



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

REDES MULTIORBITALES BASADAS EN MOLÉCULAS FOTÓNICAS

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS, MENCIÓN EN FÍSICA

DIEGO ANTONIO ROMÁN CORTÉS

PROFESOR GUÍA:
RODRIGO ANDRÉS VICENCIO POBLETE

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
XX
PEDRO ORELLANA

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por los proyectos Instituto Milenio para la
Investigación en Óptica (MIRO) ICN17_012 y Fondecyt Regular 1231313
Powered@NLHPC: Esta tesis fue parcialmente apoyada por la infraestructura de supercómputo
del NLHPC (CCSS210001)

SANTIAGO DE CHILE
2025

Resumen

*Mas si buscáis descubrimientos
Tierras irrealizables más allá de los cielos
Vegetante obsesión de musical congoja
Volvamos al silencio
Trampas de luz y cascadas lujosas
Trampas de perla y de lámpara acuática
Anda como los ciegos con sus ojos de piedra
Presintiendo el abismo a todo paso
Mas no temas de mí que mi lenguaje es otro
No trato de hacer feliz ni desgraciado a nadie
Ni descolgar banderas de los pechos
Ni dar anillos de planetas
Ni hacer satélites de mármol en torno a un talismán ajeno
Quiero darte una música de espíritu
Música mía de esta cítara plantada en mi cuerpo
Música que hace pensar en el crecimiento de los árboles
Y estalla en luminarias dentro del sueño*

Extractos de *Altazor*, Vicente Huidobro

Agradecimientos

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
2. Marco Teórico	2
2.1. Propagación en guías de onda dieléctricas desde las ecuaciones de Maxwell	2
2.2. Soluciones analíticas para guía de onda tipo losa o <i>slab</i>	3
2.2.1. Soluciones gráficas y comparación entre modos TE y TM	5
2.3. Soluciones analíticas para fibra óptica circular	7
2.3.1. Modos TE y TM	9
2.3.2. Modos HE y EH	10
2.4. Modos normales en guías de onda	11
2.5. Teoría de Modos Acoplados	12
2.5.1. Derivación desde un principio variacional	12
2.5.2. Dímero TE en guías de onda tipo losa	14
2.5.3. Bandas y Topología: Red de Su-Schrieffer-Heeger fotónica	15
3. Métodos Numéricos	18
3.1. Expansión en Modos Normales	18
3.2. Método de Propagación de Haces	19
3.2.1. Implementación mediante transformada de Fourier (FFTBPM)	20
3.3. Desde la Teoría de Modos Acoplados	21
4. Métodos Experimentales	23

4.1. Escritura directa de guías de onda	23
4.2. Montaje de excitación láser supercontinuo	24
4.3. Montaje de modulación espacial de luz	24
4.3.1. Etapa premodulación	24
4.3.2. Etapa de modulación	25
4.3.3. Etapa de acoplamiento	25
4.3.4. Etapa de captura en cámara	25
4.3.5. Circuito óptico	26
4.3.6. Generación de imágenes complejas	26
4.4. Análisis de imágenes	27
5. Acoplamiento de modos p_y y ángulo de invisibilidad	28
5.1. Acopladores	28
5.2. Redes tipo panal de abeja	29
6. Moléculas Fotónicas	33
6.1. Autoestados del acoplador fotónico para distancias de separación pequeñas	33
6.2. Moléculas Fotónicas en Red SP-SSH	34
6.3. Topología en la Red SP-SSH	35
6.4. Implementación Experimental	36
7. Conclusiones	38
Bibliografía	44
Anexo A. Ortogonalidad de los modos normales	45
Anexo B. Código en Python para cálculo de modos normales	46
Anexo C. Código en C de BPM	48
Anexo D. Código en Python generador de hologramas	52

Índice de Ilustraciones

2.1.	Forma de una guía de onda tipo losa.	4
2.2.	Soluciones gráficas de los modos TE.	6
2.3.	Forma espacial de la componente longitudinal del campo magnético.	6
2.4.	Primeros modos guiados para una guía circular o fibra óptica.	11
2.5.	Esquema del modelo SSH.	15
2.6.	Topología de la red SSH.	17
2.7.	Espectro de la red SSH.	17
3.1.	Error relativo y tiempo de ejecución.	19
3.2.	Excitación del sitio central de una red unidimensional.	20
3.3.	Comparación entre EME y CMT.	22
3.4.	Dinámica con EME y CMT.	22
4.1.	Esquema de la técnica de escritura de guías de onda.	23
4.2.	Montaje de excitación por láser supercontinuo.	24
4.3.	Modulación espacial de luz para máscaras de amplitud y fase arbitrarias.	25
4.4.	Diagrama completo del sistema de modulación espacial.	26
4.5.	Generación de OAMs e interferencia tipo Mach-Zehnder.	27
5.1.	Barrido angular experimental .	28
5.2.	Constantes de propagación y acoplamientos angulares para modos P	29
5.3.	Micrografías de redes fotónicas tipo panal de abeja para modos P	29
5.4.	Modelo de panal de abeja para modos p_y con acoplamientos hasta terceros vecinos	30

5.5.	Espectro de la red de panal de abeja de modos p_y en función del ángulo	31
5.6.	Descomposición de la red en cadenas cuasi-SSH	31
6.1.	Propagación y acoplamientos en moléculas fotónicas	33
6.2.	Esquema de la red SP-SSH y los acoplamientos considerados.	34
6.3.	Topología de la Red SP-SSH para $\Delta\beta = 0$	35
6.4.	Diagrama de fases topológicas.	36
6.5.	Ánálisis numérico-experimental del modelo SP-SSH	36
6.6.	Caracterización experimental de redes SP-SSH	37

1. Introducción

Entre los premios Nobel en Física de la última década [1] se encuentran varios que están estrechamente ligados a la óptica: por la generación de pulsos de luz ultra cortos (femtosegundos [2] y luego attosegundos [3–5]), por experimentos con fotones entrelazados [6–8], por la ideación de pinzas ópticas [9] y por la invención de luces LED [10–12]. El estudio del comportamiento de la luz en diversos contextos ha permitido el posterior desarrollo tecnológico con aplicaciones industriales, en medicina, en comunicaciones e incluso militares. Una aplicación cotidiana es la fibra óptica, que actúa como una guía de onda para la luz y actualmente es el principal medio de transmisión de Internet en el mundo [13, 14].

Numerosos de estos avances en el control de las propiedades de transporte de la luz se han visto propiciados por la técnica de escritura de guías de onda por láser de femtosegundos, la cual ha permitido la fabricación de redes fotónicas de variada índole [15–23]. Su importancia radica no sólo en emular situaciones de la física del sólido, tales como oscilaciones de Bloch [24], localización de Anderson [25], estados de banda plana [17–20] o topología [26–29], sino que también en el estudio de fenómenos ópticos incluyendo no-linealidad tipo Kerr y su uso en la formación de solitones [30], la posible propagación de luz cuántica [31–33], o su compatibilidad con la transmisión de información en la industria de las telecomunicaciones [34].

El enfoque de este proyecto será el estudio de redes fotónicas multiorbitales. Por ello será crucial incorporar la técnica de acoplamiento interorbital, que consiste en sintonizar las constantes de propagación de el modo fundamental de una guía monomodal (S) con el primer modo guiado excitado de una guía dimodal (P) mediante la calibración adecuada de las potencias de escritura, que inducen diferencias en los contrastes generados por la técnica de escritura por láser femtosegundos [35].

El llamado acoplamiento SP ha permitido el estudio de redes que presentan flujo magnético efectivo $\Phi = \pi$, el cual permite el transporte controlado de la luz [36, 37]. Una aplicación directa de este fenómeno es la generación de guías de onda que admitan modos guiados de luz con momentum angular orbital (OAM) y la codificación de su carga topológica ℓ como medio para transmitir información [38, 39]. Se ha reportado a la fecha sólo la propagación de OAM mediante de redes fotónicas que presevan simetría C_3 [40, 41]. Sin embargo, el acoplamiento entre modos OAM en una red fotónica permitiría la generación de flujos magnéticos distintos de 0 o π , lo que se reflejaría en una direccionalidad dependiente de la circulación propagante [42, 43]. Para ello será necesario introducir el concepto de “moléculas fotónicas” [44] y estudiar su aplicación en redes fotónicas [45].

2. Marco Teórico

En este capítulo se desarrollarán las herramientas analítico-teóricas que permiten describir los sistemas fóticos estudiados en esta tesis. Éstos consisten en la propagación de luz láser de baja potencia (1 mW de potencia de salida) propagada en sistemas acoplados de guías de onda, las cuales están escritas dentro de una muestra de vidrio borosilicato. Estas condiciones experimentales permiten describir el comportamiento de la luz utilizando las ecuaciones de Maxwell aplicadas a un medio lineal, isotrópico, no magnético y sin fuentes de carga ni de corriente libres.

2.1. Propagación en guías de onda dieléctricas desde las ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell (SI) en este régimen son:

$$\nabla \cdot [\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}] = 0 , \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} , \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 , \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} , \quad (2.4)$$

donde \mathbf{E} es el campo eléctrico y \mathbf{H} es el campo magnético. Las guías de onda son invariantes en la dirección de propagación z , por lo que el índice de refracción $n = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$ dependerá de las coordenadas transversales al eje óptico, es decir, $n \equiv n(x, y) = n_0 + \Delta n(x, y)$, con $n_0 = 1.48$ el índice de refracción del borosilicato y $\Delta n \sim 10^{-5} - 10^{-3}$ el contraste de las guías de onda. Luego de asumir una solución temporal armónica proporcional a $e^{-i\omega t}$ se puede reemplazar la ecuación de Faraday-Lenz (2.2) en la de Ampère-Maxwell (2.4) se tiene:

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{i\omega\mu_0} \right) = -i\omega\varepsilon_0 n^2 \mathbf{E} \implies \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = k_0^2 n^2 \mathbf{E} , \quad (2.5)$$

donde $k_0 \equiv \omega/c$ es el número de onda en el vacío. Por identidad de cálculo vectorial, se tiene que $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$. La ley de Gauss (2.1) implica que $\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla n^2}{n^2} \cdot \mathbf{E}$. Al reemplazar en la ecuación (2.5), se obtiene la ecuación

$$(\nabla^2 + k_0^2 n^2) \mathbf{E} = -\nabla \left(\frac{\nabla n^2}{n^2} \cdot \mathbf{E} \right) . \quad (2.6)$$

Análogamente, es posible aplicar combinar las ecuaciones de Ampère-Maxwell (2.4) y de

Faraday-Lenz (2.2) en conjunto con la divergencia nula del campo magnético \mathbf{H} (2.3):

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{H}}{-i\omega\epsilon_0 n^2} \right) = i\omega\mu_0 \mathbf{H} \implies \nabla \times \left(\frac{1}{n^2} \nabla \times \mathbf{H} \right) = k_0^2 \mathbf{H},$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \nabla n^2 \times (\nabla \times \mathbf{H}) = k_0^2 n^2 \mathbf{H}.$$

La ecuación análoga a (2.6) para \mathbf{H} es, por consiguiente:

$$(\nabla^2 + k_0^2 n^2) \mathbf{H} = i\omega\epsilon_0 \nabla n^2 \times \mathbf{E}. \quad (2.7)$$

Será útil separar los componentes longitudinales y transversales de los campos, asumiendo una dependencia del tipo onda plana $e^{ik_z z}$ en la variable espacial z .

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{E} + ik_z \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad (2.8)$$

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{H} + ik_z \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H} = -i\omega\epsilon_0 n^2 \mathbf{E}. \quad (2.9)$$

Si se considera las descomposiciones $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\perp} + \hat{\mathbf{z}} E_z$ y $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\perp} + \hat{\mathbf{z}} H_z$, $\nabla_{\perp} \equiv -\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla)$, las ecuaciones de Maxwell que involucran rotores se escriben como

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp} + ik_z \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_{\perp} + \nabla_{\perp} \times (\hat{\mathbf{z}} E_z) = i\omega\mu_0 (\mathbf{H}_{\perp} + \hat{\mathbf{z}} H_z), \quad (2.10)$$

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{H}_{\perp} + ik_z \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_{\perp} + \nabla_{\perp} \times (\hat{\mathbf{z}} H_z) = -i\omega\epsilon_0 n^2 (\mathbf{E}_{\perp} + \hat{\mathbf{z}} E_z). \quad (2.11)$$

Luego de aplicar producto cruz en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$ a las ecuaciones (2.10) y (2.11), se puede expresar E_z y H_z en función de \mathbf{E}_{\perp} y \mathbf{H}_{\perp} :

$$-i\nabla_{\perp} E_z = k_z \mathbf{E}_{\perp} + \omega\mu_0 \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_{\perp}, \quad -i\nabla_{\perp} H_z = k_z \mathbf{H}_{\perp} - \omega\epsilon_0 n^2 \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_{\perp},$$

$$i\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp} H_z = k_z \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_{\perp} + \omega\epsilon_0 n^2 \mathbf{E}_{\perp}, \quad i\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp} E_z = \omega\mu_0 \mathbf{H}_{\perp} + k_z \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_{\perp}.$$

Finalmente, los componentes perpendiculares de los campos, \mathbf{H}_{\perp} y \mathbf{E}_{\perp} , se pueden despejar en términos de los componentes longitudinales, H_z y E_z :

$$\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_{\perp} = i \frac{(\omega\epsilon_0 n^2 \nabla_{\perp} E_z - \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp} H_z k_z)}{k_0^2 n^2 - k_z^2}, \quad \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_{\perp} = -i \frac{(k_z \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp} E_z + \omega\mu_0 \nabla_{\perp} H_z)}{k_0^2 n^2 - k_z^2},$$

$$\mathbf{H}_{\perp} = \frac{i}{k_0^2 n^2 - k_z^2} (k_z \nabla_{\perp} H_z + \omega\epsilon_0 n^2 \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp} E_z), \quad \mathbf{E}_{\perp} = \frac{i}{k_0^2 n^2 - k_z^2} (k_z \nabla_{\perp} E_z - \omega\mu_0 \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp} H_z). \quad (2.12)$$

Las ecuaciones (2.6), (2.7) y (2.12) serán las herramientas analíticas para los dos casos de estudio de las siguientes secciones y permiten visualizar la imposibilidad de las guías de onda dieléctricas de albergar modos TEM.

2.2. Soluciones analíticas para guía de onda tipo losa o *slab*

El sistema más simple que se puede estudiar es una guía de onda tipo losa, cuya forma analítica para el contraste $n(x)$ es la siguiente, con $n_1 > n_0$:

$$n(x) = \begin{cases} n_1, & |x| \leq a \\ n_0, & |x| > a \end{cases}.$$

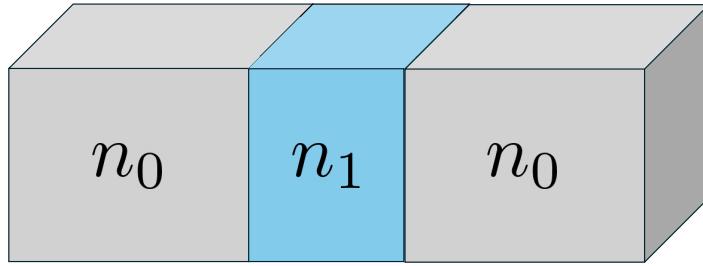


Figura 2.1: Forma de una guía de onda tipo losa. En las direcciones $\hat{\mathbf{y}}$ (vertical) y $\hat{\mathbf{z}}$ (hacia dentro de la página) la estructura es invariante.

Dado que $\nabla n^2 = \mathbf{0}$ para $|x| \neq a$, los lados derechos de las ecuaciones (2.6) y (2.7) son de tipo Helmholtz. Definiendo $\Psi = \{E_z, H_z\}$:

$$(\nabla_{\perp}^2 + k_0^2 n^2 - k_z^2)\Psi = \frac{d^2\Psi}{dx^2} + (k_0^2 n^2 - k_z^2)\Psi = 0.$$

Como $n(x) = n(-x)$, las soluciones Ψ deben ser pares o impares. En efecto, si $\Psi(x)$ es solución, el cambio $x \rightarrow x' = -x$ implica que $\Psi(-x) = \pm\Psi(x)$, pues $\Psi(x)$ es un campo real.

Para encontrar soluciones cuya energía esté localizada en la guía de onda y que decaiga fuera de ella, se impondrá $k_0^2 n_0^2 \leq k_z^2 \leq k_0^2 n_1^2$. Se hace natural definir $\alpha^2 \equiv k_0^2 n_1^2 - k_z^2$ y $\beta^2 \equiv k_z^2 - k_0^2 n_0^2$. Con todo esto,

$$\Psi_s = \begin{cases} \Psi_{s1} \cos(\alpha x), & |x| \leq a \\ \Psi_{s0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases} \implies \nabla_{\perp} \Psi_s = \begin{cases} -\hat{\mathbf{x}} \alpha \Psi_{s1} \sin(\alpha x), & |x| \leq a \\ -\hat{\mathbf{x}} \frac{|x|}{x} \beta \Psi_{s0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}.$$

Por lo que las componentes verticales E_y y H_y pares se escriben debido a la ecuación (2.12) como:

$$E_y = \frac{i\omega\mu_0}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} \alpha H_{s1} \sin(\alpha x), & |x| \leq a \\ \frac{|x|}{x} \beta H_{s0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}, \quad H_y = \frac{-i\omega\varepsilon_0 n^2}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} \alpha E_{s1} \sin(\alpha x), & |x| \leq a \\ \frac{|x|}{x} \beta E_{s0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}.$$

Por otro lado, las soluciones impares tienen la forma

$$\Psi_a = \begin{cases} \Psi_{a1} \sin(\alpha x), & |x| \leq a \\ \Psi_{a0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases} \implies \nabla_{\perp} \Psi_a = \begin{cases} \hat{\mathbf{x}} \alpha \Psi_{a1} \cos(\alpha x), & |x| \leq a \\ -\hat{\mathbf{x}} \frac{|x|}{x} \beta \Psi_{a0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}.$$

Por lo que E_y y H_y se escriben como:

$$E_y = \frac{i\omega\mu_0}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} -\alpha H_{a1} \cos(\alpha x), & |x| \leq a \\ \frac{|x|}{x} \beta H_{a0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}, \quad H_y = \frac{i\omega\varepsilon_0 n^2}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} \alpha E_{a1} \cos(\alpha x), & |x| \leq a \\ -\frac{|x|}{x} \beta E_{a0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}.$$

Imponiendo continuidad de las componentes tangenciales E_y , E_z , H_y y H_z :

$$\begin{aligned} E_{s1} \cos(\alpha a) &= E_{s0} e^{-\beta a}, & E_{a1} \sin(\alpha a) &= E_{a0} e^{-\beta a}, \\ H_{s1} \cos(\alpha a) &= H_{s0} e^{-\beta a}, & H_{a1} \sin(\alpha a) &= H_{a0} e^{-\beta a}, \\ n_1^2 E_{s1} \sin(\alpha a)/\alpha &= -n_0^2 E_{s0} e^{-\beta a}/\beta, & n_1^2 E_{a1} \cos(\alpha a)/\alpha &= n_0^2 E_{a0} e^{-\beta a}/\beta, \\ H_{s1} \sin(\alpha a)/\alpha &= -H_{s0} e^{-\beta a}/\beta, & H_{a1} \cos(\alpha a)/\alpha &= H_{a0} e^{-\beta a}/\beta. \end{aligned}$$

Buscando soluciones no triviales se tiene que:

$$\left[\frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} \right] \left[n_0^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + n_1^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} \right] \left[\frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} \right] \left[n_0^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - n_1^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} \right] = 0$$

Se distinguirán dos tipos de condiciones:

- Modos TE:

$$\frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} = 0. \quad (2.14)$$

- Modos TM:

$$n_0^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + n_1^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} = 0, \quad (2.15)$$

$$n_0^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - n_1^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} = 0. \quad (2.16)$$

Asumiendo α , β y k_z conocidos, las amplitudes deben cumplir las relaciones:

$$\begin{aligned} E_{s1} \left[n_0^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + n_1^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} \right] &= 0, & E_{a1} \left[n_0^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - n_1^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} \right] &= 0, \\ H_{s1} \left[\frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} \right] &= 0, & H_{a1} \left[\frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Las ecuaciones superiores imponen que $E_1 = 0$ cuando se satisface alguna condición de modos TE. Análogamente, las ecuaciones inferiores imponen $H_1 = 0$ en el caso de modos TM. Efectivamente, los nombres TE y TM se han puesto por transversal eléctrico y transversal magnético, respectivamente. Un corolario para los modos TE es que $E_z = E_x = 0$ por lo que la polarización del campo eléctrico será exclusivamente en la dirección \hat{y} . Así mismo, sólo un haz polarizado en \hat{x} podría excitar un modo TM, por lo que en un experimento se debe tener esto presente: una condición inicial arbitraria se propagará como una combinación lineal de los modos TE y TM que soporte la guía.

2.2.1. Soluciones gráficas y comparación entre modos TE y TM

Usando las dos ecuaciones de modos TE junto a la restricción $(\alpha a)^2 + (\beta a)^2 = k_0^2 a^2 (n_1^2 - n_0^2) \equiv V^2$ es posible obtener soluciones gráficas para las constantes de propagación k_z a partir de las intersecciones $(\alpha a, \beta a)$, como se grafica en la Figura 2.2.

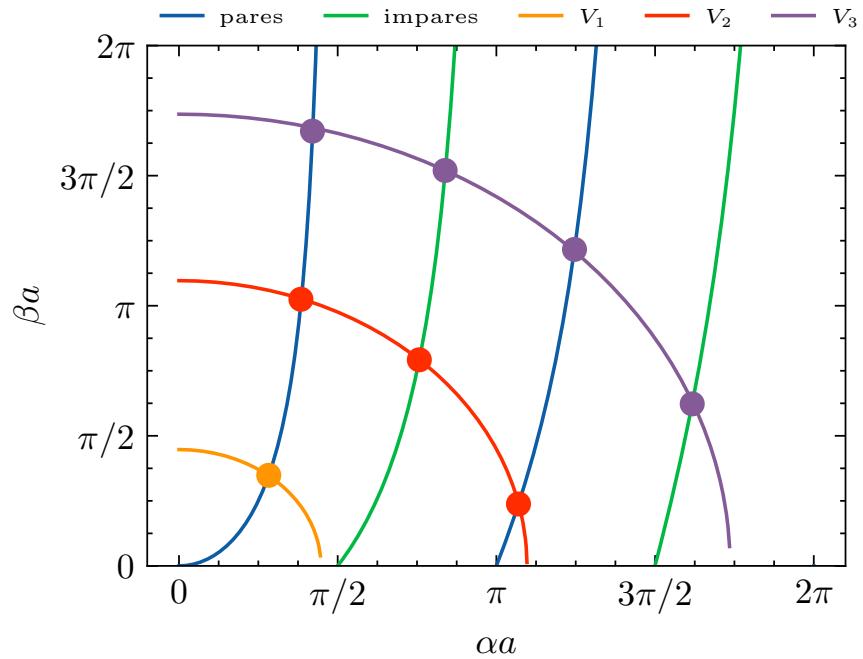


Figura 2.2: Soluciones gráficas de los modos TE. A mayor contraste $\Delta n = n_1 - n_0$, mayor cantidad de modos guiados soporta la guía de onda.

Luego de encontrar k_z , se tiene todo lo necesario para reemplazar en las expresiones obtenidas para las componentes del campo electromagnético. En la Figura 2.3 se grafica la forma espacial de cuatro modos.

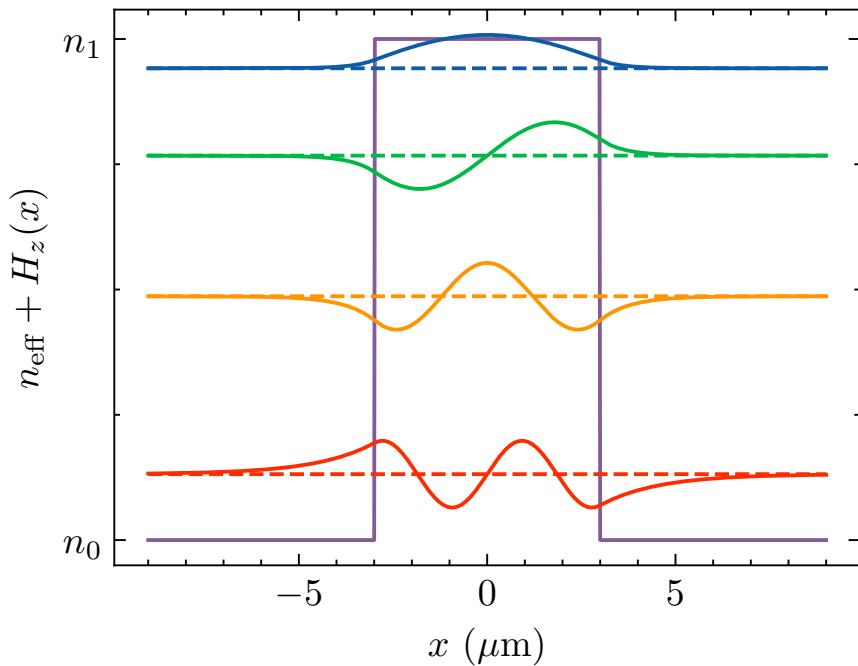


Figura 2.3: Forma espacial de la componente longitudinal del campo magnético.

La condición de corte (*cutoff*) en guías de onda es equivalente a que la energía deje de decaer en la región $|x| > a$, es decir, se debe cumplir que $\beta a \rightarrow 0$. Los modos simétricos o pares cumplen esta condición para $\sin(V) = 0$, lo que implica que $V = m\pi$, con m entero. En particular, considerando $m = 0$ y barriendo $n_1 \rightarrow n_0$, siempre existen al menos dos modos, uno TE y otro TM hasta que $n_1 < n_0$. Los modos antisimétricos o impares deben cumplir por su parte que $\cos(V) = 0$, lo que implica que $V = (m\pi \pm \pi/2)$. De esta condición se deduce que el primer par de modos excitados ($m = 0$) existe siempre que $\lambda \leq \lambda_c \equiv 4a \sqrt{n_1^2 - n_0^2}$. Escrito de forma compacta para el m -ésimo modo:

$$(\lambda_c)_m = \frac{4a}{m-1} \sqrt{n_1^2 - n_0^2}.$$

2.3. Soluciones analíticas para fibra óptica circular

En la sección anterior se estudió el sistema más sencillo en el que se puede hablar de guías de onda dieléctricas. El siguiente paso en complejidad consiste en guías de onda circulares. Para ello, se considerará que el índice de refracción varía radialmente según

$$n(\rho) = \begin{cases} n_1, & \text{si } \rho \leq a \\ n_0, & \text{si } \rho > a \end{cases},$$

donde la tupla (ρ, ϕ, z) define las coordenadas cilíndricas a usar, más apropiadas para este problema. Al considerar las componentes longitudinales $\Psi = \{E_z, H_z\}$ del campo eléctrico y magnético y si se utiliza el método de separación de variables con $\Psi = R(\rho)\Phi(\phi)e^{ik_z z}$, las ecuaciones (2.6) y (2.7) toman la forma:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial^2}{\rho^2 \partial \phi^2} + (k_0^2 n^2 - k_z^2) \right] R(\rho)\Phi(\phi) &= 0 \\ \rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} + \rho^2 (k_0^2 n^2 - k_z^2) + \underbrace{\frac{d^2 \Phi}{\Phi d\phi^2}}_{-\ell^2} &= 0 \\ \therefore \Phi(\phi) &= A e^{i\ell\phi} \end{aligned}$$

Imponiendo condiciones de periodicidad $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$, se tiene necesariamente que ℓ es un número entero. Por consiguiente, la ecuación para $R(\rho)$ es de tipo Bessel entera, por lo que buscando soluciones tales que $k_0^2 n_0^2 < \beta_z^2 < k_0^2 n_1^2$ y definiendo nuevamente $\alpha^2 \equiv k_0^2 n_1^2 - k_z^2$ y $\beta^2 \equiv k_z^2 - k_0^2 n_0^2$ se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(k_0^2 n^2 - k_z^2 - \frac{\ell^2}{\rho^2} \right) R &= 0 \\ \therefore R(\rho) &= \begin{cases} C_1 J_\ell(\alpha\rho) + D_1 Y_\ell(\alpha\rho), & \text{si } \rho \leq a \\ C_2 K_\ell(\beta\rho) + D_2 I_\ell(\beta\rho), & \text{si } \rho > a \end{cases}. \end{aligned}$$

Necesariamente se debe imponer $D_1 = D_2 = 0$ para que la solución sea finita para $\rho = 0$ y para $\rho \rightarrow +\infty$. Es decir, la parte radial de la solución es

$$R(\rho) = \begin{cases} C_1 J_\ell(\alpha\rho), & \text{si } \rho \leq a \\ C_2 K_\ell(\beta\rho), & \text{si } \rho > a \end{cases}.$$

En este caso, para imponer las condiciones de continuidad en $\mathbf{E}_{\parallel} = E_{\phi}\hat{\phi} + E_z\hat{\mathbf{z}}$ y $\mathbf{H}_{\parallel} = H_{\phi}\hat{\phi} + H_z\hat{\mathbf{z}}$, se hace necesario relacionar el resto de componentes del campo con E_z y H_z para lo cual se usará la ecuación (2.12).

Como

$$\nabla_{\perp}\Psi = \begin{cases} \Psi_0^1 \left[\hat{\rho}\alpha J'_\ell(\alpha\rho) + i\hat{\phi}\ell J_\ell(\alpha\rho)/\rho \right] e^{i\ell\phi} e^{ik_z z}, & \text{si } \rho \leq a \\ \Psi_0^0 \left[\hat{\rho}\beta K'_\ell(\beta\rho) + i\hat{\phi}\ell K_\ell(\alpha\rho)/\rho \right] e^{i\ell\phi} e^{ik_z z}, & \text{si } \rho > a \end{cases}$$

Separando por componentes y reemplazando:

$$\begin{aligned} H_z &= e^{i\ell\phi} e^{ik_z z} \begin{cases} H_0^1 J_\ell(\alpha\rho), & \text{si } \rho \leq a \\ H_0^0 K_\ell(\beta\rho), & \text{si } \rho > a \end{cases} \\ H_r &= \frac{ie^{i\ell\phi} e^{ik_z z}}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} k_z \alpha H_0^1 J'_\ell(\alpha\rho) - i\omega \varepsilon_0 n^2 \ell E_0^1 J_\ell(\alpha\rho)/\rho, & \text{si } \rho \leq a \\ k_z \beta H_0^0 K'_\ell(\beta\rho) - i\omega \varepsilon_0 n^2 \ell E_0^0 K_\ell(\beta\rho)/\rho, & \text{si } \rho > a \end{cases} \\ H_\phi &= \frac{ie^{i\ell\phi} e^{ik_z z}}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} ik_z \ell H_0^1 J_\ell(\alpha\rho)/\rho + \omega \varepsilon_0 n^2 \alpha E_0^1 J'_\ell(\alpha\rho), & \text{si } \rho \leq a \\ ik_z \ell H_0^0 K_\ell(\beta\rho)/\rho + \omega \varepsilon_0 n^2 \beta E_0^0 K'_\ell(\beta\rho), & \text{si } \rho > a \end{cases} \\ E_z &= e^{i\ell\phi} e^{ik_z z} \begin{cases} E_0^1 J_\ell(\alpha\rho), & \text{si } \rho \leq a \\ E_0^0 K_\ell(\beta\rho), & \text{si } \rho > a \end{cases} \\ E_r &= \frac{ie^{i\ell\phi} e^{ik_z z}}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} k_z \alpha E_0^1 J'_\ell(\alpha\rho) + i\omega \mu_0 \ell H_0^1 J_\ell(\alpha\rho)/\rho, & \text{si } \rho \leq a \\ k_z \beta E_0^0 K'_\ell(\beta\rho) + i\omega \mu_0 \ell H_0^0 K_\ell(\beta\rho)/\rho, & \text{si } \rho > a \end{cases} \\ E_\phi &= \frac{ie^{i\ell\phi} e^{ik_z z}}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} ik_z \ell E_0^1 J_\ell(\alpha\rho)/\rho - \omega \mu_0 \alpha H_0^1 J'_\ell(\alpha\rho), & \text{si } \rho \leq a \\ ik_z \ell E_0^0 K_\ell(\beta\rho)/\rho - \omega \mu_0 \beta H_0^0 K'_\ell(\beta\rho), & \text{si } \rho > a \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora sí, imponiendo continuidad en z y ϕ :

$$H_0^1 J_\ell(\alpha a) = H_0^0 K_\ell(\beta a) \quad (2.17)$$

$$E_0^1 J_\ell(\alpha a) = E_0^0 K_\ell(\beta a) \quad (2.18)$$

$$-\omega \varepsilon_0 n_1^2 \alpha \beta^2 a E_0^1 J'_\ell(\alpha a) - ik_z \ell \beta^2 H_0^1 J_\ell(\alpha a) = \omega \varepsilon_0 n_0^2 \alpha^2 \beta a E_0^0 K'_\ell(\beta a) + ik_z \ell \alpha^2 H_0^0 K_\ell(\beta a) \quad (2.19)$$

$$-ik_z \ell \beta^2 E_0^1 J_\ell(\alpha a) + \omega \mu_0 \alpha \beta^2 a H_0^1 J'_\ell(\alpha a) = ik_z \ell \alpha^2 E_0^0 K_\ell(\beta a) - \omega \mu_0 \alpha^2 \beta a H_0^0 K'_\ell(\beta a) \quad (2.20)$$

Buscando soluciones no triviales:

$$\begin{vmatrix} K_\ell(\beta a) & -J_\ell(\alpha a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_\ell(\beta a) & -J_\ell(\alpha a) \\ ik_z \ell \alpha^2 K_\ell(\beta a) & ik_z \ell \beta^2 J_\ell(\alpha a) & \omega \varepsilon_0 n_0^2 \alpha^2 \beta a K'_\ell(\beta a) & \omega \varepsilon_0 n_1^2 \alpha \beta^2 a J'_\ell(\alpha a) \\ \omega \mu_0 \alpha^2 \beta a K'_\ell(\beta a) & \omega \mu_0 \alpha \beta^2 a J'_\ell(\alpha a) & -ik_z \ell \alpha^2 K_\ell(\beta a) & -ik_z \ell \beta^2 J_\ell(\alpha a) \end{vmatrix} = 0$$

Finalmente, la ecuación trascendental que satisfacen α , β y k_z es:

$$\left(\frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right) \left(n_1^2 \frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + n_0^2 \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right) = \ell^2 \left[\left(\frac{1}{\alpha a} \right)^2 + \left(\frac{1}{\beta a} \right)^2 \right]^2 \left(\frac{k_z}{k_0} \right)^2. \quad (2.21)$$

Dado que, en principio, los valores de k_z ya están determinados por la ecuación anterior, es

possible obtener dos relaciones entre H_0^1 y E_0^1 :

$$\frac{E_0^1}{H_0^1} = -\frac{ik_z\ell}{\omega\varepsilon_0} \left[\left(\frac{1}{\alpha a} \right)^2 + \left(\frac{1}{\beta a} \right)^2 \right] \left[n_1^2 \frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + n_0^2 \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right]^{-1}, \quad (2.22)$$

$$\frac{H_0^1}{E_0^1} = \frac{ik_z\ell}{\omega\mu_0} \left[\left(\frac{1}{\alpha a} \right)^2 + \left(\frac{1}{\beta a} \right)^2 \right] \left[\frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right]^{-1}. \quad (2.23)$$

Tomando raíz cuadrada al cociente de las ecuaciones (2.22) y (2.23) se tiene:

$$\frac{E_0^1}{H_0^1} = i \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\sqrt{\frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)}}}{\sqrt{n_1^2 \frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + n_0^2 \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)}}}. \quad (2.24)$$

2.3.1. Modos TE y TM

El caso más sencillo de estudiar es imponiendo $\ell = 0$. La ecuación (2.21) implica:

$$\begin{aligned} \frac{J'_0(\alpha a)}{\alpha a J_0(\alpha a)} + \frac{K'_0(\beta a)}{\beta a K_0(\beta a)} &= 0, \quad (\text{modos TE}) \\ n_1^2 \frac{J'_0(\alpha a)}{\alpha a J_0(\alpha a)} + n_0^2 \frac{K'_0(\beta a)}{\beta a K_0(\beta a)} &= 0, \quad (\text{modos TM}) \end{aligned}$$

De la ecuación (2.24) es directo notar que la condiciones de modos transversales que las componentes longitudinales se hacen cero en los casos respectivos: $H_0^1 = 0$ para TE y $E_0^1 = 0$ para TM.

Las condiciones de corte se dan cuando $\beta a \rightarrow 0$. Utilizando las expresiones asintóticas para las funciones de Bessel con argumentos pequeños y sus relaciones de recurrencia, se tiene

$$\frac{\alpha a J_0(\alpha a)}{J_1(\alpha a)} = -\frac{\beta a K_0(\beta a)}{K_1(\beta a)} \approx (\beta a)^2 \ln\left(\frac{\beta a e^\gamma}{2}\right) \rightarrow 0,$$

por lo que se hace necesario que $J_0(\alpha a)|_{\alpha a \rightarrow V} = 0$. Denotando $x_{0,m} = 2.405, 5.520, 8.654, \dots$ al m -ésimo cero de la función $J_0(x)$, la longitud de onda de corte está dada por

$$(\lambda_c)_{0,m} = 2\pi a \frac{\sqrt{n_1^2 - n_0^2}}{x_{0,m}}, \quad (\text{modos TE y TM}). \quad (2.25)$$

Contrario al caso de la guía de onda tipo losa, en fibras ópticas se hace necesario estar bajo un umbral de corte máximo ($\lambda_c)_{0,1}$ no nulo para que los modos TE o TM existan.

2.3.2. Modos HE y EH

Interpretando la ecuación (2.21) como una cuadrática en $J'_\ell(\alpha a)/\alpha a J_\ell(\alpha a)$:

$$\frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} = - \left(\frac{n_1^2 + n_0^2}{2n_1^2} \right) \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \pm \sqrt{\left(\frac{n_1^2 - n_0^2}{2n_1^2} \right)^2 \left(\frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right)^2 + \left(\frac{k_z \ell}{k_0 n_1} \right)^2 \left[\left(\frac{1}{\alpha a} \right)^2 + \left(\frac{1}{\beta a} \right)^2 \right]^2}$$

Haciendo uso de las relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel $J_\ell(r)$, es posible obtener dos tipos de soluciones que suelen ser llamadas HE y EH debido al campo longitudinal con mayor peso:

$$\frac{J_{\ell-1}(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} = - \left(\frac{n_1^2 + n_0^2}{2n_1^2} \right) \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} + \frac{\ell}{(\alpha a)^2} - \sqrt{\Delta}, \quad (\text{modos HE}) \quad (2.26)$$

$$\frac{J_{\ell+1}(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} = \left(\frac{n_1^2 + n_0^2}{2n_1^2} \right) \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} + \frac{\ell}{(\alpha a)^2} - \sqrt{\Delta}, \quad (\text{modos EH}) \quad (2.27)$$

$$\Delta = \left(\frac{n_1^2 - n_0^2}{2n_1^2} \right)^2 \left(\frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right)^2 + \left(\frac{k_z \ell}{k_0 n_1} \right)^2 \left[\left(\frac{1}{\alpha a} \right)^2 + \left(\frac{1}{\beta a} \right)^2 \right]^2.$$

Para $\ell = 0$, se recuperan las relaciones obtenidas para los modos TE_m (HE_{0m}) y TM_m (EH_{0m}). Para $\ell \neq 0$ se hace necesario considerar las expresiones asintóticas de las funciones de Bessel cuando $\beta a \rightarrow 0$ y $\alpha a \rightarrow V$:

$$\frac{K'_\ell(x)}{x K_\ell(x)} = - \frac{K_{\ell-1}(x)}{x K_\ell(x)} - \frac{\ell}{x^2} \approx \begin{cases} \ln(xe^\gamma/2) - \frac{1}{x^2} & \text{si } \ell = 1 \\ -\frac{1}{2(\ell-1)} - \frac{\ell}{x^2} & \text{si } \ell > 1 \end{cases}.$$

El caso $\ell = 1$ es de especial interés. La condición de modos HE se desarrolla como

$$\frac{\alpha a J_1(\alpha a)}{J_0(\alpha a)} = \left\{ \left(\frac{n_1^2 + n_0^2}{2n_1^2} \right) \left[\ln \left(\frac{2}{e^\gamma \beta a} \right) + \frac{1}{(\beta a)^2} \right] + \frac{1}{(\alpha a)^2} - \sqrt{\Delta} \right\}^{-1} \rightarrow 0.$$

Basta considerar la función $J_1(\alpha a)|_{\alpha a \rightarrow V} = 0$. Por otro lado, la condición EH elimina el cero $x = 0$ del cociente $\frac{\alpha a J_1(\alpha a)}{J_2(\alpha a)}$ lo que hace que esté “desfasada” respecto a la condición HE. Usando un razonamiento similar al caso $\ell = 0$, las condiciones de corte son

$$(\lambda_c)_{1,m} = 2\pi a \frac{\sqrt{n_1^2 - n_0^2}}{x_{1,m}}, \quad (\text{modos HE}_{1m})$$

$$(\lambda_c)_{1,m} = 2\pi a \frac{\sqrt{n_1^2 - n_0^2}}{x_{1,m+1}}, \quad (\text{modos EH}_{1m})$$

con $x_{1,m} = 0, 3.832, 7.016, 10.173, \dots$. En particular, el modo HE_{11} siempre existe.

El caso $\ell \geq 2$ tiene un desarrollo distinto por las forma asintóticas en juego y no será relevante para esta tesis. Sin embargo, se incluyen en la Figura 2.4 por completitud.

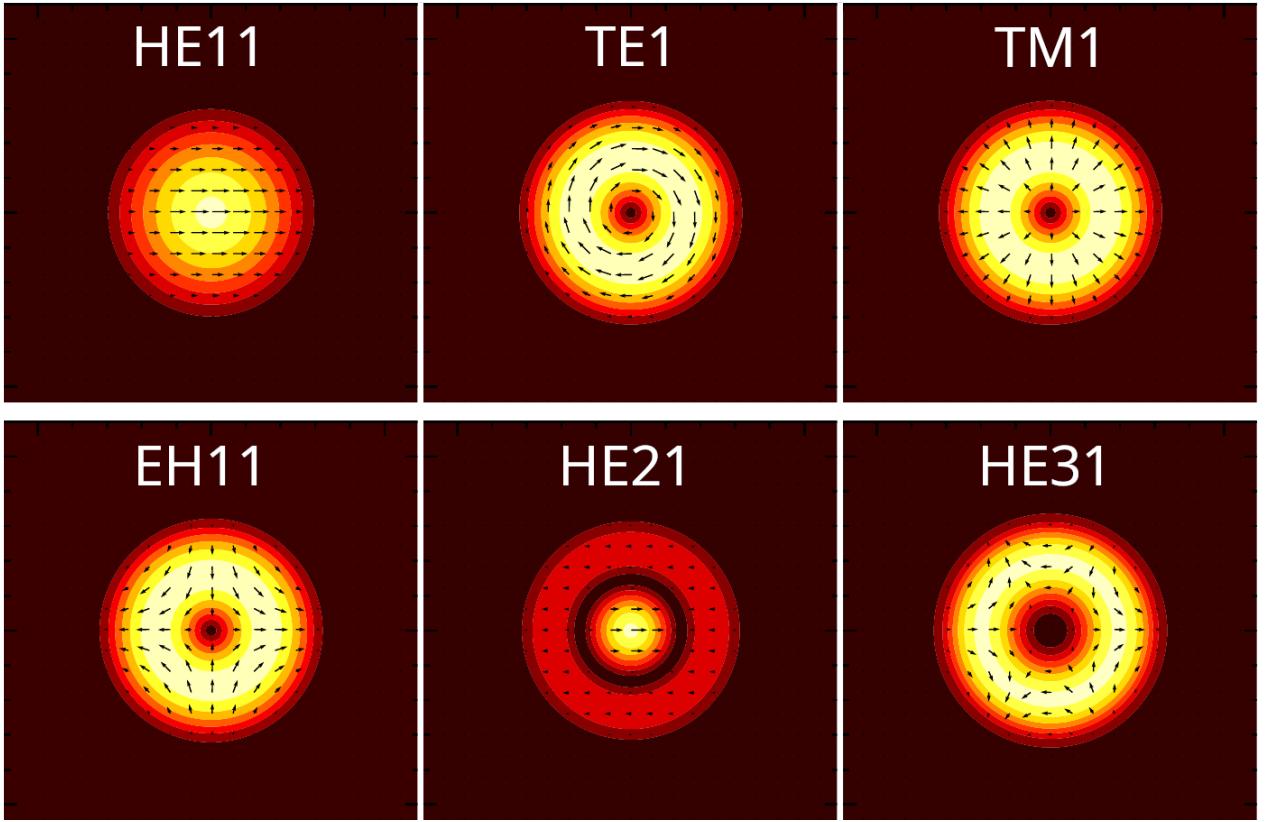


Figura 2.4: Primeros modos guiados para una guía circular o fibra óptica.

2.4. Modos normales en guías de onda

Si la estructura de guías de onda no varía en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$, por separación de variables la solución para el campo eléctrico es una onda plana del tipo $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_\nu(x, y)e^{i\beta_\nu z}$. A su vez, es conveniente separar el Laplaciano como $\nabla^2 \equiv \nabla_\perp^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. De esta forma, definiendo el operador D_{ij} tal que $D_{ij}E_j \equiv \partial_i \left(\frac{\partial_j n^2}{n^2} E_j \right)$, la parte transversal de las ecuaciones (2.6), se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} \nabla_\perp^2 + k_0^2 n^2 + D_{xx} & D_{xy} \\ D_{yx} & \nabla_\perp^2 + k_0^2 n^2 + D_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \beta_\nu^2 \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

La ecuación (2.28) es un problema de autovalores β_ν^2 y autofunciones $\mathbf{E}_\nu^\perp(x, y)$, que son ortogonales sólo si se cumple la condición de guiaje débil (ver apéndice A).

2.5. Teoría de Modos Acoplados

2.5.1. Derivación desde un principio variacional

A partir de la ecuaciones (2.8) y (2.9) es posible despejar la constante de propagación k_z en términos del vector de Poynting $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\text{Re}\{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\}$, similar a lo desarrollado en la referencia [46].

$$k_z = \frac{\frac{1}{4i} \iint (-\nabla_{\perp} \times \mathbf{E} + i\omega\mu_0 \mathbf{H}) \cdot \mathbf{H}^* + (\nabla_{\perp} \times \mathbf{H} + i\omega\varepsilon_0 n^2 \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E}^* dx dy}{\frac{1}{4} \iint (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{z}} dx dy}. \quad (2.29)$$

De esta manera, al proponer un Ansatz en términos de superposición de modos de las guías individuales del estilo $\mathbf{E} = \sum_i a_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{H} = \sum_i a_i \mathbf{h}_i$, los coeficientes a_i quedan indeterminados pero sujetos a minimizar la expresión para k_z . Notemos además que el Ansatz simplifica bastante la mencionada expresión.

$$(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{z}} = \sum_{ij} a_i^* (\mathbf{e}_j \times \mathbf{h}_i^* + \mathbf{e}_i^* \times \mathbf{h}_j) \cdot \hat{\mathbf{z}} a_j \equiv \sum_{ij} a_i^* p_{ij} a_j.$$

$$\begin{aligned} \text{integrando numerador} &= i \sum_{ij} a_i^* k_z^j (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{h}_i^* a_j + a_j (\omega\varepsilon_0 (n^2 - n_j^2) \mathbf{e}_j - k_z^j \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{h}_j) \cdot \mathbf{e}_i^* a_i^*, \\ &= i \sum_{ij} a_i^* [k_z^j p_{ij} + \omega\varepsilon_0 (n^2 - n_j^2) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i^*] a_j. \end{aligned}$$

Definiendo

$$P_{ij} \equiv \frac{1}{4} \iint (\mathbf{e}_j \times \mathbf{h}_i^* + \mathbf{e}_i^* \times \mathbf{h}_j) \cdot \hat{\mathbf{z}} dx dy, \quad (2.30)$$

$$= \frac{1}{4\omega\mu_0} \iint [(k_z^i + k_z^j) (\mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_j - e_{z,i}^* e_{z,j}) + i (\mathbf{e}_i^* \cdot \nabla_{\perp} e_{z,j} + \mathbf{e}_j \cdot \nabla_{\perp} e_{z,i}^*)] dx dy, \quad (2.31)$$

$$H_{ij} \equiv P_{ij} k_z^j + \frac{\omega\varepsilon_0}{4} \iint (n^2 - n_j^2) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i^* dx dy, \quad (2.32)$$

se puede escribir la expresión (2.29) para la constante de propagación k_z de manera compacta como un cociente de Rayleigh-Ritz:

$$k_z = \frac{\sum_{ij} a_i^* H_{ij} a_j}{\sum_{ij} a_i^* P_{ij} a_j}. \quad (2.33)$$

Diferenciando con respecto a a_k^* para optimizar el valor de k_z se tiene:

$$\frac{\partial k_z}{\partial a_k^*} = \frac{\sum_{ij} H_{ij} a_j \delta_{ik}}{\sum_{ij} a_i^* P_{ij} a_j} - \frac{(\sum_{ij} a_i^* H_{ij} a_j)(\sum_{ij} \delta_{ik} P_{ij} a_j)}{\left(\sum_{ij} a_i^* P_{ij} a_j\right)^2} = \frac{\sum_j (H_{jk} - k_z P_{kj}) a_j}{\sum_{ij} a_i^* P_{ij} a_j} \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.34)$$

Recuperando $k_z \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial z}$, se obtienen las ecuaciones de N modos acoplados no ortogonales:

$$-i \sum_j P_{kj} \frac{da_j}{dz} = \sum_j H_{kj} a_j, \text{ con } k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.35)$$

Claramente, de la expresión (2.30) para P_{ij} , se cumple hermiticidad. A primera vista, puede parecer que H_{ij} no es hermítica, pero veamos que sí lo es. Para ello, basta considerar la resta $H_{ij} - H_{ji}^*$ y notar que se anula:

$$\begin{aligned}
H_{ij} - H_{ji}^* &= P_{ij}k_z^j - P_{ji}^*k_z^i + \frac{\omega\varepsilon_0}{4} \iint (n_i^2 - n_j^2) \mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_j dx dy \\
&= \frac{1}{4} \iint (k_z^j - k_z^i) (\mathbf{e}_j \times \mathbf{h}_i^* + \mathbf{e}_i^* \times \mathbf{h}_j) \cdot \hat{\mathbf{z}} + \omega\varepsilon_0(n_i^2 - n_j^2) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i^* dx dy \\
&= \frac{1}{4} \iint (i\nabla_\perp \times \mathbf{e}_j + \omega\mu_0 \mathbf{h}_j) \cdot \mathbf{h}_i^* - (i\nabla_\perp \times \mathbf{h}_j - \omega\varepsilon_0 n_j^2 \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_i^* dx dy \\
&\quad - \frac{1}{4} \iint (i\nabla_\perp \times \mathbf{e}_i^* + \omega\mu_0 \mathbf{h}_i^*) \cdot \mathbf{h}_j + (i\nabla_\perp \times \mathbf{h}_i^* + \omega\varepsilon_0 n_i^2 \mathbf{e}_i^*) \cdot \mathbf{e}_j dx dy \\
&\quad + \frac{\omega\varepsilon_0}{4} \iint (n_i^2 - n_j^2) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i^* dx dy \\
&= \frac{i}{4} \iint (\nabla_\perp \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{h}_i^* - (\nabla_\perp \times \mathbf{h}_j) \cdot \mathbf{e}_i^* + (\nabla_\perp \times \mathbf{e}_i^*) \cdot \mathbf{h}_j - (\nabla_\perp \times \mathbf{h}_i^*) \cdot \mathbf{e}_j dx dy \\
&= \frac{i}{4} \iint \nabla_\perp \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{h}_i^* + \mathbf{e}_i^* \times \mathbf{h}_j) dx dy = \frac{i}{4} \oint_C (\mathbf{e}_j \times \mathbf{h}_i^* + \mathbf{e}_i^* \times \mathbf{h}_j) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donde se ha usado que los campos deben decaer a cero en el infinito. Las ecuaciones (2.35) se pueden obtener a partir de un Principio de Mínima Acción luego de definir el Lagrangiano L de tipo campo discreto de Schrödinger:

$$L = - \sum_{ij} a_i^* \left(iP_{ij} \frac{d}{dz} + H_{ij} \right) a_j. \quad (2.36)$$

Los momentos generalizados de este Lagrangiano son $\Pi_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_k} = -i \sum_j a_j^* P_{jk}$, por lo que el Hamiltoniano H asociado es:

$$H = \sum_j \Pi_j \dot{a}_j - L = \sum_{ij} -ia_i^* P_{ij} \dot{a}_j + a_i^* \left(iP_{ij} \frac{da_j}{dz} + H_{ij} a_j \right) = \sum_{ij} a_i^* H_{ij} a_j. \quad (2.37)$$

Dado que el Lagrangiano no depende explícitamente de z , el Hamiltoniano H es una cantidad conservada. Al variar el Lagrangiano se tiene:

$$\begin{aligned}
\delta L &= \sum_{ij} \frac{\partial L}{\partial a_j} \delta a_j + \frac{\partial L}{\partial a_i^*} \delta a_i^* + \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_j} \delta \dot{a}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i^*} \delta \dot{a}_i^* \\
&= \sum_{ij} \left(\frac{\partial L}{\partial a_j} - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_j} \right) \delta a_j + \left(\frac{\partial L}{\partial a_i^*} - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i^*} \right) \delta a_i^* + \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_j} \delta a_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i^*} \delta a_i^* \right) \\
&\Rightarrow \frac{d}{dz} \sum_{ij} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_j} \delta a_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i^*} \delta a_i^* \right) = 0.
\end{aligned}$$

El par de transformaciones asociadas al grupo unitario U(1), $a_j \rightarrow a'_j = e^{i\phi} a_j$, $a_i^* \rightarrow a'^*_i = e^{-i\phi} a_i^*$ dejan invariante el Lagrangiano, y si se toma una variación infinitesimal $\phi \ll 1$ se tiene $\delta a_j = i\phi a_j$

y $\delta a_i^* = -i\phi a_i^*$, por lo que la cantidad conservada, P , que se identifica con la potencia total del sistema y está directamente relacionada con el vector de Poynting es:

$$P = \sum_{ij} a_i^* P_{ij} a_j = \iint \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{z}} dx dy. \quad (2.38)$$

Se tienen entonces dos cantidades conservadas en la dinámica, H y P , que serán de utilidad para verificar la validez de soluciones numéricas a la ecuación (2.35).

2.5.2. Dímero TE en guías de onda tipo losa

Para los modos TE fundamentales (condición antisimétrica) y las ecuaciones (2.12) se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{j\perp} &= \hat{\mathbf{y}} \frac{i\omega\mu_0 H_{a1}}{k_0^2 n_j^2 - (k_z^j)^2} \begin{cases} -\alpha \cos(\alpha(x - x_j)), & |x - x_j| \leq a \\ \beta \sin(\alpha a) e^{-\beta(|x - x_j| - a)}, & |x - x_j| > a \end{cases} \\ \mathbf{h}_{j\perp} &= \hat{\mathbf{x}} \frac{ik_z^j H_{a1}}{k_0^2 n_j^2 - (k_z^j)^2} \begin{cases} \alpha \cos(\alpha(x - x_j)), & |x - x_j| \leq a \\ -\beta \sin(\alpha a) e^{-\beta(|x - x_j| - a)}, & |x - x_j| > a \end{cases}. \end{aligned}$$

$x_j = jd$, con $d \geq 2a$ y $L = \int dy$. Elementos no diagonales tienen la forma:

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_{j\perp} \times \mathbf{h}_{i\perp}^*) \cdot \hat{\mathbf{z}} &= \frac{k_z^i \omega \mu_0 H_{a1}^2 \beta \sin(\alpha a)}{(k_0^2 n_j^2 - k_z^j)^2 (k_0^2 n_i^2 - k_z^i)^2} \begin{cases} \alpha \cos(\alpha(x - x_i)) e^{-\beta(|x - x_j| - a)}, & |x - x_i| \leq a \\ i \leftrightarrow j, & |x - x_j| \leq a \\ \beta \sin(\alpha a) e^{-\beta(|x - x_i| + |x - x_j| - 2a)}, & \text{otro caso} \end{cases} \\ P_{ij} &= \frac{L k_z^i k_0 \mu_0 c H_{a1}^2 \sin^2(\alpha a) e^{-\beta d} e^{\beta a}}{2\beta} \left[\frac{e^{-\beta a} + \beta(d - 2a) e^{\beta a}}{\beta^2} - \frac{2 \cosh(\beta a)}{\alpha^2 + \beta^2} \right]. \\ \tilde{H}_{ij} &\equiv H_{ij} - P_{ij} k_z^j = \frac{L k_0 \mu_0 c H_{a1}^2}{2\beta} \sin^2(\alpha a) e^{2\beta a} e^{-\beta d}. \end{aligned}$$

Elementos diagonales tienen la forma:

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_{j\perp} \times \mathbf{h}_{j\perp}^*) \cdot \hat{\mathbf{z}} &= \frac{k_z^j \omega \mu_0 H_{a1}^2}{(k_0^2 n_j^2 - k_z^j)^2} \begin{cases} \alpha^2 \cos^2(\alpha(x - x_j)), & |x - x_j| \leq a \\ \beta^2 \sin^2(\alpha a) e^{2\beta a} e^{-2\beta|x - x_j|}, & |x - x_j| > a \end{cases} \\ P_{jj} &= \frac{L k_z^j k_0 \mu_0 c H_{a1}^2 a}{2\alpha^2} \left[1 + \frac{\sin^2(\alpha a)}{a\beta^3} k_0^2 (n_1^2 - n_0^2) \right]. \\ \tilde{H}_{jj} &\equiv H_{jj} - P_{jj} k_z^j = \frac{L k_0^3 \mu_0 c H_{a1}^2 \sin^2(\alpha a) e^{2\beta a} e^{-2\beta d}}{4\beta^3} (n_1^2 - n_0^2) \sinh(2\beta a). \end{aligned}$$

La dinámica está regida por el sistema acoplado de las ecuaciones (2.35), que luego de premultiplicar por la inversa de la matriz P_{ij} toma la forma:

$$-i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{k} & C \\ C & \tilde{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

con $\tilde{k} \equiv k_z^{\text{TE}} + \delta k$, $k_z^{\text{TE}} \sim 1.3 \times 10^5 \text{ cm}^{-1}$, $C \equiv \frac{P_{ii}\tilde{H}_{ij}-P_{ij}\tilde{H}_{ii}}{P_{ii}^2-P_{ij}^2} \sim 1 \text{ cm}^{-1}$ y $\delta k \equiv \frac{P_{ii}\tilde{H}_{ii}-P_{ij}\tilde{H}_{ij}}{P_{ii}^2-P_{ij}^2} \sim -0.02 \text{ cm}^{-1}$ para $\lambda = 730 \text{ nm}$, $n_1 = n_0 + 4 \times 10^{-4}$ y una distancia entre guías de $d = 18 \mu\text{m}$. La matriz $\hat{P}^{-1}\hat{H}$ se puede escribir en términos de las matrices de Pauli como $\tilde{k}I + C\sigma_x$, lo que permite utilizar sus propiedades para resolver la dinámica del sistema:

$$\begin{pmatrix} a_1(z) \\ a_2(z) \end{pmatrix} = e^{i[\tilde{k}I+C\sigma_x]z} \begin{pmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \end{pmatrix} = e^{ikz} \begin{pmatrix} \cos(Cz) & i \sin(Cz) \\ i \sin(Cz) & \cos(Cz) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \end{pmatrix}.$$

Una forma de encontrar el valor experimental del acoplamiento C es mediante la excitación individual de un modo. Con esto, la razón entre las potencias $|a_1(z)|^2$ y $|a_2(z)|^2$ permite despejar el acoplamiento para una distancia de propagación $z = L < \frac{\pi}{2C}$ conocida:

$$C = \frac{1}{L} \tan^{-1} \left(\left| \frac{a_2(L)}{a_1(L)} \right|^2 \right). \quad (2.39)$$

2.5.3. Bandas y Topología: Red de Su-Schrieffer-Heeger fotónica

Si bien es posible reformular las ecuaciones de Maxwell como un problema de autovalores en analogía a Mecánica Cuántica para plantear un análogo al Teorema de Bloch [47], la matriz $\hat{C} \equiv \hat{P}^{-1}\hat{H}$ hermítica de la ecuación (2.35) es justificación suficiente para invocarlo: Es posible expresar las soluciones del sistema en una base de cuasimomento cuya periodicidad sea la misma que la de la matriz \hat{C} .

El célebre modelo de Su-Schrieffer-Heeger (SSH) es uno de los sistemas más sencillos que exhibe *estados de borde topológicos* [48–50]. Originado para explicar la formación de estados electrónicos localizados en el poliacetileno, consiste en considerar únicamente dos tipos de acoplamiento: uno fuerte (enlace doble) y uno débil (enlace simple). En términos de Física del Sólido, corresponde a una red unidimensional con base de dos sitios. En la Figura 2.5 se ilustra el modelo a estudiar, que se corresponde al siguiente Hamiltoniano H .

$$H = \sum_n tb_n^*a_n + t'a_{n+1}^*b_n + c.c.$$

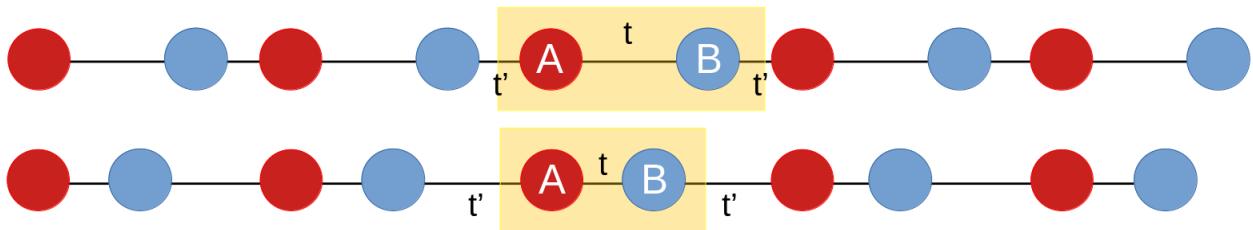


Figura 2.5: Esquema del modelo SSH. En amarillo se encierra la celda unitaria, donde se distinguen los sitios A y B y el acoplamiento intracelda (intercelda) t (t'). Se muestran dos configuraciones distintas.

En condiciones de borde periódicas (Born-von Karman), es posible diagonalizar el Hamiltoniano en la base de Bloch con $a_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k a_k e^{iknd}$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k b_k e^{iknd}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{N} \sum_n \sum_{kk'} \left[(t + t' e^{ikd}) a_k b_{k'}^* e^{i(k-k')nd} + (t + t' e^{-ikd}) a_k^* b_{k'} e^{-i(k-k')nd} \right] \\ &= \sum_k \begin{pmatrix} a_k^* & b_k^* \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & t + t' e^{-ikd} \\ t + t' e^{ikd} & 0 \end{pmatrix}}_{\hat{H}(k)} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde se ha usado que

$$\frac{1}{N} \sum_n e^{i(k-k')nd} = \begin{cases} \frac{N}{N} = 1, & \text{si } k = k' \\ \frac{1 - e^{i(k-k')Nd}}{N} e^{i(k-k')d} = 0, & \text{si } k \neq k' \end{cases} = \delta_{kk'},$$

pues $k, k' \in \left\{ \frac{2\pi l}{Nd}, l = 0, \pm 1, \dots, \pm \frac{N}{2} \right\}$ pertenecen a la red recíproca 1D. El espectro de $\hat{H}(k)$ es $\lambda_k = \pm \sqrt{t^2 + t'^2 + 2tt' \cos(kd)}$, lo que pareciera indicar que el sistema es simétrico entre t y t' . Sin embargo, el cuadro no está completo sin los autovectores de $\hat{H}(k)$, $\mathbf{v}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pm e^{-i\phi(k)} \\ 1 \end{pmatrix}$, con

$\phi(k) = \tan^{-1} \left(\frac{t' \sin(kd)}{t + t' \cos(kd)} \right)$. Si se define $\mathbf{d}(k) \equiv \begin{pmatrix} t + t' \cos(kd) \\ t' \sin(kd) \\ 0 \end{pmatrix}$ es posible escribir el Hamiltoniano $\hat{H}(k)$

en términos de las matrices de Pauli $\hat{H}(k) = \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, además de asociar la fase $\phi(k)$ al ángulo que forma la proyección del vector $\mathbf{d}(k)$ en el plano xy , $\phi(k) = \tan^{-1} \left(\frac{dy}{dx} \right)$. En particular, cuando $\delta \equiv \frac{t}{t'} < 1$, el vector $\mathbf{d}(k)$ encierra el origen una vez, mientras que para $\delta > 1$ no se encierra el origen, como se aprecia en la Figura 2.6. Formalmente, las fases de Zak \mathcal{Z}_\pm asociadas a los autoestados del bullo cambian dependiendo del valor de δ . Por definición [51],

$$\mathcal{Z}_\pm = i \oint \mathbf{v}_\pm^\dagger \frac{d\mathbf{v}_\pm}{dk} dk = -\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{d}}^{\frac{\pi}{d}} \frac{d\phi(k)}{dk} dk = -\frac{d}{2} \int_{-\frac{\pi}{d}}^{\frac{\pi}{d}} \frac{1 + \delta \cos(kd)}{\delta^2 + 1 + 2\delta \cos(kd)} dk = -\frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1 - \delta^2}{|1 - \delta^2|} \right).$$

Es decir,

$$\mathcal{Z}_\pm = \begin{cases} -\pi, & \text{si } |\delta| < 1 \\ 0, & \text{si } |\delta| > 1 \end{cases}.$$

El cambio en la fase de Zak al variar el parámetro δ se conoce como *transición topológica* puesto que no es posible pasar de un régimen a otro de forma suave. Esto tiene implicancias en el sistema con condiciones de borde abiertas (Dirichlet) debido a la *correspondencia bullo-borde* [52]. En concreto, así como se ilustra en la Figura 2.7, la topología del Hamiltoniano $\hat{H}(k)$ induce la aparición de estados de borde a energía cero al imponer condiciones de borde abiertas. El Hamiltoniano del modelo SSH presenta diversas simetrías: de reversión temporal, de inversión, partícula-hueco, traslacional y quiral. Esta última es de particular relevancia, pues los estados de borde del modelo SSH están *topológicamente protegidos* ante cualquier desorden que respete la simetría quiral [53]. El operador quiral en cuestión es la matriz de Pauli σ_z , pues

$$\{\hat{H}(k), \sigma_z\} = \{d_x \sigma_x + d_y \sigma_y, \sigma_z\} = d_x \{\sigma_x, \sigma_z\}^0 + d_y \{\sigma_y, \sigma_z\}^0 = 0.$$

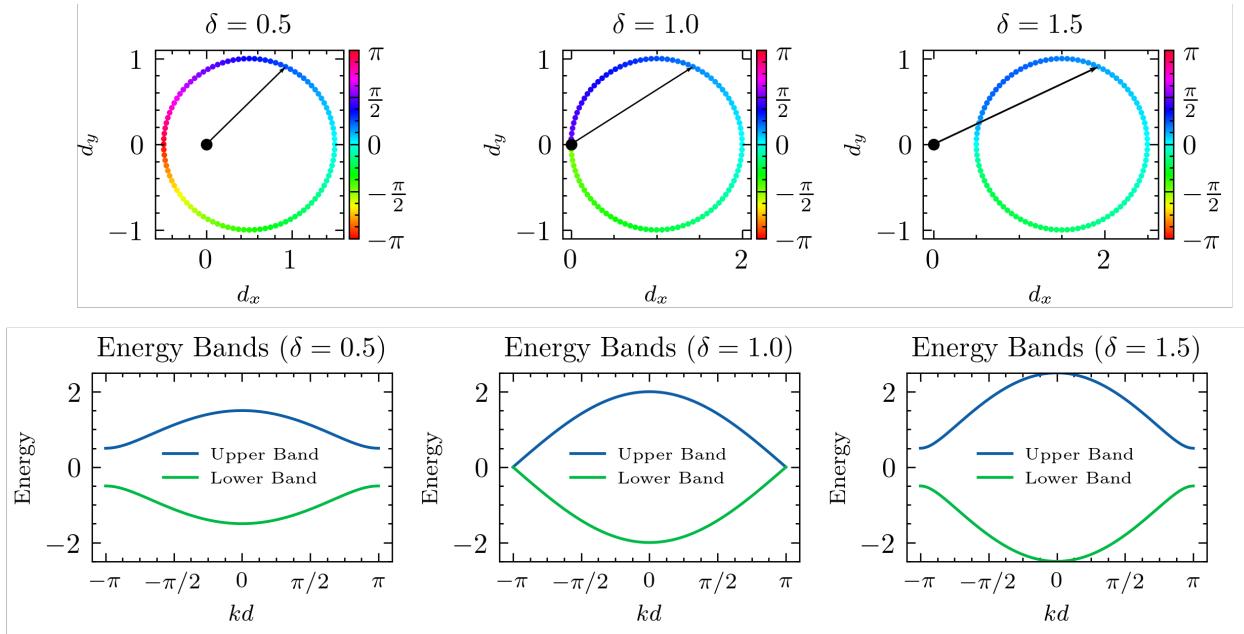


Figura 2.6: Topología de la red SSH. Se fija $t' = 1$ y se varía $\delta = \frac{t}{t'}$ para un número $N = 100$ de celdas unitarias. Arriba: Vectores \mathbf{d} y su fase. Para $\delta < 1$ ($\delta > 1$), (no) se encierra el origen. Abajo: Bandas en función del cuasimomento k en la primera zona de Brillouin para $\delta < 1$, $\delta = 1$ y $\delta > 1$.

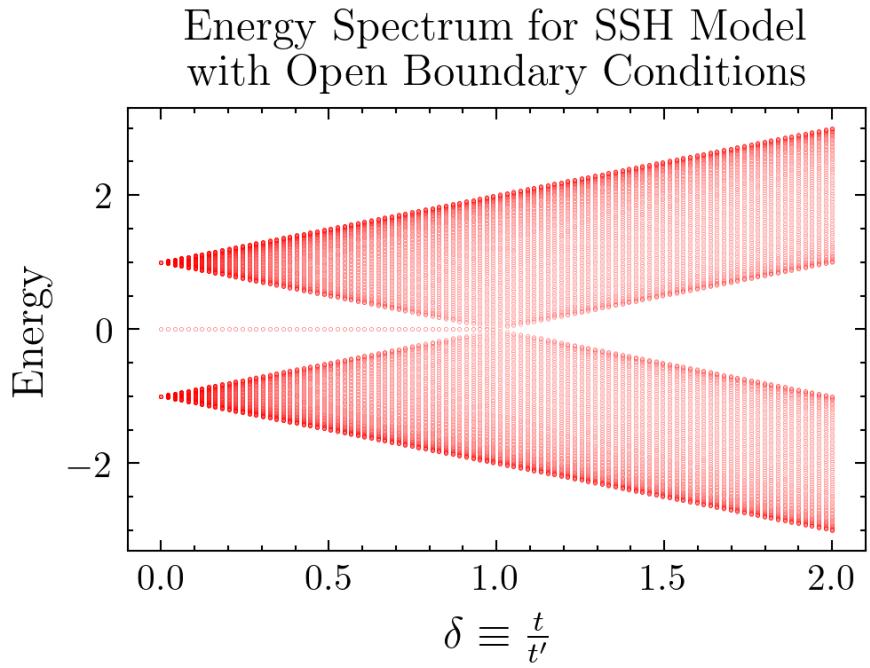


Figura 2.7: Espectro de la red SSH. Condiciones de borde abiertas en función del parámetro $\delta = \frac{t}{t'}$, para $t' = 1$ fijo y para un número $N = 100$ de celdas unitarias.

3. Métodos Numéricos

En este capítulo se presentan los métodos numéricos fundamentales utilizados en el desarrollo de esta tesis. Dado que muchos sistemas fotónicos carecen de soluciones analíticas exactas, los enfoques numéricos resultan esenciales para modelar su comportamiento electromagnético. Estos métodos permiten aproximar soluciones con precisión controlada, incluso en geometrías donde no existe alguna simetría a explotar.

El punto de partida lo constituyen las ecuaciones (2.6) y (2.7), que describen la propagación de campos electromagnéticos en medios dieléctricos. Cuando se aplica la aproximación de guaje débil los términos del lado derecho de ambas ecuaciones pueden despreciarse. Esta simplificación elimina los efectos cruzados entre componentes de campo, reduciendo el sistema a ecuaciones escalares de tipo Helmholtz:

$$[\nabla^2 + k_0^2 n^2(\mathbf{r})] \Psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.1)$$

donde la ecuación (3.1) no solo sirve como marco teórico, sino también como base para los algoritmos desarrollados en los siguientes capítulos. Su versatilidad permite adaptar diferentes esquemas numéricos según las simetrías del problema, como se detallará en las secciones posteriores.

3.1. Expansión en Modos Normales

Este método numérico es útil cuando los sistemas fotónicos en estudio son invariantes en la dirección de propagación z . Esto es, $n(\mathbf{r}) \equiv n(x, y)$. La soluciones de la ecuación (3.1) se pueden expandir en ondas planas con perfiles transversales: $\Psi(\mathbf{r}) = \Psi(x, y) \exp(i\beta z)$. Con ésto, cada modo transversal ν debe cumplir la siguiente ecuación a resolver numéricamente:

$$[\nabla_{\perp}^2 + k_0^2 n^2(x, y)] \Psi_{\nu}(x, y) = \beta_{\nu}^2 \Psi_{\nu}(x, y), \quad \text{con } \nabla_{\perp}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (3.2)$$

Y el campo total propagado es una combinación lineal de los modos Ψ_{ν} :

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{\nu} a_{\nu} \Psi_{\nu}(x, y) e^{i\beta_{\nu} z}, \quad \text{con } a_{\nu} \propto \Psi_{\nu}(x, y) \cdot \Psi(x, y, z = 0). \quad (3.3)$$

En vez de integrar directamente la ecuación de valores propios (3.2), la estrategia será discretizar el espacio y aproximar al operador Laplaciano transversal ∇_{\perp}^2 como una matriz, pues

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, y)}{\partial x^2} \sim \frac{\Psi[i+1, j] - 2\Psi[i, j] + \Psi[i-1, j]}{\Delta x^2}.$$

$\nabla_{\perp}^2 \sim \hat{D}_{xx} \otimes I_y + I_x \otimes \hat{D}_{yy}$ La matriz es nula (*sparse-like*) en las posiciones no diagonales más allá de un espacio, por lo que es posible optimizar el proceso de cómputo al utilizar la librería de Python `scipy.sparse.linalg`, especialmente diseñada para el álgebra lineal de matrices de

escasos elementos. El anexo B contiene una implementación de este algoritmo en Python bajo licencia GNU GPL v3.

En la Figura 3.1 se valida el método numérico mediante comparación con las soluciones analíticas obtenidas en la subsección 2.2.1. La complejidad del problema es del orden $O(N^2)$ debido a la construcción de las matrices de $N \times N$, lo que se refleja en la dependencia del tiempo de ejecución en función del paso $\Delta x \equiv \frac{L}{N-1}$.

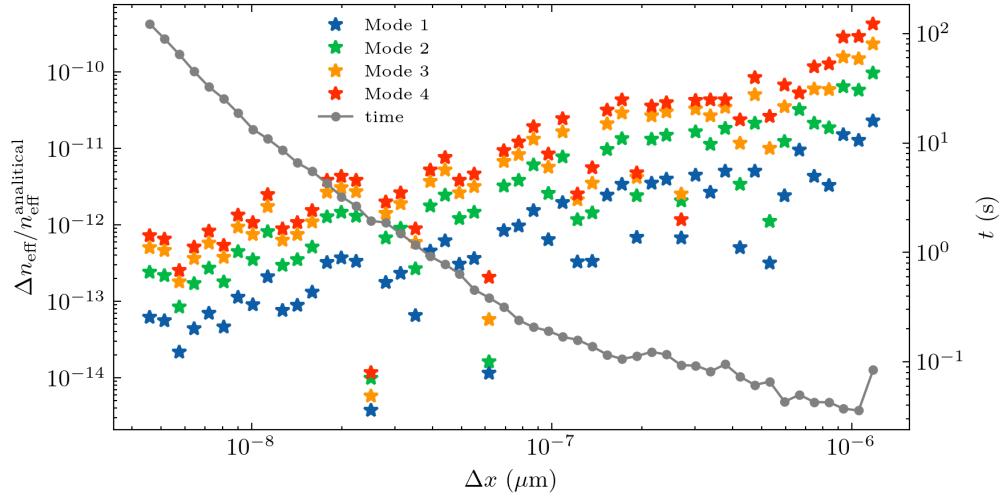


Figura 3.1: Error relativo y tiempo de ejecución de las soluciones numéricas a la ecuación (3.2) con respecto a las soluciones analíticas, en función del paso Δx .

3.2. Método de Propagación de Haces

Otra forma de abordar la integración numérica de la ecuación (3.1) consiste en separar el campo en su envolvente lenta y una fase rápidamente oscilante, considerando que en el rango visible el orden de magnitud es, $k_0 \sim 10^5 \text{ cm}^{-1}$: $\Psi(\mathbf{r}) = \phi(x, y, z) \exp(ik_0 n_0 z)$. Luego de reemplazar en la ecuación (3.1) se obtiene la ecuación óptica de Schrödinger [54]:

$$-2ik_0 n_0 \frac{\partial}{\partial z} \phi(x, y, z) = \left[\nabla_{\perp}^2 + k_0^2 (n^2(\mathbf{r}) - n_0^2) \right] \phi(x, y, z), \quad (3.4)$$

donde se ha utilizado la aproximación paraxial $\left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right| \ll 2k_0 n_0 \left| \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|$. Los algoritmos que resuelven la ecuación (3.4) son conocidos como Métodos de Propagación de Haces o *Beam Propagation Methods* (BPM) escalares, utilizados ampliamente en esta área de investigación [16, 35, 36, 41, 55]. Fuera de la aproximación de guaje débil, los efectos de polarización cruzada son más relevantes y se hace necesaria una descripción vectorial del problema.

3.2.1. Implementación mediante transformada de Fourier (FTBPM)

La ecuación (3.4) se puede escribir en términos de operadores lineales como [55]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = (\hat{A} + \hat{B})\phi, \text{ con } \hat{A} \equiv i \frac{\nabla_{\perp}^2}{2k_0 n_0} \text{ y } \hat{B} \equiv i \frac{k_0}{2n_0} [n^2(\mathbf{r}) - n_0^2]. \quad (3.5)$$

La solución formal a la ecuación (3.5) es $\phi(\mathbf{r}) = \exp[(\hat{A} + \hat{B})(z - z_0)]\phi(x, y, z_0)$. Es conveniente trabajar con el operador \hat{A} en el espacio de Fourier y con el operador \hat{B} en el espacio directo. Dado que \hat{A} y \hat{B} no conmutan en general, se puede expandir el operador exponencial a orden $O(\Delta z^3)$ como $\exp[(\hat{A} + \hat{B})\Delta z] \approx \exp\left(\frac{i k^2 \Delta z}{4k_0 n_0}\right) \exp(\hat{B}\Delta z) \exp\left(\frac{i k^2 \Delta z}{4k_0 n_0}\right) + O(\Delta z^3)$.

El algoritmo a implementar es el siguiente:

1. Se comienza con un perfil $\phi(x, y, z_0)$
2. Se actúa en el espacio de Fourier transformando el perfil y multiplicado por la fase asociada a \hat{A} : $\exp\left(\frac{i k^2 \Delta z}{4k_0 n_0}\right) \mathcal{F}(\phi(z_0))$, donde $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ son las frecuencias de Fourier.
3. Se aplica transformada de Fourier inversa y se multiplica por la fase asociada a \hat{B} :

$$\exp\left[\frac{i \Delta z k_0^2 (n^2 - n_0^2)}{2k_0 n_0}\right] \mathcal{F}^{-1}\left(\exp\left(\frac{i k^2 \Delta z}{4k_0 n_0}\right) \mathcal{F}(\phi(z_0))\right)$$
4. Se regresa al espacio de Fourier y se multiplica por la fase asociada a \hat{A} :

$$\exp\left(\frac{i k^2 \Delta z}{4k_0 n_0}\right) \mathcal{F}\left\{\exp\left[\frac{i k_0^2 (n^2 - n_0^2)}{2k_0 n_0} \Delta z\right] \mathcal{F}^{-1}\left[\exp\left(\frac{i k^2 \Delta z}{4k_0 n_0}\right) \mathcal{F}(\phi(z_0))\right]\right\}$$
5. Se vuelve al espacio real, habiendo avanzado un paso Δz :

$$\phi(z_0 + \Delta z) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\exp\left(\frac{i k^2 \Delta z}{4k_0 n_0}\right) \mathcal{F}\left\{\exp\left[\frac{i k_0^2 (n^2 - n_0^2)}{2k_0 n_0} \Delta z\right] \mathcal{F}^{-1}\left[\exp\left(\frac{i k^2 \Delta z}{4k_0 n_0}\right) \mathcal{F}(\phi(z_0))\right]\right\}\right\}$$
6. Se itera hasta llegar a la distancia de propagación z deseada.

En la Figura 3.2 se comparan los resultados experimentales con las simulaciones numéricas obtenidas mediante BPM. Los perfiles de intensidad normalizados muestran un acuerdo cualitativo notable, particularmente en la distribución espacial de los lóbulos principales.

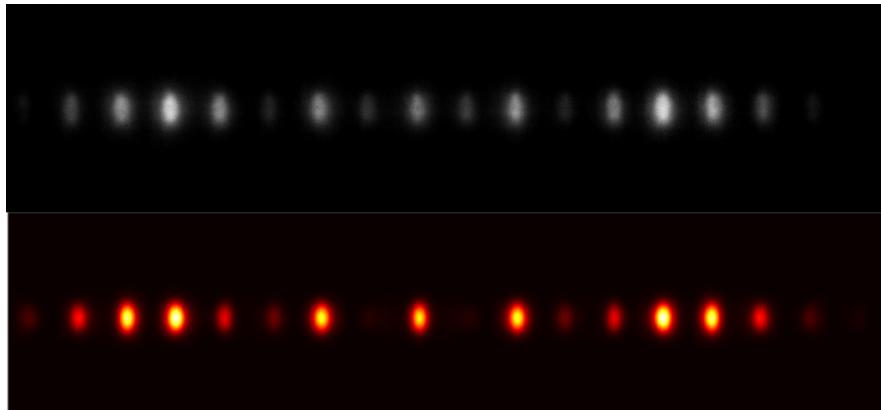


Figura 3.2: Excitación del sitio central de una red unidimensional. **Arriba:** Medición experimental a $\lambda = 730$ nm. **Abajo:** Simulación numérica realizada con BPM.

Este nivel de concordancia valida la aproximación de guiado débil empleada en la ecuación (3.1), así como la aproximación paraxial, y refuerza la confiabilidad del método numérico para el diseño de dispositivos fotónicos con geometrías análogas.

3.3. Desde la Teoría de Modos Acoplados

La simulación numérica de las ecuaciones (2.35) representa la formulación más compacta posible, dado que la matriz de acoplamientos $\hat{C} \equiv \hat{P}^{-1}\hat{H}$ codifica todas las propiedades de la red que se desean estudiar de manera semiempírica. En este sentido, la diagonalización de \hat{C} constituye una herramienta numérica valiosa para analizar el comportamiento de redes fotónicas ante variaciones de parámetros como la dimerización (razón entre dos constantes de acoplamiento) o el desintonizado (diferencia entre constantes de propagación de modos distintos). Además, este enfoque permite explorar incluso sistemas “no físicos”, gracias a los grados de libertad disponibles en las entradas de \hat{C} .

En la aproximación de guaje débil se pueden despreciar las componentes longitudinales del campo eléctrico:

$$\nabla \cdot (n^2 \mathbf{E}) \xrightarrow{n^2 \sim 0} n^2 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0,$$

donde el orden de magnitud de la componente longitudinal del campo es $|E_z| \sim |\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{\perp}|/\beta$. Así, los modos estudiados son quasi-transversales, y la matriz \hat{P} se reduce a:

$$P_{ij} \sim \frac{k_z^i + k_z^j}{4\omega\mu_0} \iint (\mathbf{e}_i^{\perp})^* \cdot \mathbf{e}_j^{\perp} dx dy. \quad (3.6)$$

La ecuación (3.6), que cuantifica el solapamiento entre modos, junto con la ecuación (2.32) que describe los elementos de matriz del operador Hamiltoniano, constituyen herramientas fundamentales para el análisis comparativo entre el método de Expansión en Modos Normales (EME) y la Teoría de Modos Acoplados (CMT). Esta comparación se realiza a través de un estudio sistemático del espectro de autovalores de la matriz de acoplamientos \hat{C} , el cual contiene información esencial sobre las constantes de propagación efectivas del sistema.

La Figura 3.3 presenta un análisis cuantitativo de esta comparación, mostrando la evolución de los autovalores para un acoplador fotónico dieléctrico en función de la distancia de separación entre guías. Se observa que ambos métodos convergen asintóticamente para distancias mayores a $d > 20 \mu\text{m}$, donde la aproximación de campo débil de CMT resulta válida. Sin embargo, en el régimen de acoplamiento fuerte ($d < 13 \mu\text{m}$), las discrepancias comienzan a hacerse notar.

Más allá del análisis espectral, la validez de los autoestados calculados puede verificarse indirectamente mediante la ecuación (3.3), que relaciona la evolución del campo con la proyección sobre los modos propios del sistema y comparando cualitativamente los perfiles dinámicos obtenidos con los resultados experimentales y numéricos mostrados en la Figura 3.2

Este análisis (ver Figura 3.4) permite establecer los límites de aplicabilidad de cada método numérico: mientras que EME proporciona resultados precisos en todo el rango de parámetros a costa de mayor complejidad computacional, CMT ofrece una alternativa eficiente para sistemas débilmente acoplados donde la aproximación de modos localizados sigue siendo válida.

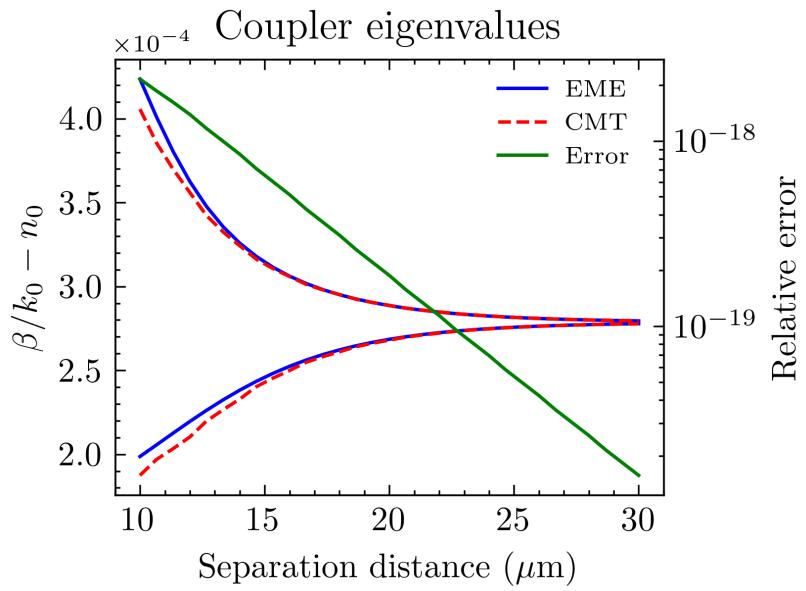


Figura 3.3: Comparación de los autovalores obtenidos con el método de Expansión en Modos Normales (EME) y con la Teoría de Modos Acoplados (CMT). Se observa mayor divergencia cuando la distancia entre guías es pequeña. Parámetros utilizados: $n_0 = 1.48$, $\Delta n = 4 \times 10^{-4}$, $\lambda = 730 \text{ nm}$ y $a = 3 \mu\text{m}$.

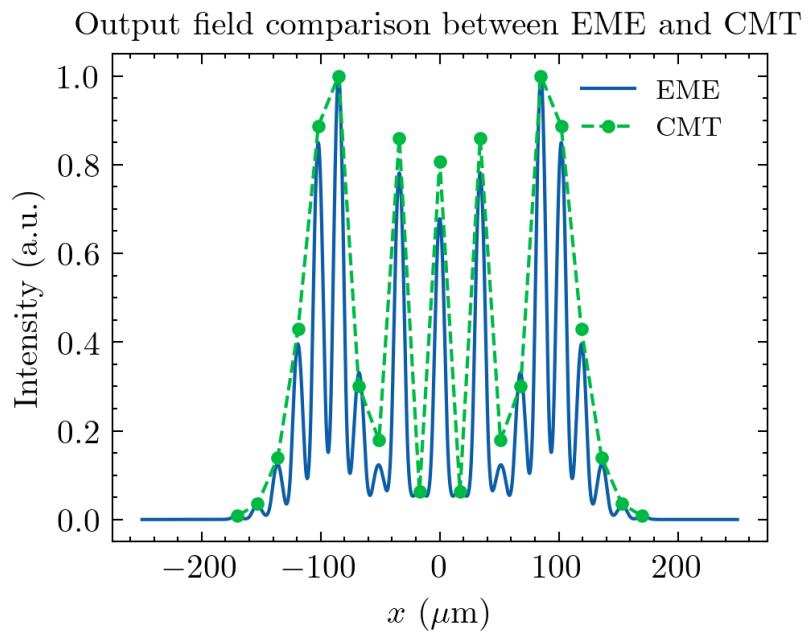


Figura 3.4: Perfil dinámico de un arreglo unidimensional de 21 guías simulado con CMT y con EME. Los resultados son similares a los de la Figura 3.2.

4. Métodos Experimentales

En este capítulo se detallan los procedimientos experimentales desarrollados para la fabricación y caracterización de redes fotónicas basadas en guías de onda. La metodología comprende tres aspectos fundamentales: (1) escritura directa de guías mediante láser femtosegundo, (2) sistemas de excitación óptica con láser supercontinuo, y (3) técnicas avanzadas de modulación espacial de luz para el control de condiciones iniciales.

4.1. Escritura directa de guías de onda

La fabricación de guías de onda se realizó mediante la técnica de escritura directa con láser femtosegundo: Pulsos ultracortos emitidos desde un láser de fibra Yb-dopado ATSEVA ANTAUS de 1030 nm, a una tasa de repetición de 500 kHz, son fuertemente enfocados en una muestra de borosilicato, produciendo cambios leves y permanentes en el índice de refracción local $\Delta n \sim 10^{-4} - 10^{-3}$. Este método permite crear estructuras tridimensionales mediante movimientos controlados por computador de la plataforma XYZ Aerotech Nanopositioner [56].

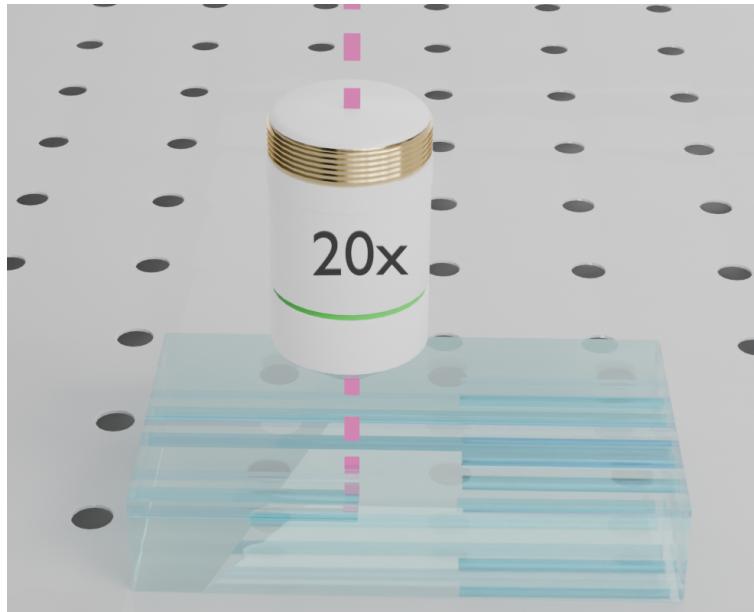


Figura 4.1: Esquema de la técnica de escritura de guías de onda. El haz láser es focalizado mediante objetivo microscópico (20x) mientras la muestra se desplaza en tres ejes mediante una plataforma controlada por computadora.

Los parámetros de escritura que funcionan para excitar modos en el espectro visible son:

- Ancho del pulso: 215 fs.
- Tasa de repetición: 500 kHz.
- Velocidad de escritura: 0.1 - 10.0 mm/s.
- Potencia de llegada medida: 90.0 - 144.0 mW.

4.2. Montaje de excitación láser supercontinuo

Para la caracterización óptica se implementó un sistema de excitación basado en un láser supercontinuo (SC) de banda ancha (470nm to 2200nm). Específicamente, el modelo es un YSL SC-5. La configuración permite seleccionar longitudes de onda específicas mediante un modulador acústico AOTF-PRO (430 nm-1450 nm), con una resolución espectral de ± 5 nm y una potencia de salida de 1 mW por longitud de onda.

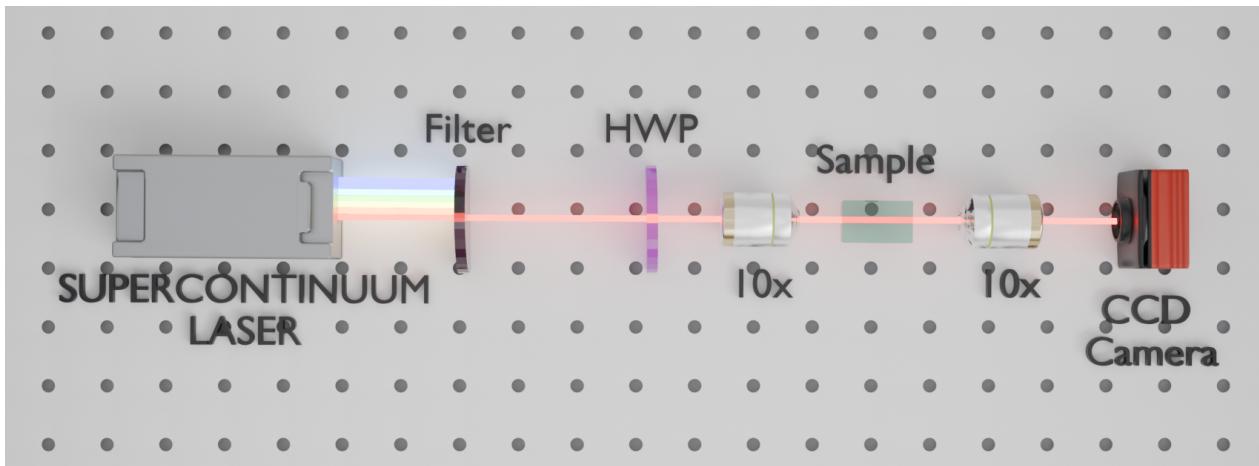


Figura 4.2: Montaje de excitación por láser supercontinuo. Filtro: Modulador acústico e iris. HWP: Retardador de media onda.

4.3. Montaje de modulación espacial de luz

Para usar condiciones iniciales distintas a una gaussiana se hace necesario incorporar métodos de modulación espacial de luz. En esta tesis se utilizó una técnica conocida como grabado de fase mediante holograma [57].

4.3.1. Etapa premodulación

El modulador espacial de luz utilizado es un HOLOEYE PLUTO-NIR SLM - Reflective LCOS (resolución 1920×1080 px, tamaño de píxel 8 μm), cuya respuesta óptica ocurre con polarización

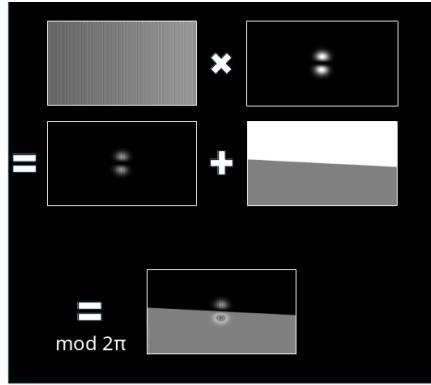


Figura 4.3: Algoritmo de modulación espacial de luz para máscaras de amplitud y fase arbitrarias. Los parámetros de la rejilla de difracción están sujetos a la longitud de onda usada (730 nm).

paralela al plano de la mesa óptica. Se utiliza un retardador de media onda ($\lambda/2$) seguido de un polarizador Glan-Thompson 100.000:1 con el objetivo de que la polarización de la luz láser coincida con la de la respuesta del SLM. Posteriormente se magnifica y se colima el haz para que abarque todo el área de pixeles disponible con un par de lentes 20x y L_1 de foco 100mm (telescopio). En la sección 4.3.6 se muestra una aplicación del interferómetro.

4.3.2. Etapa de modulación

Una rejilla de difracción que maximiza la potencia del primer orden de difracción es utilizada. Para modular en amplitud se debe multiplicar la rejilla por la máscara de amplitud deseada, mientras que para modular en fase basta con sumar el nivel de gris correspondiente a la fase deseada. En la Figura 4.3 se bosqueja el algoritmo implementado en Python en el anexo D.

4.3.3. Etapa de acoplamiento

La imagen modulada pasa por un par de lentes L_2 de foco 1000 mm y L_3 de foco 50 mm para reducir el tamaño al orden de los micrómetros. La inclinación de la cara de entrada de la muestra debe coincidir con el plano de la imagen modulada, por lo que se generan dos pares de haces gaussianos, unos verticales y otros horizontales, de manera de que al trasladar el lente objetivo 4x, los máximos de difracción se generen en el centro de los haces gaussianos.

4.3.4. Etapa de captura en cámara

Una vez calibrada la inclinación de la muestra, se fija su posición. Un lente objetivo 10x permite magnificar la imagen de salida y capturar los resultados en un Beam Profiler modelo BC106N-VIS con resolución espacial de 6.45 $\mu\text{m}/\text{píxel}$ [58].

Opcionalmente, se puede intervenir el montaje para superponer un interferómetro tipo Mach-Zehnder. Para ello, se debe colocar un Beam Splitter entre el lente L_1 y el SLM para usar el haz previo a la modulación como referencia. Para recombinar los haces y hacerlos interferir, se debe

colocar otro Beam Splitter entre el objetivo 10x y la cámara final. Dado que el haz de referencia tiende a ser más potente que la luz propagada, suele requerirse además un filtro de densidad neutra (ND-Filter) para equiparar ambos haces.

4.3.5. Circuito óptico

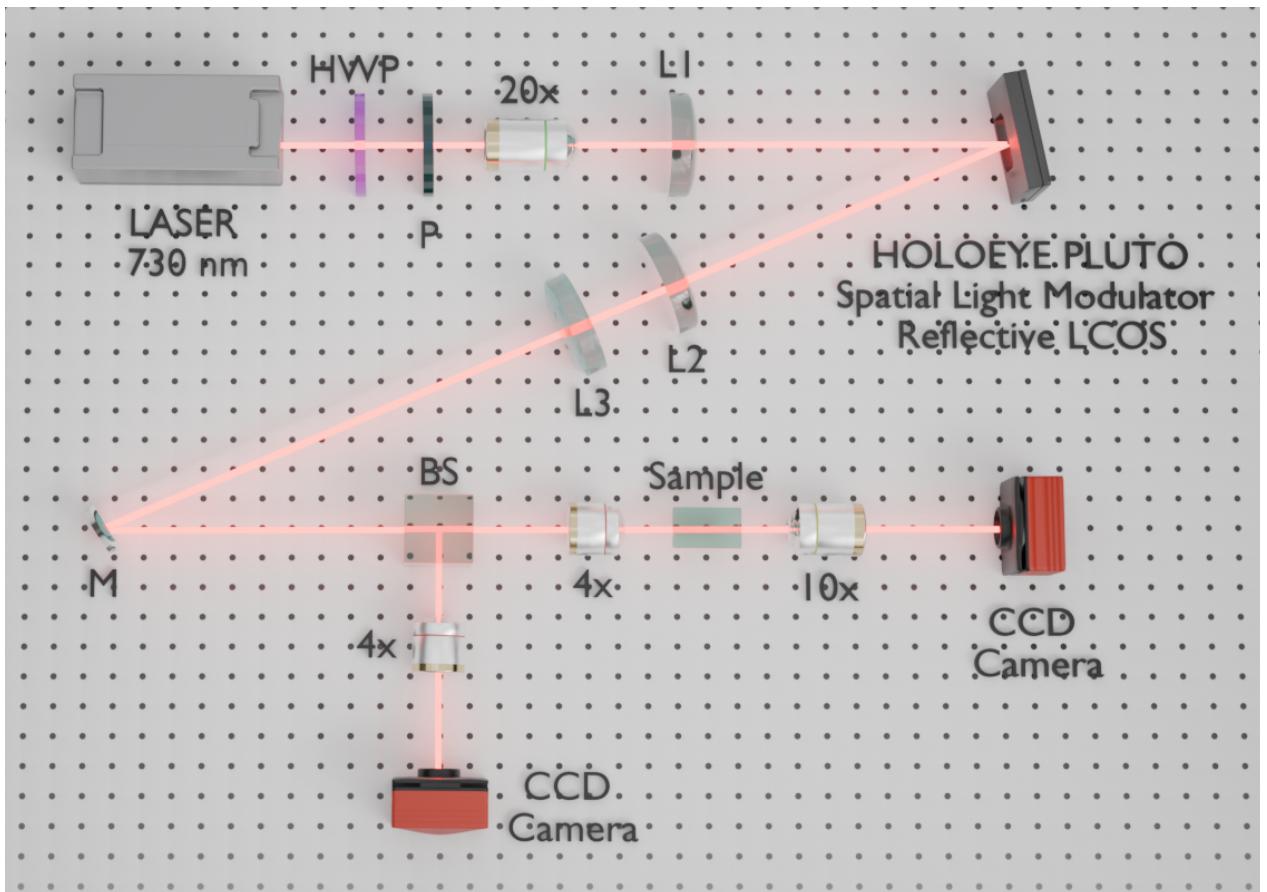


Figura 4.4: Diagrama completo del sistema de modulación espacial.

4.3.6. Generación de imágenes complejas

Una forma de verificar el control que se tiene en cuanto a la amplitud y la fase es mediante la generación de vórtices ópticos en el espacio libre, pues tienen bien definido su Momentum Angular Orbital (OAM). Con un interferómetro Mach-Zehnder es posible capturar el patrón de interferencia para la extracción del momentum angular ℓ : basta contar la cantidad de espirales que se originan desde el centro de simetría. A su vez, el signo de ℓ se puede inferir con la dirección de giro del OAM.

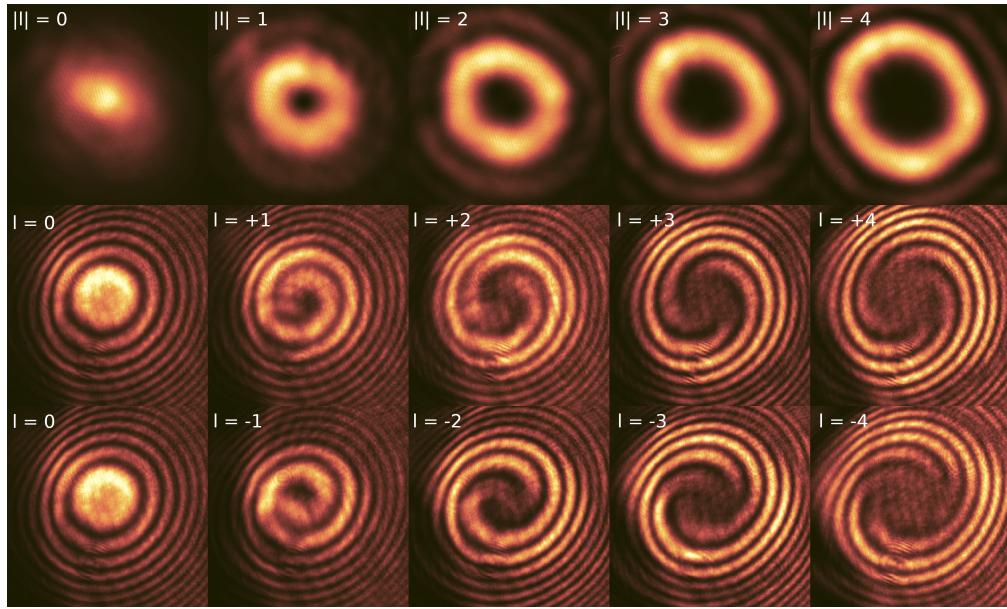


Figura 4.5: Generación de OAMs e interferencia tipo Mach-Zehnder. Se aprecia la carga de los OAMs (ℓ) contando la cantidad de espirales originados desde el centro.

4.4. Análisis de imágenes

A partir de las imágenes capturadas es posible extraer información de la potencia que contiene cada sitio del sistema fotónico discreto en estudio. Para ello la imagen completa debe ser seccionada equispaciadamente en rectángulos que encierran las regiones donde existen guías de onda, iluminadas o no. La potencia de cada sitio será entonces la suma de la intensidad de cada píxel encerrado en su rectángulo respectivo.

El procesamiento de imágenes incluye:

- Corrección de fondo
- Normalización por intensidad máxima.
- Segmentación automática mediante umbral.

Los datos obtenidos permiten reconstruir la distribución de potencia en la red fotónica y analizar fenómenos de acoplamiento entre guías vecinas.

5. Acoplamiento de modos p_y y ángulo de invisibilidad

En electrostática, es posible describir las interacciones dipolares eléctricas mediante los polinomios de Legendre de orden 2, $P_2(\cos \theta) = 3\cos^2 \theta - 1$, donde θ representa el ángulo entre los dipolos. El valor $\theta_m \approx 0.62$ radianes se denomina *ángulo mágico*, ya que anula el término de interacción dipolar [59].

Este capítulo se centra en los llamados modos p_y o modos dipolares verticales, cuya excitación requiere superar la condición de corte (longitud de onda suficientemente pequeña junto con un contraste Δn y un ancho de guía suficientemente grandes).

5.1. Acopladores

Al estudiar el acoplamiento entre modos p_y en guías elípticas, se distinguen dos casos límite:

1. Para acopladores horizontales, el acoplamiento C_π presenta signo positivo.
2. Para acopladores verticales, el acoplamiento C_σ tiene signo negativo [60].

Este comportamiento es análogo al observado en los enlaces químicos σ y π de las cadenas de carbono orgánicas. Para verificar este efecto, se fabricaron 20 dímeros con una separación de 25 μm y una distancia de propagación de 15 mm, variando el ángulo entre guías desde 0.00 rad hasta 1.57 rad. Mediante un modulador espacial de luz (SLM), se generó un modo P caracterizado por dos lóbulos de igual tamaño con una diferencia de fase de π entre ellos.

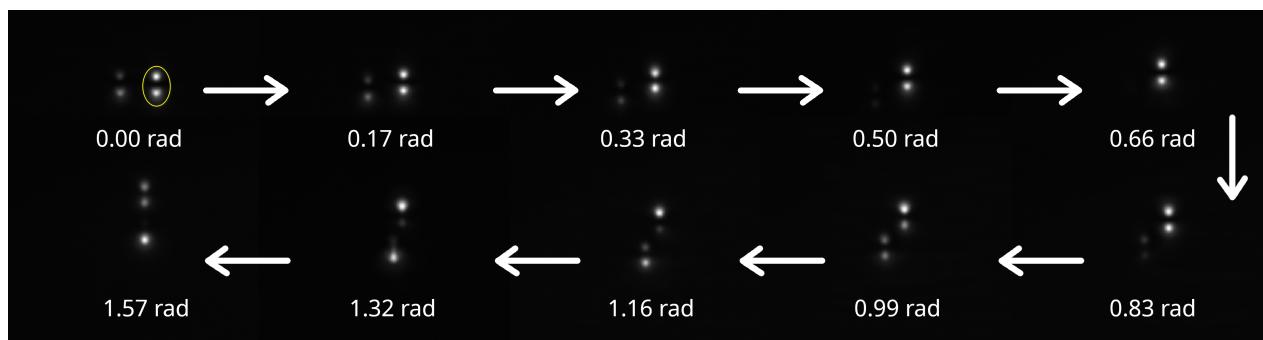


Figura 5.1: Barrido angular experimental para una distancia de propagación de 15 mm. Se observa el efecto del ángulo mágico entre 0.50 y 0.66 rad.

Se analizaron las imágenes siguiendo el método descrito en la Sección 4.4. Posteriormente, mediante la ecuación (2.39) para el acoplamiento dinámico, se caracterizó su comportamiento en

función del ángulo θ (medido desde la horizontal) para una separación fija de $25 \mu\text{m}$. El signo negativo se introdujo para garantizar la continuidad de la tendencia de los datos, como muestra la Figura 5.2.

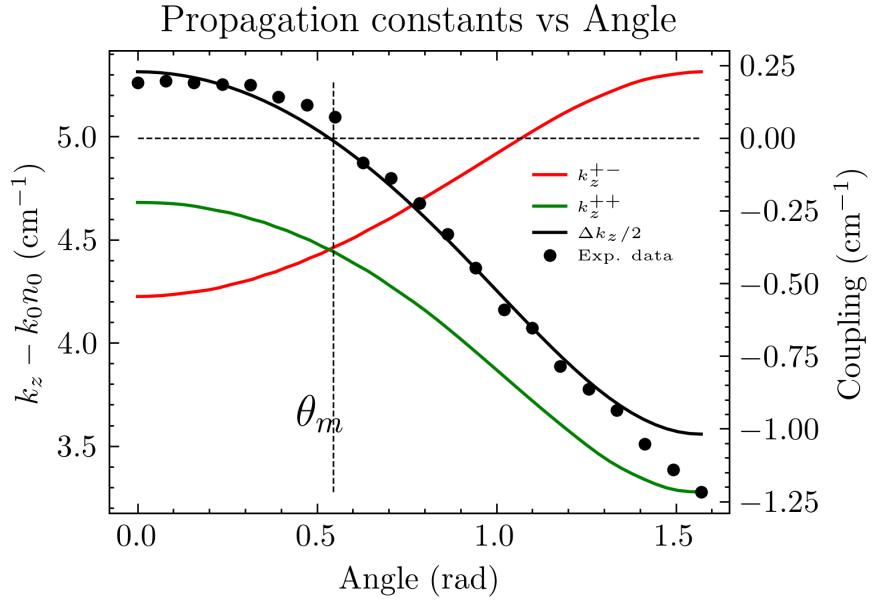


Figura 5.2: Constantes de propagación y acoplamientos en función del ángulo para modos p_y , calculados numéricamente mediante EME. Los resultados se comparan con los datos experimentales extraídos de la Figura 5.1.

5.2. Redes tipo panal de abeja

La red tipo panal de abeja, conocida por ser la estructura subyacente del grafeno, presenta propiedades relevantes para esta tesis, particularmente en sus bandas de Bloch: ambas son dispersivas y exhiben un punto de Dirac [61]. Una vez determinados los parámetros de fabricación en la sección anterior, se estudió el mismo efecto en una red tipo panal de abeja manteniendo constante la distancia entre sitios mientras se variaba el ángulo (Figura 5.3).

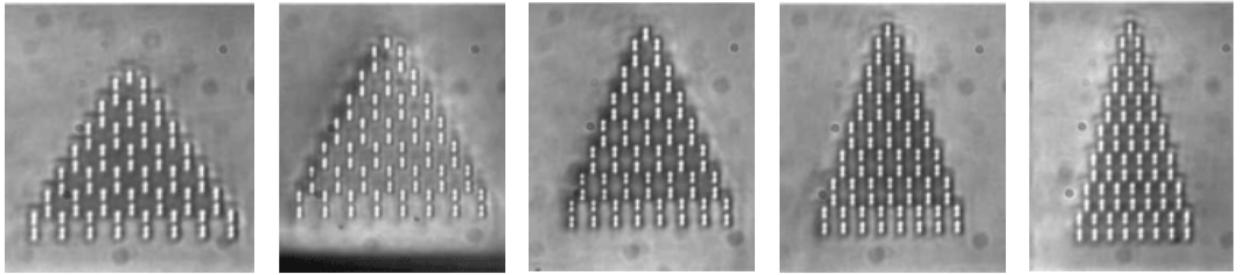


Figura 5.3: Micrografías de redes fotónicas tipo panal de abeja para modos p_y bajo iluminación con luz blanca.

Un modelo de primeros vecinos consideraría únicamente el acoplamiento vertical κ_σ y el acoplamiento angular κ_θ . Sin embargo, la descripción precisa de los datos experimentales requiere incluir acoplamientos hasta terceros vecinos, así como correcciones por no ortogonalidad. La Figura 5.4 muestra un esquema del modelo completo. El Hamiltoniano del sistema se expresa como:

$$\hat{H}_\Sigma = \hat{H}_{NN} + \hat{H}_{NNN} + \hat{H}_{NNNN}, \quad (5.1)$$

donde \hat{H}_{NN} , \hat{H}_{NNN} y \hat{H}_{NNNN} contienen los acoplamientos a primeros vecinos (κ_σ y κ_θ), segundos vecinos (t_π y $t_{\theta 2}$), y terceros vecinos ($t_{\theta 1}$ y $t_{\theta 3}$), respectivamente (ver Figura 5.4).

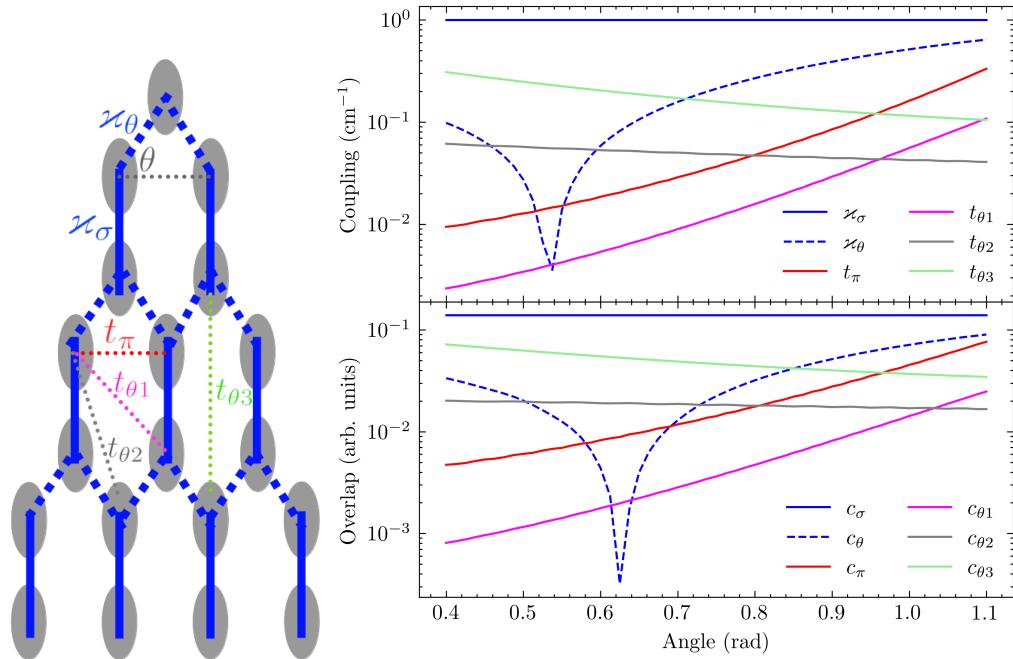


Figura 5.4: **Izquierda:** Esquema del modelo de panal de abeja para modos p_y con acoplamientos hasta terceros vecinos. **Derecha:** (Arriba) Valores absolutos de los acoplamientos en función del ángulo θ . (Abajo) Integrales de solapamiento normalizadas en función del ángulo θ .

Además, se define la matriz no ortogonal \hat{c} a partir de la matriz \hat{P} [ecuación (3.6)] como $c_{ij} = P_{ij}/I$, donde $I = P_{ii}$ es la intensidad del modo p_y , de modo que los elementos diagonales de \hat{c} sean iguales a 1. De manera similar a los acoplamientos, en la Figura 5.4 se grafica la magnitud de los solapamientos en función del ángulo.

El Hamiltoniano no hermítico $\hat{H}'_\Sigma \equiv \hat{c}^{-1}\hat{H}_\Sigma$ describe la dinámica de la red e incorpora tanto efectos no ortogonales como acoplamientos de largo alcance. En la Figura 5.5 se muestra el espectro en función del ángulo θ . Se distinguen principalmente dos regiones: una para ángulos $0.4 < \theta < 0.7$, en la que los autovalores se agrupan en tres bandas cuasiplanas, y otra para ángulos $0.7 < \theta < 1.1$, en la que la brecha disminuye en magnitud y, por tanto, se incrementa el transporte en la red. Se calcula el grado de participación inverso (IPR, por sus siglas en inglés) de cada autoestado como $IPR = \sum_i I_i^2 / (\sum_i I_i)^2$. Esto permite la descripción adecuada de los datos experimentales mostrados en el panel derecho de la Figura 5.5.

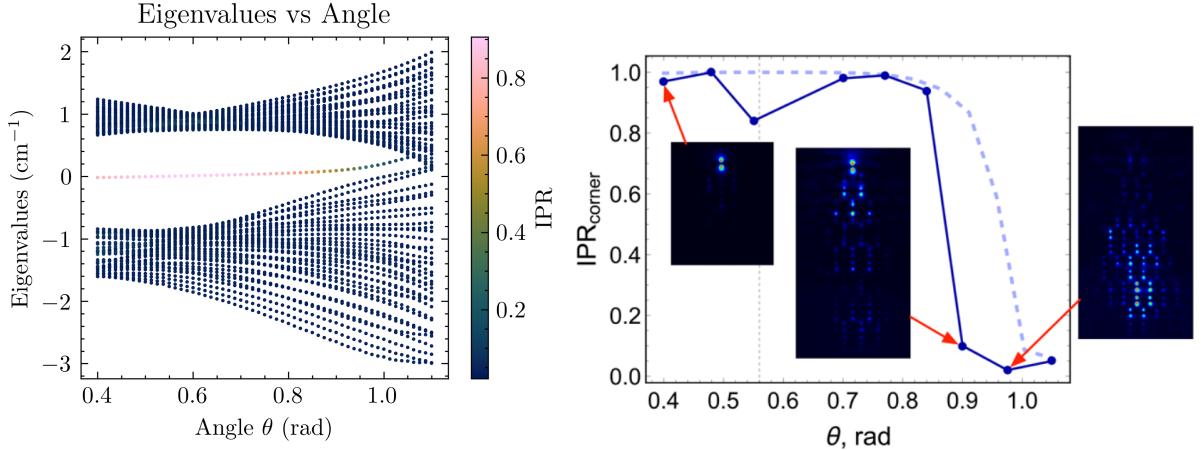


Figura 5.5: **Izquierda:** Espectro de la matriz \hat{H}'_{Σ} en función del ángulo. Cada punto se colorea según su grado de participación inverso (IPR). **Derecha:** Grado de participación inverso para la excitación del sitio de esquina en función del ángulo θ .

La fuerte localización observada al excitar el sitio de esquina se explica porque la proyección de la condición inicial sobre los autoestados corresponde mayoritariamente al autoestado de autovalor nulo. La existencia de este autoestado se debe a la topología que presenta el Hamiltoniano \hat{H}'_{Σ} en el espacio recíproco o de Bloch. Si bien es posible calcular la polarización de bullo mediante bucles de Wilson y determinar que su valor está cuantizado como $\mathbf{P} = (0.5, 0.5)$, resulta más ilustrativo notar que la red puede descomponerse en cadenas quasi-SSH (ver Figura 5.6). En ambos esquemas, la cuantización es consecuencia de la simetría de inversión presente en la red.

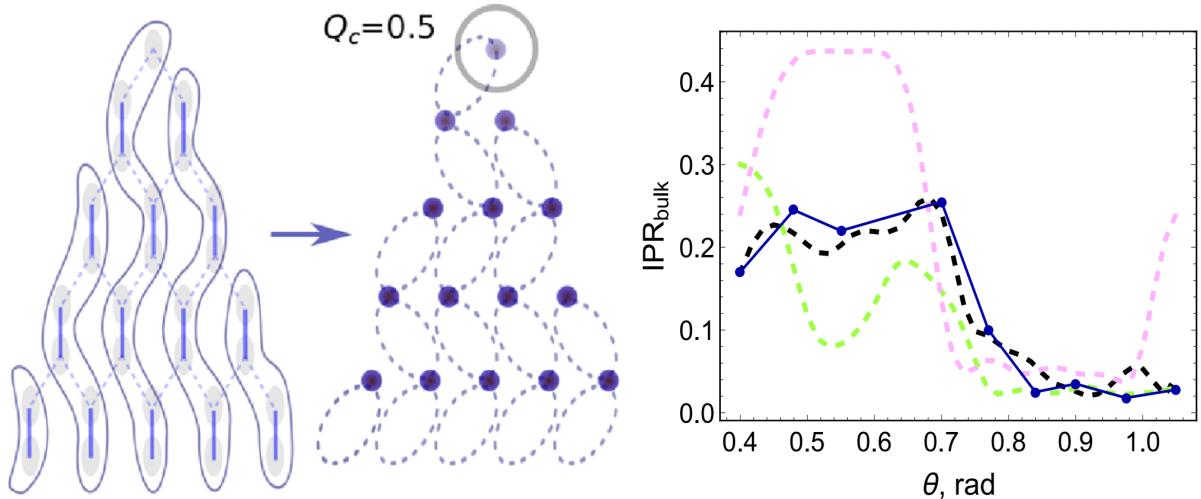


Figura 5.6: **Izquierda:** Descomposición de la red en el límite de bandas planas en cadenas SSH de dímeros aislados. **Derecha:** IPR para la excitación experimental del sitio central de la red (puntos unidos con líneas para guiar la vista) y simulados numéricamente para tres casos: sin acoplamientos de largo alcance ni correcciones no-ortogonales (curva rosada discontinua), con acoplamientos de largo alcance pero sin correcciones no-ortogonales (curva verde discontinua), y con acoplamientos de largo alcance y correcciones no-ortogonales (curva negra discontinua).

Se estudió experimentalmente la dinámica de bandas planas excitando un único sitio en el bulto de la red para extraer su IPR. Como la excitación inicial en un solo sitio tiene proyecciones no nulas en todas las bandas de Bloch, este experimento magnifica las propiedades dispersivas de las bandas. Así, una propagación casi sin difracción implica una notable planaridad de todas las bandas, pues las propiedades de bulto de una red se manifiestan más claramente cuando se excita un sitio central. Un sistema con todas sus bandas planas no exhibiría transporte en la red, limitándose la dinámica únicamente a dímeros efectivos.

Los datos analizados revelan dos regímenes distintos: para redes con $0.4 < \theta < 0.8$ (cerca al ángulo de invisibilidad) se observa un buen efecto de confinamiento (*caging*). Sin embargo, ángulos mayores ($\theta > 0.8$) favorecen una difracción significativa del campo, resultando en una deslocalización a la salida. Estos resultados experimentales (puntos en Figura 5.6) concuerdan con los cálculos teóricos (línea discontinua). Contrario a lo esperado, los acoplamientos de largo alcance y las correcciones por no ortogonalidad no degradan la dinámica de bandas planas cerca del ángulo de invisibilidad. Los valores máximos de IPR (0.20-0.25) para el estado dímero después de tres ciclos de confinamiento Aharonov-Bohm indican una localización comparable con propuestas ópticas unidimensionales con todas sus bandas planas (ABF).

6. Moléculas Fotónicas

La técnica de escritura de guías de onda descrita en el Capítulo 4.1 está restringida por la forma alargada y elíptica del tren de pulsos láser que se enfoca, lo que limita los acoplamientos interorbitales posibles [35]. Una alternativa para aumentar los grados de libertad consiste en fabricar dos guías de onda suficientemente cercanas para hibridizar sus modos guiados, de manera análoga al principio físico que gobierna las moléculas. Por este motivo, en este capítulo se empleará el concepto de *moléculas fotónicas* [44], aplicándolo al estudio experimental de una red fotónica que presenta una doble transición de fase topológica [45].

6.1. Autoestados del acoplador fotónico para distancias de separación pequeñas

Como se mencionó en la Sección 3.3, la teoría de modos acoplados (CMT) describe adecuadamente los sistemas fotónicos en estudio cuando la distancia entre guías de onda supera los $13\text{ }\mu\text{m}$. Para separaciones menores, el sistema debe tratarse como una única macroguía. La expansión en modos normales (EME), presentada en la Sección 3.1, proporciona una herramienta numérica válida para ambos regímenes.

Mediante simulaciones de pares de guías de onda a diferentes distancias, se caracterizó el comportamiento de sus autoestados. La Figura 6.1 muestra que el autoestado antisimétrico ($+-$) solo existe para distancias mayores a $13\text{ }\mu\text{m}$, ya que por debajo de este umbral se convierte en un modo de radiación ($k_z^{+-} < k_0 n_0$). En cambio, el autoestado simétrico ($++$) persiste y puede describirse como una única entidad, lo que en esta tesis se denominará *modo S* de la molécula fotónica.

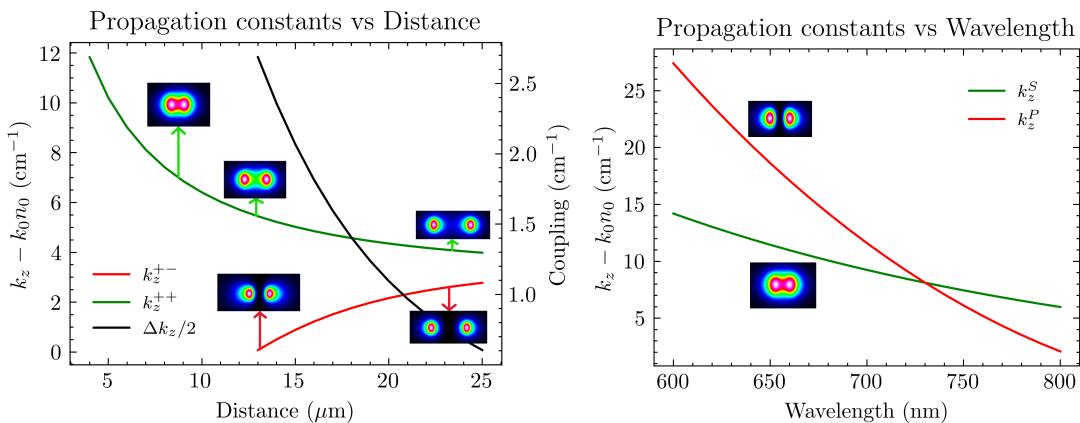


Figura 6.1: **Izquierda:** Constantes de propagación y acoplamientos en función de la distancia para modos fundamentales, calculados mediante EME. **Derecha:** Constantes de propagación de modos *S* y *P* en función de la longitud de onda.

Si bien las constantes de propagación de los modos S y P en una misma molécula presentan valores diferentes, estas pueden igualarse entre moléculas adyacentes mediante el ajuste del contraste de índice de refracción en las guías de onda [35]. Por ejemplo, la Figura 6.1 muestra que a 730 nm se igualan las constantes de propagación para $\Delta n_S = 5.200 \times 10^{-4}$ y $\Delta n_P = 10.423 \times 10^{-4}$.

6.2. Moléculas Fotónicas en Red SP-SSH

Para la implementación experimental (Sección 4.1) de una red que presente acoplamiento SP [29, 35, 45], se utilizaron los modos P horizontales de la sección anterior, obtenidos mediante moléculas fotónicas. Un preciso sintonizado de las constantes de propagación de los modos S (k_z^S) y P (k_z^P) permitió considerar un grado de libertad análogo al del espín del electrón (*pseudoespín*). El Hamiltoniano H de esta red [45], ilustrado en la Figura 6.2, es el siguiente:

$$H = \sum_n \left[\frac{\delta\beta}{2} (p_{n,1}^* p_{n,1} - s_{n,1}^* s_{n,1} + p_{n,2}^* p_{n,2} - s_{n,2}^* s_{n,2}) + \kappa_{ss,2} s_{n,2}^* s_{n,1} - \kappa_{pp,2} p_{n,2}^* p_{n,1} \right. \\ \left. + \kappa_{ss,1} (s_{n-1,2}^* s_{n,1} + s_{n+1,2}^* s_{n,2}) - \kappa_{pp,1} (p_{n-1,2}^* p_{n,1} + p_{n+1,2}^* p_{n,2}) + \kappa_{sp,2} (s_{n,2}^* p_{n,1} - p_{n,2}^* s_{n,1}) \right. \\ \left. + \kappa_{sp,1} (s_{n-1,2}^* p_{n,1} - p_{n-1,2}^* s_{n,1} + s_{n+1,1}^* p_{n,2} - p_{n+1,1}^* s_{n,2}) \right] + \text{c.c.}$$

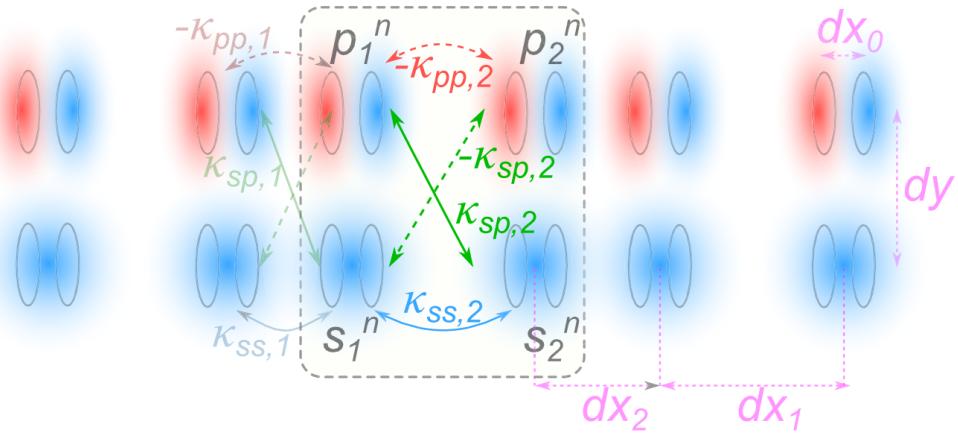


Figura 6.2: Esquema de la red SP-SSH y los acoplamientos considerados.

Si se elige la base $\mathbf{v}^n = (s_1^n, p_1^n, s_2^n, p_2^n)^T$, el Hamiltoniano de Bloch se puede escribir en bloques como:

$$\hat{H}(k) = \begin{pmatrix} \hat{\beta} & e^{-ika} \hat{\chi}_{1-} + \hat{\chi}_{2+} \\ e^{ika} \hat{\chi}_{1+} + \hat{\chi}_{2-} & \hat{\beta} \end{pmatrix},$$

donde $\hat{\beta} = \frac{k_z^S - k_z^P}{2} \hat{\sigma}_z$ y $\hat{\chi}_{i\pm} = \begin{pmatrix} \kappa_{ss,i} & \pm \kappa_{sp,i} \\ \mp \kappa_{sp,i} & -\kappa_{pp,i} \end{pmatrix}$.

6.3. Topología en la Red SP-SSH

El modelo SP-SSH permite explorar nuevas fases topológicas más allá del modelo SSH convencional, ya que incorpora dos orbitales (modos S y P) cuyas combinaciones lineales pueden interpretarse como un pseudoespín. Al aplicar la transformación unitaria

$$\hat{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

se hace más evidente cómo interpretar el sistema. En particular, para $\Delta\beta = 0$ y $\varkappa_{ss,1} = \varkappa_{pp,1}$ se tiene

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \hat{H}_+ & 0 \\ 0 & \hat{H}_- \end{pmatrix},$$

con

$$\hat{H}_\pm = \begin{pmatrix} 0 & e^{-ika}(\varkappa_{ss,1} \mp \varkappa_{sp,1}) + (\varkappa_{ss,2} \pm \varkappa_{sp,2}) \\ e^{ika}(\varkappa_{ss,1} \mp \varkappa_{sp,1}) + (\varkappa_{ss,2} \pm \varkappa_{sp,2}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir, se tienen dos subsistemas tipo SSH, con acoplamiento intercelda (intracelda) $\varkappa_{ss,1} \mp \varkappa_{sp,1}$ ($\varkappa_{ss,2} \pm \varkappa_{sp,2}$). En el caso $\varkappa_{ss,1} \neq \varkappa_{pp,1}$ aún es posible capturar la topología mediante el determinante de $\hat{h} = e^{-ika}\hat{\chi}_{1-} + \hat{\chi}_{2+}$ (ver Figura 6.3) ya que en el plano complejo se puede contar el número de vueltas (*winding number*) en torno al origen al barrer todos los cuasimomentos en la primera zona de Brillouin. Estos bucles son una generalización de lo mostrado en la Figura 2.6 relativo al ángulo que forma la proyección en el plano xy del vector $\mathbf{d}(k)$.

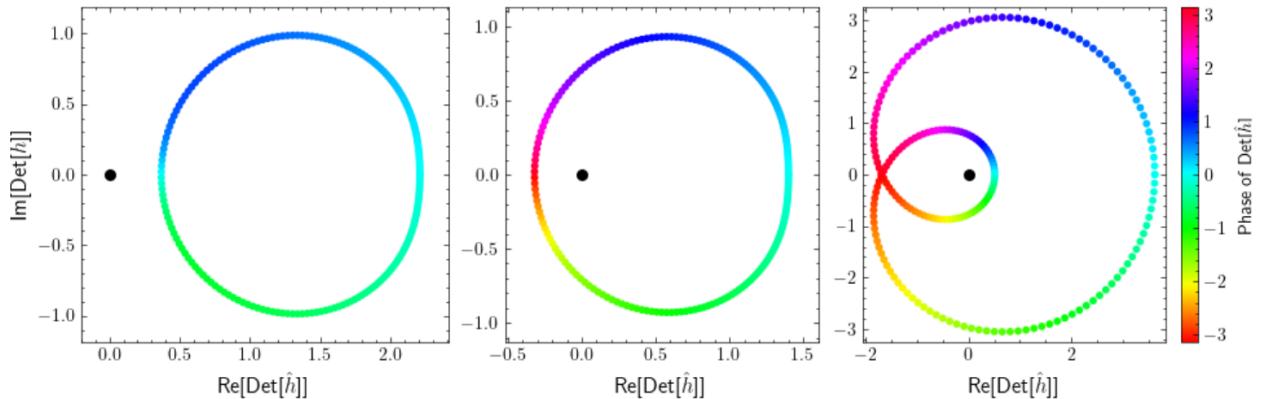


Figura 6.3: Topología de la Red SP-SSH para $\Delta\beta = 0$. Determinante de la matriz-bloque \hat{h} para los cuasimomentos $-\frac{\pi}{a} \leq k < \frac{\pi}{a}$. Se aprecian exactamente tres fases topológicas distintas.

Para obtener todo el diagrama de fase (en particular, para $\Delta\beta \neq 0$), basta con variar $\Delta\beta$ y observar cuando hay cierre de brecha en las bandas, como se observa en la Figura 6.4. La red SP-SSH presenta dos mecanismos topológicos: uno debido a la hibridización SP y otro debido a la dimerización.

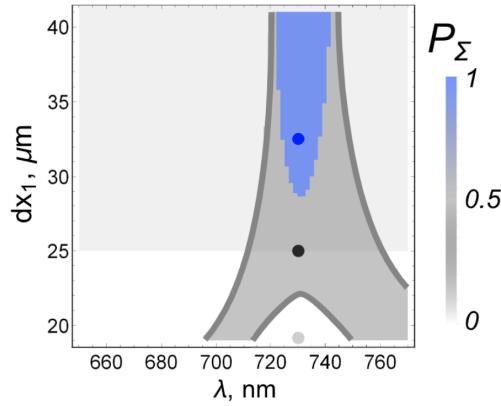


Figura 6.4: Diagrama de fases topológicas.

6.4. Implementación Experimental

Para implementar experimentalmente el modelo SP-SSH, se fabricaron 25 redes fotónicas mediante la técnica de escritura con láser femtosegundo descrita en el Capítulo 4.1. Los parámetros geométricos se ajustaron con separaciones entre moléculas: dx_1 variable, $dx_2 = 25 \mu\text{m}$, $dy = 20 \mu\text{m}$ y entre guías: $dx_0 = 7 \mu\text{m}$. Se optimizaron los contrastes de índice de refracción para lograr degeneración de modos: $k_z^S \sim k_z^P$ en $\lambda = 730 \text{ nm}$ [35].

Las mediciones se realizaron mediante barrido de longitud de onda (Capítulo 4.2) con $\lambda \in 700 - 780 \text{ nm}$ y paso de 5 nm. La excitación se aplicó a la guía S en un extremo de la red, midiendo la potencia relativa en el mismo extremo ($I_{\text{edge}}/I_{\text{total}}$). Aunque inicialmente no se distinguen claramente las fases topológicas con polarización de bullo $P_\Sigma = 1/2$ o $P_\Sigma = 1$, el análisis numérico revela que durante la segunda transición topológica la razón $I_{\text{edge}}/I_{\text{total}}$ debería formar una meseta. La Figura 6.5 confirma este comportamiento, mientras que la Figura 6.6 muestra resultados experimentales representativos: Uno para una $\lambda = 680 \text{ nm}$, donde sólo se aprecia topología por dimerización y otro para $\lambda = 725 \text{ nm}$, donde ocurre una doble transición topológica al cambiar la dimerización.

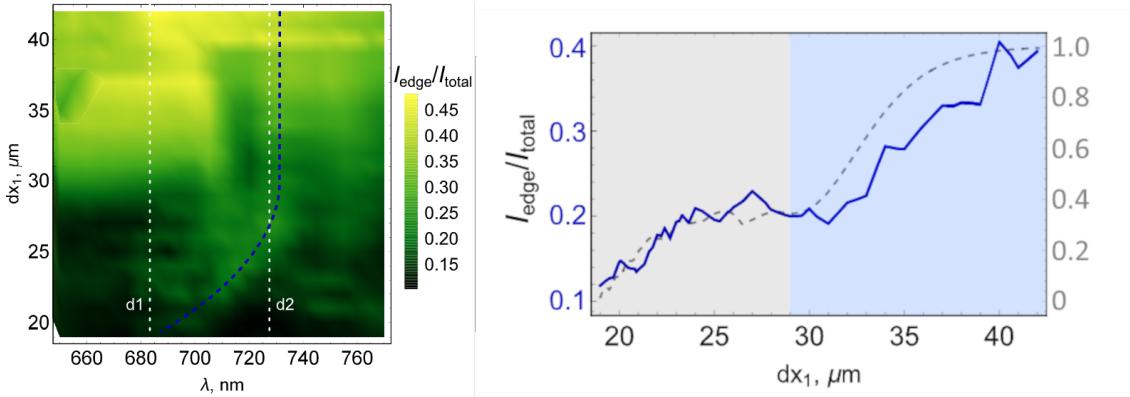


Figura 6.5: **Izquierda:** Resultados numéricos mostrando la meseta característica. **Derecha:** Comparación cuantitativa entre datos experimentales y simulaciones.

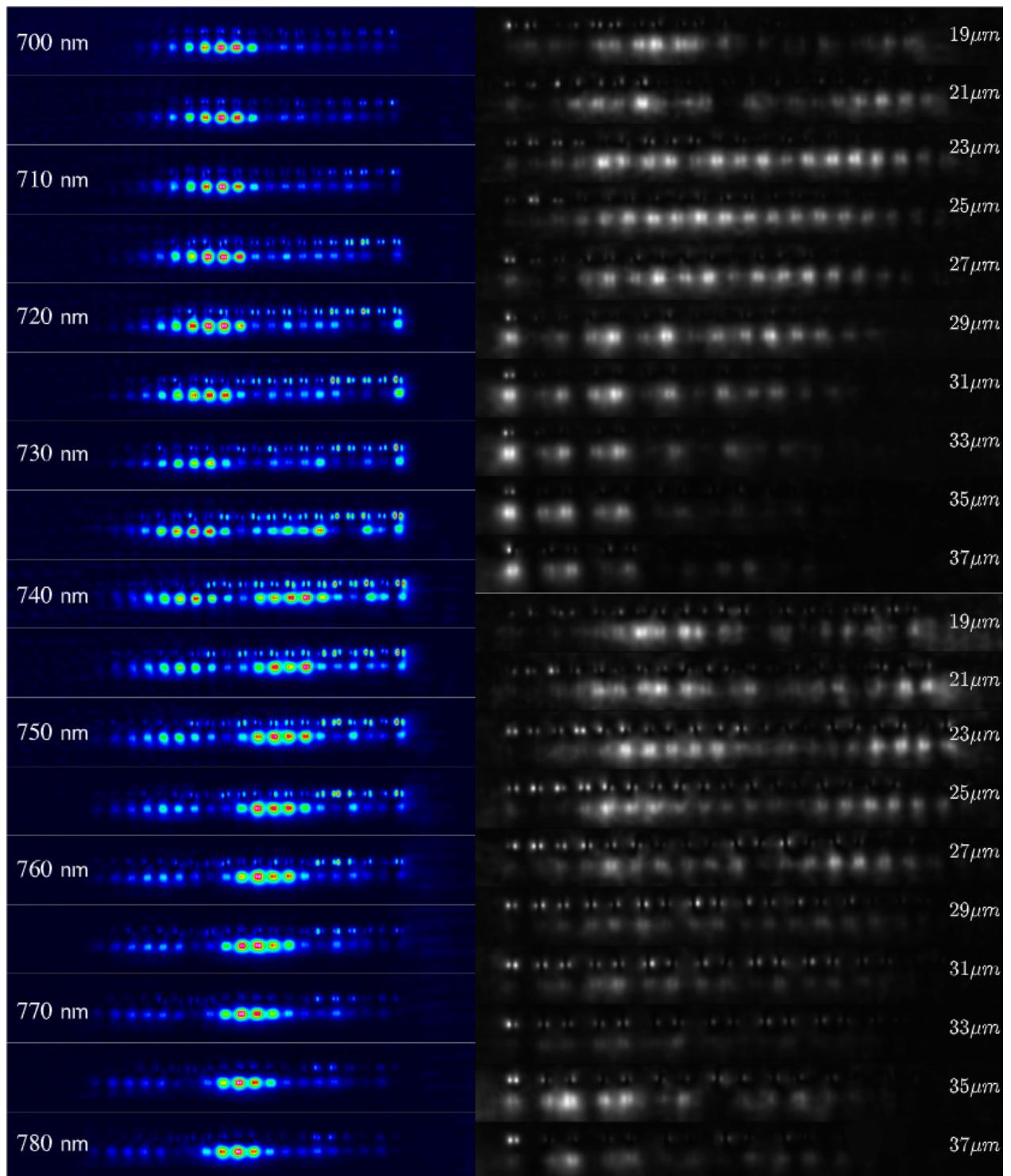


Figura 6.6: **Izquierda:** Red SP-SSH homogénea ($dx_1 = dx_2$) para diferentes longitudes de onda. **Derecha:** Arriba: Excitación en 680 nm para distintas dimerizaciones. Abajo: Misma excitación en 725 nm.

7. Conclusiones

Bibliografía

- [1] All nobel prizes in physics. URL <https://www.nobelprize.org/prizes/lists/all-nobel-prizes-in-physics/>.
- [2] P. Maine, D. Strickland, P. Bado, M. Pessot, and G. Mourou. Generation of ultrahigh peak power pulses by chirped pulse amplification. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 24(2):398–403, 1988. doi: 10.1109/3.137.
- [3] M. Lewenstein, Ph. Balcou, M. Yu. Ivanov, Anne L’Huillier, and P. B. Corkum. Theory of high-harmonic generation by low-frequency laser fields. *Phys. Rev. A*, 49:2117–2132, Mar 1994. doi: 10.1103/PhysRevA.49.2117. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.49.2117>.
- [4] P. M. Paul, E. S. Toma, P. Breger, G. Mullot, F. Augé, Ph. Balcou, H. G. Muller, and P. Agostini. Observation of a train of attosecond pulses from high harmonic generation. *Science*, 292(5522):1689–1692, 2001. doi: 10.1126/science.1059413. URL <https://www.science.org/doi/10.1126/science.1059413>.
- [5] Thomas Brabec and Ferenc Krausz. Intense few-cycle laser fields: Frontiers of nonlinear optics. *Reviews of Modern Physics*, 72:545–591, 2000. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:120371634>.
- [6] J F Clauser and A Shimony. Bell’s theorem, experimental tests and implications. *Reports on Progress in Physics*, 41(12):1881, dec 1978. doi: 10.1088/0034-4885/41/12/002. URL <https://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/41/12/002>.
- [7] Alain Aspect, Jean Dalibard, and Gérard Roger. Experimental test of bell’s inequalities using time-varying analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, 49:1804–1807, Dec 1982. doi: 10.1103/PhysRevLett.49.1804. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.49.1804>.
- [8] Paul G. Kwiat, Klaus Mattle, Harald Weinfurter, Anton Zeilinger, Alexander V. Sergienko, and Yanhua Shih. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 75:4337–4341, Dec 1995. doi: 10.1103/PhysRevLett.75.4337. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.4337>.
- [9] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, and T. Yamane. Optical trapping and manipulation of single cells using infrared laser beams. *Nature*, 330(6150):769–771, Dec 1987. ISSN 1476-4687. doi: 10.1038/330769a0. URL <https://doi.org/10.1038/330769a0>.
- [10] Isamu Akasaki. Gan-based p-n junction blue-light-emitting devices. *Proc. IEEE*, 101(10):2200–2210, 2013. doi: 10.1109/JPROC.2013.2274928. URL <https://doi.org/10.1109/JPROC.2013.2274928>.

- [11] Michael Kneissl, Tae-Yeon Seong, Jung Han, and Hiroshi Amano. The emergence and prospects of deep-ultraviolet light-emitting diode technologies. *Nature Photonics*, 13(4):233–244, Apr 2019. ISSN 1749-4893. doi: 10.1038/s41566-019-0359-9. URL <https://doi.org/10.1038/s41566-019-0359-9>.
- [12] Shuji Nakamura, Takashi Mukai, and Masayuki Senoh. Candela-class high-brightness In-GaN/AlGaN double-heterostructure blue-light-emitting diodes. *Applied Physics Letters*, 64(13):1687–1689, 03 1994. ISSN 0003-6951. doi: 10.1063/1.111832. URL <https://doi.org/10.1063/1.111832>.
- [13] Submarine cable frequently asked questions, . URL <https://www2.telegeography.com/submarine-cable-faqs-frequently-asked-questions>.
- [14] Hogares con acceso a internet fijo alcanzan el 67 % y usuarios aumentan preferencia por redes de alta velocidad, . URL <https://www.subtel.gob.cl/hogares-con-acceso-a-internet-fijo-alcanzan-el-67-y-usuarios-aumentan-preferencia-por-redes-de-alta-velocidad>.
- [15] Alexander Szameit, Dominik Blömer, Jonas Burghoff, Thomas Schreiber, Thomas Pertsch, Stefan Nolte, Andreas Tünnermann, and Falk Lederer. Discrete nonlinear localization in femtosecond laser written waveguides in fused silica. *Opt. Express*, 13(26):10552–10557, Dec 2005. doi: 10.1364/OPEX.13.010552. URL <https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-13-26-10552>.
- [16] Yonatan Plotnik, Or Peleg, Felix Dreisow, Matthias Heinrich, Stefan Nolte, Alexander Szameit, and Mordechai Segev. Experimental observation of optical bound states in the continuum. *Phys. Rev. Lett.*, 107:183901, Oct 2011. doi: 10.1103/PhysRevLett.107.183901. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.183901>.
- [17] Rodrigo A. Vicencio, Camilo Cantillano, Luis Morales-Inostroza, Bastián Real, Cristian Mejía-Cortés, Steffen Weimann, Alexander Szameit, and Mario I. Molina. Observation of localized states in lieb photonic lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 114:245503, Jun 2015. doi: 10.1103/PhysRevLett.114.245503. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.245503>.
- [18] Sebabrata Mukherjee, Alexander Spracklen, Debaditya Choudhury, Nathan Goldman, Patrik Öhberg, Erika Andersson, and Robert R. Thomson. Observation of a localized flat-band state in a photonic lieb lattice. *Phys. Rev. Lett.*, 114:245504, Jun 2015. doi: 10.1103/PhysRevLett.114.245504. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.245504>.
- [19] Daniel Leykam, Alexei Andreeanov, and Sergej Flach. Artificial flat band systems: from lattice models to experiments. *Advances in Physics: X*, 3(1):1473052, 2018. doi: 10.1080/23746149.2018.1473052. URL <https://doi.org/10.1080/23746149.2018.1473052>.
- [20] Rodrigo A. Vicencio. Photonic flat band dynamics. *Advances in Physics: X*, 6(1):1878057, 2021. doi: 10.1080/23746149.2021.1878057. URL <https://doi.org/10.1080/23746149.2021.1878057>.
- [21] Diego Román-Cortés, Guillermo Fadic, Christofer Cid-Lara, Diego Guzmán-Silva, Bastián Real, and Rodrigo A. Vicencio. Strain induced localization to delocalization transition on a

- lieb photonic ribbon lattice. *Scientific Reports*, 11(1):21411, Nov 2021. ISSN 2045-2322. doi: 10.1038/s41598-021-00967-3. URL <https://doi.org/10.1038/s41598-021-00967-3>.
- [22] Javier Cubillos Cornejo, Diego Guzmán-Silva, Víctor Hugo Cornejo, Ignacio Bordeu, and Rodrigo A. Vicencio. Transport and localization on dendrite-inspired flat band linear photonic lattices. *Scientific Reports*, 13(1):13057, Aug 2023. ISSN 2045-2322. doi: 10.1038/s41598-023-39985-8. URL <https://doi.org/10.1038/s41598-023-39985-8>.
- [23] Paloma Vildoso, Rodrigo A. Vicencio, and Jovana Petrovic. Ultra-low-loss broadband multi-port optical splitters. *Opt. Express*, 31(8):12703–12716, Apr 2023. doi: 10.1364/OE.486855. URL <https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-31-8-12703>.
- [24] Zhaoyang Zhang, Shaohuan Ning, Hua Zhong, Milivoj R. Belić, Yiqi Zhang, Yuan Feng, Shun Liang, Yanpeng Zhang, and Min Xiao. Experimental demonstration of optical bloch oscillation in electromagnetically induced photonic lattices. *Fundamental Research*, 2(3): 401–404, 2022. ISSN 2667-3258. doi: <https://doi.org/10.1016/j.fmre.2021.08.019>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2667325821001746>.
- [25] Tal Schwartz, Guy Bartal, Shmuel Fishman, and Mordechai Segev. Transport and anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices. *Nature*, 446(7131):52–55, Mar 2007. ISSN 1476-4687. doi: 10.1038/nature05623. URL <https://doi.org/10.1038/nature05623>.
- [26] Sebabrata Mukherjee, Alexander Spracklen, Manuel Valiente, Erika Andersson, Patrik Öhberg, Nathan Goldman, and Robert R. Thomson. Experimental observation of anomalous topological edge modes in a slowly driven photonic lattice. *Nature Communications*, 8(1):13918, Jan 2017. ISSN 2041-1723. doi: 10.1038/ncomms13918. URL <https://doi.org/10.1038/ncomms13918>.
- [27] Lukas J. Maczewsky, Julia M. Zeuner, Stefan Nolte, and Alexander Szameit. Observation of photonic anomalous floquet topological insulators. *Nature Communications*, 8(1):13756, Jan 2017. ISSN 2041-1723. doi: 10.1038/ncomms13756. URL <https://doi.org/10.1038/ncomms13756>.
- [28] G. Cáceres-Aravena, L. E. F. Foa Torres, and R. A. Vicencio. Topological and flat-band states induced by hybridized linear interactions in one-dimensional photonic lattices. *Phys. Rev. A*, 102:023505, Aug 2020. doi: 10.1103/PhysRevA.102.023505. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.102.023505>.
- [29] Roman S. Savelev and Maxim A. Gorlach. Topological states in arrays of optical waveguides engineered via mode interference. *Phys. Rev. B*, 102:161112, Oct 2020. doi: 10.1103/PhysRevB.102.161112. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.102.161112>.
- [30] Falk Lederer, George I. Stegeman, Demetri N. Christodoulides, Gaetano Assanto, Moti Segev, and Yaron Silberberg. Discrete solitons in optics. *Physics Reports*, 463(1):1–126, 2008. ISSN 0370-1573. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2008.04.004>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157308001257>.

- [31] S. Rojas-Rojas, E. Barriga, C. Muñoz, P. Solano, and C. Hermann-Avigliano. Manipulation of multimode squeezing in a coupled waveguide array. *Phys. Rev. A*, 100:023841, Aug 2019. doi: 10.1103/PhysRevA.100.023841. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.100.023841>.
- [32] R. Julius, A. N. Alias, and M. S. A. Halim. Quantum squeezing in coupled waveguide networks with quadratic and cubic nonlinearity. *The European Physical Journal Plus*, 137(1):91, Jan 2022. ISSN 2190-5444. doi: 10.1140/epjp/s13360-021-02302-1. URL <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-02302-1>.
- [33] Joaquin Medina Dueñas, Gabriel O’Ryan Pérez, Carla Hermann-Avigliano, and Luis E. F. Foa Torres. Quadrature protection of squeezed states in a one-dimensional photonic topological insulator. *Quantum*, 5:526, August 2021. ISSN 2521-327X. doi: 10.22331/q-2021-08-17-526. URL <https://doi.org/10.22331/q-2021-08-17-526>.
- [34] Zhiwen Li, Siqi Hu, Qiao Zhang, Ruijuan Tian, Linpeng Gu, Yisong Zhu, Qingchen Yuan, Ruixuan Yi, Chen Li, Yan Liu, Yue Hao, Xuetao Gan, and Jianlin Zhao. Telecom-band waveguide-integrated mos2 photodetector assisted by hot electrons. *ACS Photonics*, 9(1):282–289, 2022. doi: 10.1021/acspophotonics.1c01622. URL <https://doi.org/10.1021/acspophotonics.1c01622>.
- [35] Diego Guzmán-Silva, Gabriel Cáceres-Aravena, and Rodrigo A. Vicencio. Experimental observation of interorbital coupling. *Phys. Rev. Lett.*, 127:066601, Aug 2021. doi: 10.1103/PhysRevLett.127.066601. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.127.066601>.
- [36] Christina Jörg, Gerard Queraltó, Mark Kremer, Gerard Pelegrí, Julian Schulz, Alexander Szameit, Georg von Freymann, Jordi Mompart, and Verònica Ahufinger. Artificial gauge field switching using orbital angular momentum modes in optical waveguides. *Light: Science & Applications*, 9(1):150, Aug 2020. ISSN 2047-7538. doi: 10.1038/s41377-020-00385-6. URL <https://doi.org/10.1038/s41377-020-00385-6>.
- [37] Gabriel Cáceres-Aravena, Diego Guzmán-Silva, Ignacio Salinas, and Rodrigo A. Vicencio. Controlled transport based on multiorbital aharonov-bohm photonic caging. *Phys. Rev. Lett.*, 128:256602, Jun 2022. doi: 10.1103/PhysRevLett.128.256602. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.128.256602>.
- [38] Yudong Lian, Xuan Qi, Yuhe Wang, Zhenxu Bai, Yulei Wang, and Zhiwei Lu. Oam beam generation in space and its applications: A review. *Optics and Lasers in Engineering*, 151:106923, 2022. ISSN 0143-8166. doi: <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2021.106923>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0143816621003924>.
- [39] Jaime A. Anguita, Joaquín Herreros, and Ivan B. Djordjevic. Coherent multimode oam superpositions for multidimensional modulation. *IEEE Photonics Journal*, 6(2):1–11, 2014. doi: 10.1109/JPHOT.2014.2309645.
- [40] Wei-Guan Shen, Yuan Chen, Hui-Ming Wang, and Xian-Min Jin. Oam mode conversion in a photonic chip. *Optics Communications*, 507:127615, 2022. ISSN 0030-4018. doi: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2021.127615>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401821008646>.

- [41] Zhichan Hu, Domenico Bongiovanni, Ziteng Wang, Xiangdong Wang, Daohong Song, Jing-jun Xu, Roberto Morandotti, Hrvoje Buljan, and Zhigang Chen. Topological orbital angular momentum extraction and twofold protection of vortex transport. *Nature Photonics*, 19(2):162–169, Feb 2025. ISSN 1749-4893. doi: 10.1038/s41566-024-01564-2. URL <https://doi.org/10.1038/s41566-024-01564-2>.
- [42] J. Polo, J. Mompart, and V. Ahufinger. Geometrically induced complex tunnelings for ultracold atoms carrying orbital angular momentum. *Phys. Rev. A*, 93:033613, Mar 2016. doi: 10.1103/PhysRevA.93.033613. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.93.033613>.
- [43] Chuang Jiang, Yanting Wu, Meiyang Qin, and Shaolin Ke. Topological bound modes with orbital angular momentum in optical waveguide arrays. *Journal of Lightwave Technology*, 41(7):2205–2211, 2023. doi: 10.1109/JLT.2022.3200139.
- [44] M. Bayer, T. Gutbrod, J. P. Reithmaier, A. Forchel, T. L. Reinecke, P. A. Knipp, A. A. Dremin, and V. D. Kulakovskii. Optical modes in photonic molecules. *Phys. Rev. Lett.*, 81:2582–2585, Sep 1998. doi: 10.1103/PhysRevLett.81.2582. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.2582>.
- [45] Maxim Mazanov, Diego Román-Cortés, Gabriel Cáceres-Aravena, Christofer Cid, Maxim A. Gorlach, and Rodrigo A. Vicencio. Photonic molecule approach to multiorbital topology. *Nano Letters*, 24(15):4595–4601, 2024. doi: 10.1021/acs.nanolett.4c00728. URL <https://doi.org/10.1021/acs.nanolett.4c00728>. PMID: 38574276.
- [46] H. Haus, W. Huang, S. Kawakami, and N. Whitaker. Coupled-mode theory of optical waveguides. *Journal of Lightwave Technology*, 5(1):16–23, January 1987. ISSN 1558-2213. doi: 10.1109/JLT.1987.1075416. URL <https://ieeexplore.ieee.org/document/1075416/?arnumber=1075416>. Conference Name: Journal of Lightwave Technology.
- [47] John D. Joannopoulos, Steven G. Johnson, Joshua N. Winn, and Robert D. Meade. *Photonic crystals: molding the flow of light*. Princeton University Press, Princeton Oxford, 2nd edition edition, 2008. ISBN 978-0-691-12456-8.
- [48] W. P. Su, J. R. Schrieffer, and A. J. Heeger. Solitons in Polyacetylene. *Physical Review Letters*, 42(25):1698–1701, June 1979. ISSN 0031-9007. doi: 10.1103/PhysRevLett.42.1698. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.42.1698>.
- [49] Natalia Malkova, Ivan Hromada, Xiaosheng Wang, Garnett Bryant, and Zhigang Chen. Observation of optical shockley-like surface states in photonic superlattices. *Opt. Lett.*, 34(11):1633–1635, Jun 2009. doi: 10.1364/OL.34.001633. URL <https://opg.optica.org/ol/abstract.cfm?URI=ol-34-11-1633>.
- [50] Tomoki Ozawa, Hannah M. Price, Alberto Amo, Nathan Goldman, Mohammad Hafezi, Ling Lu, Mikael C. Rechtsman, David Schuster, Jonathan Simon, Oded Zilberberg, and Iacopo Carusotto. Topological photonics. *Reviews of Modern Physics*, 91(1):015006, March 2019. ISSN 0034-6861, 1539-0756. doi: 10.1103/RevModPhys.91.015006. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.91.015006>.

- [51] J. Zak. Berry's phase for energy bands in solids. *Physical Review Letters*, 62(23):2747–2750, June 1989. ISSN 0031-9007. doi: 10.1103/PhysRevLett.62.2747. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.62.2747>.
- [52] Xiao-Liang Qi and Shou-Cheng Zhang. Topological insulators and superconductors. *Rev. Mod. Phys.*, 83:1057–1110, Oct 2011. doi: 10.1103/RevModPhys.83.1057. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.83.1057>.
- [53] János K. Asbóth, László Oroszlány, and András Pályi. *A Short Course on Topological Insulators*, volume 919 of *Lecture Notes in Physics*. Springer International Publishing, Cham, 2016. ISBN 978-3-319-25605-4 978-3-319-25607-8. doi: 10.1007/978-3-319-25607-8. URL <http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-25607-8>.
- [54] Monika A. M. Marte and Stig Stenholm. Paraxial light and atom optics: The optical schrödinger equation and beyond. *Phys. Rev. A*, 56:2940–2953, Oct 1997. doi: 10.1103/PhysRevA.56.2940. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.56.2940>.
- [55] Ginés Lifante Pedrola. *Beam Propagation Method for Design of Optical Waveguide Devices*. Wiley, 2015. ISBN 9781119083382. URL <https://books.google.cl/books?id=ZV6-CgAAQBAJ>.
- [56] K. M. Davis, K. Miura, N. Sugimoto, and K. Hirao. Writing waveguides in glass with a femtosecond laser. *Optics Letters*, 21(21):1729, November 1996. ISSN 0146-9592, 1539-4794. doi: 10.1364/OL.21.001729. URL <https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=ol-21-21-1729>.
- [57] Bernd Terhalle. *Controlling Light in Optically Induced Photonic Lattices*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2011. ISBN 978-3-642-16646-4 978-3-642-16647-1. doi: 10.1007/978-3-642-16647-1. URL <https://link.springer.com/10.1007/978-3-642-16647-1>.
- [58] Thorlabs - BC106N-VIS CCD Camera Beam Profiler, Ø30 µm - 6.6 mm, 350 - 1100 nm. URL <https://www.thorlabs.com>.
- [59] Herman J. C. Berendsen. Nuclear magnetic resonance study of collagen hydration. *The Journal of Chemical Physics*, 36(12):3297–3305, 06 1962. ISSN 0021-9606. doi: 10.1063/1.1732460. URL <https://doi.org/10.1063/1.1732460>.
- [60] Diego Román-Cortés, Maxim Mazanov, Rodrigo A. Vicencio, and Maxim A. Gorlach. Observation of invisibility angle and flat band physics in dipolar photonic lattices. *Nano Letters*, 25(11):4291–4297, 2025. doi: 10.1021/acs.nanolett.4c05951. URL <https://doi.org/10.1021/acs.nanolett.4c05951>. PMID: 40048281.
- [61] Guinea F. Lewenstein M. Manoharan H. C. Polini, M. and Pellegrini V. Artificial honeycomb lattices for electrons, atoms and photons. *Nature Nanotech*, 8, 2013. doi: 10.1038/nnano.2013.161. URL <https://doi.org/10.1038/nnano.2013.161>.

A. Ortogonalidad de los modos normales

La ortogonalidad de los modos normales \mathbf{E}_ν^\perp se puede demostrar usando el convenio de Einstein en la ecuación (2.28) para simplificar la notación:

$$T_{ij}E_j^\nu = \beta_\nu^2 E_i^\nu, \quad (\text{A.1})$$

donde $T_{ij}E_j \equiv \delta_{ij}(\nabla_\perp^2 + k_0^2 n^2)E_j + \partial_i(E_j \partial_j \ln(n^2))$. Es un poco más sencillo demostrar que T_{ij} es un operador hermítico, es decir, que:

$$\iint (T_{ij}E_j^\mu)^* E_i^\nu dA = \iint (E_i^\mu)^* (T_{ij}E_j^\nu) dA.$$

Equivalentemente, notemos que:

$$\begin{aligned} (T_{ji}E_i^\mu)^* E_j^\nu - (E_i^\mu)^* (T_{ij}E_j^\nu) &= \nabla_\perp \cdot [E_i^\nu \nabla_\perp (E_i^\mu)^* - (E_i^\mu)^* \nabla_\perp E_i^\nu] \\ &\quad + [E_j^\nu \partial_j (E_i^\mu)^* - (E_j^\mu)^* \partial_j E_i^\nu] \partial_i \ln(n^2). \end{aligned}$$

Al integrar en el plano, la divergencia se convierte en un término de frontera que se anula al considerar modos guiados (que decaen a cero en el infinito), mientras que el segundo término es cero sólo si $\nabla n^2 = \mathbf{0}$. La hermiticidad de T_{ij} permite escoger una base ortogonal de modos normales para el campo eléctrico.

No obstante, el sistema completo sí es hermítico. Para ello, será necesario volver hasta la ecuación (2.5), tomar producto punto con el conjugado de otro modo e integrar en el volumen:

$$\begin{aligned} \iiint_V dV (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}^\nu) \cdot (\mathbf{E}^\mu)^* &= \iiint_V dV n^2 \frac{\omega_\nu^2}{c^2} \mathbf{E}^\nu \cdot (\mathbf{E}^\mu)^* \\ \iiint_V dV [\nabla \times \nabla \times (\mathbf{E}^\mu)^*] \cdot \mathbf{E}^\nu &= \iiint_V dV n^2 \frac{\omega_\mu^2}{c^2} (\mathbf{E}^\mu)^* \cdot \mathbf{E}^\nu \end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_\nu^2 - \omega_\mu^2}{c^2} \iiint_V dV n^2 \mathbf{E}^\nu \cdot (\mathbf{E}^\mu)^* &= \iiint_V dV \nabla \cdot [(\nabla \times \mathbf{E}^\nu) \times (\mathbf{E}^\mu)^* - (\nabla \times \mathbf{E}^\mu)^* \times (\mathbf{E}^\nu)] \\ &= \iint_{\partial V} [(\nabla \times \mathbf{E}^\nu) \times (\mathbf{E}^\mu)^* - (\nabla \times \mathbf{E}^\mu)^* \times (\mathbf{E}^\nu)] \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \\ &\stackrel{\partial V \rightarrow \infty}{=} 0. \end{aligned}$$

El lado izquierdo tiene dos posibilidades: o se cumple que $\omega_\nu^2 = \omega_\mu^2$ (modos degenerados) o el producto punto de los modos, ponderado por n^2 , se hace nulo.

B. Código en Python para cálculo de modos normales

```
1 # Scalar Eigenmode Solver
2
3 # Copyright (C) 2025 Diego Roman-Cortes
4
5 # This program is free software: you can redistribute it and/or modify
6 # it under the terms of the GNU General Public License as published by
7 # the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or
8 # (at your option) any later version.
9
10 # This program is distributed in the hope that it will be useful,
11 # but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
12 # MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
13 # GNU General Public License for more details.
14
15 # You should have received a copy of the GNU General Public License
16 # along with this program. If not, see <https://www.gnu.org/licenses/>.
17
18 # contact: diego.roman.c@ug.uchile.cl
19
20 import numpy as np
21 from scipy.sparse import diags, linalg, spdiags, kronsum
22
23 # Define the parameters
24 Nx = 240
25 Ny = 240
26 Lx = 80E-6
27 Ly = 80E-6
28
29 x, dx = np.linspace(-Lx/2, Lx/2, Nx, retstep=True)
30 y, dy = np.linspace(-Ly/2, Ly/2, Ny, retstep=True)
31
32 X, Y = np.meshgrid(x, y, indexing="xy")
33
34
35 n0 = 1.48 # Refractive index of the background
36 dn1 = 4.00E-3 # Amplitude of the refractive index modulation
37 wavelength = 730E-9 # Wavelength of the light
38 k0 = 2 * np.pi / wavelength # Wavenumber
39
40 n_eigen = 4
41
42 wx1 = 0.9E-6 # Width of the refractive index modulation
43 wy1 = 3.3E-6
44
45 a1 = 25E-6
46
47 ##create matrix
```

```

48 if dx == dy:
49     # Create the 2D Laplacian matrix for dx = dy using the 5-point stencil
50     #  0   1   0
51     #  1   -4   1
52     #  0   1   0
53
54
55     diag0 = -4 * np.ones(Nx * Ny)
56     diag1 = np.ones(Nx * Ny - 1)
57     diag1[np.arange(1, Nx * Ny) % Nx == 0] = 0    # Remove wrap-around
58     connections
59     diagNx = np.ones(Nx * Ny - Nx)
60
61     diags_data = [diag0, diag1, diag1, diagNx, diagNx]
62     diags_offsets = [0, -1, 1, -Nx, Nx]
63
64     T = spdiags(diags_data, diags_offsets, Nx * Ny, Nx * Ny) / (dx**2)
65 else:
66     # Just the Kronecker sum of the 1D Laplacian matrices
67     diagx = np.ones([Nx])
68     diagy = np.ones([Ny])
69
70     diagsx = np.array([diagx, -2 * diagx, diagx])
71     diagsy = np.array([diagy, -2 * diagy, diagy])
72     Dx = spdiags(diagsx, np.array([-1, 0, 1]), Nx, Nx) / (dx**2)
73     Dy = spdiags(diagsy, np.array([-1, 0, 1]), Ny, Ny) / (dy**2)
74
75     T = kronsum(Dx, Dy)
76
77 def dn_func(X, Y, wx, wy):
78     output = np.tanh(33.0*np.exp(-(X/wx)**2 - ((Y)/wy)**2))
79     return output
80
81 # Create the refractive index modulation
82 dn_array = np.zeros(X.shape)
83 dn_array += dn1 * dn_func(X, Y, wx1, wy1)
84
85 # Create the sparse matrix for the Helmholtz problem
86 n = n0 + dn_array
87 n = diags(n.reshape(Nx*Ny), (0))
88
89 H = T + (k0*n)**2
90
91 # Solve the eigenvalue problem
92 eigenvalues, eigenvectors = linalg.eigsh(H, k=n_eigen, which='LA')
93
94 np.save(f"eigenvalues.npy", eigenvalues)
95 np.save(f"eigenvectors.npy", eigenvectors)

```

C. Código en C de BPM

```
1 // Saves into a text file the output of a gaussian light beam propagating in a
2 // 2D waveguide array
3 /*
4 Copyright (C) 2025 Diego Roman-Cortes
5
6 This program is free software: you can redistribute it and/or modify
7 it under the terms of the GNU General Public License as published by
8 the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or
9 (at your option) any later version.
10
11 This program is distributed in the hope that it will be useful,
12 but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
13 MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
14 GNU General Public License for more details.
15
16 You should have received a copy of the GNU General Public License
17 along with this program. If not, see <https://www.gnu.org/licenses/>.
18
19 contact: diego.roman.c@ug.uchile.cl
20 */
21
22 #include <stdio.h>
23 #include <stdlib.h>
24 #include <string.h>
25 #include <math.h>
26 #include <complex.h>
27 #include <fftw3.h>
28
29 int main(int argc, char* argv[]){
30     // number of points in grid
31     int Nx = 700;
32     int Ny = 700;
33     int Nz = 5000;
34
35     // parameters
36     double n0 = 1.48; // refraction index of borosilicate
37     double l0 = 730E-9; // wavelenght of light
38     double wx = 1.2E-6; // width of the waveguide
39     double wy = 3.0E-6; // height of the waveguide
40     double sigma = 8.0E-6; // width of LG-mode
41     double l = 0; // azimuthal parameter of LG-mode
42     double Lx = 350E-6; // width of the grid
43     double Ly = 350E-6; // height of the grid
44
45     double zmax = 50E-3; // propagation distance
46
47     // auxiliar variables
48     double dx = Lx/(Nx-1);
```

```

49   double dy = Ly/(Ny-1);
50   double dz = zmax/(Nz-1);
51   double k0 = 2*M_PI/l0;
52   double beta = k0 * n0;
53   double xi, yj, r, phi;
54
55 //phi = atof(argv[1])*1E-9;
56 //printf("%f", phi);
57
58   double* dn = malloc(sizeof(double) * Nx * Ny);
59
60 // 1D array setup
61   double dn1 = 9.5E-4; // contrast of first waveguide
62
63   double d1x = 17E-6; // X separation of waveguides
64   double d1y = 18.5E-6; // Y separation of waveguides
65
66 // for animation
67   int frames = 50;
68   int rem, div;
69   char filename[10];
70
71   int i, j, k;
72
73   FILE *fp1, *fp2, *fp3;
74
75 //initialization of FFTW
76
77   fftw_init_threads();
78   fftw_complex *in = (fftw_complex*) fftw_malloc(sizeof(fftw_complex) * Nx * Ny);
79   fftw_complex *aux = (fftw_complex*) fftw_malloc(sizeof(fftw_complex) * Nx * Ny);
80   fftw_complex *out = (fftw_complex*) fftw_malloc(sizeof(fftw_complex) * Nx * Ny);
81   fftw_plan_with_nthreads(8);
82
83   fftw_plan p_forward = fftw_plan_dft_2d(Nx, Ny, in, out, FFTW_BACKWARD, FFTW_PATIENT);
84   fftw_plan p_inverse = fftw_plan_dft_2d(Nx, Ny, aux, in, FFTW_FORWARD, FFTW_PATIENT);
85
86   fp1 = freopen("refractive2d.txt", "w", stdout);
87 // shape of refractive index contrast
88   for(i = 0; i < Nx; i++){
89     for(j = 0; j < Ny; j++){
90       xi = -0.5*Lx + i*dx;
91       yj = -0.5*Ly + j*dy;
92
93       for(int n=-9; n<10; n++){
94         dn[i+Nx*j] += dn1 * tanh(33.0 / (exp(((xi-n*d1x)/wx)*((xi-n*d1x)/wx) + ((yj)/wy)*((yj)/wy))));}
95       printf("%e\n", dn[i+Nx*j]);
96     }
97   printf("\n");
98 }
```

```

99 }
100 fclose(fp1);
101
102 // initial field (gaussian)
103 for(i = 0; i < Nx; i++){
104     for(j = 0; j < Ny; j++){
105         xi = -0.5*Lx + i*dx;
106         yj = -0.5*Ly + j*dy;
107         r = sqrt((xi)*(xi) + (yj)*(yj));
108         in[i+Nx*j] += (cexp(-r*r/(sigma*sigma))); // hermite-gaussian mode
109     }
110 }
111 // save the input (gaussian) in a text file
112 fp2 = freopen("00.txt", "w", stdout);
113 for(i = 0; i < Nx; i++){
114     for(j = 0; j < Ny; j++){
115         xi = -0.5*Lx + i*dx;
116         yj = -0.5*Ly + j*dy;
117         printf("%e\n", cabs(in[i+Nx*j])*cabs(in[i+Nx*j]));
118     }
119     printf("\n");
120 }
121 fclose(fp2);
122
123 // frequency indices
124 int freqidx[Nx + Ny];
125
126 for(i=0; i < Nx/2; i++){
127     freqidx[i] = i;
128 }
129 for(j=0; j < Ny/2; j++){
130     freqidx[Nx+j] = j;
131 }
132 for(i=Nx/2; i < Nx; i++){
133     freqidx[i] = i-Nx;
134 }
135 for(j=Ny/2; j < Ny; j++){
136     freqidx[Nx+j] = j-Ny;
137 }
138
139 fftw_complex *phase = (fftw_complex*) fftw_malloc(sizeof(fftw_complex) *
140 Nx * Ny);
141 for(i = 0; i < Nx; i++){
142     for(j = 0; j < Ny; j++){
143         phase[i+j*Nx] = cexp(I*dz*( (2*M_PI) * (2*M_PI) * ( (freqidx[i]/Lx)
144 ) * (freqidx[i]/Lx) + (freqidx[Nx+j]/Ly) * (freqidx[Nx+j]/Ly) /(4*beta)));
145     }
146 }
147
148 // main loop
149 for(k=1; k <= Nz; k++){
150     fftw_execute(p_forward); // 'out' now points towards the DFT of 'in'
151

```

```

153     for(i = 0; i < Nx*Ny; i++){
154         aux[i] = out[i] * phase[i];
155     }
156
157     fftw_execute(p_inverse); // 'in' now points towards the inverse DFT of
158     'aux'
159
160     for(i = 0; i < Nx * Ny; i++){
161         in[i] /= (Nx * Ny); // normalization of FFT
162         in[i] *= cexp(-I * k0 * (((n0+dn[i])*(n0+dn[i]))- (n0*n0)) * dz
163         /(2*n0)); // potential operator in real space
164     }
165
166     fftw_execute(p_forward); // 'out' now points towards the DFT of 'in'
167
168     for(i = 0; i < Nx*Ny; i++){
169         aux[i] = out[i] * phase[i];
170     }
171
172     fftw_execute(p_inverse); // 'in' now points towards the inverse DFT of
173     'aux'
174     for(i = 0; i < Nx * Ny; i++){
175         in[i] /= (Nx * Ny); // normalization of FFT
176     }
177
178     // save to txt
179     rem = k % (Nz/frames);
180     if(rem == 0){
181         div = k / (Nz/frames);
182         sprintf(filename, "%02d.txt", div);
183
184         fp3 = freopen(filename, "w", stdout);
185
186         for(i = 0; i < Nx; i++){
187             for(j = 0; j < Ny; j++){
188                 printf("%e\n", cabs(in[i+j*Nx])*cabs(in[i+j*Nx]));
189             }
190             printf("\n");
191         }
192         fclose(fp3);
193     }
194     fftw_cleanup_threads();
195     fftw_destroy_plan(p_forward);
196     fftw_destroy_plan(p_inverse);
197     fftw_free(in);
198     fftw_free(aux);
199     fftw_free(out);
200     fftw_free(phase);
201     free(dn);
202     return 0;
203 }
```

D. Código en Python generador de hologramas

```
1 # Copyright (C) 2024 Diego Roman-Cortes
2 #
3 # This program is free software: you can redistribute it and/or modify
4 # it under the terms of the GNU General Public License as published by
5 # the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or
6 # (at your option) any later version.
7 #
8 # This program is distributed in the hope that it will be useful,
9 # but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
10 # MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
11 # GNU General Public License for more details.
12 #
13 # You should have received a copy of the GNU General Public License
14 # along with this program. If not, see <https://www.gnu.org/licenses/>.
15 #
16 # e-mail: diego.roman.c@ug.uchile.cl
17
18 import numpy as np
19 import matplotlib.pyplot as plt
20 from PIL import Image, ImageChops
21 from scipy.special import eval_genlaguerre
22 from scipy import signal
23
24 my_dpi = 120 #120
25 plt.style.use('dark_background')
26
27 WIDTH = 1920
28 HEIGHT = 1080
29
30 sigma = HEIGHT/4
31
32 sigmax = HEIGHT/2.2/4*2.2
33 sigmay = HEIGHT/5.0*1.1
34
35 x = np.linspace(-WIDTH/2, WIDTH/2, num=WIDTH)
36 y = np.linspace(-HEIGHT/2, HEIGHT/2, num=HEIGHT)
37
38 Xn, Yn = np.meshgrid(x, y, indexing='xy')
39
40 angle = -0.05
41 X = Xn*np.cos(angle) - Yn*np.sin(angle)
42 Y = Yn*np.cos(angle) + Xn*np.sin(angle)
43
44 Z = np.zeros(X.shape, dtype=complex)
45 Z += (np.exp(-((X)/sigma/1.0)**2)*np.exp(-((Y)/sigma)**2)) # any function of x
46 and y
47 Z /= np.sqrt(np.sum(np.abs(Z)**2))
48 phase = (np.angle(Z)+np.pi) * 255.0 / (2*np.pi)
```

```

49
50 fig = plt.figure(figsize=(1920/my_dpi, 1080/my_dpi), dpi=my_dpi)
51
52 plt.imsave('fase.png', phase, cmap="gray", vmin=0, vmax=255)
53 plt.close("all")
54
55 fig = plt.figure(figsize=(1920/my_dpi, 1080/my_dpi), dpi=my_dpi)
56
57 blaze = (signal.sawtooth(Xn*2.0*np.pi/5.0) + 1)/2.0*255
58
59 plt.imsave('blaze.png', blaze, cmap="gray", vmin=0, vmax=255)
60 plt.close("all")
61
62 fig = plt.figure(figsize=(1920/my_dpi, 1080/my_dpi), dpi=my_dpi)
63
64 amplitude = (np.abs(Z)**2/np.max(np.abs(Z)**2)) * blaze/255
65 amplitude /= amplitude.max()
66 amplitude *= 255
67
68
69 plt.imsave('amplitude.png', amplitude, cmap="gray", vmin=0, vmax=255)
70 plt.close("all")
71
72
73 im1 = np.array(Image.open('amplitude.png').convert('L'), dtype="uint16")
74 im2 = np.array(Image.open('fase.png').convert('L'), dtype="uint16")
75
76 imf = (((amplitude + phase) % 255))
77 im = (imf).astype(np.uint8)
78
79 plt.imsave('vortex2.png', im, cmap="gray", vmin=0, vmax=255)

```