



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

REDES MULTIORBITALES BASADAS EN MOLÉCULAS FOTÓNICAS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS, MENCIÓN EN FÍSICA

DIEGO ANTONIO ROMÁN CORTÉS

PROFESOR GUÍA:
RODRIGO ANDRÉS VICENCIO POBLETE

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JAIME ANGUITA GARCÍA
PEDRO ORELLANA

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por los proyectos Instituto Milenio para la Investigación en Óptica (MIRO) ICN17 012, Fondecyt Regular 1191205 y 1231313
Powered@NLHPC: Esta tesis fue parcialmente apoyada por la infraestructura de supercómputo del NLHPC (CCSS210001)

SANTIAGO DE CHILE
2024

Resumen

Una dedicatoria corta.

Agradecimientos

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
2. Marco teórico	3
2.1. Desde las ecuaciones de Maxwell a propagación de la luz en guías de onda dieléctricas	3
2.2. Soluciones analíticas para guía de onda tipo losa o <i>slab</i>	4
2.2.1. Soluciones gráficas y comparación entre modos TE y TM	6
2.3. Soluciones analíticas para fibra óptica circular	7
2.3.1. Modos TE y TM	9
2.3.2. Modos HE y EH	9
2.4. Modos normales en guías de onda	10
2.5. Teoría de modos acoplados	10
3. Métodos numéricos	14
3.1. COMSOL: método de elementos finitos	14
3.2. Expansión en modos normales	14
3.3. Beam Propagation Method	14
3.4. Ecuaciones dinámicas discretas tipo Schrödinger	15
4. Métodos experimentales	16
4.1. Escritura de guías de onda	16
4.2. Montaje de excitación láser supercontinuo	16
4.3. Montaje de modulación espacial de luz	16

4.3.1. Circuito óptico	16
4.3.2. Generación de hologramas	17
4.4. Análisis de imágenes	17
5. Moléculas Fotónicas	18
6. Acoplamiento interorbital SP	19
7. Ángulo mágico en modos P	20
8. Haces con momentum orbital angular (OAM)	21
9. Conclusiones	23
Bibliografía	28
Apéndice A. Ortogonalidad de los modos normales	29
Apéndice B. Código en Python para cálculo de modos normales	30
Apéndice C. Código en C de BPM	31
Apéndice D. Código en Python generador de hologramas	32

Índice de Tablas

Índice de Ilustraciones

2.1. Forma de una guía de onda tipo losa.	5
2.2. Soluciones gráficas de los modos TE	7
4.1. Montaje SLM.	16
7.1. Barrido en ángulo que captura el paso por acoplamiento nulo.	20
8.1. Generación de OAMs e interferencia tipo Mach-Zehnder.	21
8.2. Propagación de vórtices en guías de onda.	22

Capítulo 1

Introducción

Entre los premios Nobel en Física de la última década [1] se encuentran varios que están estrechamente ligados a la óptica: por la generación de pulsos de luz ultra cortos (femtosegundos [2] y luego attosegundos [3–5]), por experimentos con fotones entrelazados [6–8], por la ideación de pinzas ópticas [9] y por la invención de luces LED [10–12]. El estudio del comportamiento de la luz en diversos contextos ha permitido el posterior desarrollo tecnológico con aplicaciones industriales, en medicina, en comunicaciones e incluso militares. Una aplicación cotidiana es la fibra óptica, que actúa como una guía de onda para la luz y actualmente es el principal medio de transmisión de Internet en el mundo [13, 14].

Numerosos de estos avances en el control de las propiedades de transporte de la luz se han visto propiciados por la técnica de escritura de guías de onda por láser de femtosegundos, la cual ha permitido la fabricación de redes fotónicas de variada índole [15–23]. Su importancia radica no sólo en emular situaciones de la física del sólido, tales como oscilaciones de Bloch [24], localización de Anderson [25], estados de banda plana [17–20] o topología [26–29], sino que también en el estudio de fenómenos ópticos incluyendo no-linealidad tipo Kerr y su uso en la formación de solitones [30], la posible propagación de luz cuántica [31–33], o su compatibilidad con la transmisión de información en la industria de las telecomunicaciones [34].

El enfoque de este proyecto será el estudio de redes fotónicas multiorbitales. Por ello será crucial incorporar la técnica de acoplamiento interorbital, que consiste en sintonizar las constantes de propagación de el modo fundamental de una guía monomodal (S) con el primer modo guiado excitado de una guía dimodal (P) mediante la calibración adecuada de las potencias de escritura, que inducen diferencias en los contrastes generados por la técnica de escritura por láser femtosegundos [35].

El llamado acoplamiento SP ha permitido el estudio de redes que presentan flujo magnético efectivo $\Phi = \pi$, el cual permite el transporte controlado de la luz [36, 37]. Una aplicación directa de este fenómeno es la generación de guías de onda que admitan modos guiados de luz con momento angular orbital (OAM) y la codificación de su carga topológica ℓ como medio para transmitir información [38, 39]. Se ha reportado a la fecha sólo la propagación de OAM mediante de redes fotónicas que prevean simetría C_3 [40, 41]. Sin embargo, el acoplamiento entre modos OAM en una red fotónica permitiría la generación de flujos magnéticos distintos de 0 o π , lo que se reflejaría en una direccionalidad dependiente de la circulación propagante [42, 43]. Para ello será necesario

introducir el concepto de “moléculas fotónicas” [44] y estudiar su aplicación en redes fotónicas [45].

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Desde las ecuaciones de Maxwell a propagación de la luz en guías de onda dieléctricas

Esta tesis estudia el comportamiento de luz láser de baja potencia (1 mW de potencia de salida) propagada en guías de onda dieléctricas escritas dentro de una muestra de borosilicato. Es por ello que se supone un medio lineal no magnético sin fuentes de carga y de corriente libres. Las ecuaciones de Maxwell (SI) en este régimen son:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

donde \mathbf{E} , \mathbf{B} , $\mathbf{D} = \epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}$ y $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ son los campos eléctrico, campo de densidad de flujo magnético, campo desplazamiento eléctrico y campo magnético, respectivamente. Las guías de onda son invariantes en la dirección de propagación z , por lo que el índice de refracción $n = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0}$ dependerá de las coordenadas transversales al eje óptico, es decir, $n \equiv n(x, y) = n_0 + \Delta n(x, y)$, con $n_0 = 1.47$ el índice de refracción del borosilicato y $\Delta n \sim 10^{-5} - 10^{-3}$ el contraste de las guías de onda.

Aplicando rotor por la izquierda a la ecuación de Faraday-Lenz (2.2), usando la ecuación de Ampère-Maxwell (2.4) y asumiendo una solución temporal armónica proporcional a $e^{-i\omega t}$ se tiene:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = -\frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = n^2 k_0^2 \mathbf{E}, \quad (2.5)$$

donde $k_0 \equiv \omega/c$ es el número de onda en el vacío. Notemos que, por identidad de cálculo vectorial, se tiene que $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$, y usando la ley de Gauss (2.1) se deduce que $\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla n^2}{n^2} \cdot \mathbf{E}$.

Con esto, se obtiene la ecuación

$$(\nabla^2 + k_0^2 n^2) \mathbf{E} = -\nabla \left(\frac{\nabla n^2}{n^2} \cdot \mathbf{E} \right). \quad (2.6)$$

Análogamente para \mathbf{H} , es posible aplicar rotor a la ecuación de Ampère-Maxwell (2.4) y usar la ecuación de Faraday-Lenz (2.2) en conjunto con la divergencia nula de \mathbf{B} (2.3) y por consiguiente de \mathbf{H} :

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} &= -i\omega \nabla \times (\varepsilon_0 n^2 \mathbf{E}) = -i\omega \varepsilon_0 (n^2 \nabla \times \mathbf{E} + \nabla n^2 \times \mathbf{E}), \\ \nabla (\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} &= k_0^2 n^2 \mathbf{H} - i\omega \varepsilon_0 \nabla n^2 \times \mathbf{E}. \end{aligned}$$

La ecuación (2.6) análoga para \mathbf{H} es, por consiguiente:

$$(\nabla^2 + k_0^2 n^2) \mathbf{H} = i\omega \varepsilon_0 \nabla n^2 \times \mathbf{E}. \quad (2.7)$$

Será útil separa las componentes longitudinales y transversales de los campos, asumiendo una dependencia del tipo onda plana $e^{ik_z z}$ en z . Separando $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + \hat{\mathbf{z}} E_z$ y $\mathbf{H} = \mathbf{H}_\perp + \hat{\mathbf{z}} H_z$, $\nabla_\perp \equiv -\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla)$, las ecuaciones de Maxwell que involucran rotores se escriben como

$$\nabla_\perp \times \mathbf{E}_\perp + \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_\perp) + \nabla_\perp \times (\hat{\mathbf{z}} E_z) = i\omega \mu_0 (\mathbf{H}_\perp + \hat{\mathbf{z}} H_z), \quad (2.8)$$

$$\nabla_\perp \times \mathbf{H}_\perp + \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_\perp) + \nabla_\perp \times (\hat{\mathbf{z}} H_z) = -i\omega \varepsilon_0 n^2 (\mathbf{E}_\perp + \hat{\mathbf{z}} E_z). \quad (2.9)$$

Tomando producto cruz en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$ a las ecuaciones (2.8) y (2.9) y considerando dependencia en z del tipo $e^{ik_z z}$, se puede expresar E_z y H_z en función de \mathbf{E}_\perp y \mathbf{H}_\perp para luego invertir las relaciones:

$$\begin{aligned} i\nabla_\perp E_z &= k_z \mathbf{E}_\perp + \omega \mu_0 \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_\perp, & i\nabla_\perp H_z &= k_z \mathbf{H}_\perp - \omega \varepsilon_0 n^2 \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_\perp, \\ i\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_\perp H_z &= k_z \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_\perp + \omega \varepsilon_0 n^2 \mathbf{E}_\perp, & i\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_\perp E_z &= k_z \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_\perp - \omega \mu_0 \mathbf{H}_\perp, \\ \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_\perp &= i \frac{(\omega \varepsilon_0 n^2 \nabla_\perp E_z - \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_\perp H_z k_z)}{k_0^2 n^2 - k_z^2}, & \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_\perp &= -i \frac{(k_z \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_\perp E_z + \omega \mu_0 \nabla_\perp H_z)}{k_0^2 n^2 - k_z^2}, \\ \mathbf{H}_\perp &= \frac{i}{k_0^2 n^2 - k_z^2} [k_z \nabla_\perp H_z + \omega \varepsilon_0 n^2 \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_\perp E_z], & \mathbf{E}_\perp &= \frac{i}{k_0^2 n^2 - k_z^2} [k_z \nabla_\perp E_z - \omega \mu_0 \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_\perp H_z]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.2. Soluciones analíticas para guía de onda tipo losa o *slab*

El sistema más simple que se puede estudiar es una guía de onda tipo losa, cuya forma analítica para el contraste $n(x)$ es la siguiente, con $n_1 > n_0$:

$$n(x) = \begin{cases} n_1, & |x| \leq a \\ n_0, & |x| > a \end{cases}$$

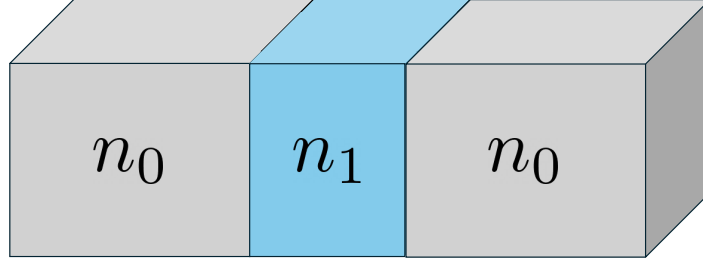


Figura 2.1: Forma de una guía de onda tipo losa. En las direcciones \hat{y} (vertical) y \hat{z} (hacia dentro de la página) la estructura es invariante.

Dado que $\nabla n^2 = \mathbf{0}$ para $|x| \neq a$, los lados derechos de las ecuaciones (2.6) y (2.7) son de tipo Helmholtz. Definiendo $\Psi = \{E_z, H_z\}$:

$$(\nabla_{\perp}^2 + k_0^2 n^2 - k_z^2) \Psi = \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + (k_0^2 n^2 - k_z^2) \Psi = 0.$$

Dado que $n(x) = n(-x)$, las soluciones Ψ deben ser pares o impares. Para encontrar soluciones cuya energía esté localizada en la guía de onda y que decaiga fuera de ella, se impondrá $k_0^2 n_0^2 \leq k_z^2 \leq k_0^2 n_1^2$. Se hace natural definir $\alpha^2 \equiv k_0^2 n_1^2 - k_z^2$ y $\beta^2 \equiv k_z^2 - k_0^2 n_0^2$. Con todo esto,

$$\Psi_s = \begin{cases} \Psi_{s1} \cos(\alpha x), & |x| \leq a \\ \Psi_{s0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}$$

$$\nabla_{\perp} \Psi_s = \begin{cases} -\hat{x} \alpha \Psi_{s1} \sin(\alpha x), & |x| \leq a \\ -\hat{x} \frac{|x|}{x} \beta \Psi_{s0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}$$

Por lo que las componentes verticales E_y y H_y pares se escriben debido a la ecuación (2.10) como:

$$E_y = \frac{i}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} \omega \mu_0 \alpha H_{s1} \sin(\alpha x), & |x| \leq a \\ \omega \mu_0 \frac{|x|}{x} \beta H_{s0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases} \quad H_y = \frac{i}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} -\omega \epsilon_0 n^2 \alpha E_{s1} \sin(\alpha x), & |x| \leq a \\ -\omega \epsilon_0 n^2 \frac{|x|}{x} \beta E_{s0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}$$

Por otro lado, las soluciones impares tienen la forma

$$\Psi_a = \begin{cases} \Psi_{a1} \sin(\alpha x), & |x| \leq a \\ \Psi_{a0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}$$

$$\nabla_{\perp} \Psi_a = \begin{cases} \hat{x} \alpha \Psi_{a1} \cos(\alpha x), & |x| \leq a \\ -\hat{x} \frac{|x|}{x} \beta \Psi_{a0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}$$

Por lo que E_y y H_y se escriben como:

$$E_y = \frac{i}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} -\omega \mu_0 \alpha H_{a1} \cos(\alpha x), & |x| \leq a \\ \omega \mu_0 \frac{|x|}{x} \beta H_{a0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases} \quad H_y = \frac{i}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} \omega \epsilon_0 n^2 \alpha E_{a1} \cos(\alpha x), & |x| \leq a \\ -\omega \epsilon_0 n^2 \frac{|x|}{x} \beta E_{a0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}.$$

Imponiendo continuidad de las componentes tangenciales E_y , E_z , H_y y H_z ; y tratando los casos par e impar por separado:

$$\begin{aligned} E_{s1} \cos(\alpha a) &= E_{s0} e^{-\beta a}, & E_{a1} \sin(\alpha a) &= E_{a0} e^{-\beta a}, \\ H_{s1} \cos(\alpha a) &= H_{s0} e^{-\beta a}, & H_{a1} \sin(\alpha a) &= H_{a0} e^{-\beta a}, \\ n_1^2 E_{s1} \sin(\alpha a)/\alpha &= -n_0^2 E_{s0} e^{-\beta a}/\beta, & n_1^2 E_{a1} \cos(\alpha a)/\alpha &= n_0^2 E_{a0} e^{-\beta a}/\beta, \\ H_{s1} \sin(\alpha a)/\alpha &= -H_{s0} e^{-\beta a}/\beta, & H_{a1} \cos(\alpha a)/\alpha &= H_{a0} e^{-\beta a}/\beta. \end{aligned}$$

Buscando soluciones no triviales se tiene que:

$$\left[\frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} \right] \left[n_0^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + n_1^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} \right] = 0, \quad \left[\frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} \right] \left[n_0^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - n_1^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} \right] = 0.$$

Se distinguirá dos tipos de condiciones:

$$\begin{aligned} \frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} &= 0, & n_0^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + n_1^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} &= 0, \\ & \text{(modos TE)} & & \text{(modos TM)} \\ \frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} &= 0, & n_0^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - n_1^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} &= 0. \end{aligned}$$

Asumiendo α , β y k_z conocidos, las amplitudes deben cumplir las relaciones:

$$\begin{aligned} E_{s1} \left[n_0^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + n_1^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} \right] &= 0, & E_{a1} \left[n_0^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - n_1^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} \right] &= 0, \\ H_{s1} \left[\frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} \right] &= 0, & H_{a1} \left[\frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Las ecuaciones superiores imponen que $E_1 = 0$ cuando se satisface la condición de modos TE. Análogamente, las ecuaciones inferiores imponen $H_1 = 0$ en el caso de modos TM. Efectivamente, los nombres TE y TM se han puesto por transversal eléctrico y transversal magnético, respectivamente. Un corolario para los modos TE es que $E_z = E_x = 0$ por lo que la polarización del campo eléctrico será exclusivamente en la dirección \hat{y} . Sólo un haz polarizado en \hat{x} podría excitar un modo TM, por lo que en un experimento se debe tener esto presente.

2.2.1. Soluciones gráficas y comparación entre modos TE y TM

Usando las dos ecuaciones de modos TE junto a la restricción $(\alpha a)^2 + (\beta a)^2 = k_0^2 a^2 (n_1^2 - n_0^2) \equiv V^2$ es posible obtener soluciones gráficas para las constantes de propagación k_z a partir de las intersecciones $(\alpha a, \beta a)$.

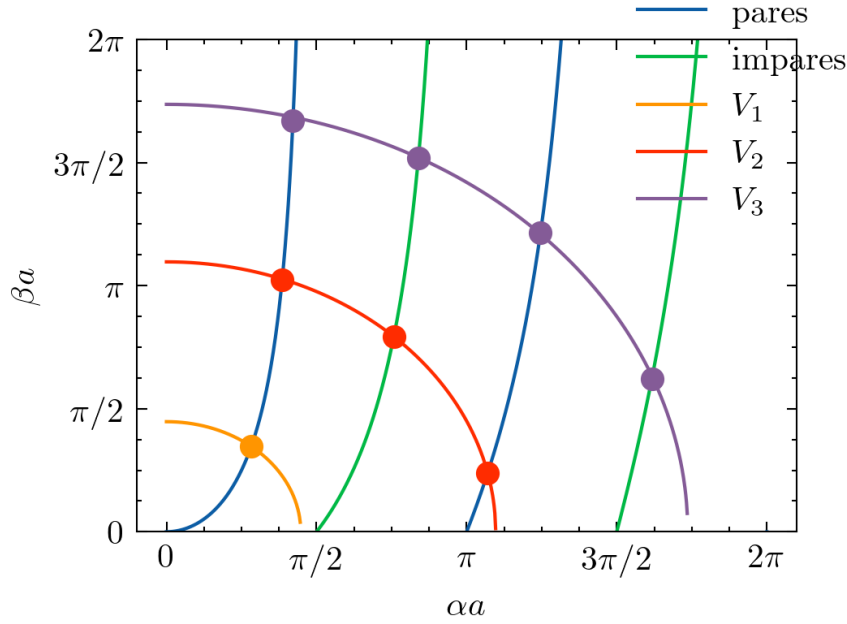


Figura 2.2: Soluciones gráficas de los modos TE. A mayor contraste $\Delta n = n_1 - n_0$, mayor cantidad de modos guiados soporta la guía de onda.

AÑADIR LA FORMA ESPACIAL DE LOS CUATRO MODOS MORADOS

La condición de corte (*cutoff*) en guías de onda es equivalente a que la energía deje de decaer en la región $x > a$, es decir, se debe cumplir que $\beta = 0$. Los modos simétricos o pares cumplen esta condición para $\sin(\alpha a) = 0$, lo que implica que $\alpha = m\pi/a$, con m entero. En particular, considerando $m = 0$ y barriendo $n_1 \rightarrow n_0$, siempre existen al menos dos modos, uno TE y uno TM hasta que $n_1 < n_0$. Los modos antisimétricos o impares deben cumplir por su parte que $\cos(\alpha a) = 0$, lo que implica que $\alpha = (m\pi \pm \pi/2)/a$. De esta condición se deduce que el primer par de modos excitados ($m = 1$) existe siempre que $\lambda^2 \leq 4(2a)^2(n_1^2 - n_0^2)$.

2.3. Soluciones analíticas para fibra óptica circular

En la sección anterior se estudió el sistema más sencillo en el que se puede hablar de guías de onda dieléctricas. El siguiente paso en complejidad consiste en guías de onda circulares. Para ello, se considerará que el índice de refracción varía radialmente según

$$n(\rho) = \begin{cases} n_1, & \text{si } \rho \leq a \\ n_0, & \text{si } \rho > a \end{cases},$$

donde la tupla (ρ, ϕ, z) define las coordenadas cilíndricas a usar, más apropiadas para este problema. Al considerar las componentes longitudinales $\Psi = \{E_z, H_z\}$ del campo eléctrico y magnético, respectivamente, usando separación de variables $\Psi = R(\rho)\Phi(\phi)e^{ik_z z}$ las ecuaciones (2.6) y (2.7) toman la forma:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial^2}{\rho^2 \partial \phi^2} + (k_0^2 n^2 - k_z^2) \right] R(\rho) \Phi(\phi) = 0$$

$$\rho^2 \frac{d^2 R}{R d \rho^2} + \rho \frac{dR}{R d \rho} + \rho^2 (k_0^2 n^2 - k_z^2) + \underbrace{\frac{d^2 \Phi}{\Phi d \phi^2}}_{-\ell^2} = 0$$

$$\therefore \Phi(\phi) = A e^{i\ell \phi}$$

Imponiendo condiciones de periodicidad $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$, se tiene necesariamente que ℓ es un número entero. Por consiguiente, la ecuación para $R(\rho)$ es de tipo Bessel entera, por lo que buscando soluciones tales que $k_0^2 n_0^2 < \beta_z^2 < k_0^2 n_1^2$ y definiendo nuevamente $\alpha^2 \equiv k_0^2 n_1^2 - k_z^2$ y $\beta^2 \equiv k_z^2 - k_0^2 n_0^2$ se tiene:

$$\frac{d^2 R}{d \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d \rho} + \left(k_0^2 n^2 - k_z^2 - \frac{\ell^2}{\rho^2} \right) R = 0$$

$$\therefore R(\rho) = \begin{cases} C_1 J_\ell(\alpha \rho) + D_1 Y_\ell(\alpha \rho), & \text{si } \rho \leq a \\ C_2 K_\ell(\beta \rho) + D_2 I_\ell(\beta \rho), & \text{si } \rho > a \end{cases}$$

Necesariamente se debe imponer $D_1 = D_2 = 0$ para que la solución sea finita para $\rho = 0$ y para $\rho \rightarrow +\infty$. Es decir, la parte radial de la solución es

$$R(\rho) = \begin{cases} C_1 J_\ell(\alpha \rho), & \text{si } \rho \leq a \\ C_2 K_\ell(\beta \rho), & \text{si } \rho > a \end{cases}$$

En este caso, para imponer las condiciones de continuidad en $\mathbf{E}_\parallel = E_\phi \hat{\phi} + E_z \hat{z}$ y $\mathbf{H}_\parallel = H_\phi \hat{\phi} + H_z \hat{z}$, se hace necesario relacionar el resto de componentes del campo con E_z y H_z para lo cual se usará la ecuación (2.10).

Como

$$\nabla_\perp \Psi = \begin{cases} \Psi_0^1 \left[\hat{\rho} \alpha J'_\ell(\alpha \rho) + i \hat{\phi} \ell J_\ell(\alpha \rho) / \rho \right] e^{i\ell \phi} e^{ik_z z}, & \text{si } \rho \leq a \\ \Psi_0^0 \left[\hat{\rho} \beta K'_\ell(\beta \rho) + i \hat{\phi} \ell K_\ell(\alpha \rho) / \rho \right] e^{i\ell \phi} e^{ik_z z}, & \text{si } \rho > a \end{cases}$$

Separando por componentes y reemplazando:

$$H_z = e^{i\ell \phi} e^{ik_z z} \begin{cases} H_0^1 J_\ell(\alpha \rho), & \text{si } \rho \leq a \\ H_0^0 K_\ell(\beta \rho), & \text{si } \rho > a \end{cases}$$

$$H_r = \frac{ie^{i\ell \phi} e^{ik_z z}}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} k_z \alpha H_0^1 J'_\ell(\alpha \rho) - i \omega \epsilon_0 n^2 \ell E_0^1 J_\ell(\alpha \rho) / \rho, & \text{si } \rho \leq a \\ k_z \beta H_0^0 K'_\ell(\beta \rho) - i \omega \epsilon_0 n^2 \ell E_0^0 K_\ell(\beta \rho) / \rho, & \text{si } \rho > a \end{cases}$$

$$H_\phi = \frac{ie^{i\ell \phi} e^{ik_z z}}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} ik_z \ell H_0^1 J_\ell(\alpha \rho) / \rho + \omega \epsilon_0 n^2 \alpha E_0^1 J'_\ell(\alpha \rho), & \text{si } \rho \leq a \\ ik_z \ell H_0^0 K_\ell(\beta \rho) / \rho + \omega \epsilon_0 n^2 \beta E_0^0 K'_\ell(\beta \rho), & \text{si } \rho > a \end{cases}$$

$$E_z = e^{i\ell \phi} e^{ik_z z} \begin{cases} E_0^1 J_\ell(\alpha \rho), & \text{si } \rho \leq a \\ E_0^0 K_\ell(\beta \rho), & \text{si } \rho > a \end{cases}$$

$$E_r = \frac{ie^{i\ell \phi} e^{ik_z z}}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} k_z \alpha E_0^1 J'_\ell(\alpha \rho) + i \omega \mu_0 \ell H_0^1 J_\ell(\alpha \rho) / \rho, & \text{si } \rho \leq a \\ k_z \beta E_0^0 K'_\ell(\beta \rho) + i \omega \mu_0 \ell H_0^0 K_\ell(\beta \rho) / \rho, & \text{si } \rho > a \end{cases}$$

$$E_\phi = \frac{ie^{i\ell \phi} e^{ik_z z}}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} ik_z \ell E_0^1 J_\ell(\alpha \rho) / \rho - \omega \mu_0 \alpha H_0^1 J'_\ell(\alpha \rho), & \text{si } \rho \leq a \\ ik_z \ell E_0^0 K_\ell(\beta \rho) / \rho - \omega \mu_0 \beta H_0^0 K'_\ell(\beta \rho), & \text{si } \rho > a \end{cases}$$

Ahora sí, imponiendo continuidad:

$$H_0^1 J_\ell(\alpha a) = H_0^0 K_\ell(\beta a) \quad (2.11)$$

$$E_0^1 J_\ell(\alpha a) = E_0^0 K_\ell(\beta a) \quad (2.12)$$

$$-\omega \varepsilon_0 n_1^2 \alpha \beta^2 a E_0^1 J'_\ell(\alpha a) - ik_z \ell \beta^2 H_0^1 J_\ell(\alpha a) = \omega \varepsilon_0 n_0^2 \alpha^2 \beta a E_0^0 K'_\ell(\beta a) + ik_z \ell \alpha^2 H_0^0 K_\ell(\beta a) \quad (2.13)$$

$$-ik_z \ell \beta^2 E_0^1 J_\ell(\alpha a) + \omega \mu_0 \alpha \beta^2 a H_0^1 J'_\ell(\alpha a) = ik_z \ell \alpha^2 E_0^0 K_\ell(\beta a) - \omega \mu_0 \alpha^2 \beta a H_0^0 K'_\ell(\beta a) \quad (2.14)$$

Buscando soluciones no triviales:

$$\begin{vmatrix} K_\ell(\beta a) & -J_\ell(\alpha a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_\ell(\beta a) & -J_\ell(\alpha a) \\ ik_z \ell \alpha^2 K_\ell(\beta a) & ik_z \ell \beta^2 J_\ell(\alpha a) & \omega \varepsilon_0 n_0^2 \alpha^2 \beta a K'_\ell(\beta a) & \omega \varepsilon_0 n_1^2 \alpha \beta^2 a J'_\ell(\alpha a) \\ \omega \mu_0 \alpha^2 \beta a K'_\ell(\beta a) & \omega \mu_0 \alpha \beta^2 a J'_\ell(\alpha a) & -ik_z \ell \alpha^2 K_\ell(\beta a) & -ik_z \ell \beta^2 J_\ell(\alpha a) \end{vmatrix} = 0$$

Finalmente, la ecuación trascendental que satisfacen α , β y k_z es:

$$\left(\frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right) \left(n_1^2 \frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + n_0^2 \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right) = \ell^2 \left[\left(\frac{1}{\alpha a} \right)^2 + \left(\frac{1}{\beta a} \right)^2 \right]^2 \left(\frac{k_z}{k_0} \right)^2 \quad (2.15)$$

Dado que, en principio, los valores de k_z ya están determinados por la ecuación anterior, es posible obtener dos relaciones entre H_0^1 y E_0^1 :

$$\frac{E_0^1}{H_0^1} = -\frac{ik_z \ell}{\omega \varepsilon_0} \left[\left(\frac{1}{\alpha a} \right)^2 + \left(\frac{1}{\beta a} \right)^2 \right] \left[n_1^2 \frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + n_0^2 \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right]^{-1} \quad (2.16)$$

$$\frac{H_0^1}{E_0^1} = \frac{ik_z \ell}{\omega \mu_0} \left[\left(\frac{1}{\alpha a} \right)^2 + \left(\frac{1}{\beta a} \right)^2 \right] \left[\frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right]^{-1} \quad (2.17)$$

2.3.1. Modos TE y TM

El caso más sencillo de estudiar es imponiendo $\ell = 0$. La ecuación (2.15) implica:

$$\begin{aligned} \frac{J'_0(\alpha a)}{\alpha a J_0(\alpha a)} + \frac{K'_0(\beta a)}{\beta a K_0(\beta a)} &= 0, \quad (\text{modos TE}) \\ n_1^2 \frac{J'_0(\alpha a)}{\alpha a J_0(\alpha a)} + n_0^2 \frac{K'_0(\beta a)}{\beta a K_0(\beta a)} &= 0, \quad (\text{modos TM}) \end{aligned}$$

De las ecuaciones (2.16) y (2.17) es directo notar que la condiciones de modos transversales impiden que el denominador se anule, lo que permite afirmar sin ambigüedad que las componentes longitudinales se hacen cero para $\ell = 0$ en los casos respectivos: $H_0^1 = 0$ para TE y $E_0^1 = 0$ para TM.

2.3.2. Modos HE y EH

Interpretando la ecuación (2.15) como una cuadrática en $J'_\ell(\alpha a)/\alpha a J_\ell(\alpha a)$:

$$\frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} = -\left(\frac{n_1^2 + n_0^2}{2n_1^2} \right) \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \pm \sqrt{\left(\frac{n_1^2 - n_0^2}{2n_1^2} \right)^2 \left(\frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right)^2 + \left(\frac{k_z \ell}{k_0 n_1} \right)^2 \left[\left(\frac{1}{\alpha a} \right)^2 + \left(\frac{1}{\beta a} \right)^2 \right]^2}$$

Haciendo uso de las relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel $J_\ell(r)$, es posible obtener dos tipos de soluciones llamadas HE y EH:

$$\frac{J_{\ell-1}(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} = -\left(\frac{n_1^2 + n_0^2}{2n_1^2}\right) \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} + \frac{\ell}{(\alpha a)^2} - \sqrt{\Delta}, \quad (\text{modos HE}) \quad (2.18)$$

$$\frac{J_{\ell+1}(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} = \left(\frac{n_1^2 + n_0^2}{2n_1^2}\right) \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} + \frac{\ell}{(\alpha a)^2} - \sqrt{\Delta}, \quad (\text{modos EH}) \quad (2.19)$$

$$\Delta = \left(\frac{n_1^2 - n_0^2}{2n_1^2}\right)^2 \left(\frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)}\right)^2 + \left(\frac{k_z \ell}{k_0 n_1}\right)^2 \left[\left(\frac{1}{\alpha a}\right)^2 + \left(\frac{1}{\beta a}\right)^2\right]^2$$

2.4. Modos normales en guías de onda

Si la estructura de guías de onda no varía en la dirección z , el campo eléctrico se puede expresar como una onda plana del tipo $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_v(x, y)e^{i\beta_v z}$. A su vez, es conveniente separar el Laplaciano como $\nabla^2 \equiv \nabla_\perp^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. De esta forma, el lado izquierdo de las ecuaciones (2.6), se desarrolla como:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k_0^2 n^2) \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \left(\nabla_\perp^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 n^2\right) \mathbf{E}_v(x, y) e^{i\beta_v z} \\ &= e^{i\beta_v z} \nabla_\perp^2 \mathbf{E}_v - \beta_v^2 \mathbf{E}_v e^{i\beta_v z} + k_0^2 n^2 \mathbf{E}_v e^{i\beta_v z} \\ &= \left[\nabla_\perp^2 + (k_0^2 n^2 - \beta_v^2)\right] \mathbf{E}_v e^{i\beta_v z} \\ &\approx 0 \\ \therefore \left[\nabla_\perp^2 + k_0^2 n^2(x, y)\right] \mathbf{E}_v(x, y) &= \beta_v^2 \mathbf{E}_v(x, y), \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde se ha usado la aproximación de guiage débil para anular el lado de derecho de la ecuación (2.6). Notemos que la ecuación (2.20) es un problema de autovalores β_v^2 y autofunciones $\mathbf{E}_v(x, y)$, las cuales son ortogonales y forman una base completa (ver apéndice A). En principio, la forma espacial del índice de refracción $n(x, y)$ puede ser arbitraria siempre y cuando que se satisfaga la condición de guiage débil.

2.5. Teoría de modos acoplados

Para el estudio de redes fotónicas, es conveniente utilizar herramientas similares a las de la Física del Sólido en lo que respecta a potenciales periódicos. En particular, se puede suponer que los modos guiados de una guía de onda están fuertemente ligados a ella (enlace fuerte o *Tight Binding*), incluso en presencia de otras guías de onda. Es decir, se supondrá que el v -ésimo modo de la m -ésima guía de onda satisface para toda distancia de propagación z la ecuación (2.20), donde el índice de refracción total se puede descomponer en una suma periódica de guías de onda $n^2(\mathbf{r}) = \sum_m n_m^2(\mathbf{r})$. Entonces, descomponiendo el campo eléctrico total de la forma $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{v,m} \mathbf{E}_{v,m}(x, y) a_{v,m}(z) e^{i\beta_{v,m} z}$ y reemplazando en la ecuación (2.6) se tiene:

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 + k_0^2 n^2) \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \left(\nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 n^2 \right) \sum_{v,m} \mathbf{E}_{v,m}(x,y) a_{v,m}(z) e^{i\beta_{v,m} z} \\
&= \sum_{v,m} \left[a_{v,m} e^{i\beta_{v,m} z} \left(\nabla_{\perp}^2 + k_0^2 n^2 \right) \mathbf{E}_{v,m} + \mathbf{E}_{v,m} \frac{d^2}{dz^2} (a_{v,m} e^{i\beta_{v,m} z}) \right] \\
&= \sum_{v,m} \left[a_{v,m} \left(\nabla_{\perp}^2 + k_0^2 n^2 - \beta_{v,m}^2 \right) + \frac{d^2 a_{v,m}}{dz^2} + 2i\beta_{v,m} \frac{da_{v,m}}{dz} \right] e^{i\beta_{v,m} z} \mathbf{E}_{v,m} \\
&\approx \sum_{v,m} \left[a_{v,m} k_0^2 (n^2 - n_m^2) + 2i\beta_{v,m} \frac{da_{v,m}}{dz} \right] e^{i\beta_{v,m} z} \mathbf{E}_{v,m} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donde se ha usado que $\left| \frac{d^2 a_{v,m}}{dz^2} \right| \ll 2\beta_{v,m} \left| \frac{da_{v,m}}{dz} \right|$, conocida como aproximación paraxial. Aplicando producto punto con $\mathbf{E}_{\mu,m'}^*$ e integrando en todo el plano xy :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{v,m} \left[a_{v,m} k_0^2 (n^2 - n_m^2) + 2i\beta_{v,m} \frac{da_{v,m}}{dz} \right] e^{i\beta_{v,m} z} \mathbf{E}_{v,m} \cdot \mathbf{E}_{\mu,m'}^* dx dy &= 0 \\
\sum_{v,m} \left(i \frac{4k_0}{\varepsilon_0 c} \frac{da_{v,m}}{dz} \delta_{v,\mu} \delta_{m,m'} + \frac{4k_0}{\varepsilon_0 c} C_{(v,m) \rightarrow (\mu,m')} a_{v,m} \right) e^{i\beta_{v,m} z} &= 0 \\
i \frac{da_{\mu,m'}}{dz} e^{i\beta_{\mu,m'} z} + \sum_{v,m \neq m'} C_{(v,m) \rightarrow (\mu,m')} a_{v,m} e^{i\beta_{v,m} z} &= 0,
\end{aligned}$$

donde se han definido y usado

$$C_{(v,m) \rightarrow (\mu,m')} \equiv \frac{\varepsilon_0 c}{4k_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (n^2 - n_m^2) \mathbf{E}_{v,m} \cdot \mathbf{E}_{\mu,m'}^* dx dy, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_{v,m} \cdot \mathbf{E}_{\mu,m'}^* dx dy \approx \frac{2k_0}{\varepsilon_0 c \beta_{v,m}} \delta_{v,\mu} \delta_{m,m'}.$$

Es decir, el efecto del modo (v, m) en la dinámica del modo (μ, m') sólo es apreciable al ponderar con la expresión $(n^2 - n_m^2)$, lo que da origen al término $C_{(v,m) \rightarrow (\mu,m')}$ conocido comúnmente como constante de acoplamiento. Sin el peso del contraste, la interacción es evanescente, por lo que la aproximación de ortogonalidad se hace razonable con suficiente distancia entre guías (sobre los 15 μm en los experimentos de esta tesis). Cuando $m = m'$, el acoplamiento $C_{(v,m) \rightarrow (\mu,m')}$ es nulo por definición. Notemos que $C_{(v,m) \rightarrow (\mu,m')} \neq C_{(\mu,m') \rightarrow (v,m)}$ en general:

$$\begin{aligned}
C_{(\mu,m') \rightarrow (v,m)} &= \frac{\varepsilon_0 c}{4k_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (n^2 - n_{m'}^2) \mathbf{E}_{\mu,m'} \cdot \mathbf{E}_{v,m}^* dx dy = \frac{\varepsilon_0 c}{4k_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (n^2 - n_{m'}^2) \mathbf{E}_{\mu,m'}^* \cdot \mathbf{E}_{v,m} dx dy \\
&= C_{(v,m) \rightarrow (\mu,m')} + \frac{\varepsilon_0 c}{4k_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (n_m^2 - n_{m'}^2) \mathbf{E}_{v,m} \cdot \mathbf{E}_{\mu,m'}^* dx dy
\end{aligned}$$

Finalmente, es posible hacer el cambio de variables $u_{v,m} \equiv a_{v,m} e^{i\beta_{v,m}z}$ para llegar a las llamadas ecuaciones discretas tipo Schrödinger:

$$-i \frac{du_{\mu,m'}}{dz} = \beta_{\mu,m'} u_{\mu,m'} + \sum_{v,m' \neq \mu} C_{(v,m) \rightarrow (\mu,m')} u_{v,m}. \quad (2.21)$$

Para fijar ideas, consideremos el caso del dímero monomodal homogéneo, considerando una distancia d entre guías **INCLUIR ESQUEMA PARA EXPLICAR ACOPLAMIENTO**. El índice de refracción en este caso es $n^2 = n_1^2 + n_2^2$, con $n_1^2(\mathbf{r}) = n_2^2(\mathbf{r} + \mathbf{d})$. Dada la simetría del problema, la constante de acoplamiento se puede desarrollar como

$$\begin{aligned} C_{1 \rightarrow 2} &= \frac{\varepsilon_0 c}{4k_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n_1^2(\mathbf{r}) \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_1^*(\mathbf{r}) dx dy = \frac{\varepsilon_0 c}{4k_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n_2^2(\mathbf{r} + \mathbf{d}) \mathbf{E}_1(\mathbf{r} + \mathbf{d}) \cdot \mathbf{E}_1^*(\mathbf{r}) dx dy \\ &= \frac{\varepsilon_0 c}{4k_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n_2^2(\mathbf{r}) \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_1^*(\mathbf{r} - \mathbf{d}) dx dy = \frac{\varepsilon_0 c}{4k_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n_2^2(\mathbf{r}) \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_2^*(\mathbf{r}) dx dy \\ &= C_{2 \rightarrow 1} \equiv C \end{aligned}$$

por lo que las dos ecuaciones dinámicas se escriben como:

$$i \frac{da_1}{dz} + Ca_2 = 0, \quad i \frac{da_2}{dz} + Ca_1 = 0$$

Manipulando la ecuación (2.21) y redefiniendo $C_{\mu,\mu,m',m'} \equiv \beta_{\mu,m'}$, notemos que tomando conjugado se tiene:

$$\begin{aligned} i \frac{du_{\mu',m''}}{dz} + \sum_{v,m} C_{\mu',v,m'',m} u_{v,m} &= 0 & -i \frac{d\bar{u}_{\mu',m''}}{dz} + \sum_{v,m} C_{\mu',v,m'',m} \bar{u}_{v,m} &= 0 \\ \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_{\mu',m''}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \bar{u}_{\mu',m''}} &= 0 & \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{u}}_{\mu',m''}} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_{\mu',m''}} &= 0 \end{aligned}$$

Por lo que el Lagrangiano de esta teoría es

$$L = \sum_{\mu,m'} \left[\frac{i}{2} (\dot{u}_{\mu,m'} u_{\mu,m'} - \dot{\bar{u}}_{\mu,m'} \bar{u}_{\mu,m'}) - \sum_{v,m} C_{\mu,v,m',m} u_{v,m} \bar{u}_{\mu,m'} \right]$$

sí y solo sí se cumple que $C_{\mu,v,m',m} = C_{v,\mu,m,m'}$. Esta condición de simetría se cumple cuando los índices de refracción son idénticos para todas las guías. Esto es, $n_m^2(\mathbf{r}) = n_{m'}^2(\mathbf{r} + \mathbf{R})$, con \mathbf{R} un vector primitivo de la red a estudiar. Notando que el momentum generalizado es $\Pi_{\mu,m'} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_{\mu,m'}} = -\frac{i}{2} \bar{u}_{\mu,m'}$ el Hamiltoniano del sistema se escribe como:

$$H = \Pi_{\mu,m'} \dot{u}_{\mu,m'} + \bar{\Pi}_{\mu,m'} \dot{\bar{u}}_{\mu,m'} - L = \sum_{v,\mu,m,m'} C_{\mu,v,m',m} u_{v,m} \bar{u}_{\mu,m'}$$

Este sistema presenta simetría global U(1), pues la transformación $u_{\mu,m'} \rightarrow u'_{\mu,m'} = u_{\mu,m'} e^{i\phi}$ deja invariante el Lagrangiano y el Hamiltoniano $\forall \phi$. Expandiendo, se tiene $u'_{\mu,m'} \approx u_{\mu,m'} (1 + i\phi)$. Notemos que escribiendo el Lagrangiano respecto a estas nuevas variables, despreciando términos

proporcionales a ϕ^2 y usando las ecuaciones de movimiento se tiene:

$$\begin{aligned}
L' &= L + \frac{i}{2} \sum_{\mu, m'} \left(\phi i \frac{d\bar{u}_{\mu, m'}}{dz} u_{\mu, m'} - i \frac{d(\phi \bar{u}_{\mu, m'})}{dz} u_{\mu, m'} - i \frac{d(\phi u_{\mu, m'})}{dz} \bar{u}_{\mu, m'} + \phi i \frac{du_{\mu, m'}}{dz} \bar{u}_{\mu, m'} \right) \\
&= L + \frac{1}{2} \sum_{\mu, m'} \left(\frac{d(\phi \bar{u}_{\mu, m'})}{dz} u_{\mu, m'} + \frac{d(\phi u_{\mu, m'})}{dz} \bar{u}_{\mu, m'} \right) = L + \frac{1}{2} \sum_{\mu, m'} \left(\phi \frac{d|u_{\mu, m'}|^2}{dz} + |u_{\mu, m'}|^2 \frac{d\phi}{dz} \right) \\
&= L + \frac{d}{dz} \left(\frac{\phi}{2} \sum_{\mu, m'} |u_{\mu, m'}|^2 \right)
\end{aligned}$$

En virtud del Teorema de Noether, hemos encontrado una cantidad conservada a partir de una derivada total inducida por una transformación infinitesimal de parámetro ϕ . Esta cantidad P es proporcional a la potencia total del sistema:

$$P = \sum_{\mu, m'} |u_{\mu, m'}|^2$$

Capítulo 3

Métodos numéricos

3.1. COMSOL: método de elementos finitos

A partir de la ecuación (2.5) y separando el campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r})e^{-i\phi_1(\mathbf{r})}$ en una envolvente lenta $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$ y una fase rápidamente oscilante $\phi_1(\mathbf{r})$,

$$\begin{aligned}\nabla \times [\nabla \times (\mathbf{E}_1 e^{-i\phi_1})] &= n^2 k_0^2 \mathbf{E}_1 e^{-i\phi_1} \\ \nabla \times [e^{-i\phi_1} \times (\nabla \times \mathbf{E}_1) + \nabla(e^{-i\phi_1}) \times \mathbf{E}_1] &= n^2 k_0^2 \mathbf{E}_1 e^{-i\phi_1} \\ \nabla \times [e^{-i\phi_1} (\nabla - i\mathbf{k}_1) \times \mathbf{E}_1] &= n^2 k_0^2 \mathbf{E}_1 e^{-i\phi_1} \\ e^{-i\phi_1} \nabla \times [(\nabla - i\mathbf{k}_1) \times \mathbf{E}_1] + \nabla(e^{-i\phi_1}) \times (\nabla - i\mathbf{k}_1) \times \mathbf{E}_1 &= n^2 k_0^2 \mathbf{E}_1 e^{-i\phi_1} \\ e^{-i\phi_1} \nabla \times [(\nabla - i\mathbf{k}_1) \times \mathbf{E}_1] - i\mathbf{k}_1 e^{-i\phi_1} \times (\nabla - i\mathbf{k}_1) \times \mathbf{E}_1 &= n^2 k_0^2 \mathbf{E}_1 e^{-i\phi_1} \\ (\nabla - i\mathbf{k}_1) \times ((\nabla - i\mathbf{k}_1) \times \mathbf{E}_1) &= n^2 k_0^2 \mathbf{E}_1,\end{aligned}\tag{3.1}$$

con $\mathbf{k}_1 = \nabla\phi_1(\mathbf{r})$. El software comercial COMSOL *Multiphysics* puede integrar numéricamente la ecuación (3.1) mediante elementos finitos más gruesos que los que se tendría que usar a partir de la ecuación (2.5) debido a la separación entre envolvente y fase, sin haber hecho aproximación alguna.

3.2. Expansión en modos normales

3.3. Beam Propagation Method

Por otro lado, utilizando la aproximación paraxial escogiendo el eje z como dirección de propagación y seleccionando la polarización horizontal del campo, es posible simplificar la ecuación (3.1) y llegar a la formulación de un método numérico escalar conocido como *Beam Propagation Method*, utilizado ampliamente en esta área de investigación [16, 35, 36, 41, 46]. Éste consiste en

resolver numéricamente la ecuación

$$2in_0k_0\frac{\partial}{\partial z}\psi(x,y,z) = \nabla_{\perp}^2\psi(x,y,z) + (n^2 - n_0^2)k_0^2\psi(x,y,z), \quad (3.2)$$

con $\psi(x,y,z)$, n_0 , $n(x,y)$ y k_0 la envolvente de la componente horizontal campo eléctrico, el índice de refracción del material, el índice de refracción inducido y el número de onda en el vacío, respectivamente.

3.4. Ecuaciones dinámicas discretas tipo Schrödinger

Aplicando teoría acoplada de modos [47] a la ecuación (3.2), con el objetivo de describir de forma discreta una red fotónica, es posible derivar las llamadas ecuaciones discretas tipo Schrödinger [19, 20, 30]

$$-i\frac{\partial u_{\vec{n}}}{\partial z} = \beta_{\vec{n}}u_{\vec{n}} + \sum_{\vec{m} \neq \vec{n}} C_{\vec{n},\vec{m}}u_{\vec{m}}, \quad (3.3)$$

con $u_{\vec{n}}$, $\beta_{\vec{n}}$ y $C_{\vec{n},\vec{m}}$ la envolvente normalizada del campo eléctrico, la constante de propagación normalizada y las constantes de acoplamiento entre los modos de las guías en las posiciones de la red \vec{n} y \vec{m} , respectivamente.

Capítulo 4

Métodos experimentales

4.1. Escritura de guías de onda

4.2. Montaje de excitación láser supercontinuo

4.3. Montaje de modulación espacial de luz

4.3.1. Circuito óptico

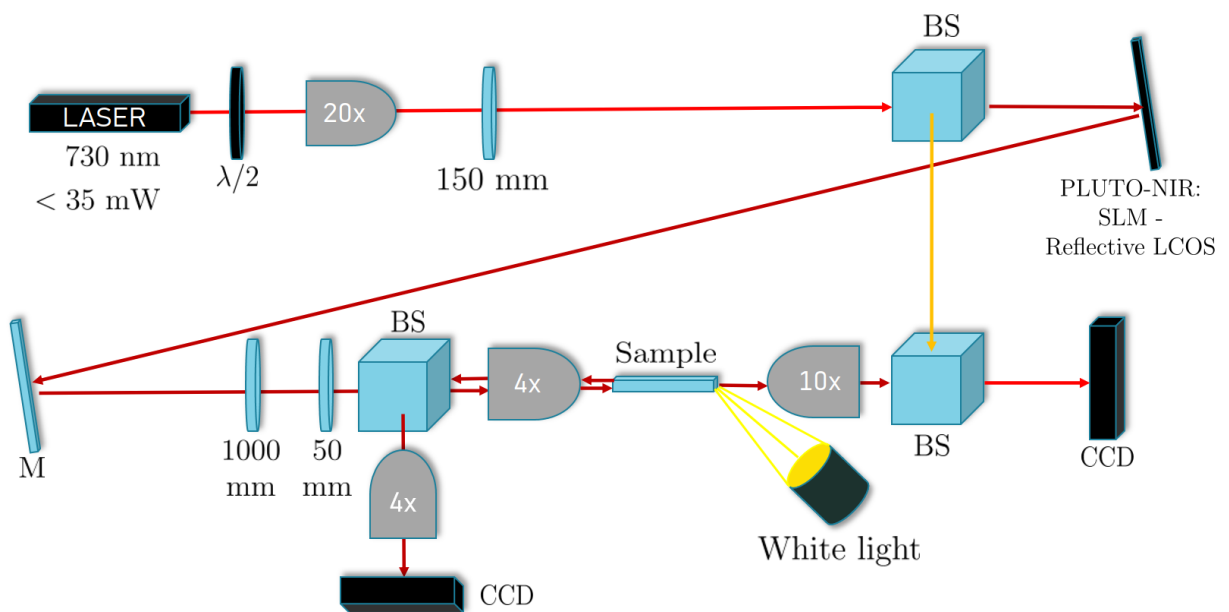


Figura 4.1: Montaje SLM.

4.3.2. Generación de hologramas

4.4. Análisis de imágenes

Capítulo 5

Moléculas Fotónicas

Capítulo 6

Acoplamiento interorbital SP

Capítulo 7

Ángulo mágico en modos P

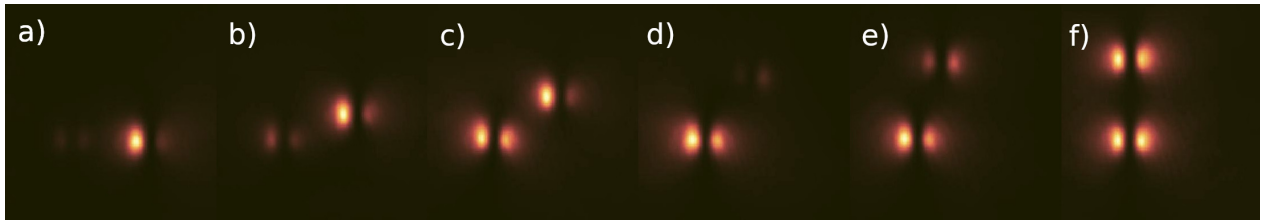


Figura 7.1: Barrido en ángulo que captura el paso por acoplamiento nulo.

Capítulo 8

Haces con momentum orbital angular (OAM)

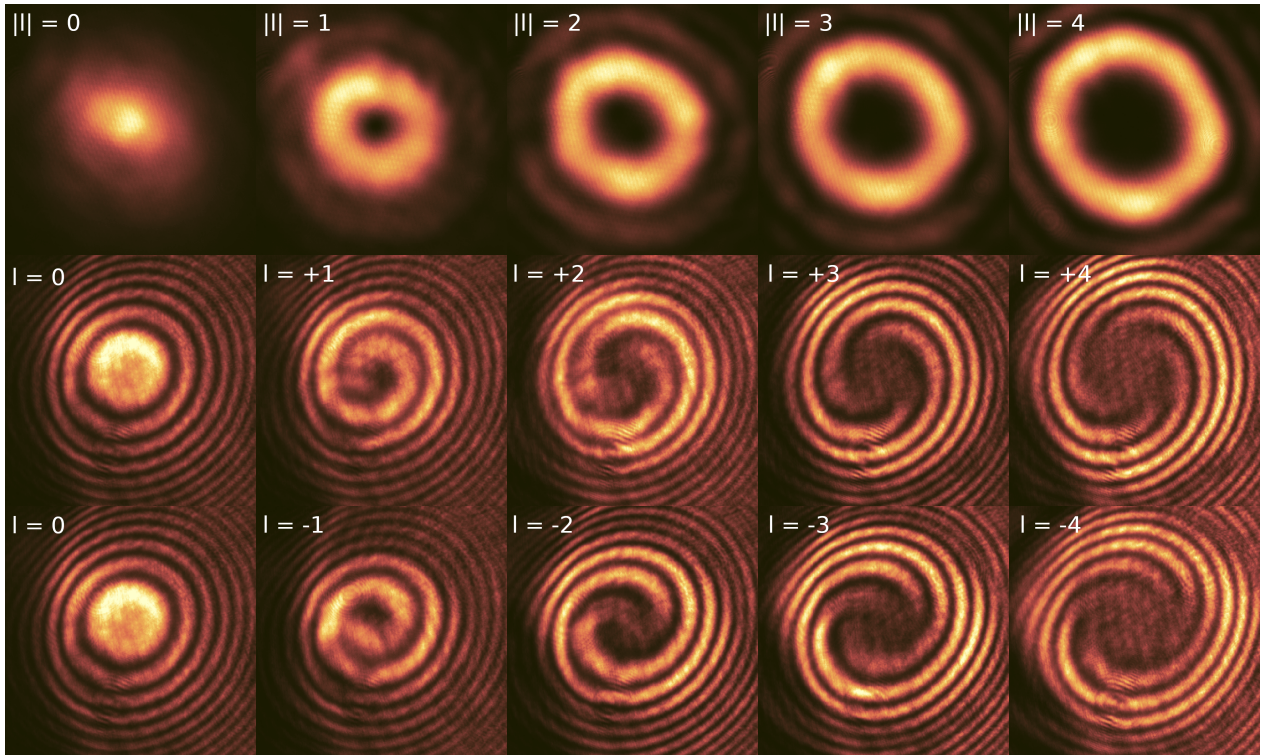


Figura 8.1: Generación de OAMs e interferencia tipo Mach-Zehnder. Se aprecia la carga de los OAMs contando la cantidad de espirales originados desde el centro.

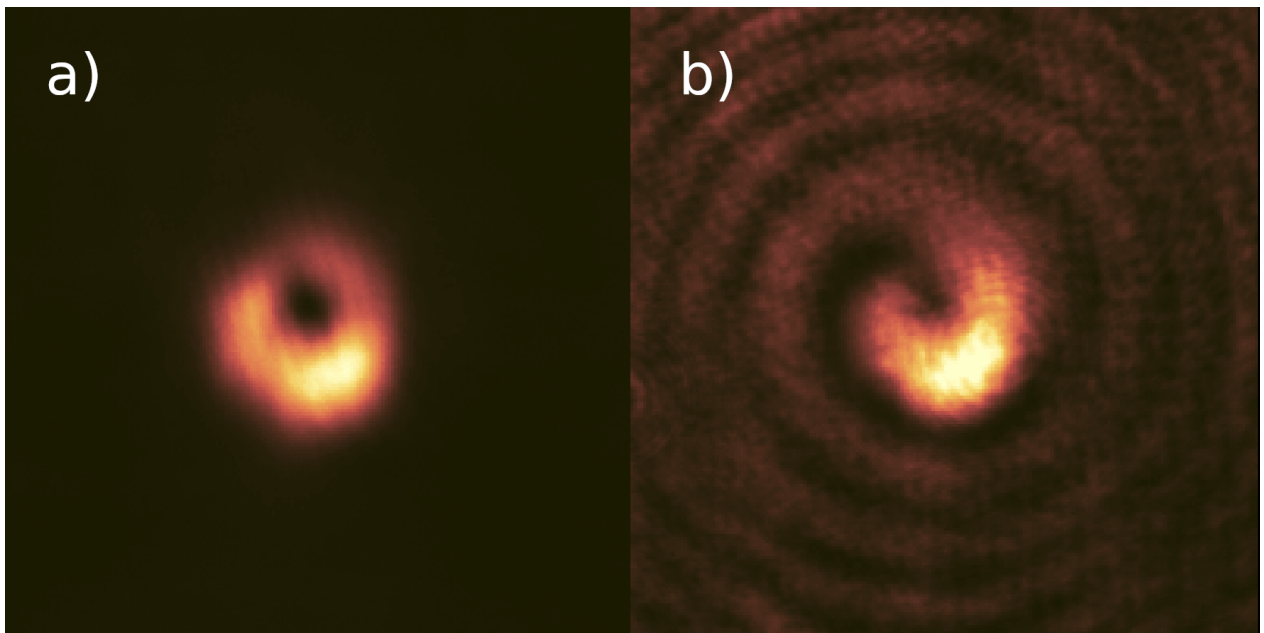


Figura 8.2: Propagación de vórtices en guías de onda. En a) se tiene la intensidad del perfil de salida luego de excitar un OAM con carga $\ell = 1$. En b) se tiene una estructura de fase similar a la esperada pero con falta de definición.

Capítulo 9

Conclusiones

Bibliografía

- [1] All nobel prizes in physics. URL <https://www.nobelprize.org/prizes/lists/all-nobel-prizes-in-physics/>.
- [2] P. Maine, D. Strickland, P. Bado, M. Pessot, and G. Mourou. Generation of ultrahigh peak power pulses by chirped pulse amplification. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 24(2): 398–403, 1988. doi: 10.1109/3.137.
- [3] M. Lewenstein, Ph. Balcou, M. Yu. Ivanov, Anne L’Huillier, and P. B. Corkum. Theory of high-harmonic generation by low-frequency laser fields. *Phys. Rev. A*, 49:2117–2132, Mar 1994. doi: 10.1103/PhysRevA.49.2117. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.49.2117>.
- [4] P. M. Paul, E. S. Toma, P. Breger, G. Mullot, F. Augé, Ph. Balcou, H. G. Muller, and P. Agostini. Observation of a train of attosecond pulses from high harmonic generation. *Science*, 292(5522):1689–1692, 2001. doi: 10.1126/science.1059413. URL <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1059413>.
- [5] Thomas Brabec and Ferenc Krausz. Intense few-cycle laser fields: Frontiers of nonlinear optics. *Reviews of Modern Physics*, 72:545–591, 2000. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:120371634>.
- [6] J F Clauser and A Shimony. Bell’s theorem. experimental tests and implications. *Reports on Progress in Physics*, 41(12):1881, dec 1978. doi: 10.1088/0034-4885/41/12/002. URL <https://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/41/12/002>.
- [7] Alain Aspect, Jean Dalibard, and Gérard Roger. Experimental test of bell’s inequalities using time-varying analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, 49:1804–1807, Dec 1982. doi: 10.1103/PhysRevLett.49.1804. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.49.1804>.
- [8] Paul G. Kwiat, Klaus Mattle, Harald Weinfurter, Anton Zeilinger, Alexander V. Sergienko, and Yanhua Shih. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 75:4337–4341, Dec 1995. doi: 10.1103/PhysRevLett.75.4337. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.4337>.
- [9] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, and T. Yamane. Optical trapping and manipulation of single cells using infrared laser beams. *Nature*, 330(6150):769–771, Dec 1987. ISSN 1476-4687. doi: 10.1038/330769a0. URL <https://doi.org/10.1038/330769a0>.

- [10] Isamu Akasaki. Gan-based p-n junction blue-light-emitting devices. *Proc. IEEE*, 101(10): 2200–2210, 2013. doi: 10.1109/JPROC.2013.2274928. URL <https://doi.org/10.1109/JPROC.2013.2274928>.
- [11] Michael Kneissl, Tae-Yeon Seong, Jung Han, and Hiroshi Amano. The emergence and prospects of deep-ultraviolet light-emitting diode technologies. *Nature Photonics*, 13(4): 233–244, Apr 2019. ISSN 1749-4893. doi: 10.1038/s41566-019-0359-9. URL <https://doi.org/10.1038/s41566-019-0359-9>.
- [12] Shuji Nakamura, Takashi Mukai, and Masayuki Senoh. Candela-class high-brightness In-GaN/AlGaN double-heterostructure blue-light-emitting diodes. *Applied Physics Letters*, 64(13):1687–1689, 03 1994. ISSN 0003-6951. doi: 10.1063/1.111832. URL <https://doi.org/10.1063/1.111832>.
- [13] Submarine cable frequently asked questions, . URL <https://www2.telegeography.com/submarine-cable-faqs-frequently-asked-questions>.
- [14] Hogares con acceso a internet fijo alcanzan el 67 % y usuarios aumentan preferencia por redes de alta velocidad, . URL <https://www.subtel.gob.cl/hogares-con-acceso-a-internet-fijo-alcanzan-el-67-y-usuarios-aumentan-preferencia-por-redes-de-alta-velocidad>.
- [15] Alexander Szameit, Dominik Blömer, Jonas Burghoff, Thomas Schreiber, Thomas Pertsch, Stefan Nolte, Andreas Tünnermann, and Falk Lederer. Discrete nonlinear localization in femtosecond laser written waveguides in fused silica. *Opt. Express*, 13(26):10552–10557, Dec 2005. doi: 10.1364/OPEX.13.010552. URL <https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-13-26-10552>.
- [16] Yonatan Plotnik, Or Peleg, Felix Dreisow, Matthias Heinrich, Stefan Nolte, Alexander Szameit, and Mordechai Segev. Experimental observation of optical bound states in the continuum. *Phys. Rev. Lett.*, 107:183901, Oct 2011. doi: 10.1103/PhysRevLett.107.183901. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.183901>.
- [17] Rodrigo A. Vicencio, Camilo Cantillano, Luis Morales-Inostroza, Bastián Real, Cristian Mejía-Cortés, Steffen Weimann, Alexander Szameit, and Mario I. Molina. Observation of localized states in lieb photonic lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 114:245503, Jun 2015. doi: 10.1103/PhysRevLett.114.245503. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.245503>.
- [18] Seababrata Mukherjee, Alexander Spracklen, Debaditya Choudhury, Nathan Goldman, Patrik Öhberg, Erika Andersson, and Robert R. Thomson. Observation of a localized flat-band state in a photonic lieb lattice. *Phys. Rev. Lett.*, 114:245504, Jun 2015. doi: 10.1103/PhysRevLett.114.245504. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.245504>.
- [19] Daniel Leykam, Alexei Andreanov, and Sergej Flach. Artificial flat band systems: from lattice models to experiments. *Advances in Physics: X*, 3(1):1473052, 2018. doi: 10.1080/23746149.2018.1473052. URL <https://doi.org/10.1080/23746149.2018.1473052>.
- [20] Rodrigo A. Vicencio. Photonic flat band dynamics. *Advances in Physics: X*, 6(1): 1878057, 2021. doi: 10.1080/23746149.2021.1878057. URL <https://doi.org/10.1080/23746149.2021.1878057>.

- [21] Diego Román-Cortés, Guillermo Fadic, Christofer Cid-Lara, Diego Guzmán-Silva, Bastián Real, and Rodrigo A. Vicencio. Strain induced localization to delocalization transition on a lieb photonic ribbon lattice. *Scientific Reports*, 11(1):21411, Nov 2021. ISSN 2045-2322. doi: 10.1038/s41598-021-00967-3. URL <https://doi.org/10.1038/s41598-021-00967-3>.
- [22] Javier Cubillos Cornejo, Diego Guzmán-Silva, Víctor Hugo Cornejo, Ignacio Bordeu, and Rodrigo A. Vicencio. Transport and localization on dendrite-inspired flat band linear photonic lattices. *Scientific Reports*, 13(1):13057, Aug 2023. ISSN 2045-2322. doi: 10.1038/s41598-023-39985-8. URL <https://doi.org/10.1038/s41598-023-39985-8>.
- [23] Paloma Vildoso, Rodrigo A. Vicencio, and Jovana Petrovic. Ultra-low-loss broadband multiport optical splitters. *Opt. Express*, 31(8):12703–12716, Apr 2023. doi: 10.1364/OE.486855. URL <https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-31-8-12703>.
- [24] Zhaoyang Zhang, Shaohuan Ning, Hua Zhong, Milivoj R. Belić, Yiqi Zhang, Yuan Feng, Shun Liang, Yanpeng Zhang, and Min Xiao. Experimental demonstration of optical bloch oscillation in electromagnetically induced photonic lattices. *Fundamental Research*, 2(3): 401–404, 2022. ISSN 2667-3258. doi: <https://doi.org/10.1016/j.fmre.2021.08.019>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2667325821001746>.
- [25] Tal Schwartz, Guy Bartal, Shmuel Fishman, and Mordechai Segev. Transport and anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices. *Nature*, 446(7131):52–55, Mar 2007. ISSN 1476-4687. doi: 10.1038/nature05623. URL <https://doi.org/10.1038/nature05623>.
- [26] Seababata Mukherjee, Alexander Spracklen, Manuel Valiente, Erika Andersson, Patrik Öhberg, Nathan Goldman, and Robert R. Thomson. Experimental observation of anomalous topological edge modes in a slowly driven photonic lattice. *Nature Communications*, 8(1):13918, Jan 2017. ISSN 2041-1723. doi: 10.1038/ncomms13918. URL <https://doi.org/10.1038/ncomms13918>.
- [27] Lukas J. Maczewsky, Julia M. Zeuner, Stefan Nolte, and Alexander Szameit. Observation of photonic anomalous floquet topological insulators. *Nature Communications*, 8(1):13756, Jan 2017. ISSN 2041-1723. doi: 10.1038/ncomms13756. URL <https://doi.org/10.1038/ncomms13756>.
- [28] G. Cáceres-Aravena, L. E. F. Foa Torres, and R. A. Vicencio. Topological and flat-band states induced by hybridized linear interactions in one-dimensional photonic lattices. *Phys. Rev. A*, 102:023505, Aug 2020. doi: 10.1103/PhysRevA.102.023505. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.102.023505>.
- [29] Roman S. Savelev and Maxim A. Gorlach. Topological states in arrays of optical waveguides engineered via mode interference. *Phys. Rev. B*, 102:161112, Oct 2020. doi: 10.1103/PhysRevB.102.161112. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.102.161112>.
- [30] Falk Lederer, George I. Stegeman, Demetri N. Christodoulides, Gaetano Assanto, Moti Segev, and Yaron Silberberg. Discrete solitons in optics. *Physics Reports*, 463(1):1–126, 2008. ISSN 0370-1573. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2008.04.004>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157308001257>.

- [31] S. Rojas-Rojas, E. Barriga, C. Muñoz, P. Solano, and C. Hermann-Avigliano. Manipulation of multimode squeezing in a coupled waveguide array. *Phys. Rev. A*, 100:023841, Aug 2019. doi: 10.1103/PhysRevA.100.023841. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.100.023841>.
- [32] R. Julius, A. N. Alias, and M. S. A. Halim. Quantum squeezing in coupled waveguide networks with quadratic and cubic nonlinearity. *The European Physical Journal Plus*, 137(1):91, Jan 2022. ISSN 2190-5444. doi: 10.1140/epjp/s13360-021-02302-1. URL <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-02302-1>.
- [33] Joaquin Medina Dueñas, Gabriel O’Ryan Pérez, Carla Hermann-Avigliano, and Luis E. F. Foa Torres. Quadrature protection of squeezed states in a one-dimensional photonic topological insulator. *Quantum*, 5:526, August 2021. ISSN 2521-327X. doi: 10.22331/q-2021-08-17-526. URL <https://doi.org/10.22331/q-2021-08-17-526>.
- [34] Zhiwen Li, Siqi Hu, Qiao Zhang, Ruijuan Tian, Linpeng Gu, Yisong Zhu, Qingchen Yuan, Ruixuan Yi, Chen Li, Yan Liu, Yue Hao, Xuetao Gan, and Jianlin Zhao. Telecom-band waveguide-integrated mos2 photodetector assisted by hot electrons. *ACS Photonics*, 9(1): 282–289, 2022. doi: 10.1021/acsp Photonics.1c01622. URL <https://doi.org/10.1021/acsp Photonics.1c01622>.
- [35] Diego Guzmán-Silva, Gabriel Cáceres-Aravena, and Rodrigo A. Vicencio. Experimental observation of interorbital coupling. *Phys. Rev. Lett.*, 127:066601, Aug 2021. doi: 10.1103/PhysRevLett.127.066601. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.127.066601>.
- [36] Christina Jörg, Gerard Queraltó, Mark Kremer, Gerard Pelegrí, Julian Schulz, Alexander Szaimeit, Georg von Freymann, Jordi Mompart, and Verónica Ahufinger. Artificial gauge field switching using orbital angular momentum modes in optical waveguides. *Light: Science & Applications*, 9(1):150, Aug 2020. ISSN 2047-7538. doi: 10.1038/s41377-020-00385-6. URL <https://doi.org/10.1038/s41377-020-00385-6>.
- [37] Gabriel Cáceres-Aravena, Diego Guzmán-Silva, Ignacio Salinas, and Rodrigo A. Vicencio. Controlled transport based on multi-orbital aharonov-bohm photonic caging. *Phys. Rev. Lett.*, 128:256602, Jun 2022. doi: 10.1103/PhysRevLett.128.256602. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.128.256602>.
- [38] Yudong Lian, Xuan Qi, Yuhe Wang, Zhenxu Bai, Yulei Wang, and Zhiwei Lu. Oam beam generation in space and its applications: A review. *Optics and Lasers in Engineering*, 151: 106923, 2022. ISSN 0143-8166. doi: <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2021.106923>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0143816621003924>.
- [39] Jaime A. Anguita, Joaquín Herreros, and Ivan B. Djordjevic. Coherent multimode oam superpositions for multidimensional modulation. *IEEE Photonics Journal*, 6(2):1–11, 2014. doi: 10.1109/JPHOT.2014.2309645.
- [40] Wei-Guan Shen, Yuan Chen, Hui-Ming Wang, and Xian-Min Jin. Oam mode conversion in a photonic chip. *Optics Communications*, 507:127615, 2022. ISSN 0030-4018. doi: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2021.127615>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401821008646>.

- [41] Zhichan Hu, Domenico Bongiovanni, Ziteng Wang, Xiangdong Wang, Daohong Song, Jingjun Xu, Roberto Morandotti, Hrvoje Buljan, and Zhigang Chen. Topologically protected vortex transport via chiral-symmetric disclination, 2023.
- [42] J. Polo, J. Mompart, and V. Ahufinger. Geometrically induced complex tunnelings for ultracold atoms carrying orbital angular momentum. *Phys. Rev. A*, 93:033613, Mar 2016. doi: 10.1103/PhysRevA.93.033613. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.93.033613>.
- [43] Chuang Jiang, Yanting Wu, Meiyan Qin, and Shaolin Ke. Topological bound modes with orbital angular momentum in optical waveguide arrays. *Journal of Lightwave Technology*, 41(7):2205–2211, 2023. doi: 10.1109/JLT.2022.3200139.
- [44] M. Bayer, T. Gutbrod, J. P. Reithmaier, A. Forchel, T. L. Reinecke, P. A. Knipp, A. A. Dremin, and V. D. Kulakovskii. Optical modes in photonic molecules. *Phys. Rev. Lett.*, 81:2582–2585, Sep 1998. doi: 10.1103/PhysRevLett.81.2582. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.2582>.
- [45] Maxim Mazanov, Diego Román-Cortés, Gabriel Cáceres-Aravena, Christofer Cid, Maxim A. Gorlach, and Rodrigo A. Vicencio. Photonic molecule approach to multiorbital topology. *Nano Letters*, 24(15):4595–4601, 2024. doi: 10.1021/acs.nanolett.4c00728. URL <https://doi.org/10.1021/acs.nanolett.4c00728>. PMID: 38574276.
- [46] Ginés Lifante Pedrola. *Beam Propagation Method for Design of Optical Waveguide Devices*. Wiley, 2015. ISBN 9781119083382. URL <https://books.google.cl/books?id=ZV6-CgAAQBAJ>.
- [47] Wei-Ping Huang. Coupled-mode theory for optical waveguides: an overview. *Journal of The Optical Society of America A-optics Image Science and Vision*, 11:963–983, 1994. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:120397076>.
- [48] Alex J Yuffa. Vectorizing green’s identities. *Journal of Physics Communications*, 5(5): 055001, may 2021. doi: 10.1088/2399-6528/abfa27. URL <https://dx.doi.org/10.1088/2399-6528/abfa27>.

Apéndice A

Ortogonalidad de los modos normales

La ecuación (2.20) permite encontrar la condición de ortogonalidad de los modos normales del campo eléctrico \mathbf{E}_ν . Para ello, se puede tomar producto punto a la ecuación por \mathbf{E}_μ^* e integrar en una superficie S :

$$\iint_S (\nabla_\perp^2 + k_0^2 n^2) \mathbf{E}_\nu \cdot \mathbf{E}_\mu^* dx dy = \beta_\nu^2 \iint_S \mathbf{E}_\nu \cdot \mathbf{E}_\mu^* dx dy \quad (\text{A.1})$$

Si intercambiamos los índices ν y μ tenemos:

$$\iint_S (\nabla_\perp^2 + k_0^2 n^2) \mathbf{E}_\mu \cdot \mathbf{E}_\nu^* dx dy = \beta_\mu^2 \iint_S \mathbf{E}_\mu \cdot \mathbf{E}_\nu^* dx dy \quad (\text{A.2})$$

Restando las ecuaciones (A.1) y (A.2) y escogiendo modos reales:

$$\begin{aligned} (\beta_\nu^2 - \beta_\mu^2) \iint_S \mathbf{E}_\mu \cdot \mathbf{E}_\nu dx dy &= \iint_S (\mathbf{E}_\mu \cdot \nabla_\perp^2 \mathbf{E}_\nu - \mathbf{E}_\nu \cdot \nabla_\perp^2 \mathbf{E}_\mu) dx dy \\ &= \oint_{\partial S} (\mathbf{E}_\mu \times \nabla \times \mathbf{E}_\nu - \mathbf{E}_\nu \times \nabla \times \mathbf{E}_\mu) \cdot \hat{n} d\ell \\ &\quad + \oint_{\partial S} (\hat{n} \cdot \mathbf{E}_\mu)(\nabla \cdot \mathbf{E}_\nu) - (\hat{n} \cdot \mathbf{E}_\nu)(\nabla \cdot \mathbf{E}_\mu) d\ell \\ &\underset{\partial S \rightarrow \infty}{=} 0. \\ \therefore \iint_S \mathbf{E}_\mu \cdot \mathbf{E}_\nu^* dx dy &= 0, \quad \text{si } \nu \neq \mu, \end{aligned}$$

donde se ha usado la segunda identidad de Green vectorial [48] y que el campo eléctrico debe hacerse anularse en el infinito, aunque basta considerar que el campo sea nulo en el borde de la región S .

Apéndice B

Código en Python para cálculo de modos normales

Apéndice C

Código en C de BPM

Apéndice D

Código en Python generador de hologramas