



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

REDES MULTIORBITALES BASADAS EN MOLÉCULAS FOTÓNICAS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS, MENCIÓN EN FÍSICA

DIEGO ANTONIO ROMÁN CORTÉS

PROFESOR GUÍA:
RODRIGO ANDRÉS VICENCIO POBLETE

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
JAIME ANGUITA GARCÍA
PEDRO ORELLANA

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por los proyectos Instituto Milenio para la
Investigación en Óptica (MIRO) ICN17_012 y Fondecyt Regular 1231313
Powered@NLHPC: Esta tesis fue parcialmente apoyada por la infraestructura de supercómputo
del NLHPC (CCSS210001)

SANTIAGO DE CHILE
2024

Resumen

*Mas si buscáis descubrimientos
Tierras irrealizables más allá de los cielos
Vegetante obsesión de musical congoja
Volvamos al silencio
Trampas de luz y cascadas lujosas
Trampas de perla y de lámpara acuática
Anda como los ciegos con sus ojos de piedra
Presintiendo el abismo a todo paso
Mas no temas de mí que mi lenguaje es otro
No trato de hacer feliz ni desgraciado a nadie
Ni descolgar banderas de los pechos
Ni dar anillos de planetas
Ni hacer satélites de mármol en torno a un talismán ajeno
Quiero darte una música de espíritu
Música mía de esta cítara plantada en mi cuerpo
Música que hace pensar en el crecimiento de los árboles
Y estalla en luminarias dentro del sueño*

Agradecimientos

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
2. Marco teórico	3
2.1. Desde las ecuaciones de Maxwell a propagación de la luz en guías de onda dieléctricas	3
2.2. Soluciones analíticas para guía de onda tipo losa o <i>slab</i>	4
2.2.1. Soluciones gráficas y comparación entre modos TE y TM	6
2.3. Soluciones analíticas para fibra óptica circular	8
2.3.1. Modos TE y TM	10
2.3.2. Modos HE y EH	11
2.4. Modos normales en guías de onda	13
2.5. Teoría de modos acoplados	14
2.5.1. Teorema de Bloch	16
2.5.2. Ejemplo: Red 1D multimodal	16
3. Métodos numéricos	17
3.1. Expansión en modos normales	17
3.2. Beam Propagation Method	17
3.3. Ecuaciones dinámicas discretas tipo Schrödinger	17
4. Métodos experimentales	18
4.1. Escritura de guías de onda	18
4.2. Montaje de excitación láser supercontinuo	19

4.3. Montaje de modulación espacial de luz	20
4.3.1. Etapa premodulación	20
4.3.2. Etapa de modulación	21
4.3.3. Etapa de acoplamiento	21
4.3.4. Etapa de captura en cámara	21
4.3.5. Circuito óptico	21
4.4. Análisis de imágenes	21
5. Moléculas Fotónicas	22
6. Acoplamiento interorbital SP	23
7. Ángulo mágico en modos P	24
8. Haces con momentum orbital angular (OAM)	25
9. Conclusiones	27
Bibliografía	32
Apéndice A. Ortogonalidad de los modos normales	33
Apéndice B. Código en Python para cálculo de modos normales	34
Apéndice C. Código en C de BPM	35
Apéndice D. Código en Python generador de hologramas	36

Índice de Tablas

Índice de Ilustraciones

2.1.	Forma de una guía de onda tipo losa.	5
2.2.	Soluciones gráficas de los modos TE	7
2.3.	Soluciones gráficas de los modos TE	7
4.1.	Escritura.	18
4.2.	Montaje SC.	19
4.3.	Montaje SLM.	21
7.1.	Barrido en ángulo que captura el paso por acoplamiento nulo.	24
8.1.	Generación de OAMs e interferencia tipo Mach-Zehnder.	25
8.2.	Propagación de vórtices en guías de onda.	26

Capítulo 1

Introducción

Entre los premios Nobel en Física de la última década [1] se encuentran varios que están estrechamente ligados a la óptica: por la generación de pulsos de luz ultra cortos (femtosegundos [2] y luego attosegundos [3–5]), por experimentos con fotones entrelazados [6–8], por la ideación de pinzas ópticas [9] y por la invención de luces LED [10–12]. El estudio del comportamiento de la luz en diversos contextos ha permitido el posterior desarrollo tecnológico con aplicaciones industriales, en medicina, en comunicaciones e incluso militares. Una aplicación cotidiana es la fibra óptica, que actúa como una guía de onda para la luz y actualmente es el principal medio de transmisión de Internet en el mundo [13, 14].

Numerosos de estos avances en el control de las propiedades de transporte de la luz se han visto propiciados por la técnica de escritura de guías de onda por láser de femtosegundos, la cual ha permitido la fabricación de redes fotónicas de variada índole [15–23]. Su importancia radica no sólo en emular situaciones de la física del sólido, tales como oscilaciones de Bloch [24], localización de Anderson [25], estados de banda plana [17–20] o topología [26–29], sino que también en el estudio de fenómenos ópticos incluyendo no-linealidad tipo Kerr y su uso en la formación de solitones [30], la posible propagación de luz cuántica [31–33], o su compatibilidad con la transmisión de información en la industria de las telecomunicaciones [34].

El enfoque de este proyecto será el estudio de redes fotónicas multiorbitales. Por ello será crucial incorporar la técnica de acoplamiento interorbital, que consiste en sintonizar las constantes de propagación de el modo fundamental de una guía monomodal (S) con el primer modo guiado excitado de una guía dimodal (P) mediante la calibración adecuada de las potencias de escritura, que inducen diferencias en los contrastes generados por la técnica de escritura por láser femtosegundos [35].

El llamado acoplamiento SP ha permitido el estudio de redes que presentan flujo magnético efectivo $\Phi = \pi$, el cual permite el transporte controlado de la luz [36, 37]. Una aplicación directa de este fenómeno es la generación de guías de onda que admitan modos guiados de luz con momentum angular orbital (OAM) y la codificación de su carga topológica ℓ como medio para transmitir información [38, 39]. Se ha reportado a la fecha sólo la propagación de OAM mediante de redes fotónicas que presevan simetría C_3 [40, 41]. Sin embargo, el acoplamiento entre modos OAM en una red fotónica permitiría la generación de flujos magnéticos distintos de 0 o π , lo que se reflejaría en una direccionalidad dependiente de la circulación propagante [42, 43]. Para ello será necesario

introducir el concepto de “moléculas fotónicas” [44] y estudiar su aplicación en redes fotónicas [45].

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Desde las ecuaciones de Maxwell a propagación de la luz en guías de onda dieléctricas

Esta tesis estudia el comportamiento de luz láser de baja potencia (1 mW de potencia de salida) propagada en guías de onda dieléctricas escritas dentro de una muestra de borosilicato. Es por ello que se supone un medio lineal no magnético sin fuentes de carga y de corriente libres. Las ecuaciones de Maxwell (SI) en este régimen son:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

donde \mathbf{E} , \mathbf{B} , $\mathbf{D} = \epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}$ y $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ son los campos eléctrico, campo de densidad de flujo magnético, campo desplazamiento eléctrico y campo magnético, respectivamente. Las guías de onda son invariantes en la dirección de propagación z , por lo que el índice de refracción $n = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0}$ dependerá de las coordenadas transversales al eje óptico, es decir, $n \equiv n(x, y) = n_0 + \Delta n(x, y)$, con $n_0 = 1.47$ el índice de refracción del borosilicato y $\Delta n \sim 10^{-5} - 10^{-3}$ el contraste de las guías de onda.

Aplicando rotor por la izquierda a la ecuación de Faraday-Lenz (2.2), usando la ecuación de Ampère-Maxwell (2.4) y asumiendo una solución temporal harmónica proporcional a $e^{-i\omega t}$ se tiene:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) = -\frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = n^2 k_0^2 \mathbf{E}, \quad (2.5)$$

donde $k_0 \equiv \omega/c$ es el número de onda en el vacío. Notemos que, por identidad de cálculo vectorial, se tiene que $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$, y usando la ley de Gauss (2.1) se deduce que $\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla n^2}{n^2} \cdot \mathbf{E}$.

Con esto, se obtiene la ecuación

$$(\nabla^2 + k_0^2 n^2) \mathbf{E} = -\nabla \left(\frac{\nabla n^2}{n^2} \cdot \mathbf{E} \right). \quad (2.6)$$

Análogamente para \mathbf{H} , es posible aplicar rotor a la ecuación de Ampère-Maxwell (2.4) y usar la ecuación de Faraday-Lenz (2.2) en conjunto con la divergencia nula de \mathbf{B} (2.3) y por consiguiente de \mathbf{H} :

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} &= -i\omega \nabla \times (\epsilon_0 n^2 \mathbf{E}) = -i\omega \epsilon_0 (n^2 \nabla \times \mathbf{E} + \nabla n^2 \times \mathbf{E}), \\ \nabla (\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} &= k_0^2 n^2 \mathbf{H} - i\omega \epsilon_0 \nabla n^2 \times \mathbf{E}. \end{aligned}$$

La ecuación (2.6) análoga para \mathbf{H} es, por consiguiente:

$$(\nabla^2 + k_0^2 n^2) \mathbf{H} = i\omega \epsilon_0 \nabla n^2 \times \mathbf{E}. \quad (2.7)$$

Será útil separar las componentes longitudinales y transversales de los campos, asumiendo una dependencia del tipo onda plana $e^{ik_z z}$ en z . Separando $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + \hat{\mathbf{z}} E_z$ y $\mathbf{H} = \mathbf{H}_\perp + \hat{\mathbf{z}} H_z$, $\nabla_\perp \equiv -\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla)$, las ecuaciones de Maxwell que involucran rotores se escriben como

$$\nabla_\perp \times \mathbf{E}_\perp + \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_\perp) + \nabla_\perp \times (\hat{\mathbf{z}} E_z) = i\omega \mu_0 (\mathbf{H}_\perp + \hat{\mathbf{z}} H_z), \quad (2.8)$$

$$\nabla_\perp \times \mathbf{H}_\perp + \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_\perp) + \nabla_\perp \times (\hat{\mathbf{z}} H_z) = -i\omega \epsilon_0 n^2 (\mathbf{E}_\perp + \hat{\mathbf{z}} E_z). \quad (2.9)$$

Tomando producto cruz en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$ a las ecuaciones (2.8) y (2.9) y considerando dependencia en z del tipo $e^{ik_z z}$, se puede expresar E_z y H_z en función de \mathbf{E}_\perp y \mathbf{H}_\perp para luego invertir las relaciones:

$$\begin{aligned} i\nabla_\perp E_z &= k_z \mathbf{E}_\perp + \omega \mu_0 \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_\perp, & i\nabla_\perp H_z &= k_z \mathbf{H}_\perp - \omega \epsilon_0 n^2 \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_\perp, \\ i\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_\perp H_z &= k_z \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_\perp + \omega \epsilon_0 n^2 \mathbf{E}_\perp, & i\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_\perp E_z &= k_z \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_\perp - \omega \mu_0 \mathbf{H}_\perp, \\ \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_\perp &= i \frac{(\omega \epsilon_0 n^2 \nabla_\perp E_z - \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_\perp H_z k_z)}{k_0^2 n^2 - k_z^2}, & \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_\perp &= -i \frac{(k_z \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_\perp E_z + \omega \mu_0 \nabla_\perp H_z)}{k_0^2 n^2 - k_z^2}, \\ \mathbf{H}_\perp &= \frac{i}{k_0^2 n^2 - k_z^2} [k_z \nabla_\perp H_z + \omega \epsilon_0 n^2 \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_\perp E_z], & \mathbf{E}_\perp &= \frac{i}{k_0^2 n^2 - k_z^2} [k_z \nabla_\perp E_z - \omega \mu_0 \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_\perp H_z]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.2. Soluciones analíticas para guía de onda tipo losa o slab

El sistema más simple que se puede estudiar es una guía de onda tipo losa, cuya forma analítica para el contraste $n(x)$ es la siguiente, con $n_1 > n_0$:

$$n(x) = \begin{cases} n_1, & |x| \leq a \\ n_0, & |x| > a \end{cases}$$

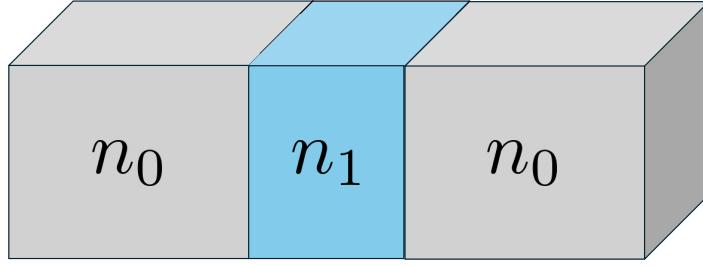


Figura 2.1: Forma de una guía de onda tipo losa. En las direcciones $\hat{\mathbf{y}}$ (vertical) y $\hat{\mathbf{z}}$ (hacia dentro de la página) la estructura es invariante.

Dado que $\nabla n^2 = \mathbf{0}$ para $|x| \neq a$, los lados derechos de las ecuaciones (2.6) y (2.7) son de tipo Helmholtz. Definiendo $\Psi = \{E_z, H_z\}$:

$$(\nabla_{\perp}^2 + k_0^2 n^2 - k_z^2)\Psi = \frac{d^2\Psi}{dx^2} + (k_0^2 n^2 - k_z^2)\Psi = 0.$$

Dado que $n(x) = n(-x)$, las soluciones Ψ deben ser pares o impares. Para encontrar soluciones cuya energía esté localizada en la guía de onda y que decaiga fuera de ella, se impondrá $k_0^2 n_0^2 \leq k_z^2 \leq k_0^2 n_1^2$. Se hace natural definir $\alpha^2 \equiv k_0^2 n_1^2 - k_z^2$ y $\beta^2 \equiv k_z^2 - k_0^2 n_0^2$. Con todo esto,

$$\Psi_s = \begin{cases} \Psi_{s1} \cos(\alpha x), & |x| \leq a \\ \Psi_{s0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}$$

$$\nabla_{\perp}\Psi_s = \begin{cases} -\hat{\mathbf{x}}\alpha\Psi_{s1} \sin(\alpha x), & |x| \leq a \\ -\hat{\mathbf{x}}\frac{|x|}{x}\beta\Psi_{s0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}$$

Por lo que las componentes verticales E_y y H_y pares se escriben debido a la ecuación (2.10) como:

$$E_y = \frac{i}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} \omega\mu_0\alpha H_{s1} \sin(\alpha x), & |x| \leq a \\ \omega\mu_0\frac{|x|}{x}\beta H_{s0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases} \quad H_y = \frac{i}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} -\omega\epsilon_0 n^2 \alpha E_{s1} \sin(\alpha x), & |x| \leq a \\ -\omega\epsilon_0 n^2 \frac{|x|}{x} \beta E_{s0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}$$

Por otro lado, las soluciones impares tienen la forma

$$\Psi_a = \begin{cases} \Psi_{a1} \sin(\alpha x), & |x| \leq a \\ \Psi_{a0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}$$

$$\nabla_{\perp}\Psi_a = \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}\alpha\Psi_{a1} \cos(\alpha x), & |x| \leq a \\ -\hat{\mathbf{x}}\frac{|x|}{x}\beta\Psi_{a0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}$$

Por lo que E_y y H_y se escriben como:

$$E_y = \frac{i}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} -\omega\mu_0\alpha H_{a1} \cos(\alpha x), & |x| \leq a \\ \omega\mu_0\frac{|x|}{x}\beta H_{a0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases} \quad H_y = \frac{i}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} \omega\epsilon_0 n^2 \alpha E_{a1} \cos(\alpha x), & |x| \leq a \\ -\omega\epsilon_0 n^2 \frac{|x|}{x} \beta E_{a0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases} .$$

Imponiendo continuidad de las componentes tangenciales E_y , E_z , H_y y H_z ; y tratando los casos pares e impar por separado:

$$\begin{aligned} E_{s1} \cos(\alpha a) &= E_{s0} e^{-\beta a}, & E_{a1} \sin(\alpha a) &= E_{a0} e^{-\beta a}, \\ H_{s1} \cos(\alpha a) &= H_{s0} e^{-\beta a}, & H_{a1} \sin(\alpha a) &= H_{a0} e^{-\beta a}, \\ n_1^2 E_{s1} \sin(\alpha a)/\alpha &= -n_0^2 E_{s0} e^{-\beta a}/\beta, & n_1^2 E_{a1} \cos(\alpha a)/\alpha &= n_0^2 E_{a0} e^{-\beta a}/\beta, \\ H_{s1} \sin(\alpha a)/\alpha &= -H_{s0} e^{-\beta a}/\beta, & H_{a1} \cos(\alpha a)/\alpha &= H_{a0} e^{-\beta a}/\beta. \end{aligned}$$

Buscando soluciones no triviales se tiene que:

$$\left[\frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} \right] \left[n_0^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + n_1^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} \right] = 0, \quad \left[\frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} \right] \left[n_0^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - n_1^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} \right] = 0.$$

Se distinguirán dos tipos de condiciones:

$$\begin{array}{ll} \frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} = 0, & n_0^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + n_1^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} = 0, \\ \text{(modos TE)} & \text{(modos TM)} \\ \frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} = 0, & n_0^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - n_1^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} = 0. \end{array}$$

Asumiendo α , β y k_z conocidos, las amplitudes deben cumplir las relaciones:

$$\begin{array}{ll} E_{s1} \left[n_0^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + n_1^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} \right] = 0, & E_{a1} \left[n_0^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - n_1^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} \right] = 0, \\ H_{s1} \left[\frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} \right] = 0, & H_{a1} \left[\frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} \right] = 0. \end{array}$$

Las ecuaciones superiores imponen que $E_1 = 0$ cuando se satisface la condición de modos TE. Análogamente, las ecuaciones inferiores imponen $H_1 = 0$ en el caso de modos TM. Efectivamente, los nombres TE y TM se han puesto por transversal eléctrico y transversal magnético, respectivamente. Un corolario para los modos TE es que $E_z = E_x = 0$ por lo que la polarización del campo eléctrico será exclusivamente en la dirección \hat{y} . Así mismo, sólo un haz polarizado en \hat{x} podría excitar un modo TM, por lo que en un experimento se debe tener esto presente: una condición inicial arbitraria será una combinación lineal de modos TE y TM.

2.2.1. Soluciones gráficas y comparación entre modos TE y TM

Usando las dos ecuaciones de modos TE junto a la restricción $(\alpha a)^2 + (\beta a)^2 = k_0^2 a^2 (n_1^2 - n_0^2) \equiv V^2$ es posible obtener soluciones gráficas para las constantes de propagación k_z a partir de las intersecciones $(\alpha a, \beta a)$.

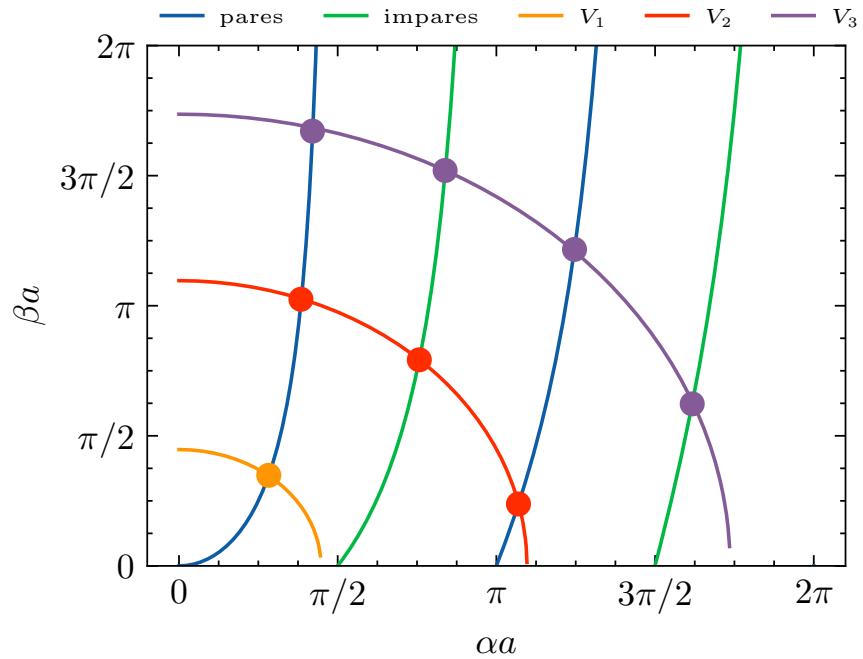


Figura 2.2: Soluciones gráficas de los modos TE. A mayor contraste $\Delta n = n_1 - n_0$, mayor cantidad de modos guiados soporta la guía de onda.

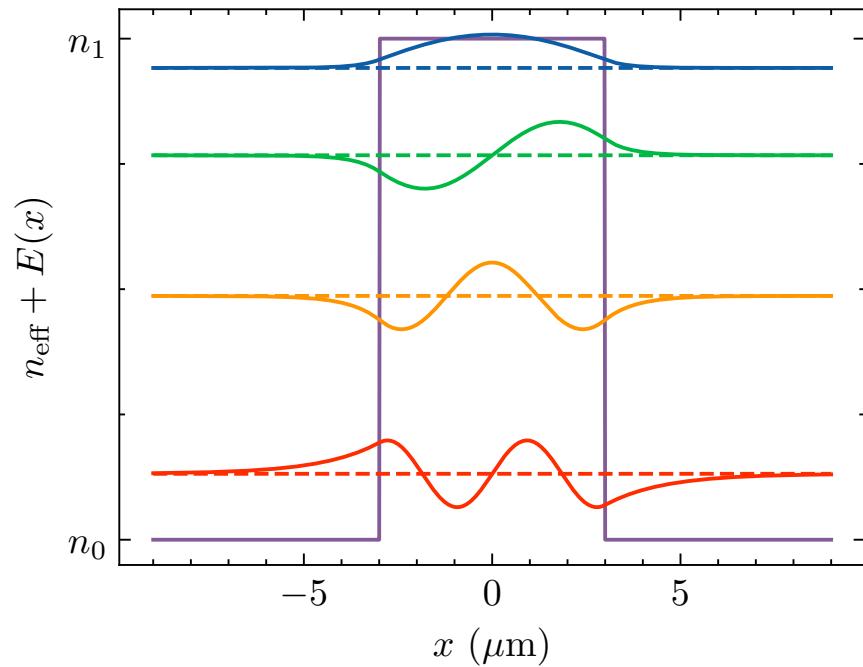


Figura 2.3: Soluciones gráficas de los modos TE. A mayor contraste $\Delta n = n_1 - n_0$, mayor cantidad de modos guiados soporta la guía de onda.

La condición de corte (*cutoff*) en guías de onda es equivalente a que la energía deje de decaer en la región $|x| > a$, es decir, se debe cumplir que $\beta a \rightarrow 0$. Los modos simétricos o pares cumplen esta

condición para $\sin(V) = 0$, lo que implica que $V = m\pi$, con m entero. En particular, considerando $m = 0$ y barriendo $n_1 \rightarrow n_0$, siempre existen al menos dos modos, uno TE y otro TM hasta que $n_1 < n_0$. Los modos antisimétricos o impares deben cumplir por su parte que $\cos(V) = 0$, lo que implica que $V = (m\pi \pm \pi/2)$. De esta condición se deduce que el primer par de modos exictados ($m = 0$) existe siempre que $\lambda \leq \lambda_c \equiv 4a \sqrt{n_1^2 - n_0^2}$. Escrito de forma compacta para el m -ésimo modo:

$$(\lambda_c)_m = \frac{4a}{m-1} \sqrt{n_1^2 - n_0^2}$$

2.3. Soluciones analíticas para fibra óptica circular

En la sección anterior se estudió el sistema más sencillo en el que se puede hablar de guías de onda dieléctricas. El siguiente paso en complejidad consiste en guías de onda circulares. Para ello, se considerará que el índice de refracción varía radialmente según

$$n(\rho) = \begin{cases} n_1, & \text{si } \rho \leq a \\ n_0, & \text{si } \rho > a \end{cases},$$

donde la tupla (ρ, ϕ, z) define las coordenadas cilíndricas a usar, más apropiadas para este problema. Al considerar las componentes longitudinales $\Psi = \{E_z, H_z\}$ del campo eléctrico y magnético, respectivamente, usando separación de variables $\Psi = R(\rho)\Phi(\phi)e^{ik_z z}$ las ecuaciones (2.6) y (2.7) toman la forma:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial^2}{\rho^2 \partial \phi^2} + (k_0^2 n^2 - k_z^2) \right] R(\rho)\Phi(\phi) &= 0 \\ \rho^2 \frac{d^2 R}{R d\rho^2} + \rho \frac{dR}{R d\rho} + \rho^2 (k_0^2 n^2 - k_z^2) + \underbrace{\frac{d^2 \Phi}{\Phi d\phi^2}}_{-\ell^2} &= 0 \\ \therefore \Phi(\phi) &= A e^{i\ell\phi} \end{aligned}$$

Imponiendo condiciones de periodicidad $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$, se tiene necesariamente que ℓ es un número entero. Por consiguiente, la ecuación para $R(\rho)$ es de tipo Bessel entera, por lo que buscando soluciones tales que $k_0^2 n_0^2 < \beta_z^2 < k_0^2 n_1^2$ y definiendo nuevamente $a^2 \equiv k_0^2 n_1^2 - k_z^2$ y $\beta^2 \equiv k_z^2 - k_0^2 n_0^2$ se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(k_0^2 n^2 - k_z^2 - \frac{\ell^2}{\rho^2} \right) R &= 0 \\ \therefore R(\rho) &= \begin{cases} C_1 J_\ell(\alpha\rho) + D_1 Y_\ell(\alpha\rho), & \text{si } \rho \leq a \\ C_2 K_\ell(\beta\rho) + D_2 I_\ell(\beta\rho), & \text{si } \rho > a \end{cases}. \end{aligned}$$

Necesariamente se debe imponer $D_1 = D_2 = 0$ para que la solución sea finita para $\rho = 0$ y para $\rho \rightarrow +\infty$. Es decir, la parte radial de la solución es

$$R(\rho) = \begin{cases} C_1 J_\ell(\alpha\rho), & \text{si } \rho \leq a \\ C_2 K_\ell(\beta\rho), & \text{si } \rho > a \end{cases}.$$

En este caso, para imponer las condiciones de continuidad en $\mathbf{E}_{\parallel} = E_{\phi}\hat{\phi} + E_z\hat{\mathbf{z}}$ y $\mathbf{H}_{\parallel} = H_{\phi}\hat{\phi} + H_z\hat{\mathbf{z}}$, se hace necesario relacionar el resto de componentes del campo con E_z y H_z para lo cual se usará la ecuación (2.10).

Como

$$\nabla_{\perp}\Psi = \begin{cases} \Psi_0^1 \left[\hat{\rho}\alpha J'_\ell(\alpha\rho) + i\hat{\phi}\ell J_\ell(\alpha\rho)/\rho \right] e^{i\ell\phi} e^{ik_z z}, & \text{si } \rho \leq a \\ \Psi_0^0 \left[\hat{\rho}\beta K'_\ell(\beta\rho) + i\hat{\phi}\ell K_\ell(\beta\rho)/\rho \right] e^{i\ell\phi} e^{ik_z z}, & \text{si } \rho > a \end{cases}$$

Separando por componentes y reemplazando:

$$\begin{aligned} H_z &= e^{i\ell\phi} e^{ik_z z} \begin{cases} H_0^1 J_\ell(\alpha\rho), & \text{si } \rho \leq a \\ H_0^0 K_\ell(\beta\rho), & \text{si } \rho > a \end{cases} \\ H_r &= \frac{ie^{i\ell\phi} e^{ik_z z}}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} k_z \alpha H_0^1 J'_\ell(\alpha\rho) - i\omega\varepsilon_0 n^2 \ell E_0^1 J_\ell(\alpha\rho)/\rho, & \text{si } \rho \leq a \\ k_z \beta H_0^0 K'_\ell(\beta\rho) - i\omega\varepsilon_0 n^2 \ell E_0^0 K_\ell(\beta\rho)/\rho, & \text{si } \rho > a \end{cases} \\ H_\phi &= \frac{ie^{i\ell\phi} e^{ik_z z}}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} ik_z \ell H_0^1 J_\ell(\alpha\rho)/\rho + \omega\varepsilon_0 n^2 \alpha E_0^1 J'_\ell(\alpha\rho), & \text{si } \rho \leq a \\ ik_z \ell H_0^0 K_\ell(\beta\rho)/\rho + \omega\varepsilon_0 n^2 \beta E_0^0 K'_\ell(\beta\rho), & \text{si } \rho > a \end{cases} \\ E_z &= e^{i\ell\phi} e^{ik_z z} \begin{cases} E_0^1 J_\ell(\alpha\rho), & \text{si } \rho \leq a \\ E_0^0 K_\ell(\beta\rho), & \text{si } \rho > a \end{cases} \\ E_r &= \frac{ie^{i\ell\phi} e^{ik_z z}}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} k_z \alpha E_0^1 J'_\ell(\alpha\rho) + i\omega\mu_0 \ell H_0^1 J_\ell(\alpha\rho)/\rho, & \text{si } \rho \leq a \\ k_z \beta E_0^0 K'_\ell(\beta\rho) + i\omega\mu_0 \ell H_0^0 K_\ell(\beta\rho)/\rho, & \text{si } \rho > a \end{cases} \\ E_\phi &= \frac{ie^{i\ell\phi} e^{ik_z z}}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} ik_z \ell E_0^1 J_\ell(\alpha\rho)/\rho - \omega\mu_0 \alpha H_0^1 J'_\ell(\alpha\rho), & \text{si } \rho \leq a \\ ik_z \ell E_0^0 K_\ell(\beta\rho)/\rho - \omega\mu_0 \beta H_0^0 K'_\ell(\beta\rho), & \text{si } \rho > a \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora sí, imponiendo continuidad:

$$H_0^1 J_\ell(\alpha a) = H_0^0 K_\ell(\beta a) \quad (2.11)$$

$$E_0^1 J_\ell(\alpha a) = E_0^0 K_\ell(\beta a) \quad (2.12)$$

$$-\omega\varepsilon_0 n_1^2 \alpha \beta^2 a E_0^1 J'_\ell(\alpha a) - ik_z \ell \beta^2 H_0^1 J_\ell(\alpha a) = \omega\varepsilon_0 n_0^2 \alpha^2 \beta a E_0^0 K'_\ell(\beta a) + ik_z \ell \alpha^2 H_0^0 K_\ell(\beta a) \quad (2.13)$$

$$-ik_z \ell \beta^2 E_0^1 J_\ell(\alpha a) + \omega\mu_0 \alpha \beta^2 a H_0^1 J'_\ell(\alpha a) = ik_z \ell \alpha^2 E_0^0 K_\ell(\beta a) - \omega\mu_0 \alpha^2 \beta a H_0^0 K'_\ell(\beta a) \quad (2.14)$$

Buscando soluciones no triviales:

$$\begin{vmatrix} K_\ell(\beta a) & -J_\ell(\alpha a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_\ell(\beta a) & -J_\ell(\alpha a) \\ ik_z \ell \alpha^2 K_\ell(\beta a) & ik_z \ell \beta^2 J_\ell(\alpha a) & \omega\varepsilon_0 n_0^2 \alpha^2 \beta a K'_\ell(\beta a) & \omega\varepsilon_0 n_1^2 \alpha \beta^2 a J'_\ell(\alpha a) \\ \omega\mu_0 \alpha^2 \beta a K'_\ell(\beta a) & \omega\mu_0 \alpha \beta^2 a J'_\ell(\alpha a) & -ik_z \ell \alpha^2 K_\ell(\beta a) & -ik_z \ell \beta^2 J_\ell(\alpha a) \end{vmatrix} = 0$$

Finalmente, la ecuación trascendental que satisfacen α , β y k_z es:

$$\left(\frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right) \left(n_1^2 \frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + n_0^2 \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right) = \ell^2 \left[\left(\frac{1}{\alpha a} \right)^2 + \left(\frac{1}{\beta a} \right)^2 \right]^2 \left(\frac{k_z}{k_0} \right)^2 \quad (2.15)$$

Dado que, en principio, los valores de k_z ya están determinados por la ecuación anterior, es

possible obtener dos relaciones entre H_0^1 y E_0^1 :

$$\frac{E_0^1}{H_0^1} = -\frac{ik_z\ell}{\omega\varepsilon_0} \left[\left(\frac{1}{\alpha a} \right)^2 + \left(\frac{1}{\beta a} \right)^2 \right] \left[n_1^2 \frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + n_0^2 \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right]^{-1}, \quad (2.16)$$

$$\frac{H_0^1}{E_0^1} = \frac{ik_z\ell}{\omega\mu_0} \left[\left(\frac{1}{\alpha a} \right)^2 + \left(\frac{1}{\beta a} \right)^2 \right] \left[\frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right]^{-1}. \quad (2.17)$$

Tomando raíz cuadrada al cociente de las ecuaciones (2.16) y (2.17) se tiene:

$$\frac{E_0^1}{H_0^1} = i \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\sqrt{\frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)}}}{\sqrt{n_1^2 \frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + n_0^2 \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)}}} \quad (2.18)$$

2.3.1. Modos TE y TM

El caso más sencillo de estudiar es imponiendo $\ell = 0$. La ecuación (2.15) implica:

$$\begin{aligned} \frac{J'_0(\alpha a)}{\alpha a J_0(\alpha a)} + \frac{K'_0(\beta a)}{\beta a K_0(\beta a)} &= 0, \quad (\text{modos TE}) \\ n_1^2 \frac{J'_0(\alpha a)}{\alpha a J_0(\alpha a)} + n_0^2 \frac{K'_0(\beta a)}{\beta a K_0(\beta a)} &= 0, \quad (\text{modos TM}) \end{aligned}$$

De la ecuación (2.18) es directo notar que la condiciones de modos transversales que las componentes longitudinales se hacen cero en los casos respectivos: $H_0^1 = 0$ para TE y $E_0^1 = 0$ para TM.

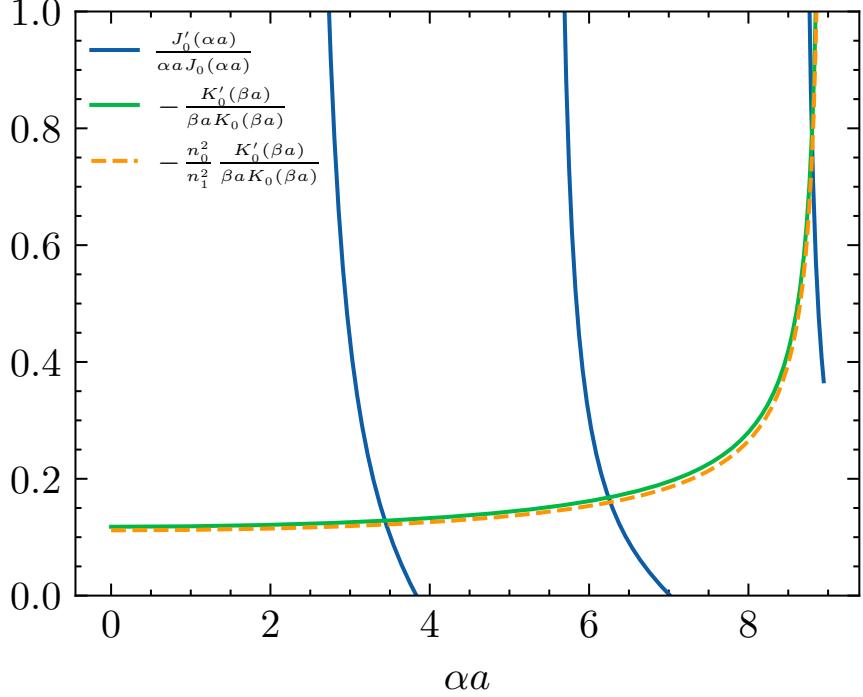
Las condiciones de corte se dan cuando $\beta a \rightarrow 0$. Utilizando las expresiones asintóticas para las funciones de Bessel con argumentos pequeños y sus relaciones de recurrencia, se tiene

$$\frac{\alpha a J_0(\alpha a)}{J_1(\alpha a)} = -\frac{\beta a K_0(\beta a)}{K_1(\beta a)} \approx (\beta a)^2 \ln\left(\frac{\beta a e^\gamma}{2}\right) \rightarrow 0,$$

por lo que se hace necesario que $J_0(\alpha a)|_{\alpha a \rightarrow V} = 0$. Denotando $x_{0,m} = 2.405, 5.520, 8.654, \dots$ al m -ésimo cero de la función $J_0(x)$, la longitud de onda de corte está dada por

$$(\lambda_c)_{0,m} = 2\pi a \frac{\sqrt{n_1^2 - n_0^2}}{x_{0,m}}, \quad (\text{modos TE y TM}). \quad (2.19)$$

Contrario al caso de la guía de onda tipo losa, en fibras ópticas se hace necesario estar bajo un umbral de corte máximo ($\lambda_c)_{0,1}$ no nulo para que los modos TE o TM existan.



2.3.2. Modos HE y EH

Interpretando la ecuación (2.15) como una cuadrática en $J_\ell'(\alpha a)/\alpha a J_\ell(\alpha a)$:

$$\frac{J_\ell'(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} = - \left(\frac{n_1^2 + n_0^2}{2n_1^2} \right) \frac{K_\ell'(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \pm \sqrt{\left(\frac{n_1^2 - n_0^2}{2n_1^2} \right)^2 \left(\frac{K_\ell'(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right)^2 + \left(\frac{k_z \ell}{k_0 n_1} \right)^2 \left[\left(\frac{1}{\alpha a} \right)^2 + \left(\frac{1}{\beta a} \right)^2 \right]^2}$$

Haciendo uso de las relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel $J_\ell(r)$, es posible obtener dos tipos de soluciones llamadas HE y EH:

$$\frac{J_{\ell-1}(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} = - \left(\frac{n_1^2 + n_0^2}{2n_1^2} \right) \frac{K_\ell'(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} + \frac{\ell}{(\alpha a)^2} - \sqrt{\Delta}, \quad (\text{modos HE}) \quad (2.20)$$

$$\frac{J_{\ell+1}(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} = \left(\frac{n_1^2 + n_0^2}{2n_1^2} \right) \frac{K_\ell'(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} + \frac{\ell}{(\alpha a)^2} - \sqrt{\Delta}, \quad (\text{modos EH}) \quad (2.21)$$

$$\Delta = \left(\frac{n_1^2 - n_0^2}{2n_1^2} \right)^2 \left(\frac{K_\ell'(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right)^2 + \left(\frac{k_z \ell}{k_0 n_1} \right)^2 \left[\left(\frac{1}{\alpha a} \right)^2 + \left(\frac{1}{\beta a} \right)^2 \right]^2$$

Para $\ell = 0$, se recuperan las relaciones obtenidas para los modos TE_m (HE_{0m}) y TM_m (EH_{0m}). Para $\ell \neq 0$ se hace necesario considerar las expresiones asintóticas de las funciones de Bessel cuando $\beta a \rightarrow 0$ y $\alpha a \rightarrow V$:

$$\frac{K'_\ell(x)}{x K_\ell(x)} = - \frac{K_{\ell-1}(x)}{x K_\ell(x)} - \frac{\ell}{x^2} \approx \begin{cases} \ln(x e^\gamma / 2) - \frac{1}{x^2} & \text{si } \ell = 1 \\ -\frac{1}{2(\ell-1)} - \frac{\ell}{x^2} & \text{si } \ell > 1 \end{cases}.$$

El caso $\ell = 1$ es de especial interés. La condición de modos HE se desarrolla como

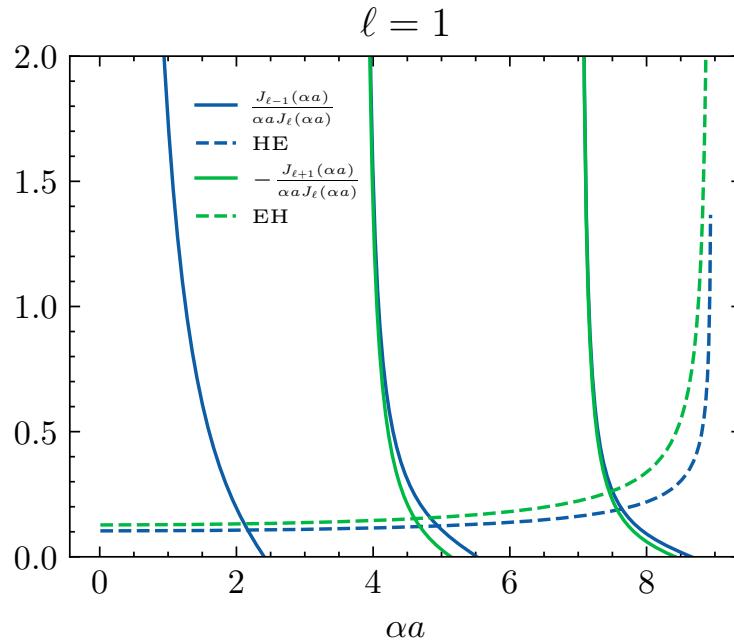
$$\frac{\alpha a J_1(\alpha a)}{J_0(\alpha a)} = \left\{ \left(\frac{n_1^2 + n_0^2}{2n_1^2} \right) \left[\ln \left(\frac{2}{e^\gamma \beta a} \right) + \frac{1}{(\beta a)^2} \right] + \frac{1}{(\alpha a)^2} - \sqrt{\Delta} \right\}^{-1} \rightarrow 0.$$

Basta considerar la función $J_1(\alpha a)|_{\alpha a \rightarrow V} = 0$. Por otro lado, la condición EH elimina el cero $x = 0$ del cociente $\frac{\alpha a J_1(\alpha a)}{J_2(\alpha a)}$ lo que hace que esté “desfasada” respecto a la condición HE. Usando un razonamiento similar al caso $\ell = 0$, las condiciones de corte son

$$(\lambda_c)_{1,m} = 2\pi a \frac{\sqrt{n_1^2 - n_0^2}}{x_{1,m}} \quad (\text{modos } \text{HE}_{1m})$$

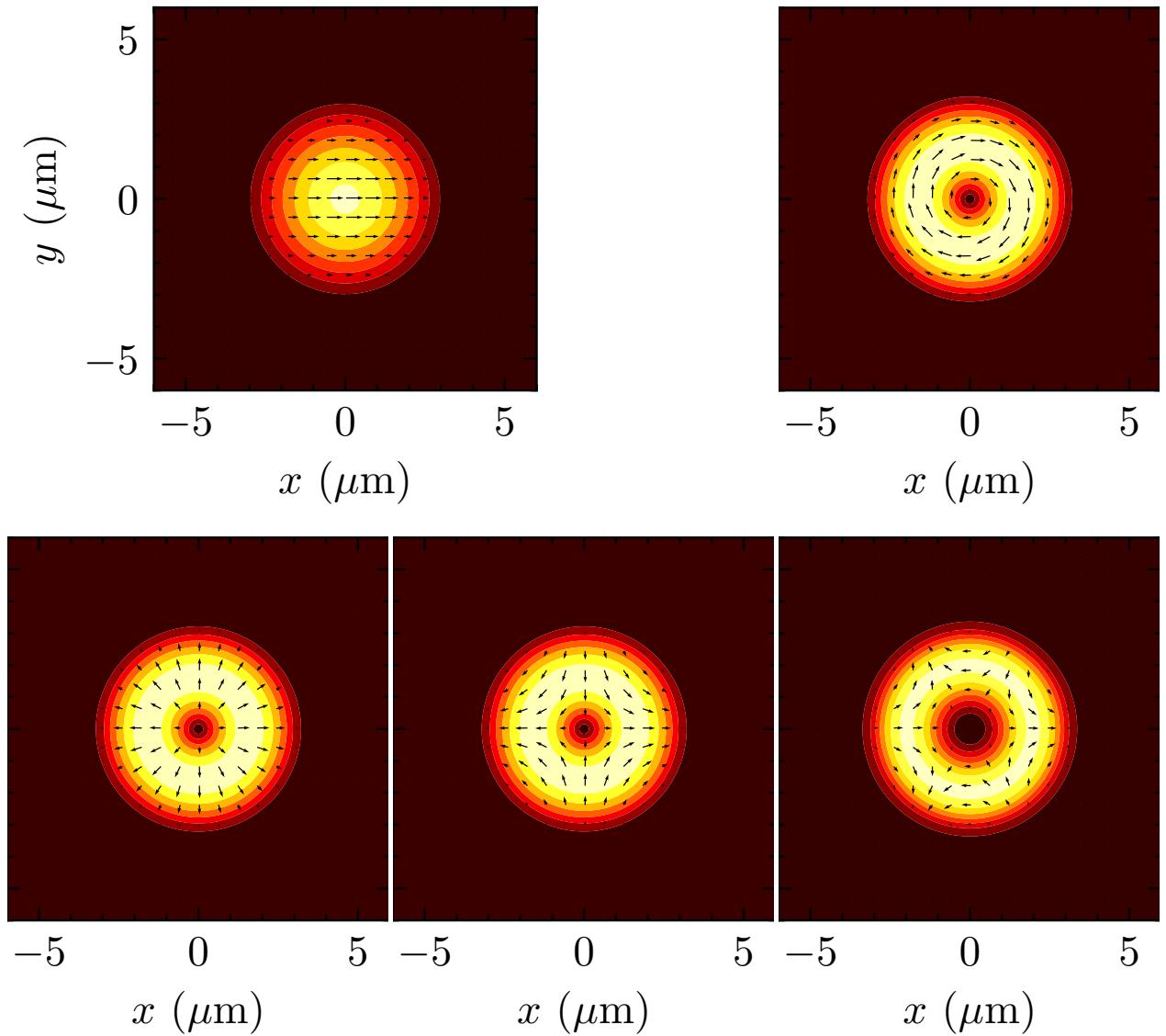
$$(\lambda_c)_{1,m} = 2\pi a \frac{\sqrt{n_1^2 - n_0^2}}{x_{1,m+1}} \quad (\text{modos } \text{EH}_{1m})$$

con $x_{1,m} = 0, 3.832, 7.016, 10.173, \dots$. En particular, el modo HE_{11} siempre existe.



El caso $\ell \geq 2$ tiene un desarrollo distinto por las forma asintóticas en juego:

NO SÉ SI INCLUIR LA DERIVACIÓN DE LA CONDICIÓN DE CUTOFF



2.4. Modos normales en guías de onda

Si la estructura de guías de onda no varía en la dirección z , el campo eléctrico se puede expresar como una onda plana del tipo $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_\nu(x, y)e^{i\beta_\nu z}$. A su vez, es conveniente separar el Laplaciano como $\nabla^2 \equiv \nabla_\perp^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. De esta forma, el lado izquierdo de las ecuaciones (2.6), se desarrolla como:

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 + k_0^2 n^2) \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \left(\nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 n^2 \right) \mathbf{E}_{\nu}(x, y) e^{i\beta_{\nu}z} \\
&= e^{i\beta_{\nu}z} \nabla_{\perp}^2 \mathbf{E}_{\nu} - \beta_{\nu}^2 \mathbf{E}_{\nu} e^{i\beta_{\nu}z} + k_0^2 n^2 \mathbf{E}_{\nu} e^{i\beta_{\nu}z} \\
&= [\nabla_{\perp}^2 + (k_0^2 n^2 - \beta_{\nu}^2)] \mathbf{E}_{\nu} e^{i\beta_{\nu}z} \\
&\approx 0 \\
\therefore [\nabla_{\perp}^2 + k_0^2 n^2(x, y)] \mathbf{E}_{\nu}(x, y) &= \beta_{\nu}^2 \mathbf{E}_{\nu}(x, y),
\end{aligned} \tag{2.22}$$

donde se ha usado la aproximación de guaje débil para anular el lado de derecho de la ecuación (2.6). Notemos que la ecuación (2.22) es un problema de autovalores β_{ν}^2 y autofunciones $\mathbf{E}_{\nu}(x, y)$, las cuales son ortogonales (ver apéndice A). En principio, la forma espacial del índice de refracción $n(x, y)$ puede ser arbitraria siempre y cuando que se satisfaga la condición de guaje débil.

2.5. Teoría de modos acoplados

Para el estudio de redes fotónicas, es conveniente utilizar herramientas similares a las de la Física del Sólido en lo que respecta a potenciales periódicos. En particular, se puede suponer que los modos guiados de una guía de onda están fuertemente ligados a ella (enlace fuerte o *Tight Binding*), incluso en presencia de otras guías de onda. Es decir, se supondrá que el ν -ésimo modo guiado de la m -ésima guía de onda satisface para toda distancia de propagación z la ecuación (2.22), donde el índice de refracción total se puede descomponer en una suma periódica de guías de onda $n^2(\mathbf{r}) = \sum_m n_m^2(\mathbf{r})$. Entonces, descomponiendo el campo eléctrico total de la forma $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{\nu, m} \mathbf{E}_{\nu, m}(x, y) a_{\nu, m}(z) e^{i\beta_{\nu, m}z}$ y reemplazando en la ecuación (2.6) se tiene:

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 + k_0^2 n^2) \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \left(\nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 n^2 \right) \sum_{\nu, m} \mathbf{E}_{\nu, m}(x, y) a_{\nu, m}(z) e^{i\beta_{\nu, m}z} \\
&= \sum_{\nu, m} \left[a_{\nu, m} e^{i\beta_{\nu, m}z} (\nabla_{\perp}^2 + k_0^2 n^2) \mathbf{E}_{\nu, m} + \mathbf{E}_{\nu, m} \frac{d^2}{dz^2} (a_{\nu, m} e^{i\beta_{\nu, m}z}) \right] \\
&= \sum_{\nu, m} \left[a_{\nu, m} (\nabla_{\perp}^2 + k_0^2 n^2 - \beta_{\nu, m}^2) + \frac{d^2 a_{\nu, m}}{dz^2} + 2i\beta_{\nu, m} \frac{da_{\nu, m}}{dz} \right] e^{i\beta_{\nu, m}z} \mathbf{E}_{\nu, m} \\
&\approx \sum_{\nu, m} \left[a_{\nu, m} k_0^2 (n^2 - n_m^2) + 2i\beta_{\nu, m} \frac{da_{\nu, m}}{dz} \right] e^{i\beta_{\nu, m}z} \mathbf{E}_{\nu, m} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donde se ha usado la aproximación paraxial $\left| \frac{d^2 a_{\nu,m}}{dz^2} \right| \ll 2\beta_{\nu,m} \left| \frac{da_{\nu,m}}{dz} \right|$. Aplicando producto punto con $\mathbf{E}_{\mu,m}'^*$ e integrando en todo el plano xy :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\nu,m} \left[a_{\nu,m} k_0^2 (n^2 - n_m^2) + 2i\beta_{\nu,m} \frac{da_{\nu,m}}{dz} \right] e^{i\beta_{\nu,m} z} \mathbf{E}_{\nu,m} \cdot \mathbf{E}_{\mu,m}'^* dx dy = 0 \\ & \sum_{\nu,m} \left(i \frac{2k_0}{\varepsilon_0 c} \frac{da_{\nu,m}}{dz} \delta_{\nu,\mu} \delta_{m,m'} + \frac{2k_0}{\varepsilon_0 c} C_{\mu,\nu,m',m} a_{\nu,m} \right) e^{i\beta_{\nu,m} z} = 0 \\ & i \frac{da_{\mu,m'}}{dz} e^{i\beta_{\mu,m'} z} + \sum_{\nu,m \neq m'} C_{\mu,\nu,m',m} a_{\nu,m} e^{i\beta_{\nu,m} z} = 0, \end{aligned}$$

donde se han definido y usado

$$C_{\mu,\nu,m',m} \equiv \frac{\varepsilon_0 k_0 c}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (n^2 - n_m^2) \mathbf{E}_{\nu,m} \cdot \mathbf{E}_{\mu,m}'^* dx dy, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_{\nu,m} \cdot \mathbf{E}_{\mu,m}'^* dx dy \approx \frac{k_0}{\varepsilon_0 c \beta_{\nu,m}} \delta_{\nu,\mu} \delta_{m,m'}.$$

Es decir, el efecto del modo (ν, m) en la dinámica del modo (μ, m') sólo es apreciable al ponderar con la expresión $(n^2 - n_m^2)$, lo que da origen al término $C_{\mu,\nu,m',m}$ conocido comúnmente como constante de acoplamiento. Sin el peso del contraste, la interacción es evanescente, por lo que la aproximación de ortogonalidad se hace razonable con suficiente distancia entre guías (sobre los 15 μm en los experimentos de esta tesis), aunque existen formas de tomar en cuenta estos efectos de no ortogonalidad [46]. Cuando $m = m'$, el acoplamiento $C_{\mu,\nu,m',m}$ es nulo por definición. Notemos que $C_{\mu,\nu,m',m} \neq C_{\nu,\mu,m,m'}$ en general:

$$\begin{aligned} C_{\mu,\nu,m',m} &= \frac{\varepsilon_0 k_0 c}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (n^2 - n_{m'}^2 + n_{m'}^2 - n_m^2) \mathbf{E}_{\mu,m'} \cdot \mathbf{E}_{\nu,m}^* dx dy = C_{\nu,\mu,m,m'} + D_{\nu,\mu,m,m'} \\ D_{\nu,\mu,m,m'} &= -D_{\mu,\nu,m',m} = \frac{\varepsilon_0 k_0 c}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (n_{m'}^2 - n_m^2) \mathbf{E}_{\mu,m'} \cdot \mathbf{E}_{\nu,m}^* dx dy \end{aligned}$$

Sin embargo, salvo que se indique lo contrario, se asumirá la condición de reciprocidad, $C_{\mu,\nu,m',m} = C_{\nu,\mu,m,m'}$. Finalmente, es posible hacer el cambio de variables $a_{\nu,m} \equiv a_{\nu,m} e^{i\beta_{\nu,m} z}$ para llegar a las llamadas ecuaciones discretas tipo Schrödinger [19, 20, 30]:

$$-i \frac{da_{\mu,m'}}{dz} = \beta_{\mu,m'} a_{\mu,m'} + \sum_{\nu,m \neq m'} C_{\mu,\nu,m',m} a_{\nu,m}. \quad (2.23)$$

o, libre de la elección particular de enumeración de índices (μ, m') y redefiniendo $C_{\mu,\mu,m',m'} \equiv \beta_{\mu,m'}$:

$$-i \frac{d}{dz} |a\rangle = \hat{C} |a\rangle, \quad (2.24)$$

con $a_{\mu,m'} \equiv \langle \mu, m' | a \rangle$. Esto permite definir el operador de evolución espacial $U(z) = e^{i\hat{C}z}$ tal que $|a(z)\rangle = U(z - z_0) |a(z_0)\rangle$ que será de utilidad en los métodos numéricos de resolución de la ecuación (2.24).

Es posible plantear un principio de mínima acción si se propone el siguiente Lagrangiano para la ecuación (2.23):

$$L = - \sum_{\mu,m'} \bar{a}_{\mu,m'} \left(i \frac{da_{\mu,m'}}{dz} + \sum_{\nu,m} C_{\mu,\nu,m',m} a_{\nu,m} \right) \quad (2.25)$$

Notando que el momentum generalizado es $\Pi_{\mu,m'} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_{\mu,m'}} = -i\bar{a}_{\mu,m'}$ el Hamiltoniano del sistema se escribe en función del Lagrangiano de la ecuación (2.25) como:

$$H = \sum_{\mu,m'} \Pi_{\mu,m'} \dot{a}_{\mu,m'} - L = i \sum_{\nu,\mu,m,m'} C_{\mu,\nu,m',m} \Pi_{\mu,m'} a_{\nu,m} = \sum_{\nu,\mu,m,m'} C_{\mu,\nu,m',m} |a_{\nu,m}|^2 \quad (2.26)$$

Variando el Lagrangiano L se tiene [47]:

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_{\mu,m'} \frac{\partial L}{\partial a_{\mu,m'}} \delta a_{\mu,m'} + \frac{\partial L}{\partial \bar{a}_{\mu,m'}} \delta \bar{a}_{\mu,m'} + \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_{\mu,m'}} \delta \dot{a}_{\mu,m'} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{a}}_{\mu,m'}} \delta \dot{\bar{a}}_{\mu,m'} \\ &= \sum_{\mu,m'} \left(\frac{\partial L}{\partial a_{\mu,m'}} - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_{\mu,m'}} \right) \delta a_{\mu,m'} + \left(\frac{\partial L}{\partial \bar{a}_{\mu,m'}} - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{a}}_{\mu,m'}} \right) \delta \bar{a}_{\mu,m'} + \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_{\mu,m'}} \delta a_{\mu,m'} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{a}}_{\mu,m'}} \delta \bar{a}_{\mu,m'} \right) \\ &\implies \frac{d}{dz} \sum_{\mu,m'} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_{\mu,m'}} \delta a_{\mu,m'} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{a}}_{\mu,m'}} \delta \bar{a}_{\mu,m'} \right) = 0. \end{aligned}$$

Considerando el par de transformaciones asociadas al grupo unitario U(1), $a_{\mu,m'} \rightarrow a'_{\mu,m'} = e^{i\phi} a_{\mu,m'}$, $\bar{a}_{\mu,m'} \rightarrow \bar{a}'_{\mu,m'} = e^{-i\phi} \bar{a}_{\mu,m'}$ que dejan invariante el Lagrangiano, y considerando $\phi \ll 1$ se tiene $\delta a_{\mu,m'} = i\phi a_{\mu,m'}$ y $\delta \bar{a}_{\mu,m'} = -i\phi \bar{a}_{\mu,m'}$, por lo que la cantidad conservada, P , que se identifica con la potencia total del sistema es:

$$P = \sum_{\mu,m'} |a_{\mu,m'}|^2. \quad (2.27)$$

Se tienen entonces dos cantidades conservadas en la dinámica, H y P , que son de utilidad para verificar la validez de soluciones numéricas a la ecuación (2.24).

2.5.1. Teorema de Bloch

Si bien es posible reformular las ecuaciones de Maxwell como un problema de autovalores en analogía a Mecánica Cuántica para plantear el Teorema de Bloch [48], en el contexto de sistemas discretos la ecuación tipo Schrödinger (2.24) con la matriz \hat{C} hermítica es justificación suficiente para invocar el Teorema de Bloch: Es posible expresar las soluciones del sistema en una base de cuasimomento cuya periodicidad sea la misma que la de la matriz \hat{C} . En la práctica, se aplicará un Ansatz de Bloch $|a\rangle = e^{i(\lambda z + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} |A\rangle$, con $|A\rangle$ un vector constante con la misma dimensionalidad que número de sitios en la celda unitaria de la red.

2.5.2. Ejemplo: Red 1D multimodal

$$\lambda = \beta_\mu + 2C_\mu \cos(ka)$$

Capítulo 3

Métodos numéricos

3.1. Expansión en modos normales

3.2. Beam Propagation Method

método numérico escalar conocido como *Beam Propagation Method*, utilizado ampliamente en esta área de investigación [16, 35, 36, 41, 49]. Éste consiste en resolver numéricamente la ecuación

$$2in_0k_0\frac{\partial}{\partial z}\psi(x, y, z) = \nabla_{\perp}^2\psi(x, y, z) + (n^2 - n_0^2)k_0^2\psi(x, y, z), \quad (3.1)$$

con $\psi(x, y, z)$, n_0 , $n(x, y)$ y k_0 la envolvente de la componente horizontal campo eléctrico, el índice de refracción del material, el índice de refracción inducido y el número de onda en el vacío, respectivamente.

3.3. Ecuaciones dinámicas discretas tipo Schrödinger

Capítulo 4

Métodos experimentales

4.1. Escritura de guías de onda

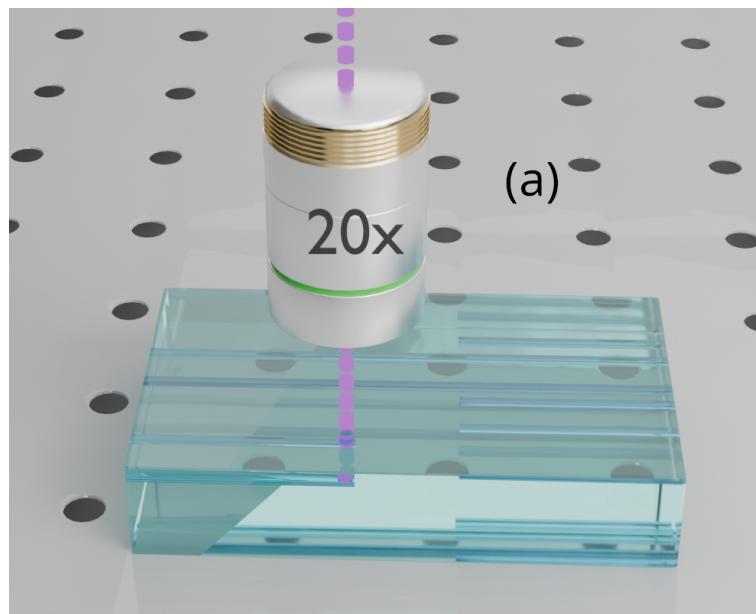


Figura 4.1: Escritura.

4.2. Montaje de excitación láser supercontinuo

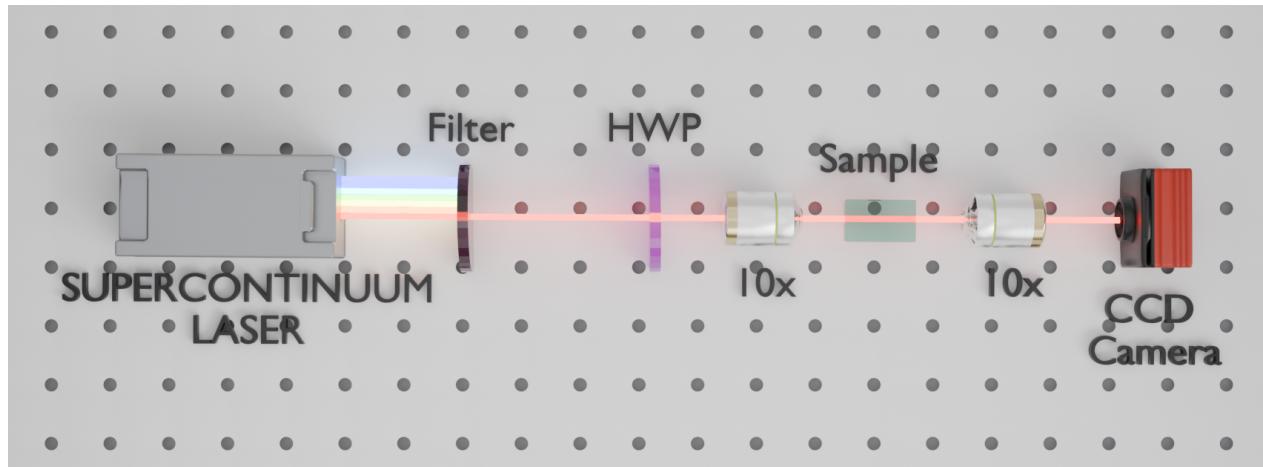


Figura 4.2: Montaje SC.

4.3. Montaje de modulación espacial de luz

Para usar condiciones iniciales distintas a una gaussiana se hace necesario incorporar métodos de modulación espacial de luz. En esta tesis se utilizó una técnica conocida como

4.3.1. Etapa premodulación

El modulador espacial de luz utilizado es un HOLOEYE PLUTO-NIR SLM - Reflective LCOS, cuya respuesta óptica ocurre con polarización paralela al plano de la mesa óptica. Se utiliza un retardador de media onda ($\lambda/2$) para que la polarización del la luz láser coincida con la de la respuesta del SLM. Posteriormente se magnifica y se colima el haz para que abarque todo el área de pixeles disponible.

4.3.2. Etapa de modulación

4.3.3. Etapa de acoplamiento

4.3.4. Etapa de captura en cámara

4.3.5. Circuito óptico

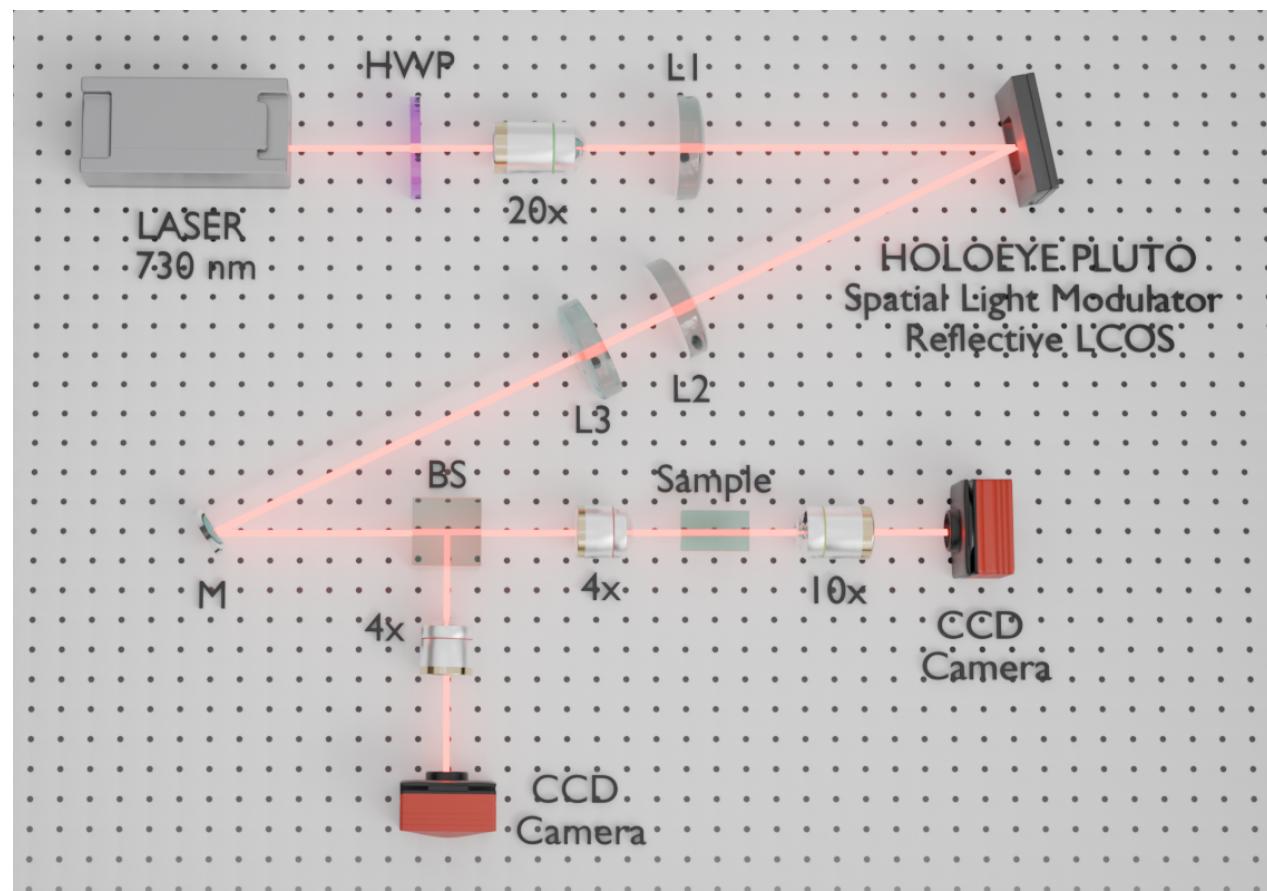


Figura 4.3: Montaje SLM.

4.4. Análisis de imágenes

Capítulo 5

Moléculas Fotónicas

Capítulo 6

Acoplamiento interorbital SP

Capítulo 7

Ángulo mágico en modos P

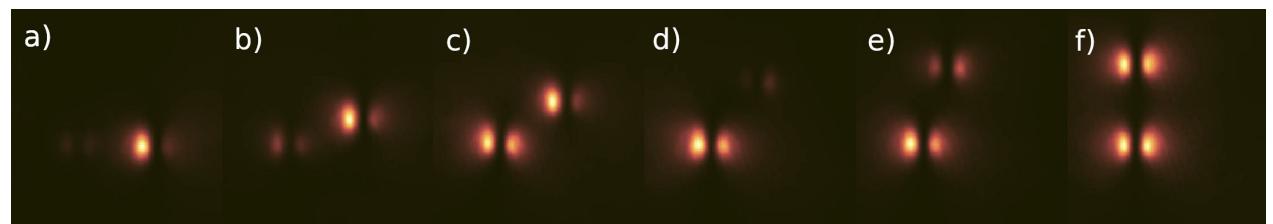


Figura 7.1: Barrido en ángulo que captura el paso por acoplamiento nulo.

Capítulo 8

Haces con momentum orbital angular (OAM)

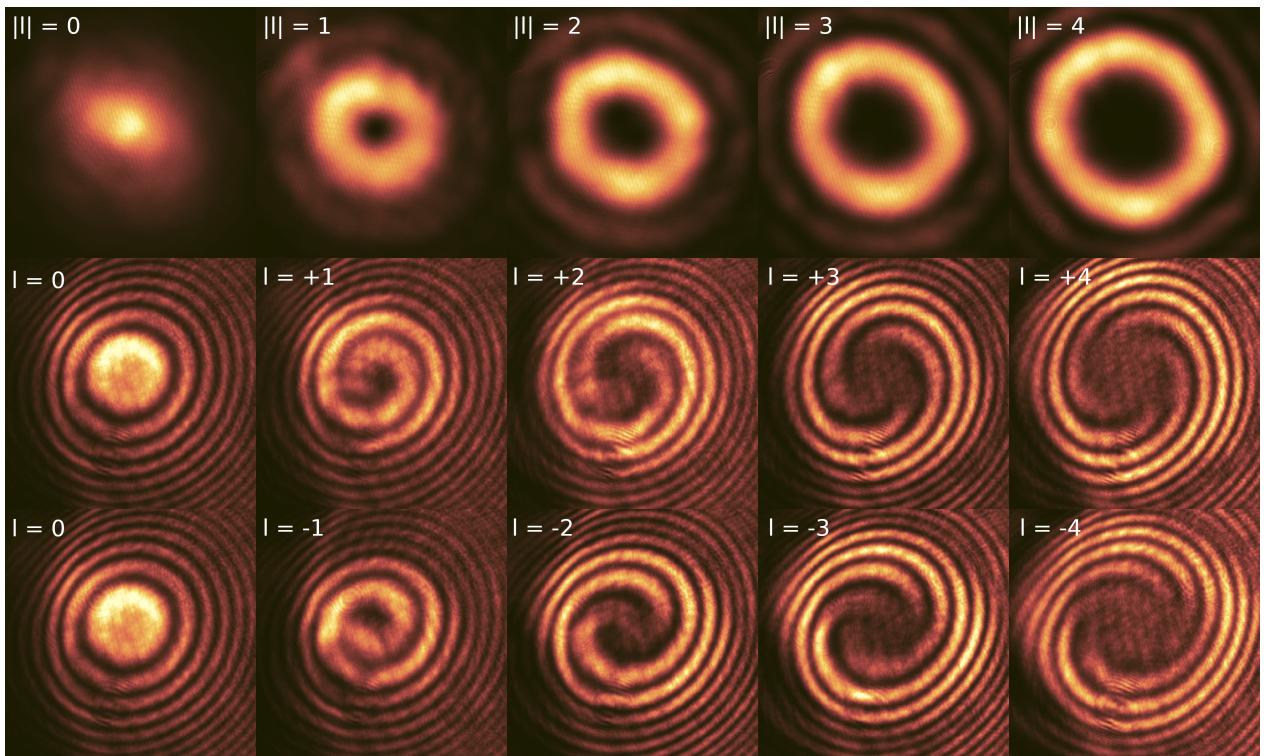


Figura 8.1: Generación de OAMs e interferencia tipo Mach-Zehnder. Se aprecia la carga de los OAMs contando la cantidad de espirales originados desde el centro.

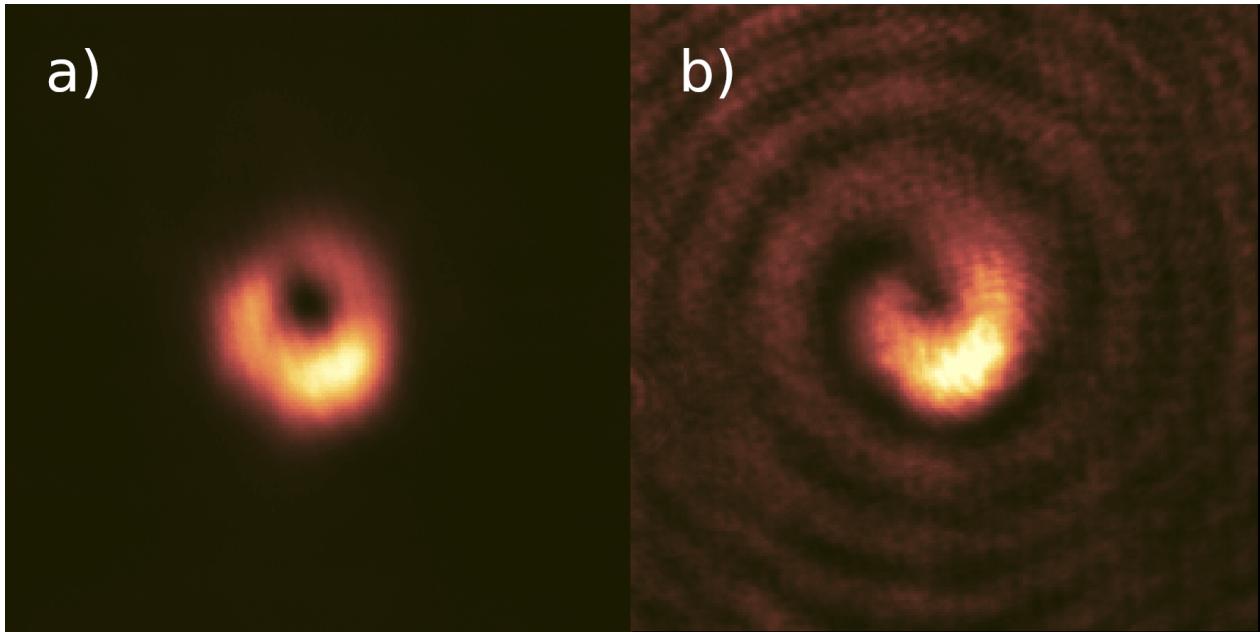


Figura 8.2: Propagación de vórtices en guías de onda. En a) se tiene la intensidad del perfil de salida luego de excitar un OAM con carga $\ell = 1$. En b) se tiene una estructura de fase **similar a la esperada pero con falta de definición**.

Capítulo 9

Conclusiones

Bibliografía

- [1] All nobel prizes in physics. URL <https://www.nobelprize.org/prizes/lists/all-nobel-prizes-in-physics/>.
- [2] P. Maine, D. Strickland, P. Bado, M. Pessot, and G. Mourou. Generation of ultrahigh peak power pulses by chirped pulse amplification. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 24(2):398–403, 1988. doi: 10.1109/3.137.
- [3] M. Lewenstein, Ph. Balcou, M. Yu. Ivanov, Anne L’Huillier, and P. B. Corkum. Theory of high-harmonic generation by low-frequency laser fields. *Phys. Rev. A*, 49:2117–2132, Mar 1994. doi: 10.1103/PhysRevA.49.2117. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.49.2117>.
- [4] P. M. Paul, E. S. Toma, P. Breger, G. Mullot, F. Augé, Ph. Balcou, H. G. Muller, and P. Agostini. Observation of a train of attosecond pulses from high harmonic generation. *Science*, 292(5522):1689–1692, 2001. doi: 10.1126/science.1059413. URL <https://www.science.org/doi/10.1126/science.1059413>.
- [5] Thomas Brabec and Ferenc Krausz. Intense few-cycle laser fields: Frontiers of nonlinear optics. *Reviews of Modern Physics*, 72:545–591, 2000. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:120371634>.
- [6] J F Clauser and A Shimony. Bell’s theorem. experimental tests and implications. *Reports on Progress in Physics*, 41(12):1881, dec 1978. doi: 10.1088/0034-4885/41/12/002. URL <https://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/41/12/002>.
- [7] Alain Aspect, Jean Dalibard, and Gérard Roger. Experimental test of bell’s inequalities using time-varying analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, 49:1804–1807, Dec 1982. doi: 10.1103/PhysRevLett.49.1804. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.49.1804>.
- [8] Paul G. Kwiat, Klaus Mattle, Harald Weinfurter, Anton Zeilinger, Alexander V. Sergienko, and Yanhua Shih. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 75:4337–4341, Dec 1995. doi: 10.1103/PhysRevLett.75.4337. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.4337>.
- [9] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, and T. Yamane. Optical trapping and manipulation of single cells using infrared laser beams. *Nature*, 330(6150):769–771, Dec 1987. ISSN 1476-4687. doi: 10.1038/330769a0. URL <https://doi.org/10.1038/330769a0>.

- [10] Isamu Akasaki. Gan-based p-n junction blue-light-emitting devices. *Proc. IEEE*, 101(10): 2200–2210, 2013. doi: 10.1109/JPROC.2013.2274928. URL <https://doi.org/10.1109/JPROC.2013.2274928>.
- [11] Michael Kneissl, Tae-Yeon Seong, Jung Han, and Hiroshi Amano. The emergence and prospects of deep-ultraviolet light-emitting diode technologies. *Nature Photonics*, 13(4): 233–244, Apr 2019. ISSN 1749-4893. doi: 10.1038/s41566-019-0359-9. URL <https://doi.org/10.1038/s41566-019-0359-9>.
- [12] Shuji Nakamura, Takashi Mukai, and Masayuki Senoh. Candela-class high-brightness InGaN/AlGaN double-heterostructure blue-light-emitting diodes. *Applied Physics Letters*, 64(13):1687–1689, 03 1994. ISSN 0003-6951. doi: 10.1063/1.111832. URL <https://doi.org/10.1063/1.111832>.
- [13] Submarine cable frequently asked questions, . URL <https://www2.telegeography.com/submarine-cable-faqs-frequently-asked-questions>.
- [14] Hogares con acceso a internet fijo alcanzan el 67 % y usuarios aumentan preferencia por redes de alta velocidad, . URL <https://www.subtel.gob.cl/hogares-con-acceso-a-internet-fijo-alcanzan-el-67-y-usuarios-aumentan-preferencia-por-redes-de-alta-velocidad>.
- [15] Alexander Szameit, Dominik Blömer, Jonas Burghoff, Thomas Schreiber, Thomas Pertsch, Stefan Nolte, Andreas Tünnermann, and Falk Lederer. Discrete nonlinear localization in femtosecond laser written waveguides in fused silica. *Opt. Express*, 13(26):10552–10557, Dec 2005. doi: 10.1364/OPEX.13.010552. URL <https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-13-26-10552>.
- [16] Yonatan Plotnik, Or Peleg, Felix Dreisow, Matthias Heinrich, Stefan Nolte, Alexander Szameit, and Mordechai Segev. Experimental observation of optical bound states in the continuum. *Phys. Rev. Lett.*, 107:183901, Oct 2011. doi: 10.1103/PhysRevLett.107.183901. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.183901>.
- [17] Rodrigo A. Vicencio, Camilo Cantillano, Luis Morales-Inostroza, Bastián Real, Cristian Mejía-Cortés, Steffen Weimann, Alexander Szameit, and Mario I. Molina. Observation of localized states in lieb photonic lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 114:245503, Jun 2015. doi: 10.1103/PhysRevLett.114.245503. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.245503>.
- [18] Sebabrata Mukherjee, Alexander Spracklen, Debaditya Choudhury, Nathan Goldman, Patrik Öhberg, Erika Andersson, and Robert R. Thomson. Observation of a localized flat-band state in a photonic lieb lattice. *Phys. Rev. Lett.*, 114:245504, Jun 2015. doi: 10.1103/PhysRevLett.114.245504. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.245504>.
- [19] Daniel Leykam, Alexei Andreevov, and Sergej Flach. Artificial flat band systems: from lattice models to experiments. *Advances in Physics: X*, 3(1):1473052, 2018. doi: 10.1080/23746149.2018.1473052. URL <https://doi.org/10.1080/23746149.2018.1473052>.
- [20] Rodrigo A. Vicencio. Photonic flat band dynamics. *Advances in Physics: X*, 6(1): 1878057, 2021. doi: 10.1080/23746149.2021.1878057. URL <https://doi.org/10.1080/23746149.2021.1878057>.

- [21] Diego Román-Cortés, Guillermo Fadic, Christofer Cid-Lara, Diego Guzmán-Silva, Bastián Real, and Rodrigo A. Vicencio. Strain induced localization to delocalization transition on a lieb photonic ribbon lattice. *Scientific Reports*, 11(1):21411, Nov 2021. ISSN 2045-2322. doi: 10.1038/s41598-021-00967-3. URL <https://doi.org/10.1038/s41598-021-00967-3>.
- [22] Javier Cubillos Cornejo, Diego Guzmán-Silva, Víctor Hugo Cornejo, Ignacio Bordeu, and Rodrigo A. Vicencio. Transport and localization on dendrite-inspired flat band linear photonic lattices. *Scientific Reports*, 13(1):13057, Aug 2023. ISSN 2045-2322. doi: 10.1038/s41598-023-39985-8. URL <https://doi.org/10.1038/s41598-023-39985-8>.
- [23] Paloma Vildoso, Rodrigo A. Vicencio, and Jovana Petrovic. Ultra-low-loss broadband multi-port optical splitters. *Opt. Express*, 31(8):12703–12716, Apr 2023. doi: 10.1364/OE.486855. URL <https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-31-8-12703>.
- [24] Zhaoyang Zhang, Shaohuan Ning, Hua Zhong, Milivoj R. Belić, Yiqi Zhang, Yuan Feng, Shun Liang, Yanpeng Zhang, and Min Xiao. Experimental demonstration of optical bloch oscillation in electromagnetically induced photonic lattices. *Fundamental Research*, 2(3): 401–404, 2022. ISSN 2667-3258. doi: <https://doi.org/10.1016/j.fmre.2021.08.019>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2667325821001746>.
- [25] Tal Schwartz, Guy Bartal, Shmuel Fishman, and Mordechai Segev. Transport and anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices. *Nature*, 446(7131):52–55, Mar 2007. ISSN 1476-4687. doi: 10.1038/nature05623. URL <https://doi.org/10.1038/nature05623>.
- [26] Sebabrata Mukherjee, Alexander Spracklen, Manuel Valiente, Erika Andersson, Patrik Öhberg, Nathan Goldman, and Robert R. Thomson. Experimental observation of anomalous topological edge modes in a slowly driven photonic lattice. *Nature Communications*, 8(1):13918, Jan 2017. ISSN 2041-1723. doi: 10.1038/ncomms13918. URL <https://doi.org/10.1038/ncomms13918>.
- [27] Lukas J. Maczewsky, Julia M. Zeuner, Stefan Nolte, and Alexander Szameit. Observation of photonic anomalous floquet topological insulators. *Nature Communications*, 8(1):13756, Jan 2017. ISSN 2041-1723. doi: 10.1038/ncomms13756. URL <https://doi.org/10.1038/ncomms13756>.
- [28] G. Cáceres-Aravena, L. E. F. Foa Torres, and R. A. Vicencio. Topological and flat-band states induced by hybridized linear interactions in one-dimensional photonic lattices. *Phys. Rev. A*, 102:023505, Aug 2020. doi: 10.1103/PhysRevA.102.023505. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.102.023505>.
- [29] Roman S. Savelev and Maxim A. Gorlach. Topological states in arrays of optical waveguides engineered via mode interference. *Phys. Rev. B*, 102:161112, Oct 2020. doi: 10.1103/PhysRevB.102.161112. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.102.161112>.
- [30] Falk Lederer, George I. Stegeman, Demetri N. Christodoulides, Gaetano Assanto, Moti Segev, and Yaron Silberberg. Discrete solitons in optics. *Physics Reports*, 463(1):1–126, 2008. ISSN 0370-1573. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2008.04.004>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157308001257>.

- [31] S. Rojas-Rojas, E. Barriga, C. Muñoz, P. Solano, and C. Hermann-Avigliano. Manipulation of multimode squeezing in a coupled waveguide array. *Phys. Rev. A*, 100:023841, Aug 2019. doi: 10.1103/PhysRevA.100.023841. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.100.023841>.
- [32] R. Julius, A. N. Alias, and M. S. A. Halim. Quantum squeezing in coupled waveguide networks with quadratic and cubic nonlinearity. *The European Physical Journal Plus*, 137(1):91, Jan 2022. ISSN 2190-5444. doi: 10.1140/epjp/s13360-021-02302-1. URL <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-02302-1>.
- [33] Joaquin Medina Dueñas, Gabriel O’Ryan Pérez, Carla Hermann-Avigliano, and Luis E. F. Foa Torres. Quadrature protection of squeezed states in a one-dimensional photonic topological insulator. *Quantum*, 5:526, August 2021. ISSN 2521-327X. doi: 10.22331/q-2021-08-17-526. URL <https://doi.org/10.22331/q-2021-08-17-526>.
- [34] Zhiwen Li, Siqi Hu, Qiao Zhang, Ruijuan Tian, Linpeng Gu, Yisong Zhu, Qingchen Yuan, Ruixuan Yi, Chen Li, Yan Liu, Yue Hao, Xuetao Gan, and Jianlin Zhao. Telecom-band waveguide-integrated mos2 photodetector assisted by hot electrons. *ACS Photonics*, 9(1):282–289, 2022. doi: 10.1021/acspophotonics.1c01622. URL <https://doi.org/10.1021/acspophotonics.1c01622>.
- [35] Diego Guzmán-Silva, Gabriel Cáceres-Aravena, and Rodrigo A. Vicencio. Experimental observation of interorbital coupling. *Phys. Rev. Lett.*, 127:066601, Aug 2021. doi: 10.1103/PhysRevLett.127.066601. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.127.066601>.
- [36] Christina Jörg, Gerard Queraltó, Mark Kremer, Gerard Pelegrí, Julian Schulz, Alexander Szameit, Georg von Freymann, Jordi Mompart, and Verònica Ahufinger. Artificial gauge field switching using orbital angular momentum modes in optical waveguides. *Light: Science & Applications*, 9(1):150, Aug 2020. ISSN 2047-7538. doi: 10.1038/s41377-020-00385-6. URL <https://doi.org/10.1038/s41377-020-00385-6>.
- [37] Gabriel Cáceres-Aravena, Diego Guzmán-Silva, Ignacio Salinas, and Rodrigo A. Vicencio. Controlled transport based on multiorbital aharonov-bohm photonic caging. *Phys. Rev. Lett.*, 128:256602, Jun 2022. doi: 10.1103/PhysRevLett.128.256602. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.128.256602>.
- [38] Yudong Lian, Xuan Qi, Yuhe Wang, Zhenxu Bai, Yulei Wang, and Zhiwei Lu. Oam beam generation in space and its applications: A review. *Optics and Lasers in Engineering*, 151:106923, 2022. ISSN 0143-8166. doi: <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2021.106923>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0143816621003924>.
- [39] Jaime A. Anguita, Joaquín Herreros, and Ivan B. Djordjevic. Coherent multimode oam superpositions for multidimensional modulation. *IEEE Photonics Journal*, 6(2):1–11, 2014. doi: 10.1109/JPHOT.2014.2309645.
- [40] Wei-Guan Shen, Yuan Chen, Hui-Ming Wang, and Xian-Min Jin. Oam mode conversion in a photonic chip. *Optics Communications*, 507:127615, 2022. ISSN 0030-4018. doi: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2021.127615>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401821008646>.

- [41] Zhichan Hu, Domenico Bongiovanni, Ziteng Wang, Xiangdong Wang, Daohong Song, Jing-jun Xu, Roberto Morandotti, Hrvoje Buljan, and Zhigang Chen. Topologically protected vortex transport via chiral-symmetric disclination, 2023.
- [42] J. Polo, J. Mompart, and V. Ahufinger. Geometrically induced complex tunnelings for ultra-cold atoms carrying orbital angular momentum. *Phys. Rev. A*, 93:033613, Mar 2016. doi: 10.1103/PhysRevA.93.033613. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.93.033613>.
- [43] Chuang Jiang, Yanting Wu, Meiyang Qin, and Shaolin Ke. Topological bound modes with orbital angular momentum in optical waveguide arrays. *Journal of Lightwave Technology*, 41(7):2205–2211, 2023. doi: 10.1109/JLT.2022.3200139.
- [44] M. Bayer, T. Gutbrod, J. P. Reithmaier, A. Forchel, T. L. Reinecke, P. A. Knipp, A. A. Dremin, and V. D. Kulakovskii. Optical modes in photonic molecules. *Phys. Rev. Lett.*, 81:2582–2585, Sep 1998. doi: 10.1103/PhysRevLett.81.2582. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.2582>.
- [45] Maxim Mazanov, Diego Román-Cortés, Gabriel Cáceres-Aravena, Christofer Cid, Maxim A. Gorlach, and Rodrigo A. Vicencio. Photonic molecule approach to multiorbital topology. *Nano Letters*, 24(15):4595–4601, 2024. doi: 10.1021/acs.nanolett.4c00728. URL <https://doi.org/10.1021/acs.nanolett.4c00728>. PMID: 38574276.
- [46] J. Schulz, C. Jörg, and G. von Freymann. Geometric control of next-nearest-neighbor coupling in evanescently coupled dielectric waveguides. *Optics Express*, 30(6):9869–9877, March 2022. ISSN 1094-4087. doi: 10.1364/OE.447921. URL <https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?uri=oe-30-6-9869>. Publisher: Optica Publishing Group.
- [47] Jean Alexandre, Peter Millington, and Dries Seynaeve. Symmetries and conservation laws in non-Hermitian field theories. *Physical Review D*, 96(6):065027, September 2017. ISSN 2470-0010, 2470-0029. doi: 10.1103/PhysRevD.96.065027. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.96.065027>.
- [48] John D. Joannopoulos, Steven G. Johnson, Joshua N. Winn, and Robert D. Meade. *Photonic crystals: molding the flow of light*. Princeton University Press, Princeton Oxford, 2nd edition edition, 2008. ISBN 978-0-691-12456-8.
- [49] Ginés Lifante Pedrola. *Beam Propagation Method for Design of Optical Waveguide Devices*. Wiley, 2015. ISBN 9781119083382. URL <https://books.google.cl/books?id=ZV6-CgAAQBAJ>.
- [50] Wei-Ping Huang. Coupled-mode theory for optical waveguides: an overview. *Journal of The Optical Society of America A-optics Image Science and Vision*, 11:963–983, 1994. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:120397076>.
- [51] Alex J Yuffa. Vectorizing green’s identities. *Journal of Physics Communications*, 5(5):055001, may 2021. doi: 10.1088/2399-6528/abfa27. URL <https://dx.doi.org/10.1088/2399-6528/abfa27>.

Apéndice A

Ortogonalidad de los modos normales

La ecuación (2.22) permite en encontrar la condición de ortogonalidad de los modos normales del campo eléctrico \mathbf{E}_ν . Para ello, se puede tomar producto punto a la ecuación por \mathbf{E}_μ^* e integrar en una superficie S :

$$\iint_S (\nabla_\perp^2 + k_0^2 n^2) \mathbf{E}_\nu \cdot \mathbf{E}_\mu^* dx dy = \beta_\nu^2 \iint_S \mathbf{E}_\nu \cdot \mathbf{E}_\mu^* dx dy \quad (\text{A.1})$$

Si intercambiamos los índices ν y μ tenemos:

$$\iint_S (\nabla_\perp^2 + k_0^2 n^2) \mathbf{E}_\mu \cdot \mathbf{E}_\nu^* dx dy = \beta_\mu^2 \iint_S \mathbf{E}_\mu \cdot \mathbf{E}_\nu^* dx dy \quad (\text{A.2})$$

Restando las ecuaciones (A.1) y (A.2) y escogiendo modos reales:

$$\begin{aligned} (\beta_\nu^2 - \beta_\mu^2) \iint_S \mathbf{E}_\mu \cdot \mathbf{E}_\nu dx dy &= \iint_S (\mathbf{E}_\mu \cdot \nabla_\perp^2 \mathbf{E}_\nu - \mathbf{E}_\nu \cdot \nabla_\perp^2 \mathbf{E}_\mu) dx dy \\ &= \oint_{\partial S} (\mathbf{E}_\mu \times \nabla \times \mathbf{E}_\nu - \mathbf{E}_\nu \times \nabla \times \mathbf{E}_\mu) \cdot \hat{n} d\ell \\ &\quad + \oint_{\partial S} (\hat{n} \cdot \mathbf{E}_\mu) (\nabla \cdot \mathbf{E}_\nu) - (\hat{n} \cdot \mathbf{E}_\nu) (\nabla \cdot \mathbf{E}_\mu) d\ell \\ &\stackrel{\partial S \rightarrow \infty}{=} 0. \\ \therefore \iint_S \mathbf{E}_\mu \cdot \mathbf{E}_\nu^* dx dy &= 0, \quad \text{si } \nu \neq \mu, \end{aligned}$$

donde se ha usado la segunda identidad de Green vectorial [51] y que el campo eléctrico debe hacerse anularse en el infinito, aunque basta considerar que el campo sea nulo en el borde de la región S .

Apéndice B

Código en Python para cálculo de modos normales

Apéndice C

Código en C de BPM

Apéndice D

Código en Python generador de hologramas