

Redes multiorbitales basadas en moléculas fotónicas

Diego Antonio Román Cortés

Profesor Guía: Rodrigo Andrés Vicencio Poblete

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

1. Contexto del proyecto (introducción y descripción del estado del arte)

Entre los premios Nobel de la última década [1] se encuentran varios que están estrechamente ligados a la óptica: por la generación de pulsos de luz ultra cortos (femtosegundos [2] y luego attosegundos [3–5]), por experimentos con fotones entrelazados [6–8], por la ideación de pinzas ópticas [9] y por la invención de luces LED [10–12]. El estudio del comportamiento de la luz en diversos contextos ha permitido el posterior desarrollo tecnológico con aplicaciones industriales, en medicina, en comunicaciones e incluso militares. Una aplicación cotidiana es la fibra óptica, que actúa como una guía de onda para la luz y actualmente es el principal medio de transmisión de Internet en el mundo [13, 14].

Numerosos de estos avances se han visto propiciados por la técnica de escritura de guías de onda por láser de femtosegundos, la cual ha permitido la fabricación de redes fotónicas de variada índole [15–23]. Su importancia radica no sólo en emular situaciones de la física del sólido tales como oscilaciones de Bloch [24], localización de Anderson [25], estados de banda plana [17–20] o topología de Floquet [26, 27], sino que también en el estudio de fenómenos ópticos incluyendo no-linealidad tipo Kerr y su uso en la formación de solitones [28], la posible propagación luz cuántica [29–31] o su compatibilidad con la transmisión de información en la industria de las telecomunicaciones [32].

El enfoque de este proyecto será el estudio de redes fotónicas multiorbitales. Por ello será crucial incorporar la técnica de acoplamiento interorbital que consiste en sintonizar las constantes de propagación de el modo fundamental de una guía monomodal (S) con el primer modo guiado excitado de una guía dimodal (P) mediante la calibración adecuada de las potencias de escritura, que inducen diferencias en los contrastes generados por la técnica de escritura por láser femtosegundos [33].

El llamado acoplamiento SP ha permitido el estudio de redes que presentan flujo magnético efectivo $\Phi = \pi$, el cual permite el transporte controlado de la luz [34, 35]. Una aplicación directa de este fenómeno es la generación de guías de onda que admitan modos guiados de luz con momentum angular orbital (OAM) y la codificación de su carga topológica ℓ como medio para transmitir información [36, 37]. Se ha reportado a la fecha sólo la propagación de OAM mediante de redes fotónicas que presevan simetría C_3 [38, 39]. Sin embargo, el acoplamiento entre modos OAM en una red fotónica permitiría la generación de flujos magnéticos distintos de 0 o π , lo que se reflejaría en una direccionalidad dependiente de la circulación propagante [40, 41]. Para ello será necesario introducir el concepto de “moléculas fotónicas” [42] y su aplicación en la generación de redes fotónicas [43].

2. Objetivos de la tesis

1. Explorar la utilización de moléculas fotónicas como base para fabricar y estudiar redes interorbitales.
2. Entender el comportamiento de los modos guiados en moléculas fotónicas y su interacción en el régimen de acoplamiento débil.

3. Metodología

Desde las ecuaciones de Maxwell en un medio dieléctrico no magnético sin cargas ni corrientes libres es posible escribir la siguiente ecuación para la envolvente lenta del campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}}$.

$$(\nabla - i\mathbf{k}_1) \times ((\nabla - i\mathbf{k}_1) \times \mathbf{E}_1) = k^2 \mathbf{E}_1, \quad (1)$$

con $k \equiv k_0 n(x, y, z)$. La ecuación (1) se puede resolver vía el software comercial COMSOL *Multiphysics* mediante elementos finitos, y que será una de las herramientas de esta tesis. Por otro lado, utilizando la aproximación paraxial escogiendo el eje z como dirección de propagación y seleccionando la polarización horizontal del campo, es posible simplificar la ecuación (1) y llegar a la formulación de un método numérico escalar conocido como *Beam Propagation Method*, utilizado ampliamente en el área [16, 33, 34, 39, 44].

$$-2i\beta \frac{\partial}{\partial z} \psi(x, y, z) = (\nabla_{\perp}^2 + n_0^2 k_0^2 - \beta^2) \psi(x, y, z). \quad (2)$$

Aplicando teoría acoplada de modos [45] a la ecuación (2), con el objetivo describir de forma discreta una red fotónica, es posible derivar las llamadas ecuaciones discretas tipo Schrödinger [19, 20, 28]

$$-i \frac{\partial u_{\vec{n}}}{\partial z} = \beta_{\vec{n}} u_{\vec{n}} + \sum_{\vec{m} \neq \vec{n}} C_{\vec{n}, \vec{m}} u_{\vec{m}}, \quad (3)$$

con $u_{\vec{n}}$, $\beta_{\vec{n}}$ y $C_{\vec{n}, \vec{m}}$ la envolvente normalizada del campo eléctrico, la constante de propagación normalizada y las constantes de acoplamiento entre los modos de las guías en las posiciones de la red \vec{n} y \vec{m} , respectivamente.

Para la fabricación de guías de onda se utiliza un láser femtosegundo pulsado de 1030 nm enfocado en un vidrio de borosilicato en movimiento gracias a una plataforma XYZ motorizada, como se ilustra en la Figura 1 a):

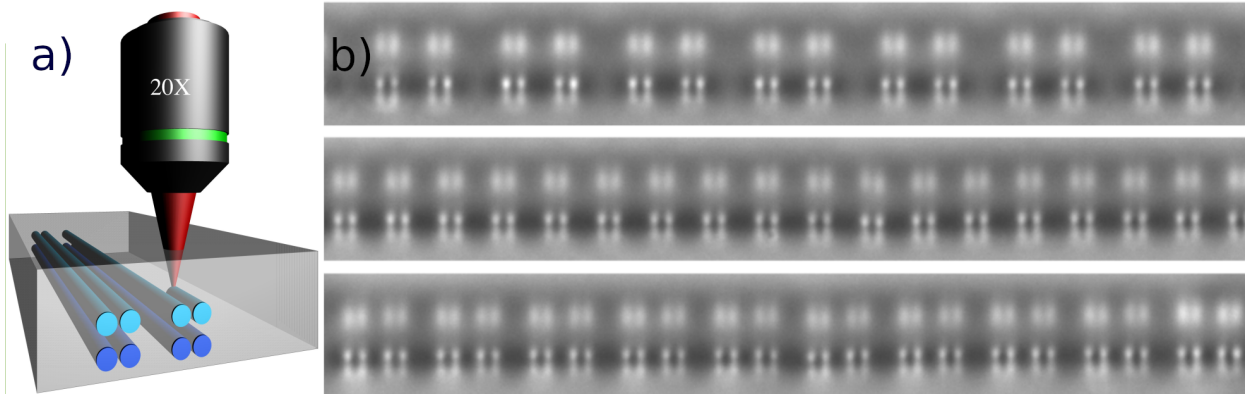


Figura 1: a) Montaje de fabricación de guías de onda mediante el enfoque de láser femtosegundo. b) Imagen microscópica de la cara salida iluminada con luz blanca de una red multiorbital con moléculas fotónicas.

La excitación de redes fotónicas interorbitales hace necesario el uso de condiciones iniciales no triviales. Para ello el estudiante implementó, bajo la supervisión de un posdoctorado, una técnica de modulación espacial de luz que permite modular tanto la amplitud como la fase de la luz proveniente de un láser de 730nm, cuya implementación se ilustra en la Figura 2.

Esto se logra mediante un $\lambda/2$ para que la polarización coincida con la respuesta del Cristal Líquido (PLUTO-NIR: SLM - Reflective LCOS). Se utiliza un lente objetivo 20x seguido de un lente de 150 mm para ensanchar y colimar el haz. La modulación es controlada por el software HOLOEYE, que recibe imágenes en blanco y negro que codifican la intensidad de voltaje aplicado. Como un PLUTO-NIR sólo es capaz de modular la fase, se utiliza primero un holograma de gradiente de fase (*blaze grating*) al que se le aplica una máscara de intensidad y finalmente se agrega la fase deseada, técnica conocida *Phase Imprinting Technique* [46]. Para acoplar la modulación con los modos micrométricos de las guías de onda, es necesario usar dos lentes de 1000 mm y 50 mm que reduzcan el tamaño de la imagen. Dos lentes objetivos 4x se usan luego de un *Beam Splitter* (BS) una vez puesta la muestra calibrar los planos de imagen de 1) la cara de entrada de la muestra iluminada con luz blanca con 2) el holograma que se refleja desde la cara de entrada usando una cámara CCD. Finalmente, la luz propagada en la muestra es capturada por un lente objetivo 10x y enfocada en otra cámara CCD tipo *Beam Profiler*.

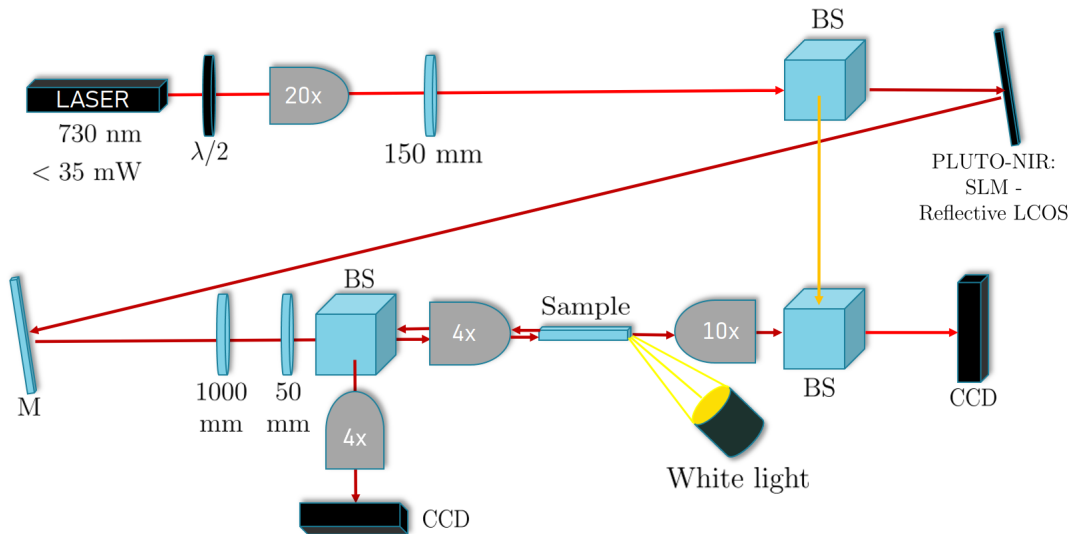


Figura 2: Montaje de excitación de guías de onda con condiciones iniciales moduladas en amplitud y fase.

En ocasiones resulta más apropiada la excitación de redes fotónicas variando la longitud de onda de la excitación [43, 47]. Para ello se utiliza el montaje ilustrado en la Figura 3 basado en un láser supercontinuo con un espectro de 400-2000 nm:

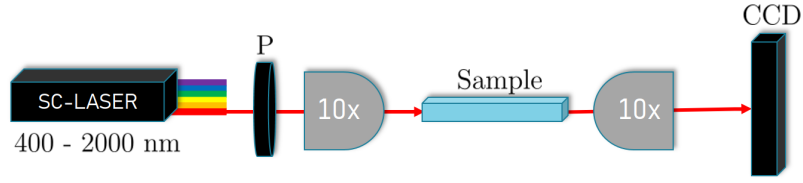


Figura 3: Montaje de excitación de guías de onda con distintas longitudes de onda.

4. Trabajo adelantado (si lo hubiera)

Durante el curso de Seminario de Investigación I (Primavera 2022) se hizo un barrido de parámetros de fabricación de guías de onda, en particular de potencia de escritura y separación entre guías, logrando la inversión de elipticidad, el sintonizado de las constantes de propagación del modo fundamental S de la molécula de excitación y el modo excitado P_x de la molécula de acoplamiento.

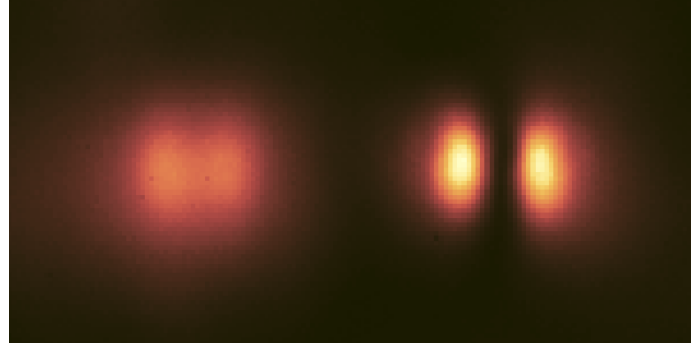


Figura 4: Interacción interorbital en moléculas fotónicas a $25 \mu\text{m}$ de separación y 13 mm de propagación. Se inyecta luz láser en la molécula S ubicada a la izquierda.

Esta sintonización permitió la fabricación de las redes SP-SSH mostradas en la Figura 1b) y estudiadas tanto teórica, numérica y analíticamente en las referencias [43, 48, 49].

Red 1D-SP

Durante el curso de Seminario de Investigación II (Otoño 2023) se implementó el montaje de modulación esquematizado en la Figura 2. Con ello fue posible la excitación precisa de un dipolo horizontal. Con ello se hizo un estudio del comportamiento del acoplamiento de modos P al variar el ángulo. En la Figura 5d) el acoplamiento dipolar se acerca a cero, lo que se acerca al valor de ángulo θ que hace nulo el término de interacción dipolar $\cos^2(\theta_{\text{magic}}) = \frac{1}{3}$.

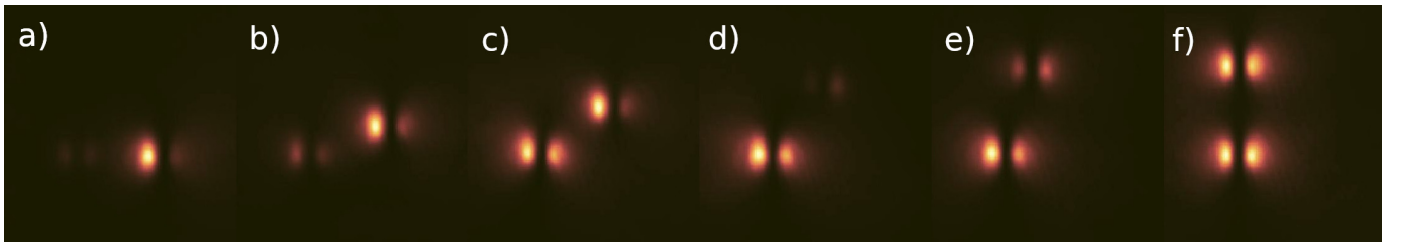


Figura 5: a)-f) Barrido en ángulo de dímeros dipolares a una distancia de separación de $25 \mu\text{m}$ propagando en una distancia de 25 mm en la dirección perpendicular al plano. La inyección se realiza en la molécula inferior izquierda con un modo Hermite-Gauss TEM_{10} .

Actualmente, se está trabajando en la excitación de un OAM con $\ell = \pm 1$ usando la técnica de modulación espacial de la Figura 2. Los resultados iniciales muestran que la excitación de vórtices requiere una elipticidad nula con un margen de error muy pequeño. En la Figura 6a) se demuestra la propagación de un modo Laguerre-Gauss con $\ell = +1$ a lo largo de una molécula fotónica de 9 sitios, distribuidos en forma de círculo. Para asegurar que la estructura de fase del OAM se mantiene es necesario realizar un interferograma Figura 6b) Se espera controlar la fabricación y excitación de guías vorticiales que nos permitan estudiar a continuación la inducción de flujos magnéticos no triviales en redes fotónicas.

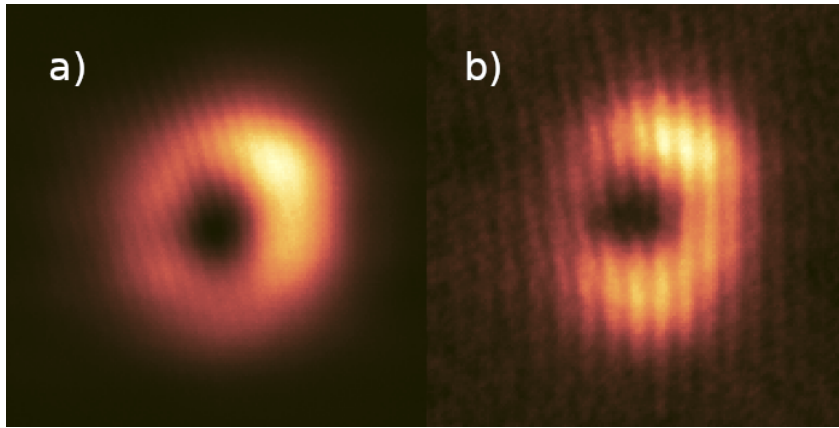


Figura 6: a) Intensidad de un OAM propagado en una molécula fotónica. b) Interferograma que captura el cambio de fase esperado.

5. Plan de trabajo o carta Gantt

Para la realización del trabajo de tesis se propone el siguiente plan de trabajo:

1. Estimación de parámetros del perfil de índice de refracción a partir de la excitación de dímeros homogéneos y comparación con simulaciones numéricas. Mes 1.
2. Fabricación y medición de dímeros vorticiales para caracterizar acoplamientos P simétricos y antisimétricos. Meses 2-3.
3. Simulación de redes con vórtices con efectos experimentales apreciables al cambiar el valor de la circulación ℓ . Meses 3-4.
4. Fabricación y medición de redes fotónicas con flujo no trivial mediante SLM y excitación por supercontinuo. Meses 5-8.
5. Escritura y defensa de Tesis. Meses 9-12.

Referencias

- [1] All nobel prizes in physics. URL <https://www.nobelprize.org/prizes/lists/all-nobel-prizes-in-physics/>.
- [2] P. Maine, D. Strickland, P. Bado, M. Pessot, and G. Mourou. Generation of ultrahigh peak power pulses by chirped pulse amplification. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 24(2):398–403, 1988. doi: 10.1109/3.137.
- [3] M. Lewenstein, Ph. Balcou, M. Yu. Ivanov, Anne L’Huillier, and P. B. Corkum. Theory of high-harmonic generation by low-frequency laser fields. *Phys. Rev. A*, 49:2117–2132, Mar 1994. doi: 10.1103/PhysRevA.49.2117. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.49.2117>.
- [4] P. M. Paul, E. S. Toma, P. Breger, G. Mullot, F. Augé, Ph. Balcou, H. G. Muller, and P. Agostini. Observation of a train of attosecond pulses from high harmonic generation. *Science*, 292(5522):1689–1692, 2001. doi: 10.1126/science.1059413. URL <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1059413>.
- [5] Thomas Brabec and Ferenc Krausz. Intense few-cycle laser fields: Frontiers of nonlinear optics. *Reviews of Modern Physics*, 72:545–591, 2000. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:120371634>.
- [6] J F Clauser and A Shimony. Bell’s theorem. experimental tests and implications. *Reports on Progress in Physics*, 41(12): 1881, dec 1978. doi: 10.1088/0034-4885/41/12/002. URL <https://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/41/12/002>.
- [7] Alain Aspect, Jean Dalibard, and Gérard Roger. Experimental test of bell’s inequalities using time-varying analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, 49:1804–1807, Dec 1982. doi: 10.1103/PhysRevLett.49.1804. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.49.1804>.
- [8] Paul G. Kwiat, Klaus Mattle, Harald Weinfurter, Anton Zeilinger, Alexander V. Sergienko, and Yanhua Shih. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 75:4337–4341, Dec 1995. doi: 10.1103/PhysRevLett.75.4337. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.4337>.
- [9] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, and T. Yamane. Optical trapping and manipulation of single cells using infrared laser beams. *Nature*, 330(6150):769–771, Dec 1987. ISSN 1476-4687. doi: 10.1038/330769a0. URL <https://doi.org/10.1038/330769a0>.

- [10] Isamu Akasaki. Gan-based p-n junction blue-light-emitting devices. *Proc. IEEE*, 101(10):2200–2210, 2013. doi: 10.1109/JPROC.2013.2274928. URL <https://doi.org/10.1109/JPROC.2013.2274928>.
- [11] Michael Kneissl, Tae-Yeon Seong, Jung Han, and Hiroshi Amano. The emergence and prospects of deep-ultraviolet light-emitting diode technologies. *Nature Photonics*, 13(4):233–244, Apr 2019. ISSN 1749-4893. doi: 10.1038/s41566-019-0359-9. URL <https://doi.org/10.1038/s41566-019-0359-9>.
- [12] Shuji Nakamura, Takashi Mukai, and Masayuki Senoh. Candela-class high-brightness InGaN/AlGaIn double-heterostructure blue-light-emitting diodes. *Applied Physics Letters*, 64(13):1687–1689, 03 1994. ISSN 0003-6951. doi: 10.1063/1.111832. URL <https://doi.org/10.1063/1.111832>.
- [13] Submarine cable frequently asked questions, . URL <https://www2.telegeography.com/submarine-cable-faqs-frequently-asked-questions>.
- [14] Hogares con acceso a internet fijo alcanzan el 67 % y usuarios aumentan preferencia por redes de alta velocidad, . URL <https://www.subtel.gob.cl/hogares-con-acceso-a-internet-fijo-alcanzan-el-67-y-usuarios-aumentan-preferencia-por-redes-de-alta-velocidad>.
- [15] Alexander Szameit, Dominik Blömer, Jonas Burghoff, Thomas Schreiber, Thomas Pertsch, Stefan Nolte, Andreas Tünnermann, and Falk Lederer. Discrete nonlinear localization in femtosecond laser written waveguides in fused silica. *Opt. Express*, 13(26):10552–10557, Dec 2005. doi: 10.1364/OPEX.13.010552. URL <https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-13-26-10552>.
- [16] Yonatan Plotnik, Or Peleg, Felix Dreisow, Matthias Heinrich, Stefan Nolte, Alexander Szameit, and Mordechai Segev. Experimental observation of optical bound states in the continuum. *Phys. Rev. Lett.*, 107:183901, Oct 2011. doi: 10.1103/PhysRevLett.107.183901. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.183901>.
- [17] Rodrigo A. Vicencio, Camilo Cantillano, Luis Morales-Inostroza, Bastián Real, Cristian Mejía-Cortés, Steffen Weimann, Alexander Szameit, and Mario I. Molina. Observation of localized states in lieb photonic lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 114:245503, Jun 2015. doi: 10.1103/PhysRevLett.114.245503. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.245503>.
- [18] Seabrata Mukherjee, Alexander Spracklen, Debaditya Choudhury, Nathan Goldman, Patrik Öhberg, Erika Andersson, and Robert R. Thomson. Observation of a localized flat-band state in a photonic lieb lattice. *Phys. Rev. Lett.*, 114:245504, Jun 2015. doi: 10.1103/PhysRevLett.114.245504. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.245504>.
- [19] Daniel Leykam, Alexei Andreanov, and Sergej Flach. Artificial flat band systems: from lattice models to experiments. *Advances in Physics: X*, 3(1):1473052, 2018. doi: 10.1080/23746149.2018.1473052. URL <https://doi.org/10.1080/23746149.2018.1473052>.
- [20] Rodrigo A. Vicencio. Photonic flat band dynamics. *Advances in Physics: X*, 6(1):1878057, 2021. doi: 10.1080/23746149.2021.1878057. URL <https://doi.org/10.1080/23746149.2021.1878057>.
- [21] Diego Román-Cortés, Guillermo Fadic, Christofer Cid-Lara, Diego Guzmán-Silva, Bastián Real, and Rodrigo A. Vicencio. Strain induced localization to delocalization transition on a lieb photonic ribbon lattice. *Scientific Reports*, 11(1):21411, Nov 2021. ISSN 2045-2322. doi: 10.1038/s41598-021-00967-3. URL <https://doi.org/10.1038/s41598-021-00967-3>.
- [22] Javier Cubillos Cornejo, Diego Guzmán-Silva, Víctor Hugo Cornejo, Ignacio Bordeu, and Rodrigo A. Vicencio. Transport and localization on dendrite-inspired flat band linear photonic lattices. *Scientific Reports*, 13(1):13057, Aug 2023. ISSN 2045-2322. doi: 10.1038/s41598-023-39985-8. URL <https://doi.org/10.1038/s41598-023-39985-8>.
- [23] Paloma Vildoso, Rodrigo A. Vicencio, and Jovana Petrovic. Ultra-low-loss broadband multiport optical splitters. *Opt. Express*, 31(8):12703–12716, Apr 2023. doi: 10.1364/OE.486855. URL <https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-31-8-12703>.
- [24] Zhaoyang Zhang, Shaohuan Ning, Hua Zhong, Milivoj R. Belić, Yiqi Zhang, Yuan Feng, Shun Liang, Yanpeng Zhang, and Min Xiao. Experimental demonstration of optical bloch oscillation in electromagnetically induced photonic lattices. *Fundamental Research*, 2(3):401–404, 2022. ISSN 2667-3258. doi: <https://doi.org/10.1016/j.fmre.2021.08.019>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2667325821001746>.
- [25] Tal Schwartz, Guy Bartal, Shmuel Fishman, and Mordechai Segev. Transport and anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices. *Nature*, 446(7131):52–55, Mar 2007. ISSN 1476-4687. doi: 10.1038/nature05623. URL <https://doi.org/10.1038/nature05623>.

- [26] Seabrata Mukherjee, Alexander Spracklen, Manuel Valiente, Erika Andersson, Patrik Öhberg, Nathan Goldman, and Robert R. Thomson. Experimental observation of anomalous topological edge modes in a slowly driven photonic lattice. *Nature Communications*, 8(1):13918, Jan 2017. ISSN 2041-1723. doi: 10.1038/ncomms13918. URL <https://doi.org/10.1038/ncomms13918>.
- [27] Lukas J. Maczewsky, Julia M. Zeuner, Stefan Nolte, and Alexander Szameit. Observation of photonic anomalous floquet topological insulators. *Nature Communications*, 8(1):13756, Jan 2017. ISSN 2041-1723. doi: 10.1038/ncomms13756. URL <https://doi.org/10.1038/ncomms13756>.
- [28] Falk Lederer, George I. Stegeman, Demetri N. Christodoulides, Gaetano Assanto, Moti Segev, and Yaron Silberberg. Discrete solitons in optics. *Physics Reports*, 463(1):1–126, 2008. ISSN 0370-1573. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2008.04.004>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157308001257>.
- [29] S. Rojas-Rojas, E. Barriga, C. Muñoz, P. Solano, and C. Hermann-Avigliano. Manipulation of multimode squeezing in a coupled waveguide array. *Phys. Rev. A*, 100:023841, Aug 2019. doi: 10.1103/PhysRevA.100.023841. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.100.023841>.
- [30] R. Julius, A. N. Alias, and M. S. A. Halim. Quantum squeezing in coupled waveguide networks with quadratic and cubic nonlinearity. *The European Physical Journal Plus*, 137(1):91, Jan 2022. ISSN 2190-5444. doi: 10.1140/epjp/s13360-021-02302-1. URL <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-02302-1>.
- [31] Joaquin Medina Dueñas, Gabriel O’Ryan Pérez, Carla Hermann-Avigliano, and Luis E. F. Foa Torres. Quadrature protection of squeezed states in a one-dimensional photonic topological insulator. *Quantum*, 5:526, August 2021. ISSN 2521-327X. doi: 10.22331/q-2021-08-17-526. URL <https://doi.org/10.22331/q-2021-08-17-526>.
- [32] Zhiwen Li, Siqi Hu, Qiao Zhang, Ruijuan Tian, Linpeng Gu, Yisong Zhu, Qingchen Yuan, Ruixuan Yi, Chen Li, Yan Liu, Yue Hao, Xuetao Gan, and Jianlin Zhao. Telecom-band waveguide-integrated mos2 photodetector assisted by hot electrons. *ACS Photonics*, 9(1):282–289, 2022. doi: 10.1021/acsp Photonics.1c01622. URL <https://doi.org/10.1021/acsp Photonics.1c01622>.
- [33] Diego Guzmán-Silva, Gabriel Cáceres-Aravena, and Rodrigo A. Vicencio. Experimental observation of interorbital coupling. *Phys. Rev. Lett.*, 127:066601, Aug 2021. doi: 10.1103/PhysRevLett.127.066601. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.127.066601>.
- [34] Christina Jörg, Gerard Queralto, Mark Kremer, Gerard Pelegrí, Julian Schulz, Alexander Szameit, Georg von Freymann, Jordi Mompart, and Verónica Ahufinger. Artificial gauge field switching using orbital angular momentum modes in optical waveguides. *Light: Science & Applications*, 9(1):150, Aug 2020. ISSN 2047-7538. doi: 10.1038/s41377-020-00385-6. URL <https://doi.org/10.1038/s41377-020-00385-6>.
- [35] Gabriel Cáceres-Aravena, Diego Guzmán-Silva, Ignacio Salinas, and Rodrigo A. Vicencio. Controlled transport based on multiorbital aharonov-bohm photonic caging. *Phys. Rev. Lett.*, 128:256602, Jun 2022. doi: 10.1103/PhysRevLett.128.256602. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.128.256602>.
- [36] Yudong Lian, Xuan Qi, Yuhe Wang, Zhenxu Bai, Yulei Wang, and Zhiwei Lu. Oam beam generation in space and its applications: A review. *Optics and Lasers in Engineering*, 151:106923, 2022. ISSN 0143-8166. doi: <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2021.106923>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0143816621003924>.
- [37] Jaime A. Anguita, Joaquín Herreros, and Ivan B. Djordjevic. Coherent multimode oam superpositions for multidimensional modulation. *IEEE Photonics Journal*, 6(2):1–11, 2014. doi: 10.1109/JPHOT.2014.2309645.
- [38] Wei-Guan Shen, Yuan Chen, Hui-Ming Wang, and Xian-Min Jin. Oam mode conversion in a photonic chip. *Optics Communications*, 507:127615, 2022. ISSN 0030-4018. doi: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2021.127615>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401821008646>.
- [39] Zhichan Hu, Domenico Bongiovanni, Ziteng Wang, Xiangdong Wang, Daohong Song, Jingjun Xu, Roberto Morandotti, Hrvoje Buljan, and Zhigang Chen. Topologically protected vortex transport via chiral-symmetric disclination, 2023.
- [40] J. Polo, J. Mompart, and V. Ahufinger. Geometrically induced complex tunnelings for ultracold atoms carrying orbital angular momentum. *Phys. Rev. A*, 93:033613, Mar 2016. doi: 10.1103/PhysRevA.93.033613. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.93.033613>.
- [41] Chuang Jiang, Yanting Wu, Meiyan Qin, and Shaolin Ke. Topological bound modes with orbital angular momentum in optical waveguide arrays. *Journal of Lightwave Technology*, 41(7):2205–2211, 2023. doi: 10.1109/JLT.2022.3200139.
- [42] M. Bayer, T. Gutbrod, J. P. Reithmaier, A. Forchel, T. L. Reinecke, P. A. Knipp, A. A. Dremin, and V. D. Kulakovskii. Optical modes in photonic molecules. *Phys. Rev. Lett.*, 81:2582–2585, Sep 1998. doi: 10.1103/PhysRevLett.81.2582. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.2582>.

- [43] Maxim Mazanov, Diego Román-Cortés, Gabriel Cáceres-Aravena, Christofer Cid, Maxim A. Gorlach, and Rodrigo A. Vicencio. Photonic molecule approach to multi-orbital topology, 2023. URL <https://doi.org/10.48550/arXiv.2310.03160>.
- [44] Ginés Lifante Pedrola. *Beam Propagation Method for Design of Optical Waveguide Devices*. Wiley, 2015. ISBN 9781119083382. URL <https://books.google.cl/books?id=ZV6-CgAAQBAJ>.
- [45] Wei-Ping Huang. Coupled-mode theory for optical waveguides: an overview. *Journal of The Optical Society of America A-optics Image Science and Vision*, 11:963–983, 1994. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:120397076>.
- [46] Bernd Terhalle. *Controlling Light in Optically Induced Photonic Lattices*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2011. ISBN 978-3-642-16647-1. doi: 10.1007/978-3-642-16647-1_7. URL https://doi.org/10.1007/978-3-642-16647-1_7.
- [47] Gabriel Cáceres-Aravena, Bastián Real, Diego Guzmán-Silva, Paloma Vildoso, Ignacio Salinas, Alberto Amo, Tomoki Oza-wa, and Rodrigo A. Vicencio. Edge-to-edge topological spectral transfer in diamond photonic lattices. *APL Photonics*, 8(8): 080801, 08 2023. ISSN 2378-0967. doi: 10.1063/5.0153770. URL <https://doi.org/10.1063/5.0153770>.
- [48] Roman S. Savelev and Maxim A. Gorlach. Topological states in arrays of optical waveguides engineered via mode interference. *Phys. Rev. B*, 102:161112, Oct 2020. doi: 10.1103/PhysRevB.102.161112. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.102.161112>.
- [49] G. Cáceres-Aravena, L. E. F. Foa Torres, and R. A. Vicencio. Topological and flat-band states induced by hybridized linear interactions in one-dimensional photonic lattices. *Phys. Rev. A*, 102:023505, Aug 2020. doi: 10.1103/PhysRevA.102.023505. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.102.023505>.