



UNIVERSIDAD DE CHILE  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

REDES MULTIORBITALES BASADAS EN MOLÉCULAS FOTÓNICAS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE  
MAGÍSTER EN CIENCIAS, MENCIÓN EN FÍSICA

DIEGO ANTONIO ROMÁN CORTÉS

PROFESOR GUÍA:  
RODRIGO ANDRÉS VICENCIO POBLETE

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:  
XX  
PEDRO ORELLANA

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por los proyectos Instituto Milenio para la  
Investigación en Óptica (MIRO) ICN17\_012 y Fondecyt Regular 1231313  
Powered@NLHPC: Esta tesis fue parcialmente apoyada por la infraestructura de supercómputo  
del NLHPC (CCSS210001)

SANTIAGO DE CHILE  
2025

# **Resumen**

*Mas si buscáis descubrimientos  
Tierras irrealizables más allá de los cielos  
Vegetante obsesión de musical congoja  
Volvamos al silencio  
Trampas de luz y cascadas lujosas  
Trampas de perla y de lámpara acuática  
Anda como los ciegos con sus ojos de piedra  
Presintiendo el abismo a todo paso  
Mas no temas de mí que mi lenguaje es otro  
No trato de hacer feliz ni desgraciado a nadie  
Ni descolgar banderas de los pechos  
Ni dar anillos de planetas  
Ni hacer satélites de mármol en torno a un talismán ajeno  
Quiero darte una música de espíritu  
Música mía de esta cítara plantada en mi cuerpo  
Música que hace pensar en el crecimiento de los árboles  
Y estalla en luminarias dentro del sueño*

Extractos de *Altazor*, Vicente Huidobro

# **Agradecimientos**

# Tabla de Contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Marco teórico</b>	<b>2</b>
2.1. Desde las ecuaciones de Maxwell a propagación de la luz en guías de onda dieléctricas . . . . .	2
2.2. Soluciones analíticas para guía de onda tipo losa o <i>slab</i> . . . . .	3
2.2.1. Soluciones gráficas y comparación entre modos TE y TM . . . . .	5
2.3. Soluciones analíticas para fibra óptica circular . . . . .	7
2.3.1. Modos TE y TM . . . . .	9
2.3.2. Modos HE y EH . . . . .	10
2.4. Modos normales en guías de onda . . . . .	12
2.5. Teoría de modos acoplados . . . . .	12
2.5.1. Derivación desde un principio variacional . . . . .	12
2.5.2. Dímero TE en guías de onda tipo losa . . . . .	14
2.5.3. Bandas y Topología . . . . .	15
<b>3. Métodos numéricos</b>	<b>19</b>
3.1. Expansión en modos normales . . . . .	19
3.2. Beam Propagation Method . . . . .	19
3.2.1. Implementación mediante transformada de Fourier (FFTBPM) . . . . .	20
3.3. Desde teoría de modos acoplados . . . . .	21
<b>4. Métodos experimentales</b>	<b>22</b>

4.1. Escritura de guías de onda . . . . .	22
4.2. Montaje de excitación láser supercontinuo . . . . .	22
4.3. Montaje de modulación espacial de luz . . . . .	23
4.3.1. Etapa premodulación . . . . .	23
4.3.2. Etapa de modulación . . . . .	23
4.3.3. Etapa de acoplamiento . . . . .	23
4.3.4. Etapa de captura en cámara . . . . .	24
4.3.5. Circuito óptico . . . . .	24
4.4. Análisis de imágenes . . . . .	24
<b>5. Acoplamiento de modos <math>p_y</math></b>	<b>25</b>
5.1. Acopladores . . . . .	25
5.2. Redes tipo panal de abeja . . . . .	26
<b>6. Moléculas Fotónicas</b>	<b>27</b>
6.1. Autoestados del acoplador fotónico para distancias de separación arbitrarias . . . . .	27
6.2. Moléculas Fotónicas en Red SP-SSH . . . . .	27
<b>7. Haces con momentum orbital angular (OAM)</b>	<b>29</b>
<b>8. Conclusiones</b>	<b>31</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>37</b>
<b>Anexo A. Ortogonalidad de los modos normales</b>	<b>38</b>
<b>Anexo B. Código en Python para cálculo de modos normales</b>	<b>39</b>
<b>Anexo C. Código en C de BPM</b>	<b>40</b>
<b>Anexo D. Código en Python generador de hologramas</b>	<b>44</b>

# Índice de Ilustraciones

2.1.	Forma de una guía de onda tipo losa. . . . .	4
2.2.	Soluciones gráficas de los modos TE . . . . .	6
2.3.	Soluciones gráficas de los modos TE . . . . .	6
2.4.	Primeros modos guiados para una guía circular o fibra óptica. . . . .	11
2.5.	Esquema del modelo SSH. En amarillo se encierra la celda unitaria, donde se distinguen los sitios A y B y el acoplamiento intracelda (intercelda) $t$ ( $t'$ ). . . . .	16
2.6.	Se fija $t' = 1$ y se varía $\delta = \frac{t}{t'}$ para un número $N = 100$ de celdas unitarias. Arriba: Componentes del vector $\vec{d}$ y fase asociada. Para $\delta < 1$ , se encierra el origen y todas las fases están disponible. Para $\delta > 1$ , es imposible acceder a todas las fases. Abajo: Bandas en función del cuasimomento $k$ para $\delta < 1$ , $\delta = 1$ y $\delta > 1$ . Las bandas se tocan en $\delta = 1$ . . . . .	17
2.7.	Espectro de la red SSH con condiciones de borde abiertas en función del parámetro $\delta = \frac{t}{t'}$ , para $t' = 1$ fijo y para un número $N = 100$ de celdas unitarias. Sólo hay estados de borde a energía cero para $ \delta  < 1$ . . . . .	18
4.1.	Escritura. . . . .	22
4.2.	Montaje SC. . . . .	22
4.3.	Algoritmo de modulación espacial de luz para máscaras de amplitud y fase arbitrarias. Los parámetros de la rejilla de difracción están sujetos a la longitud de onda usada (730 nm). . . . .	23
4.4.	Montaje SLM. . . . .	24
5.1.	Barrido en ángulo que captura el paso por acoplamiento nulo en 0.50 rad para una misma distancia de propagación de 15 mm. . . . .	25
5.2.	Curva de acoplamiento en función del ángulo entre modos P. . . . .	26
5.3.	Imágenes microscópicas de redes fotónicas tipo panel de abeja. . . . .	26

6.1. Esquema de la red SP-SSH . . . . .	28
7.1. Generación de OAMs e interferencia tipo Mach-Zehnder. . . . .	29
7.2. Propagación de vórtices en guías de onda. . . . .	30

# 1. Introducción

Entre los premios Nobel en Física de la última década [1] se encuentran varios que están estrechamente ligados a la óptica: por la generación de pulsos de luz ultra cortos (femtosegundos [2] y luego attosegundos [3–5]), por experimentos con fotones entrelazados [6–8], por la ideación de pinzas ópticas [9] y por la invención de luces LED [10–12]. El estudio del comportamiento de la luz en diversos contextos ha permitido el posterior desarrollo tecnológico con aplicaciones industriales, en medicina, en comunicaciones e incluso militares. Una aplicación cotidiana es la fibra óptica, que actúa como una guía de onda para la luz y actualmente es el principal medio de transmisión de Internet en el mundo [13, 14].

Numerosos de estos avances en el control de las propiedades de transporte de la luz se han visto propiciados por la técnica de escritura de guías de onda por láser de femtosegundos, la cual ha permitido la fabricación de redes fotónicas de variada índole [15–23]. Su importancia radica no sólo en emular situaciones de la física del sólido, tales como oscilaciones de Bloch [24], localización de Anderson [25], estados de banda plana [17–20] o topología [26–29], sino que también en el estudio de fenómenos ópticos incluyendo no-linealidad tipo Kerr y su uso en la formación de solitones [30], la posible propagación de luz cuántica [31–33], o su compatibilidad con la transmisión de información en la industria de las telecomunicaciones [34].

El enfoque de este proyecto será el estudio de redes fotónicas multiorbitales. Por ello será crucial incorporar la técnica de acoplamiento interorbital, que consiste en sintonizar las constantes de propagación de el modo fundamental de una guía monomodal (S) con el primer modo guiado excitado de una guía dimodal (P) mediante la calibración adecuada de las potencias de escritura, que inducen diferencias en los contrastes generados por la técnica de escritura por láser femtosegundos [35].

El llamado acoplamiento SP ha permitido el estudio de redes que presentan flujo magnético efectivo  $\Phi = \pi$ , el cual permite el transporte controlado de la luz [36, 37]. Una aplicación directa de este fenómeno es la generación de guías de onda que admitan modos guiados de luz con momentum angular orbital (OAM) y la codificación de su carga topológica  $\ell$  como medio para transmitir información [38, 39]. Se ha reportado a la fecha sólo la propagación de OAM mediante de redes fotónicas que presevan simetría  $C_3$  [40? ]. Sin embargo, el acoplamiento entre modos OAM en una red fotónica permitiría la generación de flujos magnéticos distintos de 0 o  $\pi$ , lo que se reflejaría en una direccionalidad dependiente de la circulación propagante [41, 42]. Para ello será necesario introducir el concepto de “moléculas fotónicas” [43] y estudiar su aplicación en redes fotónicas [44].

## 2. Marco teórico

En este capítulo se desarrollarán las herramientas analítico-teóricas que permiten describir los sistemas fóticos estudiados en esta tesis. Éstos consisten en la propagación de luz láser de baja potencia (1 mW de potencia de salida) propagada en sistemas acoplados de guías de onda, las cuales están escritas dentro de una muestra de vidrio borosilicato. Estas condiciones experimentales permiten describir el comportamiento de la luz utilizando las ecuaciones de Maxwell aplicadas a un medio lineal, isotrópico, no magnético y sin fuentes de carga ni de corriente libres.

### 2.1. Desde las ecuaciones de Maxwell a propagación de la luz en guías de onda dieléctricas

Las ecuaciones de Maxwell (SI) en este régimen son:

$$\nabla \cdot [\epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}] = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

donde  $\mathbf{E}$  es el campo eléctrico y  $\mathbf{H}$  es el campo magnético. Las guías de onda son invariantes en la dirección de propagación  $z$ , por lo que el índice de refracción  $n = \sqrt{\epsilon/\epsilon_0}$  dependerá de las coordenadas transversales al eje óptico, es decir,  $n \equiv n(x, y) = n_0 + \Delta n(x, y)$ , con  $n_0 = 1.48$  el índice de refracción del borosilicato y  $\Delta n \sim 10^{-5} - 10^{-3}$  el contraste de las guías de onda.

Luego de aplicar rotor por la izquierda a la ecuación de Faraday-Lenz (2.2), de usar la ecuación de Ampère-Maxwell (2.4) y asumir una solución temporal armónica proporcional a  $e^{-i\omega t}$  se tiene:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = -\frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = n^2 k_0^2 \mathbf{E}, \quad (2.5)$$

donde  $k_0 \equiv \omega/c$  es el número de onda en el vacío. Por identidad de cálculo vectorial, se tiene que  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ . Al aplicar la ley de Gauss (2.1) se deduce que  $\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla n^2}{n^2} \cdot \mathbf{E}$ . Con esto, se obtiene la ecuación

$$(\nabla^2 + k_0^2 n^2) \mathbf{E} = -\nabla \left( \frac{\nabla n^2}{n^2} \cdot \mathbf{E} \right). \quad (2.6)$$

Análogamente, es posible aplicar rotor a la ecuación de Ampère-Maxwell (2.4) y usar la ecuación de Faraday-Lenz (2.2) en conjunto con la divergencia nula del campo magnético  $\mathbf{H}$  (2.3):

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} &= -i\omega \nabla \times (\epsilon_0 n^2 \mathbf{E}) = -i\omega \epsilon_0 (n^2 \nabla \times \mathbf{E} + \nabla n^2 \times \mathbf{E}), \\ \nabla (\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} &= k_0^2 n^2 \mathbf{H} - i\omega \epsilon_0 \nabla n^2 \times \mathbf{E}. \end{aligned}$$

La ecuación análoga a (2.6) para  $\mathbf{H}$  es, por consiguiente:

$$(\nabla^2 + k_0^2 n^2) \mathbf{H} = i\omega\epsilon_0 \nabla n^2 \times \mathbf{E}. \quad (2.7)$$

Será útil separar los componentes longitudinales y transversales de los campos, asumiendo una dependencia del tipo onda plana  $e^{ik_z z}$  en la variable espacial  $z$ .

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{E} + ik_z \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad (2.8)$$

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{H} + ik_z \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H} = -i\omega\epsilon_0 n^2 \mathbf{E}. \quad (2.9)$$

Si se considera las descomposiciones  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\perp} + \hat{\mathbf{z}} E_z$  y  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\perp} + \hat{\mathbf{z}} H_z$ ,  $\nabla_{\perp} \equiv -\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla)$ , las ecuaciones de Maxwell que involucran rotores se escriben como

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp} + ik_z \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_{\perp} + \nabla_{\perp} \times (\hat{\mathbf{z}} E_z) = i\omega\mu_0 (\mathbf{H}_{\perp} + \hat{\mathbf{z}} H_z), \quad (2.10)$$

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{H}_{\perp} + ik_z \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_{\perp} + \nabla_{\perp} \times (\hat{\mathbf{z}} H_z) = -i\omega\epsilon_0 n^2 (\mathbf{E}_{\perp} + \hat{\mathbf{z}} E_z). \quad (2.11)$$

Luego de aplicar producto punto y producto cruz en la dirección  $\hat{\mathbf{z}}$  a las ecuaciones (2.10) y (2.11), se puede expresar  $E_z$  y  $H_z$  en función de  $\mathbf{E}_{\perp}$  y  $\mathbf{H}_{\perp}$ :

$$\begin{aligned} i\nabla_{\perp} E_z &= k_z \mathbf{E}_{\perp} + \omega\mu_0 \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_{\perp}, & i\nabla_{\perp} H_z &= k_z \mathbf{H}_{\perp} - \omega\epsilon_0 n^2 \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_{\perp}, \\ i\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp} H_z &= k_z \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_{\perp} + \omega\epsilon_0 n^2 \mathbf{E}_{\perp}, & i\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp} E_z &= k_z \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_{\perp} - \omega\mu_0 \mathbf{H}_{\perp}. \end{aligned}$$

Finalmente, los componentes perpendiculares de los campos,  $\mathbf{H}_{\perp}$  y  $\mathbf{E}_{\perp}$ , se pueden despejar en términos de los componentes longitudinales,  $H_z$  y  $E_z$ :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_{\perp} &= i \frac{(\omega\epsilon_0 n^2 \nabla_{\perp} E_z - \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp} H_z k_z)}{k_0^2 n^2 - k_z^2}, & \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_{\perp} &= -i \frac{(k_z \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp} E_z + \omega\mu_0 \nabla_{\perp} H_z)}{k_0^2 n^2 - k_z^2}, \\ \mathbf{H}_{\perp} &= \frac{i}{k_0^2 n^2 - k_z^2} [k_z \nabla_{\perp} H_z + \omega\epsilon_0 n^2 \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp} E_z], & \mathbf{E}_{\perp} &= \frac{i}{k_0^2 n^2 - k_z^2} [k_z \nabla_{\perp} E_z - \omega\mu_0 \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp} H_z]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Las ecuaciones (2.6), (2.7) y (2.12) serán las herramientas analíticas para los dos casos de estudio de las siguientes secciones y permiten visualizar la imposibilidad de las guías de onda dieléctricas de albergar modos TEM.

## 2.2. Soluciones analíticas para guía de onda tipo losa o *slab*

El sistema más simple que se puede estudiar es una guía de onda tipo losa, cuya forma analítica para el contraste  $n(x)$  es la siguiente, con  $n_1 > n_0$ :

$$n(x) = \begin{cases} n_1, & |x| \leq a \\ n_0, & |x| > a \end{cases}$$

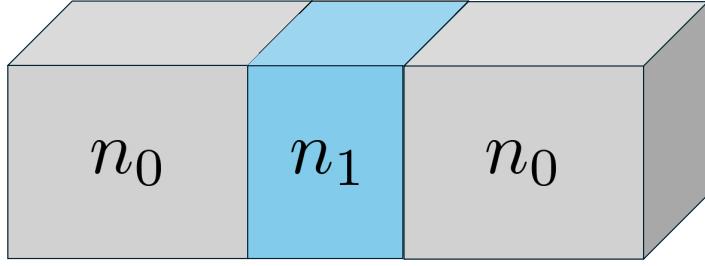


Figura 2.1: Forma de una guía de onda tipo losa. En las direcciones  $\hat{\mathbf{y}}$  (vertical) y  $\hat{\mathbf{z}}$  (hacia dentro de la página) la estructura es invariante.

Dado que  $\nabla n^2 = \mathbf{0}$  para  $|x| \neq a$ , los lados derechos de las ecuaciones (2.6) y (2.7) son de tipo Helmholtz. Definiendo  $\Psi = \{E_z, H_z\}$ :

$$(\nabla_{\perp}^2 + k_0^2 n^2 - k_z^2)\Psi = \frac{d^2\Psi}{dx^2} + (k_0^2 n^2 - k_z^2)\Psi = 0.$$

Como  $n(x) = n(-x)$ , las soluciones  $\Psi$  deben ser pares o impares. En efecto, si  $\Psi(x)$  es solución, el cambio  $x \rightarrow x' = -x$  implica que  $\Psi(-x) = \pm\Psi(x)$ , pues  $\Psi(x)$  es un campo real.

Para encontrar soluciones cuya energía esté localizada en la guía de onda y que decaiga fuera de ella, se impondrá  $k_0^2 n_0^2 \leq k_z^2 \leq k_0^2 n_1^2$ . Se hace natural definir  $\alpha^2 \equiv k_0^2 n_1^2 - k_z^2$  y  $\beta^2 \equiv k_z^2 - k_0^2 n_0^2$ . Con todo esto,

$$\Psi_s = \begin{cases} \Psi_{s1} \cos(\alpha x), & |x| \leq a \\ \Psi_{s0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}$$

$$\nabla_{\perp} \Psi_s = \begin{cases} -\hat{\mathbf{x}}\alpha \Psi_{s1} \sin(\alpha x), & |x| \leq a \\ -\hat{\mathbf{x}} \frac{|x|}{x} \beta \Psi_{s0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}$$

Por lo que las componentes verticales  $E_y$  y  $H_y$  pares se escriben debido a la ecuación (2.12) como:

$$E_y = \frac{i\omega\mu_0}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} \alpha H_{s1} \sin(\alpha x), & |x| \leq a \\ \frac{|x|}{x} \beta H_{s0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases} \quad H_y = \frac{-i\omega\epsilon_0 n^2}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} \alpha E_{s1} \sin(\alpha x), & |x| \leq a \\ \frac{|x|}{x} \beta E_{s0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}$$

Por otro lado, las soluciones impares tienen la forma

$$\Psi_a = \begin{cases} \Psi_{a1} \sin(\alpha x), & |x| \leq a \\ \Psi_{a0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}$$

$$\nabla_{\perp} \Psi_a = \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}\alpha \Psi_{a1} \cos(\alpha x), & |x| \leq a \\ -\hat{\mathbf{x}} \frac{|x|}{x} \beta \Psi_{a0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}$$

Por lo que  $E_y$  y  $H_y$  se escriben como:

$$E_y = \frac{i\omega\mu_0}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} -\alpha H_{a1} \cos(\alpha x), & |x| \leq a \\ \frac{|x|}{x} \beta H_{a0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases} \quad H_y = \frac{i\omega\epsilon_0 n^2}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} \alpha E_{a1} \cos(\alpha x), & |x| \leq a \\ -\frac{|x|}{x} \beta E_{a0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases} .$$

Imponiendo continuidad de las componentes tangenciales  $E_y$ ,  $E_z$ ,  $H_y$  y  $H_z$ :

$$\begin{aligned} E_{s1} \cos(\alpha a) &= E_{s0} e^{-\beta a}, & E_{a1} \sin(\alpha a) &= E_{a0} e^{-\beta a}, \\ H_{s1} \cos(\alpha a) &= H_{s0} e^{-\beta a}, & H_{a1} \sin(\alpha a) &= H_{a0} e^{-\beta a}, \\ n_1^2 E_{s1} \sin(\alpha a)/\alpha &= -n_0^2 E_{s0} e^{-\beta a}/\beta, & n_1^2 E_{a1} \cos(\alpha a)/\alpha &= n_0^2 E_{a0} e^{-\beta a}/\beta, \\ H_{s1} \sin(\alpha a)/\alpha &= -H_{s0} e^{-\beta a}/\beta, & H_{a1} \cos(\alpha a)/\alpha &= H_{a0} e^{-\beta a}/\beta. \end{aligned}$$

Buscando soluciones no triviales se tiene que:

$$\left[ \frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} \right] \left[ n_0^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + n_1^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} \right] \left[ \frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} \right] \left[ n_0^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - n_1^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} \right] = 0$$

Se distinguirán dos tipos de condiciones:

- Modos TE:

$$\frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} = 0. \quad (2.14)$$

- Modos TM:

$$n_0^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + n_1^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} = 0, \quad (2.15)$$

$$n_0^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - n_1^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} = 0. \quad (2.16)$$

Asumiendo  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $k_z$  conocidos, las amplitudes deben cumplir las relaciones:

$$\begin{aligned} E_{s1} \left[ n_0^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + n_1^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} \right] &= 0, & E_{a1} \left[ n_0^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - n_1^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} \right] &= 0, \\ H_{s1} \left[ \frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} \right] &= 0, & H_{a1} \left[ \frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Las ecuaciones superiores imponen que  $E_1 = 0$  cuando se satisface la condición de modos TE. Análogamente, las ecuaciones inferiores imponen  $H_1 = 0$  en el caso de modos TM. Efectivamente, los nombres TE y TM se han puesto por transversal eléctrico y transversal magnético, respectivamente. Un corolario para los modos TE es que  $E_z = E_x = 0$  por lo que la polarización del campo eléctrico será exclusivamente en la dirección  $\hat{y}$ . Así mismo, sólo un haz polarizado en  $\hat{x}$  podría exhibir un modo TM, por lo que en un experimento se debe tener esto presente: una condición inicial arbitraria se propagará como una combinación lineal de los modos TE y TM que soporte la guía.

### 2.2.1. Soluciones gráficas y comparación entre modos TE y TM

Usando las dos ecuaciones de modos TE junto a la restricción  $(\alpha a)^2 + (\beta a)^2 = k_0^2 a^2 (n_1^2 - n_0^2) \equiv V^2$  es posible obtener soluciones gráficas para las constantes de propagación  $k_z$  a partir de las intersecciones  $(\alpha a, \beta a)$ .

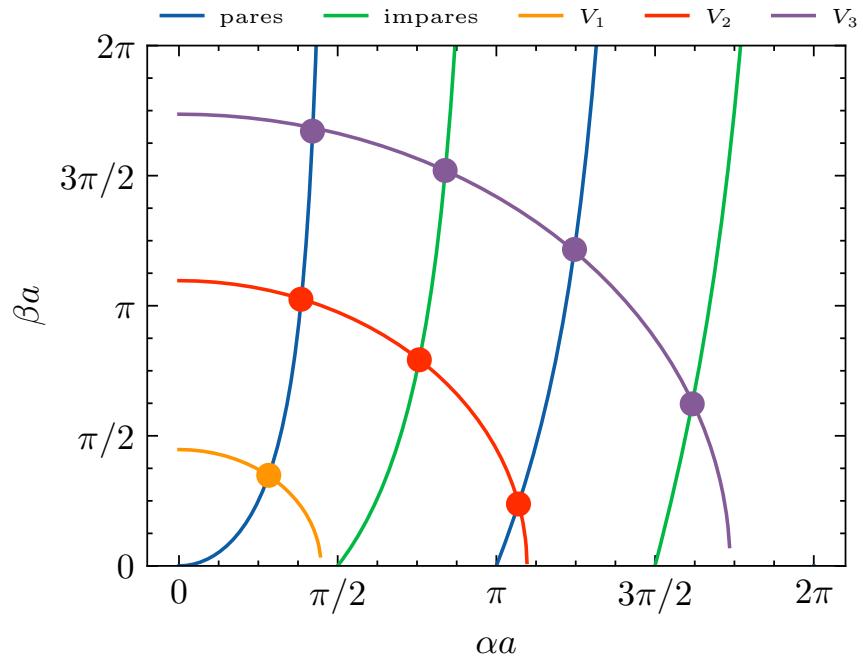


Figura 2.2: Soluciones gráficas de los modos TE. A mayor contraste  $\Delta n = n_1 - n_0$ , mayor cantidad de modos guiados soporta la guía de onda.

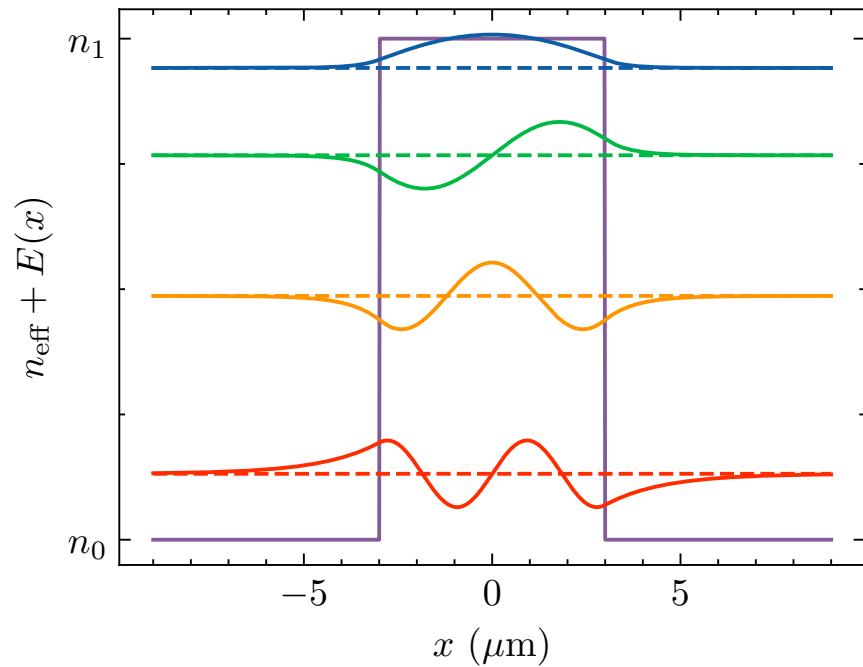


Figura 2.3: Soluciones gráficas de los modos TE. A mayor contraste  $\Delta n = n_1 - n_0$ , mayor cantidad de modos guiados soporta la guía de onda.

La condición de corte (*cutoff*) en guías de onda es equivalente a que la energía deje de decaer en la región  $|x| > a$ , es decir, se debe cumplir que  $\beta a \rightarrow 0$ . Los modos simétricos o pares cumplen esta

condición para  $\sin(V) = 0$ , lo que implica que  $V = m\pi$ , con  $m$  entero. En particular, considerando  $m = 0$  y barriendo  $n_1 \rightarrow n_0$ , siempre existen al menos dos modos, uno TE y otro TM hasta que  $n_1 < n_0$ . Los modos antisimétricos o impares deben cumplir por su parte que  $\cos(V) = 0$ , lo que implica que  $V = (m\pi \pm \pi/2)$ . De esta condición se deduce que el primer par de modos exictados ( $m = 0$ ) existe siempre que  $\lambda \leq \lambda_c \equiv 4a \sqrt{n_1^2 - n_0^2}$ . Escrito de forma compacta para el  $m$ -ésimo modo:

$$(\lambda_c)_m = \frac{4a}{m-1} \sqrt{n_1^2 - n_0^2}$$

## 2.3. Soluciones analíticas para fibra óptica circular

En la sección anterior se estudió el sistema más sencillo en el que se puede hablar de guías de onda dieléctricas. El siguiente paso en complejidad consiste en guías de onda circulares. Para ello, se considerará que el índice de refracción varía radialmente según

$$n(\rho) = \begin{cases} n_1, & \text{si } \rho \leq a \\ n_0, & \text{si } \rho > a \end{cases},$$

donde la tupla  $(\rho, \phi, z)$  define las coordenadas cilíndricas a usar, más apropiadas para este problema. Al considerar las componentes longitudinales  $\Psi = \{E_z, H_z\}$  del campo eléctrico y magnético y si se utiliza el método de separación de variables con  $\Psi = R(\rho)\Phi(\phi)e^{ik_z z}$ , las ecuaciones (2.6) y (2.7) toman la forma:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial^2}{\rho^2 \partial \phi^2} + (k_0^2 n^2 - k_z^2) \right] R(\rho)\Phi(\phi) &= 0 \\ \rho^2 \frac{d^2 R}{R d\rho^2} + \rho \frac{dR}{R d\rho} + \rho^2 (k_0^2 n^2 - k_z^2) + \underbrace{\frac{d^2 \Phi}{\Phi d\phi^2}}_{-\ell^2} &= 0 \\ \therefore \Phi(\phi) &= A e^{i\ell\phi} \end{aligned}$$

Imponiendo condiciones de periodicidad  $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$ , se tiene necesariamente que  $\ell$  es un número entero. Por consiguiente, la ecuación para  $R(\rho)$  es de tipo Bessel entera, por lo que buscando soluciones tales que  $k_0^2 n_0^2 < \beta_z^2 < k_0^2 n_1^2$  y definiendo nuevamente  $\alpha^2 \equiv k_0^2 n_1^2 - k_z^2$  y  $\beta^2 \equiv k_z^2 - k_0^2 n_0^2$  se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left( k_0^2 n^2 - k_z^2 - \frac{\ell^2}{\rho^2} \right) R &= 0 \\ \therefore R(\rho) &= \begin{cases} C_1 J_\ell(\alpha\rho) + D_1 Y_\ell(\alpha\rho), & \text{si } \rho \leq a \\ C_2 K_\ell(\beta\rho) + D_2 I_\ell(\beta\rho), & \text{si } \rho > a \end{cases}. \end{aligned}$$

Necesariamente se debe imponer  $D_1 = D_2 = 0$  para que la solución sea finita para  $\rho = 0$  y para  $\rho \rightarrow +\infty$ . Es decir, la parte radial de la solución es

$$R(\rho) = \begin{cases} C_1 J_\ell(\alpha\rho), & \text{si } \rho \leq a \\ C_2 K_\ell(\beta\rho), & \text{si } \rho > a \end{cases}.$$

En este caso, para imponer las condiciones de continuidad en  $\mathbf{E}_{\parallel} = E_{\phi}\hat{\phi} + E_z\hat{\mathbf{z}}$  y  $\mathbf{H}_{\parallel} = H_{\phi}\hat{\phi} + H_z\hat{\mathbf{z}}$ , se hace necesario relacionar el resto de componentes del campo con  $E_z$  y  $H_z$  para lo cual se usará la ecuación (2.12).

Como

$$\nabla_{\perp}\Psi = \begin{cases} \Psi_0^1 \left[ \hat{\rho}\alpha J'_\ell(\alpha\rho) + i\hat{\phi}\ell J_\ell(\alpha\rho)/\rho \right] e^{i\ell\phi} e^{ik_z z}, & \text{si } \rho \leq a \\ \Psi_0^0 \left[ \hat{\rho}\beta K'_\ell(\beta\rho) + i\hat{\phi}\ell K_\ell(\beta\rho)/\rho \right] e^{i\ell\phi} e^{ik_z z}, & \text{si } \rho > a \end{cases}$$

Separando por componentes y reemplazando:

$$\begin{aligned} H_z &= e^{i\ell\phi} e^{ik_z z} \begin{cases} H_0^1 J_\ell(\alpha\rho), & \text{si } \rho \leq a \\ H_0^0 K_\ell(\beta\rho), & \text{si } \rho > a \end{cases} \\ H_r &= \frac{ie^{i\ell\phi} e^{ik_z z}}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} k_z \alpha H_0^1 J'_\ell(\alpha\rho) - i\omega\varepsilon_0 n^2 \ell E_0^1 J_\ell(\alpha\rho)/\rho, & \text{si } \rho \leq a \\ k_z \beta H_0^0 K'_\ell(\beta\rho) - i\omega\varepsilon_0 n^2 \ell E_0^0 K_\ell(\beta\rho)/\rho, & \text{si } \rho > a \end{cases} \\ H_\phi &= \frac{ie^{i\ell\phi} e^{ik_z z}}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} ik_z \ell H_0^1 J_\ell(\alpha\rho)/\rho + \omega\varepsilon_0 n^2 \alpha E_0^1 J'_\ell(\alpha\rho), & \text{si } \rho \leq a \\ ik_z \ell H_0^0 K_\ell(\beta\rho)/\rho + \omega\varepsilon_0 n^2 \beta E_0^0 K'_\ell(\beta\rho), & \text{si } \rho > a \end{cases} \\ E_z &= e^{i\ell\phi} e^{ik_z z} \begin{cases} E_0^1 J_\ell(\alpha\rho), & \text{si } \rho \leq a \\ E_0^0 K_\ell(\beta\rho), & \text{si } \rho > a \end{cases} \\ E_r &= \frac{ie^{i\ell\phi} e^{ik_z z}}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} k_z \alpha E_0^1 J'_\ell(\alpha\rho) + i\omega\mu_0 \ell H_0^1 J_\ell(\alpha\rho)/\rho, & \text{si } \rho \leq a \\ k_z \beta E_0^0 K'_\ell(\beta\rho) + i\omega\mu_0 \ell H_0^0 K_\ell(\beta\rho)/\rho, & \text{si } \rho > a \end{cases} \\ E_\phi &= \frac{ie^{i\ell\phi} e^{ik_z z}}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} ik_z \ell E_0^1 J_\ell(\alpha\rho)/\rho - \omega\mu_0 \alpha H_0^1 J'_\ell(\alpha\rho), & \text{si } \rho \leq a \\ ik_z \ell E_0^0 K_\ell(\beta\rho)/\rho - \omega\mu_0 \beta H_0^0 K'_\ell(\beta\rho), & \text{si } \rho > a \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora sí, imponiendo continuidad en  $z$  y  $\phi$ :

$$H_0^1 J_\ell(\alpha a) = H_0^0 K_\ell(\beta a) \quad (2.17)$$

$$E_0^1 J_\ell(\alpha a) = E_0^0 K_\ell(\beta a) \quad (2.18)$$

$$-\omega\varepsilon_0 n_1^2 \alpha \beta^2 a E_0^1 J'_\ell(\alpha a) - ik_z \ell \beta^2 H_0^1 J_\ell(\alpha a) = \omega\varepsilon_0 n_0^2 \alpha^2 \beta a E_0^0 K'_\ell(\beta a) + ik_z \ell \alpha^2 H_0^0 K_\ell(\beta a) \quad (2.19)$$

$$-ik_z \ell \beta^2 E_0^1 J_\ell(\alpha a) + \omega\mu_0 \alpha \beta^2 a H_0^1 J'_\ell(\alpha a) = ik_z \ell \alpha^2 E_0^0 K_\ell(\beta a) - \omega\mu_0 \alpha^2 \beta a H_0^0 K'_\ell(\beta a) \quad (2.20)$$

Buscando soluciones no triviales:

$$\begin{vmatrix} K_\ell(\beta a) & -J_\ell(\alpha a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_\ell(\beta a) & -J_\ell(\alpha a) \\ ik_z \ell \alpha^2 K_\ell(\beta a) & ik_z \ell \beta^2 J_\ell(\alpha a) & \omega\varepsilon_0 n_0^2 \alpha^2 \beta a K'_\ell(\beta a) & \omega\varepsilon_0 n_1^2 \alpha \beta^2 a J'_\ell(\alpha a) \\ \omega\mu_0 \alpha^2 \beta a K'_\ell(\beta a) & \omega\mu_0 \alpha \beta^2 a J'_\ell(\alpha a) & -ik_z \ell \alpha^2 K_\ell(\beta a) & -ik_z \ell \beta^2 J_\ell(\alpha a) \end{vmatrix} = 0$$

Finalmente, la ecuación trascendental que satisfacen  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $k_z$  es:

$$\left( \frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right) \left( n_1^2 \frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + n_0^2 \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right) = \ell^2 \left[ \left( \frac{1}{\alpha a} \right)^2 + \left( \frac{1}{\beta a} \right)^2 \right]^2 \left( \frac{k_z}{k_0} \right)^2. \quad (2.21)$$

Dado que, en principio, los valores de  $k_z$  ya están determinados por la ecuación anterior, es

possible obtener dos relaciones entre  $H_0^1$  y  $E_0^1$ :

$$\frac{E_0^1}{H_0^1} = -\frac{ik_z\ell}{\omega\varepsilon_0} \left[ \left( \frac{1}{\alpha a} \right)^2 + \left( \frac{1}{\beta a} \right)^2 \right] \left[ n_1^2 \frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + n_0^2 \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right]^{-1}, \quad (2.22)$$

$$\frac{H_0^1}{E_0^1} = \frac{ik_z\ell}{\omega\mu_0} \left[ \left( \frac{1}{\alpha a} \right)^2 + \left( \frac{1}{\beta a} \right)^2 \right] \left[ \frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right]^{-1}. \quad (2.23)$$

Tomando raíz cuadrada al cociente de las ecuaciones (2.22) y (2.23) se tiene:

$$\frac{E_0^1}{H_0^1} = i \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\sqrt{\frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)}}}{\sqrt{n_1^2 \frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + n_0^2 \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)}}}. \quad (2.24)$$

### 2.3.1. Modos TE y TM

El caso más sencillo de estudiar es imponiendo  $\ell = 0$ . La ecuación (2.21) implica:

$$\begin{aligned} \frac{J'_0(\alpha a)}{\alpha a J_0(\alpha a)} + \frac{K'_0(\beta a)}{\beta a K_0(\beta a)} &= 0, & (\text{modos TE}) \\ n_1^2 \frac{J'_0(\alpha a)}{\alpha a J_0(\alpha a)} + n_0^2 \frac{K'_0(\beta a)}{\beta a K_0(\beta a)} &= 0, & (\text{modos TM}) \end{aligned}$$

De la ecuación (2.24) es directo notar que la condiciones de modos transversales que las componentes longitudinales se hacen cero en los casos respectivos:  $H_0^1 = 0$  para TE y  $E_0^1 = 0$  para TM.

Las condiciones de corte se dan cuando  $\beta a \rightarrow 0$ . Utilizando las expresiones asintóticas para las funciones de Bessel con argumentos pequeños y sus relaciones de recurrencia, se tiene

$$\frac{\alpha a J_0(\alpha a)}{J_1(\alpha a)} = -\frac{\beta a K_0(\beta a)}{K_1(\beta a)} \approx (\beta a)^2 \ln\left(\frac{\beta a e^\gamma}{2}\right) \rightarrow 0,$$

por lo que se hace necesario que  $J_0(\alpha a)|_{\alpha a \rightarrow V} = 0$ . Denotando  $x_{0,m} = 2.405, 5.520, 8.654, \dots$  al  $m$ -ésimo cero de la función  $J_0(x)$ , la longitud de onda de corte está dada por

$$(\lambda_c)_{0,m} = 2\pi a \frac{\sqrt{n_1^2 - n_0^2}}{x_{0,m}}, \quad (\text{modos TE y TM}). \quad (2.25)$$

Contrario al caso de la guía de onda tipo losa, en fibras ópticas se hace necesario estar bajo un umbral de corte máximo  $(\lambda_c)_{0,1}$  no nulo para que los modos TE o TM existan.

### 2.3.2. Modos HE y EH

Interpretando la ecuación (2.21) como una cuadrática en  $J'_\ell(\alpha a)/\alpha a J_\ell(\alpha a)$ :

$$\frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} = - \left( \frac{n_1^2 + n_0^2}{2n_1^2} \right) \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \pm \sqrt{\left( \frac{n_1^2 - n_0^2}{2n_1^2} \right)^2 \left( \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right)^2 + \left( \frac{k_z \ell}{k_0 n_1} \right)^2 \left[ \left( \frac{1}{\alpha a} \right)^2 + \left( \frac{1}{\beta a} \right)^2 \right]^2}$$

Haciendo uso de las relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel  $J_\ell(r)$ , es posible obtener dos tipos de soluciones que suelen ser llamadas HE y EH debido al campo longitudinal con mayor peso:

$$\frac{J_{\ell-1}(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} = - \left( \frac{n_1^2 + n_0^2}{2n_1^2} \right) \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} + \frac{\ell}{(\alpha a)^2} - \sqrt{\Delta}, \quad (\text{modos HE}) \quad (2.26)$$

$$\frac{J_{\ell+1}(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} = \left( \frac{n_1^2 + n_0^2}{2n_1^2} \right) \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} + \frac{\ell}{(\alpha a)^2} - \sqrt{\Delta}, \quad (\text{modos EH}) \quad (2.27)$$

$$\Delta = \left( \frac{n_1^2 - n_0^2}{2n_1^2} \right)^2 \left( \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right)^2 + \left( \frac{k_z \ell}{k_0 n_1} \right)^2 \left[ \left( \frac{1}{\alpha a} \right)^2 + \left( \frac{1}{\beta a} \right)^2 \right]^2$$

Para  $\ell = 0$ , se recuperan las relaciones obtenidas para los modos  $\text{TE}_m$  ( $\text{HE}_{0m}$ ) y  $\text{TM}_m$  ( $\text{EH}_{0m}$ ). Para  $\ell \neq 0$  se hace necesario considerar las expresiones asintóticas de las funciones de Bessel cuando  $\beta a \rightarrow 0$  y  $\alpha a \rightarrow V$ :

$$\frac{K'_\ell(x)}{x K_\ell(x)} = - \frac{K_{\ell-1}(x)}{x K_\ell(x)} - \frac{\ell}{x^2} \approx \begin{cases} \ln(x e^\gamma / 2) - \frac{1}{x^2} & \text{si } \ell = 1 \\ -\frac{1}{2(\ell-1)} - \frac{\ell}{x^2} & \text{si } \ell > 1 \end{cases}.$$

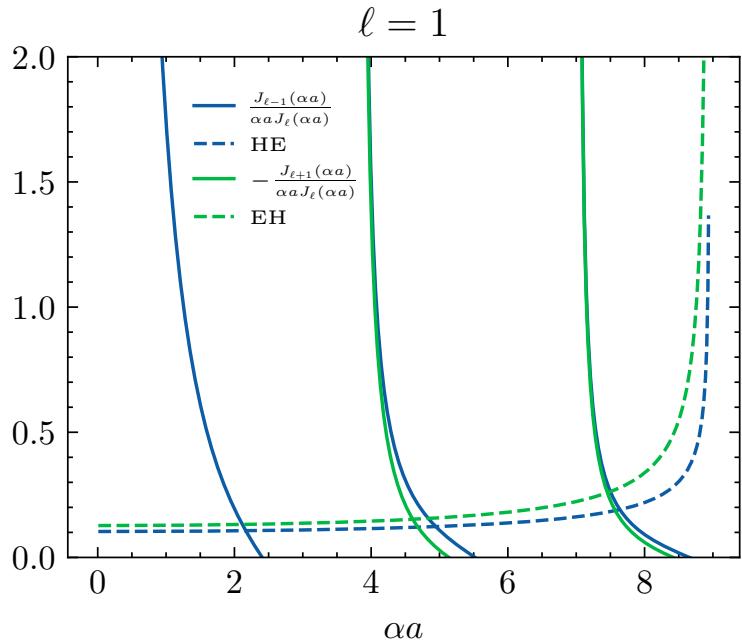
El caso  $\ell = 1$  es de especial interés. La condición de modos HE se desarrolla como

$$\frac{\alpha a J_1(\alpha a)}{J_0(\alpha a)} = \left\{ \left( \frac{n_1^2 + n_0^2}{2n_1^2} \right) \left[ \ln \left( \frac{2}{e^\gamma \beta a} \right) + \frac{1}{(\beta a)^2} \right] + \frac{1}{(\alpha a)^2} - \sqrt{\Delta} \right\}^{-1} \rightarrow 0.$$

Basta considerar la función  $J_1(\alpha a)|_{\alpha a \rightarrow V} = 0$ . Por otro lado, la condición EH elimina el cero  $x = 0$  del cociente  $\frac{\alpha a J_1(\alpha a)}{J_2(\alpha a)}$  lo que hace que esté “desfasada” respecto a la condición HE. Usando un razonamiento similar al caso  $\ell = 0$ , las condiciones de corte son

$$\begin{aligned} (\lambda_c)_{1,m} &= 2\pi a \frac{\sqrt{n_1^2 - n_0^2}}{x_{1,m}} && (\text{modos HE}_{1m}) \\ (\lambda_c)_{1,m} &= 2\pi a \frac{\sqrt{n_1^2 - n_0^2}}{x_{1,m+1}} && (\text{modos EH}_{1m}) \end{aligned}$$

con  $x_{1,m} = 0, 3.832, 7.016, 10.173, \dots$ . En particular, el modo  $\text{HE}_{11}$  siempre existe.



El caso  $\ell \geq 2$  tiene un desarrollo distinto por las forma asintóticas en juego y no será relevante para esta tesis. Sin embargo, se incluyen en la Figura 2.4 por completitud.

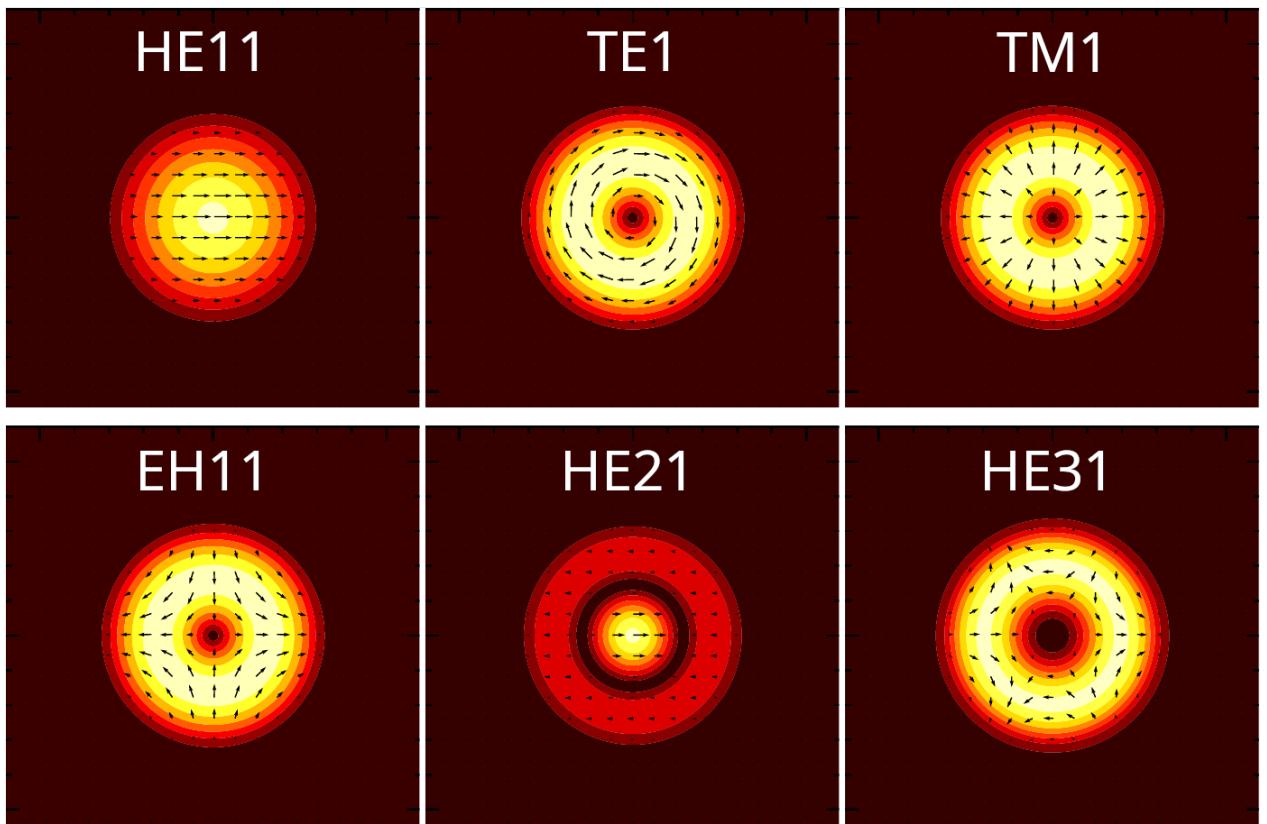


Figura 2.4: Primeros modos guiados para una guía circular o fibra óptica.

## 2.4. Modos normales en guías de onda

Si la estructura de guías de onda no varía en la dirección  $z$ , por separación de variables la solución para el campo eléctrico es una onda plana del tipo  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_\nu(x, y)e^{i\beta_\nu z}$ . A su vez, es conveniente separar el Laplaciano como  $\nabla^2 \equiv \nabla_\perp^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ . De esta forma, el lado izquierdo de las ecuaciones (2.6), se desarrolla como:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k_0^2 n^2) \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \left( \nabla_\perp^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 n^2 \right) \mathbf{E}_\nu(x, y) e^{i\beta_\nu z} \\ &= e^{i\beta_\nu z} \nabla_\perp^2 \mathbf{E}_\nu - \beta_\nu^2 \mathbf{E}_\nu e^{i\beta_\nu z} + k_0^2 n^2 \mathbf{E}_\nu e^{i\beta_\nu z} \\ &= [\nabla_\perp^2 + (k_0^2 n^2 - \beta_\nu^2)] \mathbf{E}_\nu e^{i\beta_\nu z} \\ &\approx 0 \\ \therefore [\nabla_\perp^2 + k_0^2 n^2(x, y)] \mathbf{E}_\nu(x, y) &= \beta_\nu^2 \mathbf{E}_\nu(x, y), \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde se ha usado la aproximación de guaje débil para anular el lado de derecho de la ecuación (2.6). Notemos que la ecuación (2.28) es un problema de autovalores  $\beta_\nu^2$  y autofunciones  $\mathbf{E}_\nu(x, y)$ , las cuales son ortogonales (ver apéndice A). En principio, la forma espacial del índice de refracción  $n(x, y)$  puede ser arbitraria siempre y cuando que se satisfaga la condición de guaje débil.

## 2.5. Teoría de modos acoplados

### 2.5.1. Derivación desde un principio variacional

A partir de la ecuaciones (2.8) y (2.9) es posible despejar la constante de propagación  $k_z$  en términos del vector de Poynting  $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\text{Re}\{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\}$ , similar a lo desarrollado en la referencia [45].

$$k_z = \frac{\frac{1}{4i} \iint (-\nabla_\perp \times \mathbf{E} + i\omega\mu_0 \mathbf{H}) \cdot \mathbf{H}^* + (\nabla_\perp \times \mathbf{H} + i\omega\epsilon_0 n^2 \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E}^* dx dy}{\frac{1}{4} \iint (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{z}} dx dy}. \quad (2.29)$$

De esta manera, al proponer un Ansatz en términos de superposición de modos de las guías individuales del estilo  $\mathbf{E} = \sum_i a_i \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{H} = \sum_i a_i \mathbf{h}_i$ , los coeficientes  $a_i$  quedan indeterminados pero sujetos a minimizar la expresión para  $k_z$ . Notemos además que el Ansatz simplifica bastante la mencionada expresión.

$$(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{z}} = \sum_{ij} a_i^* (\mathbf{e}_j \times \mathbf{h}_i^* + \mathbf{e}_i^* \times \mathbf{h}_j) \cdot \hat{\mathbf{z}} a_j \equiv \sum_{ij} a_i^* p_{ij} a_j$$

$$\begin{aligned} \text{integrando numerador} &= i \sum_{ij} a_i^* k_z^j (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{h}_i^* a_j + a_j (\omega\epsilon_0(n^2 - n_j^2) \mathbf{e}_j - k_z^j \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{h}_j) \cdot \mathbf{e}_i^* a_i^* \\ &= i \sum_{ij} a_i^* [k_z^j p_{ij} + \omega\epsilon_0(n^2 - n_j^2) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i^*] a_j \end{aligned}$$

Definiendo

$$P_{ij} \equiv \frac{1}{4} \iint (\mathbf{e}_j \times \mathbf{h}_i^* + \mathbf{e}_i^* \times \mathbf{h}_j) \cdot \hat{\mathbf{z}} dx dy, \quad (2.30)$$

$$H_{ij} \equiv P_{ij} k_z^j + \frac{\omega \varepsilon_0}{4} \iint (n_i^2 - n_j^2) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i^* dx dy. \quad (2.31)$$

Se puede escribir la expresión (2.29) para la constante de propagación  $k_z$  de manera compacta como un cociente de Rayleigh-Ritz:

$$k_z = \frac{\sum_{ij} a_i^* H_{ij} a_j}{\sum_{ij} a_i^* P_{ij} a_j}. \quad (2.32)$$

Diferenciando con respecto a  $a_k^*$  para optimizar el valor de  $k_z$  se tiene:

$$\frac{\partial k_z}{\partial a_k^*} = \frac{\sum_{ij} H_{ij} a_j \delta_{ik}}{\sum_{ij} a_i^* P_{ij} a_j} - \frac{(\sum_{ij} a_i^* H_{ij} a_j)(\sum_{ij} \delta_{ik} P_{ij} a_j)}{\left(\sum_{ij} a_i^* P_{ij} a_j\right)^2} = \frac{\sum_{ij} (H_{jk} - k_z P_{kj}) a_j}{\sum_{ij} a_i^* P_{ij} a_j} = 0. \quad (2.33)$$

Recuperando  $k_z \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial z}$ , se obtienen las ecuaciones de  $N$  modos acoplados no ortogonales:

$$-i \sum_j P_{kj} \frac{da_j}{dz} = \sum_j H_{kj} a_j, \text{ con } k = 1, 2, \dots, N \quad (2.34)$$

Claramente  $P_{ij}$  es una matriz hermítica. A primera vista, puede parecer que  $H_{ij}$  no es hermética, pero veamos que sí lo es. Para ello, basta considerar la resta  $H_{ij} - H_{ji}^*$  y notar que se anula:

$$\begin{aligned} H_{ij} - H_{ji}^* &= P_{ij} k_z^j - P_{ji}^* k_z^i + \frac{\omega \varepsilon_0}{4} \iint (n_i^2 - n_j^2) \mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_j dx dy \\ &= \frac{1}{4} \iint (k_z^j - k_z^i) (\mathbf{e}_j \times \mathbf{h}_i^* + \mathbf{e}_i^* \times \mathbf{h}_j) \cdot \hat{\mathbf{z}} + \omega \varepsilon_0 (n_i^2 - n_j^2) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i^* dx dy \\ &= \frac{1}{4} \iint (i \nabla_\perp \times \mathbf{e}_j + \omega \mu_0 \mathbf{h}_j) \cdot \mathbf{h}_i^* - (i \nabla_\perp \times \mathbf{h}_j - \omega \varepsilon_0 n_j^2 \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_i^* dx dy \\ &\quad - \frac{1}{4} \iint (i \nabla_\perp \times \mathbf{e}_i^* + \omega \mu_0 \mathbf{h}_i^*) \cdot \mathbf{h}_j + (i \nabla_\perp \times \mathbf{h}_i^* + \omega \varepsilon_0 n_i^2 \mathbf{e}_i^*) \cdot \mathbf{e}_j dx dy \\ &\quad + \frac{\omega \varepsilon_0}{4} \iint (n_i^2 - n_j^2) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i^* dx dy \\ &= \frac{i}{4} \iint (\nabla_\perp \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{h}_i^* - (\nabla_\perp \times \mathbf{h}_j) \cdot \mathbf{e}_i^* + (\nabla_\perp \times \mathbf{e}_i^*) \cdot \mathbf{h}_j - (\nabla_\perp \times \mathbf{h}_i^*) \cdot \mathbf{e}_j dx dy \\ &= \frac{i}{4} \iint \nabla_\perp \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{h}_i^* + \mathbf{e}_i^* \times \mathbf{h}_j) dx dy = \frac{i}{4} \oint_C (\mathbf{e}_j \times \mathbf{h}_i^* + \mathbf{e}_i^* \times \mathbf{h}_j) \cdot \hat{\mathbf{z}} ds \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde se ha usado que los campos deben decaer a cero en el infinito. Las ecuaciones (2.34) se pueden obtener a partir de un Principio de Mínima Acción luego de definir el Lagrangiano  $L$  de tipo campo discreto de Schrödinger:

$$L = - \sum_{ij} a_i^* \left( i P_{ij} \frac{d}{dz} + H_{ij} \right) a_j. \quad (2.35)$$

Los momentos generalizados de este Lagrangiano es  $\Pi_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_k} = -i \sum_j a_j^* P_{jk}$ , por lo que el Hamiltoniano  $H$  asociado es

$$H = \sum_j \Pi_j \dot{a}_j - L = \sum_{ij} -ia_i^* P_{ij} \dot{a}_j + a_i^* \left( iP_{ij} \frac{da_j}{dz} + H_{ij} a_j \right) = \sum_{ij} a_i^* H_{ij} a_j. \quad (2.36)$$

Variando el Lagrangiano se tiene:

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_{ij} \frac{\partial L}{\partial a_j} \delta a_j + \frac{\partial L}{\partial a_i^*} \delta a_i^* + \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_j} \delta \dot{a}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i^*} \delta \dot{a}_i^* \\ &= \sum_{ij} \left( \frac{\partial L}{\partial a_j} - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_j} \right) \delta a_j + \left( \frac{\partial L}{\partial a_i^*} - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i^*} \right) \delta a_i^* + \frac{d}{dz} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_j} \delta a_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i^*} \delta a_i^* \right) \\ &\Rightarrow \frac{d}{dz} \sum_{ij} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_j} \delta a_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i^*} \delta a_i^* \right) = 0. \end{aligned}$$

Al considerar el par de transformaciones asociadas al grupo unitario U(1),  $a_j \rightarrow a'_j = e^{i\phi} a_j$ ,  $a_i^* \rightarrow a'^*_i = e^{-i\phi} a_i^*$  que dejan invariante el Lagrangiano, y si se toma una variación infinitesimal  $\phi \ll 1$  se tiene  $\delta a_j = i\phi a_j$  y  $\delta a_i^* = -i\phi a_i^*$ , por lo que la cantidad conservada,  $P$ , que se identifica con la potencia total del sistema es:

$$P = \sum_{ij} a_i^* P_{ij} a_j = \iint \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{z}} dx dy. \quad (2.37)$$

Se tienen entonces dos cantidades conservadas en la dinámica,  $H$  y  $P$ , que serán de utilidad para verificar la validez de soluciones numéricas a la ecuación (2.34).

### 2.5.2. Dímero TE en guías de onda tipo losa

Para los modos TE fundamentales (condición antisimétrica) y las ecuaciones (2.12) se tiene que

$$\mathbf{e}_{j\perp} = \hat{\mathbf{y}} \frac{i\omega\mu_0 H_{a1}}{k_0^2 n_j^2 - (k_z^j)^2} \begin{cases} -\alpha \cos(\alpha(x - x_j)), & |x - x_j| \leq a \\ \beta \sin(\alpha a) e^{-\beta(|x - x_j| - a)}, & |x - x_j| > a \end{cases} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{h}_{j\perp} = \hat{\mathbf{x}} \frac{ik_z^j H_{a1}}{k_0^2 n_j^2 - (k_z^j)^2} \begin{cases} \alpha \cos(\alpha(x - x_j)), & |x - x_j| \leq a \\ -\beta \sin(\alpha a) e^{-\beta(|x - x_j| - a)}, & |x - x_j| > a \end{cases} \quad (2.39)$$

$x_j = jd$ , con  $d \geq 2a$  y  $L = \int dy$ . Elementos no diagonales tienen la forma:

$$(\mathbf{e}_{j\perp} \times \mathbf{h}_{i\perp}^*) \cdot \hat{\mathbf{z}} = \frac{k_z^i \omega \mu_0 H_{a1}^2 \beta \sin(\alpha a)}{(k_0^2 n_j^2 - k_z^j)^2 (k_0^2 n_i^2 - k_z^i)^2} \begin{cases} \alpha \cos(\alpha(x - x_i)) e^{-\beta(|x - x_j| - a)}, & |x - x_i| \leq a \\ i \leftrightarrow j, & |x - x_j| \leq a \\ \beta \sin(\alpha a) e^{-\beta(|x - x_i| + |x - x_j| - 2a)}, & \text{otro caso} \end{cases} \quad (2.40)$$

$$P_{ij} = \frac{L k_z^i k_0 \mu_0 c H_{a1}^2 \sin^2(\alpha a) e^{-\beta d} e^{\beta a}}{2\beta} \left[ \frac{e^{-\beta a} + \beta(d - 2a) e^{\beta a}}{\beta^2} - \frac{2 \cosh(\beta a)}{a^2 + \beta^2} \right]$$

$$\tilde{H}_{ij} \equiv H_{ij} - P_{ij}k_z^j = \frac{Lk_0\mu_0cH_{a1}^2}{2\beta} \sin^2(\alpha a)e^{2\beta a}e^{-\beta d}$$

Elementos diagonales tienen la forma:

$$(\mathbf{e}_{j\perp} \times \mathbf{h}_{j\perp}^*) \cdot \hat{\mathbf{z}} = \frac{k_z^j \omega \mu_0 H_{a1}^2}{(k_0^2 n_j^2 - k_z^2)^2} \begin{cases} \alpha^2 \cos^2(\alpha(x - x_j)), & |x - x_j| \leq a \\ \beta^2 \sin^2(\alpha a) e^{2\beta a} e^{-2\beta|x-x_j|}, & |x - x_j| > a \end{cases}$$

$$P_{jj} = \frac{Lk_z^j k_0 \mu_0 c H_{a1}^2 a}{2\alpha^2} \left[ 1 + \frac{\sin^2(\alpha a)}{a\beta^3} k_0^2 (n_1^2 - n_0^2) \right]$$

$$\tilde{H}_{jj} \equiv H_{jj} - P_{jj}k_z^j = \frac{Lk_0^3 \mu_0 c H_{a1}^2 \sin^2(\alpha a) e^{2\beta a} e^{-2\beta d}}{4\beta^3} (n_1^2 - n_0^2) \sinh(2\beta a)$$

La dinámica está regida por el sistema acoplado de las ecuaciones (2.34), que luego de premultiplicar por la inversa de la matriz  $P_{ij}$  toma la forma:

$$-i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{k} & V \\ V & \tilde{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

con  $\tilde{k} \equiv k_z^{\text{TE}} + \delta k$ ,  $k_z^{\text{TE}} \sim 1.3 \times 10^5 \text{ cm}^{-1}$ ,  $V \equiv \frac{P_{ii}\tilde{H}_{ij} - P_{ij}\tilde{H}_{ii}}{P_{ii}^2 - P_{ij}^2} \sim 1 \text{ cm}^{-1}$  y  $\delta k \equiv \frac{P_{ii}\tilde{H}_{ii} - P_{ij}\tilde{H}_{ij}}{P_{ii}^2 - P_{ij}^2} \sim -0.02 \text{ cm}^{-1}$  para  $\lambda = 730 \text{ nm}$ ,  $n_1 = n_0 + 4 \times 10^{-4}$  y una distancia entre guías de  $d = 18 \mu\text{m}$ . La matriz  $\hat{P}^{-1}\hat{H}$  se puede escribir en términos de las matrices de Pauli como  $\tilde{k}I + V\sigma_x$ , lo que permite utilizar sus propiedades para resolver la dinámica del sistema:

$$\begin{pmatrix} a_1(z) \\ a_2(z) \end{pmatrix} = e^{i[\tilde{k}I + V\sigma_x]z} \begin{pmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \end{pmatrix} = e^{i\tilde{k}z} \begin{pmatrix} \cos(Vz) & i \sin(Vz) \\ i \sin(Vz) & \cos(Vz) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \end{pmatrix}.$$

### 2.5.3. Bandas y Topología

Si bien es posible reformular las ecuaciones de Maxwell como un problema de autovalores en analogía a Mecánica Cuántica para plantear un análogo al Teorema de Bloch [46], en el contexto de sistemas discretos la ecuación tipo Schrödinger (2.34) con la matriz  $\hat{C} \equiv \hat{P}^{-1}\hat{H}$  hermítica es justificación suficiente para invocarlo: Es posible expresar las soluciones del sistema en una base de cuasimomento cuya periodicidad sea la misma que la de la matriz  $\hat{C}$ . En la práctica, se aplicará un Ansatz de Bloch  $\mathbf{a} = e^{i(\lambda z + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \mathbf{A}$ , con  $\mathbf{A}$  un vector constante de la misma dimensionalidad que número de sitios en la celda unitaria de la red. De esta manera, será posible etiquetar  $\lambda \equiv \lambda_n(\mathbf{k})$

Para sistemas finitos, los autovalores de la matriz  $\hat{C}$  tenderán a agruparse en el mismo número de bandas que cantidad de sitios por celda unitaria conformen el sistema, dado que las funciones de Wannier asociadas al Teorema de Bloch aproximan de mejor manera al sistema en cuestión a medida que aumenta el número de celdas.

## Red de Su-Schrieffer-Heeger fotónica

El célebre modelo de Su-Schrieffer-Heeger (SSH) es uno de los sistemas más sencillos que exhibe *estados de borde topológicos* [47–49]. Originado para explicar la formación de estructuras localizadas en el poliacetileno, consiste en considerar únicamente dos tipos de acoplamiento: uno fuerte (enlace doble) y uno débil (enlace simple). En la Figura 2.5 se ilustra el modelo a estudiar, que se corresponde al siguiente Hamiltoniano  $H$ .

$$H = \sum_n tb_n^* a_n + t' a_{n+1}^* b_n + c.c.$$

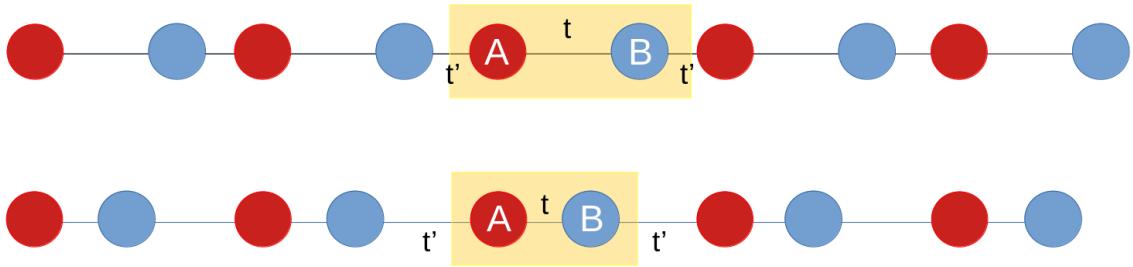


Figura 2.5: Esquema del modelo SSH. En amarillo se encierra la celda unitaria, donde se distinguen los sitios A y B y el acoplamiento intracelda (intercelda)  $t$  ( $t'$ ).

En condiciones de borde periódicas (Born-von Karman), es posible diagonalizar el Hamiltoniano en la base de Bloch con  $a_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k a_k e^{iknd}$ ,  $b_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k b_k e^{iknd}$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{N} \sum_n \sum_{kk'} \left[ (t + t' e^{ikd}) a_k b_{k'}^* e^{i(k-k')nd} + (t + t' e^{-ikd}) a_k^* b_{k'} e^{-i(k-k')nd} \right] \\ &= \sum_k \begin{pmatrix} a_k^* & b_k^* \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & t + t' e^{-ikd} \\ t + t' e^{ikd} & 0 \end{pmatrix}}_{H(k)} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde se ha usado que

$$\frac{1}{N} \sum_n e^{i(k-k')nd} = \begin{cases} \frac{N}{N} = 1, & \text{si } k = k' \\ \frac{1 - e^{i(k-k')nd}}{N} = 0, & \text{si } k \neq k' \end{cases} = \delta_{kk'},$$

pues  $k, k' \in \left\{ \frac{2\pi l}{Nd}, l = 0, \pm 1, \dots, \pm \frac{N}{2} \right\}$  pertenecen a la red recíproca 1D. El espectro de  $H(k)$  es  $\lambda_k = \pm \sqrt{t^2 + t'^2 + 2tt' \cos(kd)}$ , lo que pareciera indicar que el sistema es simétrico entre  $t$  y  $t'$ . Sin embargo, el cuadro no está completo sin los autovectores de  $H(k)$ ,  $\mathbf{v}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pm e^{-i\phi(k)} \\ 1 \end{pmatrix}$ , con

$\phi(k) = \tan^{-1} \left( \frac{t' \sin(kd)}{t + t' \cos(kd)} \right)$ . Si se define  $\vec{d}(k) \equiv \begin{pmatrix} t + t' \cos(kd) \\ t' \sin(kd) \\ 0 \end{pmatrix}$  es posible escribir el Hamiltoniano  $H(k)$

en términos de las matrices de Pauli  $H(k) = \vec{d} \cdot \vec{\sigma}$ , además de asociar la fase  $\phi(k)$  al ángulo que forma la proyección del vector  $\vec{d}(k)$  en el plano  $xy$ ,  $\phi(k) = \tan^{-1} \left( \frac{d_y}{d_x} \right)$ . En particular, cuando  $\delta \equiv \frac{t}{t'} < 1$ ,

el vector  $\vec{d}(k)$  encierra el origen una vez, mientras que para  $\delta > 1$  no se encierra el origen, como se aprecia en la Figura 2.6. Formalmente, las fases de Zak  $\mathcal{Z}_\pm$  asociadas a los autoestados del bullo cambian dependiendo del valor de  $\delta$ . Por definición [50],

$$\mathcal{Z}_\pm = i \oint \mathbf{v}_\pm^\dagger \frac{d\mathbf{v}_\pm}{dk} dk = -\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{d}}^{\frac{\pi}{d}} \frac{d\phi(k)}{dk} dk = -\frac{d}{2} \int_{-\frac{\pi}{d}}^{\frac{\pi}{d}} \frac{1 + \delta \cos(kd)}{\delta^2 + 1 + 2\delta \cos(kd)} dk = -\frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{1 - \delta^2}{|1 - \delta^2|} \right).$$

Es decir,

$$\mathcal{Z}_\pm = \begin{cases} -\pi, & \text{si } |\delta| < 1 \\ 0, & \text{si } |\delta| > 1 \end{cases}.$$

El cambio en la fase de Zak al variar el parámetro  $\delta$  se conoce como *transición topológica* puesto que no es posible pasar de un régimen a otro de forma suave. Esto tiene implicancias en el sistema con condiciones de borde abiertas (Dirichlet) debido a la *correspondencia bullo-borde* [51]. En concreto, así como se ilustra en la Figura 2.7, la topología del Hamiltoniano  $H(k)$  induce la aparición de estados de borde a energía cero al imponer condiciones de borde abiertas.

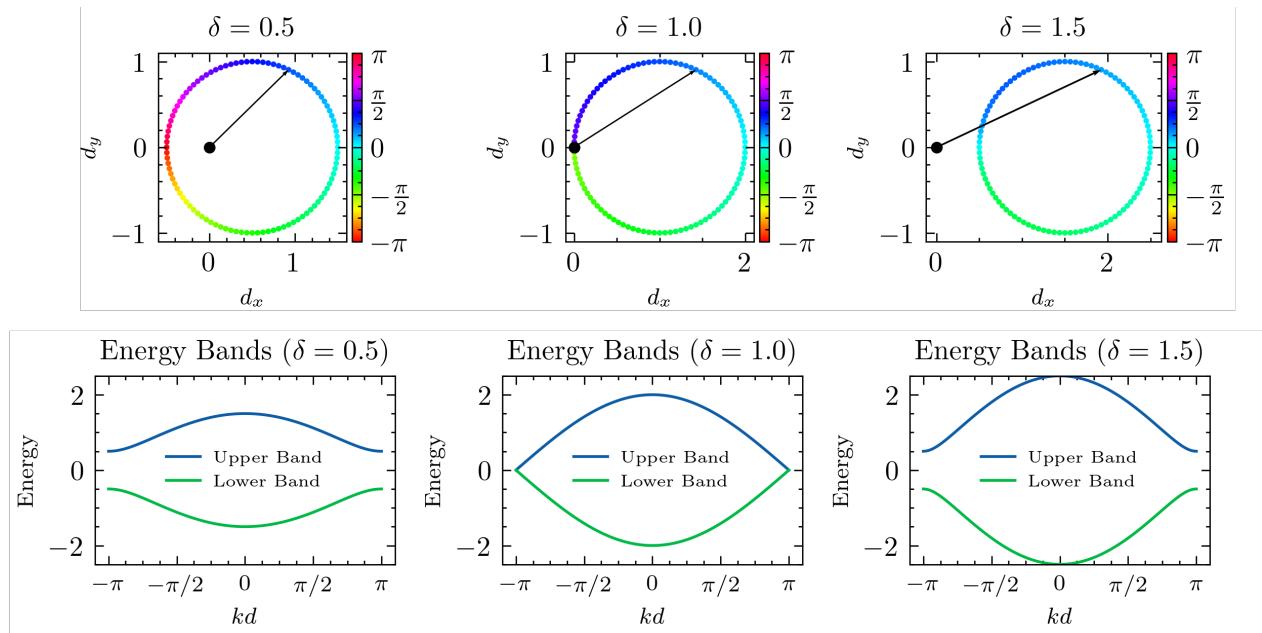


Figura 2.6: Se fija  $t' = 1$  y se varía  $\delta = \frac{t}{t'}$  para un número  $N = 100$  de celdas unitarias. Arriba: Componentes del vector  $\vec{d}$  y fase asociada. Para  $\delta < 1$ , se encierra el origen y todos los ángulos están disponibles. Para  $\delta > 1$ , es imposible acceder a todos los ángulos. Abajo: Bandas en función del cuasimomento  $k$  para  $\delta < 1$ ,  $\delta = 1$  y  $\delta > 1$ . Las bandas se tocan en  $\delta = 1$ .

## Red fotónica tipo panel de abeja

Energy Spectrum for SSH Model  
with Open Boundary Conditions

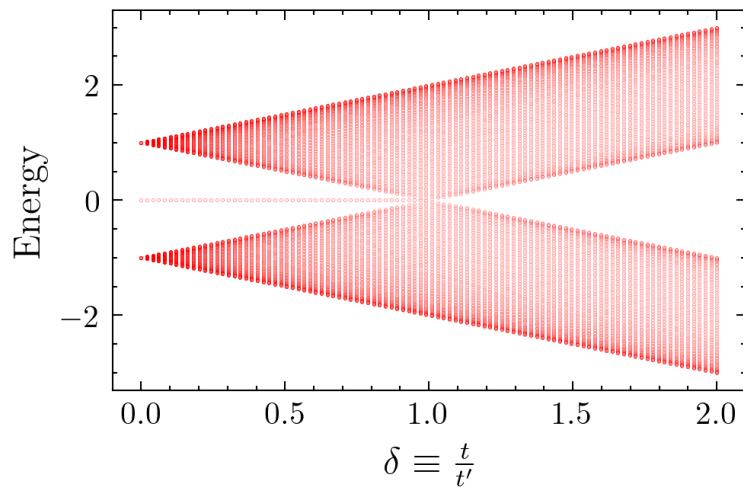


Figura 2.7: Espectro de la red SSH con condiciones de borde abiertas en función del parámetro  $\delta = \frac{t}{t'}$ , para  $t' = 1$  fijo y para un número  $N = 100$  de celdas unitarias. Sólo hay estados de borde a energía cero para  $|\delta| < 1$

## 3. Métodos numéricos

A partir de las ecuaciones (2.6) y (2.7), se puede aplicar la aproximación de guaje débil para despreciar el lado derecho de ambas ecuaciones a fin de ignorar el efecto cruzado entre componentes de los campos. Las ecuaciones resultantes son del tipo Helmholtz:

$$[\nabla^2 + k_0^2 n^2(\mathbf{r})] \Psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.1)$$

La ecuación (3.1) es la base de todos los métodos numéricos utilizados en esta tesis.

### 3.1. Expansión en modos normales

Este método numérico es útil cuando los sistemas fotónicos en estudio son invariantes en la dirección de propagación  $z$ . Esto es,  $n(\mathbf{r}) \equiv n(x, y)$ . La soluciones de la ecuación (3.1) se pueden expandir en ondas planas con perfiles transversales:  $\Psi(\mathbf{r}) = \Psi(x, y) \exp(i\beta z)$ . Con ésto, cada modo transversal  $\nu$  debe cumplir la siguiente ecuación a resolver numéricamente:

$$[\nabla_{\perp}^2 + k_0^2 n^2(x, y)] \Psi_{\nu}(x, y) = \beta_{\nu}^2 \Psi_{\nu}(x, y), \quad \text{con } \nabla_{\perp}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (3.2)$$

Y el campo total propagado es una combinación lineal de los modos  $\Psi_{\nu}$ :

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{\nu} a_{\nu} \Psi_{\nu}(x, y) e^{i\beta_{\nu} z}, \quad \text{con } a_{\nu} \propto \Psi_{\nu}(x, y) \cdot \Psi(x, y, z = 0). \quad (3.3)$$

En vez de integrar directamente la ecuación de valores propios (3.2), la estrategia será discretizar el espacio y aproximar al operador Laplaciano transversal  $\nabla_{\perp}^2$  como una matriz, pues

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, y)}{\partial x^2} \sim \frac{\Psi[i+1, j] - 2\Psi[i, j] + \Psi[i-1, j]}{\Delta x^2}.$$

Esto es, la matriz será una suma de Kronecker de dos matrices tridiagonales con valores  $-2$  en la diagonal y  $-1$  fuera de ella, con un prefactor de  $1/\Delta x^2$  o  $1/\Delta y^2$ . Prácticamente toda la matriz es nula (*sparse-like*), por lo que es posible optimizar el proceso de cómputo al utilizar la librería de Python `scipy.sparse.linalg`, especialmente diseñada para el álgebra lineal de matrices de escasos elementos. El anexo B contiene una implementación de este algoritmo en Python bajo licencia [GNU GPL v3](#).

### 3.2. Beam Propagation Method

Otra forma de abordar la resolución numérica de la ecuación (3.1) consiste en separar el campo en su envolvente lenta y una fase rápidamente oscilante, considerando que en el rango visible el

orden de magnitud es,  $k_0 \sim 10^5 \text{ cm}^{-1}$ :  $\Psi(\mathbf{r}) = \phi(x, y, z) \exp(ik_0 n_0 z)$ . Luego de reemplazar en la ecuación (3.1) se obtiene la ecuación óptica de Schrödinger [52]:

$$2ik_0 n_0 \frac{\partial}{\partial z} \phi(x, y, z) = - \left[ \nabla_{\perp}^2 + k_0^2 (n^2(\mathbf{r}) - n_0^2) \right] \phi(x, y, z), \quad (3.4)$$

donde se ha utilizado la aproximación paraxial  $\left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right| \ll 2k_0 n_0 \left| \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|$ . Los algoritmos que resuelven la ecuación (3.4) son conocidos como *Beam Propagation Methods* escalares, utilizados ampliamente en esta área de investigación [16, 35, 36, 53? ]. Fuera de la aproximación de guaje débil, los efectos de polarización cruzada son más relevantes y se hace necesaria una descripción vectorial del problema.

### 3.2.1. Implementación mediante transformada de Fourier (FTBPM)

La ecuación (3.4) se puede escribir en términos de operadores lineales como [53]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = (\hat{A} + \hat{B}) \phi, \text{ con } \hat{A} \equiv i \frac{\nabla_{\perp}^2}{2k_0 n_0} \text{ y } \hat{B} \equiv i \frac{k_0}{2n_0} [n^2(\mathbf{r}) - n_0^2]. \quad (3.5)$$

La solución formal a la ecuación (3.5) es  $\phi(\mathbf{r}) = \exp[(\hat{A} + \hat{B})(z - z_0)] \phi(x, y, z_0)$ . Es conveniente trabajar con el operador  $\hat{A}$  en el espacio de Fourier y con el operador  $\hat{B}$  en el espacio directo. Dado que  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  no conmutan en general, se puede expandir el operador exponencial a orden  $O(\Delta z^3)$  como  $\exp[(\hat{A} + \hat{B})\Delta z] \approx \exp\left(\frac{i\hat{A}\Delta z}{2}\right) \exp(\hat{B}\Delta z) \exp\left(\frac{i\hat{B}\Delta z}{2}\right) + O(\Delta z^3)$ .

El algoritmo a implementar es el siguiente:

1. Se comienza con un perfil  $\phi(x, y, z_0)$
2. Se actúa en el espacio de Fourier transformando el perfil y multiplicado por la fase asociada a  $\hat{A}$ :  $\exp\left(\frac{ik^2 \Delta z}{4k_0 n_0}\right) \mathcal{F}(\phi(z_0))$ , donde  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  son las frecuencias de Fourier.
3. Se aplica transformada de Fourier inversa y se multiplica por la fase asociada a  $\hat{B}$ :  

$$\exp\left[\frac{i\Delta z k_0^2 (n^2 - n_0^2)}{2k_0 n_0}\right] \mathcal{F}^{-1} \left( \exp\left(\frac{ik^2 \Delta z}{4k_0 n_0}\right) \mathcal{F}(\phi(z_0)) \right)$$
4. Se regresa al espacio de Fourier y se multiplica por la fase asociada a  $\hat{A}$ :  

$$\exp\left(\frac{ik^2 \Delta z}{4k_0 n_0}\right) \mathcal{F} \left\{ \exp\left[\frac{ik_0^2 (n^2 - n_0^2)}{2k_0 n_0} \Delta z\right] \mathcal{F}^{-1} \left[ \exp\left(\frac{ik^2 \Delta z}{4k_0 n_0}\right) \mathcal{F}(\phi(z_0)) \right] \right\}$$
5. Se vuelve al espacio real, habiendo avanzado un paso  $\Delta z$ :  

$$\phi(z_0 + \Delta z) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \exp\left(\frac{ik^2 \Delta z}{4k_0 n_0}\right) \mathcal{F} \left\{ \exp\left[\frac{ik_0^2 (n^2 - n_0^2)}{2k_0 n_0} \Delta z\right] \mathcal{F}^{-1} \left[ \exp\left(\frac{ik^2 \Delta z}{4k_0 n_0}\right) \mathcal{F}(\phi(z_0)) \right] \right\} \right\}$$
6. Se itera hasta llegar a la distancia de propagación  $z$  deseada.

### 3.3. Desde teoría de modos acoplados

Se puede decir que la simulación numérica de las ecuaciones (??) es lo más compacta posible en tanto la matriz de acoplamientos  $\hat{C}$  codifica todas las propiedades de la red que se deseen estudiar de manera semiempírica. En este sentido, la diagonalización de la matriz  $\hat{C}$  es una herramienta numérica útil en el estudio del comportamiento de redes fotónicas ante variaciones de parámetros tales como la dimerización (razón entre dos constantes de acoplamiento) o el desintonizado (diferencia entre constantes de propagación de dos modos distintos). Incluso, es posible explorar sistemas “no físicos” debido a los grados de libertad en las entradas de la matriz  $\hat{C}$ .

## 4. Métodos experimentales

### 4.1. Escritura de guías de onda

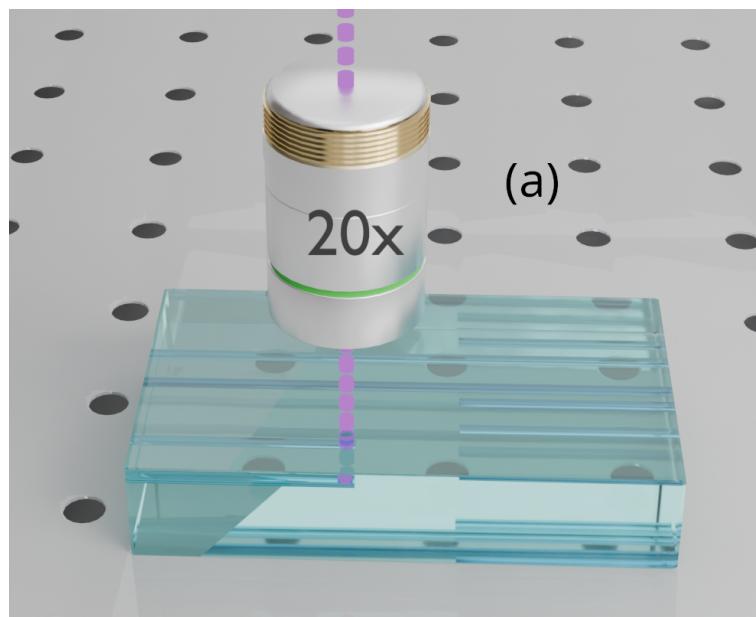


Figura 4.1: Escritura.

### 4.2. Montaje de excitación láser supercontinuo

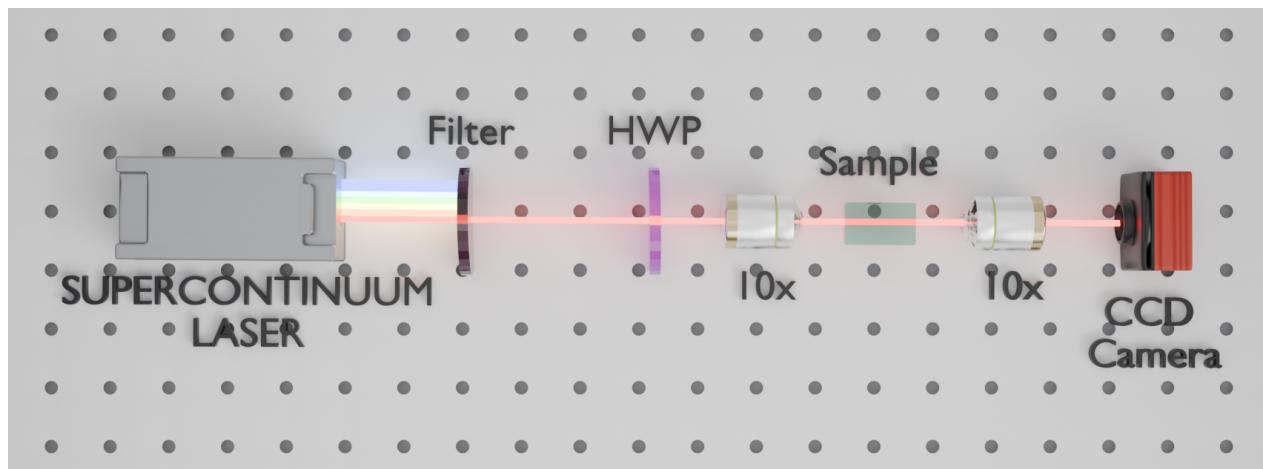


Figura 4.2: Montaje SC.

## 4.3. Montaje de modulación espacial de luz

Para usar condiciones iniciales distintas a una gaussiana se hace necesario incorporar métodos de modulación espacial de luz. En esta tesis se utilizó una técnica conocida como

### 4.3.1. Etapa premodulación

El modulador espacial de luz utilizado es un HOLOEYE PLUTO-NIR SLM - Reflective LCOS, cuya respuesta óptica ocurre con polarización paralela al plano de la mesa óptica. Se utiliza un retardador de media onda ( $\lambda/2$ ) seguido de un polarizador de atenuación 10000:1 con el objetivo de que la polarización de la luz láser coincida con la de la respuesta del SLM. Posteriormente se magnifica y se colima el haz para que abarque todo el área de pixeles disponible con un par de lentes 20x y  $L_1$  de foco 100mm.

### 4.3.2. Etapa de modulación

Una rejilla de difracción que maximiza la potencia del primer orden de difracción es utilizada. Para modular en amplitud se debe multiplicar la rejilla por la máscara de amplitud deseada, mientras que para modular en fase basta con sumar el nivel de gris correspondiente a la fase deseada. En la Figura 4.3 se bosqueja el algoritmo implementado en Python en el anexo D.

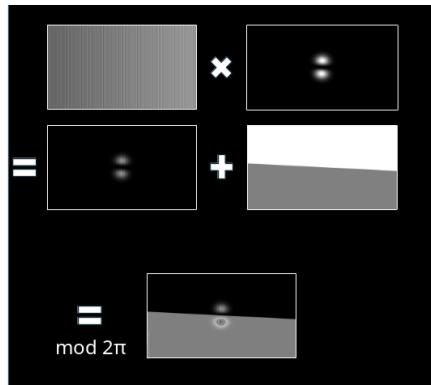


Figura 4.3: Algoritmo de modulación espacial de luz para máscaras de amplitud y fase arbitrarias. Los parámetros de la rejilla de difracción están sujetos a la longitud de onda usada (730 nm).

### 4.3.3. Etapa de acoplamiento

La imagen modulada pasa por un par de lentes  $L_2$  de foco 1000 mm y  $L_3$  de foco 50 mm para reducir el tamaño al orden de los micrómetros. La inclinación de la cara de entrada de la muestra debe coincidir con el plano de la imagen modulada, por lo que se generan dos pares de haces gaussianos, unos verticales y otros horizontales, de manera de que al trasladar el lente objetivo 4x, los máximos de difracción se generen en el centro de los haces gaussianos.

#### 4.3.4. Etapa de captura en cámara

Una vez calibrada la inclinación de la muestra, se fija su posición. Un lente objetivo 10x permite magnificar la imagen de salida y capturar los resultados en un Beam Profiler.

#### 4.3.5. Circuito óptico

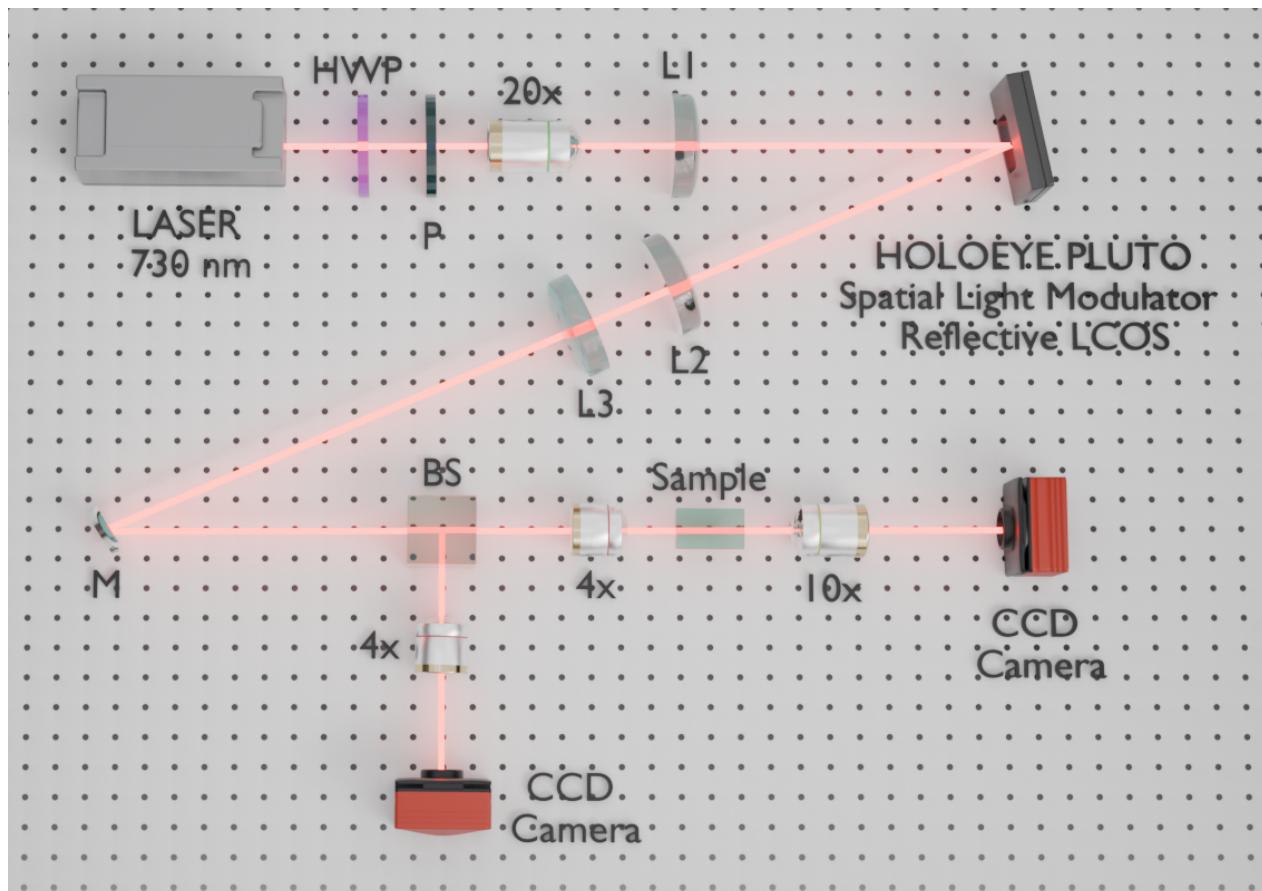


Figura 4.4: Montaje SLM.

### 4.4. Análisis de imágenes

A partir de las imágenes capturadas es posible extraer información de la potencia que contiene cada sitio del sistema fotónico discreto en estudio. Para ello la imagen completa debe ser seccionada equispaciadamente en rectángulos que encierran las regiones donde existen guías de onda, iluminadas o no. La potencia de cada sitio será entonces la suma de la intensidad de cada píxel encerrado en su rectángulo respectivo.

## 5. Acoplamiento de modos $p_y$

En electroestática, es posible asociar las interacciones dipolares eléctricas con los polinomios de Legendre de orden 2,  $P_2(\cos(\theta)) = 3\cos^2(\theta) - 1$ , con  $\theta$  el ángulo que forman los dipolos entre sí. Se suele llamar *ángulo mágico* al valor  $\theta_m \approx 0.62$  rad, pues anula el término de interacción dipolar [54].

Este capítulo tiene como protagonistas a los llamados modos  $p_y$  o modos dipolares verticales, cuya excitación es posible al superar la condición de corte (longitud de onda lo suficientemente pequeña y tanto contraste  $\Delta n$  como ancho de la guía lo suficientemente grandes).

### 5.1. Acopladores

Al considerar qué sucede con el acoplamiento entre modos  $p_y$  de guías elípticas, se pueden distinguir dos casos límite: 1) Para acopladores horizontales, el acoplamiento  $C_\pi$  tiene signo positivo. 2) Para acopladores verticales, el acoplamiento  $C_\sigma$  tiene signo negativo [55]. Esta fenomenología es análoga a la que sucede en los enlaces químicos  $\sigma$  y  $\pi$  de las cadenas de carbono orgánicas. Para comprobar este efecto, se fabricaron 20 dímeros con una distancia de separación de 25  $\mu\text{m}$  y con una distancia de propagación de 15 mm y se varió el ángulo entre guías desde 0.00 rad hasta 1.57 rad. Utilizando el montaje SLM, se moduló un modo P: dos lóbulos del mismo tamaño con una diferencia de fase de  $\pi$  entre ambos.

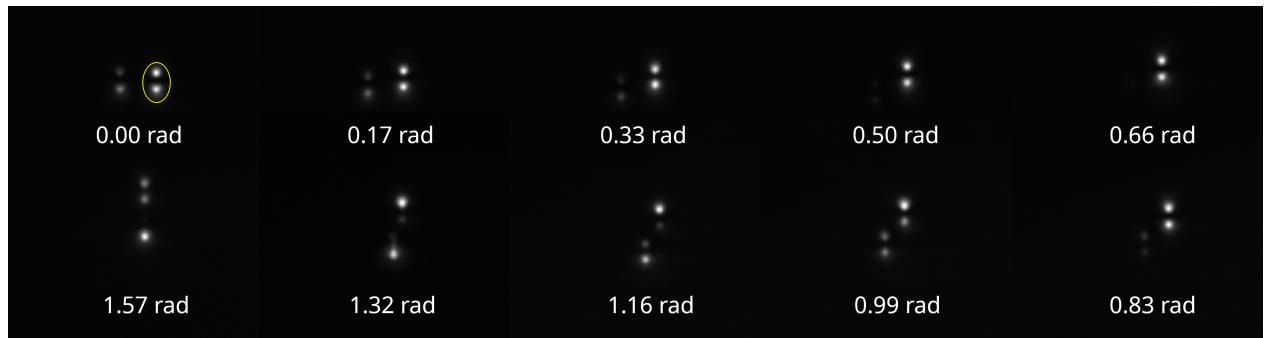


Figura 5.1: Barrido en ángulo que captura el paso por acoplamiento nulo en 0.50 rad para una misma distancia de propagación de 15 mm.

Se hizo un análisis de las imágenes como el descrito en la sección 4.4. Luego, utilizando la descripción discreta (2.34) de la constante de acoplamiento  $C = \frac{1}{L} \arctan \left( \sqrt{\frac{P_2}{P_1}} \right)$  se caracterizó su comportamiento en función del ángulo  $\theta$  medido desde la horizontal para una distancia de separación fija de 25  $\mu\text{m}$ . El signo negativo se añadió de manera que la tendencia de los datos fuera continua, como se aprecia en la Figura 5.2.

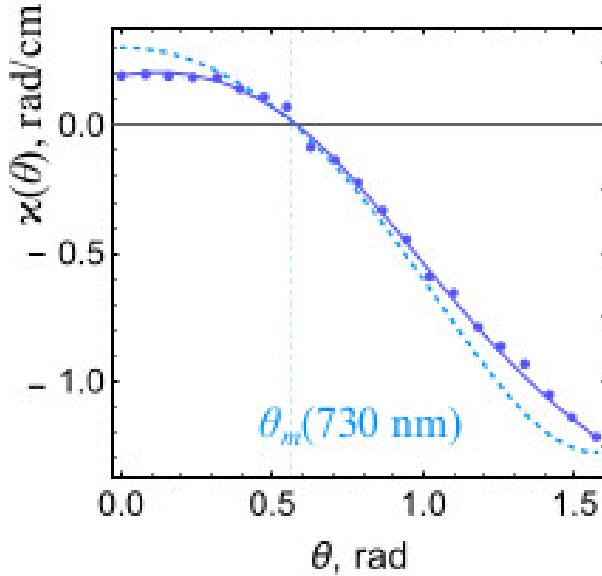


Figura 5.2: Curva de acomplamiento en función del ángulo entre modos P.

## 5.2. Redes tipo panal de abeja

La red tipo panal de abeja es conocida por ser la red subyacente del grafeno. Su característica más relevante para efectos de esta tesis tiene relación con sus bandas de Bloch: ambas dispersivas y con la presencia de un cono de Dirac en su intersección [56].

Una vez encontrados los parámetros de fabricación de la sección anterior, se estudió el mismo efecto en una red tipo panal de abeja de forma que la distancia entre sitios permanece fija (Figura 5.3). Se hizo un barrido de ángulos para evidenciar el efecto.

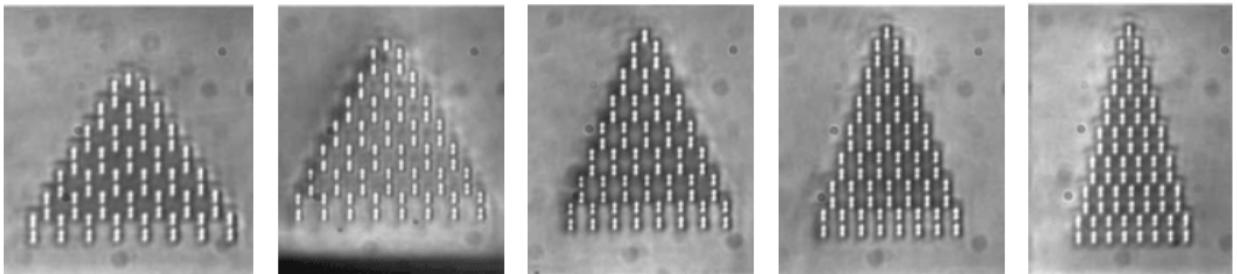


Figura 5.3: Imágenes microscópicas de redes fotónicas tipo panel de abeja.

## 6. Moléculas Fotónicas

La técnica de escritura de guías de onda descrita en el capítulo 4.1 está restringida por la forma alargada y elíptica del tren de pulsos láser que se enfoca, lo que en consecuencia constriñe los acoplamientos interorbitales posibles [35]. Una posibilidad para añadir grados de libertad es fabricar dos guías de onda lo suficientemente cercanas entre sí de manera de hibridizar sus modos guiados, de manera análoga al principio físico que rige a las moléculas. Es por ello que en este capítulo se usará el concepto de moléculas fotonicas [43], y su aplicación para el estudio experimental de una red fotónica que presenta una doble transición de fase topológica [44].

### 6.1. Autoestados del acoplador fotónico para distancias de separación arbitrarias

Como se adelantó en la sección 2.1, la teoría de modos acoplados es una buena descripción de los sistemas fotónicos en estudio siempre que la distancia de separación entre guías de onda sea superior a  $15 \mu\text{m}$ , pues la constante de acoplamiento tiene un comportamiento exponencial decreciente. Más allá del régimen discreto, se hace necesario describir el sistema como una sola macrogüía. Una herramienta numérica que es agnóstica entre ambos regímenes es la de Expansión en Modos Normales, detallada en la sección 3.1. Es por ello que se simula un par de guías de onda a distintas distancias para determinar el comportamiento de sus autoestados.

### 6.2. Moléculas Fotónicas en Red SP-SSH

Para la implementación experimental (sección 4.1) de una red que presente acoplamiento SP [35, 44], se utilizaron los dipolos horizontales de la sección anterior, obtenidos mediante moléculas fotónicas. Un preciso sintonizado de las constantes de propagación de los modos  $s$  y  $p$  permitió considerar un grado de libertad análogo al del espín del electrón (*pseudoespín*). El Hamiltoniano  $H$  de esta red [29, 44] es el siguiente

$$\begin{aligned} H = \sum_n & \left[ \frac{\delta\beta}{2} (b_{n,1}^* b_{n,1} - a_{n,1}^* a_{n,1} + b_{n,2}^* b_{n,2} - a_{n,2}^* a_{n,2}) + k_{ss,2} a_{n,2}^* a_{n,1} - k_{pp,2} b_{n,2}^* b_{n,1} \right. \\ & + k_{ss,1} (a_{n-1,2}^* a_{n,1} + a_{n+1,2}^* a_{n,2}) - k_{pp,1} (b_{n-1,2}^* b_{n,1} + b_{n+1,2}^* b_{n,2}) + k_{sp,2} (a_{n,2}^* b_{n,1} - b_{n,2}^* a_{n,1}) \\ & \left. + k_{sp,1} (a_{n-1,2}^* b_{n,1} - b_{n-1,2}^* a_{n,1} + a_{n+1,1}^* b_{n,2} - b_{n+1,1}^* a_{n,2}) \right] + c.c. \end{aligned}$$

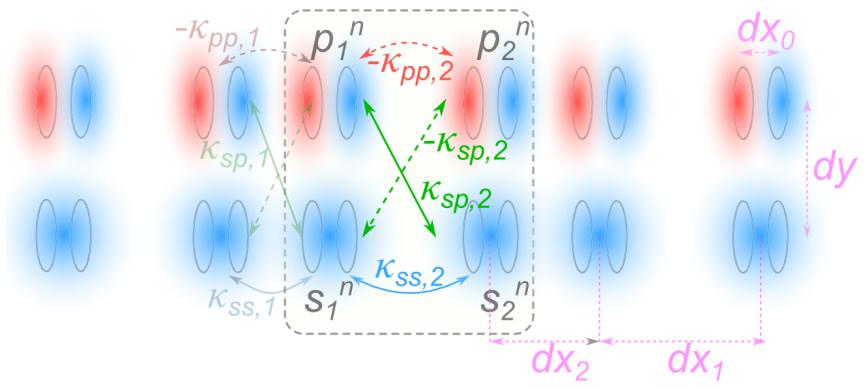


Figura 6.1: Esquema de la red SP-SSH

## 7. Haces con momentum orbital angular (OAM)

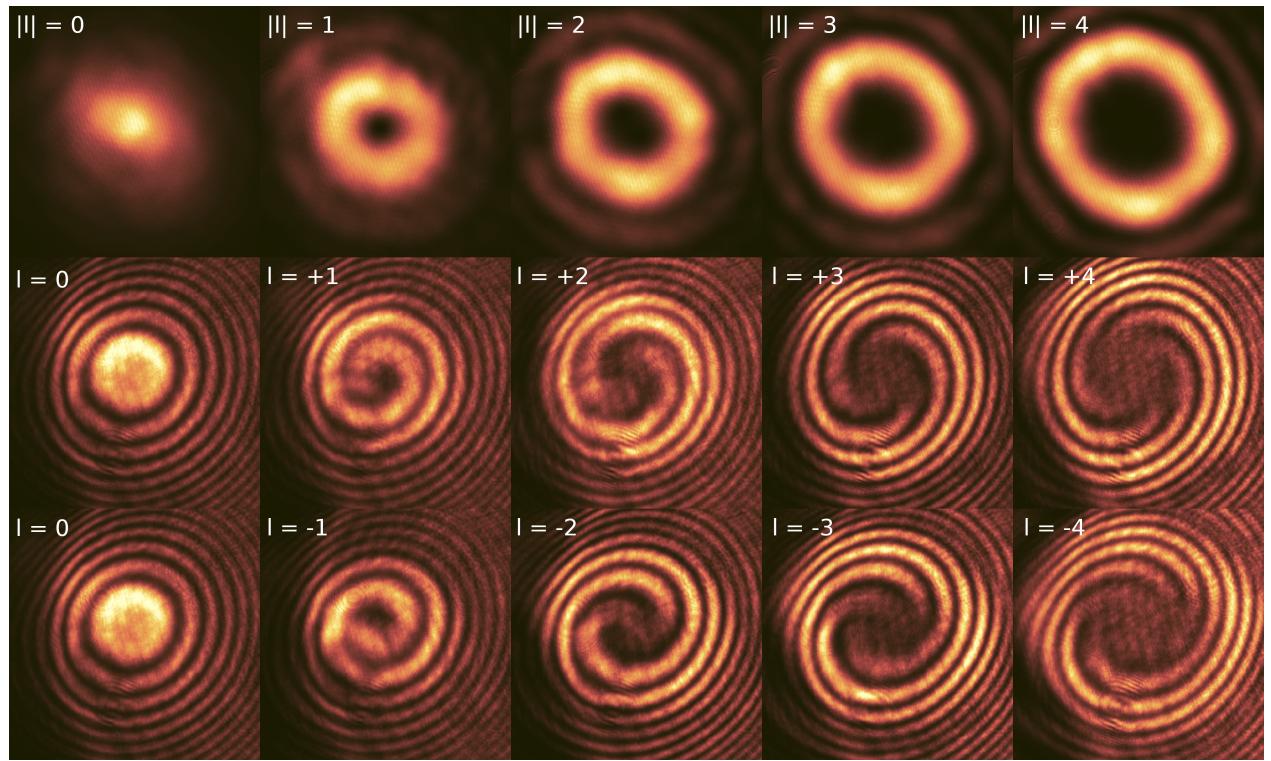


Figura 7.1: Generación de OAMs e interferencia tipo Mach-Zehnder. Se aprecia la carga de los OAMs contando la cantidad de espirales originados desde el centro.

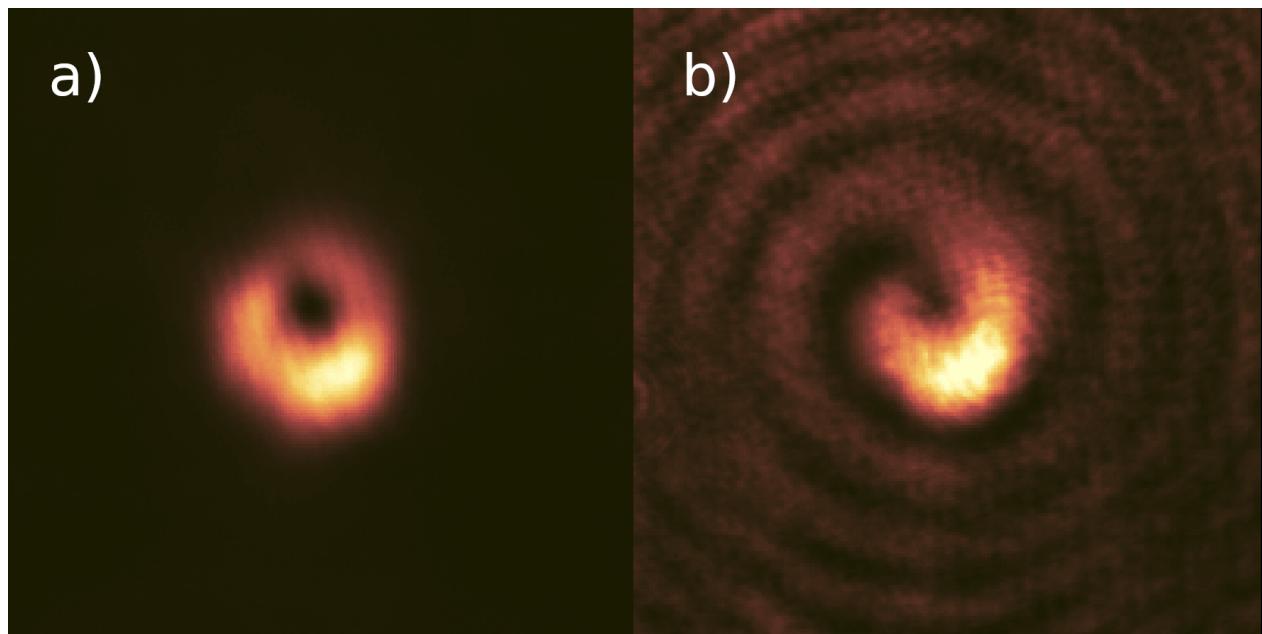


Figura 7.2: Propagación de vórtices en guías de onda. En a) se tiene la intensidad del perfil de salida luego de excitar un OAM con carga  $\ell = 1$ . En b) se tiene una estructura de fase **similar a la esperada pero con falta de definición**.

## **8. Conclusiones**

# Bibliografía

- [1] All nobel prizes in physics. URL <https://www.nobelprize.org/prizes/lists/all-nobel-prizes-in-physics/>.
- [2] P. Maine, D. Strickland, P. Bado, M. Pessot, and G. Mourou. Generation of ultrahigh peak power pulses by chirped pulse amplification. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 24(2):398–403, 1988. doi: 10.1109/3.137.
- [3] M. Lewenstein, Ph. Balcou, M. Yu. Ivanov, Anne L’Huillier, and P. B. Corkum. Theory of high-harmonic generation by low-frequency laser fields. *Phys. Rev. A*, 49:2117–2132, Mar 1994. doi: 10.1103/PhysRevA.49.2117. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.49.2117>.
- [4] P. M. Paul, E. S. Toma, P. Breger, G. Mullot, F. Augé, Ph. Balcou, H. G. Muller, and P. Agostini. Observation of a train of attosecond pulses from high harmonic generation. *Science*, 292(5522):1689–1692, 2001. doi: 10.1126/science.1059413. URL <https://www.science.org/doi/10.1126/science.1059413>.
- [5] Thomas Brabec and Ferenc Krausz. Intense few-cycle laser fields: Frontiers of nonlinear optics. *Reviews of Modern Physics*, 72:545–591, 2000. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:120371634>.
- [6] J F Clauser and A Shimony. Bell’s theorem, experimental tests and implications. *Reports on Progress in Physics*, 41(12):1881, dec 1978. doi: 10.1088/0034-4885/41/12/002. URL <https://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/41/12/002>.
- [7] Alain Aspect, Jean Dalibard, and Gérard Roger. Experimental test of bell’s inequalities using time-varying analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, 49:1804–1807, Dec 1982. doi: 10.1103/PhysRevLett.49.1804. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.49.1804>.
- [8] Paul G. Kwiat, Klaus Mattle, Harald Weinfurter, Anton Zeilinger, Alexander V. Sergienko, and Yanhua Shih. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 75:4337–4341, Dec 1995. doi: 10.1103/PhysRevLett.75.4337. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.4337>.
- [9] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, and T. Yamane. Optical trapping and manipulation of single cells using infrared laser beams. *Nature*, 330(6150):769–771, Dec 1987. ISSN 1476-4687. doi: 10.1038/330769a0. URL <https://doi.org/10.1038/330769a0>.
- [10] Isamu Akasaki. Gan-based p-n junction blue-light-emitting devices. *Proc. IEEE*, 101(10):2200–2210, 2013. doi: 10.1109/JPROC.2013.2274928. URL <https://doi.org/10.1109/JPROC.2013.2274928>.

- [11] Michael Kneissl, Tae-Yeon Seong, Jung Han, and Hiroshi Amano. The emergence and prospects of deep-ultraviolet light-emitting diode technologies. *Nature Photonics*, 13(4):233–244, Apr 2019. ISSN 1749-4893. doi: 10.1038/s41566-019-0359-9. URL <https://doi.org/10.1038/s41566-019-0359-9>.
- [12] Shuji Nakamura, Takashi Mukai, and Masayuki Senoh. Candela-class high-brightness In-GaN/AlGaN double-heterostructure blue-light-emitting diodes. *Applied Physics Letters*, 64(13):1687–1689, 03 1994. ISSN 0003-6951. doi: 10.1063/1.111832. URL <https://doi.org/10.1063/1.111832>.
- [13] Submarine cable frequently asked questions, . URL <https://www2.telegeography.com/submarine-cable-faqs-frequently-asked-questions>.
- [14] Hogares con acceso a internet fijo alcanzan el 67 % y usuarios aumentan preferencia por redes de alta velocidad, . URL <https://www.subtel.gob.cl/hogares-con-acceso-a-internet-fijo-alcanzan-el-67-y-usuarios-aumentan-preferencia-por-redes-de-alta-velocidad>.
- [15] Alexander Szameit, Dominik Blömer, Jonas Burghoff, Thomas Schreiber, Thomas Pertsch, Stefan Nolte, Andreas Tünnermann, and Falk Lederer. Discrete nonlinear localization in femtosecond laser written waveguides in fused silica. *Opt. Express*, 13(26):10552–10557, Dec 2005. doi: 10.1364/OPEX.13.010552. URL <https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-13-26-10552>.
- [16] Yonatan Plotnik, Or Peleg, Felix Dreisow, Matthias Heinrich, Stefan Nolte, Alexander Szameit, and Mordechai Segev. Experimental observation of optical bound states in the continuum. *Phys. Rev. Lett.*, 107:183901, Oct 2011. doi: 10.1103/PhysRevLett.107.183901. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.183901>.
- [17] Rodrigo A. Vicencio, Camilo Cantillano, Luis Morales-Inostroza, Bastián Real, Cristian Mejía-Cortés, Steffen Weimann, Alexander Szameit, and Mario I. Molina. Observation of localized states in lieb photonic lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 114:245503, Jun 2015. doi: 10.1103/PhysRevLett.114.245503. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.245503>.
- [18] Sebabrata Mukherjee, Alexander Spracklen, Debaditya Choudhury, Nathan Goldman, Patrik Öhberg, Erika Andersson, and Robert R. Thomson. Observation of a localized flat-band state in a photonic lieb lattice. *Phys. Rev. Lett.*, 114:245504, Jun 2015. doi: 10.1103/PhysRevLett.114.245504. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.245504>.
- [19] Daniel Leykam, Alexei Andreeanov, and Sergej Flach. Artificial flat band systems: from lattice models to experiments. *Advances in Physics: X*, 3(1):1473052, 2018. doi: 10.1080/23746149.2018.1473052. URL <https://doi.org/10.1080/23746149.2018.1473052>.
- [20] Rodrigo A. Vicencio. Photonic flat band dynamics. *Advances in Physics: X*, 6(1):1878057, 2021. doi: 10.1080/23746149.2021.1878057. URL <https://doi.org/10.1080/23746149.2021.1878057>.
- [21] Diego Román-Cortés, Guillermo Fadic, Christofer Cid-Lara, Diego Guzmán-Silva, Bastián Real, and Rodrigo A. Vicencio. Strain induced localization to delocalization transition on a

- lieb photonic ribbon lattice. *Scientific Reports*, 11(1):21411, Nov 2021. ISSN 2045-2322. doi: 10.1038/s41598-021-00967-3. URL <https://doi.org/10.1038/s41598-021-00967-3>.
- [22] Javier Cubillos Cornejo, Diego Guzmán-Silva, Víctor Hugo Cornejo, Ignacio Bordeu, and Rodrigo A. Vicencio. Transport and localization on dendrite-inspired flat band linear photonic lattices. *Scientific Reports*, 13(1):13057, Aug 2023. ISSN 2045-2322. doi: 10.1038/s41598-023-39985-8. URL <https://doi.org/10.1038/s41598-023-39985-8>.
- [23] Paloma Vildoso, Rodrigo A. Vicencio, and Jovana Petrovic. Ultra-low-loss broadband multi-port optical splitters. *Opt. Express*, 31(8):12703–12716, Apr 2023. doi: 10.1364/OE.486855. URL <https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-31-8-12703>.
- [24] Zhaoyang Zhang, Shaohuan Ning, Hua Zhong, Milivoj R. Belić, Yiqi Zhang, Yuan Feng, Shun Liang, Yanpeng Zhang, and Min Xiao. Experimental demonstration of optical bloch oscillation in electromagnetically induced photonic lattices. *Fundamental Research*, 2(3): 401–404, 2022. ISSN 2667-3258. doi: <https://doi.org/10.1016/j.fmre.2021.08.019>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2667325821001746>.
- [25] Tal Schwartz, Guy Bartal, Shmuel Fishman, and Mordechai Segev. Transport and anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices. *Nature*, 446(7131):52–55, Mar 2007. ISSN 1476-4687. doi: 10.1038/nature05623. URL <https://doi.org/10.1038/nature05623>.
- [26] Sebabrata Mukherjee, Alexander Spracklen, Manuel Valiente, Erika Andersson, Patrik Öhberg, Nathan Goldman, and Robert R. Thomson. Experimental observation of anomalous topological edge modes in a slowly driven photonic lattice. *Nature Communications*, 8(1):13918, Jan 2017. ISSN 2041-1723. doi: 10.1038/ncomms13918. URL <https://doi.org/10.1038/ncomms13918>.
- [27] Lukas J. Maczewsky, Julia M. Zeuner, Stefan Nolte, and Alexander Szameit. Observation of photonic anomalous floquet topological insulators. *Nature Communications*, 8(1):13756, Jan 2017. ISSN 2041-1723. doi: 10.1038/ncomms13756. URL <https://doi.org/10.1038/ncomms13756>.
- [28] G. Cáceres-Aravena, L. E. F. Foa Torres, and R. A. Vicencio. Topological and flat-band states induced by hybridized linear interactions in one-dimensional photonic lattices. *Phys. Rev. A*, 102:023505, Aug 2020. doi: 10.1103/PhysRevA.102.023505. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.102.023505>.
- [29] Roman S. Savelev and Maxim A. Gorlach. Topological states in arrays of optical waveguides engineered via mode interference. *Phys. Rev. B*, 102:161112, Oct 2020. doi: 10.1103/PhysRevB.102.161112. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.102.161112>.
- [30] Falk Lederer, George I. Stegeman, Demetri N. Christodoulides, Gaetano Assanto, Moti Segev, and Yaron Silberberg. Discrete solitons in optics. *Physics Reports*, 463(1):1–126, 2008. ISSN 0370-1573. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2008.04.004>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157308001257>.

- [31] S. Rojas-Rojas, E. Barriga, C. Muñoz, P. Solano, and C. Hermann-Avigliano. Manipulation of multimode squeezing in a coupled waveguide array. *Phys. Rev. A*, 100:023841, Aug 2019. doi: 10.1103/PhysRevA.100.023841. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.100.023841>.
- [32] R. Julius, A. N. Alias, and M. S. A. Halim. Quantum squeezing in coupled waveguide networks with quadratic and cubic nonlinearity. *The European Physical Journal Plus*, 137(1):91, Jan 2022. ISSN 2190-5444. doi: 10.1140/epjp/s13360-021-02302-1. URL <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-02302-1>.
- [33] Joaquin Medina Dueñas, Gabriel O’Ryan Pérez, Carla Hermann-Avigliano, and Luis E. F. Foa Torres. Quadrature protection of squeezed states in a one-dimensional photonic topological insulator. *Quantum*, 5:526, August 2021. ISSN 2521-327X. doi: 10.22331/q-2021-08-17-526. URL <https://doi.org/10.22331/q-2021-08-17-526>.
- [34] Zhiwen Li, Siqi Hu, Qiao Zhang, Ruijuan Tian, Linpeng Gu, Yisong Zhu, Qingchen Yuan, Ruixuan Yi, Chen Li, Yan Liu, Yue Hao, Xuetao Gan, and Jianlin Zhao. Telecom-band waveguide-integrated mos2 photodetector assisted by hot electrons. *ACS Photonics*, 9(1):282–289, 2022. doi: 10.1021/acspophotonics.1c01622. URL <https://doi.org/10.1021/acspophotonics.1c01622>.
- [35] Diego Guzmán-Silva, Gabriel Cáceres-Aravena, and Rodrigo A. Vicencio. Experimental observation of interorbital coupling. *Phys. Rev. Lett.*, 127:066601, Aug 2021. doi: 10.1103/PhysRevLett.127.066601. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.127.066601>.
- [36] Christina Jörg, Gerard Queraltó, Mark Kremer, Gerard Pelegrí, Julian Schulz, Alexander Szameit, Georg von Freymann, Jordi Mompart, and Verònica Ahufinger. Artificial gauge field switching using orbital angular momentum modes in optical waveguides. *Light: Science & Applications*, 9(1):150, Aug 2020. ISSN 2047-7538. doi: 10.1038/s41377-020-00385-6. URL <https://doi.org/10.1038/s41377-020-00385-6>.
- [37] Gabriel Cáceres-Aravena, Diego Guzmán-Silva, Ignacio Salinas, and Rodrigo A. Vicencio. Controlled transport based on multiorbital aharonov-bohm photonic caging. *Phys. Rev. Lett.*, 128:256602, Jun 2022. doi: 10.1103/PhysRevLett.128.256602. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.128.256602>.
- [38] Yudong Lian, Xuan Qi, Yuhe Wang, Zhenxu Bai, Yulei Wang, and Zhiwei Lu. Oam beam generation in space and its applications: A review. *Optics and Lasers in Engineering*, 151:106923, 2022. ISSN 0143-8166. doi: <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2021.106923>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0143816621003924>.
- [39] Jaime A. Anguita, Joaquín Herreros, and Ivan B. Djordjevic. Coherent multimode oam superpositions for multidimensional modulation. *IEEE Photonics Journal*, 6(2):1–11, 2014. doi: 10.1109/JPHOT.2014.2309645.
- [40] Wei-Guan Shen, Yuan Chen, Hui-Ming Wang, and Xian-Min Jin. Oam mode conversion in a photonic chip. *Optics Communications*, 507:127615, 2022. ISSN 0030-4018. doi: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2021.127615>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401821008646>.

- [41] J. Polo, J. Mompart, and V. Ahufinger. Geometrically induced complex tunnelings for ultra-cold atoms carrying orbital angular momentum. *Phys. Rev. A*, 93:033613, Mar 2016. doi: 10.1103/PhysRevA.93.033613. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.93.033613>.
- [42] Chuang Jiang, Yanting Wu, Meiyun Qin, and Shaolin Ke. Topological bound modes with orbital angular momentum in optical waveguide arrays. *Journal of Lightwave Technology*, 41(7):2205–2211, 2023. doi: 10.1109/JLT.2022.3200139.
- [43] M. Bayer, T. Gutbrod, J. P. Reithmaier, A. Forchel, T. L. Reinecke, P. A. Knipp, A. A. Dremin, and V. D. Kulakovskii. Optical modes in photonic molecules. *Phys. Rev. Lett.*, 81:2582–2585, Sep 1998. doi: 10.1103/PhysRevLett.81.2582. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.2582>.
- [44] Maxim Mazanov, Diego Román-Cortés, Gabriel Cáceres-Aravena, Christofer Cid, Maxim A. Gorlach, and Rodrigo A. Vicencio. Photonic molecule approach to multiorbital topology. *Nano Letters*, 24(15):4595–4601, 2024. doi: 10.1021/acs.nanolett.4c00728. URL <https://doi.org/10.1021/acs.nanolett.4c00728>. PMID: 38574276.
- [45] H. Haus, W. Huang, S. Kawakami, and N. Whitaker. Coupled-mode theory of optical waveguides. *Journal of Lightwave Technology*, 5(1):16–23, January 1987. ISSN 1558-2213. doi: 10.1109/JLT.1987.1075416. URL <https://ieeexplore.ieee.org/document/1075416/?arnumber=1075416>. Conference Name: Journal of Lightwave Technology.
- [46] John D. Joannopoulos, Steven G. Johnson, Joshua N. Winn, and Robert D. Meade. *Photonic crystals: molding the flow of light*. Princeton University Press, Princeton Oxford, 2nd edition edition, 2008. ISBN 978-0-691-12456-8.
- [47] W. P. Su, J. R. Schrieffer, and A. J. Heeger. Solitons in Polyacetylene. *Physical Review Letters*, 42(25):1698–1701, June 1979. ISSN 0031-9007. doi: 10.1103/PhysRevLett.42.1698. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.42.1698>.
- [48] Natalia Malkova, Ivan Hromada, Xiaosheng Wang, Garnett Bryant, and Zhigang Chen. Observation of optical shockley-like surface states in photonic superlattices. *Opt. Lett.*, 34(11):1633–1635, Jun 2009. doi: 10.1364/OL.34.001633. URL <https://opg.optica.org/ol/abstract.cfm?URI=ol-34-11-1633>.
- [49] Tomoki Ozawa, Hannah M. Price, Alberto Amo, Nathan Goldman, Mohammad Hafezi, Ling Lu, Mikael C. Rechtsman, David Schuster, Jonathan Simon, Oded Zilberberg, and Iacopo Carusotto. Topological photonics. *Reviews of Modern Physics*, 91(1):015006, March 2019. ISSN 0034-6861, 1539-0756. doi: 10.1103/RevModPhys.91.015006. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.91.015006>.
- [50] J. Zak. Berry’s phase for energy bands in solids. *Physical Review Letters*, 62(23):2747–2750, June 1989. ISSN 0031-9007. doi: 10.1103/PhysRevLett.62.2747. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.62.2747>.
- [51] Xiao-Liang Qi and Shou-Cheng Zhang. Topological insulators and superconductors. *Rev. Mod. Phys.*, 83:1057–1110, Oct 2011. doi: 10.1103/RevModPhys.83.1057. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.83.1057>.

- [52] Monika A. M. Marte and Stig Stenholm. Paraxial light and atom optics: The optical schrödinger equation and beyond. *Phys. Rev. A*, 56:2940–2953, Oct 1997. doi: 10.1103/PhysRevA.56.2940. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.56.2940>.
- [53] Ginés Lifante Pedrola. *Beam Propagation Method for Design of Optical Waveguide Devices*. Wiley, 2015. ISBN 9781119083382. URL <https://books.google.cl/books?id=ZV6-CgAAQBAJ>.
- [54] Herman J. C. Berendsen. Nuclear magnetic resonance study of collagen hydration. *The Journal of Chemical Physics*, 36(12):3297–3305, 06 1962. ISSN 0021-9606. doi: 10.1063/1.1732460. URL <https://doi.org/10.1063/1.1732460>.
- [55] Diego Román-Cortés, Maxim Mazanov, Rodrigo A. Vicencio, and Maxim A. Gorlach. Observation of invisibility angle and flat band physics in dipolar photonic lattices. *Nano Letters*, 25(11):4291–4297, 2025. doi: 10.1021/acs.nanolett.4c05951. URL <https://doi.org/10.1021/acs.nanolett.4c05951>. PMID: 40048281.
- [56] Guinea F. Lewenstein M. Manoharan H. C. Polini, M. and Pellegrini V. Artificial honeycomb lattices for electrons, atoms and photons. *Nature Nanotech*, 8, 2013. doi: 10.1038/nnano.2013.161. URL <https://doi.org/10.1038/nnano.2013.161>.
- [57] Alex J Yuffa. Vectorizing green's identities. *Journal of Physics Communications*, 5(5):055001, may 2021. doi: 10.1088/2399-6528/abfa27. URL <https://dx.doi.org/10.1088/2399-6528/abfa27>.

## A. Ortogonalidad de los modos normales

La ecuación (2.28) permite en encontrar la condición de ortogonalidad de los modos normales del campo eléctrico  $\mathbf{E}_\nu$ . Para ello, se puede tomar producto punto a la ecuación por  $\mathbf{E}_\mu^*$  e integrar en una superficie  $S$ :

$$\iint_S (\nabla_\perp^2 + k_0^2 n^2) \mathbf{E}_\nu \cdot \mathbf{E}_\mu^* dx dy = \beta_\nu^2 \iint_S \mathbf{E}_\nu \cdot \mathbf{E}_\mu^* dx dy \quad (\text{A.1})$$

Si intercambiamos los índices  $\nu$  y  $\mu$  tenemos:

$$\iint_S (\nabla_\perp^2 + k_0^2 n^2) \mathbf{E}_\mu \cdot \mathbf{E}_\nu^* dx dy = \beta_\mu^2 \iint_S \mathbf{E}_\mu \cdot \mathbf{E}_\nu^* dx dy \quad (\text{A.2})$$

Restando las ecuaciones (A.1) y (A.2) y escogiendo modos reales:

$$\begin{aligned} (\beta_\nu^2 - \beta_\mu^2) \iint_S \mathbf{E}_\mu \cdot \mathbf{E}_\nu dx dy &= \iint_S (\mathbf{E}_\mu \cdot \nabla_\perp^2 \mathbf{E}_\nu - \mathbf{E}_\nu \cdot \nabla_\perp^2 \mathbf{E}_\mu) dx dy \\ &= \oint_{\partial S} (\mathbf{E}_\mu \times \nabla \times \mathbf{E}_\nu - \mathbf{E}_\nu \times \nabla \times \mathbf{E}_\mu) \cdot \hat{n} d\ell \\ &\quad + \oint_{\partial S} (\hat{n} \cdot \mathbf{E}_\mu) (\nabla \cdot \mathbf{E}_\nu) - (\hat{n} \cdot \mathbf{E}_\nu) (\nabla \cdot \mathbf{E}_\mu) d\ell \\ &\stackrel{\partial S \rightarrow \infty}{=} 0. \\ \therefore \iint_S \mathbf{E}_\mu \cdot \mathbf{E}_\nu^* dx dy &= 0, \quad \text{si } \nu \neq \mu, \end{aligned}$$

donde se ha usado la segunda identidad de Green vectorial [57] y que el campo eléctrico debe hacerse anularse en el infinito, aunque basta considerar que el campo sea nulo en el borde de la región  $S$ .

## **B. Código en Python para cálculo de modos normales**

## C. Código en C de BPM

```
1 // Saves into a text file the output of a gaussian light beam propagating in a
2 // 2D waveguide array
3 /*
4 Copyright (C) 2023 Diego Roman-Cortes
5
6 This program is free software: you can redistribute it and/or modify
7 it under the terms of the GNU General Public License as published by
8 the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or
9 (at your option) any later version.
10
11 This program is distributed in the hope that it will be useful,
12 but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
13 MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
14 GNU General Public License for more details.
15
16 You should have received a copy of the GNU General Public License
17 along with this program. If not, see <https://www.gnu.org/licenses/>.
18
19 contact: diego.roman.c@ug.uchile.cl
20 */
21
22 #include <stdio.h>
23 #include <stdlib.h>
24 #include <string.h>
25 #include <math.h>
26 #include <complex.h>
27 #include <fftw3.h>
28
29 int main(int argc, char* argv[]){
30     // number of points in grid
31     int Nx = 700;
32     int Ny = 700;
33     int Nz = 5000;
34
35     // parameters
36     double n0 = 1.48; // refraction index of borosilicate
37     double l0 = atof(argv[1])*1E-9; // wavelenght of light
38     double wx = 2.2E-6; // width of the waveguide
39     double wy = 3.0E-6; // height of the waveguide
40     double sigma = 7.0E-6; // width of LG-mode
41     double l = 0; // azimuthal parameter of LG-mode
42     double Lx = 350E-6; // width of the grid
43     double Ly = 350E-6; // height of the grid
44
45     double zmax = 50E-3; // propagation distance
46
47     // auxiliar variables
48     double dx = Lx/(Nx-1);
```

```

49   double dy = Ly/(Ny-1);
50   double dz = zmax/(Nz-1);
51   double k0 = 2*M_PI/l0;
52   double beta = k0 * n0;
53   double xi, yj, r, phi;
54
55 //phi = atof(argv[1])*1E-9;
56 //printf("%f", phi);
57
58 double* dn = malloc(sizeof(double) * Nx * Ny);
59
60 // 1D array setup
61 double dn1 = 9.5E-4; // contrast of first waveguide
62
63 double d1x = 17E-6; // X separation of waveguides
64 double d1y = 18.5E-6; // Y separation of waveguides
65
66 // for animation
67 int frames = 50;
68 int rem, div;
69 char filename[10];
70
71 int i, j, k;
72
73 FILE *fp1, *fp2, *fp3;
74
75 //initialization of FFTW
76
77 fftw_init_threads();
78 fftw_complex *in = (fftw_complex*) fftw_malloc(sizeof(fftw_complex) * Nx * Ny);
79 fftw_complex *aux = (fftw_complex*) fftw_malloc(sizeof(fftw_complex) * Nx * Ny);
80 fftw_complex *out = (fftw_complex*) fftw_malloc(sizeof(fftw_complex) * Nx * Ny);
81 fftw_plan_with_nthreads(8);
82
83 fftw_plan p_forward = fftw_plan_dft_2d(Nx, Ny, in, out, FFTW_BACKWARD, FFTW_PATIENT);
84 fftw_plan p_inverse = fftw_plan_dft_2d(Nx, Ny, aux, in, FFTW_FORWARD, FFTW_PATIENT);
85
86 fp1 = freopen("refractive2d.txt", "w", stdout);
87 // shape of refractive index contrast
88 for(i = 0; i < Nx; i++){
89     for(j = 0; j < Ny; j++){
90         xi = -0.5*Lx + i*dx;
91         yj = -0.5*Ly + j*dy;
92
93         for(int n=-9; n<10; n++){
94             for(int m=-9; m<10; m++){
95                 dn[i+Nx*j] += dn1 * tanh(33.0 / (exp(((xi-n*d1x)/wx)*((xi-n*d1x)/wx) + ((yj-m*d1y)/wy)*((yj-m*d1y)/wy))));
96             }
97         }
98         printf("%e\n", dn[i+Nx*j]);
}

```

```

99      }
100     printf("\n");
101   }
102   fclose(fp1);
103
104 // initial field (gaussian)
105 for(i = 0; i < Nx; i++){
106   for(j = 0; j < Ny; j++){
107     xi = -0.5*Lx + i*dx;
108     yj = -0.5*Ly + j*dy;
109     r = sqrt((xi)*(xi) + (yj)*(yj));
110     in[i+Nx*j] += (cexp(-r*r/(sigma*sigma))); // hermite-gaussian mode
111   }
112 }
113 // save the input (gaussian) in a text file
114 fp2 = freopen("00.txt", "w", stdout);
115 for(i = 0; i < Nx; i++){
116   for(j = 0; j < Ny; j++){
117     xi = -0.5*Lx + i*dx;
118     yj = -0.5*Ly + j*dy;
119     printf("%e\n", cabs(in[i+Nx*j])*cabs(in[i+Nx*j]));
120   }
121   printf("\n");
122 }
123 fclose(fp2);
124
125 // frequency indices
126 int freqidx[Nx + Ny];
127
128 for(i=0; i < Nx/2; i++){
129   freqidx[i] = i;
130 }
131 for(j=0; j < Ny/2; j++){
132   freqidx[Nx+j] = j;
133 }
134 for(i=Nx/2; i < Nx; i++){
135   freqidx[i] = i-Nx;
136 }
137 for(j=Ny/2; j < Ny; j++){
138   freqidx[Nx+j] = j-Ny;
139 }
140
141 fftw_complex *phase = (fftw_complex*) fftw_malloc(sizeof(fftw_complex) *
142 Nx * Ny);
143 for(i = 0; i < Nx; i++){
144   for(j = 0; j < Ny; j++){
145     phase[i+j*Nx] = cexp(I*dz*( (2*M_PI) * (2*M_PI) * ( (freqidx[i]/Lx)
146 ) * (freqidx[i]/Lx) + (freqidx[Nx+j]/Ly) * (freqidx[Nx+j]/Ly) /(4*beta)));
147   }
148 }
149 // main loop
150
151 for(k=1; k <= Nz; k++){
152

```

```

153     fftw_execute(p_forward); // 'out' now points towards the DFT of 'in'
154
155     for(i = 0; i < Nx*Ny; i++){
156         aux[i] = out[i] * phase[i];
157     }
158
159     fftw_execute(p_inverse); // 'in' now points towards the inverse DFT of
160     'aux'
161
162     for(i = 0; i < Nx * Ny; i++){
163         in[i] /= (Nx * Ny); // normalization of FFT
164         in[i] *= cexp(-I * k0 * (((n0+dn[i])*(n0+dn[i]))- (n0*n0)) * dz
165         /(2*n0)); // potential operator in real space
166     }
167
168     fftw_execute(p_forward); // 'out' now points towards the DFT of 'in'
169
170     for(i = 0; i < Nx*Ny; i++){
171         aux[i] = out[i] * phase[i];
172     }
173
174     fftw_execute(p_inverse); // 'in' now points towards the inverse DFT of
175     'aux'
176     for(i = 0; i < Nx * Ny; i++){
177         in[i] /= (Nx * Ny); // normalization of FFT
178     }
179
180     // save to txt
181     rem = k % (Nz/frames);
182     if(rem == 0){
183         div = k / (Nz/frames);
184         sprintf(filename, "%02d.txt", div);
185
186         fp3 = freopen(filename, "w", stdout);
187
188         for(i = 0; i < Nx; i++){
189             for(j = 0; j < Ny; j++){
190                 printf("%e\n", cabs(in[i+j*Nx])*cabs(in[i+j*Nx]));
191             }
192             printf("\n");
193         }
194         fclose(fp3);
195     }
196     fftw_cleanup_threads();
197     fftw_destroy_plan(p_forward);
198     fftw_destroy_plan(p_inverse);
199     fftw_free(in);
200     fftw_free(aux);
201     fftw_free(out);
202     fftw_free(phase);
203     free(dn);
204     return 0;
}

```

## D. Código en Python generador de hologramas

```
1 # Copyright (C) 2024 Diego Roman-Cortes
2 #
3 # This program is free software: you can redistribute it and/or modify
4 # it under the terms of the GNU General Public License as published by
5 # the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or
6 # (at your option) any later version.
7 #
8 # This program is distributed in the hope that it will be useful,
9 # but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
10 # MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
11 # GNU General Public License for more details.
12 #
13 # You should have received a copy of the GNU General Public License
14 # along with this program. If not, see <https://www.gnu.org/licenses/>.
15 #
16 # e-mail: diego.roman.c@ug.uchile.cl
17
18 import numpy as np
19 import matplotlib.pyplot as plt
20 from PIL import Image, ImageChops
21 from scipy.special import eval_genlaguerre
22 from scipy import signal
23
24 my_dpi = 120 #120
25 plt.style.use('dark_background')
26
27 WIDTH = 1920
28 HEIGHT = 1080
29
30 sigma = HEIGHT/4
31
32 sigmax = HEIGHT/2.2/4*2.2
33 sigmay = HEIGHT/5.0*1.1
34
35 x = np.linspace(-WIDTH/2, WIDTH/2, num=WIDTH)
36 y = np.linspace(-HEIGHT/2, HEIGHT/2, num=HEIGHT)
37
38 Xn, Yn = np.meshgrid(x, y, indexing='xy')
39
40 angle = -0.05
41 X = Xn*np.cos(angle) - Yn*np.sin(angle)
42 Y = Yn*np.cos(angle) + Xn*np.sin(angle)
43
44 Z = np.zeros(X.shape, dtype=complex)
45 Z += (np.exp(-((X)/sigma/1.0)**2)*np.exp(-((Y)/sigma)**2)) # any function of x
46 and y
47 Z /= np.sqrt(np.sum(np.abs(Z)**2))
48 phase = (np.angle(Z)+np.pi) * 255.0 / (2*np.pi)
```

```

49
50 fig = plt.figure(figsize=(1920/my_dpi, 1080/my_dpi), dpi=my_dpi)
51
52 plt.imsave('fase.png', phase, cmap="gray", vmin=0, vmax=255)
53 plt.close("all")
54
55 fig = plt.figure(figsize=(1920/my_dpi, 1080/my_dpi), dpi=my_dpi)
56
57 blaze = (signal.sawtooth(Xn*2.0*np.pi/5.0) + 1)/2.0*255
58
59 plt.imsave('blaze.png', blaze, cmap="gray", vmin=0, vmax=255)
60 plt.close("all")
61
62 fig = plt.figure(figsize=(1920/my_dpi, 1080/my_dpi), dpi=my_dpi)
63
64 amplitude = (np.abs(Z)**2/np.max(np.abs(Z)**2)) * blaze/255
65 amplitude /= amplitude.max()
66 amplitude *= 255
67
68
69 plt.imsave('amplitude.png', amplitude, cmap="gray", vmin=0, vmax=255)
70 plt.close("all")
71
72
73 im1 = np.array(Image.open('amplitude.png').convert('L'), dtype="uint16")
74 im2 = np.array(Image.open('fase.png').convert('L'), dtype="uint16")
75
76 imf = (((amplitude + phase) % 255))
77 im = (imf).astype(np.uint8)
78
79 plt.imsave('vortex2.png', im, cmap="gray", vmin=0, vmax=255)

```