Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física

Informe Tarea 1

Probabilidad con distribución χ^2

Nombre:	Diego Román
RUT:	20.299.495-4
Profesor:	Valentino González
Auxiliares:	Vicente Donaire
	Benjamín Navarrete

Fecha de entrega: 26 de septiembre

El problema a resolver es encontrar numéricamente el valor de a para la siguiente ecuación:

$$0.95 = \mathbb{P}(x < a) = \int_{-\infty}^{a} pdf(x)dx$$

La función $pdf(x)$ es, en este caso, la distribución $\chi^2(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2}$, donde $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx$.

La implementación de la función $\Gamma(z)$ en el código posee el problema del límite de integración superior infinito. Para solucionarlo, se debe realizar un cambio de variables apropiado. Tomando $u = e^{-x}$ ($du = -e^{-x}dx$) la integral queda:

$$\int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx = \int_1^0 -(-\ln(u))^{z-1}du = \int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{z-1} du$$

La integración numérica de $\Gamma(z)$ requirió del uso del método del punto medio para el caso de la singularidad en $z = 0$, mientras que desde un $\Delta x = 1 \times 10^{-6}$ hasta $z = 1$ se usó Simpson 1/3.

Se determinó el valor a usar de la tolerancia relativa gracias a la figura 1. Se aprecia una línea casi recta para un espacio logarítmico (log-log). El promedio se calculó tomando la media aritmética del valor absoluto de la diferencia entre el valor real de $\Gamma(z)$ y la aproximación numérica para $z \in \{1, 2, 3, 4\}$.

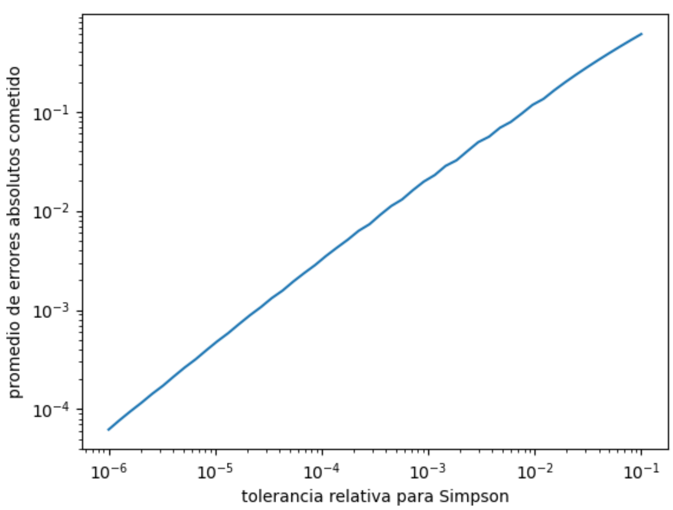

Figura 1: Error absoluto promedio en función de la tolerancia relativa otorgada como parámetro al método de Simpson.

La función $\chi^2(x)$ tiene su dominio en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, por lo que para el cálculo de $\mathbb{P}(x < a)$ no se requirió un cambio de variables que solucionara el problema del extremo inferior $x = -\infty$ (se calcula desde $x = 0$).

Finalmente para encontrar el valor de a se ha usado el método de la bisección otorgándole un parámetro de tolerancia absoluta de 1×10^{-12}. Este último se obtuvo gracia a la figura 2, que indica una mejora de precisión a menor valor de tolerancia.

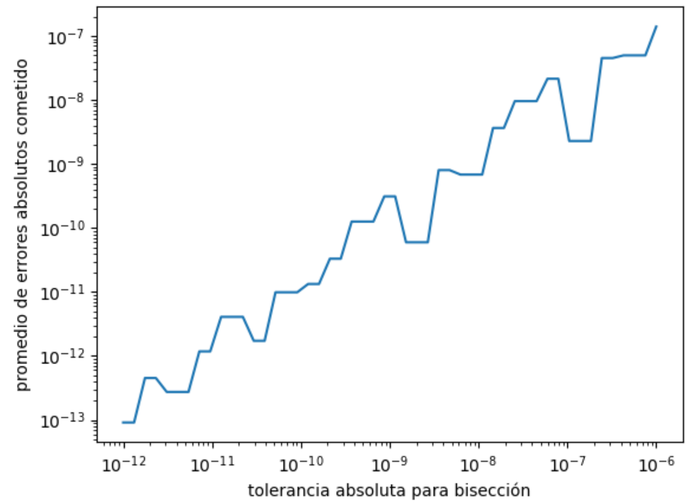

Figura 2: Error absoluto para distintas tolerancias absolutas.

Visualmente, la resolución del problema consistía en encontrar el a que hiciera el área azul bajo la curva $y = \chi^2(x)$ igual a 0.95, cuestión ilustrada en la figura 3

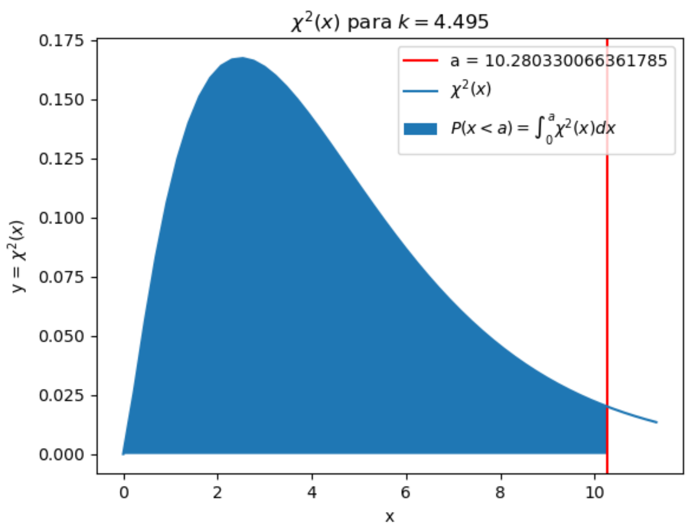

Figura 3: Área bajo la curva $y = \chi^2(x)$ desde $x = 0$ hasta el valor encontrado $x = a$.