

Informe Tarea 1

Probabilidad con distribución χ^2

Nombre: Diego Román
RUT: 20.299.495-4
Github: [@DiegoRomanCortes](#)
Profesor: Valentino González
Auxiliares: Vicente Donaire
Benjamín Navarrete
Fecha de entrega: 26 de septiembre

1. Introducción

El problema a resolver es encontrar numéricamente el valor de a para la siguiente ecuación:

$$0.95 = \mathbb{P}(x < a) = \int_0^a \chi^2(x) dx$$

Donde la distribución $\chi^2(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2}$, y $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$.

Se comenzará con la implementación de la función $\Gamma(z)$. Para su implementación en código se regularizará la integral por medio de un cambio de variable apropiado. La integración se hará usando el método de Simpson, teniendo como parámetro la convergencia relativa deseada. Debido a la singularidad, la integración irá acompañada por el método del punto medio para obtener una aproximación de la integral en valores cercanos a $x = 0$.

Luego, usando el mismo método de Simpson se calcularán valores de $\mathbb{P}(x < a)$ para $0.1 < a < 20$, que irán acercándose a $\mathbb{P}(x < a) = 0.95$ con la tolerancia absoluta que se requiera gracias al método de la bisección.

2. Desarrollo

El integrando original describe un área que se puede apreciar en la figura 1a Tomando $u = e^{-x}$ la integral queda:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx = \int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{u}\right) \right)^{z-1} du$$

La integración numérica de $\Gamma(z)$ requirió del uso del método del punto medio para el caso de la singularidad en $z = 0$ que se puede apreciar en la figura 1b, donde se calculó la integral entre 0 y un $\Delta x > 0$ (que se presentará más adelante) como $I_0 = f\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x$.

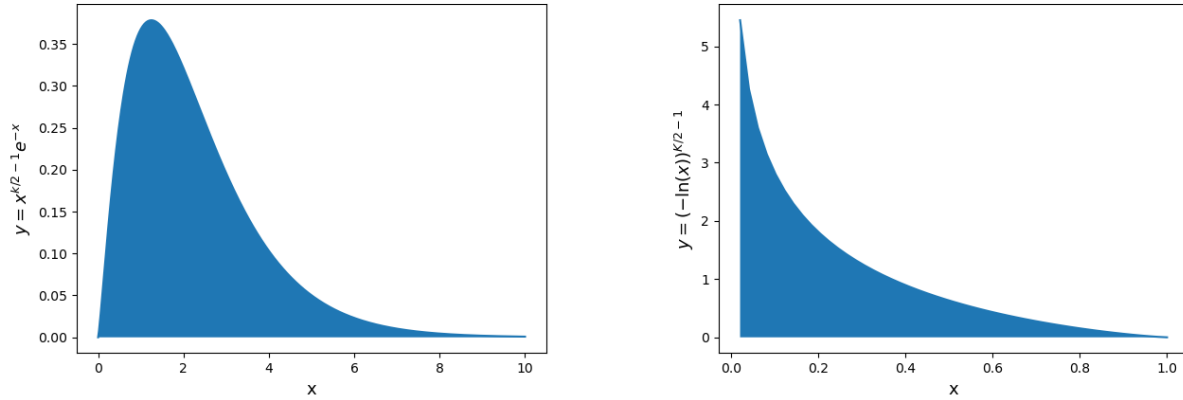
Desde $z = \Delta x$ hasta $z = 1$ se usó Simpson vía método de los trapecios. Se calculó $S_{2N} = \frac{1}{3}(4T_{2N} - T_N)$, donde S_{2N} es la integral usando Simpson, mientras que T_N, T_{2N} son las integrales usando trapecios.

Las integrales usando método de trapecios se calculan como $T_N = \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_0 + i\Delta x) \right) \Delta x$, con $\Delta x = \frac{b-a}{N}$.

Se ha definido un parámetro llamado **tol_rel** que permite determinar el cumplimiento de la siguiente desigualdad:

$$\left| \frac{S_{2N} - T_N}{T_N} \right| > \mathbf{tol_rel} \quad (1)$$

En caso contrario, no será necesario volver a llamar recursivamente la función considerando el doble de puntos. Se determinó el valor a usar de la tolerancia relativa gracias a la figura 3. Se usaron valores conocidos de $\Gamma(z)$ (si $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$) cercanos a $k/2$, para posteriormente calcular el error asociado a la tolerancia otorgada y luego promediarlo para distintos valores.



(a) Área bajo la curva $y = x^{k/2-1}e^{-x}$ entre $x = 0$ y $x = \infty$, cuyo valor es equivalente a calcular $\Gamma(k/2)$, con $k = 4.495$.
 (b) Área bajo la curva $y = (-\ln(x))^{k/2-1}$ entre $x = 0$ y $x = 1$, cuyo valor es equivalente a calcular $\Gamma(k/2)$, con $k = 4.495$.

Figura 1: Área bajo los integrandos.

El error cuadrático medio se calculó como

$$\langle e \rangle_{2N} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 |S_{2N}(i) - (i-1)!| \quad (2)$$

y se aprecia su valor para distintas tolerancias relativas en la figura 3.

La función $\chi^2(x)$ tiene su dominio en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, por lo que para el cálculo de $\mathbb{P}(x < a)$ no se requirió un cambio de variables que solucionara el problema del extremo inferior $x = -\infty$ (se calcula desde $x = 0$).

Finalmente para encontrar el valor de a se ha usado el método de la bisección. Se definió en el código la función **prob_menos_95** para que el problema final sea calcular el cero de la función $f(a) = \int_0^a \chi^2(x)dx - 0.95$.

El método de la bisección toma dos puntos x_1 y x_2 tales que $f(x_1)f(x_2) < 0$. Se escoge $p = \frac{x_1+x_2}{2}$ para luego determinar a qué lado del cero está $f(p)$. Este proceso se itera tantas veces como precisión se quiera. El error asociado se grafica en la figura 4.

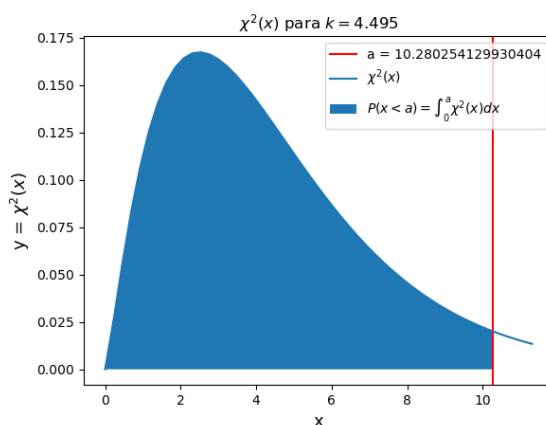


Figura 2: Área bajo la curva $y = \chi^2(x)$ desde $x = 0$ hasta el valor encontrado $x = a$.

Se usó también el método de Newton-Rhapson, consistente en iterar $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$. La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = \chi^2(x)$ por teorema fundamental del cálculo.

3. Resultados

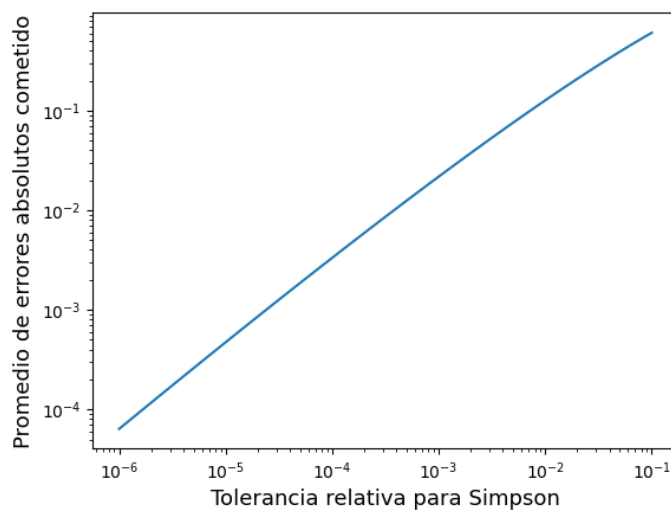


Figura 3: Error absoluto promedio en función de la tolerancia relativa otorgada como parámetro al método de Simpson para la función $\Gamma(z)$.

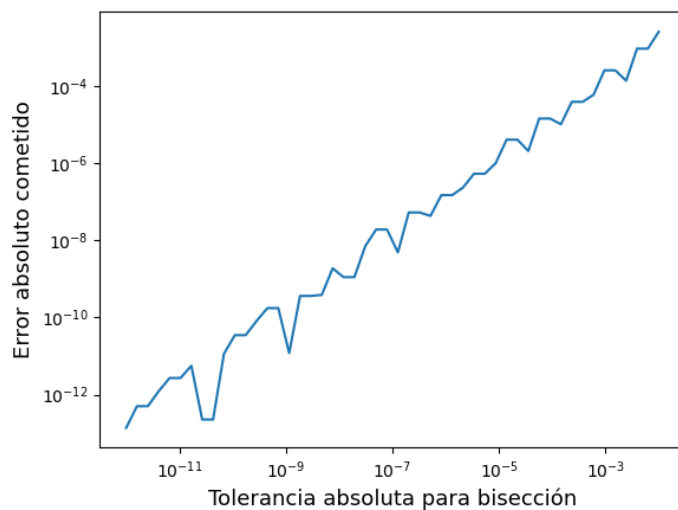


Figura 4: Error absoluto en función de la tolerancia absoluta otorgada como parámetro al método de la bisección para $f(a) = \int_0^a \chi^2(x)dx - 0.95$.

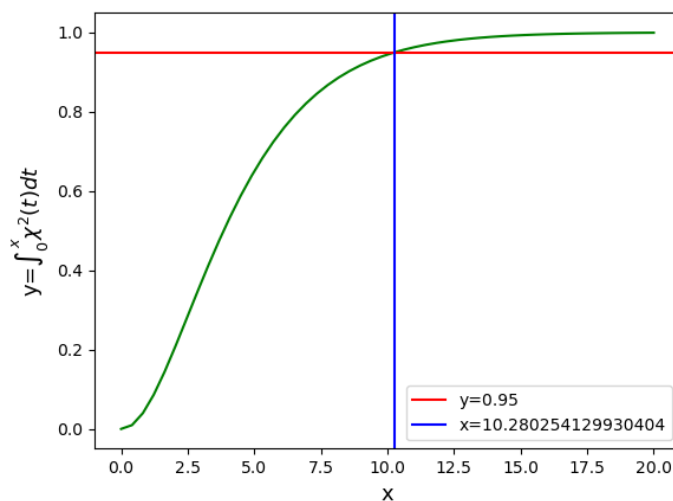


Figura 5: Valor de a encontrado con el método de la bisección.

4. Discusión y Conclusiones

Visualmente, la resolución del problema consistía en encontrar el a que hiciera el área azul bajo la curva $y = \chi^2(x)$ igual a 0.95, cuestión ilustrada en la figura 2.