son: $\{-n\}, \{-(n)!\}$.
Sucesiones acotadas inferiormente, pero no acotadas, son: $\{n\}, \{n^2\}$.
Sucesiones acotadas son: $\{(-1)^n, \frac{1}{n}\}$.
Una sucesión no acotada ni superior ni inferiormente es $\{(-n)^{n-1}\}$.

Teorema 2.2. Toda sucesión de numeros reales contiene una subsucesión monotona.

Proof.

No vista en clase. ■

§2.3 Convergencia de sucesiones

Definición 2.6. Dados $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$, diremos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge al numero a, y lo denotaremos por $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, si dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $|x_n - a| < \varepsilon \; \forall n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$.

Observación 2.1. Aplicando las propiedades del valor absoluto, observamos que $|x_n - a| < \varepsilon$ es equivalente a que $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Proposición 2.2. El límite de una sucesión, si existe, es único.

Proof.

Supongamos, por reduccion al absurdo, que existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. Supongamos que $a < b$, siendo análogo para $b < a$.
Si la sucesion es convergente, para todo entorno a partir de un momento dado todos los elementos de la sucesion estan en un entorno de a. Lo mismo para un entorno de b. Cogemos un ε tal que $a + \varepsilon \leq b + \varepsilon \Rightarrow 2\varepsilon \leq b - a \Rightarrow 0 < \varepsilon \leq \dfrac{b-a}{2}$.
Sea $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \quad \forall n \geq n_1 \in \mathbb{N}$ y, como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon) \; \forall n \geq n_2 \in \mathbb{N}$.
Definimos $n_0 = max\{n_1, n_2\} \in \mathbb{N}$. Entonces, se tiene que $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ y $x_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon) \; \forall n \geq n_0$. Esto no es posible puesto que habíamos supuesto que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (b-\varepsilon, b+\varepsilon) = \varnothing$.
Luego el limite, si existe, es unico. ■

Proposición 2.3. Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, ambas convergentes, y $k \in \mathbb{R}$. Entonces

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \lim\limits_{n=1\to\infty} y_n$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ si $y_0 \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} (k \cdot x_n) = k \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Proof.

Sean $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} y_n \in \mathbb{R}$.

1. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq n_0$ y $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq n_0$. Entonces

   $$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ \forall n \geq n_0$$

   Luego, efectivamente, $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$.

2. Análogo al apartado anterior.

   $$|(x_n - y_n) - (a - b)| = |(x_n - a) + [-(y_n - b)]| \leq |x_n - a| + |-(y_n - b)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ \forall n \geq n_0$$

3. Sea $\varepsilon > 0$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ con $|x_n - a| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$, $|y_n - b| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$. Sea $M \in \mathbb{R}$ con $|y_n| \leq M\ \forall n \in \mathbb{N}$.

   $$\begin{aligned} |x_n \cdot y_n - a \cdot b| &= |(x_n \cdot y_n - a \cdot y_n) + (a \cdot y_n - a \cdot b)| \leq |x_n \cdot y_n - a \cdot y_n| + |a \cdot y_n - ab| = \\ &= |y_n| \cdot |x_n - a| - |a| \cdot |y_n - b| < M\varepsilon + |a| \cdot \varepsilon = \varepsilon(M + |a|)\ \forall n \geq n_0 \end{aligned}$$

   Luego $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

4,5. No vistas en clase.

■

Proposición 2.4. Toda sucesión convergente es acotada.

Proof.

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ convergente con $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ y fijamos $\varepsilon = 1$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $|x_n - a| < 1\ \forall n \geq n_0$. Si se aplica la desigualdad del triángulo para $n \geq n_0$, se obtiene

$$|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|$$

Definimos $M := \sup\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0-1}|, 1 + |x|\}$, de lo que se sigue que $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego $\{x_n\}$ está acotada. ■

Proposición 2.5. Toda sucesión monotona acotada es convergente.

Proof.

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión monótona acotada. Supongamos que es monótona creciente, siendo análogo si fuese monótona decreciente.
Por el axioma del supremo, existe $a = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Como a es el supremo de $\{x_n\}$, dado $\varepsilon > 0$ existe x_{n_0} con $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$. Puesto que la sucesión es creciente, se tiene para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, con lo que, en efecto, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. ■

Teorema 2.3 — Teorema de Bolzano-Weierstrass. Toda sucesión acotada contiene una subsucesión convergente.

Proof.

Toda sucesión contiene una subsucesión monotona por 2.2. El resultado se sigue de aplicar que toda sucesión monótona acotada es convergente (2.5). ■

Teorema 2.4. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, entonces la sucesión $(x_n y_n)$ es convergente y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

Proof.

Como (x_n) es una sucesión acotada, necesariamente existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n| < K\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Por otra parte, como $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n - 0| < \dfrac{\varepsilon}{K}\ \forall n \geq n_0$.
Así, obtenemos

$$|x_n y_n - 0| = |x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$. ■

Proposición 2.6. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$$

Proof.

Supongamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $|x_n - a| < \varepsilon \; \forall n \geq n_0$. Tenemos que ver que $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| < \varepsilon \; \forall n \geq n_0$, con lo que se tendría el resultado. Usando las propiedades del valor absoluto vistas en el tema anterior,

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \leq |x_n - a| + |a| \Rightarrow |x_n| - |a| \leq |x_n - a| \,.$$

Análogamente, $|a| - |x_n| \leq |a - x_n| = |-(x_n - a)| = |x_n - a|$.
Por tanto, $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$ y $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$. ■

Proposición 2.7 — Regla del sandwich. Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ tales que $x_n \leq z_n \leq y_n \; \forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$. Entonces, $\lim_{n\to\infty} z_n = a$.

Proof.

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon \; \forall n \geq n_1$ y $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n - a| < \varepsilon \; \forall n \geq n_2$. Definimos $n_0 = max\{n_1, n_2\}$. Entonces $|x_n - a| \;\; \forall n \geq n_0$ y $|y_n - a| \;\; \forall n \geq n_0$. Como $x_n \leq z_n \leq y_n$,

$$a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon \; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow z_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \; \forall n \geq n_0 \Rightarrow |z_n - a| \leq \varepsilon$$

y se tiene que $\lim_{n\to\infty} z_n = a$. ■

§2.4 Sucesiones de Cauchy

Definición 2.7 — Sucesión de Cauchy. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. Diremos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy si dada $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ con $|x_n - x_m| < \varepsilon \; \forall n, m \geq n_0$.

Proposición 2.8. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Entonces

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ es una sucesion de Cauchy} \Rightarrow (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ acotada}$$

Proof.

Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy. Entonces, para $\varepsilon = 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < 1 \ \forall n, m \geq n_0$. En particular, $|x_n - x_{n_0}| < 1 \ \forall n \geq n_0$. Aplicando la desigualdad triangular para $n \geq n_0$,

$$|x_n| = |x_n - x_{n_0} + x_{n_0}| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}|\,.$$

Definimos $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0} - 1|, 1 + |x_{n_0}|\}$. Entonces, claramente $|x_n| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ está acotada. ■

Teorema 2.5. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. Entonces

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ es convergente} \Leftrightarrow (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ es una sucesion de Cauchy}$$

Proof.

$\Rightarrow$ Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n \geq n_0$. Por otro lado,

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ \forall n, m \geq n_0$$

Luego $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy.

$\Leftarrow$ Sea $\varepsilon > 0$. Sea $n_1 \in \mathbb{N}$ con $|x_n - x_m| < \varepsilon \ \forall n, m \geq n_1$.

Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesion de Cauchy aplicando 2.8 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada y, por lo tanto, contiene una subsucesion convergente a un numero real a $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a)$.

Sea $n_{k_0} \in \mathbb{N}$ con $|x_{n_k} - a| < \varepsilon \ \forall n_k \geq n_{k_0}$, $n_k \geq n_{k_0} \geq n_0$.

$|x_n - a| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < 2\varepsilon \ \forall n \geq n_0$. (incompleto)

■

Observación 2.2. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Entonces

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ es una sucesion de Cauchy} \Rightarrow \text{Dada } \varepsilon > 0 \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ con } |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$$

Proposición 2.9. Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = b$. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \max\{x_n, y_n\} = \max\{a, b\}$$

Proof.

$$a \vee b = a + b - |a-b| \ \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$x_n \vee y_n = \underbrace{x_n(\to a) + y_n(\to b) - \underbrace{|x_n - y_n|}_{\to|a-b|}}_{a+b-|a-b|=a\vee b}$$

■

§2.5 Otros criterios de convergencia

§2.5.1 Criterio de Stolz

Proposición 2.10. Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} x_n = a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} \\ y_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} y_i = \lim_{n\to\infty} (y_1 + y_2 + \cdots + y_n) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n} = a$$

Proposición 2.11 — Criterio de la media aritmetica. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a$$

Proof.

Basta con tomar $y_n = 1, n \in \mathbb{N}$, y utilizar el resultado anterior. ■

Teorema 2.6 — Criterio de Stolz. Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. Si se cumple:

- (y_n) es estrictamente creciente, $\lim y_n = +\infty$ y $y_n > 0$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \in \overline{\mathbb{R}}$

entonces también sucede que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = a$.

Proof.

Dadas las sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, consideramos las sucesiones $\{X_n\}$ e $\{Y_n\}$ definidas por

$$X_n = \begin{cases} \dfrac{x_1}{y_1} \text{ para } n = 1 \\ \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \text{ si } n \geq 2 \end{cases}$$

$$Y_n = \begin{cases} y_1 \text{ para } n = 1 \\ y_n - y_{n-1} \text{ si } n \geq 2 \end{cases}$$

En primer lugar, es evidente que $\lim\limits_{n\to\infty} \{X_n\} = \lim\limits_{n\to\infty} \{\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\} = a$. Por otra parte, como $\{y_n\}$ es estrictamente creciente, $\forall n \geq 2$ $Y_n > 0$, y como $\lim\limits_{n\to\infty} \{y_n\} = +\infty$, se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n\} = \lim_{n\to\infty} \{y_1 + (y_2 - y_1) + \cdots + (y_n - y_{n-1})\} = \lim_{n\to\infty} \{y_n\} = +\infty$$

En consecuencia, estamos bajo las hipotesis de la proposición 2.10 y

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{X_1Y_1 + X_2Y_2 + \cdots + X_nY_n}{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x_1 - 0}{y_1 - 0}(y_1 - 0) + \cdots + \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}(y_n - y_{n-1})}{(y_1 - 0) + (y_2 - y_1) + \cdots + (y_n - y_{n-1})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$$

■

3 Series

§3.1 Series de números reales

Definición 3.1 — Serie. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$.
Sea $X_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, la suma parcial n-ésima con $n \in \mathbb{N}$.
La sucesión $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ de sumas parciales recibe el nombre de serie asociada a la sucesion $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, y si $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ converge, a dicho limite se le denota por $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y se dice que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es sumable.
Si $\lim_{n\to\infty} X_n = \pm\infty$, se dice que la serie diverge a $\pm\infty$. También se denota $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \pm\infty$.
En otro caso, se dice que la serie ni converge ni diverge.

Observación 3.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_n$$

Ejemplo 3.1.

1. Si $x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$.

   $X_1 = x_1 = -1$

   $X_2 = x_1 + x_2 = (-1) + 1 = 0$

   $X_3 = x_1 + x_2 + x_3 = -1$

   ...

   La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ no converge ni diverge.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$

   $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$

   $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} = (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots = 1 - \frac{1}{n+1} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

3. Series telescopicas: $\sum_{n=1}^{\infty} (y_n - y_{n+1})$

$$Y_n = (y_1 - y_2) + (y_2 - y_3) + (y_3 - y_4) + \cdots + (y_{n+1} - y_n) + (y_n + y_{n+1}) = y_1 - y_{n+1}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}(y_n - y_{n+1})$ converge $\Leftrightarrow$ $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ converge.

Además, en este caso, $\sum_{n=1}^{\infty}(y_n - y_{n+1}) = 1 - \lim_{n\to\infty} y_n$.

Observación 3.2.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \text{ si } \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n \text{ convergen o } \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \pm\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a \cdot x_n) = a \cdot \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ si } \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ converge } \forall a \in \mathbb{R} \text{ o } \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \pm\infty \text{ con } a \neq 0$$

Proposición 3.1. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ converge } \Leftrightarrow \text{ Dado } \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid |x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_n| < \varepsilon \; \forall n \geq m \geq n_0$$

Proof.
$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge $\Leftrightarrow$ existe $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$ $\Leftrightarrow$ $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ converge $\Leftrightarrow$ $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $|X_n - X_m| < \varepsilon \; \forall n, m \geq n_0$. Pero tenemos que

$$\begin{aligned} |X_n - X_m| &= |(x_1 + x_2 + \cdots + x_m + x_{m+1} + \cdots + x_n) - (x_1 + x_2 + \cdots + x_m)| \\ &= |x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_n| . \end{aligned}$$

Luego $\left|\sum_{i=m}^{n} x_i\right| = |x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_n| < \varepsilon \; \forall n \geq m \geq n_0$. ■

Ejemplo 3.2. Serie geometrica de primer termino a y razón r.
$x_1 = a$, $x_2 = r \cdot a$, $x_3 = r \cdot x_2 = r \cdot r \cdot a$, ... Se tiene $x_n = a \cdot r^{n-1}$.
$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1}$ converge si $|r| < 1$ y ademas $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1} = a \cdot \dfrac{1}{1-r} = \dfrac{a}{1-r}$.

Proposición 3.2. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ converge } \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Proof.

Basta considerar $n = m$ en el criterio de Cauchy: *si*$\varepsilon > 0$ podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que si $n \geq n_0$, entonces $|x_n| < \varepsilon$, y esto es lo mismo que decir que $x_n = 0$. ■

Proposición 3.3. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ con $x_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ converge} \Leftrightarrow (\sum_{k=1}^{n} x_k)_{n=1}^{\infty} \text{ esta acotada.}$$

Proof.

Como $x_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que la serie es una sucesión monótona creciente ya que $X_1 \leq X_2 \leq \cdots$.
Sabemos por el tema anterior que toda sucesión monótona es convergente si y sólo si está acotada. Luego es suficiente con aplicar este teorema para llegar al resultado. ■

Proposición 3.4. Las series del tipo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ divergen cuando $\alpha \in (-\infty, 1]$ y convergen si $\alpha > 1$.

§3.2 Criterios de comparación

Teorema 3.1 — Primer criterio de comparacion. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ tales que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se verifica que $x_n \leq y_n$. Entonces:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \infty \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty \end{cases}$$

Proof.

Basta tener en cuenta que $\forall n \geq n_0$ se verifica que $x_{n_0} + x_{n_0+1} + \cdots + x_n \leq y_{n_0} + y_{n_0+1} + \cdots + y_n$ y aplicar la proposición 3.4, ya que si la sucesión de las sumas parciales $\{Y_n\}$ está acotada superiormente, tambien lo estará $\{X_n\}$ y, por lo mismo, si la sucesión $\{X_n\}$ no está acotada superiormente, tampoco lo estará $\{Y_n\}$. ■

Ejemplo 3.3.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n}$.

  Tenemos que $5n > 0 \Rightarrow n^2+5n > n^2 \Rightarrow \dfrac{1}{n^2+5n} < \dfrac{1}{n^2}$.

  Ademas, como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, obtenemos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n} < \infty$.

- $\displaystyle\sum_{n=n}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

  $1! = 1, 2! = 2, 3! = 3 \cdot 2 \geq 2 \cdot 2 = 2^2, 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \geq 2^3 \dots$

  Por tanto, tenemos que $n! \geq 2^{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

  Ademas, como$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, tenemos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} < \infty$ y converge.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+\sin^2(n^3+1)}{2^n+n^2}$.

  $4+\sin^2(n^3+1) \leq 5$ y $2^n+n^2 \geq n^2 \Rightarrow \dfrac{1}{2^n+n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$.

  Por tanto, $\dfrac{1+\sin^2(n^3+1)}{2^n+n^2} \leq \dfrac{5}{n^2}$.

  $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^2} = 5\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.

  Luego la serie converge.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{2+n^3}$ Como $\dfrac{7}{2+n^3} > 0$ con:

  $2+n^3 \geq n^3 \Rightarrow \dfrac{1}{2+n^3} \leq \dfrac{1}{n^3}$.

  $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{n^3} = 7 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty$

  La serie converge.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt[3]{2+n^5}} < \infty$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{4+n^3}}$

  $4+n^3 \geq n^3 \Rightarrow \sqrt[7]{4+n^3} \geq \sqrt[7]{n^3} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt[7]{4+n^3}} \leq \dfrac{1}{\sqrt[7]{n^3}} = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{7}}}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{7}}} = \infty$. No sirve.

  Hay que buscar otra alternativa.

Como $\forall n \geq 2$ $4+n^3 \geq 2n^3 \Rightarrow \sqrt[7]{4+n^3} \geq \sqrt[7]{2n^3} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt[7]{4+n^3}} \leq \dfrac{1}{\sqrt[7]{n^3}} = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{7}}}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{7}}} = \infty$ se tiene que la serie diverge a $+\infty$.

Teorema 3.2 — Segundo criterio de comparacion. Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$. Entonces:

1. Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \alpha \neq 0$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge si y solo si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge.
2. Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$ y la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.
3. Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$ y la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ diverge, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge.

Proof.

1. Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \alpha > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se verifica que

$$\alpha - \frac{\alpha}{2} \leq \frac{x_n}{y_n} \leq \alpha + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} y_n \leq x_n \leq \frac{3\alpha}{2} y_n,$$

por lo que, teniendo en cuenta el primer criterio de comparación, teniendo en cuenta que las tres series tienen el mismo carácter, el resultado está demostrado.

2. Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se verifica que $\dfrac{x_n}{y_n} \leq 1$, es decir, $\forall n \geq n_0$, $x_n \leq y_n$, con lo que basta con aplicar el primer criterio de comparación para concluir el resultado.

3. Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$, dado cualquier $M \in R^+$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se verifica que $M \leq \dfrac{x_n}{y_n}$, es decir, $My_n \leq x_n$, con lo que la demostración concluye aplicando el primer criterio de comparación a las series $\sum My_n = M\sum y_n$ y $\sum x_n$.

■

Ejemplo 3.4.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$

$$\frac{\frac{1}{n+\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+\sqrt{n}} = \frac{1}{1+\frac{\sqrt{n}}{n}} = \frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{n}}} \xrightarrow{n\to\infty} 1(\neq 0) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}} = +\infty$$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{4^n+3}$

$$\frac{\frac{5}{4^n+3}}{4^n-3} = \frac{5}{1-\frac{3}{4^n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 5(\neq 0).$$

Por otro lado, como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n < 0$ por ser una serie geometrica de razon $\displaystyle\frac{1}{4} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{4^n-3} < \infty$

§3.3 Criterios de la raíz y del cociente

Teorema 3.3 — Criterio de la raíz. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset [0,\infty)$ tal que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = r \in [0,\infty)$. Entonces:

- Si $r < 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty$
- Si $r > 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n = +\infty$

Proof.

1. Si $r < 1$, sea $y \in R^+$ tal que $r < y < 1$. Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = r$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se verifica que $\sqrt[n]{x_n} < y$, es decir, $\forall n \geq n_0, x_n < y^n$ y puesto que la serie geométrica $\sum y^n$ es convergente por ser de razón $0 < y < 1$, la serie $\sum x_n$ es convergente por el primer criterio de comparación.
2. Si $r > 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ $x_n > 1$, con lo que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$ y, por consiguiente, la serie $\sum x_n$ no es convergente.

■

Teorema 3.4 — Criterio del cociente. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset (0,\infty)$ con $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = r \in [0,\infty)$. Entonces:

- Si $r > 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty$
- Si $r > 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \infty$

Proof.

1. Si $r < 1$, sea $y \in \mathbb{R}^+$ tal que $r < y < 1$. Como $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = r$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se verifica que $\frac{x_{n+1}}{x_n} < y$, es decir, $\forall n \geq n_0 x_{n+1} < x_n y$ por lo que, obviamente, $x_{n+2} < x_{n+1} y < x_n y^2$ y $\forall k \in \mathbb{N}$ $x_{n+k} < x_n y^k$. Así pues, escribiendo $\forall n \geq n_0$, $n = n_0 + k$, resultará que $x_n \leq x_{n_0} y^{n-n_0}$ y, siendo $M = x_{n_0} y^{-n_0}$, resulta que $\forall n \geq n_0$ $x_n < My^n$. La convergencia de la serie $\sum x_n$ se sigue del primer criterio de comparación, puesto que $\sum y^n$ es convergente por ser una serie geométrica de razón $|y| < 1$.
2. Si $r > 1$, consideramos $y \in \mathbb{R}^+$ tal que $1 < y < r$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se verifica que $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq y \geq 1$, con lo que $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$ y, por tanto, la serie $\sum x_n$ no converge.

■

§3.4 Convergencia de series generales

Definición 3.2. Dada $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ diremos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es absolutamente convergente si $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ converge.

Proposición 3.5. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. Se cumple que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ es absolutamente convergente} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ es convergente}$$

Proof.

No vista en clase, aplicando desigualdad triangular. ■

Definición 3.3. Dada $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, diremos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es condicionalmente convergente si es convergente y no es absolutamente convergente.

Teorema 3.5 — Criterio de Leibniz. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ una sucesion de numeros reales decreciente de manera que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot x_n$ (que podemos visualizar como $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots$) es convergente.

Proof.

No vista en clase. ■

Ejemplo 3.5. La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots$ es convergente pero no absolutamente convergente. Luego es condicionalmente convergente.
$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \sin(n)$ no converge.
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 5}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5}{n}$. Como $\frac{5}{n}$ es monotona decreciente y tiende hacia 0, aplicando el criterio de Leibniz, la serie converge.
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{n-2}}{2^n}$.
$\frac{3^{n-2}}{2^n} = \frac{\frac{3^n}{3^2}}{\frac{2^n}{1}} = \frac{3^n}{3^2 \cdot 3^n} = \frac{1}{9} \cdot (\frac{3}{2})^n \to \infty$ (serie geometrica). Resulta que como no existe $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{2^n}$ la serie del enunciado no converge.

,