#### REDES MULTIORBITALES BASADAS EN MOLÉCULAS FOTÓNICAS

#### TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS, MENCIÓN EN FÍSICA

DIEGO ANTONIO ROMÁN CORTÉS

PROFESOR GUÍA: RODRIGO ANDRÉS VICENCIO POBLETE

> MIEMBROS DE LA COMISIÓN: JAIME ANGUITA GARCÍA PEDRO ORELLANA

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por los proyectos Instituto Milenio para la Investigación en Óptica (MIRO) ICN17 012, Fondecyt Regular 1191205 y 1231313

Powered@NLHPC: Esta tesis fue parcialmente apoyada por la infraestructura de supercómputo del NLHPC (CCSS210001)

## Resumen

Una dedicatoria corta.

# Agradecimientos

## Tabla de Contenido

1.	oducción	1		
2.	Marco teórico			
	2.1.	Desde las ecuaciones de Maxwell a propagación de la luz en guías de onda dieléctricas	3	
	2.2.	Soluciones analíticas para guía de onda tipo losa o slab	4	
		2.2.1. Soluciones gráficas y comparación entre modos TE y TM	6	
	2.3.	Soluciones analíticas para fibra óptica circular	8	
		2.3.1. Modos TE y TM	10	
		2.3.2. Modos HE y EH	11	
	2.4.	Modos normales en guías de onda	12	
	2.5.	Teoría de modos acoplados	12	
3.	Méte	odos numéricos	16	
	3.1. COMSOL: método de elementos finitos			
	3.2.	Expansión en modos normales	16	
	3.3.	Beam Propagation Method	16	
	3.4.	Ecuaciones dinámicas discretas tipo Schrödinger	17	
4. Métodos experimentales			18	
	4.1.	Escritura de guías de onda	18	
	4.2.	Montaje de excitación láser supercontinuo	18	
	4.3.	Montaje de modulación espacial de luz	18	

		4.3.1.	Circuito óptico	18	
		4.3.2.	Generación de hologramas	19	
	4.4.	Análisi	is de imágenes	19	
5.	Mole	éculas F	otónicas	20	
6.	Acop	plamien	to interorbital SP	21	
7.	Áng	ulo mág	cico en modos P	22	
8.	Нас	es con n	nomentum orbital angular (OAM)	23	
9.	Con	clusione	es ·	25	
	Bibli	iografía		30	
Ap	éndic	ee A. O	rtogonalidad de los modos normales	31	
Ap	éndic	ce B. C	ódigo en Python para cálculo de modos normales	32	
Ap	Apéndice C. Código en C de BPM				
Ap	éndic	ee D. C	ódigo en Python generador de hologramas	34	

# Índice de Tablas

# Índice de Ilustraciones

2.1.	Forma de una guía de onda tipo losa	5
2.2.	Soluciones gráficas de los modos TE	7
2.3.	Soluciones gráficas de los modos TE	7
4.1.	Montaje SLM	18
7.1.	Barrido en ángulo que captura el paso por acoplamiento nulo	22
8.1.	Generación de OAMs e interferencia tipo Mach-Zehnder	23
8.2.	Propagación de vórtices en guías de onda	24

#### Introducción

Entre los premios Nobel en Física de la última década [1] se encuentran varios que están estrechamente ligados a la óptica: por la generación de pulsos de luz ultra cortos (femtosegundos [2] y luego attosegundos [3–5]), por experimentos con fotones entrelazados [6–8], por la ideación de pinzas ópticas [9] y por la invención de luces LED [10–12]. El estudio del comportamiento de la luz en diversos contextos ha permitido el posterior desarrollo tecnológico con aplicaciones industriales, en medicina, en comunicaciones e incluso militares. Una aplicación cotidiana es la fibra óptica, que actúa como una guía de onda para la luz y actualmente es el principal medio de transmisión de Internet en el mundo [13, 14].

Numerosos de estos avances en el control de las propiedades de transporte de la luz se han visto propiciados por la técnica de escritura de guías de onda por láser de femtosegundos, la cual ha permitido la fabricación de redes fotónicas de variada índole [15–23]. Su importancia radica no sólo en emular situaciones de la física del sólido, tales como oscilaciones de Bloch [24], localización de Anderson [25], estados de banda plana [17–20] o topología [26–29], sino que también en el estudio de fenómenos ópticos incluyendo no-linealidad tipo Kerr y su uso en la formación de solitones [30], la posible propagación de luz cuántica [31–33], o su compatibilidad con la transmisión de información en la industria de las telecomunicaciones [34].

El enfoque de este proyecto será el estudio de redes fotónicas multiorbitales. Por ello será crucial incorporar la técnica de acoplamiento interorbital, que consiste en sintonizar las constantes de propagación de el modo fundamental de una guía monomodal (S) con el primer modo guiado excitado de una guía dimodal (P) mediante la calibración adecuada de las potencias de escritura, que inducen diferencias en los contrastes generados por la técnica de escritura por láser femtosegundos [35].

El llamado acoplamiento SP ha permitido el estudio de redes que presentan flujo magnético efectivo  $\Phi = \pi$ , el cual permite el transporte controlado de la luz [36, 37]. Una aplicación directa de este fenómeno es la generación de guías de onda que admitan modos guiados de luz con momentum angular orbital (OAM) y la codificación de su carga topológica  $\ell$  como medio para transmitir información [38, 39]. Se ha reportado a la fecha sólo la propagación de OAM mediante de redes fotónicas que presevan simetría  $C_3$  [40, 41]. Sin embargo, el acoplamiento entre modos OAM en una red fotónica permitiría la generación de flujos magnéticos distintos de 0 o  $\pi$ , lo que se reflejaría en una direccionalidad dependiente de la circulación propagante [42, 43]. Para ello será necesario

introducir el concepto de "moléculas fotónicas" [44] y estudiar su aplicación en redes fotónicas [45].

#### Marco teórico

# 2.1. Desde las ecuaciones de Maxwell a propagación de la luz en guías de onda dieléctricas

Esta tesis estudia el comportamiento de luz láser de baja potencia (1 mW de potencia de salida) propagada en guías de onda dieléctricas escritas dentro de una muestra de borosilicato. Es por ello que se supone un medio lineal no magnético sin fuentes de carga y de corriente libres. Las ecuaciones de Maxwell (SI) en este régimen son:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \tag{2.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\tag{2.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{2.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},\tag{2.4}$$

donde **E**, **B**, **D** =  $\varepsilon$ (**r**)**E** y **H** = **B**/ $\mu_0$  son los campos eléctrico, campo de densidad de flujo magnético, campo desplazamiento eléctrico y campo magnético, respectivamente. Las guías de onda son invariantes en la dirección de propagación z, por lo que el índice de refracción  $n = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$  dependerá de las coordenadas transversales al eje óptico, es decir,  $n \equiv n(x, y) = n_0 + \Delta n(x, y)$ , con  $n_0 = 1.47$  el índice de refracción del borosilicato y  $\Delta n \sim 10^{-5} - 10^{-3}$  el contraste de las guías de onda.

Aplicando rotor por la izquierda a la ecuación de Faraday-Lenz (2.2), usando la ecuación de Ampère-Maxwell (2.4) y asumiendo una solución temporal harmónica proporcional a  $e^{-i\omega t}$  se tiene:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = -\frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = n^2 k_0^2 \mathbf{E}, \tag{2.5}$$

donde  $k_0 \equiv \omega/c$  es el número de onda en el vacío. Notemos que, por identidad de cálculo vectorial, se tiene que  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ , y usando la ley de Gauss (2.1) se deduce que  $\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla n^2}{n^2} \cdot \mathbf{E}$ .

Con esto, se obtiene la ecuación

$$\left(\nabla^2 + k_0^2 n^2\right) \mathbf{E} = -\nabla \left(\frac{\nabla n^2}{n^2} \cdot \mathbf{E}\right). \tag{2.6}$$

Análogamente para **H**, es posible aplicar rotor a la ecuación de Ampère-Maxwell (2.4) y usar la ecuación de Faraday-Lenz (2.2) en conjunto con la divergencia nula de **B** (2.3) y por consiguiente de **H**:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = -i\omega \nabla \times \left(\varepsilon_0 n^2 \mathbf{E}\right) = -i\omega \varepsilon_0 \left(n^2 \nabla \times \mathbf{E} + \nabla n^2 \times \mathbf{E}\right),$$

$$\nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{H}\right) - \nabla^2 \mathbf{H} = k_0^2 n^2 \mathbf{H} - i\omega \varepsilon_0 \nabla n^2 \times \mathbf{E}.$$

La ecuación (2.6) análoga para **H** es, por consiguiente:

$$\left(\nabla^2 + k_0^2 n^2\right) \mathbf{H} = i\omega \varepsilon_0 \nabla n^2 \times \mathbf{E}.$$
 (2.7)

Será útil separa las componentes longitudinales y transversales de los campos, asumiendo una dependencia del tipo onda plana  $e^{ik_zz}$  en z. Separando  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\perp} + \hat{\mathbf{z}}E_z$  y  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\perp} + \hat{\mathbf{z}}H_z$ ,  $\nabla_{\perp} \equiv -\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla)$ , las ecuaciones de Maxwell que involucran rotores se escriben como

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp} + \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_{\perp}) + \nabla_{\perp} \times (\hat{\mathbf{z}} E_z) = i\omega \mu_0 (\mathbf{H}_{\perp} + \hat{\mathbf{z}} H_z), \tag{2.8}$$

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{H}_{\perp} + \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_{\perp}) + \nabla_{\perp} \times (\hat{\mathbf{z}} H_z) = -i\omega \varepsilon_0 n^2 (\mathbf{E}_{\perp} + \hat{\mathbf{z}} E_z). \tag{2.9}$$

Tomando producto cruz en la dirección  $\hat{\mathbf{z}}$  a las ecuaciones (2.8) y (2.9) y considerando dependencia en z del tipo  $e^{ik_zz}$ , se puede expresar  $E_z$  y  $H_z$  en función de  $\mathbf{E}_{\perp}$  y  $\mathbf{H}_{\perp}$  para luego invertir las relaciones:

$$i\nabla_{\perp}E_{z} = k_{z}\mathbf{E}_{\perp} + \omega\mu_{0}\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_{\perp}, \qquad i\nabla_{\perp}H_{z} = k_{z}\mathbf{H}_{\perp} - \omega\varepsilon_{0}n^{2}\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_{\perp},$$

$$i\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp}H_{z} = k_{z}\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_{\perp} + \omega\varepsilon_{0}n^{2}\mathbf{E}_{\perp}, \qquad i\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp}E_{z} = k_{z}\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_{\perp} - \omega\mu_{0}\mathbf{H}_{\perp},$$

$$\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_{\perp} = i\frac{(\omega\varepsilon_{0}n^{2}\nabla_{\perp}E_{z} - \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp}H_{z}k_{z})}{k_{0}^{2}n^{2} - k_{z}^{2}}, \qquad \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_{\perp} = -i\frac{(k_{z}\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp}E_{z} + \omega\mu_{0}\nabla_{\perp}H_{z})}{k_{0}^{2}n^{2} - k_{z}^{2}},$$

$$\mathbf{H}_{\perp} = \frac{i}{k_{0}^{2}n^{2} - k_{z}^{2}} \left[ k_{z}\nabla_{\perp}H_{z} + \omega\varepsilon_{0}n^{2}\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp}E_{z} \right], \qquad \mathbf{E}_{\perp} = \frac{i}{k_{0}^{2}n^{2} - k_{z}^{2}} \left[ k_{z}\nabla_{\perp}E_{z} - \omega\mu_{0}\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp}H_{z} \right].$$

$$(2.10)$$

#### 2.2. Soluciones analíticas para guía de onda tipo losa o slab

El sistema más simple que se puede estudiar es una guía de onda tipo losa, cuya forma analítica para el constraste n(x) es la siguiente, con  $n_1 > n_0$ :

$$n(x) = \begin{cases} n_1, & |x| \le a \\ n_0, & |x| > a \end{cases}$$

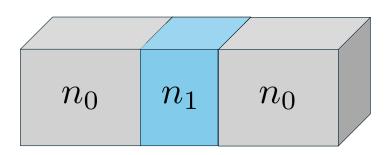


Figura 2.1: Forma de una guía de onda tipo losa. En las direcciones  $\hat{y}$  (vertical) y  $\hat{z}$  (hacia dentro de la página) la estructura es invariante.

Dado que  $\nabla n^2 = \mathbf{0}$  para  $|x| \neq a$ , los lados derechos de las ecuaciones (2.6) y (2.7) son de tipo Helmholz. Definiendo  $\Psi = \{E_z, H_z\}$ :

$$(\nabla_{\perp}^{2} + k_{0}^{2}n^{2} - k_{z}^{2})\Psi = \frac{d^{2}\Psi}{dx^{2}} + (k_{0}^{2}n^{2} - k_{z}^{2})\Psi = 0.$$

Dado que n(x) = n(-x), las soluciones Ψ deben ser pares o impares. Para encontrar soluciones cuya energía esté localizada en la guía de onda y que decaiga fuera de ella, se impondrá  $k_0^2 n_0^2 \le k_z^2 \le k_0^2 n_1^2$ . Se hace natural definir  $\alpha^2 \equiv k_0^2 n_1^2 - k_z^2$  y  $\beta^2 \equiv k_z^2 - k_0^2 n_0^2$ . Con todo esto,

$$\Psi_s = \begin{cases} \Psi_{s1} \cos(\alpha x), & |x| \le a \\ \Psi_{s0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}$$

$$\nabla_{\perp} \Psi_{s} = \begin{cases} -\hat{\mathbf{x}} \alpha \Psi_{s1} \sin(\alpha x), & |x| \leq a \\ -\hat{\mathbf{x}} \frac{|x|}{s} \beta \Psi_{s0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}$$

Por lo que las componentes verticales  $E_y$  y  $H_y$  pares se escriben debido a la ecuación (2.10) como:

$$E_{y} = \frac{i}{k_{0}^{2}n^{2} - k_{z}^{2}} \begin{cases} \omega\mu_{0}\alpha H_{s1}\sin(\alpha x), & |x| \leq a \\ \omega\mu_{0}\frac{|x|}{x}\beta H_{s0}e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases} \qquad H_{y} = \frac{i}{k_{0}^{2}n^{2} - k_{z}^{2}} \begin{cases} -\omega\varepsilon_{0}n^{2}\alpha E_{s1}\sin(\alpha x), & |x| \leq a \\ -\omega\varepsilon_{0}n^{2}\frac{|x|}{x}\beta E_{s0}e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}$$

Por otro lado, las soluciones impares tienen la forma

$$\Psi_a = \begin{cases} \Psi_{a1} \sin(\alpha x), & |x| \le a \\ \Psi_{a0} e^{-\beta |x|}, & |x| > a \end{cases}$$

$$\nabla_{\perp} \Psi_{a} = \begin{cases} \hat{\mathbf{x}} \alpha \Psi_{a1} \cos(\alpha x), & |x| \leq a \\ -\hat{\mathbf{x}} \frac{|x|}{x} \beta \Psi_{a0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}$$

Por lo que  $E_y$  y  $H_y$  se escriben como:

$$E_{y} = \frac{i}{k_{0}^{2}n^{2} - k_{z}^{2}} \begin{cases} -\omega\mu_{0}\alpha H_{a1}\cos(\alpha x), & |x| \leq a \\ \omega\mu_{0}\frac{|x|}{x}\beta H_{a0}e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases} \qquad H_{y} = \frac{i}{k_{0}^{2}n^{2} - k_{z}^{2}} \begin{cases} \omega\varepsilon_{0}n^{2}\alpha E_{a1}\cos(\alpha x), & |x| \leq a \\ -\omega\varepsilon_{0}n^{2}\frac{|x|}{x}\beta E_{a0}e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}$$

Imponiendo continuidad de las componentes tangenciales  $E_y$ ,  $E_z$ ,  $H_y$  y  $H_z$ ; y tratando los casos par e impar por separado:

$$E_{s1}\cos(\alpha a) = E_{s0}e^{-\beta a}, \qquad E_{a1}\sin(\alpha a) = E_{a0}e^{-\beta a}, \ H_{s1}\cos(\alpha a) = H_{s0}e^{-\beta a}, \qquad H_{a1}\sin(\alpha a) = H_{a0}e^{-\beta a}, \ n_1^2 E_{s1}\sin(\alpha a)/\alpha = -n_0^2 E_{s0}e^{-\beta a}/\beta, \qquad n_1^2 E_{a1}\cos(\alpha a)/\alpha = n_0^2 E_{a0}e^{-\beta a}/\beta, \ H_{s1}\sin(\alpha a)/\alpha = -H_{s0}e^{-\beta a}/\beta, \qquad H_{a1}\cos(\alpha a)/\alpha = H_{a0}e^{-\beta a}/\beta.$$

Buscando soluciones no triviales se tiene que:

$$\left[\frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a}\right] \left[n_0^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + n_1^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a}\right] = 0, \quad \left[\frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a}\right] \left[n_0^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - n_1^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a}\right] = 0.$$

Se distinguirá dos tipos de condiciones:

$$\frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} = 0, \qquad n_0^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + n_1^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} = 0,$$
 (modos TM) 
$$\frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} = 0, \qquad n_0^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - n_1^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} = 0.$$

Asumiendo  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $k_z$  conocidos, las amplitudes deben cumplir las relaciones:

$$E_{s1}\left[n_0^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + n_1^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a}\right] = 0, \qquad E_{a1}\left[n_0^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - n_1^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a}\right] = 0,$$

$$H_{s1}\left[\frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a}\right] = 0, \qquad H_{a1}\left[\frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a}\right] = 0.$$

Las ecuaciones superiores imponen que  $E_1 = 0$  cuando se satisface la condición de modos TE. Análogamente, las ecuaciones inferiores imponen  $H_1 = 0$  en el caso de modos TM. Efectivamente, los nombres TE y TM se han puesto por transversal eléctrico y transversal magnético, respectivamente. Un corolario para los modos TE es que  $E_z = E_x = 0$  por lo que la polarización del campo eléctrico será exclusivamente en la dirección  $\hat{\bf y}$ . Sólo un haz polarizado en  $\hat{\bf x}$  podría excitar un modo TM, por lo que en un experimento se debe tener esto presente.

#### 2.2.1. Soluciones gráficas y comparación entre modos TE y TM

Usando las dos ecuaciones de modos TE junto a la restricción  $(\alpha a)^2 + (\beta a)^2 = k_0^2 a^2 (n_1^2 - n_0^2) \equiv V^2$  es posible obtener soluciones gráficas para las constantes de propagación  $k_z$  a partir de las intersecciones  $(\alpha a, \beta a)$ .

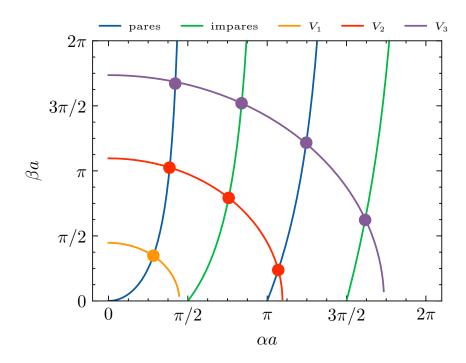


Figura 2.2: Soluciones gráficas de los modos TE. A mayor contraste  $\Delta n = n_1 - n_0$ , mayor cantidad de modos guiados soporta la guía de onda.

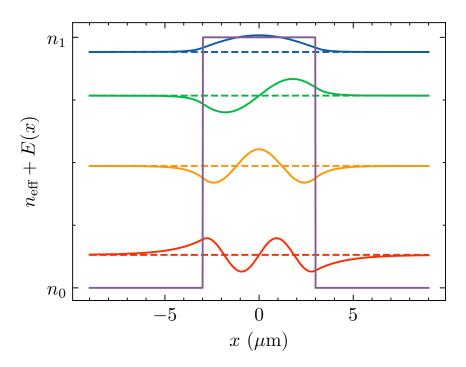


Figura 2.3: Soluciones gráficas de los modos TE. A mayor contraste  $\Delta n = n_1 - n_0$ , mayor cantidad de modos guiados soporta la guía de onda.

La condición de corte (*cutoff*) en guías de onda es equivalente a que la energía deje de decaer en la región |x| > a, es decir, se debe cumplir que  $\beta = 0$ . Los modos simétricos o pares cumplen esta

condición para  $\sin(\alpha a) = 0$ , lo que implica que  $\alpha = m\pi/a$ , con m entero. En particular, considerando m = 0 y barriendo  $n_1 \to n_0$ , siempre existen al menos dos modos, uno TE y uno TM hasta que  $n_1 < n_0$ . Los modos antisimétricos o impares deben cumplir por su parte que  $\cos(\alpha a) = 0$ , lo que implica que  $\alpha = (m\pi \pm \pi/2)/a$ . De esta condición se deduce que el primer par de modos exictados (m = 1) existe siempre que  $\lambda^2 \le 4(2a)^2(n_1^2 - n_0^2)$ .

#### 2.3. Soluciones analíticas para fibra óptica circular

En la sección anterior se estudió el sistema más sencillo en el que se puede hablar de guías de onda dieléctricas. El siguiente paso en complejidad consiste en guías de onda circulares. Para ello, se considerará que el índice de refracción varía radialmente según

$$n(\rho) = \begin{cases} n_1, & \text{si } \rho \le a \\ n_0, & \text{si } \rho > a \end{cases},$$

donde la tupla  $(\rho, \phi, z)$  define las coordenadas cilíndricas a usar, más apropiadas para este problema. Al considerar las componentes longitudinales  $\Psi = \{E_z, H_z\}$  del campo eléctrico y magnético, respectivamente, usando separación de variables  $\Psi = R(\rho)\Phi(\phi)e^{ik_zz}$  las ecuaciones (2.6) y (2.7) toman la forma:

$$\begin{split} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial^2}{\rho^2 \partial \phi^2} + \left( k_0^2 n^2 - k_z^2 \right) \right] R(\rho) \Phi(\phi) &= 0 \\ \rho^2 \frac{d^2 R}{R d \rho^2} + \rho \frac{d R}{R d \rho} + \rho^2 \left( k_0^2 n^2 - k_z^2 \right) + \underbrace{\frac{d^2 \Phi}{\Phi d \phi^2}}_{-\ell^2} &= 0 \\ \therefore \Phi(\phi) &= A e^{i\ell \phi} \end{split}$$

Imponiendo condiciones de periodicidad  $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$ , se tiene necesariamente que  $\ell$  es un número entero. Por consiguiente, la ecuación para  $R(\rho)$  es de tipo Bessel entera, por lo que buscando soluciones tales que  $k_0^2 n_0^2 < \beta_z^2 < k_0^2 n_1^2$  y definiendo nuevamente  $\alpha^2 \equiv k_0^2 n_1^2 - k_z^2$  y  $\beta^2 \equiv k_z^2 - k_0^2 n_0^2$  se tiene:

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(k_0^2 n^2 - k_z^2 - \frac{\ell^2}{\rho^2}\right) R = 0$$

$$\therefore R(\rho) = \begin{cases} C_1 J_{\ell}(\alpha \rho) + D_1 Y_{\ell}(\alpha \rho), & \text{si } \rho \leq a \\ C_2 K_{\ell}(\beta \rho) + D_2 I_{\ell}(\beta \rho), & \text{si } \rho > a \end{cases}.$$

Necesariamente se debe imponer  $D_1 = D_2 = 0$  para que la solución sea finita para  $\rho = 0$  y para  $\rho \to +\infty$ . Es decir, la parte radial de la solución es

$$R(\rho) = \begin{cases} C_1 J_{\ell}(\alpha \rho), & \text{si } \rho \le a \\ C_2 K_{\ell}(\beta \rho), & \text{si } \rho > a \end{cases}.$$

En este caso, para imponer las condiciones de continuidad en  $\mathbf{E}_{\parallel} = E_{\phi}\hat{\phi} + E_{z}\hat{\mathbf{z}}$  y  $\mathbf{H}_{\parallel} = H_{\phi}\hat{\phi} + H_{z}\hat{\mathbf{z}}$ , se hace necesario relacionar el resto de componentes del campo con  $E_{z}$  y  $H_{z}$  para lo cual se usará la ecuación (2.10).

Como

$$\nabla_{\perp}\Psi = \begin{cases} \Psi_0^1 \left[ \hat{\boldsymbol{\rho}} \alpha J_\ell'(\alpha \rho) + i \hat{\boldsymbol{\phi}} \ell J_\ell(\alpha \rho) / \rho \right] e^{i \ell \phi} e^{i k_z z}, & \text{si } \rho \leq a \\ \Psi_0^0 \left[ \hat{\boldsymbol{\rho}} \beta K_\ell'(\beta \rho) + i \hat{\boldsymbol{\phi}} \ell K_\ell(\alpha \rho) / \rho \right] e^{i \ell \phi} e^{i k_z z}, & \text{si } \rho > a \end{cases}$$

Separando por componentes y reemplazando:

$$\begin{split} H_z &= e^{i\ell\phi} e^{ik_z z} \begin{cases} H_0^1 J_\ell(\alpha\rho), & \text{si } \rho \leq a \\ H_0^0 K_\ell(\beta\rho), & \text{si } \rho > a \end{cases} \\ H_r &= \frac{i e^{i\ell\phi} e^{ik_z z}}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} k_z \alpha H_0^1 J_\ell'(\alpha\rho) - i \omega \varepsilon_0 n^2 \ell E_0^1 J_\ell(\alpha\rho)/\rho, & \text{si } \rho \leq a \\ k_z \beta H_0^0 K_\ell'(\beta\rho) - i \omega \varepsilon_0 n^2 \ell E_0^0 K_\ell(\beta\rho)/\rho, & \text{si } \rho > a \end{cases} \\ H_\phi &= \frac{i e^{i\ell\phi} e^{ik_z z}}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} i k_z \ell H_0^1 J_\ell(\alpha\rho)/\rho + \omega \varepsilon_0 n^2 \alpha E_0^1 J_\ell'(\alpha\rho), & \text{si } \rho \leq a \\ i k_z \ell H_0^0 K_\ell(\beta\rho)/\rho + \omega \varepsilon_0 n^2 \beta E_0^0 K_\ell'(\beta\rho), & \text{si } \rho > a \end{cases} \\ E_z &= e^{i\ell\phi} e^{ik_z z} \begin{cases} E_0^1 J_\ell(\alpha\rho), & \text{si } \rho \leq a \\ E_0^0 K_\ell(\beta\rho), & \text{si } \rho > a \end{cases} \\ E_r &= \frac{i e^{i\ell\phi} e^{ik_z z}}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} k_z \alpha E_0^1 J_\ell'(\alpha\rho) + i \omega \mu_0 \ell H_0^1 J_\ell(\alpha\rho)/\rho, & \text{si } \rho \leq a \\ k_z \beta E_0^0 K_\ell'(\beta\rho) + i \omega \mu_0 \ell H_0^0 K_\ell(\beta\rho)/\rho, & \text{si } \rho > a \end{cases} \\ E_\phi &= \frac{i e^{i\ell\phi} e^{ik_z z}}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} i k_z \ell E_0^1 J_\ell(\alpha\rho)/\rho - \omega \mu_0 \alpha H_0^1 J_\ell'(\alpha\rho), & \text{si } \rho \leq a \\ i k_z \ell E_0^0 K_\ell(\beta\rho)/\rho - \omega \mu_0 \beta H_0^0 K_\ell'(\beta\rho), & \text{si } \rho > a \end{cases} \end{split}$$

Ahora sí, imponiendo continuidad:

$$H_0^1 J_\ell(\alpha a) = H_0^0 K_\ell(\beta a) \tag{2.11}$$

$$E_0^1 J_\ell(\alpha a) = E_0^0 K_\ell(\beta a) \tag{2.12}$$

$$-\omega\varepsilon_0 n_1^2 \alpha \beta^2 a E_0^1 J_\ell'(\alpha a) - ik_z \ell \beta^2 H_0^1 J_\ell(\alpha a) = \omega\varepsilon_0 n_0^2 \alpha^2 \beta a E_0^0 K_\ell'(\beta a) + ik_z \ell \alpha^2 H_0^0 K_\ell(\beta a)$$
 (2.13)

$$-ik_z\ell\beta^2 E_0^1 J_\ell(\alpha a) + \omega \mu_0 \alpha \beta^2 a H_0^1 J_\ell'(\alpha a) = ik_z\ell\alpha^2 E_0^0 K_\ell(\beta a) - \omega \mu_0 \alpha^2 \beta a H_0^0 K_\ell'(\beta a)$$
(2.14)

Buscando soluciones no triviales:

$$\begin{vmatrix} K_{\ell}(\beta a) & -J_{\ell}(\alpha a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{\ell}(\beta a) & -J_{\ell}(\alpha a) \\ ik_{z}\ell\alpha^{2}K_{\ell}(\beta a) & ik_{z}\ell\beta^{2}J_{\ell}(\alpha a) & \omega\varepsilon_{0}n_{0}^{2}\alpha^{2}\beta aK'_{\ell}(\beta a) & \omega\varepsilon_{0}n_{1}^{2}\alpha\beta^{2}aJ'_{\ell}(\alpha a) \\ \omega\mu_{0}\alpha^{2}\beta aK'_{\ell}(\beta a) & \omega\mu_{0}\alpha\beta^{2}aJ'_{\ell}(\alpha a) & -ik_{z}\ell\alpha^{2}K_{\ell}(\beta a) & -ik_{z}\ell\beta^{2}J_{\ell}(\alpha a) \end{vmatrix} = 0$$

Finalmente, la ecuación trascendental que satifacen  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $k_z$  es:

$$\left(\frac{J'_{\ell}(\alpha a)}{\alpha a J_{\ell}(\alpha a)} + \frac{K'_{\ell}(\beta a)}{\beta a K_{\ell}(\beta a)}\right) \left(n_1^2 \frac{J'_{\ell}(\alpha a)}{\alpha a J_{\ell}(\alpha a)} + n_0^2 \frac{K'_{\ell}(\beta a)}{\beta a K_{\ell}(\beta a)}\right) = \ell^2 \left[\left(\frac{1}{\alpha a}\right)^2 + \left(\frac{1}{\beta a}\right)^2\right]^2 \left(\frac{k_z}{k_0}\right)^2$$
(2.15)

Dado que, en principio, los valores de  $k_z$  ya están determinados por la ecuación anterior, es posible obtener dos relaciones entre  $H_0^1$  y  $E_0^1$ :

$$\frac{E_0^1}{H_0^1} = -\frac{ik_z\ell}{\omega\varepsilon_0} \left[ \left( \frac{1}{\alpha a} \right)^2 + \left( \frac{1}{\beta a} \right)^2 \right] \left[ n_1^2 \frac{J_\ell'(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + n_0^2 \frac{K_\ell'(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right]^{-1}$$
(2.16)

$$\frac{H_0^1}{E_0^1} = \frac{ik_z \ell}{\omega \mu_0} \left[ \left( \frac{1}{\alpha a} \right)^2 + \left( \frac{1}{\beta a} \right)^2 \right] \left[ \frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right]^{-1}$$
(2.17)

#### 2.3.1. Modos TE y TM

El caso más sencillo de estudiar es imponiendo  $\ell = 0$ . La ecuación (2.15) implica:

$$\frac{J_0'(\alpha a)}{\alpha a J_0(\alpha a)} + \frac{K_0'(\beta a)}{\beta a K_0(\beta a)} = 0, \quad \text{(modos TE)}$$

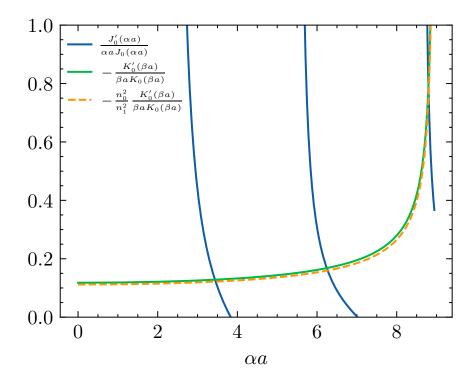
$$n_1^2 \frac{J_0'(\alpha a)}{\alpha a J_0(\alpha a)} + n_0^2 \frac{K_0'(\beta a)}{\beta a K_0(\beta a)} = 0, \quad \text{(modos TM)}$$

De las ecuaciones (2.16) y (2.17) es directo notar que la condiciones de modos transversales impiden que el denominador se anule, lo que permite afirmar sin ambigüedad que las componentes longitudinales se hacen cero para  $\ell=0$  en los casos respectivos:  $H_0^1=0$  para TE y  $E_0^1=0$  para TM.

En este caso, las condiciones de corte se dan cuando los términos  $\frac{J_0'(\alpha a)}{\alpha a J_0(\alpha a)}$  y  $\frac{K_0'(\beta a)}{\beta a K_0(\beta a)}$  divergen simultáneamente. Esto ocurre cuando  $\alpha a = V$  y  $J_0(\alpha a) = 0$ . Denotando  $x_{0,m} = 2.405$ , 5.520, 8.654,  $\cdots$  al m-ésimo cero de la funcion  $J_0(x)$ , la longitud de onda de corte está dada por

$$(\lambda_c)_{0,m} = 2\pi a \frac{\sqrt{n_1^2 - n_0^2}}{x_{0,m}}, \quad \text{(modos TE y TM)}.$$
 (2.18)

Contrario al caso de la guía de onda tipo losa, en fibras ópticas se hace necesario estar bajo un umbral de corte máximo  $(\lambda_c)_{0,1}$  no nulo para que los modos TE o TM existan.



#### 2.3.2. Modos HE y EH

Interpretando la ecuación (2.15) como una cuadrática en  $J'_{\ell}(\alpha a)/\alpha a J_{\ell}(\alpha a)$ :

$$\frac{J_\ell'(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} = -\left(\frac{n_1^2+n_0^2}{2n_1^2}\right) \frac{K_\ell'(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \pm \sqrt{\left(\frac{n_1^2-n_0^2}{2n_1^2}\right)^2 \left(\frac{K_\ell'(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)}\right)^2 + \left(\frac{k_z \ell}{k_0 n_1}\right)^2 \left[\left(\frac{1}{\alpha a}\right)^2 + \left(\frac{1}{\beta a}\right)^2\right]^2}$$

Haciendo uso de las relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel  $J_{\ell}(r)$ , es posible obtener dos tipos de soluciones llamadas HE y EH:

$$\frac{J_{\ell-1}(\alpha a)}{\alpha a J_{\ell}(\alpha a)} = -\left(\frac{n_1^2 + n_0^2}{2n_1^2}\right) \frac{K_{\ell}'(\beta a)}{\beta a K_{\ell}(\beta a)} + \frac{\ell}{(\alpha a)^2} - \sqrt{\Delta}, \quad \text{(modos HE)}$$
 (2.19)

$$\frac{J_{\ell+1}(\alpha a)}{\alpha a J_{\ell}(\alpha a)} = \left(\frac{n_1^2 + n_0^2}{2n_1^2}\right) \frac{K_{\ell}'(\beta a)}{\beta a K_{\ell}(\beta a)} + \frac{\ell}{(\alpha a)^2} - \sqrt{\Delta}, \quad \text{(modos EH)}$$
 (2.20)

$$\Delta = \left(\frac{n_1^2 - n_0^2}{2n_1^2}\right)^2 \left(\frac{K_\ell'(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)}\right)^2 + \left(\frac{k_z \ell}{k_0 n_1}\right)^2 \left[\left(\frac{1}{\alpha a}\right)^2 + \left(\frac{1}{\beta a}\right)^2\right]^2$$

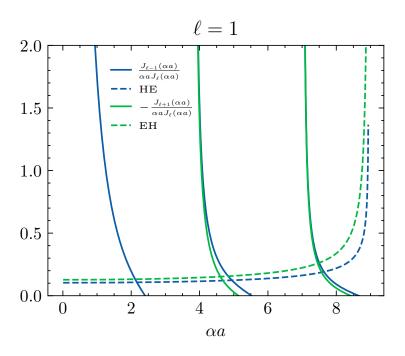
Para  $\ell=0$ , se recuperan las relaciones obtenidas para los modos  $\text{TE}_m$  (HE<sub>0m</sub>) y TM<sub>m</sub> (EH<sub>0m</sub>). Para  $\ell\neq 0$  se debe tener poner atención a las asíntotas de las funciones de Bessel cuando  $\beta a\to 0$  y  $\alpha a\to V$ .

$$\frac{K'_{\ell}(x)}{xK_{\ell}(x)} = -\frac{K_{\ell-1}(x)}{xK_{\ell}(x)} - \frac{\ell}{x^2} \approx \begin{cases} \frac{-\ln(x/2) - \gamma}{1/x} - \frac{1}{x^2} & \text{si } \ell = 1\\ \frac{1}{2(\ell-1)} - \frac{\ell}{x^2} & \text{si } \ell > 1 \end{cases}$$

El caso  $\ell=1$  es de especial interés. La *m*-ésima asíntota estará determinada por el *m*-ésimo cero de  $J_1(x)$ . Por lo que, debido a un razonamiento similar al caso  $\ell=0$ , las condiciones de corte son

$$(\lambda_c)_{1,m} = 2\pi a \frac{\sqrt{n_1^2 - n_0^2}}{x_{1,m}}$$
 (modos HE)<sub>1m</sub>  
 $(\lambda_c)_{1,m} = 2\pi a \frac{\sqrt{n_1^2 - n_0^2}}{x_{1,m+1}}$  (modos EH)<sub>1m</sub>

con  $x_{1m} = 0$ , 3.832, 7.016, 10.173, .... En particular, el modo HE<sub>11</sub> siempre existe.



#### 2.4. Modos normales en guías de onda

Si la estructura de guías de onda no varía en la dirección z, el campo eléctrico se puede expresar como una onda plana del tipo  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{\nu}(x,y)e^{i\beta_{\nu}z}$ . A su vez, es conveniente separar el Laplaciano como  $\nabla^2 \equiv \nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ . De esta forma, el lado izquierdo de las ecuaciones (2.6), se desarrolla como:

$$(\nabla^{2} + k_{0}^{2}n^{2})\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \left(\nabla_{\perp}^{2} + \frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}} + k_{0}^{2}n^{2}\right)\mathbf{E}_{\nu}(x, y)e^{i\beta_{\nu}z}$$

$$= e^{i\beta_{\nu}z}\nabla_{\perp}^{2}\mathbf{E}_{\nu} - \beta_{\nu}^{2}\mathbf{E}_{\nu}e^{i\beta_{\nu}z} + k_{0}^{2}n^{2}\mathbf{E}_{\nu}e^{i\beta_{\nu}z}$$

$$= \left[\nabla_{\perp}^{2} + (k_{0}^{2}n^{2} - \beta_{\nu}^{2})\right]\mathbf{E}_{\nu}e^{i\beta_{\nu}z}$$

$$\approx 0$$

$$\therefore \left[\nabla_{\perp}^{2} + k_{0}^{2}n^{2}(x, y)\right]\mathbf{E}_{\nu}(x, y) = \beta_{\nu}^{2}\mathbf{E}_{\nu}(x, y), \tag{2.21}$$

donde se ha usado la aproximación de guiaje débil para anular el lado de derecho de la ecuación (2.6). Notemos que la ecuación (2.21) es un problema de autovalores  $\beta_{\nu}^2$  y autofunciones  $\mathbf{E}_{\nu}(x,y)$ , las cuales son ortogonales y forman una base completa (ver apéndice A). En principio, la forma espacial del índice de refracción n(x,y) puede ser arbitraria siempre y cuando que se satisfaga la condición de guiaje débil.

#### 2.5. Teoría de modos acoplados

Para el estudio de redes fotónicas, es conveniente utilizar herramientas similares a las de la Física del Sólido en lo que respecta a potenciales periódicos. En particular, se puede suponer que los

modos guiados de una guía de onda están fuertemente ligados a ella (enlace fuerte o *Tight Binding*), incluso en presencia de otras guías de onda. Es decir, se supondrá que el  $\nu$ -ésimo modo de la m-ésima guía de onda satisface para toda distancia de propagación z la ecuación (2.21), donde el índice de refracción total se puede descomponer en una suma periódica de guías de onda  $n^2(\mathbf{r}) = \sum_m n_m^2(\mathbf{r})$ . Entonces, descomponiendo el campo eléctrico total de la forma  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{\nu,m} \mathbf{E}_{\nu,m}(x,y) a_{\nu,m}(z) e^{i\beta_{\nu,m}z}$  y reemplazando en la ecuación (2.6) se tiene:

$$(\nabla^{2} + k_{0}^{2}n^{2})\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \left(\nabla_{\perp}^{2} + \frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}} + k_{0}^{2}n^{2}\right) \sum_{\nu,m} \mathbf{E}_{\nu,m}(x,y) a_{\nu,m}(z) e^{i\beta_{\nu,m}z}$$

$$= \sum_{\nu,m} \left[ a_{\nu,m} e^{i\beta_{\nu,m}z} \left(\nabla_{\perp}^{2} + k_{0}^{2}n^{2}\right) \mathbf{E}_{\nu,m} + \mathbf{E}_{\nu,m} \frac{d^{2}}{dz^{2}} \left(a_{\nu,m} e^{i\beta_{\nu,m}z}\right) \right]$$

$$= \sum_{\nu,m} \left[ a_{\nu,m} \left(\nabla_{\perp}^{2} + k_{0}^{2}n^{2} - \beta_{\nu,m}^{2}\right) + \frac{d^{2}a_{\nu,m}}{dz^{2}} + 2i\beta_{\nu,m} \frac{da_{\nu,m}}{dz} \right] e^{i\beta_{\nu,m}z} \mathbf{E}_{\nu,m}$$

$$\approx \sum_{\nu,m} \left[ a_{\nu,m} k_{0}^{2} (n^{2} - n_{m}^{2}) + 2i\beta_{\nu,m} \frac{da_{\nu,m}}{dz} \right] e^{i\beta_{\nu,m}z} \mathbf{E}_{\nu,m}$$

$$= 0,$$

donde se ha usado que  $\left|\frac{d^2a_{v,m}}{dz^2}\right| \ll 2\beta_{v,m} \left|\frac{da_{v,m}}{dz}\right|$ , conocida como aproximación paraxial. Aplicando producto punto con  $\mathbf{E}_{\mu,m'}^*$  e integrando en todo el plano xy:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\nu,m} \left[ a_{\nu,m} k_0^2 (n^2 - n_m^2) + 2i\beta_{\nu,m} \frac{da_{\nu,m}}{dz} \right] e^{i\beta_{\nu,m}z} \mathbf{E}_{\nu,m} \cdot \mathbf{E}_{\mu,m'}^* dx dy = 0$$

$$\sum_{\nu,m} \left( i \frac{2k_0}{\varepsilon_0 c} \frac{da_{\nu,m}}{dz} \delta_{\nu,\mu} \delta_{m,m'} + \frac{2k_0}{\varepsilon_0 c} C_{\mu,\nu,m',m} a_{\nu,m} \right) e^{i\beta_{\nu,m}z} = 0$$

$$i \frac{da_{\mu,m'}}{dz} e^{i\beta_{\mu,m'}z} + \sum_{\nu,m\neq m'} C_{\mu,\nu,m',m} a_{\nu,m} e^{i\beta_{\nu,m}z} = 0,$$

donde se han definido y usado

$$C_{\mu,\nu,m',m} \equiv \frac{\varepsilon_0 k_0 c}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (n^2 - n_m^2) \mathbf{E}_{\nu,m} \cdot \mathbf{E}_{\mu,m'}^* dx dy, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_{\nu,m} \cdot \mathbf{E}_{\mu,m'}^* dx dy \approx \frac{k_0}{\varepsilon_0 c \beta_{\nu,m}} \delta_{\nu,\mu} \delta_{m,m'}.$$

Es decir, el efecto del modo (v, m) en la dinámica del modo  $(\mu, m')$  sólo es apreciable al ponderar con la expresión  $(n^2 - n_m^2)$ , lo que da origen al término  $C_{\mu,v,m',m}$  conocido comúnmente como constante de acoplamiento. Sin el peso del contraste, la interacción es evanescente, por lo que la aproximación de ortogonalidad se hace razonable con suficiente distancia entre guías (sobre los 15  $\mu$ m en los experimentos de esta tesis), aunque existen formas de tomar en cuenta estos efectos de no ortogonalidad [46]. Cuando m = m', el acoplamiento  $C_{\mu,v,m',m}$  es nulo por definición. Notemos que  $C_{\mu,v,m',m} \neq C_{v,\mu,m,m'}$  en general:

$$C_{\mu,\nu,m',m} = \frac{\varepsilon_0 k_0 c}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (n^2 - n_{m'}^2 + n_{m'}^2 - n_m^2) \mathbf{E}_{\mu,m'} \cdot \mathbf{E}_{\nu,m}^* dx dy = C_{\nu,\mu,m,m'} + D_{\nu,\mu,m,m'}$$

$$D_{\nu,\mu,m,m'} = -D_{\mu,\nu,m',m} = \frac{\varepsilon_0 k_0 c}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (n_{m'}^2 - n_m^2) \mathbf{E}_{\mu,m'} \cdot \mathbf{E}_{\nu,m}^* dx dy$$

Finalmente, es posible hacer el cambio de variables  $a_{\nu,m} \equiv a_{\nu,m} e^{i\beta_{\nu,m}z}$  para llegar a las llamadas ecuaciones discretas tipo Schrödinger:

$$-i\frac{da_{\mu,m'}}{dz} = \beta_{\mu,m'}a_{\mu,m'} + \sum_{\nu,m\neq m'} C_{\mu,\nu,m',m}a_{\nu,m}.$$
 (2.22)

Para fijar ideas, consideremos el caso del dímero monomodal homogéneo, considerando una distancia d entre guías INCLUIR ESQUEMA PARA EXPLICAR ACOPLAMIENTO. El índice de refracción en este caso es  $n^2 = n_1^2 + n_2^2$ , con  $n_1^2(\mathbf{r}) = n_2^2(\mathbf{r} + \mathbf{d})$ . Dada la simetría del problema, la constante de acoplamiento se puede desarrollar como

$$C_{1\to 2} = \frac{\varepsilon_0 k_0 c}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n_1^2(\mathbf{r}) \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_1^*(\mathbf{r}) dx dy = \frac{\varepsilon_0 k_0 c}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n_2^2(\mathbf{r} + \mathbf{d}) \mathbf{E}_1(\mathbf{r} + \mathbf{d}) \cdot \mathbf{E}_1^*(\mathbf{r}) dx dy$$

$$= \frac{\varepsilon_0 k_0 c}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n_2^2(\mathbf{r}) \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_1^*(\mathbf{r} - \mathbf{d}) dx dy = \frac{\varepsilon_0 k_0 c}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} n_2^2(\mathbf{r}) \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_2^*(\mathbf{r}) dx dy$$

$$= C_{2\to 1} \equiv C$$

por lo que las dos ecuaciones dinámicas se escriben como:

$$i\frac{da_1}{dz} + Ca_2 = 0, \qquad i\frac{da_2}{dz} + Ca_1 = 0$$

Redefiniendo  $C_{\mu,\mu,m',m'} \equiv \beta_{\mu,m'}$ , es posible encontrar un Lagrangiano para la ecuación (2.22) definiendo nuevas variables  $\bar{b}_{\mu,m'}^*$  que en sistemas no Hermíticos tales que [47]:

$$a_{\mu,m'} = \sum_{j} c_{j}(z) u_{\mu,m'}^{(j)}$$

$$\bar{b}_{\mu,m'}^{*} = \sum_{j} \bar{c}_{j}(z) \bar{v}_{\mu,m'}^{*(j)} = \sum_{j} \frac{|C_{j}|^{2}}{c_{j}(z)} \bar{v}_{\mu,m'}^{*(j)} = \sum_{j} \frac{|C_{j}|^{2}}{\sum_{\nu,m} a_{\nu,m} \bar{v}_{\nu,m}^{*(j)}} \bar{v}_{\mu,m'}^{*(j)}$$

$$\sum_{\nu,\mu,m,m'} \bar{v}_{\mu,m'}^{*(i)} C_{\nu,\mu,m,m'} u_{\nu,m}^{(j)} = \lambda_{j} \delta_{i,j} + \sum_{\nu,\mu,m,m'} \bar{v}_{\mu,m'}^{*(j)} D_{\mu,\nu,m',m} u_{\nu,m}^{(j)}$$

$$= \lambda_{i}^{*} \delta_{i,j}$$

$$L = \sum_{\mu,m'} \bar{b}_{\mu,m'}^* \left( i \frac{da_{\mu,m'}}{dz} + \sum_{\nu,m} C_{\mu,\nu,m',m} a_{\nu,m} \right)$$
 (2.23)

Notando que el momentum generalizado es  $\Pi_{\mu,m'} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_{\mu,m'}} = i\bar{b}_{\mu,m'}^*$  el Hamiltoniano del sistema se escribe como:

$$H = \sum_{\mu,m'} \Pi_{\mu,m'} \dot{a}_{\mu,m'} - L = -\sum_{\nu,\mu,m,m'} C_{\mu,\nu,m',m} a_{\nu,m} \bar{b}^*_{\mu,m'} = i \sum_{\nu,\mu,m,m'} C_{\mu,\nu,m',m} a_{\nu,m} \Pi_{\mu,m'}$$

Variando el Lagrangiano *L* se tiene [48]:

$$\begin{split} \delta L &= \sum_{\mu,m'} \frac{\partial L}{\partial a_{\mu,m'}} \delta a_{\mu,m'} + \frac{\partial L}{\partial \bar{v}_{\mu,m'}^*} \delta \bar{b}_{\mu,m'}^* + \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_{\mu,m'}} \delta \dot{a}_{\mu,m'} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{b}}_{\mu,m'}^*} \delta \dot{\bar{v}}_{\mu,m'}^* \\ &= \sum_{\mu,m'} \left( \frac{\partial L}{\partial a_{\mu,m'}} - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_{\mu,m'}} \right) \delta a_{\mu,m'} + \left( \frac{\partial L}{\partial \bar{b}_{\mu,m'}^*} - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{b}}_{\mu,m'}^*} \right) \delta \bar{b}_{\mu,m'}^* + \frac{d}{dz} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_{\mu,m'}} \delta a_{\mu,m'} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{b}}_{\mu,m'}^*} \delta \bar{b}_{\mu,m'}^* \right) \\ &\implies \frac{d}{dz} \sum_{\mu,m'} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_{\mu,m'}} \delta a_{\mu,m'} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{b}}_{\mu,m'}^*} \delta \bar{b}_{\mu,m'}^* \right) = 0. \end{split}$$

Considerando el par de transformaciones  $a_{\mu,m'} \to a'_{\mu,m'} = e^{i\phi}a_{\mu,m'}, \ \bar{b}^*_{\mu,m'} \to \bar{b'}^*_{\mu,m'} = e^{-i\phi}\bar{b}^*_{\mu,m'}$  que dejan invariante el Lagrangiano, considerando  $\phi \ll 1$  se tiene  $\delta a_{\mu,m'} = i\phi a_{\mu,m'}$  y  $\delta \bar{b}^*_{\mu,m'} = -i\phi \bar{b}^*_{\mu,m'}$ , por lo que la cantidad conservada, P, es:

$$P = \sum_{\mu,m'} \bar{b}_{\mu,m'}^* a_{\mu,m'}.$$
 (2.24)

#### Métodos numéricos

#### 3.1. COMSOL: método de elementos finitos

A partir de la ecuación (2.5) y separando el campo eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r})e^{-i\phi_1(\mathbf{r})}$  en una envolvente lenta  $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$  y una fase rápidamente oscilante  $\phi_1(\mathbf{r})$ ,

$$\nabla \times [\nabla \times (\mathbf{E}_{1}e^{-i\phi_{1}})] = n^{2}k_{0}^{2}\mathbf{E}_{1}e^{-i\phi_{1}}$$

$$\nabla \times [e^{-i\phi_{1}} \times (\nabla \times \mathbf{E}_{1}) + \nabla(e^{-i\phi_{1}}) \times \mathbf{E}_{1}] = n^{2}k_{0}^{2}\mathbf{E}_{1}e^{-i\phi_{1}}$$

$$\nabla \times [e^{-i\phi_{1}}(\nabla - i\mathbf{k}_{1}) \times \mathbf{E}_{1}] = n^{2}k_{0}^{2}\mathbf{E}_{1}e^{-i\phi_{1}}$$

$$e^{-i\phi_{1}}\nabla \times [(\nabla - i\mathbf{k}_{1}) \times \mathbf{E}_{1}] + \nabla(e^{-i\phi_{1}}) \times (\nabla - i\mathbf{k}_{1}) \times \mathbf{E}_{1} = n^{2}k_{0}^{2}\mathbf{E}_{1}e^{-i\phi_{1}}$$

$$e^{-i\phi_{1}}\nabla \times [(\nabla - i\mathbf{k}_{1}) \times \mathbf{E}_{1}] - i\mathbf{k}_{1}e^{-i\phi_{1}} \times (\nabla - i\mathbf{k}_{1}) \times \mathbf{E}_{1} = n^{2}k_{0}^{2}\mathbf{E}_{1}e^{-i\phi_{1}}$$

$$(\nabla - i\mathbf{k}_{1}) \times ((\nabla - i\mathbf{k}_{1}) \times \mathbf{E}_{1}) = n^{2}k_{0}^{2}\mathbf{E}_{1}, \tag{3.1}$$

con  $\mathbf{k}_1 = \nabla \phi_1(\mathbf{r})$ . El software comercial COMSOL *Multiphysics* puede integrar numéricamente la ecuación (3.1) mediante elementos finitos más gruesos que los que se tendría que usar a partir de la ecuación (2.5) debido a la separación entre envolvente y fase, sin haber hecho aproximación alguna.

#### 3.2. Expansión en modos normales

#### 3.3. Beam Propagation Method

Por otro lado, utilizando la aproximación paraxial escogiendo el eje *z* como dirección de propagación y seleccionando la polarización horizontal del campo, es posible simplificar la ecuación (3.1) y llegar a la formulación de un método numérico escalar conocido como *Beam Propagation Method*, utilizado ampliamente en esta área de investigación [16, 35, 36, 41, 49]. Éste consiste en

resolver numéricamente la ecuación

$$2in_0 k_0 \frac{\partial}{\partial z} \psi(x, y, z) = \nabla_{\perp}^2 \psi(x, y, z) + \left(n^2 - n_0^2\right) k_0^2 \psi(x, y, z), \tag{3.2}$$

con  $\psi(x, y, z)$ ,  $n_0$ , n(x, y) y  $k_0$  la envolvente de la componente horizontal campo eléctrico, el índice de refracción del material, el índice de refracción inducido y el número de onda en el vacío, respectivamente.

#### 3.4. Ecuaciones dinámicas discretas tipo Schrödinger

Aplicando teoría acoplada de modos [50] a la ecuación (3.2), con el objetivo de describir de forma discreta una red fotónica, es posible derivar las llamadas ecuaciones discretas tipo Schrödinger [19, 20, 30]

$$-i\frac{\partial u_{\vec{n}}}{\partial z} = \beta_{\vec{n}}u_{\vec{n}} + \sum_{\vec{m} \neq \vec{n}} C_{\vec{n},\vec{m}}u_{\vec{m}},\tag{3.3}$$

con  $u_{\vec{n}}$ ,  $\beta_{\vec{n}}$  y  $C_{\vec{n},\vec{m}}$  la envolvente normalizada del campo eléctrico, la constante de propagación normalizada y las constantes de acoplamiento entre los modos de las guías en las posiciones de la red  $\vec{n}$  y  $\vec{m}$ , respectivamente.

## Métodos experimentales

- 4.1. Escritura de guías de onda
- 4.2. Montaje de excitación láser supercontinuo
- 4.3. Montaje de modulación espacial de luz

#### 4.3.1. Circuito óptico

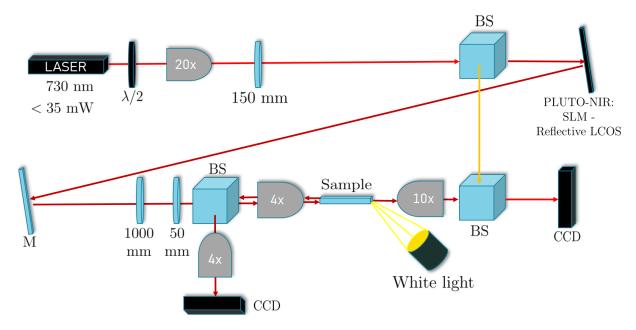


Figura 4.1: Montaje SLM.

- 4.3.2. Generación de hologramas
- 4.4. Análisis de imágenes

## **Moléculas Fotónicas**

# Acoplamiento interorbital SP

# Ángulo mágico en modos P



Figura 7.1: Barrido en ángulo que captura el paso por acoplamiento nulo.

# Haces con momentum orbital angular (OAM)



Figura 8.1: Generación de OAMs e interferencia tipo Mach-Zehnder. Se aprecia la carga de los OAMs contando la cantidad de espirales originados desde el centro.

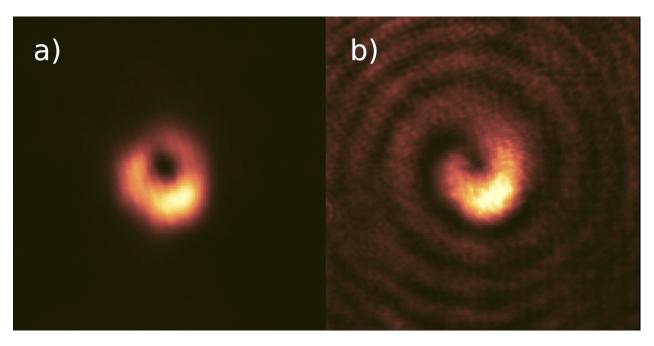


Figura 8.2: Propagación de vórtices en guías de onda. En a) se tiene la intensidad del perfil de salida luego de excitar un OAM con carga  $\ell=1$ . En b) se tiene una estructura de fase similar a la esperada pero con falta de definición.

## **Conclusiones**

## Bibliografía

- [1] All nobel prizes in physics. URL https://www.nobelprize.org/prizes/lists/all-nobel-prizes-in-physics/.
- [2] P. Maine, D. Strickland, P. Bado, M. Pessot, and G. Mourou. Generation of ultrahigh peak power pulses by chirped pulse amplification. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 24(2): 398–403, 1988. doi: 10.1109/3.137.
- [3] M. Lewenstein, Ph. Balcou, M. Yu. Ivanov, Anne L'Huillier, and P. B. Corkum. Theory of high-harmonic generation by low-frequency laser fields. *Phys. Rev. A*, 49:2117–2132, Mar 1994. doi: 10.1103/PhysRevA.49.2117. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.49.2117.
- [4] P. M. Paul, E. S. Toma, P. Breger, G. Mullot, F. Augé, Ph. Balcou, H. G. Muller, and P. Agostini. Observation of a train of attosecond pulses from high harmonic generation. *Science*, 292 (5522):1689–1692, 2001. doi: 10.1126/science.1059413. URL https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1059413.
- [5] Thomas Brabec and Ferenc Krausz. Intense few-cycle laser fields: Frontiers of non-linear optics. *Reviews of Modern Physics*, 72:545–591, 2000. URL https://api.semanticscholar.org/CorpusID:120371634.
- [6] J F Clauser and A Shimony. Bell's theorem. experimental tests and implications. *Reports on Progress in Physics*, 41(12):1881, dec 1978. doi: 10.1088/0034-4885/41/12/002. URL https://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/41/12/002.
- [7] Alain Aspect, Jean Dalibard, and Gérard Roger. Experimental test of bell's inequalities using time-varying analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, 49:1804–1807, Dec 1982. doi: 10.1103/PhysRevLett.49.1804. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.49.1804.
- [8] Paul G. Kwiat, Klaus Mattle, Harald Weinfurter, Anton Zeilinger, Alexander V. Sergienko, and Yanhua Shih. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 75:4337–4341, Dec 1995. doi: 10.1103/PhysRevLett.75.4337. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.4337.
- [9] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, and T. Yamane. Optical trapping and manipulation of single cells using infrared laser beams. *Nature*, 330(6150):769–771, Dec 1987. ISSN 1476-4687. doi: 10.1038/330769a0. URL https://doi.org/10.1038/330769a0.

- [10] Isamu Akasaki. Gan-based p-n junction blue-light-emitting devices. *Proc. IEEE*, 101(10): 2200–2210, 2013. doi: 10.1109/JPROC.2013.2274928. URL https://doi.org/10.1109/JPROC.2013.2274928.
- [11] Michael Kneissl, Tae-Yeon Seong, Jung Han, and Hiroshi Amano. The emergence and prospects of deep-ultraviolet light-emitting diode technologies. *Nature Photonics*, 13(4): 233–244, Apr 2019. ISSN 1749-4893. doi: 10.1038/s41566-019-0359-9. URL https://doi.org/10.1038/s41566-019-0359-9.
- [12] Shuji Nakamura, Takashi Mukai, and Masayuki Senoh. Candela-class high-brightness In-GaN/AlGaN double-heterostructure blue-light-emitting diodes. *Applied Physics Letters*, 64(13):1687–1689, 03 1994. ISSN 0003-6951. doi: 10.1063/1.111832. URL https://doi.org/10.1063/1.111832.
- [13] Submarine cable frequently asked questions, . URL https://www2.telegeography.com/submarine-cable-fags-frequently-asked-questions.
- [14] Hogares con acceso a internet fijo alcanzan el 67 % y usuarios aumentan preferencia por redes de alta velocidad, . URL https://www.subtel.gob.cl/hogares-con-acceso-a-internet-fijo-alcanzan-el-67-y-usuarios-aumentan-preferencia-por-redes-de-alta-velocidad.
- [15] Alexander Szameit, Dominik Blömer, Jonas Burghoff, Thomas Schreiber, Thomas Pertsch, Stefan Nolte, Andreas Tünnermann, and Falk Lederer. Discrete nonlinear localization in femtosecond laser written waveguides in fused silica. *Opt. Express*, 13(26):10552–10557, Dec 2005. doi: 10.1364/OPEX.13.010552. URL https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-13-26-10552.
- [16] Yonatan Plotnik, Or Peleg, Felix Dreisow, Matthias Heinrich, Stefan Nolte, Alexander Szameit, and Mordechai Segev. Experimental observation of optical bound states in the continuum. *Phys. Rev. Lett.*, 107:183901, Oct 2011. doi: 10.1103/PhysRevLett.107.183901. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.183901.
- [17] Rodrigo A. Vicencio, Camilo Cantillano, Luis Morales-Inostroza, Bastián Real, Cristian Mejía-Cortés, Steffen Weimann, Alexander Szameit, and Mario I. Molina. Observation of localized states in lieb photonic lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 114:245503, Jun 2015. doi: 10.1103/PhysRevLett.114.245503. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.245503.
- [18] Sebabrata Mukherjee, Alexander Spracklen, Debaditya Choudhury, Nathan Goldman, Patrik Öhberg, Erika Andersson, and Robert R. Thomson. Observation of a localized flat-band state in a photonic lieb lattice. *Phys. Rev. Lett.*, 114:245504, Jun 2015. doi: 10.1103/PhysRevLett. 114.245504. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.245504.
- [19] Daniel Leykam, Alexei Andreanov, and Sergej Flach. Artificial flat band systems: from lattice models to experiments. *Advances in Physics: X*, 3(1):1473052, 2018. doi: 10.1080/23746149. 2018.1473052. URL https://doi.org/10.1080/23746149.2018.1473052.
- [20] Rodrigo A. Vicencio. Photonic flat band dynamics. *Advances in Physics: X*, 6(1): 1878057, 2021. doi: 10.1080/23746149.2021.1878057. URL https://doi.org/10.1080/23746149.2021.1878057.

- [21] Diego Román-Cortés, Guillermo Fadic, Christofer Cid-Lara, Diego Guzmán-Silva, Bastián Real, and Rodrigo A. Vicencio. Strain induced localization to delocalization transition on a lieb photonic ribbon lattice. *Scientific Reports*, 11(1):21411, Nov 2021. ISSN 2045-2322. doi: 10.1038/s41598-021-00967-3. URL https://doi.org/10.1038/s41598-021-00967-3.
- [22] Javier Cubillos Cornejo, Diego Guzmán-Silva, Víctor Hugo Cornejo, Ignacio Bordeu, and Rodrigo A. Vicencio. Transport and localization on dendrite-inspired flat band linear photonic lattices. *Scientific Reports*, 13(1):13057, Aug 2023. ISSN 2045-2322. doi: 10.1038/s41598-023-39985-8. URL https://doi.org/10.1038/s41598-023-39985-8.
- [23] Paloma Vildoso, Rodrigo A. Vicencio, and Jovana Petrovic. Ultra-low-loss broadband multiport optical splitters. *Opt. Express*, 31(8):12703–12716, Apr 2023. doi: 10.1364/OE.486855. URL https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-31-8-12703.
- [24] Zhaoyang Zhang, Shaohuan Ning, Hua Zhong, Milivoj R. Belić, Yiqi Zhang, Yuan Feng, Shun Liang, Yanpeng Zhang, and Min Xiao. Experimental demonstration of optical bloch oscillation in electromagnetically induced photonic lattices. *Fundamental Research*, 2(3): 401–404, 2022. ISSN 2667-3258. doi: https://doi.org/10.1016/j.fmre.2021.08.019. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2667325821001746.
- [25] Tal Schwartz, Guy Bartal, Shmuel Fishman, and Mordechai Segev. Transport and anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices. *Nature*, 446(7131):52–55, Mar 2007. ISSN 1476-4687. doi: 10.1038/nature05623. URL https://doi.org/10.1038/nature05623.
- [26] Sebabrata Mukherjee, Alexander Spracklen, Manuel Valiente, Erika Andersson, Patrik Öhberg, Nathan Goldman, and Robert R. Thomson. Experimental observation of anomalous topological edge modes in a slowly driven photonic lattice. *Nature Communications*, 8(1):13918, Jan 2017. ISSN 2041-1723. doi: 10.1038/ncomms13918. URL https://doi.org/10.1038/ncomms13918.
- [27] Lukas J. Maczewsky, Julia M. Zeuner, Stefan Nolte, and Alexander Szameit. Observation of photonic anomalous floquet topological insulators. *Nature Communications*, 8(1):13756, Jan 2017. ISSN 2041-1723. doi: 10.1038/ncomms13756. URL https://doi.org/10.1038/ncomms13756.
- [28] G. Cáceres-Aravena, L. E. F. Foa Torres, and R. A. Vicencio. Topological and flat-band states induced by hybridized linear interactions in one-dimensional photonic lattices. *Phys. Rev. A*, 102:023505, Aug 2020. doi: 10.1103/PhysRevA.102.023505. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.102.023505.
- [29] Roman S. Savelev and Maxim A. Gorlach. Topological states in arrays of optical waveguides engineered via mode interference. *Phys. Rev. B*, 102:161112, Oct 2020. doi: 10. 1103/PhysRevB.102.161112. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB. 102.161112.
- [30] Falk Lederer, George I. Stegeman, Demetri N. Christodoulides, Gaetano Assanto, Moti Segev, and Yaron Silberberg. Discrete solitons in optics. *Physics Reports*, 463(1):1–126, 2008. ISSN 0370-1573. doi: https://doi.org/10.1016/j.physrep.2008.04.004. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157308001257.

- [31] S. Rojas-Rojas, E. Barriga, C. Muñoz, P. Solano, and C. Hermann-Avigliano. Manipulation of multimode squeezing in a coupled waveguide array. *Phys. Rev. A*, 100:023841, Aug 2019. doi: 10.1103/PhysRevA.100.023841. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.100.023841.
- [32] R. Julius, A. N. Alias, and M. S. A. Halim. Quantum squeezing in coupled waveguide networks with quadratic and qubic nonlinearity. *The European Physical Journal Plus*, 137(1):91, Jan 2022. ISSN 2190-5444. doi: 10.1140/epjp/s13360-021-02302-1. URL https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-02302-1.
- [33] Joaquin Medina Dueñas, Gabriel O'Ryan Pérez, Carla Hermann-Avigliano, and Luis E. F. Foa Torres. Quadrature protection of squeezed states in a one-dimensional photonic topological insulator. *Quantum*, 5:526, August 2021. ISSN 2521-327X. doi: 10.22331/q-2021-08-17-526. URL https://doi.org/10.22331/q-2021-08-17-526.
- [34] Zhiwen Li, Siqi Hu, Qiao Zhang, Ruijuan Tian, Linpeng Gu, Yisong Zhu, Qingchen Yuan, Ruixuan Yi, Chen Li, Yan Liu, Yue Hao, Xuetao Gan, and Jianlin Zhao. Telecom-band waveguide-integrated mos2 photodetector assisted by hot electrons. *ACS Photonics*, 9(1): 282–289, 2022. doi: 10.1021/acsphotonics.1c01622. URL https://doi.org/10.1021/acsphotonics.1c01622.
- [35] Diego Guzmán-Silva, Gabriel Cáceres-Aravena, and Rodrigo A. Vicencio. Experimental observation of interorbital coupling. *Phys. Rev. Lett.*, 127:066601, Aug 2021. doi: 10.1103/PhysRevLett.127.066601. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.127.066601.
- [36] Christina Jörg, Gerard Queraltó, Mark Kremer, Gerard Pelegrí, Julian Schulz, Alexander Szameit, Georg von Freymann, Jordi Mompart, and Verònica Ahufinger. Artificial gauge field switching using orbital angular momentum modes in optical waveguides. *Light: Science & Applications*, 9(1):150, Aug 2020. ISSN 2047-7538. doi: 10.1038/s41377-020-00385-6. URL https://doi.org/10.1038/s41377-020-00385-6.
- [37] Gabriel Cáceres-Aravena, Diego Guzmán-Silva, Ignacio Salinas, and Rodrigo A. Vicencio. Controlled transport based on multiorbital aharonov-bohm photonic caging. *Phys. Rev. Lett.*, 128:256602, Jun 2022. doi: 10.1103/PhysRevLett.128.256602. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.128.256602.
- [38] Yudong Lian, Xuan Qi, Yuhe Wang, Zhenxu Bai, Yulei Wang, and Zhiwei Lu. Oam beam generation in space and its applications: A review. *Optics and Lasers in Engineering*, 151: 106923, 2022. ISSN 0143-8166. doi: https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2021.106923. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0143816621003924.
- [39] Jaime A. Anguita, Joaquín Herreros, and Ivan B. Djordjevic. Coherent multimode oam superpositions for multidimensional modulation. *IEEE Photonics Journal*, 6(2):1–11, 2014. doi: 10.1109/JPHOT.2014.2309645.
- [40] Wei-Guan Shen, Yuan Chen, Hui-Ming Wang, and Xian-Min Jin. Oam mode conversion in a photonic chip. *Optics Communications*, 507:127615, 2022. ISSN 0030-4018. doi: https://doi.org/10.1016/j.optcom.2021.127615. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401821008646.

- [41] Zhichan Hu, Domenico Bongiovanni, Ziteng Wang, Xiangdong Wang, Daohong Song, Jingjun Xu, Roberto Morandotti, Hrvoje Buljan, and Zhigang Chen. Topologically protected vortex transport via chiral-symmetric disclination, 2023.
- [42] J. Polo, J. Mompart, and V. Ahufinger. Geometrically induced complex tunnelings for ultracold atoms carrying orbital angular momentum. *Phys. Rev. A*, 93:033613, Mar 2016. doi: 10.1103/PhysRevA.93.033613. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.93.033613.
- [43] Chuang Jiang, Yanting Wu, Meiyan Qin, and Shaolin Ke. Topological bound modes with orbital angular momentum in optical waveguide arrays. *Journal of Lightwave Technology*, 41 (7):2205–2211, 2023. doi: 10.1109/JLT.2022.3200139.
- [44] M. Bayer, T. Gutbrod, J. P. Reithmaier, A. Forchel, T. L. Reinecke, P. A. Knipp, A. A. Dremin, and V. D. Kulakovskii. Optical modes in photonic molecules. *Phys. Rev. Lett.*, 81:2582–2585, Sep 1998. doi: 10.1103/PhysRevLett.81.2582. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.2582.
- [45] Maxim Mazanov, Diego Román-Cortés, Gabriel Cáceres-Aravena, Christofer Cid, Maxim A. Gorlach, and Rodrigo A. Vicencio. Photonic molecule approach to multiorbital topology. *Nano Letters*, 24(15):4595–4601, 2024. doi: 10.1021/acs.nanolett.4c00728. URL https://doi.org/10.1021/acs.nanolett.4c00728. PMID: 38574276.
- [46] J. Schulz, C. Jörg, and G. von Freymann. Geometric control of next-nearest-neighbor coupling in evanescently coupled dielectric waveguides. *Optics Express*, 30(6):9869–9877, March 2022. ISSN 1094-4087. doi: 10.1364/OE.447921. URL https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?uri=oe-30-6-9869. Publisher: Optica Publishing Group.
- [47] Qi Zhang. Hamiltonian formulation of linear non-Hermitian systems. *Physica Scripta*, 99(8): 085262, August 2024. ISSN 0031-8949, 1402-4896. doi: 10.1088/1402-4896/ad6045. URL https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1402-4896/ad6045.
- [48] Jean Alexandre, Peter Millington, and Dries Seynaeve. Symmetries and conservation laws in non-Hermitian field theories. *Physical Review D*, 96(6):065027, September 2017. ISSN 2470-0010, 2470-0029. doi: 10.1103/PhysRevD.96.065027. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.96.065027.
- [49] Ginés Lifante Pedrola. Beam Propagation Method for Design of Optical Waveguide Devices. Wiley, 2015. ISBN 9781119083382. URL https://books.google.cl/books?id=ZV6-CgAAQBAJ.
- [50] Wei-Ping Huang. Coupled-mode theory for optical waveguides: an overview. *Journal of The Optical Society of America A-optics Image Science and Vision*, 11:963–983, 1994. URL https://api.semanticscholar.org/CorpusID:120397076.
- [51] Alex J Yuffa. Vectorizing green's identities. *Journal of Physics Communications*, 5(5): 055001, may 2021. doi: 10.1088/2399-6528/abfa27. URL https://dx.doi.org/10.1088/2399-6528/abfa27.

## Apéndice A

## Ortogonalidad de los modos normales

La ecuación (2.21) permite en encontrar la condición de ortogonalidad de los modos normales del campo eléctrico  $\mathbf{E}_{\nu}$ . Para ello, se puede tomar producto punto a la ecuación por  $\mathbf{E}_{\mu}^*$  e integrar en una superficie S:

$$\iint_{S} \left( \nabla_{\perp}^{2} + k_{0}^{2} n^{2} \right) \mathbf{E}_{\nu} \cdot \mathbf{E}_{\mu}^{*} dx dy = \beta_{\nu}^{2} \iint_{S} \mathbf{E}_{\nu} \cdot \mathbf{E}_{\mu}^{*} dx dy \tag{A.1}$$

Si intercambiamos los índices  $\nu$  y  $\mu$  tenemos:

$$\iint_{S} \left( \nabla_{\perp}^{2} + k_{0}^{2} n^{2} \right) \mathbf{E}_{\mu} \cdot \mathbf{E}_{\nu}^{*} dx dy = \beta_{\mu}^{2} \iint_{S} \mathbf{E}_{\mu} \cdot \mathbf{E}_{\nu}^{*} dx dy$$
 (A.2)

Restando las ecuaciones (A.1) y (A.2) y escogiendo modos reales:

$$(\beta_{\nu}^{2} - \beta_{\mu}^{2}) \iint_{S} \mathbf{E}_{\mu} \cdot \mathbf{E}_{\nu} dx dy = \iint_{S} \left( \mathbf{E}_{\mu} \cdot \nabla_{\perp}^{2} \mathbf{E}_{\nu} - \mathbf{E}_{\nu} \cdot \nabla_{\perp}^{2} \mathbf{E}_{\mu} \right) dx dy$$

$$= \oint_{\partial S} (\mathbf{E}_{\mu} \times \nabla \times \mathbf{E}_{\nu} - \mathbf{E}_{\nu} \times \nabla \times \mathbf{E}_{\mu}) \cdot \hat{n} d\ell$$

$$+ \oint_{\partial S} (\hat{n} \cdot \mathbf{E}_{\mu}) (\nabla \cdot \mathbf{E}_{\nu}) - (\hat{n} \cdot \mathbf{E}_{\nu}) (\nabla \cdot \mathbf{E}_{\mu}) d\ell$$

$$= 0.$$

$$\vdots \iint_{S} \mathbf{E}_{\mu} \cdot \mathbf{E}_{\nu}^{*} dx dy = 0, \quad \text{si } \nu \neq \mu,$$

donde se ha usado la segunda identidad de Green vectorial [51] y que el campo eléctrico debe hacerse anularse en el infinito, aunque basta considerar que el campo sea nulo en el borde de la región S.

# Apéndice B

Código en Python para cálculo de modos normales

# **Apéndice C**

# Código en C de BPM

# Apéndice D

Código en Python generador de hologramas