UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

REDES MULTIORBITALES BASADAS EN MOLÉCULAS FOTÓNICAS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS, MENCIÓN EN FÍSICA

DIEGO ANTONIO ROMÁN CORTÉS

PROFESOR GUÍA:
RODRIGO ANDRÉS VICENCIO POBLETE

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
XX
PEDRO ORELLANA

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por los proyectos Instituto Milenio para la Investigación en Óptica (MIRO) ICN17_012 y Fondecyt Regular 1231313
Powered@NLHPC: Esta tesis fue parcialmente apoyada por la infraestructura de supercómputo del NLHPC (CCSS210001)

SANTIAGO DE CHILE
2025

Resumen

Mas si buscáis descubrimientos
Tierras irrealizables más allá de los cielos
Vegetante obsesión de musical congoja
Volvamos al silencio
Trampas de luz y cascadas lujosas
Trampas de perla y de lámpara acuática
Anda como los ciegos con sus ojos de piedra
Presintiendo el abismo a todo paso
Mas no temas de mí que mi lenguaje es otro
No trato de hacer feliz ni desgraciado a nadie
Ni descolgar banderas de los pechos
Ni dar anillos de planetas
Ni hacer satélites de mármol en torno a un talismán ajeno
Quiero darte una música de espíritu
Música mía de esta cítara plantada en mi cuerpo
Música que hace pensar en el crecimiento de los árboles
Y estalla en luminarias dentro del sueño

Extractos de *Altazor*, Vicente Huidobro

Agradecimientos

Tabla de Contenido

Índice de Ilustraciones

1. Introducción

Entre los premios Nobel en Física de la última década [?] se encuentran varios que están estrechamente ligados a la óptica: por la generación de pulsos de luz ultra cortos (femtosegundos [?] y luego attosegundos [? ? ?]), por experimentos con fotones entrelazados [? ? ?], por la ideación de pinzas ópticas [?] y por la invención de luces LED [? ? ?]. El estudio del comportamiento de la luz en diversos contextos ha permitido el posterior desarrollo tecnológico con aplicaciones industriales, en medicina, en comunicaciones e incluso militares. Una aplicación cotidiana es la fibra óptica, que actúa como una guía de onda para la luz y actualmente es el principal medio de transmisión de Internet en el mundo [? ?].

Numerosos de estos avances en el control de las propiedades de transporte de la luz se han visto propiciados por la técnica de escritura de guías de onda por láser de femtosegundos, la cual ha permitido la fabricación de redes fotónicas de variada índole [? ? ? ? ? ? ? ? ?]. Su importancia radica no sólo en emular situaciones de la física del sólido, tales como oscilaciones de Bloch [?], localización de Anderson [?], estados de banda plana [? ? ? ?] o topología [? ? ? ?], sino que también en el estudio de fenómenos ópticos incluyendo no-linealidad tipo Kerr y su uso en la formación de solitones [?], la posible propagación de luz cuántica [? ? ?], o su compatibilidad con la transmisión de información en la industria de las telecomunicaciones [?].

El enfoque de este proyecto será el estudio de redes fotónicas multiorbitales. Por ello será crucial incorporar la técnica de acoplamiento interorbital, que consiste en sintonizar las constantes de propagación de el modo fundamental de una guía monomodal (S) con el primer modo guiado excitado de una guía dimodal (P) mediante la calibración adecuada de las potencias de escritura, que inducen diferencias en los contrastes generados por la técnica de escritura por láser femtosegundos [?].

El llamado acoplamiento SP ha permitido el estudio de redes que presentan flujo magnético efectivo $\Phi = \pi$, el cual permite el transporte controlado de la luz [? ?]. Una aplicación directa de este fenómeno es la generación de guías de onda que admitan modos guiados de luz con momentum angular orbital (OAM) y la codificación de su carga topológica ℓ como medio para transmitir información [? ?]. Se ha reportado a la fecha sólo la propagación de OAM mediante de redes fotónicas que presevan simetría C_3 [? ?]. Sin embargo, el acoplamiento entre modos OAM en una red fotónica permitiría la generación de flujos magnéticos distintos de 0 o π, lo que se reflejaría en una direccionalidad dependiente de la circulación propagante [? ?]. Para ello será necesario introducir el concepto de "moléculas fotónicas" [?] y estudiar su aplicación en redes fotónicas [?].

2. Marco teórico

En este capítulo se desarrollarán las herramientas analítico-teóricas que permiten describir los sistemas fótonicos estudiados en esta tesis. Éstos consisten en la propagación de luz láser de baja potencia (1 mW de potencia de salida) propagada en sistemas acoplados de guías de onda, las cuales están escritas dentro de una muestra de vidrio borosilicato. Estas condiciones experimentales permiten describir el comportamiento de la luz utilizando las ecuaciones de Maxwell aplicadas a un medio lineal, isotrópico, no magnético y sin fuentes de carga ni de corriente libres.

2.1. Desde las ecuaciones de Maxwell a propagación de la luz en guías de onda dieléctricas

Las ecuaciones de Maxwell (SI) en este régimen son:

$$\nabla \cdot [\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}] = 0, \tag{2.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{2.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \tag{2.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{2.4}$$

donde $\mathbf{E}$ es el campo eléctrico y $\mathbf{H}$ es el campo magnético. Las guías de onda son invariantes en la dirección de propagación z, por lo que el índice de refracción $n = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$ dependerá de las coordenadas transversales al eje óptico, es decir, $n \equiv n(x, y) = n_0 + \Delta n(x, y)$, con $n_0 = 1.48$ el índice de refracción del borosilicato y $\Delta n \sim 10^{-5} - 10^{-3}$ el contraste de las guías de onda.

Luego de aplicar rotor por la izquierda a la ecuación de Faraday-Lenz (2.2), de usar la ecuación de Ampère-Maxwell (2.4) y asumir una solución temporal armónica proporcional a $e^{-i\omega t}$ se tiene:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{H}) = -\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = n^2 k_0^2 \mathbf{E}, \tag{2.5}$$

donde $k_0 \equiv \omega/c$ es el número de onda en el vacío. Por identidad de cálculo vectorial, se tiene que $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$. Al aplicar la ley de Gauss (2.1) se deduce que $\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla n^2}{n^2} \cdot \mathbf{E}$. Con esto, se obtiene la ecuación

$$\left(\nabla^2 + k_0^2 n^2\right)\mathbf{E} = -\nabla\left(\frac{\nabla n^2}{n^2} \cdot \mathbf{E}\right). \tag{2.6}$$

Análogamente, es posible aplicar rotor a la ecuación de Ampère-Maxwell (2.4) y usar la ecuación de Faraday-Lenz (2.2) en conjunto con la divergencia nula del campo magnético $\mathbf{H}$ (2.3):

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = -i\omega \nabla \times \left(\varepsilon_0 n^2 \mathbf{E}\right) = -i\omega\varepsilon_0 \left(n^2 \nabla \times \mathbf{E} + \nabla n^2 \times \mathbf{E}\right),$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = k_0^2 n^2 \mathbf{H} - i\omega\varepsilon_0 \nabla n^2 \times \mathbf{E}.$$

La ecuación análoga a (2.6) para $\mathbf{H}$ es, por consiguiente:

$$\left(\nabla^2 + k_0^2 n^2\right)\mathbf{H} = i\omega\varepsilon_0 \nabla n^2 \times \mathbf{E}. \tag{2.7}$$

Será útil separar los componentes longitudinales y transversales de los campos, asumiendo una dependencia del tipo onda plana $e^{ik_z z}$ en la variable espacial z.

$$\nabla_\perp \times \mathbf{E} + ik_z\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}, \tag{2.8}$$
$$\nabla_\perp \times \mathbf{H} + ik_z\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 n^2\mathbf{E}. \tag{2.9}$$

Si se considera las descomposiciones $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + \hat{\mathbf{z}}E_z$ y $\mathbf{H} = \mathbf{H}_\perp + \hat{\mathbf{z}}H_z$, $\nabla_\perp \equiv -\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla)$, las ecuaciones de Maxwell que involucran rotores se escriben como

$$\nabla_\perp \times \mathbf{E}_\perp + ik_z\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_\perp + \nabla_\perp \times (\hat{\mathbf{z}}E_z) = i\omega\mu_0(\mathbf{H}_\perp + \hat{\mathbf{z}}H_z), \tag{2.10}$$
$$\nabla_\perp \times \mathbf{H}_\perp + ik_z\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_\perp + \nabla_\perp \times (\hat{\mathbf{z}}H_z) = -i\omega\varepsilon_0 n^2(\mathbf{E}_\perp + \hat{\mathbf{z}}E_z). \tag{2.11}$$

Luego de aplicar producto punto y producto cruz en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$ a las ecuaciones (2.10) y (2.11), se puede expresar E_z y H_z en función de $\mathbf{E}_\perp$ y $\mathbf{H}_\perp$:

$$\begin{aligned} i\nabla_\perp E_z &= k_z\mathbf{E}_\perp + \omega\mu_0\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_\perp, & i\nabla_\perp H_z &= k_z\mathbf{H}_\perp - \omega\varepsilon_0 n^2\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_\perp, \\ i\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_\perp H_z &= k_z\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_\perp + \omega\varepsilon_0 n^2\mathbf{E}_\perp, & i\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_\perp E_z &= k_z\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_\perp - \omega\mu_0\mathbf{H}_\perp. \end{aligned}$$

Finalmente, los componentes perpendiculares de los campos, $\mathbf{H}_\perp$ y $\mathbf{E}_\perp$, se pueden despejar en términos de los componentes longitudinales, H_z y E_z:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_\perp &= i\frac{(\omega\varepsilon_0 n^2\nabla_\perp E_z - \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_\perp H_z k_z)}{k_0^2 n^2 - k_z^2}, & \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_\perp &= -i\frac{(k_z\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_\perp E_z + \omega\mu_0\nabla_\perp H_z)}{k_0^2 n^2 - k_z^2}, \\ \mathbf{H}_\perp &= \frac{i}{k_0^2 n^2 - k_z^2}\left[k_z\nabla_\perp H_z + \omega\varepsilon_0 n^2\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_\perp E_z\right], & \mathbf{E}_\perp &= \frac{i}{k_0^2 n^2 - k_z^2}\left[k_z\nabla_\perp E_z - \omega\mu_0\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_\perp H_z\right]. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Las ecuaciones (2.6), (2.7) y (2.12) serán las herramientas analíticas para los dos casos de estudio de las siguientes secciones y permiten visualizar la imposibilidad de las guías de onda dieléctricas de albergar modos TEM.

2.2. Soluciones analíticas para guía de onda tipo losa o *slab*

El sistema más simple que se puede estudiar es una guía de onda tipo losa, cuya forma analítica para el constraste $n(x)$ es la siguiente, con $n_1 > n_0$:

$$n(x) = \begin{cases} n_1, & |x| \leq a \\ n_0, & |x| > a \end{cases}$$

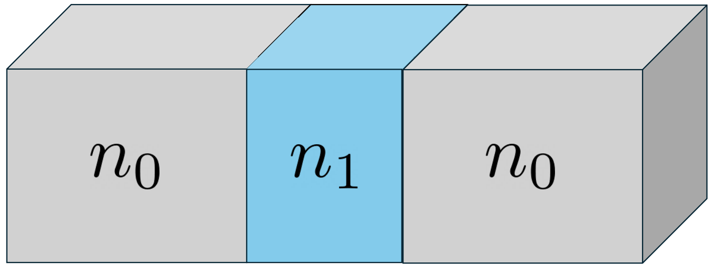


Figura 2.1: Forma de una guía de onda tipo losa. En las direcciones $\hat{\mathbf{y}}$ (vertical) y $\hat{\mathbf{z}}$ (hacia dentro de la página) la estructura es invariante.

Dado que $\nabla n^2 = \mathbf{0}$ para $|x| \neq a$, los lados derechos de las ecuaciones (2.6) y (2.7) son de tipo Helmholz. Definiendo $\Psi = \{E_z, H_z\}$:

$$(\nabla_\perp^2 + k_0^2 n^2 - k_z^2)\Psi = \frac{d^2\Psi}{dx^2} + (k_0^2 n^2 - k_z^2)\Psi = 0.$$

Como $n(x) = n(-x)$, las soluciones Ψ deben ser pares o impares. En efecto, si $\Psi(x)$ es solución, el cambio $x \to x' = -x$ implica que $\Psi(-x) = \pm\Psi(x)$, pues $\Psi(x)$ es un campo real.

Para encontrar soluciones cuya energía esté localizada en la guía de onda y que decaiga fuera de ella, se impondrá $k_0^2 n_0^2 \leq k_z^2 \leq k_0^2 n_1^2$. Se hace natural definir $\alpha^2 \equiv k_0^2 n_1^2 - k_z^2$ y $\beta^2 \equiv k_z^2 - k_0^2 n_0^2$. Con todo esto,

$$\Psi_s = \begin{cases} \Psi_{s1}\cos(\alpha x), & |x| \leq a \\ \Psi_{s0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}$$

$$\nabla_\perp \Psi_s = \begin{cases} -\hat{\mathbf{x}}\alpha\Psi_{s1}\sin(\alpha x), & |x| \leq a \\ -\hat{\mathbf{x}}\frac{|x|}{x}\beta\Psi_{s0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}$$

Por lo que las componentes verticales E_y y H_y pares se escriben debido a la ecuación (2.12) como:

$$E_y = \frac{i\omega\mu_0}{k_0^2 n^2 - k_z^2}\begin{cases} \alpha H_{s1}\sin(\alpha x), & |x| \leq a \\ \frac{|x|}{x}\beta H_{s0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases} \qquad H_y = \frac{-i\omega\varepsilon_0 n^2}{k_0^2 n^2 - k_z^2}\begin{cases} \alpha E_{s1}\sin(\alpha x), & |x| \leq a \\ \frac{|x|}{x}\beta E_{s0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}$$

Por otro lado, las soluciones impares tienen la forma

$$\Psi_a = \begin{cases} \Psi_{a1}\sin(\alpha x), & |x| \leq a \\ \Psi_{a0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}$$

$$\nabla_\perp \Psi_a = \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}\alpha\Psi_{a1}\cos(\alpha x), & |x| \leq a \\ -\hat{\mathbf{x}}\frac{|x|}{x}\beta\Psi_{a0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}$$

Por lo que E_y y H_y se escriben como:

$$E_y = \frac{i\omega\mu_0}{k_0^2 n^2 - k_z^2}\begin{cases} -\alpha H_{a1}\cos(\alpha x), & |x| \leq a \\ \frac{|x|}{x}\beta H_{a0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases} \qquad H_y = \frac{i\omega\varepsilon_0 n^2}{k_0^2 n^2 - k_z^2}\begin{cases} \alpha E_{a1}\cos(\alpha x), & |x| \leq a \\ -\frac{|x|}{x}\beta E_{a0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases} .$$

Imponiendo continuidad de las componentes tangenciales E_y, E_z, H_y y H_z:

$$
\begin{aligned}
E_{s1}\cos(\alpha a) &= E_{s0}e^{-\beta a}, & E_{a1}\sin(\alpha a) &= E_{a0}e^{-\beta a},\\
H_{s1}\cos(\alpha a) &= H_{s0}e^{-\beta a}, & H_{a1}\sin(\alpha a) &= H_{a0}e^{-\beta a},\\
n_1^2E_{s1}\sin(\alpha a)/\alpha &= -n_0^2E_{s0}e^{-\beta a}/\beta, & n_1^2E_{a1}\cos(\alpha a)/\alpha &= n_0^2E_{a0}e^{-\beta a}/\beta,\\
H_{s1}\sin(\alpha a)/\alpha &= -H_{s0}e^{-\beta a}/\beta, & H_{a1}\cos(\alpha a)/\alpha &= H_{a0}e^{-\beta a}/\beta.
\end{aligned}
$$

Buscando soluciones no triviales se tiene que:

$$\left[\frac{\cos(\alpha a)}{\beta a}+\frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a}\right]\left[n_0^2\frac{\cos(\alpha a)}{\beta a}+n_1^2\frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a}\right]\left[\frac{\sin(\alpha a)}{\beta a}-\frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a}\right]\left[n_0^2\frac{\sin(\alpha a)}{\beta a}-n_1^2\frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a}\right]=0$$

Se distinguirá dos tipos de condiciones:

- Modos TE:

$$\frac{\cos(\alpha a)}{\beta a}+\frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a}=0, \tag{2.13}$$

$$\frac{\sin(\alpha a)}{\beta a}-\frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a}=0. \tag{2.14}$$

- Modos TM:

$$n_0^2\frac{\cos(\alpha a)}{\beta a}+n_1^2\frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a}=0, \tag{2.15}$$

$$n_0^2\frac{\sin(\alpha a)}{\beta a}-n_1^2\frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a}=0. \tag{2.16}$$

Asumiendo α, β y k_z conocidos, las amplitudes deben cumplir las relaciones:

$$
\begin{aligned}
E_{s1}\left[n_0^2\frac{\cos(\alpha a)}{\beta a}+n_1^2\frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a}\right]&=0, & E_{a1}\left[n_0^2\frac{\sin(\alpha a)}{\beta a}-n_1^2\frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a}\right]&=0,\\
H_{s1}\left[\frac{\cos(\alpha a)}{\beta a}+\frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a}\right]&=0, & H_{a1}\left[\frac{\sin(\alpha a)}{\beta a}-\frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a}\right]&=0.
\end{aligned}
$$

Las ecuaciones superiores imponen que $E_1 = 0$ cuando se satisface la condición de modos TE. Análogamente, las ecuaciones inferiores imponen $H_1 = 0$ en el caso de modos TM. Efectivamente, los nombres TE y TM se han puesto por transversal eléctrico y transversal magnético, respectivamente. Un corolario para los modos TE es que $E_z = E_x = 0$ por lo que la polarización del campo eléctrico será exclusivamente en la dirección $\hat{\mathbf{y}}$. Así mismo, sólo un haz polarizado en $\hat{\mathbf{x}}$ podría excitar un modo TM, por lo que en un experimento se debe tener esto presente: un condición inicial arbitraria se propagará como una combinación lineal de los modos TE y TM que soporte la guía.

2.2.1. Soluciones gráficas y comparación entre modos TE y TM

Usando las dos ecuaciones de modos TE junto a la restricción $(\alpha a)^2 + (\beta a)^2 = k_0^2a^2(n_1^2 - n_0^2) \equiv V^2$ es posible obtener soluciones gráficas para las constantes de propagación k_z a partir de las intersecciones $(\alpha a, \beta a)$.

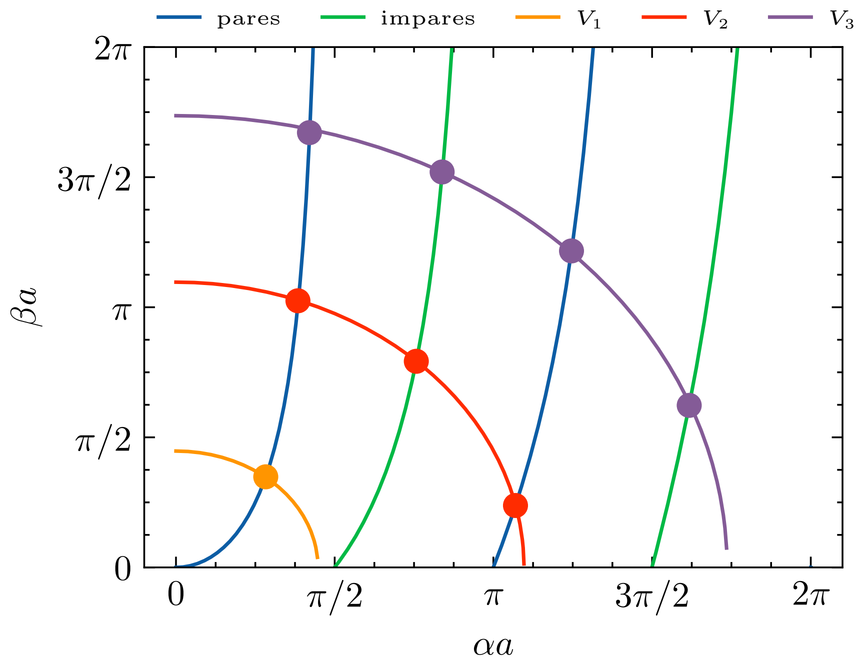


Figura 2.2: Soluciones gráficas de los modos TE. A mayor contraste $\Delta n = n_1 - n_0$, mayor cantidad de modos guiados soporta la guía de onda.

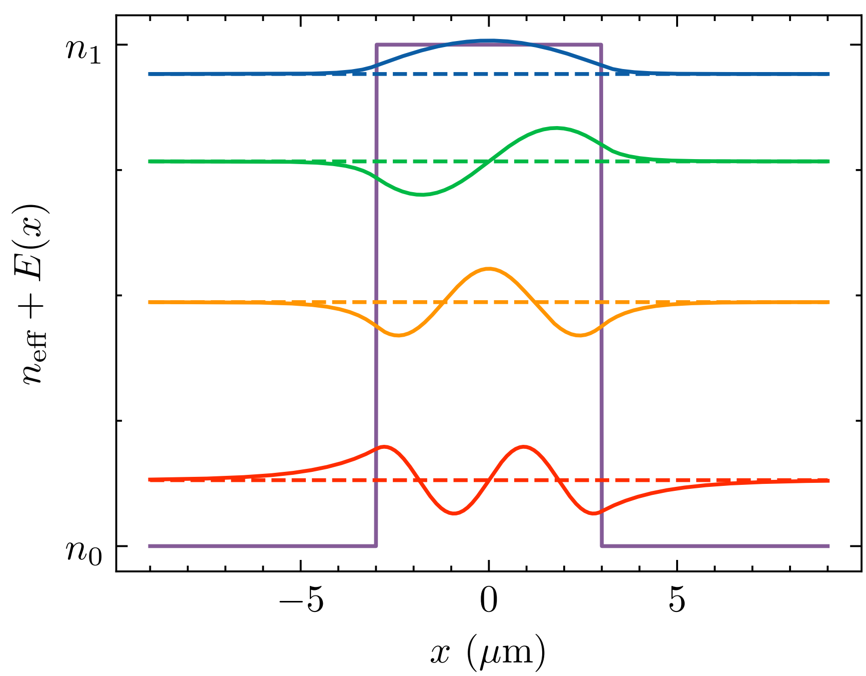


Figura 2.3: Soluciones gráficas de los modos TE. A mayor contraste $\Delta n = n_1 - n_0$, mayor cantidad de modos guiados soporta la guía de onda.

La condición de corte (*cutoff*) en guías de onda es equivalente a que la energía deje de decaer en la región $|x| > a$, es decir, se debe cumplir que $\beta a \to 0$. Los modos simétricos o pares cumplen esta condición para $\sin(V) = 0$, lo que implica que $V = m\pi$, con m entero. En particular, considerando $m = 0$ y barriendo $n_1 \to n_0$, siempre existen al menos dos modos, uno TE y otro TM hasta que $n_1 < n_0$. Los modos antisimétricos o impares deben cumplir por su parte que $\cos(V) = 0$, lo que implica que $V = (m\pi \pm \pi/2)$. De esta condición se deduce que el primer par de modos exictados ($m = 0$) existe siempre que $\lambda \leq \lambda_c \equiv 4a\sqrt{n_1^2 - n_0^2}$. Escrito de forma compacta para el m-ésimo modo:

$$(\lambda_c)_m = \frac{4a}{m-1}\sqrt{n_1^2 - n_0^2}$$

2.3. Soluciones analíticas para fibra óptica circular

En la sección anterior se estudió el sistema más sencillo en el que se puede hablar de guías de onda dieléctricas. El siguiente paso en complejidad consiste en guías de onda circulares. Para ello, se considerará que el índice de refracción varía radialmente según

$$n(\rho) = \begin{cases} n_1, & \text{si } \rho \leq a \\ n_0, & \text{si } \rho > a \end{cases},$$

donde la tupla (ρ, ϕ, z) define las coordenadas cilíndricas a usar, más apropiadas para este problema. Al considerar las componentes longitudinales $\Psi = \{E_z, H_z\}$ del campo eléctrico y magnético y si se utiliza el método de separación de variables con $\Psi = R(\rho)\Phi(\phi)e^{ik_z z}$, las ecuaciones (2.6) y (2.7) toman la forma:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{\partial}{\rho\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\rho^2\partial\phi^2} + \left(k_0^2 n^2 - k_z^2\right)\right] R(\rho)\Phi(\phi) = 0 \\ \rho^2\frac{d^2R}{Rd\rho^2} + \rho\frac{dR}{Rd\rho} + \rho^2\left(k_0^2 n^2 - k_z^2\right) + \underbrace{\frac{d^2\Phi}{\Phi d\phi^2}}_{-\ell^2} = 0 \\ \therefore \Phi(\phi) = Ae^{i\ell\phi} \end{aligned}$$

Imponiendo condiciones de periodicidad $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$, se tiene necesariamente que ℓ es un número entero. Por consiguiente, la ecuación para $R(\rho)$ es de tipo Bessel entera, por lo que buscando soluciones tales que $k_0^2 n_0^2 < \beta_z^2 < k_0^2 n_1^2$ y definiendo nuevamente $\alpha^2 \equiv k_0^2 n_1^2 - k_z^2$ y $\beta^2 \equiv k_z^2 - k_0^2 n_0^2$ se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(k_0^2 n^2 - k_z^2 - \frac{\ell^2}{\rho^2}\right) R = 0 \\ \therefore R(\rho) = \begin{cases} C_1 J_\ell(\alpha\rho) + D_1 Y_\ell(\alpha\rho), & \text{si } \rho \leq a \\ C_2 K_\ell(\beta\rho) + D_2 I_\ell(\beta\rho), & \text{si } \rho > a \end{cases}. \end{aligned}$$

Necesariamente se debe imponer $D_1 = D_2 = 0$ para que la solución sea finita para $\rho = 0$ y para $\rho \to +\infty$. Es decir, la parte radial de la solución es

$$R(\rho) = \begin{cases} C_1 J_\ell(\alpha\rho), & \text{si } \rho \leq a \\ C_2 K_\ell(\beta\rho), & \text{si } \rho > a \end{cases}.$$

En este caso, para imponer las condiciones de continuidad en $\mathbf{E}_{\|} = E_\phi \hat{\phi} + E_z \hat{\mathbf{z}}$ y $\mathbf{H}_{\|} = H_\phi \hat{\phi} + H_z \hat{\mathbf{z}}$, se hace necesario relacionar el resto de componentes del campo con E_z y H_z para lo cual se usará la ecuación (2.12).

Como
$$\nabla_\perp \Psi = \begin{cases} \Psi_0^1 \left[\hat{\rho}\alpha J'_\ell(\alpha\rho) + i\hat{\phi}\ell J_\ell(\alpha\rho)/\rho\right] e^{i\ell\phi} e^{ik_z z}, & \text{si } \rho \leq a \\ \Psi_0^0 \left[\hat{\rho}\beta K'_\ell(\beta\rho) + i\hat{\phi}\ell K_\ell(\alpha\rho)/\rho\right] e^{i\ell\phi} e^{ik_z z}, & \text{si } \rho > a \end{cases}$$

Separando por componentes y reemplazando:

$$H_z = e^{i\ell\phi} e^{ik_z z} \begin{cases} H_0^1 J_\ell(\alpha\rho), & \text{si } \rho \leq a \\ H_0^0 K_\ell(\beta\rho), & \text{si } \rho > a \end{cases}$$
$$H_r = \frac{ie^{i\ell\phi} e^{ik_z z}}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} k_z \alpha H_0^1 J'_\ell(\alpha\rho) - i\omega\varepsilon_0 n^2 \ell E_0^1 J_\ell(\alpha\rho)/\rho, & \text{si } \rho \leq a \\ k_z \beta H_0^0 K'_\ell(\beta\rho) - i\omega\varepsilon_0 n^2 \ell E_0^0 K_\ell(\beta\rho)/\rho, & \text{si } \rho > a \end{cases}$$
$$H_\phi = \frac{ie^{i\ell\phi} e^{ik_z z}}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} ik_z \ell H_0^1 J_\ell(\alpha\rho)/\rho + \omega\varepsilon_0 n^2 \alpha E_0^1 J'_\ell(\alpha\rho), & \text{si } \rho \leq a \\ ik_z \ell H_0^0 K_\ell(\beta\rho)/\rho + \omega\varepsilon_0 n^2 \beta E_0^0 K'_\ell(\beta\rho), & \text{si } \rho > a \end{cases}$$
$$E_z = e^{i\ell\phi} e^{ik_z z} \begin{cases} E_0^1 J_\ell(\alpha\rho), & \text{si } \rho \leq a \\ E_0^0 K_\ell(\beta\rho), & \text{si } \rho > a \end{cases}$$
$$E_r = \frac{ie^{i\ell\phi} e^{ik_z z}}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} k_z \alpha E_0^1 J'_\ell(\alpha\rho) + i\omega\mu_0 \ell H_0^1 J_\ell(\alpha\rho)/\rho, & \text{si } \rho \leq a \\ k_z \beta E_0^0 K'_\ell(\beta\rho) + i\omega\mu_0 \ell H_0^0 K_\ell(\beta\rho)/\rho, & \text{si } \rho > a \end{cases}$$
$$E_\phi = \frac{ie^{i\ell\phi} e^{ik_z z}}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} ik_z \ell E_0^1 J_\ell(\alpha\rho)/\rho - \omega\mu_0 \alpha H_0^1 J'_\ell(\alpha\rho), & \text{si } \rho \leq a \\ ik_z \ell E_0^0 K_\ell(\beta\rho)/\rho - \omega\mu_0 \beta H_0^0 K'_\ell(\beta\rho), & \text{si } \rho > a \end{cases}$$

Ahora sí, imponiendo continuidad en z y ϕ:

$$H_0^1 J_\ell(\alpha a) = H_0^0 K_\ell(\beta a) \tag{2.17}$$
$$E_0^1 J_\ell(\alpha a) = E_0^0 K_\ell(\beta a) \tag{2.18}$$
$$-\omega\varepsilon_0 n_1^2 \alpha\beta^2 a E_0^1 J'_\ell(\alpha a) - ik_z \ell\beta^2 H_0^1 J_\ell(\alpha a) = \omega\varepsilon_0 n_0^2 \alpha^2 \beta a E_0^0 K'_\ell(\beta a) + ik_z \ell\alpha^2 H_0^0 K_\ell(\beta a) \tag{2.19}$$
$$-ik_z \ell\beta^2 E_0^1 J_\ell(\alpha a) + \omega\mu_0 \alpha\beta^2 a H_0^1 J'_\ell(\alpha a) = ik_z \ell\alpha^2 E_0^0 K_\ell(\beta a) - \omega\mu_0 \alpha^2 \beta a H_0^0 K'_\ell(\beta a) \tag{2.20}$$

Buscando soluciones no triviales:

$$\begin{vmatrix} K_\ell(\beta a) & -J_\ell(\alpha a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_\ell(\beta a) & -J_\ell(\alpha a) \\ ik_z \ell\alpha^2 K_\ell(\beta a) & ik_z \ell\beta^2 J_\ell(\alpha a) & \omega\varepsilon_0 n_0^2 \alpha^2 \beta a K'_\ell(\beta a) & \omega\varepsilon_0 n_1^2 \alpha\beta^2 a J'_\ell(\alpha a) \\ \omega\mu_0 \alpha^2 \beta a K'_\ell(\beta a) & \omega\mu_0 \alpha\beta^2 a J'_\ell(\alpha a) & -ik_z \ell\alpha^2 K_\ell(\beta a) & -ik_z \ell\beta^2 J_\ell(\alpha a) \end{vmatrix} = 0$$

Finalmente, la ecuación trascendental que satifacen α, β y k_z es:

$$\left(\frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)}\right)\left(n_1^2 \frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + n_0^2 \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)}\right) = \ell^2 \left[\left(\frac{1}{\alpha a}\right)^2 + \left(\frac{1}{\beta a}\right)^2\right]^2 \left(\frac{k_z}{k_0}\right)^2. \tag{2.21}$$

Dado que, en principio, los valores de k_z ya están determinados por la ecuación anterior, es posible obtener dos relaciones entre H_0^1 y E_0^1:

$$\frac{E_0^1}{H_0^1} = -\frac{ik_z\ell}{\omega\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{\alpha a}\right)^2 + \left(\frac{1}{\beta a}\right)^2\right]\left[n_1^2\frac{J_\ell'(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + n_0^2\frac{K_\ell'(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)}\right]^{-1}, \tag{2.22}$$

$$\frac{H_0^1}{E_0^1} = \frac{ik_z\ell}{\omega\mu_0}\left[\left(\frac{1}{\alpha a}\right)^2 + \left(\frac{1}{\beta a}\right)^2\right]\left[\frac{J_\ell'(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + \frac{K_\ell'(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)}\right]^{-1}. \tag{2.23}$$

Tomando raíz cuadrada al cociente de las ecuaciones (2.22) y (2.23) se tiene:

$$\frac{E_0^1}{H_0^1} = i\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{\sqrt{\frac{J_\ell'(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + \frac{K_\ell'(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)}}}{\sqrt{n_1^2\frac{J_\ell'(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + n_0^2\frac{K_\ell'(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)}}}. \tag{2.24}$$

2.3.1. Modos TE y TM

El caso más sencillo de estudiar es imponiendo $\ell = 0$. La ecuación (2.21) implica:

$$\frac{J_0'(\alpha a)}{\alpha a J_0(\alpha a)} + \frac{K_0'(\beta a)}{\beta a K_0(\beta a)} = 0, \quad \text{(modos TE)}$$

$$n_1^2\frac{J_0'(\alpha a)}{\alpha a J_0(\alpha a)} + n_0^2\frac{K_0'(\beta a)}{\beta a K_0(\beta a)} = 0, \quad \text{(modos TM)}$$

De la ecuación (2.24) es directo notar que la condiciones de modos transversales que las componentes longitudinales se hacen cero en los casos respectivos: $H_0^1 = 0$ para TE y $E_0^1 = 0$ para TM.

Las condiciones de corte se dan cuando $\beta a \to 0$. Utilizando las expresiones asintóticas para las funciones de Bessel con argumentos pequeños y sus relaciones de recurrencia, se tiene

$$\frac{\alpha a J_0(\alpha a)}{J_1(\alpha a)} = -\frac{\beta a K_0(\beta a)}{K_1(\beta a)} \approx (\beta a)^2 \ln\left(\frac{\beta a e^\gamma}{2}\right) \to 0,$$

por lo que se hace necesario que $J_0(\alpha a)|_{\alpha a\to V} = 0$. Denotando $x_{0,m} = 2.405, 5.520, 8.654, \cdots$ al m-ésimo cero de la funcion $J_0(x)$, la longitud de onda de corte está dada por

$$(\lambda_c)_{0,m} = 2\pi a\frac{\sqrt{n_1^2 - n_0^2}}{x_{0,m}}, \quad \text{(modos TE y TM)}. \tag{2.25}$$

Contrario al caso de la guía de onda tipo losa, en fibras ópticas se hace necesario estar bajo un umbral de corte máximo $(\lambda_c)_{0,1}$ no nulo para que los modos TE o TM existan.

2.3.2. Modos HE y EH

Interpretando la ecuación (2.21) como una cuadrática en $J'_\ell(\alpha a)/\alpha a J_\ell(\alpha a)$:

$$\frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} = -\left(\frac{n_1^2+n_0^2}{2n_1^2}\right)\frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \pm \sqrt{\left(\frac{n_1^2-n_0^2}{2n_1^2}\right)^2\left(\frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)}\right)^2+\left(\frac{k_z\ell}{k_0 n_1}\right)^2\left[\left(\frac{1}{\alpha a}\right)^2+\left(\frac{1}{\beta a}\right)^2\right]^2}$$

Haciendo uso de las relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel $J_\ell(r)$, es posible obtener dos tipos de soluciones que suelen ser llamadas HE y EH debido al campo longitudinal con mayor peso:

$$\frac{J_{\ell-1}(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} = -\left(\frac{n_1^2+n_0^2}{2n_1^2}\right)\frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} + \frac{\ell}{(\alpha a)^2} - \sqrt{\Delta}, \quad \text{(modos HE)} \tag{2.26}$$

$$\frac{J_{\ell+1}(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} = \left(\frac{n_1^2+n_0^2}{2n_1^2}\right)\frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} + \frac{\ell}{(\alpha a)^2} - \sqrt{\Delta}, \quad \text{(modos EH)} \tag{2.27}$$

$$\Delta = \left(\frac{n_1^2-n_0^2}{2n_1^2}\right)^2\left(\frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)}\right)^2+\left(\frac{k_z\ell}{k_0 n_1}\right)^2\left[\left(\frac{1}{\alpha a}\right)^2+\left(\frac{1}{\beta a}\right)^2\right]^2$$

Para $\ell = 0$, se recuperan las relaciones obtenidas para los modos TE_m (HE_{0m}) y TM_m (EH_{0m}). Para $\ell \neq 0$ se hace necesario considerar las expresiones asintóticas de las funciones de Bessel cuando $\beta a \to 0$ y $\alpha a \to V$:

$$\frac{K'_\ell(x)}{xK_\ell(x)} = -\frac{K_{\ell-1}(x)}{xK_\ell(x)} - \frac{\ell}{x^2} \approx \begin{cases} \ln(xe^\gamma/2) - \frac{1}{x^2} & \text{si } \ell = 1 \\ -\frac{1}{2(\ell-1)} - \frac{\ell}{x^2} & \text{si } \ell > 1 \end{cases}.$$

El caso $\ell = 1$ es de especial interés. La condición de modos HE se desarrolla como

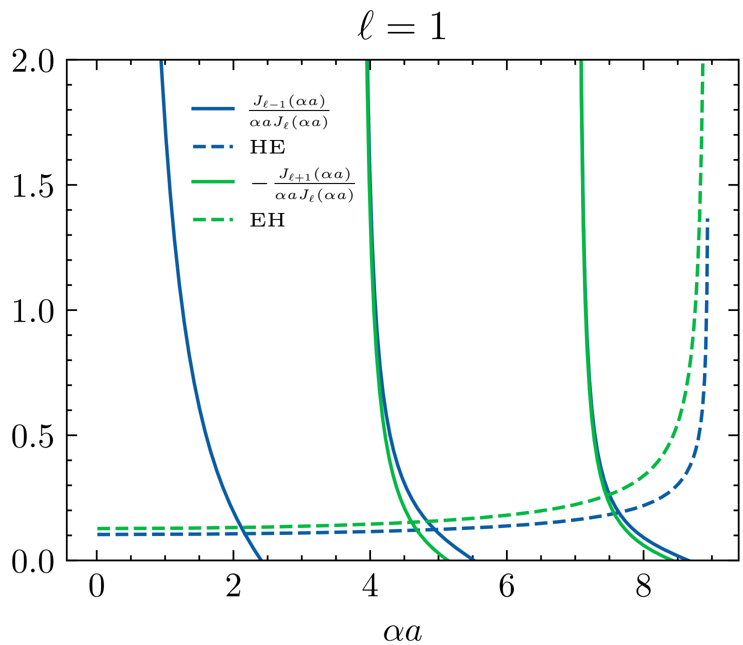
$$\frac{\alpha a J_1(\alpha a)}{J_0(\alpha a)} = \left\{\left(\frac{n_1^2+n_0^2}{2n_1^2}\right)\left[\ln\left(\frac{2}{e^\gamma \beta a}\right)+\frac{1}{(\beta a)^2}\right]+\frac{1}{(\alpha a)^2} - \sqrt{\Delta}\right\}^{-1} \to 0.$$

Basta considerar la función $J_1(\alpha a)|_{\alpha a\to V} = 0$. Por otro lado, la condición EH elimina el cero $x = 0$ del cociente $\frac{\alpha a J_1(\alpha a)}{J_2(\alpha a)}$ lo que hace que esté "desfasada" respecto a la condición HE. Usando un razonamiento similar al caso $\ell = 0$, las condiciones de corte son

$$(\lambda_c)_{1,m} = 2\pi a\frac{\sqrt{n_1^2-n_0^2}}{x_{1,m}} \quad (\text{modos HE}_{1m})$$

$$(\lambda_c)_{1,m} = 2\pi a\frac{\sqrt{n_1^2-n_0^2}}{x_{1,m+1}} \quad (\text{modos EH}_{1m})$$

con $x_{1,m} = 0, 3.832, 7.016, 10.173, \ldots$. En particular, el modo HE_{11} siempre existe.



El caso $\ell \geq 2$ tiene un desarrollo distinto por las forma asintóticas en juego y no será relevante para esta tesis. Sin embargo, se incluyen en la Figura 2.4 por completitud.

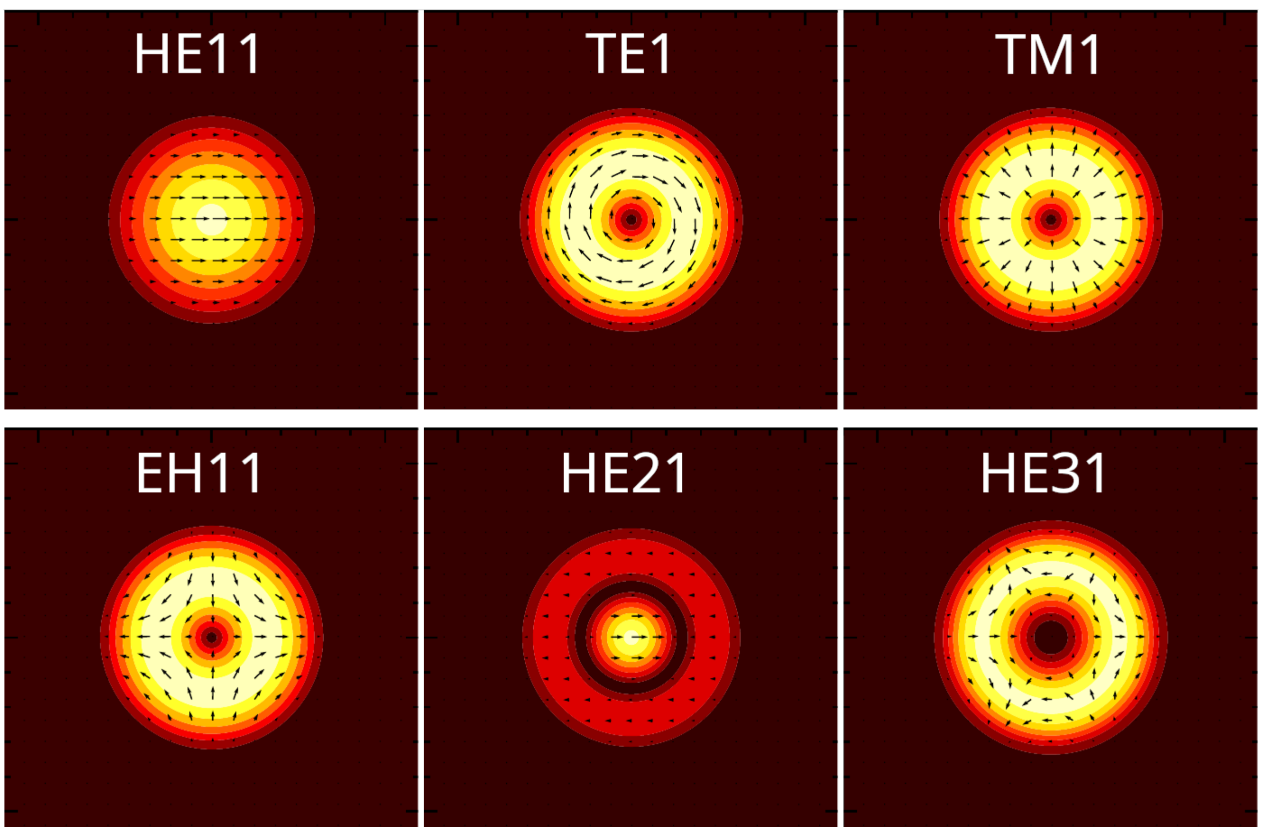


Figura 2.4: Primeros modos guiados para una guía circular o fibra óptica.

2.4. Modos normales en guías de onda

Si la estructura de guías de onda no varía en la dirección z, por separación de variables la solución para el campo eléctrico es una onda plana del tipo $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_\nu(x,y)e^{i\beta_\nu z}$. A su vez, es conveniente separar el Laplaciano como $\nabla^2 \equiv \nabla_\perp^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. De esta forma, el lado izquierdo de las ecuaciones (2.6), se desarrolla como:

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 + k_0^2n^2)\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \left(\nabla_\perp^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2n^2\right)\mathbf{E}_\nu(x,y)e^{i\beta_\nu z} \\
&= e^{i\beta_\nu z}\nabla_\perp^2\mathbf{E}_\nu - \beta_\nu^2\mathbf{E}_\nu e^{i\beta_\nu z} + k_0^2n^2\mathbf{E}_\nu e^{i\beta_\nu z} \\
&= \left[\nabla_\perp^2 + (k_0^2n^2 - \beta_\nu^2)\right]\mathbf{E}_\nu e^{i\beta_\nu z} \\
&\approx 0 \\
\therefore \left[\nabla_\perp^2 + k_0^2n^2(x,y)\right]\mathbf{E}_\nu(x,y) &= \beta_\nu^2\mathbf{E}_\nu(x,y), \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

donde se ha usado la aproximación de guiaje débil para anular el lado de derecho de la ecuación (2.6). Notemos que la ecuación (2.28) es un problema de autovalores β_ν^2 y autofunciones $\mathbf{E}_\nu(x,y)$, las cuales son ortogonales (ver apéndice A). En principio, la forma espacial del índice de refracción $n(x,y)$ puede ser arbitraria siempre y cuando que se satisfaga la condición de guiaje débil.

2.5. Teoría de modos acoplados

2.5.1. Derivación desde un principio variacional

A partir de la ecuaciones (2.8) y (2.9) es posible despejar la constante de propagación k_z en términos del vector de Poynting $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\}$, similar a lo desarrollado en la referencia [**?**].

$$k_z = \frac{\frac{1}{4i}\iint(-\nabla_\perp\times\mathbf{E} + i\omega\mu_0\mathbf{H})\cdot\mathbf{H}^* + \left(\nabla_\perp\times\mathbf{H} + i\omega\varepsilon_0n^2\mathbf{E}\right)\cdot\mathbf{E}^*dxdy}{\frac{1}{4}\iint(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^* + \mathbf{E}^*\times\mathbf{H})\cdot\hat{\mathbf{z}}dxdy}. \qquad (2.29)$$

De esta manera, al proponer un Ansatz en términos de superposición de modos de las guías individuales del estilo $\mathbf{E} = \sum_i a_i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{H} = \sum_i a_i\mathbf{h}_i$, los coeficientes a_i quedan indeterminados pero sujetos a minimizar la expresión para k_z. Notemos además que el Ansatz simplifica bastante la mencionada expresión.

$$(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^* + \mathbf{E}^*\times\mathbf{H})\cdot\hat{\mathbf{z}} = \sum_{ij} a_i^*(\mathbf{e}_j\times\mathbf{h}_i^* + \mathbf{e}_i^*\times\mathbf{h}_j)\cdot\hat{\mathbf{z}}a_j \equiv \sum_{ij} a_i^*p_{ij}a_j$$

$$\begin{aligned}
\text{integrando numerador} &= i\sum_{ij} a_i^*k_z^j(\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{e}_j)\cdot\mathbf{h}_i^*a_j + a_j\left(\omega\varepsilon_0(n^2-n_j^2)\mathbf{e}_j - k_z^j\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{h}_j\right)\cdot\mathbf{e}_i^*a_i^* \\
&= i\sum_{ij} a_i^*\left[k_z^jp_{ij} + \omega\varepsilon_0(n^2-n_j^2)\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_i^*\right]a_j
\end{aligned}$$

Definiendo

$$P_{ij} \equiv \frac{1}{4} \iint (\mathbf{e}_j \times \mathbf{h}_i^* + \mathbf{e}_i^* \times \mathbf{h}_j) \cdot \hat{\mathbf{z}} dxdy, \tag{2.30}$$

$$H_{ij} \equiv P_{ij} k_z^j + \frac{\omega \varepsilon_0}{4} \iint (n^2 - n_j^2) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i^* dxdy. \tag{2.31}$$

Se puede escribir la expresión (2.29) para la constante de propagación k_z de manera compacta como un cociente de Rayleigh-Ritz:

$$k_z = \frac{\sum_{ij} a_i^* H_{ij} a_j}{\sum_{ij} a_i^* P_{ij} a_j}. \tag{2.32}$$

Diferenciando con respecto a a_k^* para optimizar el valor de k_z se tiene:

$$\frac{\partial k_z}{\partial a_k^*} = \frac{\sum_{ij} H_{ij} a_j \delta_{ik}}{\sum_{ij} a_i^* P_{ij} a_j} - \frac{\left(\sum_{ij} a_i^* H_{ij} a_j\right)\left(\sum_{ij} \delta_{ik} P_{ij} a_j\right)}{\left(\sum_{ij} a_i^* P_{ij} a_j\right)^2} = \frac{\sum_j \left(H_{jk} - k_z P_{kj}\right) a_j}{\sum_{ij} a_i^* P_{ij} a_j} \stackrel{!}{=} 0. \tag{2.33}$$

Recuperando $k_z \to -i\frac{\partial}{\partial z}$, se obtienen las ecuaciones de N modos acoplados no ortogonales:

$$-i \sum_j P_{kj} \frac{da_j}{dz} = \sum_j H_{kj} a_j, \text{ con } k = 1, 2, \ldots, N \tag{2.34}$$

Claramente P_{ij} es una matriz hermítica. A primera vista, puede parecer que H_{ij} no es hermítica, pero veamos que sí lo es. Para ello, basta considerar la resta $H_{ij} - H_{ji}^*$ y notar que se anula:

$$\begin{aligned}
H_{ij} - H_{ji}^* &= P_{ij} k_z^j - P_{ji}^* k_z^i + \frac{\omega \varepsilon_0}{4} \iint (n_i^2 - n_j^2) \mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_j dxdy \\
&= \frac{1}{4} \iint (k_z^j - k_z^i)(\mathbf{e}_j \times \mathbf{h}_i^* + \mathbf{e}_i^* \times \mathbf{h}_j) \cdot \hat{\mathbf{z}} + \omega \varepsilon_0 (n_i^2 - n_j^2) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i^* dxdy \\
&= \frac{1}{4} \iint \left(i \nabla_\perp \times \mathbf{e}_j + \omega \mu_0 \mathbf{h}_j\right) \cdot \mathbf{h}_i^* - \left(i \nabla_\perp \times \mathbf{h}_j - \omega \varepsilon_0 n_j^2 \mathbf{e}_j\right) \cdot \mathbf{e}_i^* dxdy \\
&- \frac{1}{4} \iint (i \nabla_\perp \times \mathbf{e}_i^* + \omega \mu_0 \mathbf{h}_i^*) \cdot \mathbf{h}_j + \left(i \nabla_\perp \times \mathbf{h}_i^* + \omega \varepsilon_0 n_i^2 \mathbf{e}_i^*\right) \cdot \mathbf{e}_j dxdy \\
&+ \frac{\omega \varepsilon_0}{4} \iint \left(n_i^2 - n_j^2\right) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i^* dxdy \\
&= \frac{i}{4} \iint \left(\nabla_\perp \times \mathbf{e}_j\right) \cdot \mathbf{h}_i^* - \left(\nabla_\perp \times \mathbf{h}_j\right) \cdot \mathbf{e}_i^* + (\nabla_\perp \times \mathbf{e}_i^*) \cdot \mathbf{h}_j - (\nabla_\perp \times \mathbf{h}_i^*) \cdot \mathbf{e}_j dxdy \\
&= \frac{i}{4} \iint \nabla_\perp \cdot \left(\mathbf{e}_j \times \mathbf{h}_i^* + \mathbf{e}_i^* \times \mathbf{h}_j\right) dxdy = \frac{i}{4} \oint_C \left(\mathbf{e}_j \times \mathbf{h}_i^* + \mathbf{e}_i^* \times \mathbf{h}_j\right) \cdot \hat{\mathbf{z}} ds \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donde se ha usado que los campos deben decaer a cero en el infinito. Las ecuaciones (2.34) se pueden obtener a partir de un Principio de Mínima Acción luego de definir el Lagrangiano L de tipo campo discreto de Schrödinger:

$$L = -\sum_{ij} a_i^* \left(i P_{ij} \frac{d}{dz} + H_{ij}\right) a_j. \tag{2.35}$$

Los momentos generalizados de este Lagrangiano es $\Pi_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_k} = -i\sum_j a_j^* P_{jk}$, por lo que el Hamiltoniano H asociado es

$$H = \sum_j \Pi_j \dot{a}_j - L = \sum_{ij} -ia_i^* P_{ij}\dot{a}_j + a_i^*\left(iP_{ij}\frac{da_j}{dz} + H_{ij}a_j\right) = \sum_{ij} a_i^* H_{ij} a_j. \tag{2.36}$$

Variando el Lagrangiano se tiene:

$$\begin{aligned}
\delta L &= \sum_{ij} \frac{\partial L}{\partial a_j}\delta a_j + \frac{\partial L}{\partial a_i^*}\delta a_i^* + \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_j}\delta \dot{a}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i^*}\delta \dot{a}_i^* \\
&= \sum_{ij}\left(\frac{\partial L}{\partial a_j} - \frac{d}{dz}\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_j}\right)\delta a_j + \left(\frac{\partial L}{\partial a_i^*} - \frac{d}{dz}\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i^*}\right)\delta a_i^* + \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_j}\delta a_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i^*}\delta a_i^*\right) \\
&\implies \frac{d}{dz}\sum_{ij}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_j}\delta a_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i^*}\delta a_i^*\right) = 0.
\end{aligned}$$

Al considerar el par de transformaciones asociadas al grupo unitario U(1), $a_j \to a_j' = e^{i\phi}a_j$, $a_i^* \to a_i'^* = e^{-i\phi}a_i^*$ que dejan invariante el Lagrangiano, y si se toma una variación infinitesimal $\phi \ll 1$ se tiene $\delta a_j = i\phi a_j$ y $\delta a_i^* = -i\phi a_i^*$, por lo que la cantidad conservada, P, que se identifica con la potencia total del sistema es:

$$P = \sum_{ij} a_i^* P_{ij} a_j = \iint \mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{z}}dxdy. \tag{2.37}$$

Se tienen entonces dos cantidades conservadas en la dinámica, H y P, que serán de utilidad para verificar la validez de soluciones numéricas a la ecuación (2.34).

2.5.2. Aplicaciones

Dímero TE en guías de onda tipo losa

Para los modos TE fundamentales (condición antisimétrica) y las ecuaciones (2.12) se tiene que

$$\mathbf{e}_{j\perp} = \hat{\mathbf{y}}\frac{i\omega\mu_0 H_{a1}}{k_0^2 n_j^2 - (k_z^j)^2}\begin{cases} -\alpha\cos(\alpha(x-x_j)), & |x-x_j| \le a \\ \beta\sin(\alpha a)e^{-\beta(|x-x_j|-a)}, & |x-x_j| > a \end{cases} \tag{2.38}$$

$$\mathbf{h}_{j\perp} = \hat{\mathbf{x}}\frac{ik_z^j H_{a1}}{k_0^2 n_j^2 - (k_z^j)^2}\begin{cases} \alpha\cos(\alpha(x-x_j)), & |x-x_j| \le a \\ -\beta\sin(\alpha a)e^{-\beta(|x-x_j|-a)}, & |x-x_j| > a \end{cases} \tag{2.39}$$

$x_j = jd$, con $d \ge 2a$ y $L = \int dy$. Elementos no diagonales tienen la forma:

$$\left(\mathbf{e}_{j\perp} \times \mathbf{h}_{i\perp}^*\right)\cdot\hat{\mathbf{z}} = \frac{k_z^i \omega\mu_0 H_{a1}^2 \beta\sin(\alpha a)}{(k_0^2 n_j^2 - k_z^2)(k_0^2 n_i^2 - k_z^2)}\begin{cases} \alpha\cos(\alpha(x-x_i))e^{-\beta(|x-x_j|-a)}, & |x-x_i| \le a \\ i \leftrightarrow j, & |x-x_j| \le a \\ \beta\sin(\alpha a)e^{-\beta(|x-x_i|+|x-x_j|-2a)}, & \text{otro caso} \end{cases} \tag{2.40}$$

$$P_{ij} = \frac{Lk_z^i k_0\mu_0 c H_{a1}^2 \sin^2(\alpha a)e^{-\beta d}e^{\beta a}}{2\beta}\left[\frac{e^{-\beta a}+\beta(d-2a)e^{\beta a}}{\beta^2} - \frac{2\cosh(\beta a)}{\alpha^2+\beta^2}\right]$$

$$\tilde{H}_{ij} \equiv H_{ij} - P_{ij}k_z^j = \frac{Lk_0\mu_0 c H_{a1}^2}{2\beta}\sin^2(\alpha a)e^{2\beta a}e^{-\beta d}$$

Elementos diagonales tienen la forma:

$$\left(\mathbf{e}_{j\perp}\times\mathbf{h}_{j\perp}^*\right)\cdot\hat{\mathbf{z}} = \frac{k_z^j\omega\mu_0 H_{a1}^2}{(k_0^2 n_j^2 - k_z^2)^2}\begin{cases}\alpha^2\cos^2(\alpha(x-x_j)), & |x-x_j|\leq a\\ \beta^2\sin^2(\alpha a)e^{2\beta a}e^{-2\beta|x-x_j|}, & |x-x_j|>a\end{cases}$$

$$P_{jj} = \frac{Lk_z^j k_0\mu_0 c H_{a1}^2 a}{2\alpha^2}\left[1+\frac{\sin^2(\alpha a)}{a\beta^3}k_0^2\left(n_1^2-n_0^2\right)\right]$$

$$\tilde{H}_{jj} \equiv H_{jj} - P_{jj}k_z^j = \frac{Lk_0^3\mu_0 c H_{a1}^2 \sin^2(\alpha a)e^{2\beta a}e^{-2\beta d}}{4\beta^3}(n_1^2-n_0^2)\sinh(2\beta a)$$

La dinámica está regida por el sistema acoplado de las ecuaciones (2.34), que luego de premultiplicar por la inversa de la matriz P_{ij} toma la forma:

$$-i\frac{d}{dz}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k_z^{\mathrm{TE}}+\delta k & V\\ V & k_z^{\mathrm{TE}}+\delta k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},$$

con $k_z^{\mathrm{TE}}\sim 1.3\times10^5$ cm^{-1}, $V\equiv\frac{P_{ii}\tilde{H}_{ij}-P_{ij}\tilde{H}_{ii}}{P_{ii}^2-P_{ij}^2}\sim 1$ cm^{-1} y $\delta k\equiv\frac{P_{ii}\tilde{H}_{ii}-P_{ij}\tilde{H}_{ij}}{P_{ii}^2-P_{ij}^2}\sim -0.02$ cm^{-1} para $\lambda = 730$ nm, $n_1 = n_0 + 4\times10^{-4}$ y una distancia entre guías de $d = 18$ μm. $(k_z^{\mathrm{TE}}+\delta k)I + V\sigma_x$

$$\begin{pmatrix}a_1(z)\\a_2(z)\end{pmatrix} = \exp\left\{i\left[(k_z^{\mathrm{TE}}+\delta k)I + V\sigma_x\right]z\right\}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = e^{i(k_z^{\mathrm{TE}}+\delta k)z}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{iVz} & 0\\0 & e^{-iVz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$$

2.6. Bandas y Topología en Redes Fotónicas

Si bien es posible reformular las ecuaciones de Maxwell como un problema de autovalores en analogía a Mecánica Cuántica para plantear un análogo al Teorema de Bloch [**?**], en el contexto de sistemas discretos la ecuación tipo Schrödinger (2.34) con la matriz $\hat{C}\equiv\hat{P}^{-1}\hat{H}$ hermítica es justificación suficiente para invocarlo: Es posible expresar las soluciones del sistema en una base de cuasimomento cuya periodicidad sea la misma que la de la matriz $\hat{C}$. En la práctica, se aplicará un Ansatz de Bloch $\mathbf{a} = e^{i(\lambda z+\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\mathbf{A}$, con $\mathbf{A}$ un vector constante de la misma dimensionalidad que número de sitios en la celda unitaria de la red. De esta manera, será posible etiquetar $\lambda\equiv\lambda_n(\mathbf{k})$

Para sistemas finitos, los autovalores de la matriz $\hat{C}$ tenderán a agruparse en el mismo número de bandas que cantidad de sitios por celda unitaria conformen el sistema, dado que las funciones de Wannier asociadas al Teorema de Bloch aproximan de mejor manera al sistema en cuestión a medida que aumenta el número de celdas.

2.6.1. Correspondencia bulto-borde

En sistemas hermíticos existe una correspondencia entre las propiedades de las bandas del sistema, calculadas con condiciones de borde periodicas y los autoestados de borde asociados a la matriz $\hat{C}$, calculados con condiciones de borde abiertas [**?**].

2.6.2. Red de Su-Schireffer-Heeger fotónica

[**?**]

$$H = \sum_n C_{\text{intra}} b_n^* a_n + C_{\text{inter}} \left(b_{n-1}^* a_n + a_{n+1}^* b_n \right) + c.c. \tag{2.41}$$

3. Métodos numéricos

A partir de las ecuaciones (2.6) y (2.7), se puede aplicar la aproximación de guiaje débil para despreciar el lado derecho de ambas ecuaciones a fin de ignorar el efecto cruzado entre componentes de los campos. Las ecuaciones resultantes son del tipo Helmholtz:

$$\left[\nabla^2 + k_0^2 n^2(\mathbf{r})\right]\Psi(\mathbf{r}) = 0. \tag{3.1}$$

La ecuación (3.1) es la base de todos los métodos numéricos utilizados en esta tesis.

3.1. Expansión en modos normales

Este método numérico es úitl cuando los sistemas fotónicos en estudio son invariantes en la dirección de propagación z. Esto es, $n(\mathbf{r}) \equiv n(x, y)$. La soluciones de la ecuación (3.1) se pueden expandir en ondas planas con perfiles transversales: $\Psi(\mathbf{r}) = \Psi(x, y)\exp(i\beta z)$. Con ésto, cada modo transversal ν debe cumplir la siguiente ecuación a resolver numéricamente:

$$\left[\nabla_\perp^2 + k_0^2 n^2(x, y)\right]\Psi_\nu(x, y) = \beta_\nu^2\Psi_\nu(x, y), \qquad \text{con } \nabla_\perp^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{3.2}$$

Y el campo total propagado es una combinación lineal de los modos Ψ_ν:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_\nu a_\nu \Psi_\nu(x, y) e^{i\beta_\nu z}, \qquad \text{con } a_\nu \propto \Psi_\nu(x, y) \cdot \Psi(x, y, z = 0). \tag{3.3}$$

En vez de integrar directamente la ecuación de valores propios (3.2), la estrategia será discretizar el espacio y aproximar al operador Laplaciano transversal $\nabla_\perp^2$ como una matriz, pues

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, y)}{\partial x^2} \sim \frac{\Psi[i+1, j] - 2\Psi[i, j] + \Psi[i-1, j]}{\Delta x^2}.$$

Esto es, la matriz será una suma de Kronecker de dos matrices tridiagonales con valores -2 en la diagonal y -1 fuera de ella, con un prefactor de $1/\Delta x^2$ o $1/\Delta y^2$. Prácticamente toda la matriz es nula (*sparse-like*), por lo que es posible optimizar el proceso de cómputo al utilizar la librería de Python `scipy.sparse.linalg`, especialmente diseñada para el álgebra lineal de matrices de escasos elementos. El anexo B contiene una implementación de este algoritmo en Python bajo licencia GNU GPL v3.

3.2. Beam Propagation Method

Otra forma de abordar la resolución numérica de la ecuación (3.1) consiste en separar el campo en su envolvente lenta y una fase rápidamente oscilante, considerando que en el rango visible el orden de magnitud es, $k_0 \sim 10^5$ cm^{-1}: $\Psi(\mathbf{r}) = \phi(x,y,z)\exp(ik_0n_0z)$. Luego de reemplazar en la ecuación (3.1) se obtiene la ecuación óptica de Schrödinger [**?**]:

$$2ik_0n_0\frac{\partial}{\partial z}\phi(x,y,z) = -\left[\nabla_\perp^2 + k_0^2(n^2(\mathbf{r}) - n_0^2)\right]\phi(x,y,z), \tag{3.4}$$

donde se ha utilizado la aproximación paraxial $\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right| \ll 2k_0n_0\left|\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|$. Los algoritmos que resuelven la ecuación (3.4) son conocidos como *Beam Propagation Methods* escalares, utilizados ampliamente en esta área de investigación [**? ? ? ? ?**]. Fuera de la aproximación de guiaje débil, los efectos de polarización cruzada son más relevantes y se hace necesaria una descripción vectorial del problema.

3.2.1. Implementación mediante transformada de Fourier (FFTBPM)

La ecuación (3.4) se puede escribir en términos de operadores lineales como [**?**]:

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \left(\hat{A} + \hat{B}\right)\phi, \text{ con } \hat{A} \equiv i\frac{\nabla_\perp^2}{2k_0n_0} \text{ y } \hat{B} \equiv i\frac{k_0}{2n_0}\left[n^2(\mathbf{r}) - n_0^2\right]. \tag{3.5}$$

La solución formal a la ecuación (3.5) es $\phi(\mathbf{r}) = \exp\left[\left(\hat{A}+\hat{B}\right)(z-z_0)\right]\phi(x,y,z_0)$. Es conveniente trabajar con el operador $\hat{A}$ en el espacio de Fourier y con el operador $\hat{B}$ en el espacio directo. Dado que $\hat{A}$ y $\hat{B}$ no conmutan en general, se puede expandir el operador exponencial a orden $O(\Delta z^3)$ como $\exp\left[\left(\hat{A}+\hat{B}\right)\Delta z\right] \approx \exp\left(\frac{\hat{A}\Delta z}{2}\right)\exp\left(\hat{B}\Delta z\right)\exp\left(\frac{\hat{A}\Delta z}{2}\right) + O(\Delta z^3)$.

El algoritmo a implementar es el siguiente:

1. Se comienza con un perfil $\phi(x,y,z_0)$
2. Se actúa en el espacio de Fourier transformando el perfil y multiplicado por la fase asociada a $\hat{A}$: $\exp\left(\frac{ik^2\Delta z}{4k_0n_0}\right)\mathcal{F}(\phi(z_0))$, donde $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ son las frecuencias de Fourier.
3. Se aplica transformada de Fourier inversa y se multiplica por la fase asociada a $\hat{B}$: $\exp\left[\frac{i\Delta z k_0^2(n^2-n_0^2)}{2k_0n_0}\right]\mathcal{F}^{-1}\left(\exp\left(\frac{ik^2\Delta z}{4k_0n_0}\right)\mathcal{F}(\phi(z_0))\right)$
4. Se regresa al espacio de Fourier y se multiplica por la fase asociada a $\hat{A}$: $\exp\left(\frac{ik^2\Delta z}{4k_0n_0}\right)\mathcal{F}\left\{\exp\left[\frac{ik_0^2(n^2-n_0^2)}{2k_0n_0}\Delta z\right]\mathcal{F}^{-1}\left[\exp\left(\frac{ik^2\Delta z}{4k_0n_0}\right)\mathcal{F}(\phi(z_0))\right]\right\}$
5. Se vuelve al espacio real, habiendo avanzado un paso Δz: $\phi(z_0+\Delta z) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\exp\left(\frac{ik^2\Delta z}{4k_0n_0}\right)\mathcal{F}\left\{\exp\left[\frac{ik_0^2(n^2-n_0^2)}{2k_0n_0}\Delta z\right]\mathcal{F}^{-1}\left[\exp\left(\frac{ik^2\Delta z}{4k_0n_0}\right)\mathcal{F}(\phi(z_0))\right]\right\}\right\}$
6. Se itera hasta llegar a la distancia de propagación z deseada.

3.3. Desde teoría de modos acoplados

Se puede decir que la simulación numérica de las ecuaciones (**??**) es lo más compacta posible en tanto la matriz de acoplamientos $\hat{C}$ codifica todas las propiedades de la red que se deseen estudiar de manera semiempírica. En este sentido, la diagonalización de la matriz $\hat{C}$ es una herramienta numérica útil en el estudio del comportamiento de redes fotónicas ante variaciones de parámetros tales como la dimerización (razón entre dos constantes de acoplamiento) o el desintonizado (diferencia entre constantes de propagación de dos modos distintos). Incluso, es posible explorar sistemas "no físicos" debido a los grados de libertad en las entradas de la matriz $\hat{C}$.

4. Métodos experimentales

4.1. Escritura de guías de onda

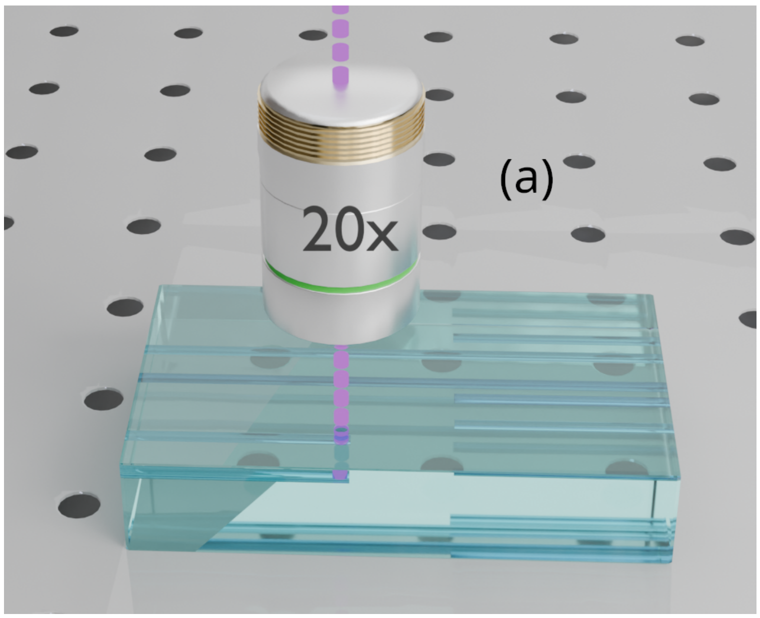


Figura 4.1: Escritura.

4.2. Montaje de excitación láser supercontinuo

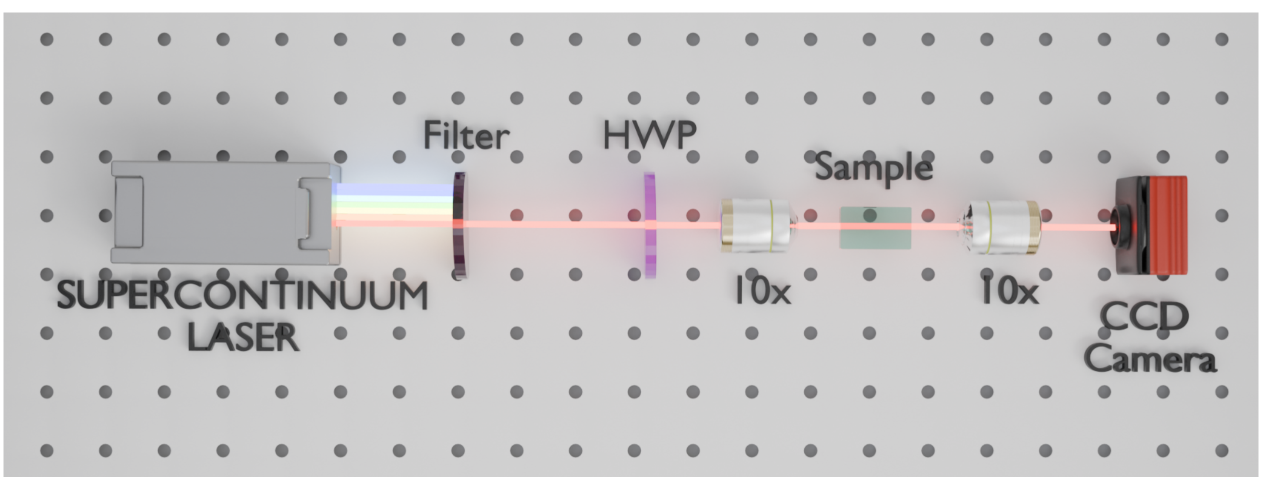


Figura 4.2: Montaje SC.

4.3. Montaje de modulación espacial de luz

Para usar condiciones iniciales distintas a una gaussiana se hace necesario incorporar métodos de modulación espacial de luz. En esta tesis se utilizó una técnica conocida como

4.3.1. Etapa premodulación

El modulador espacial de luz utilizado es un HOLOEYE PLUTO-NIR SLM - Reflective LCOS, cuya respuesta óptica ocurre con polarización paralela al plano de la mesa óptica. Se utiliza un retardador de media onda ($\lambda/2$) seguido de un polarizador de atenuación 10000:1 con el objetivo de que la polarización de la luz láser coincida con la de la respuesta del SLM. Posteriormente se magnifica y se colima el haz para que abarque todo el área de pixeles disponible con un par de lentes 20x y L_1 de foco 100mm.

4.3.2. Etapa de modulación

Una rejilla de difracción que maximiza la potencia del primer orden de difracción es utilizada. Para modular en amplitud se debe multiplicar la rejilla por la máscara de amplitud deseada, mientras que para modular en fase basta con sumar el nivel de gris correspondiente a la fase deseada. En la Figura 4.3 se bosqueja el algoritmo implementado en Python en el anexo D.

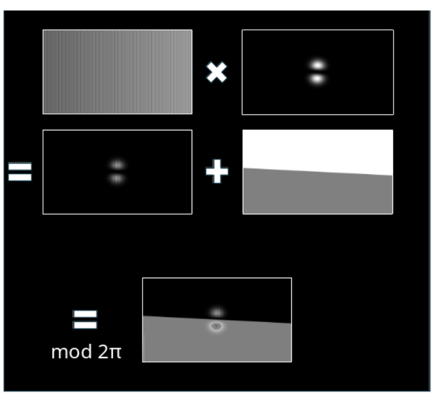


Figura 4.3: Algoritmo de modulación espacial de luz para máscaras de amplitud y fase arbitrarias. Los parámetros de la rejilla de difracción están sujetos a la longitud de onda usada (730 nm).

4.3.3. Etapa de acoplamiento

La imagen modulada pasa por un par de lentes L_2 de foco 1000 mm y L_3 de foco 50 mm para reducir el tamaño al orden de los micrómetros. La inclinación de la cara de entrada de la muestra debe coincidir con el plano de la imagen modulada, por lo que se generan dos pares de haces gaussianos, unos verticales y otros horizontales, de manera de que al trasladar el lente objetivo 4x, los máximos de difracción se generen en el centro de los haces gaussianos.

4.3.4. Etapa de captura en cámara

Una vez calibrada la inclinación de la muestra, se fija su posición. Un lente objetivo 10x permite magnificar la imagen de salida y capturar los resultados en un Beam Profiler.

4.3.5. Circuito óptico

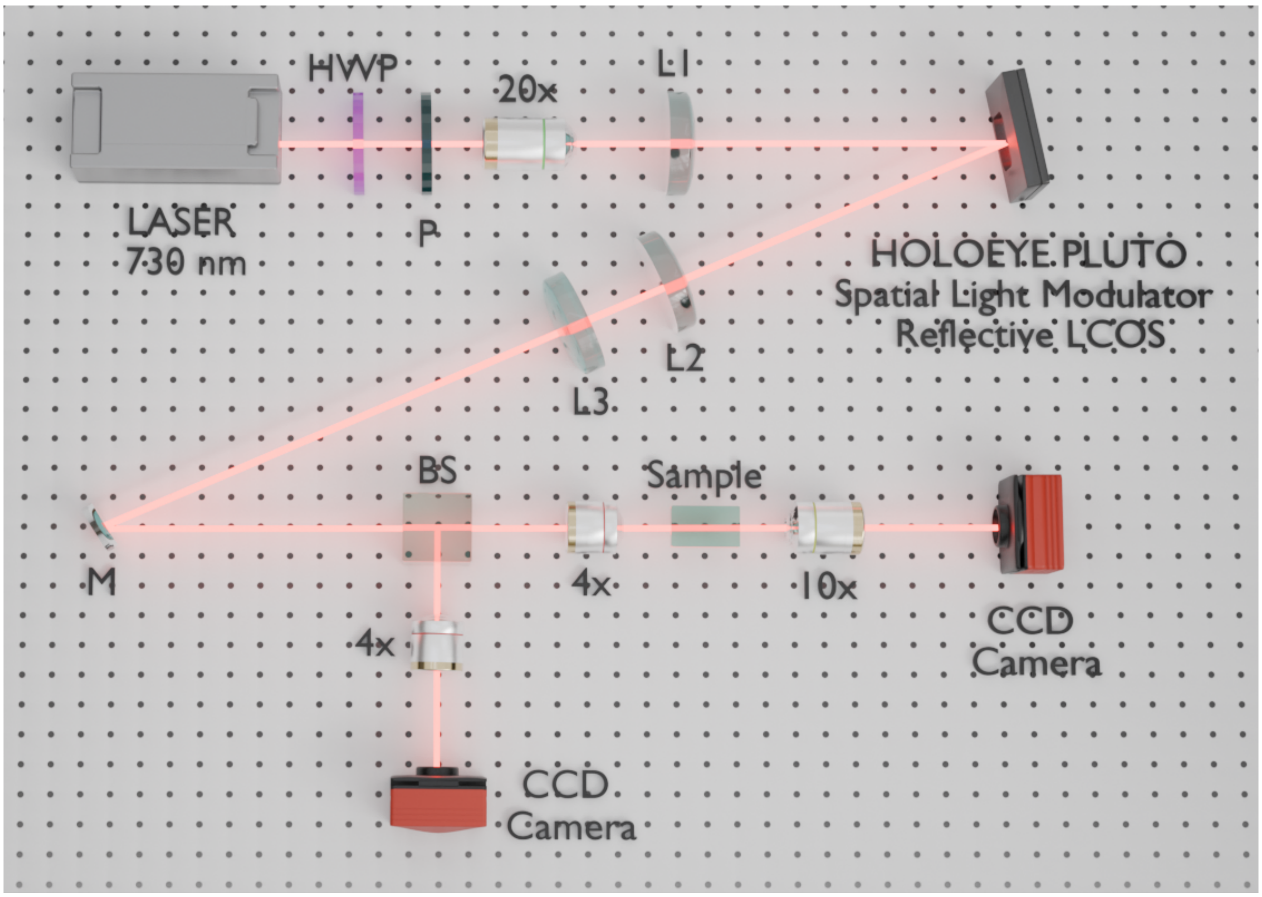


Figura 4.4: Montaje SLM.

4.4. Análisis de imágenes

A partir de las imágenes capturadas es posible extraer información de la potencia que contiene cada sitio del sistema fotónico discreto en estudio. Para ello la imagen completa debe ser seccionada equispaciadamente en rectángulos que encierren las regiones donde existen guias de onda, iluminadas o no. La potencia de cada sitio será entonces la suma de la intensidad de cada píxel encerrado en su rectángulo respectivo.

5. Acoplamiento de modos p_y

En electroestática, es posible asociar las interacciones dipolares eléctricas con los polinomios de Legendre de orden 2, $P_2(\cos(\theta)) = 3\cos^2(\theta) - 1$, con θ el ángulo que forman los dipolos entre sí. Se suele llamar *ángulo mágico* al valor $\theta_m \approx 0.62$ rad, pues anula el término de interacción dipolar [?].

Este capítulo tiene como protagonistas a los llamados modos p_y o modos dipolares verticales, cuya excitación es posible al superar la condición de corte (longitud de onda lo suficiemente pequeña y tanto contraste Δn como ancho de la guía lo suficientemente grandes).

5.1. Acopladores

Al considerar qué sucede con el acoplamiento entre modos p_y de guías elípticas, se pueden distinguir dos casos límite: 1) Para acopladores horizontales, el acoplamiento C_π tiene signo positivo. 2) Para acopladores verticales, el acoplamiento C_σ tiene signo negativo [?]. Esta fenomenología es análoga a la que sucede en los enlaces químicos σ y π de las cadenas de carbono orgánicas. Para comprobar este efecto, se fabricaron 20 dímeros con una distancia de separación de 25 μm y con una distancia de propagación de 15 mm y se varió el ángulo entre guías desde 0.00 rad hasta 1.57 rad. Utilizando el montaje SLM, se moduló un modo P: dos lóbulos del mismo tamaño con una diferencia de fase de π entre ambos.

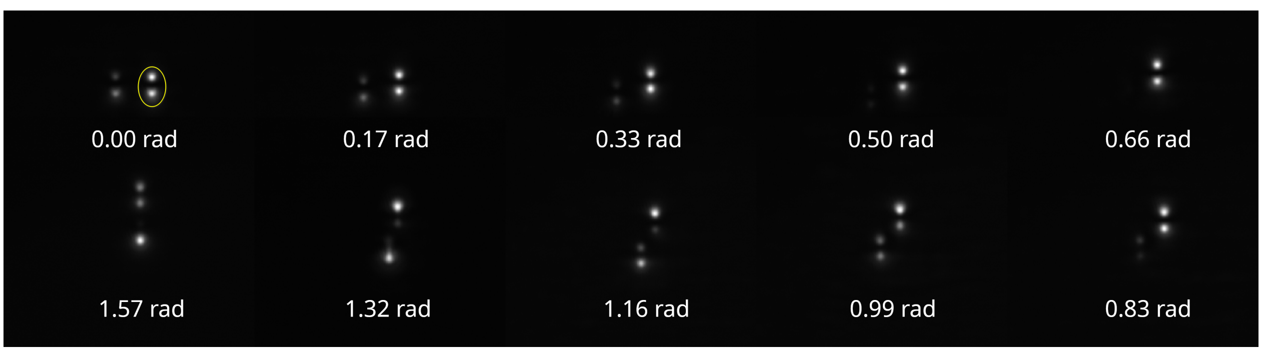


Figura 5.1: Barrido en ángulo que captura el paso por acoplamiento nulo en 0.50 rad para una misma distancia de propagación de 15 mm.

Se hizo un análisis de las imágenes como el descrito en la sección 4.4. Luego, utilizando la descripción discreta (2.34) de la constante de acoplamiento $C = \frac{1}{L}\arctan\left(\sqrt{P_2/P_1}\right)$ se caracterizó su comportameinto en función del ángulo θ medido desde la horizontal para una distancia de separación fija de 25 μm. El signo negativo se añadió de manera que la tendencia de los datos fuera continua, como se aprecia en la Figura 5.2.

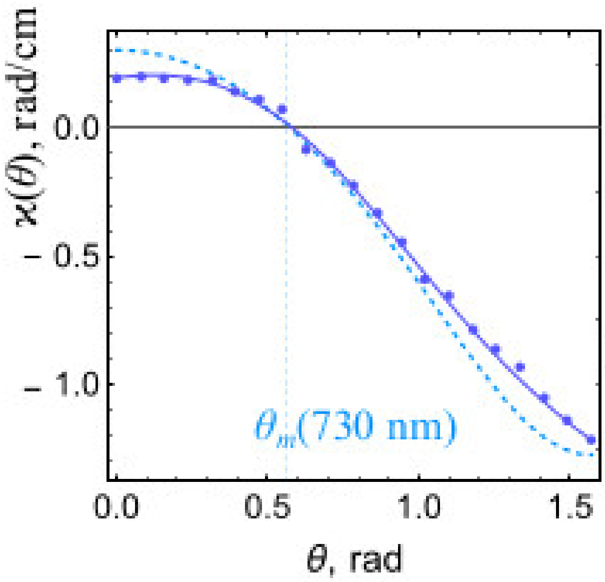


Figura 5.2: Curva de acomplamiento en función del ángulo entre modos P.

5.2. Redes tipo panal de abeja

La red tipo panal de abeja es conocida por ser la red subyacente del grafeno. Su característica más relevante para efectos de esta tesis tiene relación con sus bandas de Bloch: ambas dispersivas y con la presencia de un cono de Dirac en su intersección [**?**].

Una vez encontrados los parámetros de fabricación de la sección anterior, se estudió el mismo efecto en una red tipo panal de abeja de forma que la distancia entre sitios permanece fija (Figura 5.3). Se hizo un barrido de ángulos para evidenciar el efecto.

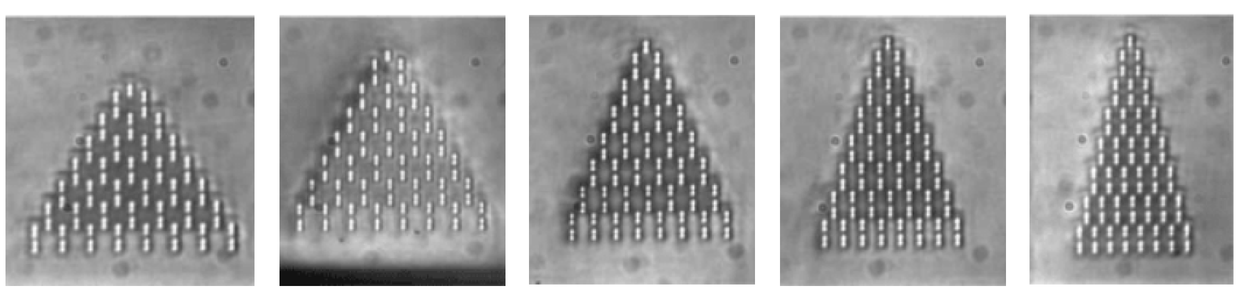


Figura 5.3: Imágenes microscópicas de redes fotónicas tipo panel de abeja.

6. Moléculas Fotónicas

La técnica de escritura de guías de onda descrita en el capítulo 4.1 está restringida por la forma alargada y elíptica del tren de pulsos láser que se enfoca, lo que en consecuencia constriñe los acoplamientos interorbitales posibles [**?**]. Una posibilidad para añadir grados de libertad es fabricar dos guías de onda lo suficientemente cercanas entre sí de manera de hibridizar sus modos guiados, de manera análoga al principio físico que rige a las moléculas. Es por ello que en este capítulo se usará el concepto de moléculas fotonicas [**?**], y su aplicación para el estudio experimental de una red fotónica que presenta una doble transición de fase topológica [**?**].

6.1. Autoestados del acoplador fotónico para distancias de separación arbitrarias

Como se adelantó en la sección 2.1, la teoría de modos acoplados es una buena descripción de los sistemas fotónicos en estudio siempre que la distancia de separación entre guías de onda sea superior a 15 μm, pues la constante de acoplamiento tiene un comportamiento exponencial decreciente. Más allá del régimen discreto, se hace necesario descibir el sistema como una sola macroguía. Una herramienta numérica que es agnóstica entre ambos regímenes es la de Expansión en Modos Normales, detallada en la sección 3.1. Es por ello que se simula un par de guías de onda a distintas distancias para determinar el comportamiento de sus autoestados.

6.2. Moléculas Fotónicas en Red SP-SSH

Para la implementación experimental (sección 4.1) de una red que presente acoplamiento SP [**? ?**], se utilizaron los dipolos horizontales de la sección anterior, obtenidos mediante moléculas fotónicas. Un preciso sintonizado de las constantes de propagación de los modos s y p permitió considerar un grado de libertad análogo al del espín del electrón (*pseudoespín*). El Hamiltoniano H de esta red [**? ?**] es el siguiente

$$
\begin{aligned}
H = \sum_n \Bigg[& \frac{\delta\beta}{2}\left(b^*_{n,1}b_{n,1} - a^*_{n,1}a_{n,1} + b^*_{n,2}b_{n,2} - a^*_{n,2}a_{n,2}\right) + k_{ss,2}a^*_{n,2}a_{n,1} - k_{pp,2}b^*_{n,2}b_{n,1} \\
& + k_{ss,1}\left(a^*_{n-1,2}a_{n,1} + a^*_{n+1,2}a_{n,2}\right) - k_{pp,1}\left(b^*_{n-1,2}b_{n,1} + b^*_{n+1,2}b_{n,2}\right) + k_{sp,2}\left(a^*_{n,2}b_{n,1} - b^*_{n,2}a_{n,1}\right) \\
& + k_{sp,1}\left(a^*_{n-1,2}b_{n,1} - b^*_{n-1,2}a_{n,1} + a^*_{n+1,1}b_{n,2} - b^*_{n+1,1}a_{n,2}\right)\Bigg] + c.c.
\end{aligned}
$$

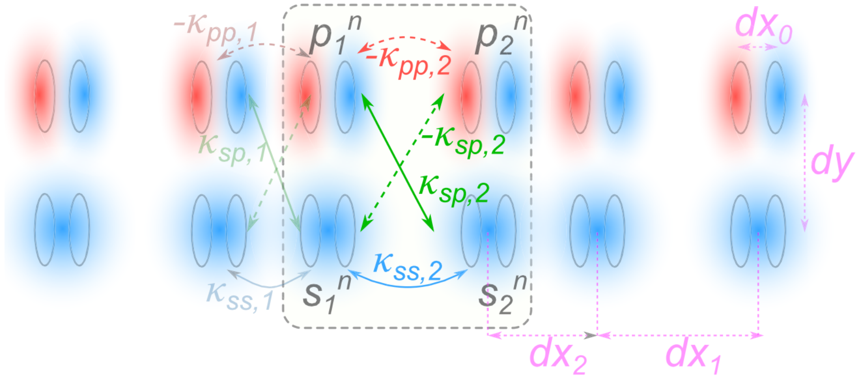


Figura 6.1: Esquema de la red SP-SSH

7. Haces con momentum orbital angular (OAM)

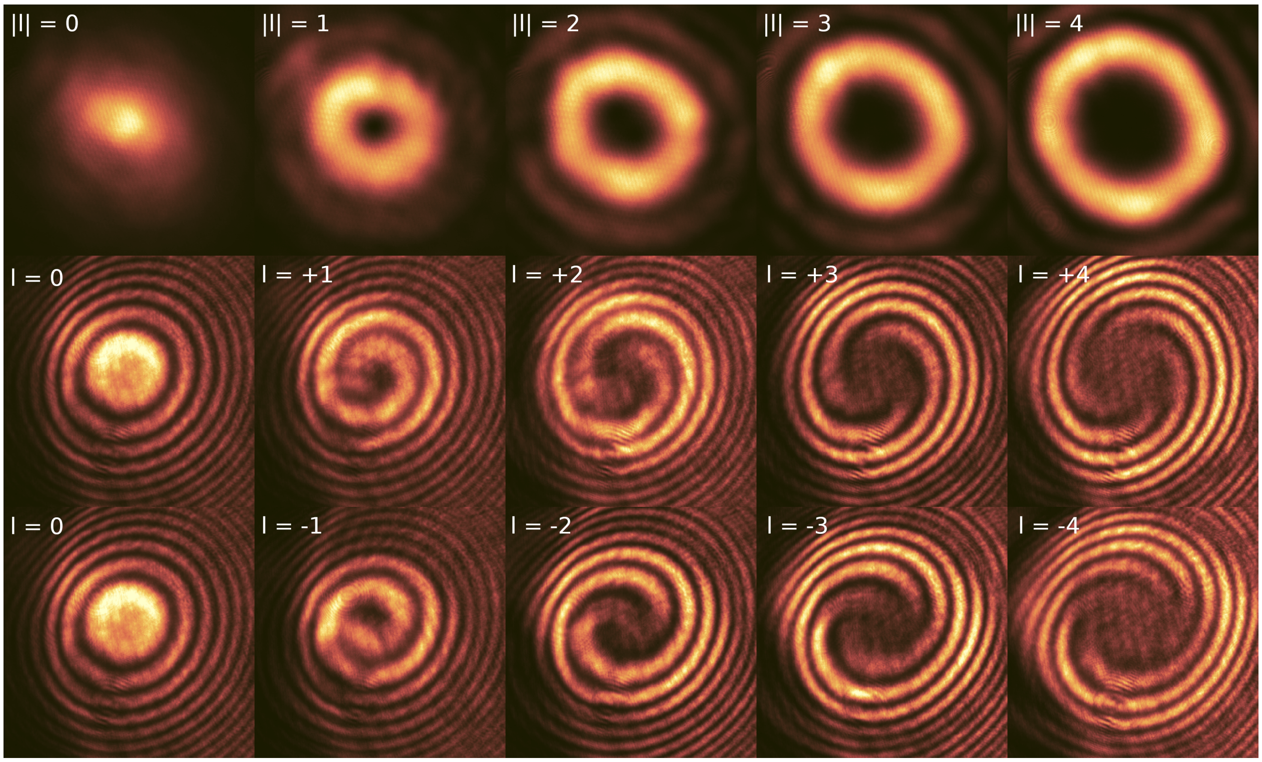


Figura 7.1: Generación de OAMs e interferencia tipo Mach-Zehnder. Se aprecia la carga de los OAMs contando la cantidad de espirales originados desde el centro.

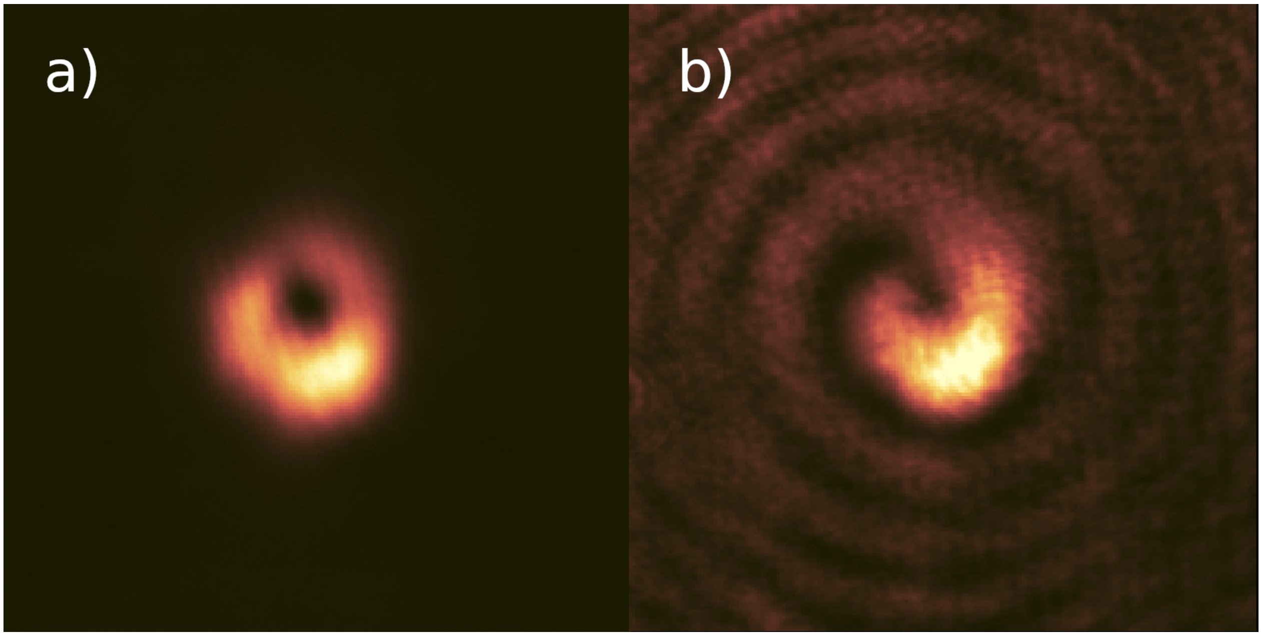


Figura 7.2: Propagación de vórtices en guías de onda. En a) se tiene la intensidad del perfil de salida luego de excitar un OAM con carga $\ell = 1$. En b) se tiene una estructura de fase similar a la esperada pero con falta de definición.

8. Conclusiones

A. Ortogonalidad de los modos normales

La ecuación (2.28) permite en encontrar la condición de ortogonalidad de los modos normales del campo eléctrico $\mathbf{E}_\nu$. Para ello, se puede tomar producto punto a la ecuación por $\mathbf{E}_\mu^*$ e integrar en una superficie S:

$$\iint_S \left(\nabla_\perp^2 + k_0^2 n^2\right) \mathbf{E}_\nu \cdot \mathbf{E}_\mu^* dxdy = \beta_\nu^2 \iint_S \mathbf{E}_\nu \cdot \mathbf{E}_\mu^* dxdy \tag{A.1}$$

Si intercambiamos los índices ν y μ tenemos:

$$\iint_S \left(\nabla_\perp^2 + k_0^2 n^2\right) \mathbf{E}_\mu \cdot \mathbf{E}_\nu^* dxdy = \beta_\mu^2 \iint_S \mathbf{E}_\mu \cdot \mathbf{E}_\nu^* dxdy \tag{A.2}$$

Restando las ecuaciones (A.1) y (A.2) y escogiendo modos reales:

$$\begin{aligned}
(\beta_\nu^2 - \beta_\mu^2) \iint_S \mathbf{E}_\mu \cdot \mathbf{E}_\nu dxdy &= \iint_S \left(\mathbf{E}_\mu \cdot \nabla_\perp^2 \mathbf{E}_\nu - \mathbf{E}_\nu \cdot \nabla_\perp^2 \mathbf{E}_\mu\right) dxdy \\
&= \oint_{\partial S} (\mathbf{E}_\mu \times \nabla \times \mathbf{E}_\nu - \mathbf{E}_\nu \times \nabla \times \mathbf{E}_\mu) \cdot \hat{n} d\ell \\
&+ \oint_{\partial S} (\hat{n} \cdot \mathbf{E}_\mu)(\nabla \cdot \mathbf{E}_\nu) - (\hat{n} \cdot \mathbf{E}_\nu)(\nabla \cdot \mathbf{E}_\mu) d\ell \\
&\underset{\partial \mathrm{S} \to \infty}{=} 0. \\
\therefore \iint_S \mathbf{E}_\mu \cdot \mathbf{E}_\nu^* dxdy &= 0, \quad \text{si } \nu \neq \mu,
\end{aligned}$$

donde se ha usado la segunda identidad de Green vectorial [**?**] y que el campo eléctrico debe hacerse anularse en el infinito, aunque basta considerar que el campo sea nulo en el borde de la región S.

B. Código en Python para cálculo de modos normales

C. Código en C de BPM

```c
// Saves into a text file the output of a gaussian light beam propagating in a 2D waveguide array

/*
Copyright (C) 2023  Diego Roman-Cortes

This program is free software: you can redistribute it and/or modify
it under the terms of the GNU General Public License as published by
the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or
(at your option) any later version.

This program is distributed in the hope that it will be useful,
but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE.  See the
GNU General Public License for more details.

You should have received a copy of the GNU General Public License
along with this program.  If not, see <https://www.gnu.org/licenses/>.

contact: diego.roman.c@ug.uchile.cl
*/

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include <math.h>
#include <complex.h>
#include <fftw3.h>

int main(int argc, char* argv[]){
    // number of points in grid
    int Nx = 700;
    int Ny = 700;
    int Nz = 5000;

    // parameters
    double n0 = 1.48; // refraction index of borosilicate
    double l0 = atof(argv[1])*1E-9; // wavelenght of light
    double wx = 2.2E-6; // width of the waveguide
    double wy = 3.0E-6; // height of the waveguide
    double sigma = 7.0E-6; // width of LG-mode
    double l = 0; // azimuthal parameter of LG-mode
    double Lx = 350E-6; // width of the grid
    double Ly = 350E-6; // height of the grid

    double zmax =  50E-3; // propagation distance

    // auxiliary variables
    double dx = Lx/(Nx-1);
```

```
    double dy = Ly/(Ny-1);
    double dz = zmax/(Nz-1);
    double k0 = 2*M_PI/l0;
    double beta = k0 * n0;
    double xi, yj, r, phi;

    //phi = atof(argv[1])*1E-9;
    //printf("%f", phi);

    double* dn = malloc(sizeof(double) * Nx * Ny);

    // 1D array setup
    double dn1 = 9.5E-4; // contrast of first waveguide

    double d1x = 17E-6; // X separation of waveguides
    double d1y = 18.5E-6; // Y separation of waveguides

    // for animation
    int frames = 50;
    int rem, div;
    char filename[10];

    int i, j, k;

    FILE *fp1, *fp2, *fp3;

    //initialization of FFTW

    fftw_init_threads();
    fftw_complex *in = (fftw_complex*) fftw_malloc(sizeof(fftw_complex) * Nx *
     Ny);
    fftw_complex *aux = (fftw_complex*) fftw_malloc(sizeof(fftw_complex) * Nx
   * Ny);
    fftw_complex *out = (fftw_complex*) fftw_malloc(sizeof(fftw_complex) * Nx
   * Ny);
    fftw_plan_with_nthreads(8);

    fftw_plan p_forward = fftw_plan_dft_2d(Nx, Ny, in, out, FFTW_BACKWARD,
   FFTW_PATIENT);
    fftw_plan p_inverse = fftw_plan_dft_2d(Nx, Ny, aux, in, FFTW_FORWARD,
   FFTW_PATIENT);

    fp1 = freopen("refractive2d.txt", "w", stdout);
    // shape of refractive index contrast
    for(i = 0; i < Nx; i++){
        for(j = 0; j < Ny; j++){
            xi = -0.5*Lx + i*dx;
            yj = -0.5*Ly + j*dy;

            for(int n=-9; n<10; n++){
                for(int m=-9; m<10; m++){
                    dn[i+Nx*j] += dn1 * tanh(33.0 / (exp(((xi-n*d1x)/wx)*((xi-
   n*d1x)/wx) + ((yj-m*d1y)/wy)*((yj-m*d1y)/wy))));
                }
            }
            printf("%e\n", dn[i+Nx*j]);
```

```
        }
        printf("\n");
    }
    fclose(fp1);

    // initial field (gaussian)
    for(i = 0; i < Nx; i++){
        for(j = 0; j < Ny; j++){
            xi = -0.5*Lx + i*dx;
            yj = -0.5*Ly + j*dy;
            r = sqrt((xi)*(xi) + (yj)*(yj));
            in[i+Nx*j] += (cexp(-r*r/(sigma*sigma))); // hermite-gaussian mode
        }
    }
    // save the input (gaussian) in a text file
    fp2 = freopen("00.txt", "w", stdout);
    for(i = 0; i < Nx; i++){
        for(j = 0; j < Ny; j++){
            xi = -0.5*Lx + i*dx;
            yj = -0.5*Ly + j*dy;
            printf("%e\n", cabs(in[i+Nx*j])*cabs(in[i+Nx*j]));
        }
        printf("\n");
    }
    fclose(fp2);

    // frequency indices
    int freqidx[Nx + Ny];

    for(i=0; i < Nx/2; i++){
        freqidx[i] = i;
    }
    for(j=0; j < Ny/2; j++){
        freqidx[Nx+j] = j;
    }
    for(i=Nx/2; i < Nx; i++){
        freqidx[i] =  i-Nx;
    }
    for(j=Ny/2; j < Ny; j++){
        freqidx[Nx+j] =  j-Ny;
    }


    fftw_complex *phase = (fftw_complex*) fftw_malloc(sizeof(fftw_complex) *
   Nx * Ny);
    for(i = 0; i < Nx; i++){
        for(j = 0; j < Ny; j++){
            phase[i+j*Nx] = cexp(I*dz*( (2*M_PI) * (2*M_PI) * ( (freqidx[i]/Lx
   ) * (freqidx[i]/Lx) + (freqidx[Nx+j]/Ly) * (freqidx[Nx+j]/Ly) )/(4*beta)));
        }
    }

    // main loop

    for(k=1; k <= Nz; k++){

```

```c
        fftw_execute(p_forward); // 'out' now points towards the DFT of 'in'

        for(i = 0; i < Nx*Ny; i++){
            aux[i] = out[i] * phase[i];
        }

        fftw_execute(p_inverse); // 'in' now points towards the inverse DFT of 'aux'

        for(i = 0; i < Nx * Ny; i++){
            in[i] /= (Nx * Ny); // normalization of FFT
            in[i] *= cexp(-I * k0 * (((n0+dn[i])*(n0+dn[i]))- (n0*n0)) * dz/(2*n0)); // potential operator in real space
        }

        fftw_execute(p_forward); // 'out' now points towards the DFT of 'in'

        for(i = 0; i < Nx*Ny; i++){
            aux[i] = out[i] * phase[i];
        }

        fftw_execute(p_inverse); // 'in' now points towards the inverse DFT of 'aux'
        for(i = 0; i < Nx * Ny; i++){
            in[i] /= (Nx * Ny); // normalization of FFT
        }

        // save to txt
        rem = k % (Nz/frames);
        if(rem == 0){
            div = k / (Nz/frames);
            sprintf(filename, "%02d.txt", div);

            fp3 = freopen(filename, "w", stdout);

            for(i = 0; i < Nx; i++){
                for(j = 0; j < Ny; j++){
                    printf("%e\n", cabs(in[i+j*Nx])*cabs(in[i+j*Nx]));
                }
                printf("\n");
            }
            fclose(fp3);
        }

    }
    fftw_cleanup_threads();
    fftw_destroy_plan(p_forward);
    fftw_destroy_plan(p_inverse);
    fftw_free(in);
    fftw_free(aux);
    fftw_free(out);
    fftw_free(phase);
    free(dn);
    return 0;
}
```

D. Código en Python generador de hologramas

```python
#    Copyright (C) 2024  Diego Roman-Cortes
#
#    This program is free software: you can redistribute it and/or modify
#    it under the terms of the GNU General Public License as published by
#    the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or
#    (at your option) any later version.
#
#    This program is distributed in the hope that it will be useful,
#    but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
#    MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE.  See the
#    GNU General Public License for more details.
#
#    You should have received a copy of the GNU General Public License
#    along with this program.  If not, see <https://www.gnu.org/licenses/>.
#
#    e-mail: diego.roman.c@ug.uchile.cl

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from PIL import Image, ImageChops
from scipy.special import eval_genlaguerre
from scipy import signal

my_dpi = 120 #120
plt.style.use('dark_background')

WIDTH = 1920
HEIGHT = 1080

sigma = HEIGHT/4

sigmax = HEIGHT/2.2/4*2.2
sigmay = HEIGHT/5.0*1.1

x = np.linspace(-WIDTH/2, WIDTH/2, num=WIDTH)
y = np.linspace(-HEIGHT/2, HEIGHT/2, num=HEIGHT)

Xn, Yn = np.meshgrid(x, y, indexing='xy')

angle = -0.05
X = Xn*np.cos(angle) - Yn*np.sin(angle)
Y = Yn*np.cos(angle) + Xn*np.sin(angle)

Z = np.zeros(X.shape, dtype=complex)
Z += (np.exp(-((X)/sigma/1.0)**2)*np.exp(-((Y)/sigma)**2)) # any function of x and y
Z /= np.sqrt(np.sum(np.abs(Z)**2))

phase = (np.angle(Z)+np.pi) * 255.0 / (2*np.pi)
```

```
fig = plt.figure(figsize=(1920/my_dpi, 1080/my_dpi), dpi=my_dpi)

plt.imsave('fase.png', phase, cmap="gray", vmin=0, vmax=255)
plt.close("all")

fig = plt.figure(figsize=(1920/my_dpi, 1080/my_dpi), dpi=my_dpi)

blaze = (signal.sawtooth(Xn*2.0*np.pi/5.0) + 1)/2.0*255

plt.imsave('blaze.png', blaze, cmap="gray", vmin=0, vmax=255)
plt.close("all")

fig = plt.figure(figsize=(1920/my_dpi, 1080/my_dpi), dpi=my_dpi)

amplitude = (np.abs(Z)**2/np.max(np.abs(Z)**2)) * blaze/255
amplitude /= amplitude.max()
amplitude *= 255


plt.imsave('amplitude.png', amplitude, cmap="gray", vmin=0, vmax=255)
plt.close("all")


im1 = np.array(Image.open('amplitude.png').convert('L'), dtype="uint16")
im2 = np.array(Image.open('fase.png').convert('L'), dtype="uint16")

imf = (((amplitude + phase) % 255))
im = (imf).astype(np.uint8)

plt.imsave('vortex2.png', im, cmap="gray", vmin=0, vmax=255)
```