



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

ACOPLAMIENTOS ANÓMALOS Y TRANSICIONES TOPOLOGICAS EN SISTEMAS
FOTÓNICOS MULTIORBITALES

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS,
MENCIÓN FÍSICA

DIEGO ANTONIO ROMÁN CORTÉS

PROFESOR GUÍA:
RODRIGO ANDRÉS VICENCIO POBLETE

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
XX
PEDRO ORELLANA

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por los proyectos Instituto Milenio para la
Investigación en Óptica (MIRO) ICM17_012 y Fondecyt Regular 1231313
Powered@NLHPC: Esta tesis fue parcialmente apoyada por la infraestructura de
supercomputación del NLHPC (CCSS210001)

SANTIAGO DE CHILE
2025

RESUMEN DE LA TESIS PARA OPTAR
AL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS,
MENCIÓN FÍSICA
POR: DIEGO ANTONIO ROMÁN CORTÉS
FECHA: 2025
PROF. GUÍA: RODRIGO ANDRÉS
VICENCIO POBLETE

Acoplamientos Anómalos y Transiciones Topológicas en Sistemas Fotónicos Multiorbitales

En esta tesis se estudian fenómenos de acoplamiento no convencionales en redes fotónicas multiorbitales, fabricadas mediante escritura láser de femtosegundos. Se investigan mecanismos que trascienden el acoplamiento entre modos fundamentales, incorporando grados de libertad orbitales, asimetrías estructurales y efectos topológicos. La propagación de luz se analiza en configuraciones donde los modos transversales S y P interactúan de manera controlada, revelando nuevas formas de manipulación óptica basadas en simetría, geometría y estructura modal.

En primer lugar, se investiga el fenómeno de *invisibilidad dipolar* de los modos P , demostrando experimentalmente que, bajo ciertas condiciones geométricas, estos pueden permanecer ópticamente desacoplados. Este efecto se observa en una red tipo panal de abeja y se modela teóricamente mediante una extensión de la teoría de modos acoplados que incorpora tanto acoplamientos de largo alcance como no ortogonalidad entre modos.

Luego, se estudia el fenómeno de *acoplamiento evanescente no simétrico* en dímeros con diferentes contrastes de índice de refracción. Se presenta una formulación generalizada de la teoría de modos acoplados que da cuenta de esta asimetría inherente, incluso en ausencia de pérdida o ganancia. Se valida experimentalmente la ruptura de reciprocidad mediante mediciones de desbalance de intensidad dependientes del canal de entrada.

Posteriormente, se explora el *acoplamiento interorbital SP*, un mecanismo que permite hibridar modos de simetría transversal distinta mediante la sintonización precisa de sus constantes de propagación. A partir de esta técnica, se implementa una red que realiza el modelo SP-SSH, una extensión multiorbital del modelo de Su-Schrieffer-Heeger. Este sistema presenta una doble transición de fase topológica, determinada por la dimerización geométrica y el desintonizado orbital, que da lugar a tres fases distintas caracterizadas mediante polarización de bullo y análisis espectral.

Los resultados experimentales y numéricos presentados en esta tesis revelan nuevas formas de controlar la propagación de luz utilizando los grados de libertad orbitales de los modos guiados, abriendo el camino hacia el diseño de redes fotónicas avanzadas con funcionalidad topológica y direccional.

*Mas si buscáis descubrimientos
Tierras irrealizables más allá de los cielos
Vegetante obsesión de musical congoja
Volvamos al silencio
Trampas de luz y cascadas lujosas
Trampas de perla y de lámpara acuática
Anda como los ciegos con sus ojos de piedra
Presintiendo el abismo a todo paso
Mas no temas de mí que mi lenguaje es otro
No trato de hacer feliz ni desgraciado a nadie
Ni descolgar banderas de los pechos
Ni dar anillos de planetas
Ni hacer satélites de mármol en torno a un talismán ajeno
Quiero darte una música de espíritu
Música mía de esta cítara plantada en mi cuerpo
Música que hace pensar en el crecimiento de los árboles
Y estalla en luminarias dentro del sueño*

Extractos de *Altazor*, Vicente Huidobro

Agradecimientos

Detrás de cada logro hay una constelación de personas que lo hicieron posible. Aunque sea imposible nombrarlas a todas, guardo en mi memoria el agradecimiento profundo por sus enseñanzas, su tiempo y su confianza.

En primer lugar, a mi círculo más íntimo:

- A mis padres, por sus enseñanzas, valores y experiencias que llevaré siempre conmigo.
- A mi hermano Martín, por las incontables noches de anime, juegos y cómplices risas.
- A mi pareja, Catalina, por su apoyo incondicional y cariño en los momentos más sombríos, y por ser mi refugio y motivación en los más brillantes.

Agradezco a Pablo y a Cristóbal, mis pilares de catorce años: por las tonterías que superan a las seriedades, por los silencios cómodos y las juntas espontáneas que parecen no tener fin.

Un agradecimiento especial a los insufribles “Amazing” Fabián y “Amazing” Carlos, por hacer los días de trabajo más llevaderos y por escucharme cuando más lo necesité, por empujarme cuando más lo necesitaba y por motivarme a sacar lo mejor de mí incluso cuando no creía en ello.

Un lugar muy particular lo tienen los integrantes —pasados, presentes y futuros— del Grupo de Redes Fotónicas:

- A Rodrigo, por acoger hace cinco años al entonces *mechón* de Licenciatura en Física que era, por confiar en mí y enseñarme todo lo que sé sobre Redes Fotónicas, acercarme al mundo académico y darme lecciones de vida que me cargaré como brújula hacia el futuro.
- A Paloma, Bastián, Ignacio y Diego, por su infinita paciencia y ayuda desinteresada.
- A Polette, Romina, Lucas y Daniel, por otorgarle colores cálidos y vibrantes al GO-LAB3, por ser los mejores colegas que pude haber tenido y por las risas, los buenos chismes y el aprendizaje constante que hicieron sentir la oficina y el lab como un segundo hogar.

A todos ustedes, mi eterno agradecimiento por ser parte de esta historia.

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
2. Marco Teórico	4
2.1. Propagación en guías de onda dieléctricas desde las ecuaciones de Maxwell	4
2.2. Soluciones analíticas para guía de onda tipo losa o <i>slab</i>	6
2.2.1. Soluciones gráficas y comparación entre modos TE y TM	8
2.3. Soluciones analíticas para fibra óptica circular	9
2.3.1. Modos TE y TM	12
2.3.2. Modos HE y EH	13
2.4. Modos normales en guías de onda	14
2.5. Teoría de Modos Acoplados	15
2.5.1. Derivación desde un principio variacional	15
2.5.2. Dímero TE en guías de onda tipo losa	18
2.5.3. Bandas y Topología: Red de Su-Schrieffer-Heeger fotónica	19
3. Métodos Numéricos	23
3.1. Expansión en Modos Normales	23
3.2. Método de Propagación de Haces	24
3.2.1. Implementación mediante transformada de Fourier (FFTBPM)	25
3.3. Desde la Teoría de Modos Acoplados	26
4. Métodos Experimentales	29
4.1. Escritura directa de guías de onda	29
4.2. Montaje de excitación láser supercontinuo	30
4.3. Montaje de modulación espacial de luz	30
4.3.1. Etapa premodulación	30
4.3.2. Etapa de modulación	31
4.3.3. Etapa de acoplamiento	31
4.3.4. Etapa de Captura en Cámara	31
4.3.5. Circuito Óptico	32
4.3.6. Generación de Imágenes Complejas	32
4.4. Análisis de imágenes	33
5. Acoplamiento de modos p_y y ángulo de invisibilidad	34
5.1. Acopladores	34
5.2. Redes tipo panal de abeja	35

6. Acoplamiento Evanescente No Simétrico	39
6.1. Origen de la dinámica no simétrica	39
6.2. Validación Numérica	40
6.3. Comprobación Experimental	41
6.4. Implicancias y Aplicaciones	41
7. Moléculas Fotónicas	42
7.1. Autoestados del acoplador fotónico para distancias de separación pequeñas	42
7.2. Moléculas Fotónicas en Red SP-SSH	43
7.3. Topología en la Red SP-SSH	44
7.4. Implementación Experimental	45
8. Conclusiones	47
Bibliografía	54
Anexo A. Ortogonalidad de los Modos Normales	55
A.1. Hermiticidad del Operador T_{ij}	55
A.2. Ortogonalidad del Sistema Completo	55
Anexo B. Código en Python para cálculo de modos normales	57
Anexo C. Código en C de BPM	60
Anexo D. Código en Python generador de hologramas	65

Índice de Ilustraciones

2.1.	Forma de una guía de onda tipo losa.	6
2.2.	Soluciones gráficas de los modos TE.	8
2.3.	Forma espacial de la componente longitudinal del campo magnético.	9
2.4.	Primeros modos normales guiados para una guía circular o fibra óptica.	14
2.5.	Esquema del modelo SSH.	20
2.6.	Topología de la red SSH.	21
2.7.	Espectro de la red SSH.	22
3.1.	Error relativo y tiempo de ejecución.	24
3.2.	Excitación del sitio central de una red unidimensional.	26
3.3.	Comparación entre EME y CMT.	28
3.4.	Dinámica con EME y CMT.	28
4.1.	Esquema de la técnica de escritura de guías de onda.	29
4.2.	Montaje de excitación por láser supercontinuo.	30
4.3.	Modulación espacial de luz para máscaras de amplitud y fase arbitrarias.	31
4.4.	Diagrama del sistema de modulación espacial de luz	32
4.5.	Caracterización de vórtices ópticos mediante interferometría Mach-Zehnder.	33
5.1.	Barrido angular experimental	34
5.2.	Constantes de propagación y acoplamientos angulares para modos P	35
5.3.	Micrografías de redes fotónicas tipo panal de abeja para modos P	35
5.4.	Modelo de panal de abeja para modos p_y con acoplamientos hasta terceros vecinos	36
5.5.	Espectro de la red de panal de abeja de modos p_y en función del ángulo	37
5.6.	Descomposición de la red en cadenas cuasi-SSH	38
6.1.	Promedio absoluto de desbalances de intensidad $\bar{I}(z)$ en función de la distancia de propagación z	40
6.2.	Perfiles de salida para distintas longitudes de propagación.	41
7.1.	Propagación y acoplamientos en moléculas fotónicas	42
7.2.	Esquema de la red SP-SSH y los acoplamientos considerados.	43
7.3.	Topología de la Red SP-SSH para $\Delta\beta = 0$	44
7.4.	Diagrama de fases topológicas.	45
7.5.	Ánálisis numérico-experimental del modelo SP-SSH	45
7.6.	Caracterización experimental de redes SP-SSH	46

1. Introducción

Durante la última década, varios Premios Nobel en física han estado estrechamente ligados a la óptica [1]: por la generación de pulsos ultracortos de luz —femtosegundos [2] y luego attosegundos [3–5]—, por experimentos pioneros con fotones entrelazados [6–8], por el desarrollo de pinzas ópticas [9] y por la invención de LEDs de alta eficiencia [10–12]. Estos avances fundamentales han impulsado aplicaciones industriales, biomédicas, en telecomunicaciones e incluso en defensa. Una aplicación cotidiana destacada es la fibra óptica, que actúa como guía de onda para la luz y constituye hoy el principal medio de transmisión de datos a nivel global [13, 14].

Muchos de estos desarrollos se han visto potenciados por la técnica de *escritura láser de femtosegundos*, que permite fabricar redes fotónicas tridimensionales de guías de onda con precisión micrométrica. Esta tecnología ha habilitado la realización experimental de redes con geometrías complejas y grados de libertad artificiales, y ha sido utilizada para estudiar fenómenos como oscilaciones de Bloch [15], localización de Anderson [16], dinámica de bandas planas [17–20], fases topológicas [21–24], formación de solitones no lineales [25] e incluso la propagación de luz cuántica [26–28].

Dentro de este marco, el presente trabajo se enfoca en el estudio de redes fotónicas *multiorbitales*, en las que los modos transversales de la luz —en particular los modos P , antisimétricos— actúan como grados de libertad internos que pueden aprovecharse para enriquecer la dinámica óptica. A diferencia de los sistemas convencionales, donde se propaga solamente el modo fundamental (S), las redes multiorbitales permiten emular estructuras más complejas, como acoplamientos interorbitales o interferencias moduladas por la geometría.

Uno de los fenómenos experimentales que motiva este estudio es el *ángulo de invisibilidad* [29], descrito en el Capítulo 5. En ciertas condiciones geométricas, los modos P se desacoplan completamente unos de otros, permaneciendo ópticamente *invisibles*. Este fenómeno pone de manifiesto que la simetría transversal de los modos no solo es relevante, sino que puede ser usada activamente como herramienta de control. Este principio guía la exploración de nuevas formas de localización, filtrado y direccionamiento de luz en dispositivos fotónicos integrados.

Además, se aborda en esta tesis un fenómeno más sutil pero igualmente relevante: la *ruptura de simetría en los acoplamientos evanescentes* entre guías. En sistemas reales, el supuesto estándar de que el acoplamiento entre dos modos es simétrico —es decir, que $C_{i \rightarrow j} = C_{j \rightarrow i}$ — puede dejar de ser válido cuando las guías presentan diferentes perfiles de índice de refracción. Este efecto, que no requiere pérdida, ganancia ni elementos activos, da lugar a

una dinámica no recíproca observable experimentalmente. Dicho marco teórico se presenta en el Capítulo 6, junto con validación experimental basada en redes tipo dímero con distintos contrastes de índice.

Luego, se utiliza el concepto de *acoplamiento interorbital SP*, un mecanismo que permite hibridar modos S y P ajustando finamente sus constantes de propagación a través del control de la potencia del láser de escritura [30]. Este acoplamiento da lugar a una dinámica rica, especialmente cuando se implementa en redes periódicas. En el Capítulo 7, este principio se aplica a la construcción de moléculas fotónicas —pares de guías fuertemente acopladas— cuyas combinaciones simétrica y antisimétrica funcionan como orbitales efectivos. Sobre esta base, se implementa experimentalmente el modelo *SP-SSH* [31], una extensión multiorbital del modelo de Su-Schrieffer-Heeger [32]. Este sistema presenta una *doble transición de fase topológica*, determinada por dos parámetros independientes: la dimerización geométrica y el desintonizado de las constantes de propagación entre los S y P . La existencia de tres fases distintas —con dos, cuatro o ningún modo de borde— se analiza mediante la polarización de bulto y técnicas espectrales.

Esta línea complementa y refuerza el eje general de esta tesis: estudiar cómo la estructura interna de los modos —ya sea su simetría transversal u orbital, así como la diferencia entre ellos— puede utilizarse como recurso físico para controlar la propagación de luz en redes fotónicas.

Este trabajo se organiza de la siguiente manera:

El Capítulo 2 introduce el formalismo teórico utilizado a lo largo de la tesis, incluyendo los principios de propagación modal, la teoría de modos acoplados en redes discretas, y los conceptos topológicos relevantes en el estudio de bandas fotónicas.

En el Capítulo 3 se presentan las herramientas numéricas empleadas. Se describe el método de Expansión en Modos Normales (EME), que permite modelar la evolución estacionaria de la luz, junto con otras metodologías complementarias como el método de propagación de haces (BPM) y la teoría de modos acoplados (CMT).

El Capítulo 4 detalla la técnica experimental de escritura láser por pulsos de femtosegundos, con énfasis en los parámetros clave para el diseño y fabricación de redes fotónicas multiorbitales tridimensionales.

En el Capítulo 5 se estudia el fenómeno de invisibilidad de los modos P , caracterizando experimentalmente la geometría crítica que conduce al desacoplamiento óptico de estos modos. Esta propiedad se prueba en una red tipo panal de abeja. Para lograr una concordancia cuan-

titativa entre teoría y experimento, se introduce un modelo extendido que incorpora tanto la *no ortogonalidad* modal como *acoplamientos de largo alcance* entre guías no adyacentes.

El Capítulo 6 examina el fenómeno de acoplamiento evanescente no simétrico entre guías de distinto índice de refracción. Se presenta una corrección a la teoría de modos acoplados convencional que permite modelar estos efectos mediante matrices de acoplamiento no hermíticas pero con espectros reales, y se valida experimentalmente el desbalance de intensidad resultante en dímeros asimétricos.

En el Capítulo 7 se analiza la formación de moléculas fotónicas como bloques constructivos para redes multiorbitales. Sobre esta base se implementa y caracteriza una red tipo SP-SSH, una extensión multiorbital del modelo de Su-Schrieffer-Heeger, incluyendo el estudio de sus fases topológicas mediante polarización de bulto y espectros de borde.

Finalmente, el Capítulo 8 presenta las conclusiones del trabajo y discute posibles extensiones hacia otras plataformas fotónicas.

2. Marco Teórico

En este capítulo se desarrollarán las herramientas analítico-teóricas que permiten describir los sistemas fóticos estudiados en esta tesis. Estos consisten en la propagación de luz láser de baja potencia (1 mW de potencia de salida) propagada en sistemas acoplados de guías de onda, las cuales están escritas dentro de una muestra de vidrio borosilicato. Estas condiciones experimentales permiten describir el comportamiento de la luz utilizando las ecuaciones de Maxwell aplicadas a un medio lineal, isotrópico, no magnético y sin fuentes de carga ni de corriente libres.

2.1. Propagación en guías de onda dieléctricas desde las ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell en este régimen, en el Sistema Internacional de Unidades, son:

$$\nabla \cdot [\epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}] = 0 , \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} , \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 , \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} , \quad (2.4)$$

donde \mathbf{E} es el campo eléctrico y \mathbf{H} es el campo magnético. Las guías de onda consideradas son sistemas invariantes en la dirección de propagación $\hat{\mathbf{z}}$. Por lo tanto, el perfil de índice de refracción puede expresarse como $n(x, y) = n_0 + \Delta n(x, y)$ donde $n_0 = 1.48$ es el índice de refracción del sustrato de borosilicato y $\Delta n(x, y)$ representa la modulación transversal del índice, con valores máximos en el rango $10^{-5} - 10^{-3}$. Esta variación espacial del índice, $\Delta n(x, y)$, es responsable del confinamiento óptico en el plano transversal (x, y) , permitiendo la propagación guiada de los modos electromagnéticos a lo largo del eje $\hat{\mathbf{z}}$.

Luego de asumir una solución temporal armónica proporcional a $e^{-i\omega t}$ se puede reemplazar la ecuación de Faraday-Lenz (2.2) en la de Ampère-Maxwell (2.4) obteniendo:

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{i\omega\mu_0} \right) = -i\omega\epsilon_0 n^2 \mathbf{E} \implies \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = k_0^2 n^2 \mathbf{E} , \quad (2.5)$$

donde $k_0 \equiv \omega/c$ es el número de onda en el vacío. Por identidad de cálculo vectorial, se tiene que $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$. La ley de Gauss (2.1) implica que $\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla n^2}{n^2} \cdot \mathbf{E}$. Al

reemplazar en la ecuación (2.5), se obtiene la ecuación

$$(\nabla^2 + k_0^2 n^2) \mathbf{E} = -\nabla \left(\frac{\nabla n^2}{n^2} \cdot \mathbf{E} \right). \quad (2.6)$$

Análogamente, es posible aplicar combinar las ecuaciones de Ampère-Maxwell (2.4) y de Faraday-Lenz (2.2) en conjunto con la divergencia nula del campo magnético \mathbf{H} (2.3):

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{H}}{-i\omega\epsilon_0 n^2} \right) &= i\omega\mu_0 \mathbf{H} \implies \nabla \times \left(\frac{1}{n^2} \nabla \times \mathbf{H} \right) = k_0^2 \mathbf{H}, \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \nabla n^2 \times (\nabla \times \mathbf{H}) &= k_0^2 n^2 \mathbf{H}. \end{aligned}$$

La ecuación análoga a (2.6) para \mathbf{H} es, por consiguiente:

$$(\nabla^2 + k_0^2 n^2) \mathbf{H} = i\omega\epsilon_0 \nabla n^2 \times \mathbf{E}. \quad (2.7)$$

En esta tesis se trabajará con sistemas en los que la luz viaja a través de una estructura de guías de onda constantes en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$ y periódicas en la dirección transversal. Es por ello que será útil separar los componentes longitudinales y transversales de los campos, asumiendo una dependencia del tipo onda plana $e^{ik_z z}$ en la variable espacial z :

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{E} + ik_z \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad (2.8)$$

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{H} + ik_z \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H} = -i\omega\epsilon_0 n^2 \mathbf{E}. \quad (2.9)$$

Si se considera las descomposiciones $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\perp} + \hat{\mathbf{z}} E_z$ y $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\perp} + \hat{\mathbf{z}} H_z$, $\nabla_{\perp} \equiv -\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla)$, las ecuaciones de Maxwell que involucran rotores se escriben como:

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp} + ik_z \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_{\perp} + \nabla_{\perp} \times (\hat{\mathbf{z}} E_z) = i\omega\mu_0 (\mathbf{H}_{\perp} + \hat{\mathbf{z}} H_z), \quad (2.10)$$

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{H}_{\perp} + ik_z \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_{\perp} + \nabla_{\perp} \times (\hat{\mathbf{z}} H_z) = -i\omega\epsilon_0 n^2 (\mathbf{E}_{\perp} + \hat{\mathbf{z}} E_z). \quad (2.11)$$

Luego de aplicar producto cruz en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$ a las ecuaciones (2.10) y (2.11), se puede expresar E_z y H_z en función de \mathbf{E}_{\perp} y \mathbf{H}_{\perp} :

$$\begin{aligned} -i\nabla_{\perp} E_z &= k_z \mathbf{E}_{\perp} + \omega\mu_0 \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_{\perp}, & -i\nabla_{\perp} H_z &= k_z \mathbf{H}_{\perp} - \omega\epsilon_0 n^2 \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_{\perp}, \\ i\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp} H_z &= k_z \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_{\perp} + \omega\epsilon_0 n^2 \mathbf{E}_{\perp}, & i\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_{\perp} E_z &= \omega\mu_0 \mathbf{H}_{\perp} + k_z \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_{\perp}. \end{aligned}$$

Finalmente, los componentes perpendiculares de los campos, \mathbf{H}_{\perp} y \mathbf{E}_{\perp} , se pueden despejar

en términos de los componentes longitudinales, H_z y E_z :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_\perp &= i \frac{(\omega \varepsilon_0 n^2 \nabla_\perp E_z - \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_\perp H_z k_z)}{k_0^2 n^2 - k_z^2} , & \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_\perp &= -i \frac{(k_z \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_\perp E_z + \omega \mu_0 \nabla_\perp H_z)}{k_0^2 n^2 - k_z^2} , \\ \mathbf{H}_\perp &= \frac{i}{k_0^2 n^2 - k_z^2} (k_z \nabla_\perp H_z + \omega \varepsilon_0 n^2 \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_\perp E_z) , & \mathbf{E}_\perp &= \frac{i}{k_0^2 n^2 - k_z^2} (k_z \nabla_\perp E_z - \omega \mu_0 \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_\perp H_z) .\end{aligned}\quad (2.12)$$

Las ecuaciones (2.6), (2.7) y (2.12) serán las herramientas analíticas para los dos casos de estudio de las siguientes secciones y permiten visualizar la imposibilidad de las guías de onda dieléctricas de albergar modos TEM.

2.2. Soluciones analíticas para guía de onda tipo losa o *slab*

El sistema más simple que se puede estudiar es una guía de onda tipo losa, cuya forma analítica para el contraste $n(x)$ es la siguiente:

$$n(x) = \begin{cases} n_1 , & |x| \leq a \\ n_0 , & |x| > a \end{cases} ,$$

con $n_1 > n_0$.

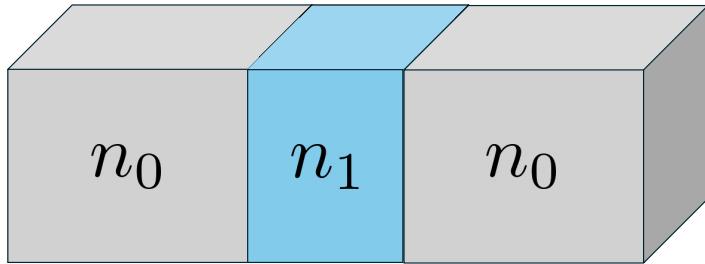


Figura 2.1: Forma de una guía de onda tipo losa. En las direcciones $\hat{\mathbf{y}}$ (vertical) y $\hat{\mathbf{z}}$ (hacia dentro de la página) la estructura es invariante.

Dado que $\nabla n^2 = \mathbf{0}$ para $|x| \neq a$, los lados derechos de las ecuaciones (2.6) y (2.7) son de tipo Helmholtz. Definiendo $\Psi = \{E_z, H_z\}$:

$$(\nabla_\perp^2 + k_0^2 n^2 - k_z^2)\Psi = \frac{d^2\Psi}{dx^2} + (k_0^2 n^2 - k_z^2)\Psi = 0 .$$

Como $n(x) = n(-x)$, las soluciones Ψ deben ser pares o impares. En efecto, si $\Psi(x)$ es solución,

el cambio $x \rightarrow x' = -x$ implica que $\Psi(-x) = \pm\Psi(x)$, pues $\Psi(x)$ es un campo real. Para encontrar soluciones cuya energía esté localizada en la guía de onda y que decaiga fuera de ella, se impondrá $k_0^2 n_0^2 \leq k_z^2 \leq k_0^2 n_1^2$. Se hace natural definir $\alpha^2 \equiv k_0^2 n_1^2 - k_z^2$ y $\beta^2 \equiv k_z^2 - k_0^2 n_0^2$. Con todo esto,

$$\Psi_s = \begin{cases} \Psi_{s1} \cos(\alpha x), & |x| \leq a \\ \Psi_{s0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases} \implies \nabla_{\perp} \Psi_s = \begin{cases} -\hat{x}\alpha \Psi_{s1} \sin(\alpha x), & |x| \leq a \\ -\hat{x} \frac{|x|}{x} \beta \Psi_{s0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}.$$

Por lo que las componentes verticales E_y y H_y pares se escriben debido a la ecuación (2.12) como:

$$E_y = \frac{i\omega\mu_0}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} \alpha H_{s1} \sin(\alpha x), & |x| \leq a \\ \frac{|x|}{x} \beta H_{s0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}, \quad H_y = \frac{-i\omega\varepsilon_0 n^2}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} \alpha E_{s1} \sin(\alpha x), & |x| \leq a \\ \frac{|x|}{x} \beta E_{s0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}.$$

Por otro lado, las soluciones impares tienen la forma

$$\Psi_a = \begin{cases} \Psi_{a1} \sin(\alpha x), & |x| \leq a \\ \Psi_{a0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases} \implies \nabla_{\perp} \Psi_a = \begin{cases} \hat{x}\alpha \Psi_{a1} \cos(\alpha x), & |x| \leq a \\ -\hat{x} \frac{|x|}{x} \beta \Psi_{a0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}.$$

Por lo que E_y y H_y se escriben como:

$$E_y = \frac{i\omega\mu_0}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} -\alpha H_{a1} \cos(\alpha x), & |x| \leq a \\ \frac{|x|}{x} \beta H_{a0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}, \quad H_y = \frac{i\omega\varepsilon_0 n^2}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} \alpha E_{a1} \cos(\alpha x), & |x| \leq a \\ -\frac{|x|}{x} \beta E_{a0} e^{-\beta|x|}, & |x| > a \end{cases}.$$

Imponiendo continuidad de las componentes tangenciales E_y , E_z , H_y y H_z :

$$\begin{aligned} E_{s1} \cos(\alpha a) &= E_{s0} e^{-\beta a}, & E_{a1} \sin(\alpha a) &= E_{a0} e^{-\beta a}, \\ H_{s1} \cos(\alpha a) &= H_{s0} e^{-\beta a}, & H_{a1} \sin(\alpha a) &= H_{a0} e^{-\beta a}, \\ n_1^2 E_{s1} \sin(\alpha a)/\alpha &= -n_0^2 E_{s0} e^{-\beta a}/\beta, & n_1^2 E_{a1} \cos(\alpha a)/\alpha &= n_0^2 E_{a0} e^{-\beta a}/\beta, \\ H_{s1} \sin(\alpha a)/\alpha &= -H_{s0} e^{-\beta a}/\beta, & H_{a1} \cos(\alpha a)/\alpha &= H_{a0} e^{-\beta a}/\beta. \end{aligned}$$

Buscando soluciones no triviales se tiene que:

$$\left[\frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} \right] \left[n_0^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + n_1^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} \right] \left[\frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} \right] \left[n_0^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - n_1^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} \right] = 0$$

Se distinguirá dos tipos de condiciones:

- Modos TE:

$$\frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} = 0, \tag{2.13}$$

$$\frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} = 0. \tag{2.14}$$

- Modos TM:

$$n_0^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + n_1^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} = 0 , \quad (2.15)$$

$$n_0^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - n_1^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} = 0 . \quad (2.16)$$

Asumiendo α , β y k_z conocidos, las amplitudes deben cumplir las relaciones:

$$\begin{aligned} E_{s1} \left[n_0^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + n_1^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} \right] &= 0 , & E_{a1} \left[n_0^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - n_1^2 \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} \right] &= 0 , \\ H_{s1} \left[\frac{\cos(\alpha a)}{\beta a} + \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} \right] &= 0 , & H_{a1} \left[\frac{\sin(\alpha a)}{\beta a} - \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha a} \right] &= 0 . \end{aligned}$$

Las ecuaciones superiores imponen que $E_1 = 0$ cuando se satisface alguna condición de modos TE. Análogamente, las ecuaciones inferiores imponen $H_1 = 0$ en el caso de modos TM. Efectivamente, los nombres TE y TM se han puesto por transversal eléctrico y transversal magnético, respectivamente. Un corolario para los modos TE es que $E_z = E_x = 0$, por lo que la polarización del campo eléctrico será exclusivamente en la dirección \hat{y} . Así mismo, sólo un haz polarizado en \hat{x} podría excitar un modo TM, por lo que en un experimento se debe tener esto presente: una condición inicial arbitraria se propagará como una combinación lineal de los modos TE y TM que soporte la guía.

2.2.1. Soluciones gráficas y comparación entre modos TE y TM

Usando las dos ecuaciones de modos TE junto a la restricción $(\alpha a)^2 + (\beta a)^2 = k_0^2 a^2 (n_1^2 - n_0^2) \equiv V^2$ es posible obtener soluciones gráficas para las constantes de propagación k_z a partir de las intersecciones $(\alpha a, \beta a)$, como se grafica en la Figura 2.2.

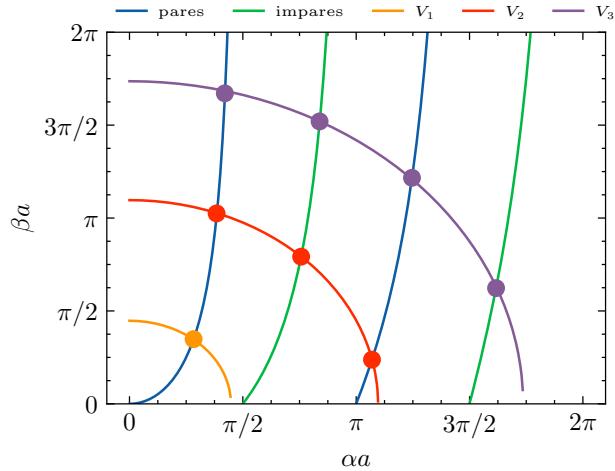


Figura 2.2: Soluciones gráficas de los modos TE. A mayor contraste $\Delta n = n_1 - n_0$, mayor cantidad de modos guiados soporta la guía de onda.

Luego de encontrar k_z , se tiene todo lo necesario para reemplazar en las expresiones obtenidas para las componentes del campo electromagnético. En la Figura 2.3 se grafica la forma espacial de cuatro modos, que se corresponden con los cuatro puntos morados de la Figura 2.2.

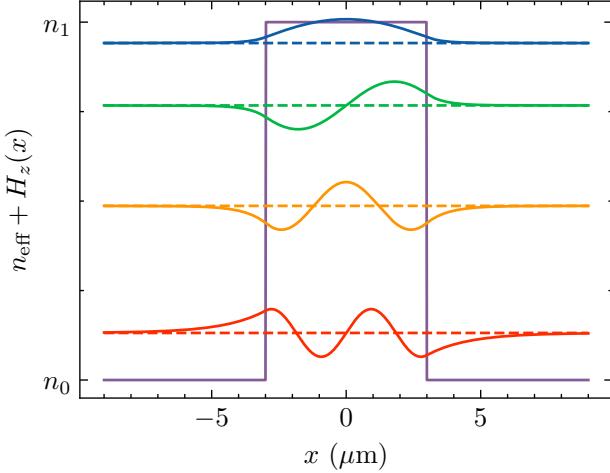


Figura 2.3: Forma espacial de la componente longitudinal del campo magnético.

La condición de corte (*cutoff*) en guías de onda es equivalente a que la energía deje de decaer en la región $|x| > a$, es decir, se debe cumplir que $\beta a \rightarrow 0$. Los modos simétricos o pares cumplen esta condición para $\sin(V) = 0$, lo que implica que $V = m\pi$, con m entero. En particular, considerando $m = 0$ y barriendo $n_1 \rightarrow n_0$, siempre existen al menos dos modos, uno TE y otro TM hasta que $n_1 < n_0$. Los modos antisimétricos o impares deben cumplir por su parte que $\cos(V) = 0$, lo que implica que $V = (m\pi \pm \pi/2)$. De esta condición se deduce que el primer par de modos exictados ($m = 0$) existe siempre que $\lambda \leq \lambda_c \equiv 4a \sqrt{n_1^2 - n_0^2}$. Escrito de forma compacta para el m -ésimo modo:

$$(\lambda_c)_m = \frac{4a}{m-1} \sqrt{n_1^2 - n_0^2} .$$

2.3. Soluciones analíticas para fibra óptica circular

En la sección anterior se estudió el sistema más sencillo en el que se puede hablar de guías de onda dieléctricas. El siguiente paso en complejidad consiste en guías de onda circulares. Para ello, se considerará que el índice de refracción varía radialmente según

$$n(\rho) = \begin{cases} n_1, & \text{si } \rho \leq a \\ n_0, & \text{si } \rho > a \end{cases} ,$$

donde la tupla (ρ, ϕ, z) define las coordenadas cilíndricas más apropiadas a usar para este problema. Al considerar las componentes longitudinales $\Psi = \{E_z, H_z\}$ del campo eléctrico y magnético y si se utiliza el método de separación de variables con $\Psi = R(\rho)\Phi(\phi)e^{ik_z z}$, las ecuaciones (2.6) y (2.7) toman la forma:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial^2}{\rho^2 \partial \phi^2} + (k_0^2 n^2 - k_z^2) \right] R(\rho)\Phi(\phi) &= 0 \\ \rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} + \rho^2 (k_0^2 n^2 - k_z^2) + \underbrace{\frac{d^2 \Phi}{\Phi d\phi^2}}_{-\ell^2} &= 0 \\ \therefore \Phi(\phi) &= A e^{i\ell\phi} \end{aligned}$$

Luego de imponer condiciones de periodicidad $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$, se tiene necesariamente que ℓ es un número entero. Por consiguiente, la ecuación para $R(\rho)$ es de tipo Bessel entera, por lo que buscando soluciones tales que $k_0^2 n^2 < \beta_z^2 < k_0^2 n^2$ y definiendo nuevamente $\alpha^2 \equiv k_0^2 n^2 - k_z^2$ y $\beta^2 \equiv k_z^2 - k_0^2 n^2$ se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(k_0^2 n^2 - k_z^2 - \frac{\ell^2}{\rho^2} \right) R &= 0 \\ \therefore R(\rho) &= \begin{cases} C_1 J_\ell(\alpha\rho) + D_1 Y_\ell(\alpha\rho), & \text{si } \rho \leq a \\ C_2 K_\ell(\beta\rho) + D_2 I_\ell(\beta\rho), & \text{si } \rho > a \end{cases}. \end{aligned}$$

Necesariamente se debe imponer $D_1 = D_2 = 0$ para que la solución sea finita para $\rho = 0$ y para $\rho \rightarrow +\infty$. Es decir, la parte radial de la solución es

$$R(\rho) = \begin{cases} C_1 J_\ell(\alpha\rho), & \text{si } \rho \leq a \\ C_2 K_\ell(\beta\rho), & \text{si } \rho > a \end{cases}.$$

En este caso, para imponer las condiciones de continuidad en $\mathbf{E}_{||} = E_\phi \hat{\phi} + E_z \hat{\mathbf{z}}$ y $\mathbf{H}_{||} = H_\phi \hat{\phi} + H_z \hat{\mathbf{z}}$, se hace necesario relacionar el resto de componentes del campo con E_z y H_z para lo cual se requieren las ecuaciones (2.12).

Como

$$\nabla_{\perp} \Psi = \begin{cases} \Psi_0^1 \left[\hat{\rho} \alpha J'_\ell(\alpha\rho) + i \hat{\phi} \ell J_\ell(\alpha\rho)/\rho \right] e^{i\ell\phi} e^{ik_z z}, & \text{si } \rho \leq a \\ \Psi_0^0 \left[\hat{\rho} \beta K'_\ell(\beta\rho) + i \hat{\phi} \ell K_\ell(\beta\rho)/\rho \right] e^{i\ell\phi} e^{ik_z z}, & \text{si } \rho > a \end{cases}$$

Separando por componentes y reemplazando:

$$\begin{aligned}
H_z &= e^{i\ell\phi} e^{ik_z z} \begin{cases} H_0^1 J_\ell(\alpha\rho) , & \text{si } \rho \leq a \\ H_0^0 K_\ell(\beta\rho) , & \text{si } \rho > a \end{cases} \\
H_r &= \frac{ie^{i\ell\phi} e^{ik_z z}}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} k_z \alpha H_0^1 J'_\ell(\alpha\rho) - i\omega \varepsilon_0 n^2 \ell E_0^1 J_\ell(\alpha\rho)/\rho , & \text{si } \rho \leq a \\ k_z \beta H_0^0 K'_\ell(\beta\rho) - i\omega \varepsilon_0 n^2 \ell E_0^0 K_\ell(\beta\rho)/\rho , & \text{si } \rho > a \end{cases} \\
H_\phi &= \frac{ie^{i\ell\phi} e^{ik_z z}}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} ik_z \ell H_0^1 J_\ell(\alpha\rho)/\rho + \omega \varepsilon_0 n^2 \alpha E_0^1 J'_\ell(\alpha\rho) , & \text{si } \rho \leq a \\ ik_z \ell H_0^0 K_\ell(\beta\rho)/\rho + \omega \varepsilon_0 n^2 \beta E_0^0 K'_\ell(\beta\rho) , & \text{si } \rho > a \end{cases} \\
E_z &= e^{i\ell\phi} e^{ik_z z} \begin{cases} E_0^1 J_\ell(\alpha\rho) , & \text{si } \rho \leq a \\ E_0^0 K_\ell(\beta\rho) , & \text{si } \rho > a \end{cases} \\
E_r &= \frac{ie^{i\ell\phi} e^{ik_z z}}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} k_z \alpha E_0^1 J'_\ell(\alpha\rho) + i\omega \mu_0 \ell H_0^1 J_\ell(\alpha\rho)/\rho , & \text{si } \rho \leq a \\ k_z \beta E_0^0 K'_\ell(\beta\rho) + i\omega \mu_0 \ell H_0^0 K_\ell(\beta\rho)/\rho , & \text{si } \rho > a \end{cases} \\
E_\phi &= \frac{ie^{i\ell\phi} e^{ik_z z}}{k_0^2 n^2 - k_z^2} \begin{cases} ik_z \ell E_0^1 J_\ell(\alpha\rho)/\rho - \omega \mu_0 \alpha H_0^1 J'_\ell(\alpha\rho) , & \text{si } \rho \leq a \\ ik_z \ell E_0^0 K_\ell(\beta\rho)/\rho - \omega \mu_0 \beta H_0^0 K'_\ell(\beta\rho) , & \text{si } \rho > a \end{cases}
\end{aligned}$$

Luego, imponiendo continuidad en z y ϕ :

$$H_0^1 J_\ell(\alpha a) = H_0^0 K_\ell(\beta a) \quad (2.17)$$

$$E_0^1 J_\ell(\alpha a) = E_0^0 K_\ell(\beta a) \quad (2.18)$$

$$-\omega \varepsilon_0 n_1^2 \alpha \beta^2 a E_0^1 J'_\ell(\alpha a) - ik_z \ell \beta^2 H_0^1 J_\ell(\alpha a) = \omega \varepsilon_0 n_0^2 \alpha^2 \beta a E_0^0 K'_\ell(\beta a) + ik_z \ell \alpha^2 H_0^0 K_\ell(\beta a) \quad (2.19)$$

$$-ik_z \ell \beta^2 E_0^1 J_\ell(\alpha a) + \omega \mu_0 \alpha \beta^2 a H_0^1 J'_\ell(\alpha a) = ik_z \ell \alpha^2 E_0^0 K_\ell(\beta a) - \omega \mu_0 \alpha^2 \beta a H_0^0 K'_\ell(\beta a) \quad (2.20)$$

Buscando soluciones no triviales:

$$\begin{vmatrix}
K_\ell(\beta a) & -J_\ell(\alpha a) & 0 & 0 \\
0 & 0 & K_\ell(\beta a) & -J_\ell(\alpha a) \\
ik_z \ell \alpha^2 K_\ell(\beta a) & ik_z \ell \beta^2 J_\ell(\alpha a) & \omega \varepsilon_0 n_0^2 \alpha^2 \beta a K'_\ell(\beta a) & \omega \varepsilon_0 n_1^2 \alpha \beta^2 a J'_\ell(\alpha a) \\
\omega \mu_0 \alpha^2 \beta a K'_\ell(\beta a) & \omega \mu_0 \alpha \beta^2 a J'_\ell(\alpha a) & -ik_z \ell \alpha^2 K_\ell(\beta a) & -ik_z \ell \beta^2 J_\ell(\alpha a)
\end{vmatrix} = 0$$

Finalmente, la ecuación trascendental que satifacen α , β y k_z es:

$$\left(\frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right) \left(n_1^2 \frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + n_0^2 \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right) = \ell^2 \left[\left(\frac{1}{\alpha a} \right)^2 + \left(\frac{1}{\beta a} \right)^2 \right]^2 \left(\frac{k_z}{k_0} \right)^2. \quad (2.21)$$

Dado que, en principio, los valores de k_z ya están determinados por la ecuación anterior, es

possible obtener dos relaciones entre H_0^1 y E_0^1 :

$$\frac{E_0^1}{H_0^1} = -\frac{ik_z\ell}{\omega\varepsilon_0} \left[\left(\frac{1}{\alpha a} \right)^2 + \left(\frac{1}{\beta a} \right)^2 \right] \left[n_1^2 \frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + n_0^2 \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right]^{-1}, \quad (2.22)$$

$$\frac{H_0^1}{E_0^1} = \frac{ik_z\ell}{\omega\mu_0} \left[\left(\frac{1}{\alpha a} \right)^2 + \left(\frac{1}{\beta a} \right)^2 \right] \left[\frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right]^{-1}. \quad (2.23)$$

Tomando raíz cuadrada al cociente de las ecuaciones (2.22) y (2.23) se tiene:

$$\frac{E_0^1}{H_0^1} = i \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\sqrt{\frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)}}}{\sqrt{n_1^2 \frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} + n_0^2 \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)}}}. \quad (2.24)$$

2.3.1. Modos TE y TM

El caso más sencillo de estudiar es imponiendo $\ell = 0$. La ecuación (2.21) implica:

$$\begin{aligned} \frac{J'_0(\alpha a)}{\alpha a J_0(\alpha a)} + \frac{K'_0(\beta a)}{\beta a K_0(\beta a)} &= 0, \quad (\text{modos TE}) \\ n_1^2 \frac{J'_0(\alpha a)}{\alpha a J_0(\alpha a)} + n_0^2 \frac{K'_0(\beta a)}{\beta a K_0(\beta a)} &= 0, \quad (\text{modos TM}) \end{aligned}$$

De la ecuación (2.24) es directo notar que la condiciones de modos transversales que las componentes longitudinales se hacen cero en los casos respectivos: $H_0^1 = 0$ para TE y $E_0^1 = 0$ para TM.

Las condiciones de corte se dan cuando $\beta a \rightarrow 0$. Utilizando las expresiones asintóticas para las funciones de Bessel con argumentos pequeños y sus relaciones de recurrencia, se tiene

$$\frac{\alpha a J_0(\alpha a)}{J_1(\alpha a)} = -\frac{\beta a K_0(\beta a)}{K_1(\beta a)} \approx (\beta a)^2 \ln\left(\frac{\beta a e^\gamma}{2}\right) \rightarrow 0,$$

por lo que se hace necesario que $J_0(\alpha a)|_{\alpha a \rightarrow V} = 0$. Denotando $x_{0,m} = 2.405, 5.520, 8.654, \dots$ al m -ésimo cero de la función $J_0(x)$, la longitud de onda de corte está dada por

$$(\lambda_c)_{0,m} = 2\pi a \frac{\sqrt{n_1^2 - n_0^2}}{x_{0,m}}, \quad (\text{modos TE y TM}). \quad (2.25)$$

Contrario al caso de la guía de onda tipo losa, en fibras ópticas se hace necesario estar bajo un umbral de corte máximo $(\lambda_c)_{0,1}$ no nulo para que los modos TE o TM existan.

2.3.2. Modos HE y EH

Interpretando (2.21) como una ecuación cuadrática en $J'_\ell(\alpha a)/\alpha a J_\ell(\alpha a)$:

$$\frac{J'_\ell(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} = - \left(\frac{n_1^2 + n_0^2}{2n_1^2} \right) \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \pm \sqrt{\left(\frac{n_1^2 - n_0^2}{2n_1^2} \right)^2 \left(\frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right)^2 + \left(\frac{k_z \ell}{k_0 n_1} \right)^2 \left[\left(\frac{1}{\alpha a} \right)^2 + \left(\frac{1}{\beta a} \right)^2 \right]^2}$$

Si se hace uso de las relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel $J_\ell(r)$, es posible obtener dos tipos de soluciones que suelen ser llamadas HE y EH debido al campo longitudinal con mayor peso:

$$\frac{J_{\ell-1}(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} = - \left(\frac{n_1^2 + n_0^2}{2n_1^2} \right) \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} + \frac{\ell}{(\alpha a)^2} - \sqrt{\Delta}, \quad (\text{modos HE}) \quad (2.26)$$

$$\frac{J_{\ell+1}(\alpha a)}{\alpha a J_\ell(\alpha a)} = \left(\frac{n_1^2 + n_0^2}{2n_1^2} \right) \frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} + \frac{\ell}{(\alpha a)^2} - \sqrt{\Delta}, \quad (\text{modos EH}) \quad (2.27)$$

$$\Delta = \left(\frac{n_1^2 - n_0^2}{2n_1^2} \right)^2 \left(\frac{K'_\ell(\beta a)}{\beta a K_\ell(\beta a)} \right)^2 + \left(\frac{k_z \ell}{k_0 n_1} \right)^2 \left[\left(\frac{1}{\alpha a} \right)^2 + \left(\frac{1}{\beta a} \right)^2 \right]^2.$$

Para $\ell = 0$, se recuperan las relaciones obtenidas para los modos TE_m (HE_{0m}) y TM_m (EH_{0m}). Para $\ell \neq 0$ se hace necesario considerar las expresiones asintóticas de las funciones de Bessel cuando $\beta a \rightarrow 0$ y $\alpha a \rightarrow V$:

$$\frac{K'_\ell(x)}{x K_\ell(x)} = - \frac{K_{\ell-1}(x)}{x K_\ell(x)} - \frac{\ell}{x^2} \approx \begin{cases} \ln(xe^\gamma/2) - \frac{1}{x^2} & \text{si } \ell = 1 \\ -\frac{1}{2(\ell-1)} - \frac{\ell}{x^2} & \text{si } \ell > 1 \end{cases}.$$

El caso $\ell = 1$ es de especial interés. La condición de modos HE se desarrolla como

$$\frac{\alpha a J_1(\alpha a)}{J_0(\alpha a)} = \left\{ \left(\frac{n_1^2 + n_0^2}{2n_1^2} \right) \left[\ln \left(\frac{2}{e^\gamma \beta a} \right) + \frac{1}{(\beta a)^2} \right] + \frac{1}{(\alpha a)^2} - \sqrt{\Delta} \right\}^{-1} \rightarrow 0.$$

Basta considerar la función $J_1(\alpha a)|_{\alpha a \rightarrow V} = 0$. Por otro lado, la condición EH elimina el cero $x = 0$ del cociente $\frac{\alpha a J_1(\alpha a)}{J_2(\alpha a)}$ lo que hace que esté “desfasada” respecto a la condición HE. Usando un razonamiento similar al caso $\ell = 0$, las condiciones de corte son

$$(\lambda_c)_{1,m} = 2\pi a \frac{\sqrt{n_1^2 - n_0^2}}{x_{1,m}}, \quad (\text{modos HE}_{1m})$$

$$(\lambda_c)_{1,m} = 2\pi a \frac{\sqrt{n_1^2 - n_0^2}}{x_{1,m+1}}, \quad (\text{modos EH}_{1m})$$

con $x_{1,m} = 0, 3.832, 7.016, 10.173, \dots$. En particular, el modo HE_{11} siempre existe. El caso

$\ell \geq 2$ tiene un desarrollo distinto por las forma asintóticas en juego y no será relevante para esta tesis. Sin embargo, se incluyen en la Figura 2.4 por completitud.

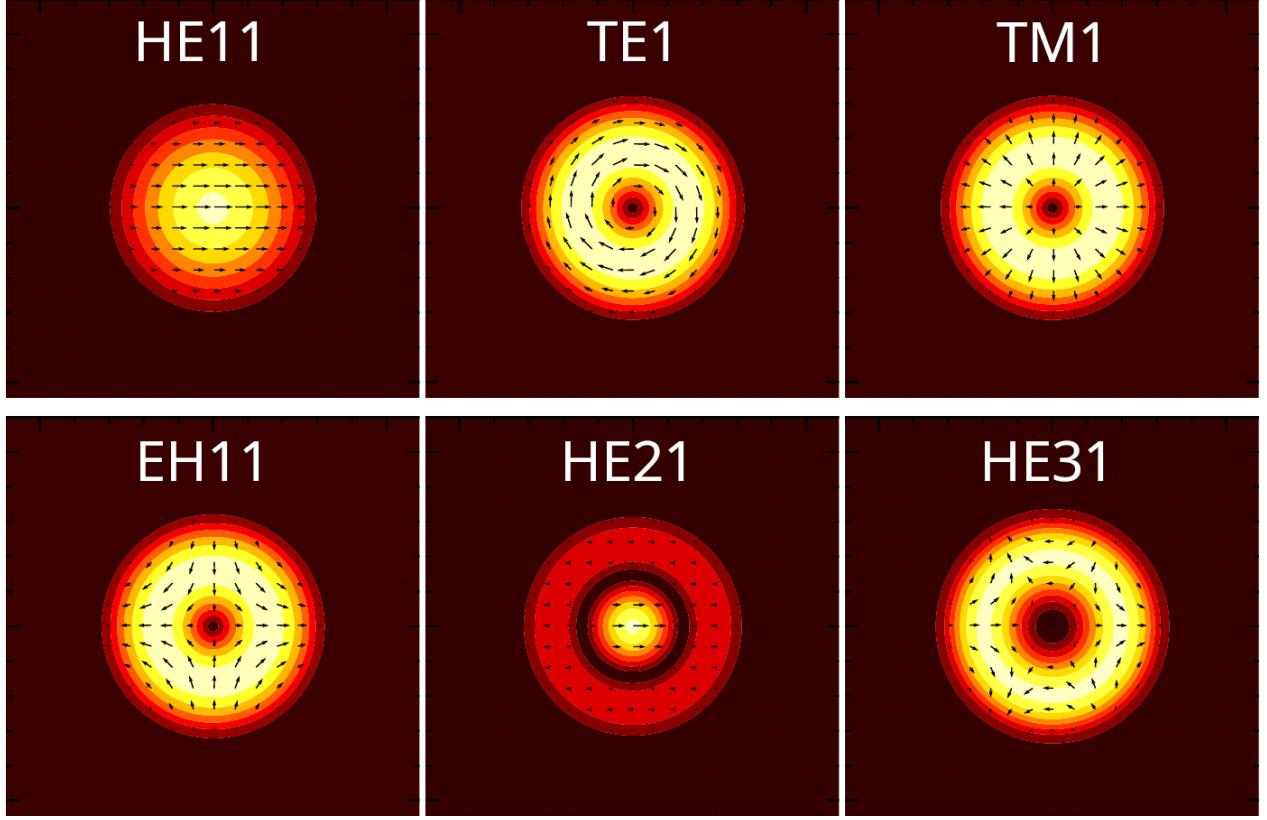


Figura 2.4: Primeros modos normales guiados para una guía circular o fibra óptica.

2.4. Modos normales en guías de onda

Si la estructura de guías de onda no varía en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$, la solución para el campo eléctrico puede escribirse, por separación de variables, como una onda plana del tipo $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_\nu(x, y)e^{i\beta_\nu z}$. A su vez, resulta conveniente separar el operador laplaciano como $\nabla^2 = \nabla_\perp^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Definiendo el operador D_{ij} tal que $D_{ij}E_j \equiv \partial_i \left(\frac{\partial_j n^2}{n^2} E_j \right)$, la parte transversal de las ecuaciones de Helmholtz (2.6) puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} \nabla_\perp^2 + k_0^2 n^2 + D_{xx} & D_{xy} \\ D_{yx} & \nabla_\perp^2 + k_0^2 n^2 + D_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \beta_\nu^2 \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

La ecuación (2.28) constituye un problema de autovalores para β_ν^2 , cuyas autofunciones $\mathbf{E}_\nu^\perp(x, y)$ describen los perfiles transversales de los modos guiados. En general, se trata de un sistema vectorial acoplado de segundo orden, cuya resolución requiere técnicas numéricas. No

obstante, en el régimen de *guaje débil*, en el que el índice de refracción varía levemente respecto a un fondo homogéneo n_0 , se puede desacoplar el sistema y tratarlo como un problema escalar para un componente dominante del campo eléctrico¹.

Bajo esta aproximación, se suelen considerar un modos quasi-transversales, donde el campo eléctrico está principalmente polarizado en una dirección fija (por ejemplo, E_y), y la ecuación de Helmholtz se reduce a:

$$[\nabla_{\perp}^2 + k_0^2 n^2(x, y)] \phi(x, y) = \beta^2 \phi(x, y) , \quad (2.29)$$

donde $\phi(x, y)$ representa el perfil transversal del campo. Esta aproximación resulta válida para muchas geometrías experimentales, especialmente cuando la luz está polarizada linealmente y las variaciones del índice no inducen acoplamiento entre polarizaciones ortogonales.

Los modos obtenidos de esta ecuación permiten calcular las constantes de propagación β_v , los perfiles espaciales del campo $\phi_v(x, y)$, y otras magnitudes relevantes como los factores de confinamiento o las velocidades de grupo. Además, estos modos sirven como base para métodos posteriores, como la Expansión en Modos Normales (EME) o la Teoría de Modos Acoplados (CMT), utilizadas para describir dinámicas en redes fotónicas.

2.5. Teoría de Modos Acoplados

2.5.1. Derivación desde un principio variacional

A partir de las ecuaciones (2.8) y (2.9), es posible expresar la constante de propagación k_z en términos del vector de Poynting $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\text{Re}\{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\}$, siguiendo un desarrollo análogo al presentado en [33].

$$k_z = \frac{\frac{1}{4i} \iint [(-\nabla_{\perp} \times \mathbf{E} + i\omega\mu_0 \mathbf{H}) \cdot \mathbf{H}^* + (\nabla_{\perp} \times \mathbf{H} + i\omega\epsilon_0 n^2 \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E}^*] dx dy}{\frac{1}{4} \iint (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{z}} dx dy} . \quad (2.30)$$

Al proponer una solución en forma de superposición de modos de las guías individuales del estilo

$$\mathbf{E} = \sum_i a_i \mathbf{e}_i , \quad \mathbf{H} = \sum_i a_i \mathbf{h}_i ,$$

donde a_i representa la amplitud del i -ésimo modo. Los coeficientes permanecen indeterminados pero sujetos a minimizar la expresión para k_z . Sustituyendo estas expansiones en (2.30),

¹ver Apéndice A.

se obtiene una expresión simplificada para la constante de propagación del sistema k_z :

$$(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{z}} = \sum_{ij} a_i^* (\mathbf{e}_j \times \mathbf{h}_i^* + \mathbf{e}_i^* \times \mathbf{h}_j) \cdot \hat{\mathbf{z}} a_j \equiv \sum_{ij} a_i^* p_{ij} a_j .$$

El integrando del numerador se desarrolla como:

$$\begin{aligned} \text{integrando numerador} &= i \sum_{ij} \left[a_i^* k_z^j (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{h}_i^* a_j + a_j (\omega \epsilon_0 (n^2 - n_j^2) \mathbf{e}_j - k_z^j \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{h}_j) \cdot \mathbf{e}_i^* a_i^* \right], \\ &= i \sum_{ij} a_i^* \left[k_z^j p_{ij} + \omega \epsilon_0 (n^2 - n_j^2) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i^* \right] a_j , \end{aligned}$$

donde k_z^j es la constante de propagación del j -ésimo modo aislado².

Definiendo las siguientes cantidades fundamentales:

$$P_{ij} \equiv \frac{1}{4} \iint (\mathbf{e}_j \times \mathbf{h}_i^* + \mathbf{e}_i^* \times \mathbf{h}_j) \cdot \hat{\mathbf{z}} , dx dy , \quad (2.31)$$

$$= \frac{1}{4\omega\mu_0} \iint [(k_z^i + k_z^j) (\mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_j - e_{z,i}^* e_{z,j}) + i (\mathbf{e}_i^* \cdot \nabla_{\perp} e_{z,j} + \mathbf{e}_j \cdot \nabla_{\perp} e_{z,i}^*)] dx dy , \quad (2.32)$$

$$H_{ij} \equiv P_{ij} k_z^j + \frac{\omega \epsilon_0}{4} \iint (n^2 - n_j^2) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i^* dx dy , \quad (2.33)$$

se puede escribir la expresión (2.30) para la constante de propagación k_z de manera compacta como un cociente de Rayleigh-Ritz:

$$k_z = \frac{\sum_{ij} a_i^* H_{ij} a_j}{\sum_{ij} a_i^* P_{ij} a_j} . \quad (2.34)$$

Diferenciando con respecto a a_k^* para optimizar el valor de k_z se tiene:

$$\frac{\partial k_z}{\partial a_k^*} = \frac{\sum_{ij} H_{ij} a_j \delta_{ik}}{\sum_{ij} a_i^* P_{ij} a_j} - \frac{(\sum_{ij} a_i^* H_{ij} a_j)(\sum_{ij} \delta_{ik} P_{ij} a_j)}{\left(\sum_{ij} a_i^* P_{ij} a_j \right)^2} = \frac{\sum_j (H_{jk} - k_z P_{kj}) a_j}{\sum_{ij} a_i^* P_{ij} a_j} \stackrel{!}{=} 0 . \quad (2.35)$$

Recuperando $k_z \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial z}$, se obtienen las ecuaciones de N modos acoplados no ortogonales:

$$-i \sum_j P_{kj} \frac{da_j}{dz} = \sum_j H_{kj} a_j , \text{ con } k = 1, 2, \dots, N . \quad (2.36)$$

Claramente, de la expresión (2.31) para P_{ij} , se cumple hermiticidad. A primera vista, puede parecer que H_{ij} no es hermítica, pero veamos que sí lo es. Para ello, basta considerar la resta

²en general, $k_z \neq k_z^j$.

$H_{ij} - H_{ji}^*$ y notar que se anula:

$$\begin{aligned}
H_{ij} - H_{ji}^* &= P_{ij}k_z^j - P_{ji}^*k_z^i + \frac{\omega\epsilon_0}{4} \iint (n_i^2 - n_j^2) \mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_j dx dy \\
&= \frac{1}{4} \iint (k_z^j - k_z^i) (\mathbf{e}_j \times \mathbf{h}_i^* + \mathbf{e}_i^* \times \mathbf{h}_j) \cdot \hat{\mathbf{z}} + \omega\epsilon_0(n_i^2 - n_j^2) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i^* dx dy \\
&= \frac{1}{4} \iint (i\nabla_\perp \times \mathbf{e}_j + \omega\mu_0 \mathbf{h}_j) \cdot \mathbf{h}_i^* - (i\nabla_\perp \times \mathbf{h}_j - \omega\epsilon_0 n_j^2 \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_i^* dx dy \\
&\quad - \frac{1}{4} \iint (i\nabla_\perp \times \mathbf{e}_i^* + \omega\mu_0 \mathbf{h}_i^*) \cdot \mathbf{h}_j + (i\nabla_\perp \times \mathbf{h}_i^* + \omega\epsilon_0 n_i^2 \mathbf{e}_i^*) \cdot \mathbf{e}_j dx dy \\
&\quad + \frac{\omega\epsilon_0}{4} \iint (n_i^2 - n_j^2) \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i^* dx dy \\
&= \frac{i}{4} \iint (\nabla_\perp \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{h}_i^* - (\nabla_\perp \times \mathbf{h}_j) \cdot \mathbf{e}_i^* + (\nabla_\perp \times \mathbf{e}_i^*) \cdot \mathbf{h}_j - (\nabla_\perp \times \mathbf{h}_i^*) \cdot \mathbf{e}_j dx dy \\
&= \frac{i}{4} \iint \nabla_\perp \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{h}_i^* + \mathbf{e}_i^* \times \mathbf{h}_j) dx dy = \frac{i}{4} \oint_C (\mathbf{e}_j \times \mathbf{h}_i^* + \mathbf{e}_i^* \times \mathbf{h}_j) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \\
&= 0 ,
\end{aligned}$$

donde se ha usado que los campos deben decaer a cero en el infinito. Las ecuaciones (2.36) se pueden obtener a partir de un Principio de Mínima Acción luego de definir el Lagrangiano L de tipo campo discreto de Schrödinger:

$$L = - \sum_{ij} a_i^* \left(iP_{ij} \frac{d}{dz} + H_{ij} \right) a_j . \quad (2.37)$$

Los momentos generalizados de este Lagrangiano son $\Pi_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_k} = -i \sum_j a_j^* P_{jk}$, por lo que el Hamiltoniano H asociado es:

$$H = \sum_j \Pi_j \dot{a}_j - L = \sum_{ij} -ia_i^* P_{ij} \dot{a}_j + a_i^* \left(iP_{ij} \frac{da_j}{dz} + H_{ij} a_j \right) = \sum_{ij} a_i^* H_{ij} a_j . \quad (2.38)$$

Dado que el Lagrangiano no depende explícitamente de z , el Hamiltoniano H es una cantidad conservada. Al variar el Lagrangiano se tiene:

$$\begin{aligned}
\delta L &= \sum_{ij} \frac{\partial L}{\partial a_j} \delta a_j + \frac{\partial L}{\partial a_i^*} \delta a_i^* + \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_j} \delta \dot{a}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i^*} \delta \dot{a}_i^* \\
&= \sum_{ij} \left(\frac{\partial L}{\partial a_j} - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_j} \right) \delta a_j + \left(\frac{\partial L}{\partial a_i^*} - \frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i^*} \right) \delta a_i^* + \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_j} \delta a_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i^*} \delta a_i^* \right) \\
&\Rightarrow \frac{d}{dz} \sum_{ij} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_j} \delta a_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i^*} \delta a_i^* \right) = 0 .
\end{aligned}$$

El par de transformaciones asociadas al grupo unitario $U(1)$, $a_j \rightarrow a'_j = e^{i\phi} a_j$, $a_i^* \rightarrow a'^*_i = e^{-i\phi} a_i^*$ dejan invariante el Lagrangiano, y si se toma una variación infinitesimal $\phi \ll 1$ se tiene

$\delta a_j = i\phi a_j$ y $\delta a_i^* = -i\phi a_i^*$, por lo que la cantidad conservada, P , que se identifica con la potencia total del sistema y está directamente relacionada con el vector de Poynting es:

$$P = \sum_{ij} a_i^* P_{ij} a_j = \iint \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{z}} dx dy . \quad (2.39)$$

Se tienen entonces dos cantidades conservadas en la dinámica, H y P , que serán de utilidad para verificar la validez de soluciones numéricas a la ecuación (2.36).

2.5.2. Dímero TE en guías de onda tipo losa

Para los modos TE fundamentales (condición antisimétrica) y las ecuaciones (2.12) se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{j\perp} &= \hat{\mathbf{y}} \frac{i\omega\mu_0 H_{a1}}{k_0^2 n_j^2 - (k_z^j)^2} \begin{cases} -\alpha \cos(\alpha(x - x_j)), & |x - x_j| \leq a \\ \beta \sin(\alpha a) e^{-\beta(|x - x_j| - a)}, & |x - x_j| > a \end{cases} \\ \mathbf{h}_{j\perp} &= \hat{\mathbf{x}} \frac{ik_z^j H_{a1}}{k_0^2 n_j^2 - (k_z^j)^2} \begin{cases} \alpha \cos(\alpha(x - x_j)), & |x - x_j| \leq a \\ -\beta \sin(\alpha a) e^{-\beta(|x - x_j| - a)}, & |x - x_j| > a \end{cases}, \end{aligned}$$

con $x_j = jd$, $d \geq 2a$ y $L = \int dy$. Elementos no diagonales tienen la forma:

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_{j\perp} \times \mathbf{h}_{i\perp}) \cdot \hat{\mathbf{z}} &= \frac{k_z^i \omega \mu_0 H_{a1}^2 \beta \sin(\alpha a)}{(k_0^2 n_j^2 - k_z^2)(k_0^2 n_i^2 - k_z^2)} \begin{cases} \alpha \cos(\alpha(x - x_i)) e^{-\beta(|x - x_j| - a)}, & |x - x_i| \leq a \\ i \leftrightarrow j, & |x - x_j| \leq a \\ \beta \sin(\alpha a) e^{-\beta(|x - x_i| + |x - x_j| - 2a)}, & \text{otro caso} \end{cases} \\ P_{ij} &= \frac{L k_z^i k_0 \mu_0 c H_{a1}^2 \sin^2(\alpha a) e^{-\beta d} e^{\beta a}}{2\beta} \left[\frac{e^{-\beta a} + \beta(d - 2a) e^{\beta a}}{\beta^2} - \frac{2 \cosh(\beta a)}{\alpha^2 + \beta^2} \right]. \\ \tilde{H}_{ij} \equiv H_{ij} - P_{ij} k_z^j &= \frac{L k_0 \mu_0 c H_{a1}^2}{2\beta} \sin^2(\alpha a) e^{2\beta a} e^{-\beta d}. \end{aligned}$$

Elementos diagonales tienen la forma:

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_{j\perp} \times \mathbf{h}_{j\perp}) \cdot \hat{\mathbf{z}} &= \frac{k_z^j \omega \mu_0 H_{a1}^2}{(k_0^2 n_j^2 - k_z^2)^2} \begin{cases} \alpha^2 \cos^2(\alpha(x - x_j)), & |x - x_j| \leq a \\ \beta^2 \sin^2(\alpha a) e^{2\beta a} e^{-2\beta|x - x_j|}, & |x - x_j| > a \end{cases} \\ P_{jj} &= \frac{L k_z^j k_0 \mu_0 c H_{a1}^2 a}{2\alpha^2} \left[1 + \frac{\sin^2(\alpha a)}{a\beta^3} k_0^2 (n_1^2 - n_0^2) \right]. \\ \tilde{H}_{jj} \equiv H_{jj} - P_{jj} k_z^j &= \frac{L k_0^3 \mu_0 c H_{a1}^2 \sin^2(\alpha a) e^{2\beta a} e^{-2\beta d}}{4\beta^3} (n_1^2 - n_0^2) \sinh(2\beta a). \end{aligned}$$

La dinámica está regida por el sistema acoplado de las ecuaciones (2.36), que luego de premultiplicar por la inversa de la matriz P_{ij} toma la forma:

$$-i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{k} & C \\ C & \tilde{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

con $\tilde{k} \equiv k_z^{\text{TE}} + \delta k$, $k_z^{\text{TE}} \sim 1.3 \times 10^5 \text{ cm}^{-1}$, $C \equiv \frac{P_{ii}\tilde{H}_{ij}-P_{ij}\tilde{H}_{ii}}{P_{ii}^2-P_{ij}^2} \sim 1 \text{ cm}^{-1}$ y $\delta k \equiv \frac{P_{ii}\tilde{H}_{ii}-P_{ij}\tilde{H}_{ij}}{P_{ii}^2-P_{ij}^2} \sim -0.02 \text{ cm}^{-1}$ para $\lambda = 730 \text{ nm}$, $n_1 = n_0 + 4 \times 10^{-4}$ y una distancia entre guías de $d = 18 \mu\text{m}$. La matriz $\hat{P}^{-1}\hat{H}$ se puede escribir en términos de las matrices de Pauli como $\tilde{k}I + C\sigma_x$, lo que permite utilizar sus propiedades para resolver la dinámica del sistema:

$$\begin{pmatrix} a_1(z) \\ a_2(z) \end{pmatrix} = e^{i[\tilde{k}t+C\sigma_x]z} \begin{pmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \end{pmatrix} = e^{i\tilde{k}z} \begin{pmatrix} \cos(Cz) & i \sin(Cz) \\ i \sin(Cz) & \cos(Cz) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(0) \\ a_2(0) \end{pmatrix}.$$

Una forma de encontrar el valor experimental del acoplamiento C es mediante la excitación individual de un modo. Con esto, la razón entre las potencias $|a_1(z)|^2$ y $|a_2(z)|^2$ permite despejar el acoplamiento para una distancia de propagación $z = L < \frac{\pi}{2C}$ conocida:

$$C = \frac{1}{L} \tan^{-1} \left(\left| \frac{a_2(L)}{a_1(L)} \right|^2 \right). \quad (2.40)$$

2.5.3. Bandas y Topología: Red de Su-Schrieffer-Heeger fotónica

Si bien es posible reformular las ecuaciones de Maxwell como un problema de autovalores en similitud con la mecánica cuántica para plantear un análogo al teorema de Bloch [34], la matriz $\hat{C} \equiv \hat{P}^{-1}\hat{H}$ hermética de la ecuación (2.36) es justificación suficiente para invocarlo: Es posible expresar las soluciones del sistema en una base de cuasimomento cuya periodicidad sea la misma que la de la matriz \hat{C} . Para exemplificar lo anterior se usará el célebre modelo de Su-Schrieffer-Heeger (SSH), que es uno de los sistemas más sencillos que exhibe *estados de borde topológicos* [32, 35, 36]. Originado para explicar la formación de estados electrónicos localizados en el poliacetileno, consiste en considerar únicamente dos tipos de acoplamiento: uno fuerte (enlace doble) y uno débil (enlace simple). En términos de Física del Sólido, corresponde a una red unidimensional con base de dos sitios. En la Figura 2.5 se ilustra el modelo a estudiar, que se corresponde al siguiente Hamiltoniano H .

$$H = \sum_n tb_n^* a_n + t' a_{n+1}^* b_n + c.c.$$

En condiciones de borde periódicas (Born-von Karman), es posible diagonalizar el Hamilto-

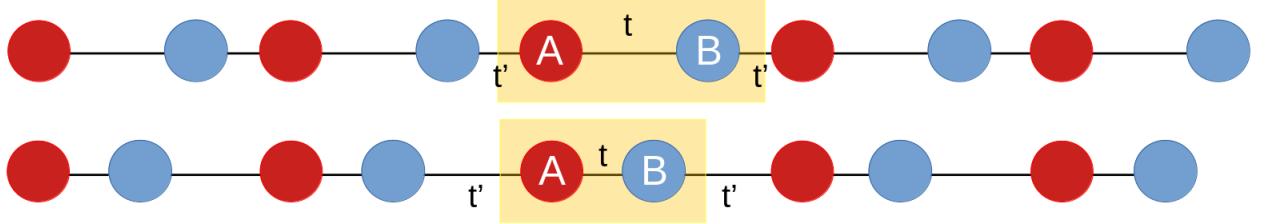


Figura 2.5: Esquema del modelo SSH. En amarillo se encierra la celda unitaria, donde se distinguen los sitios A y B y el acoplamiento intracelda (intercelda) t (t'). Se muestran dos configuraciones distintas.

niano en la base de Bloch con $a_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k a_k e^{iknd}$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k b_k e^{iknd}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{N} \sum_n \sum_{kk'} \left[(t + t'e^{ikd}) a_k b_{k'}^* e^{i(k-k')nd} + (t + t'e^{-ikd}) a_k^* b_{k'} e^{-i(k-k')nd} \right] \\ &= \sum_k \begin{pmatrix} a_k^* & b_k^* \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & t + t'e^{-ikd} \\ t + t'e^{ikd} & 0 \end{pmatrix}}_{\hat{H}(k)} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde se ha usado que

$$\frac{1}{N} \sum_n e^{i(k-k')nd} = \begin{cases} \frac{N}{N} = 1, & \text{si } k = k' \\ \frac{1 - e^{i(k-k')Nd}}{N} e^{i(k-k')d} = 0, & \text{si } k \neq k' \end{cases} = \delta_{kk'},$$

pues $k, k' \in \left\{ \frac{2\pi l}{Nd}, l = 0, \pm 1, \dots, \pm \frac{N}{2} \right\}$ pertenecen a la red recíproca 1D. El espectro de $\hat{H}(k)$ es $\lambda_k = \pm \sqrt{t^2 + t'^2 + 2tt' \cos(kd)}$, lo que pareciera indicar que el sistema es simétrico entre t y t' . Sin embargo, el cuadro no está completo sin los autovectores de $\hat{H}(k)$, $\mathbf{v}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pm e^{-i\phi(k)} \\ 1 \end{pmatrix}$, con

$\phi(k) = \tan^{-1} \left(\frac{t' \sin(kd)}{t + t' \cos(kd)} \right)$. Si se define $\mathbf{d}(k) \equiv \begin{pmatrix} t + t' \cos(kd) \\ t' \sin(kd) \\ 0 \end{pmatrix}$ es posible escribir el Hamiltoniano

$\hat{H}(k)$ en términos de las matrices de Pauli $\hat{H}(k) = \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, además de asociar la fase $\phi(k)$ al ángulo que forma la proyección del vector $\mathbf{d}(k)$ en el plano xy , $\phi(k) = \tan^{-1} \left(\frac{d_y}{d_x} \right)$. En particular, cuando $\delta \equiv \frac{t'}{t} < 1$, el vector $\mathbf{d}(k)$ encierra el origen una vez, mientras que para $\delta > 1$ no se encierra el origen, como se aprecia en la Figura 2.6. Formalmente, las fases de Zak, \mathcal{Z}_\pm , asociadas a los autoestados del bullo cambian dependiendo del valor de δ . Por definición [37],

$$\mathcal{Z}_\pm = i \oint \mathbf{v}_\pm^\dagger \frac{d\mathbf{v}_\pm}{dk} dk = -\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{d}}^{\frac{\pi}{d}} \frac{d\phi(k)}{dk} dk = -\frac{d}{2} \int_{-\frac{\pi}{d}}^{\frac{\pi}{d}} \frac{1 + \delta \cos(kd)}{\delta^2 + 1 + 2\delta \cos(kd)} dk = -\frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1 - \delta^2}{|1 - \delta^2|} \right).$$

Es decir,

$$\mathcal{Z}_\pm = \begin{cases} -\pi, & \text{si } |\delta| < 1 \\ 0, & \text{si } |\delta| > 1 \end{cases}.$$

El cambio en la fase de Zak al variar el parámetro δ se conoce como *transición topológica* puesto que no es posible pasar de un régimen a otro de forma suave. Esto tiene implicancias en el sistema con condiciones de borde abiertas (Dirichlet) debido a la *correspondencia bulk-borde* [38]. En concreto, así como se ilustra en la Figura 2.7, la topología del Hamiltoniano $\hat{H}(k)$ induce la aparición de estados de borde a energía cero al imponer condiciones de borde abiertas. El Hamiltoniano del modelo SSH presenta diversas simetrías: de reversión temporal, de inversión, partícula-hueco, translacional y quiral. Esta última es de particular relevancia, pues los estados de borde del modelo SSH están *topológicamente protegidos* ante cualquier desorden que respete la simetría quiral [39]. El operador quiral en cuestión es la matriz de Pauli σ_z , pues

$$\{\hat{H}(k), \sigma_z\} = \{d_x \sigma_x + d_y \sigma_y, \sigma_z\} = d_x \{\sigma_x, \sigma_z\}^0 + d_y \{\sigma_y, \sigma_z\}^0 = 0.$$

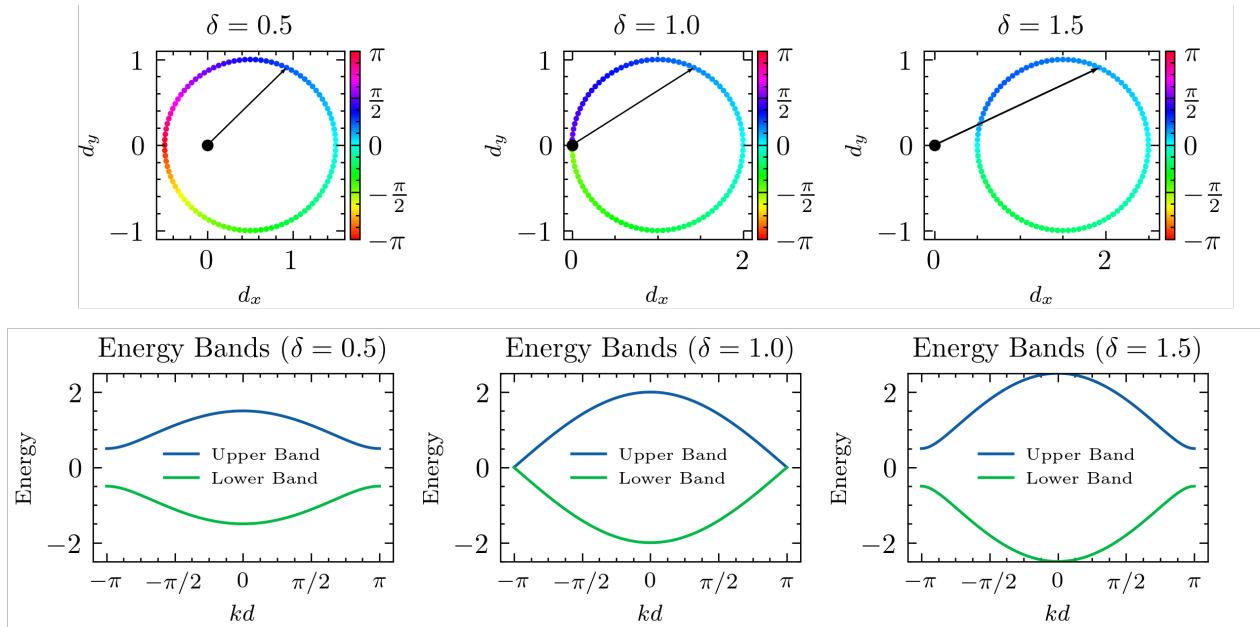


Figura 2.6: Topología de la red SSH. Arriba: Vectores \mathbf{d} y su fase. Para $\delta < 1$ ($\delta > 1$), (no) se encierra el origen. Abajo: Bandas en función del cuasimomento k en la primera zona de Brillouin para $\delta < 1$, $\delta = 1$ y $\delta > 1$. Se fija $t' = 1$ y se varía $\delta = \frac{t}{t'}$ para un número $N = 100$ de celdas unitarias.

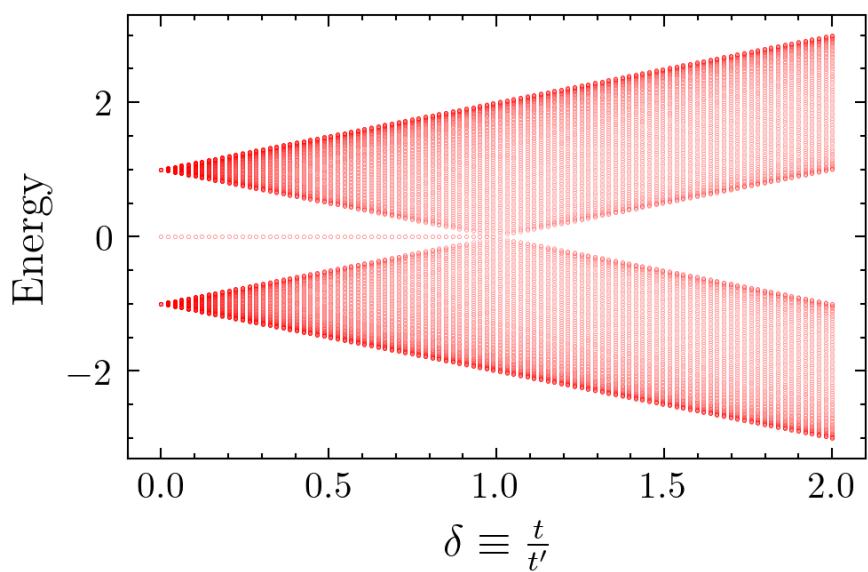


Figura 2.7: Espectro de la red SSH finita. Se aprecia la aparición de los estados de borde a energía cero para $\delta < 1$. Condiciones de borde abiertas en función del parámetro $\delta = \frac{t}{t'}$, para $t' = 1$ fijo y para un número $N = 100$ de celdas unitarias.

3. Métodos Numéricos

En este capítulo se presentan los métodos numéricos fundamentales utilizados en el desarrollo de esta tesis. Dado que muchos sistemas fotónicos carecen de soluciones analíticas exactas, los enfoques numéricos resultan esenciales para modelar su comportamiento electromagnético. Estos métodos permiten aproximar soluciones con precisión controlada, incluso en geometrías donde no existe alguna simetría a explotar.

El punto de partida lo constituyen las ecuaciones (2.6) y (2.7), que describen la propagación de campos electromagnéticos en medios dieléctricos. Cuando se aplica la aproximación de guiaje débil los términos del lado derecho de ambas ecuaciones pueden despreciarse. Esta simplificación elimina los efectos cruzados entre componentes de campo, reduciendo el sistema a ecuaciones escalares de tipo Helmholtz:

$$[\nabla^2 + k_0^2 n^2(\mathbf{r})] \Psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.1)$$

donde la ecuación (3.1) no solo sirve como marco teórico, sino también como base para los algoritmos desarrollados en los siguientes capítulos. Su versatilidad permite adaptar diferentes esquemas numéricos según las simetrías del problema, como se detallará en las secciones posteriores.

3.1. Expansión en Modos Normales

Este método numérico es útil cuando los sistemas fotónicos en estudio son invariantes en la dirección de propagación z . Esto es, $n(\mathbf{r}) \equiv n(x, y)$. La soluciones de la ecuación (3.1) se pueden expandir en ondas planas con perfiles transversales: $\Psi(\mathbf{r}) = \Psi(x, y) \exp(i\beta z)$. Con ésto, cada modo transversal ν debe cumplir la siguiente ecuación a resolver numéricamente:

$$[\nabla_{\perp}^2 + k_0^2 n^2(x, y)] \Psi_{\nu}(x, y) = \beta_{\nu}^2 \Psi_{\nu}(x, y), \quad \text{con } \nabla_{\perp}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (3.2)$$

Y el campo total propagado es una combinación lineal de los modos Ψ_{ν} :

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{\nu} a_{\nu} \Psi_{\nu}(x, y) e^{i\beta_{\nu} z}, \quad \text{con } a_{\nu} \propto \Psi_{\nu}(x, y) \cdot \Psi(x, y, z = 0). \quad (3.3)$$

En vez de integrar directamente la ecuación de valores propios (3.2), la estrategia será discretizar el espacio y aproximar al operador laplaciano transversal ∇_{\perp}^2 como una matriz, pues

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, y)}{\partial x^2} \sim \frac{\Psi[i+1, j] - 2\Psi[i, j] + \Psi[i-1, j]}{\Delta x^2}.$$

$\nabla_{\perp}^2 \sim \hat{D}_{xx} \otimes I_y + I_x \otimes \hat{D}_{yy}$ La matriz es nula en las posiciones no diagonales más allá de un espacio (*sparse-like*), por lo que es posible optimizar el proceso de cómputo al utilizar la librería de Python `scipy.sparse.linalg`, especialmente diseñada para el álgebra lineal de matrices de escasos elementos. El anexo B contiene una implementación de este algoritmo en Python bajo licencia [GNU GPL v3](#).

En la Figura 3.1 se valida el método numérico mediante comparación con las soluciones analíticas obtenidas en la subsección 2.2.1. La complejidad del problema es del orden $O(N^2)$ debido a la construcción de las matrices de $N \times N$, lo que se refleja en la dependencia del tiempo de ejecución en función del paso $\Delta x \equiv \frac{L}{N-1}$.

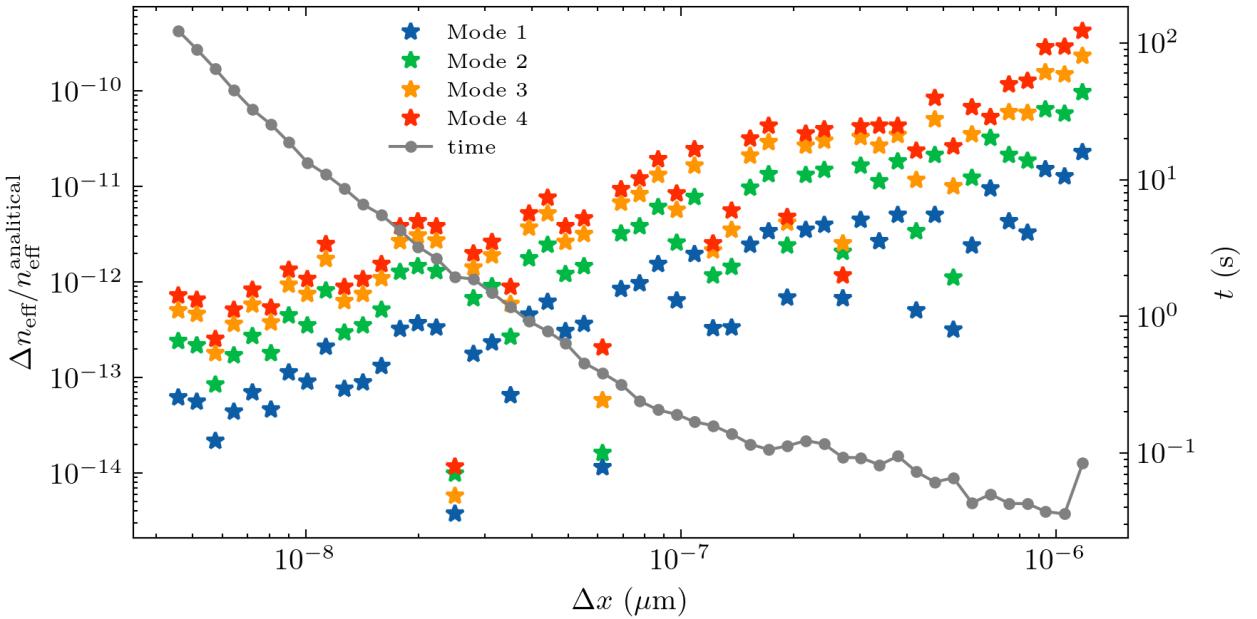


Figura 3.1: Error relativo y tiempo de ejecución de las soluciones numéricas a la ecuación (3.2) con respecto a las soluciones analíticas, en función del paso Δx .

3.2. Método de Propagación de Haces

Otra forma de abordar la integración numérica de la ecuación (3.1) consiste en separar el campo en su envolvente lenta y una fase rápidamente oscilante, considerando que en el rango visible el orden de magnitud es, $k_0 \sim 10^5 \text{ cm}^{-1}$: $\Psi(\mathbf{r}) = \phi(x, y, z) \exp(ik_0 n_0 z)$. Luego de

reemplazar en la ecuación (3.1) se obtiene la ecuación óptica de Schrödinger [40]:

$$-2ik_0n_0 \frac{\partial}{\partial z} \phi(x, y, z) = \left[\nabla_{\perp}^2 + k_0^2(n^2(\mathbf{r}) - n_0^2) \right] \phi(x, y, z), \quad (3.4)$$

donde se ha utilizado la aproximación paraxial $\left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right| \ll 2k_0n_0 \left| \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|$. Los algoritmos que resuelven la ecuación (3.4) son conocidos como Métodos de Propagación de Haces o *Beam Propagation Methods* (BPM) escalares, utilizados ampliamente en esta área de investigación [30, 41–44]. Fuera de la aproximación de guaje débil, los efectos de polarización cruzada son más relevantes y se hace necesaria una descripción vectorial del problema.

3.2.1. Implementación mediante transformada de Fourier (FFTBPM)

La ecuación (3.4) se puede escribir en términos de operadores lineales como [44]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = (\hat{A} + \hat{B}) \phi, \text{ con } \hat{A} \equiv i \frac{\nabla_{\perp}^2}{2k_0n_0} \text{ y } \hat{B} \equiv i \frac{k_0}{2n_0} [n^2(\mathbf{r}) - n_0^2]. \quad (3.5)$$

La solución formal a la ecuación (3.5) es $\phi(\mathbf{r}) = \exp[(\hat{A} + \hat{B})(z - z_0)] \phi(x, y, z_0)$. Es conveniente trabajar con el operador \hat{A} en el espacio de Fourier y con el operador \hat{B} en el espacio directo. Esto se debe a que \hat{A} contiene derivadas espaciales —en particular, el operador laplaciano transversal ∇_{\perp}^2 — las cuales se convierten en multiplicaciones simples al aplicar la transformada de Fourier. De esta forma, la operación $\hat{A}\phi$ se vuelve computacionalmente eficiente al transformarla en el dominio de los vectores de onda \mathbf{k}_{\perp} , donde actúa como un operador diagonal. Por otro lado, \hat{B} depende del perfil espacial del índice de refracción $n(\mathbf{r})$, el cual está definido localmente en el espacio real. Evaluar este término en Fourier implicaría una convolución, lo cual es innecesariamente costoso y menos intuitivo. Por este motivo, se mantiene en el espacio directo.

Dado que \hat{A} y \hat{B} no comutan en general, se puede expandir el operador exponencial a orden $O(\Delta z^3)$ como $\exp[(\hat{A} + \hat{B})\Delta z] \approx \exp\left(\frac{\hat{A}\Delta z}{2}\right) \exp\left(\hat{B}\Delta z\right) \exp\left(\frac{\hat{A}\Delta z}{2}\right) + O(\Delta z^3)$.

El algoritmo a implementar es el siguiente:

1. Se comienza con un perfil $\phi(x, y, z_0)$
2. Se actúa en el espacio de Fourier transformando el perfil y multiplicado por la fase asociada a \hat{A} : $\exp\left(\frac{ik^2\Delta z}{4k_0n_0}\right) \mathcal{F}(\phi(z_0))$, donde $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ son las frecuencias de Fourier.
3. Se aplica transformada de Fourier inversa y se multiplica por la fase asociada a \hat{B} :

$$\exp\left[\frac{i\Delta z k_0^2(n^2 - n_0^2)}{2k_0n_0}\right] \mathcal{F}^{-1}\left(\exp\left(\frac{ik^2\Delta z}{4k_0n_0}\right) \mathcal{F}(\phi(z_0))\right)$$
4. Se regresa al espacio de Fourier y se multiplica por la fase asociada a \hat{A} :

$$\exp\left(\frac{ik^2\Delta z}{4k_0n_0}\right)\mathcal{F}\left\{\exp\left[\frac{ik_0^2(n^2-n_0^2)}{2k_0n_0}\Delta z\right]\mathcal{F}^{-1}\left[\exp\left(\frac{ik^2\Delta z}{4k_0n_0}\right)\mathcal{F}(\phi(z_0))\right]\right\}$$

5. Se vuelve al espacio real, habiendo avanzado un paso Δz :

$$\phi(z_0 + \Delta z) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\exp\left(\frac{ik^2\Delta z}{4k_0n_0}\right)\mathcal{F}\left\{\exp\left[\frac{ik_0^2(n^2-n_0^2)}{2k_0n_0}\Delta z\right]\mathcal{F}^{-1}\left[\exp\left(\frac{ik^2\Delta z}{4k_0n_0}\right)\mathcal{F}(\phi(z_0))\right]\right\}\right\}$$

6. Se itera hasta llegar a la distancia de propagación z deseada.

En la Figura 3.2 se comparan los resultados experimentales con las simulaciones numéricas obtenidas mediante BPM. Los perfiles de intensidad normalizados muestran un acuerdo cualitativo notable, particularmente en la distribución espacial de los lóbulos principales.

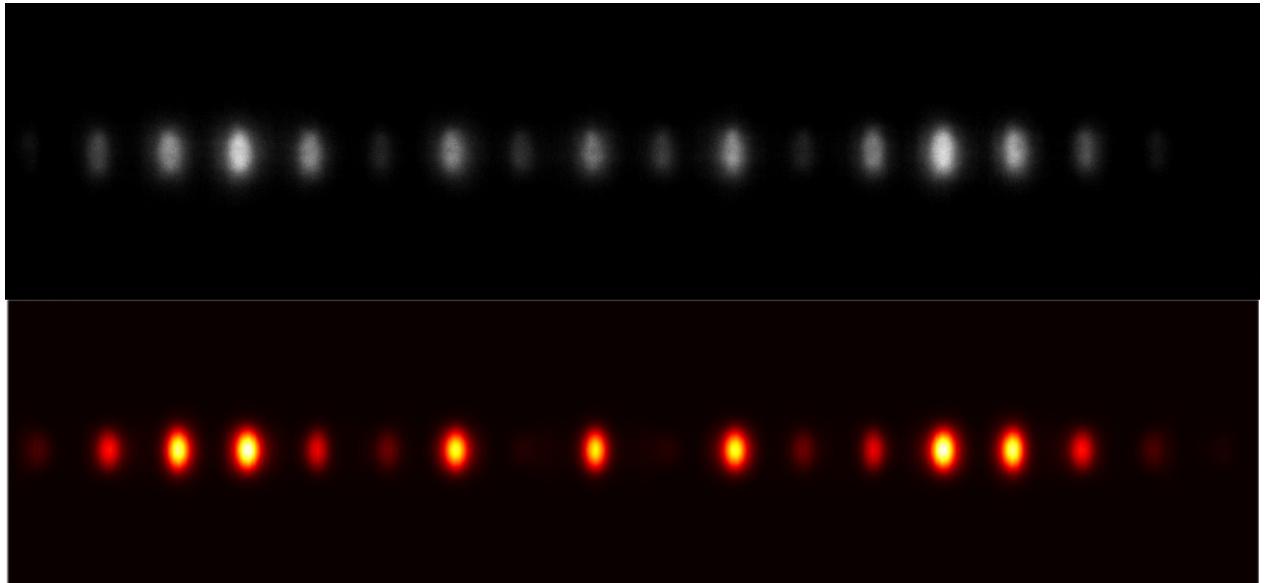


Figura 3.2: Excitación del sitio central de una red unidimensional. **Arriba:** Medición experimental a $\lambda = 730$ nm. **Abajo:** Simulación numérica realizada con BPM.

Este nivel de concordancia cualitativa valida la aproximación de guiado débil empleada en la ecuación (3.1), así como la aproximación paraxial, y refuerza la confiabilidad del método numérico para el diseño de dispositivos fotónicos con geometrías análogas.

3.3. Desde la Teoría de Modos Acoplados

La simulación numérica de las ecuaciones (2.36) representa la formulación más compacta posible, dado que la matriz de acoplamientos $\hat{C} \equiv \hat{P}^{-1}\hat{H}$ codifica todas las propiedades de la red que se desean estudiar de manera semiempírica. En este sentido, la diagonalización de \hat{C} constituye una herramienta numérica valiosa para analizar el comportamiento de redes fotónicas ante variaciones de parámetros como la dimerización (definida como la razón entre dos constantes de acoplamiento) o el desintonizado (la diferencia entre las constantes de propagación de modos distintos). Además, este enfoque permite explorar incluso sistemas

“no físicos”, gracias a los grados de libertad disponibles en los elementos de \hat{C} : por ejemplo, casos en los que el acoplamiento a segundos vecinos sea mayor que a primeros vecinos, o sistemas con acoplamientos complejos.

En la aproximación de guaje débil se pueden despreciar las componentes longitudinales del campo eléctrico:

$$\nabla \cdot (n^2 \mathbf{E}) \xrightarrow{n^2 \sim 0} n^2 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0,$$

donde el orden de magnitud de la componente longitudinal del campo es $|E_z| \sim |\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{\perp}|/\beta$. Así, los modos estudiados son cuasi-transversales, y la matriz \hat{P} se reduce a:

$$P_{ij} \sim \frac{k_z^i + k_z^j}{4\omega\mu_0} \iint (\mathbf{e}_i^{\perp})^* \cdot \mathbf{e}_j^{\perp} dx dy. \quad (3.6)$$

La ecuación (3.6), que cuantifica el solapamiento entre modos, junto con la ecuación (2.33) que describe los elementos de matriz del operador Hamiltoniano, constituyen herramientas fundamentales para el análisis comparativo entre el método de Expansión en Modos Normales (EME) y la Teoría de Modos Acoplados (CMT). Esta comparación se realiza a través de un estudio sistemático del espectro de autovalores de la matriz de acoplamientos \hat{C} , el cual contiene información esencial sobre las constantes de propagación efectivas del sistema.

La Figura 3.3 presenta un análisis cuantitativo de esta comparación, mostrando la evolución de los autovalores para un acoplador fotónico dieléctrico en función de la distancia de separación entre guías. Se observa que ambos métodos convergen asintóticamente para distancias mayores a $d > 20 \mu\text{m}$, donde la aproximación de campo débil de CMT resulta válida. Sin embargo, en el régimen de acoplamiento fuerte ($d < 13 \mu\text{m}$), las discrepancias comienzan a hacerse notar.

Más allá del análisis espectral, la validez de los autoestados calculados puede verificarse indirectamente mediante la ecuación (3.3), que relaciona la evolución del campo con la proyección sobre los modos propios del sistema y comparando cualitativamente los perfiles dinámicos obtenidos con los resultados experimentales y numéricos mostrados en la Figura 3.2. Este análisis (ver Figura 3.4) permite establecer los límites de aplicabilidad de cada método numérico: mientras que EME proporciona resultados precisos en todo el rango de parámetros a costa de mayor complejidad computacional, CMT ofrece una alternativa eficiente para sistemas débilmente acoplados donde la aproximación de modos localizados sigue siendo válida.

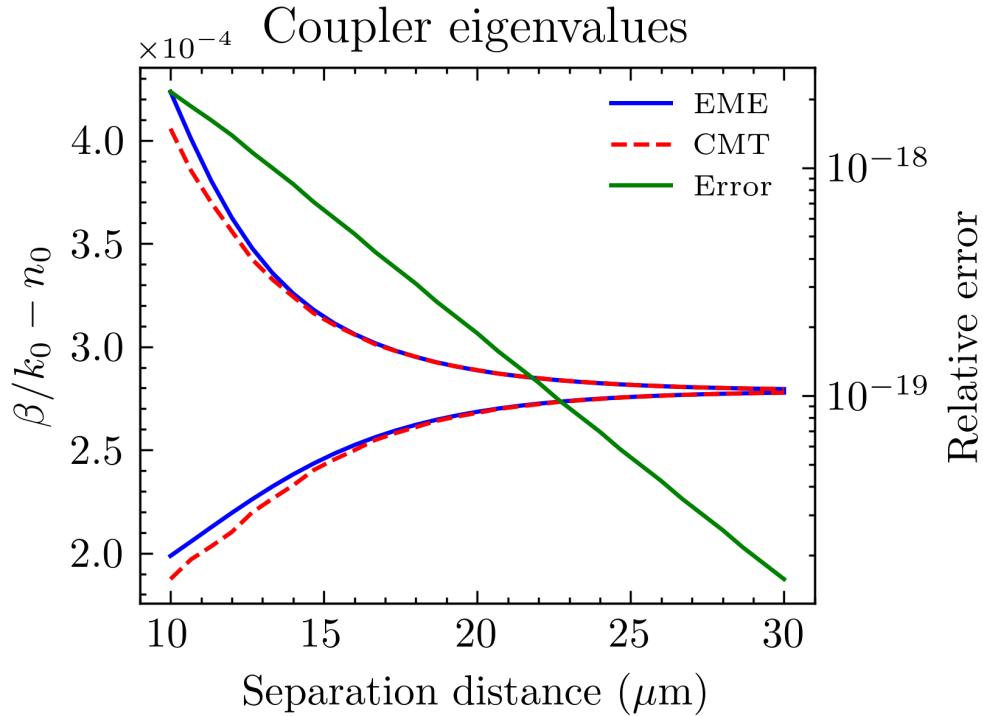


Figura 3.3: Comparación de los autovalores obtenidos con el método de Expansión en Modos Normales (EME) y con la Teoría de Modos Acoplados (CMT). Se observa mayor divergencia cuando la distancia entre guías es pequeña. Parámetros utilizados: $n_0 = 1.48$, $\Delta n = 4 \times 10^{-4}$, $\lambda = 730$ nm y $a = 3\text{ }\mu\text{m}$.

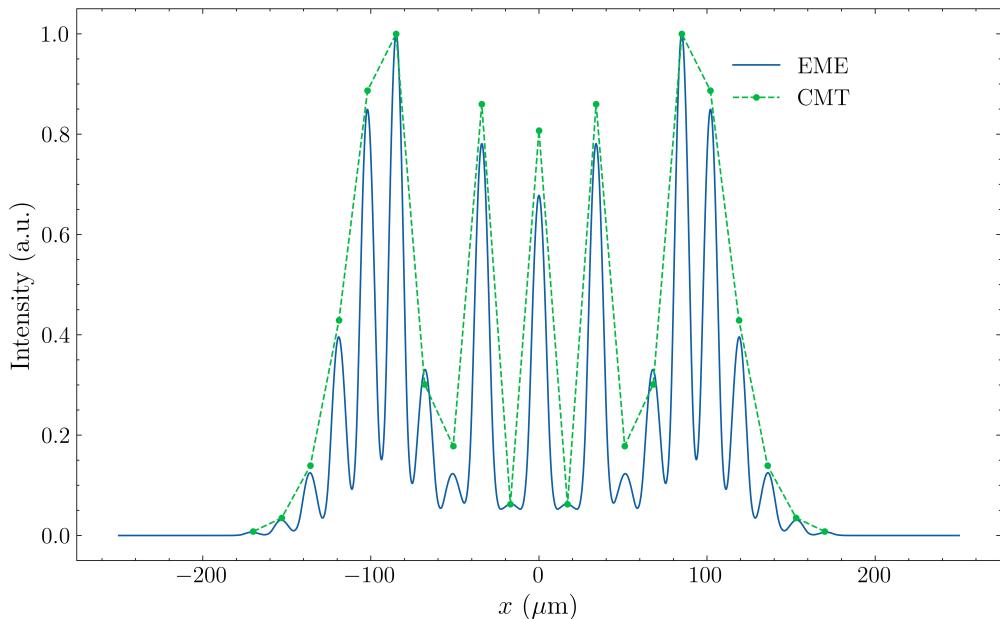


Figura 3.4: Perfil dinámico de un arreglo unidimensional de 21 guías simulado con CMT y con EME. Los resultados son similares a los de la Figura 3.2.

4. Métodos Experimentales

En este capítulo se detallan los procedimientos experimentales desarrollados para la fabricación y caracterización de redes fotónicas basadas en guías de onda. La metodología comprende tres aspectos fundamentales: (1) escritura directa de guías mediante láser femtosegundo, (2) sistemas de excitación óptica con láser supercontinuo, y (3) técnicas avanzadas de modulación espacial de luz para el control de condiciones iniciales.

4.1. Escritura directa de guías de onda

La fabricación de guías de onda se realizó mediante la técnica de escritura directa con láser femtosegundo: Pulsos ultracortos emitidos desde un láser de fibra Yb-dopado ATSEVA ANTAUS de 1030 nm, a una tasa de repetición de 500 kHz, son fuertemente enfocados en una muestra de borosilicato, produciendo cambios leves y permanentes en el índice de refracción local $\Delta n \sim 10^{-4} - 10^{-3}$. Este método permite crear estructuras tridimensionales mediante movimientos controlados por computador de la plataforma XYZ Aerotech Nanopositioner [45].

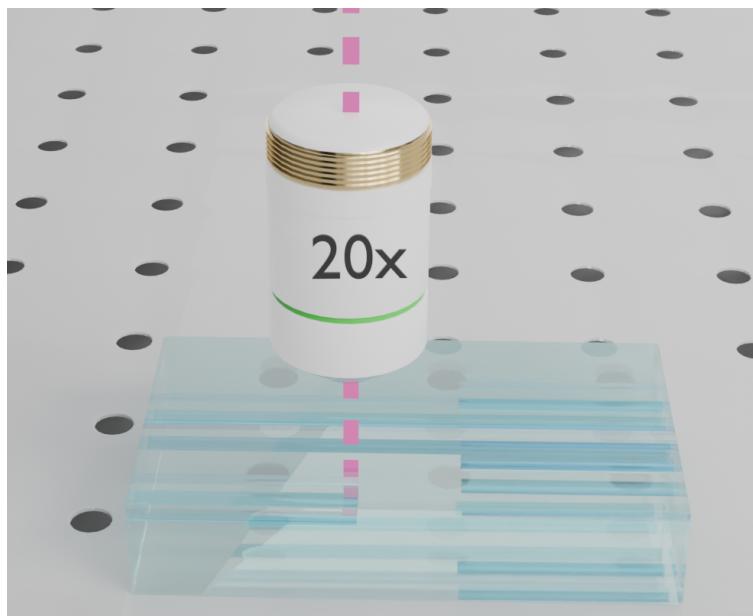


Figura 4.1: Esquema de la técnica de escritura de guías de onda. El haz láser es focalizado mediante objetivo microscópico (20x) mientras la muestra se desplaza en tres ejes mediante una plataforma controlada por computadora.

Los parámetros de escritura que funcionan para excitar modos en el espectro visible son:

- Ancho del pulso: 215 fs.
- Tasa de repetición: 500 kHz.
- Velocidad de escritura: 0.1 - 10.0 mm/s.
- Potencia de llegada medida: 90.0 - 144.0 mW.

4.2. Montaje de excitación láser supercontinuo

Para la caracterización óptica se implementó un sistema de excitación basado en un láser supercontinuo (SC) de banda ancha (470nm to 2200nm). Específicamente, el modelo es un YSL SC-5. La configuración permite seleccionar longitudes de onda específicas mediante un modulador acústico AOTF-PRO (430 nm-1450 nm), con una resoluciónpectral de ± 5 nm y una potencia de salida de 1 mW por longitud de onda.

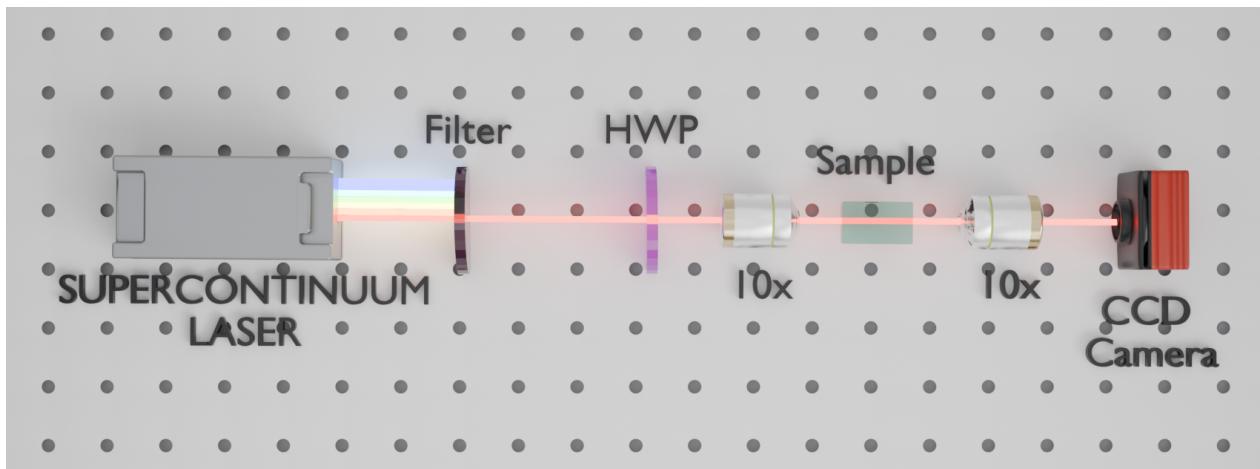


Figura 4.2: Montaje de excitación por láser supercontinuo. Filtro: Modulador acústico e iris. HWP: Retardador de media onda.

4.3. Montaje de modulación espacial de luz

Para usar condiciones iniciales distintas a una gaussiana se hace necesario incorporar métodos de modulación espacial de luz. En esta tesis se utilizó una técnica conocida como grabado de fase mediante holograma [46].

4.3.1. Etapa premodulación

El modulador espacial de luz utilizado es un HOLOEYE PLUTO-NIR SLM - Reflective LCOS (resolución 1920×1080 px, tamaño de píxel 8 μm), cuya respuesta óptica ocurre con polarización paralela al plano de la mesa óptica. Se utiliza un retardador de media onda ($\lambda/2$) seguido de un polarizador Glan-Thompson 100.000:1 con el objetivo de que la polarización de

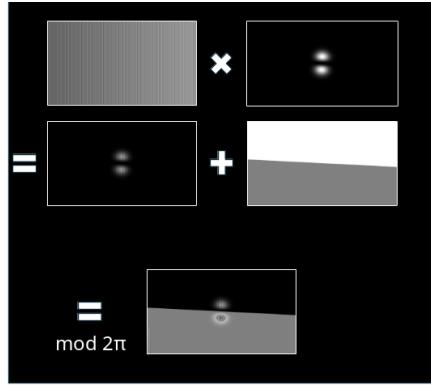


Figura 4.3: Algoritmo de modulación espacial de luz para máscaras de amplitud y fase arbitrarias. Los parámetros de la rejilla de difracción están sujetos a la longitud de onda usada (730 nm).

la luz láser coincide con la de la respuesta del SLM. Posteriormente se magnifica y se colima el haz para que abarque todo el área de pixeles disponible con un par de lentes 20x y L_1 de foco 100mm (telescopio). En la sección 4.3.6 se muestra una aplicación del interferómetro.

4.3.2. Etapa de modulación

Una rejilla de difracción que maximiza la potencia del primer orden de difracción es utilizada. Para modular en amplitud se debe multiplicar la rejilla por la máscara de amplitud deseada, mientras que para modular en fase basta con sumar el nivel de gris correspondiente a la fase deseada. En la Figura 4.3 se bosqueja el algoritmo implementado en Python en el anexo D.

4.3.3. Etapa de acoplamiento

La imagen modulada pasa por un par de lentes L_2 de foco 1000 mm y L_3 de foco 50 mm para reducir el tamaño al orden de los micrómetros. La inclinación de la cara de entrada de la muestra debe coincidir con el plano de la imagen modulada, por lo que se generan dos pares de haces gaussianos, unos verticales y otros horizontales, de manera de que al trasladar el lente objetivo 4x, los máximos de difracción se generen en el centro de los haces gaussianos.

4.3.4. Etapa de Captura en Cámara

Una vez calibrada la inclinación de la muestra, se fija su posición en el montaje experimental. La imagen de salida se magnifica mediante un objetivo 10x y se captura utilizando un perfilómetro de haz (Beam Profiler BC106N-VIS, Thorlabs) con resolución espacial de $6.45 \mu\text{m}/\text{px}$ [47].

Configuración Interferométrica Opcional

El montaje puede modificarse para incorporar un interferómetro Mach-Zehnder mediante:

- Un *beam splitter* entre la lente L_1 y el SLM, utilizando el haz previo a la modulación como referencia.
- Un segundo *beam splitter* antes de la cámara para recombinar los haces.
- Un filtro de densidad neutra (ND-Filter) para equilibrar las intensidades ($I_{\text{ref}} \approx I_{\text{muestra}}$).

4.3.5. Circuito Óptico

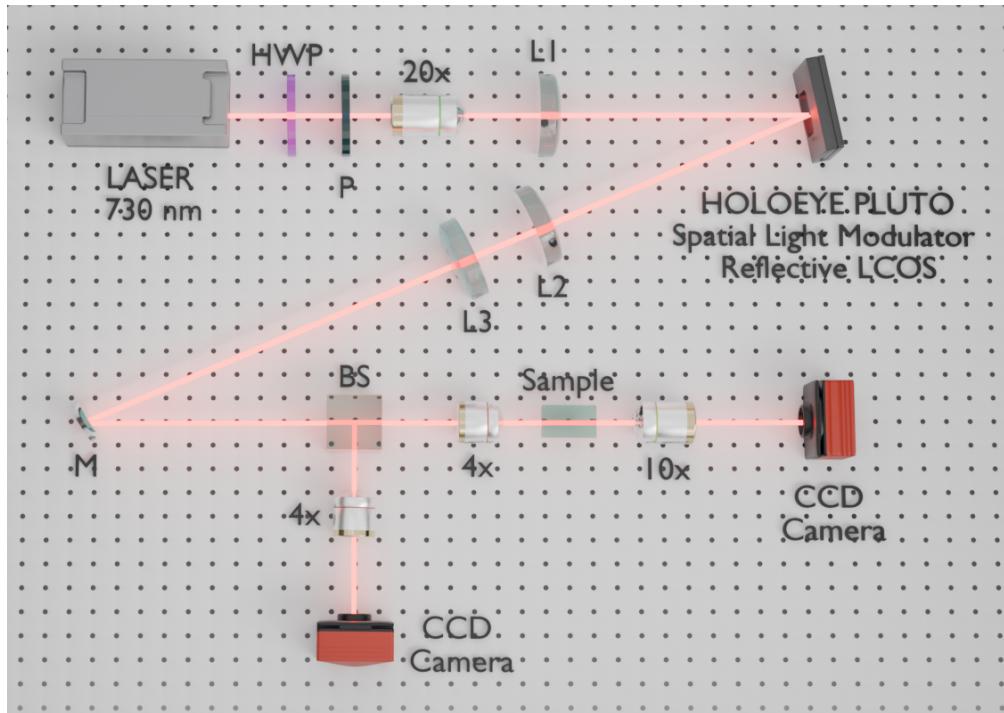


Figura 4.4: Diagrama completo del sistema experimental para modulación espacial de luz, mostrando los componentes ópticos y sus disposiciones relativas.

4.3.6. Generación de Imágenes Complejas

La capacidad de control preciso sobre amplitud y fase se verifica mediante la generación de vórtices ópticos, cuantificados por su Momentum Angular Orbital (OAM). El análisis interferométrico permite:

- Determinar la carga topológica ℓ contando las ramas espirales en el patrón de interferencia.

- Establecer el signo de ℓ mediante la dirección de rotación del frente de fase.

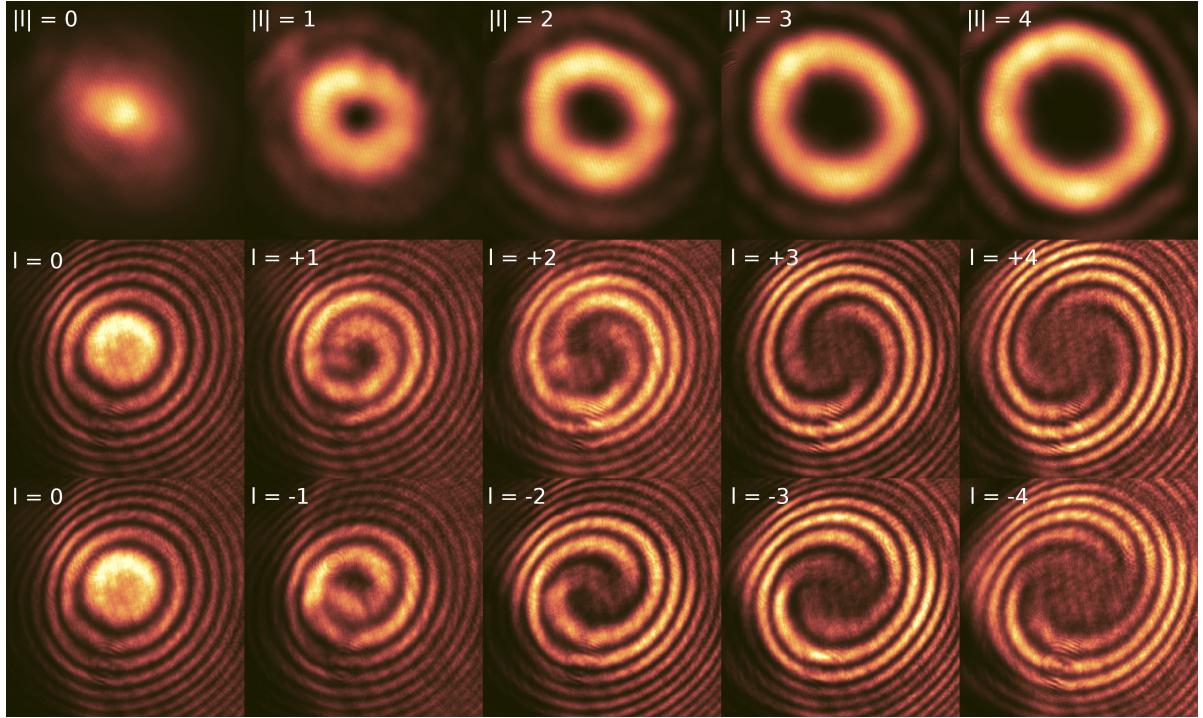


Figura 4.5: Caracterización de vórtices ópticos mediante interferometría Mach-Zehnder. **Arriba:** Intensidad para diferentes cargas OAM (ℓ). **Centro y Abajo:** Patrones de interferencia correspondientes, donde el número de ramas espirales indica $|\ell|$ y el sentido de giro da cuenta del signo de ℓ .

4.4. Análisis de imágenes

A partir de las imágenes capturadas es posible extraer información de la potencia que contiene cada sitio del sistema fotónico discreto en estudio. Para ello la imagen completa debe ser seccionada equispaciadamente en rectángulos que encierran las regiones donde existen guías de onda, iluminadas o no. La potencia de cada sitio será entonces la suma de la intensidad de cada píxel encerrado en su rectángulo respectivo.

El procesamiento de imágenes incluye:

- Corrección de fondo
- Normalización por intensidad máxima.
- Segmentación automática mediante umbral.

Los datos obtenidos permiten reconstruir la distribución de potencia en la red fotónica y analizar fenómenos de acoplamiento entre guías vecinas.

5. Acoplamiento de modos p_y y ángulo de invisibilidad

En electrostática, es posible describir las interacciones dipolares eléctricas mediante los polinomios de Legendre de orden 2, $P_2(\cos \theta) = 3 \cos^2 \theta - 1$, donde θ representa el ángulo entre los dipolos. El valor $\theta_m \approx 0.62$ radianes se denomina *ángulo mágico*, ya que anula el término de interacción dipolar [48].

Este capítulo se centra en los modos dipolares verticales o también llamados modos p_y , cuya excitación requiere superar la condición de corte (longitud de onda suficientemente pequeña junto con un contraste Δn y un ancho de guía suficientemente grandes).

5.1. Acopladores

Al estudiar el acoplamiento entre modos p_y en guías elípticas, se distinguen dos casos límite: para acopladores horizontales, el acoplamiento κ_π presenta signo positivo, mientras que para acopladores verticales, el acoplamiento κ_σ tiene signo negativo [29]. Este comportamiento es análogo al observado en los enlaces químicos σ y π de las cadenas de carbono orgánicas. Para verificar este efecto, se fabricaron 20 dímeros con una separación de $25 \mu\text{m}$ y una distancia de propagación de 15 mm, variando el ángulo entre guías desde 0.00 rad hasta 1.57 rad. Mediante un modulador espacial de luz (SLM), se generó un modo P caracterizado por dos lóbulos de igual tamaño con una diferencia de fase de π entre ellos.

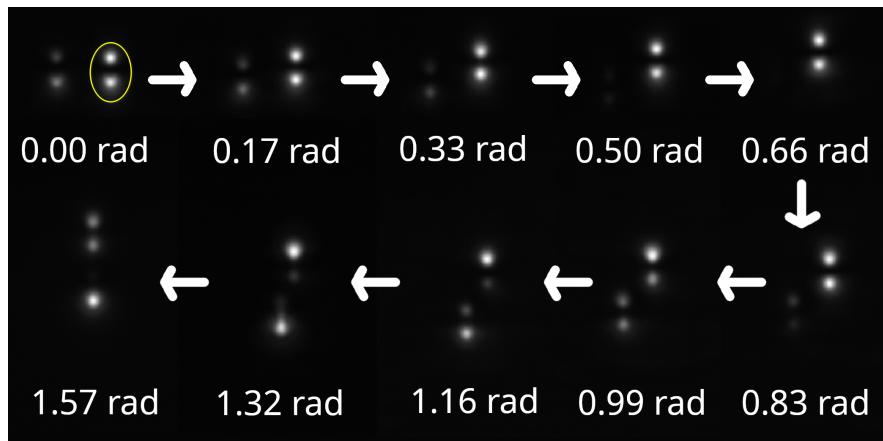


Figura 5.1: Barido angular experimental para una distancia de propagación de 15 mm. Se observa el efecto del ángulo mágico entre 0.50 y 0.66 rad.

Se analizaron las imágenes siguiendo el método descrito en la Sección 4.4. Posteriormente,

mediante la ecuación (2.40) para el acoplamiento dinámico, se caracterizó su comportamiento en función del ángulo θ (medido desde la horizontal) para una separación fija de $25 \mu\text{m}$. El signo negativo se introdujo para garantizar la continuidad de la tendencia de los datos, como muestra la Figura 5.2.

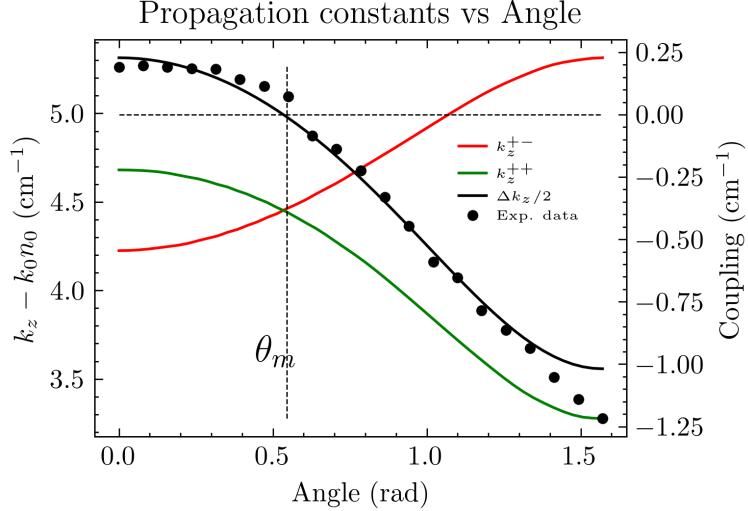


Figura 5.2: Constantes de propagación y acoplamientos en función del ángulo para modos p_y , calculados numéricamente mediante EME. Los resultados se comparan con los datos experimentales extraídos de la Figura 5.1.

5.2. Redes tipo panal de abeja

La red tipo panal de abeja, conocida por ser la estructura subyacente del grafeno, presenta propiedades relevantes para esta tesis, particularmente en sus bandas de Bloch: ambas son dispersivas y exhiben un punto de Dirac [49]. Una vez determinados los parámetros de fabricación en la sección anterior, se estudió el mismo efecto en una red tipo panal de abeja manteniendo constante la distancia entre sitios mientras se variaba el ángulo (Figura 5.3).

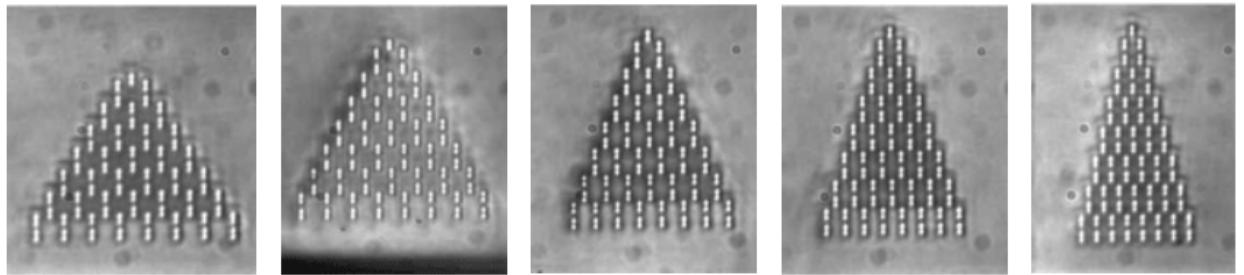


Figura 5.3: Micrografías de redes fotónicas tipo panal de abeja para modos p_y bajo iluminación con luz blanca.

Un modelo de primeros vecinos consideraría únicamente el acoplamiento vertical \varkappa_σ y el acoplamiento angular \varkappa_θ . Sin embargo, la descripción precisa de los datos experimentales

requiere incluir acoplamientos hasta terceros vecinos, así como correcciones por no ortogonalidad. La Figura 5.4 muestra un esquema del modelo completo. El Hamiltoniano del sistema se expresa como:

$$\hat{H}_\Sigma = \hat{H}_{NN} + \hat{H}_{NNN} + \hat{H}_{NNNN}, \quad (5.1)$$

donde \hat{H}_{NN} , \hat{H}_{NNN} y \hat{H}_{NNNN} contienen los acoplamientos a primeros vecinos (κ_σ y κ_θ), segundos vecinos (t_π y $t_{\theta 2}$), y terceros vecinos ($t_{\theta 1}$ y $t_{\theta 3}$), respectivamente (ver Figura 5.4).

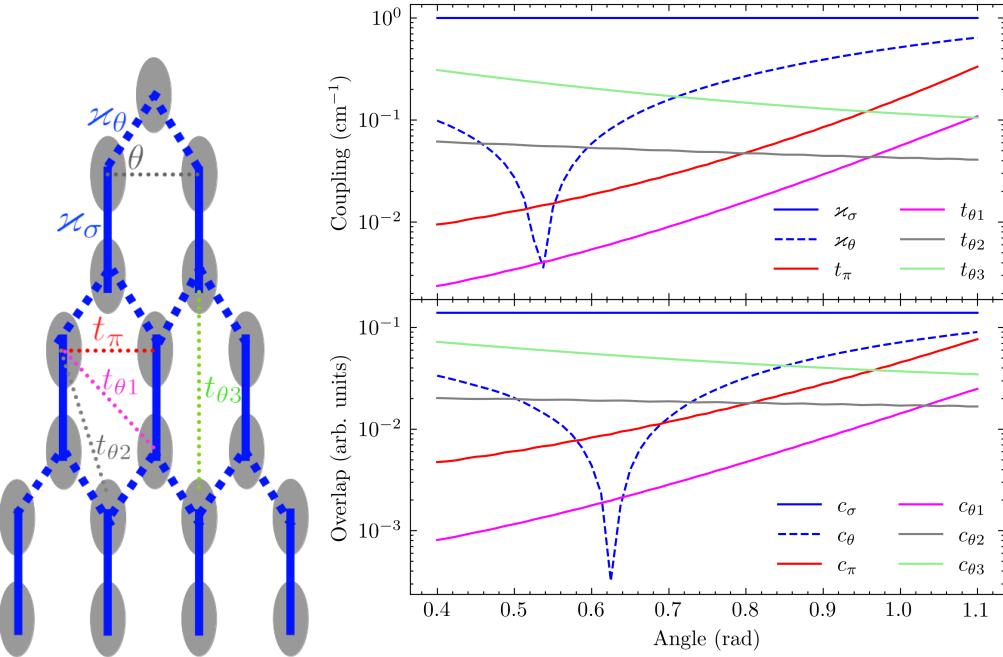


Figura 5.4: **Izquierda:** Esquema del modelo de panal de abeja para modos p_y con acoplamientos hasta terceros vecinos. **Derecha:** (Arriba) Valores absolutos de los acoplamientos en función del ángulo θ . (Abajo) Integrales de solapamiento normalizadas en función del ángulo θ .

Además, se define la matriz no ortogonal \hat{c} a partir de la matriz \hat{P} [ecuación (3.6)] como $c_{ij} = P_{ij}/I$, donde $I = P_{ii}$ es la intensidad del modo p_y , de modo que los elementos diagonales de \hat{c} sean iguales a 1. De manera similar a los acoplamientos, en la Figura 5.4 se grafica la magnitud de los solapes en función del ángulo.

El Hamiltoniano no hermítico $\hat{H}'_\Sigma \equiv \hat{c}^{-1}\hat{H}_\Sigma$ describe la dinámica de la red e incorpora tanto efectos no ortogonales como acoplamientos de largo alcance. En la Figura 5.5 se muestra el espectro en función del ángulo θ . Se distinguen principalmente dos regiones: una para ángulos $0.4 < \theta < 0.7$, en la que los autovalores se agrupan en tres bandas cuasiplanas, y otra para ángulos $0.7 < \theta < 1.1$, en la que la brecha disminuye en magnitud y, por tanto, se incrementa el transporte en la red. Se calcula el grado de participación inverso (IPR, por sus siglas en inglés) de cada autoestado como $IPR = \sum_i I_i^2 / (\sum_i I_i)^2$. Esto permite la descripción adecuada de los datos experimentales mostrados en el panel derecho de la Figura 5.5.

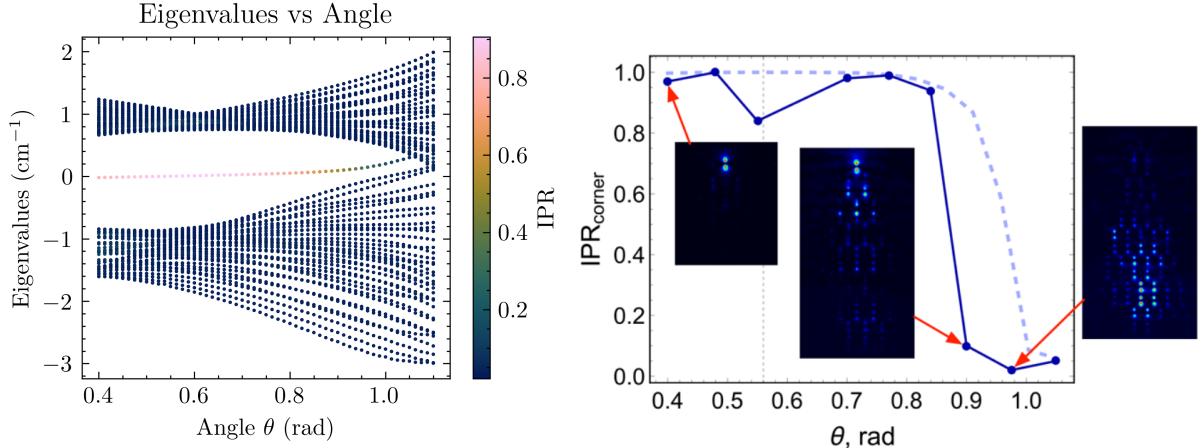


Figura 5.5: **Izquierda:** Espectro de la matriz \hat{H}'_Σ en función del ángulo. Cada punto se colorea según su grado de participación inverso (IPR). **Derecha:** Grado de participación inverso para la excitación del sitio de esquina en función del ángulo θ .

La fuerte localización observada al excitar el sitio de esquina se explica porque la proyección de la condición inicial sobre los autoestados corresponde mayoritariamente al autoestado de autovalor nulo. La existencia de este autoestado se debe a la topología que presenta el Hamiltoniano \hat{H}'_Σ en el espacio recíproco o de Bloch. Si bien es posible calcular la polarización de bullo mediante bucles de Wilson y determinar que su valor está cuantizado como $\mathbf{P} = (0.5, 0.5)$, resulta más ilustrativo notar que la red puede descomponerse en cadenas cuasi-SSH (ver Figura 5.6). En ambos esquemas, la cuantización es consecuencia de la simetría de inversión presente en la red.

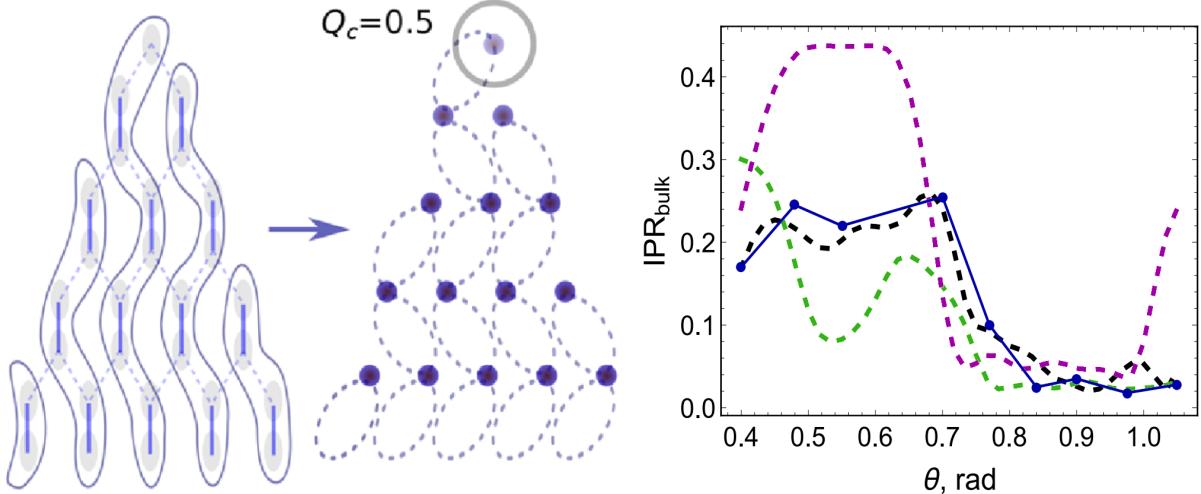


Figura 5.6: **Izquierda:** Descomposición de la red en el límite de bandas planas en cadenas SSH de dímeros aislados. **Derecha:** IPR para la excitación experimental del sitio central de la red (puntos unidos con líneas para guiar la vista) y simulados numéricamente para tres casos: sin acoplamientos de largo alcance ni correcciones no-ortogonales (curva morada discontinua), con acoplamientos de largo alcance pero sin correcciones no-ortogonales (curva verde discontinua), y con acoplamientos de largo alcance y correcciones no-ortogonales (curva negra discontinua).

Se estudió experimentalmente la dinámica de bandas planas excitando un único sitio en el bullo de la red para extraer su IPR. Como la excitación inicial en un solo sitio tiene proyecciones no nulas en todas las bandas de Bloch, este experimento magnifica las propiedades dispersivas de las bandas. Así, una propagación casi sin difracción implica una notable planitud de todas las bandas, pues las propiedades de bullo de una red se manifiestan más claramente cuando se excita un sitio central. Un sistema con todas sus bandas planas no exhibiría transporte en la red, limitándose la dinámica únicamente a dímeros efectivos.

Los datos analizados revelan dos regímenes distintos: para redes con $0.4 < \theta < 0.8$ (cerca al ángulo de invisibilidad) se observa un buen efecto de confinamiento (*caging*). Sin embargo, ángulos mayores ($\theta > 0.8$) favorecen una difracción significativa del campo, resultando en una deslocalización a la salida. Estos resultados experimentales (puntos en Figura 5.6) concuerdan con los cálculos teóricos (línea discontinua). Contrario a lo esperado, los acoplamientos de largo alcance y las correcciones por no ortogonalidad no degradan la dinámica de bandas planas cerca del ángulo de invisibilidad, sino que se complementan. Los valores máximos de IPR (0.20-0.25) para el estado dímero después de tres ciclos de confinamiento Aharonov-Bohm indican una localización comparable con propuestas ópticas unidimensionales con todas sus bandas planas (ABF).

6. Acoplamiento Evanescente No Simétrico

Los modelos discretos en fotónica, como la teoría de modos acoplados (CMT), suelen asumir acoplamientos simétricos entre guías de onda, es decir, que la constante de acoplamiento entre dos sitios $C_{i \rightarrow j}$ es igual a $C_{j \rightarrow i}$. Esta suposición garantiza la hermiticidad del Hamiltoniano efectivo y suele estar justificada cuando las guías son idénticas y lo suficientemente separadas. Sin embargo, esta simetría puede romperse de forma inherente en sistemas reales, incluso en ausencia de pérdida o ganancia, cuando las guías presentan diferentes perfiles de índice de refracción [51].

6.1. Origen de la dinámica no simétrica

El acoplamiento evanescente entre guías de onda se produce por la superposición de las colas modales fuera del núcleo de confinamiento. Cuando dos guías tienen distintos contrastes de índice ($\Delta n_1 \neq \Delta n_2$), los modos guiados presentan colas evanescentes con diferente amplitud y extensión, lo que induce un acoplamiento direccionalmente desigual: $C_{1 \rightarrow 2} \neq C_{2 \rightarrow 1}$.

Este comportamiento *no simétrico* puede cuantificarse mediante la teoría de modos acoplados generalizada y no ortogonal, desarrollada en la sección 2.5, donde se incluye el efecto de solapamiento modal a través de la matriz \hat{P} .

Considerando un dímero compuesto por dos guías no idénticas, las ecuaciones dinámicas para las amplitudes modales se escriben (véase la ecuación (2.36)) como:

$$-i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \iff -i \frac{d}{dz} \mathbf{v} = \hat{H}' \mathbf{v}, \quad (6.1)$$

donde $\mathbf{v} = \hat{P}^{1/2} \mathbf{u}$ representa una base ortogonalizada, y $\hat{H}' = \hat{P}^{-1/2} \hat{H} \hat{P}^{-1/2}$ es el Hamiltoniano efectivo en dicha base. Como \hat{H} y \hat{P} son simétricas, \hat{H}' también lo es, lo que garantiza autovalores reales. Al proponer soluciones del tipo $\mathbf{v}(z) \sim e^{iz\omega}$, se obtiene el problema generalizado de autovalores $\det(\hat{H} - \lambda \hat{P}) = 0$. Es importante destacar que esta base ortogonalizada \mathbf{v} no es accesible experimentalmente: en un montaje real, sólo es posible observar modos localizados en guías individuales, lo cual corresponde a la base física \mathbf{u} . Por lo tanto, el análisis experimental de la dinámica debe realizarse en esta base, donde la evolución está gobernada por la matriz de acoplamiento efectiva:

$$\hat{C} = \hat{P}^{-1} \hat{H} = \frac{1}{P_{11}P_{22} - P_{12}^2} \begin{pmatrix} P_{22}H_{11} - P_{12}H_{12} & P_{22}H_{12} - P_{12}H_{22} \\ P_{11}H_{12} - P_{12}H_{11} & P_{11}H_{22} - P_{12}H_{12} \end{pmatrix}.$$

Este sistema exhibe una dinámica no recíproca: la eficiencia de transferencia de energía depende del canal de entrada. Esta asimetría puede cuantificarse experimentalmente a través del *desbalance de intensidad*, definido para cada excitación $i = L, R$ como:

$$I^i(z) \equiv \frac{P_1^i(z) - P_2^i(z)}{P_1^i(z) + P_2^i(z)},$$

y su promedio absoluto como:

$$\bar{I}(z) \equiv \frac{|I^L(z) + I^R(z)|}{2}.$$

La cantidad $\bar{I}(z)$ resulta especialmente útil para detectar asimetrías globales en la dinámica: cualquier desviación de cero implica una evolución no simétrica, revelando la presencia de acoplamientos evanescentes no recíprocos.

6.2. Validación Numérica

Utilizando el método de Expansión en Modos Normales (EME, Sección 3.1), se simuló la dinámica de dímeros asimétricos. En la Figura 6.1 se muestra el promedio absoluto de desbalances de intensidad $\bar{I}(z)$ en función de la distancia para $n_2 - n_1 = 1.75 \times 10^{-5}$ (asimetría débil) y para $n_2 - n_1 = 5.00 \times 10^{-5}$ (asimetría fuerte).

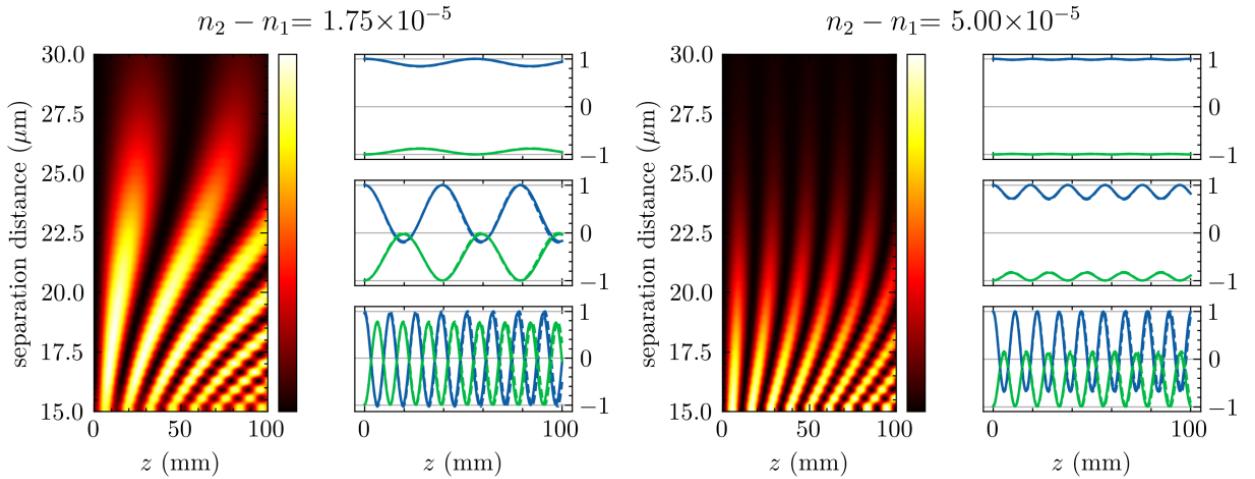


Figura 6.1: Promedio absoluto de desbalances de intensidad $\bar{I}(z)$ en función de la distancia de propagación z , comparando dos regímenes: (1) asimetría débil ($\Delta n = 1.75 \times 10^{-5}$) y (2) asimetría fuerte ($\Delta n = 5.00 \times 10^{-5}$). Se incluyen los valores I^L (verde) e I^R (azul) correspondientes a tres casos específicos de estudio.

6.3. Comprobación Experimental

Para comprobar este efecto, se fabricaron dímeros mediante la técnica de escritura por láser femtosegundo descrito en la sección 4.1, variando el canal de entrada i , la potencia de escritura P_g^i , la distancia entre guías d , y la longitud de propagación efectiva z . En particular, se exploró el caso $\Delta P = P_g^1 - P_g^2 = 5 \text{ mW}$, con separación $d = 18 \mu\text{m}$. La Figura 6.2 muestra que la excitación de la guía superior favorece la transferencia energética hacia la guía inferior, mientras que la excitación inversa alcanza una distribución energética 1:1 para $z \sim 11 \text{ mm}$.

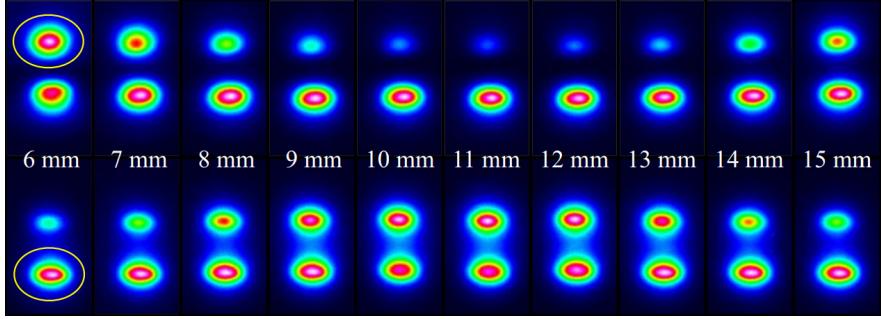


Figura 6.2: Perfiles de salida para distintas longitudes de propagación z_i , excitando la guía superior (izquierda) e inferior (derecha), con $d = 18 \mu\text{m}$.

Mediante guías tipo losa (*slab*) y modos TE (ver Sección 2.2), se obtienen expresiones analíticas para los acoplamientos:

$$\frac{C_{21}}{C_{12}} \approx \left(\frac{\Delta n_2}{\Delta n_1} \right)^2 e^{(\gamma_2 - \gamma_1)d} \approx \left| \frac{u_2^1(z)}{u_1^2(z)} \right|^2 ,$$

donde γ_i representa el coeficiente de decaimiento evanescente del modo i . Esta expresión muestra que la asimetría aumenta con la separación entre guías, con la diferencia entre decaimientos de los modos $\gamma_2 - \gamma_1$ y con el cuadrado de la razón entre contrastes de índice $\frac{\Delta n_2}{\Delta n_1}$.

6.4. Implicancias y Aplicaciones

Este estudio demuestra que el acoplamiento no simétrico es un fenómeno físico intrínseco en sistemas fotónicos realistas, aún en ausencia de pérdida o ganancia. Sus implicancias incluyen: *ruptura de reciprocidad* sin requerir materiales magneto-ópticos ni modulación temporal, *asimetría modal* dado que la desigualdad entre C_{ij} y C_{ji} afecta la formación de estados simétricos/antisimétricos y la interferencia, *dispositivos ópticos direccionales* tales como divisores de haz asimétricos o aislantes ópticos y su *extensión a redes* con acoplamientos direccionados. En conjunto, estos resultados permiten reinterpretar la teoría de modos acoplados y abren nuevas oportunidades en el diseño de redes ópticas con funcionalidad direccional.

7. Moléculas Fotónicas

La técnica de escritura de guías de onda descrita en el Capítulo 4.1 está restringida por la forma alargada y elíptica del tren de pulsos láser que se enfoca, lo que limita los acoplamientos interorbitales posibles [30]. Una alternativa para aumentar los grados de libertad consiste en fabricar dos guías de onda suficientemente cercanas para hibridizar sus modos guiados, de manera análoga al principio físico que gobierna las moléculas. Por este motivo, en este capítulo se empleará el concepto de *moléculas fotónicas* [50], aplicándolo al estudio experimental de una red fotónica que presenta una doble transición de fase topológica [31].

7.1. Autoestados del acoplador fotónico para distancias de separación pequeñas

Como se mencionó en la Sección 3.3, la teoría de modos acoplados (CMT) describe adecuadamente los sistemas fotónicos en estudio cuando la distancia entre guías de onda supera los $13\mu\text{m}$. Para separaciones menores, el sistema debe tratarse como una única macroguiía. La expansión en modos normales (EME), presentada en la Sección 3.1, proporciona una herramienta numérica válida para ambos regímenes. Mediante simulaciones de pares de guías de onda a diferentes distancias, se caracterizó el comportamiento de sus autoestados. La Figura 7.1 muestra que el autoestado antisimétrico ($+-$) solo existe para distancias mayores a $13\mu\text{m}$, ya que por debajo de este umbral se convierte en un modo de radiación ($k_z^{+-} < k_0n_0$). En cambio, el autoestado simétrico ($++$) persiste y puede describirse como una única entidad, lo que en esta tesis se denominará *modo S* de la molécula fotónica.

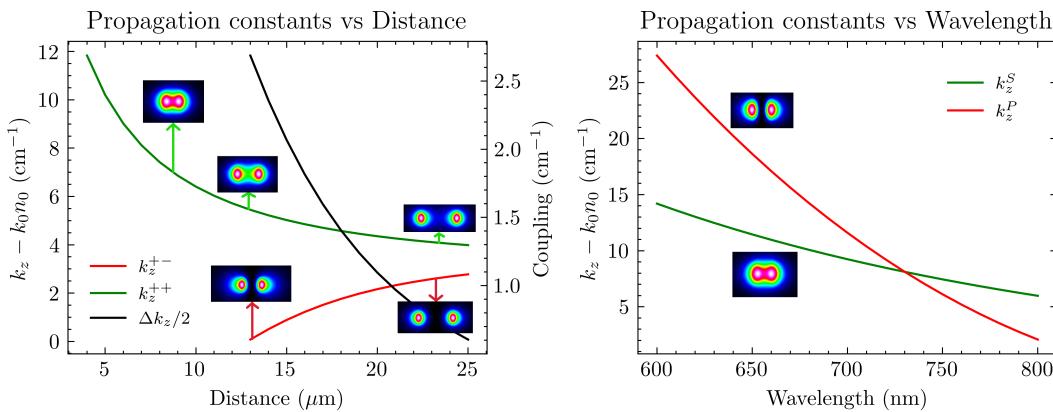


Figura 7.1: **Izquierda:** Constantes de propagación y acoplamientos en función de la distancia para modos fundamentales, calculados mediante EME. **Derecha:** Constantes de propagación de modos *S* y *P* en función de la longitud de onda.

Si bien las constantes de propagación de los modos S y P en una misma molécula presentan valores diferentes, estas pueden igualarse entre moléculas adyacentes mediante el ajuste del contraste de índice de refracción en las guías de onda [30]. Por ejemplo, la Figura 7.1 muestra que a 730 nm se igualan las constantes de propagación para $\Delta n_S = 5.200 \times 10^{-4}$ y $\Delta n_P = 10.423 \times 10^{-4}$.

7.2. Moléculas Fotónicas en Red SP-SSH

Para la implementación experimental (Sección 4.1) de una red que presente acoplamiento SP [24, 30, 31], se utilizaron los modos P horizontales de la sección anterior, obtenidos mediante moléculas fotónicas. Un preciso sintonizado de las constantes de propagación de los modos S (k_z^S) y P (k_z^P) permitió considerar un grado de libertad análogo al del espín del electrón (*pseudoespín*). El Hamiltoniano H de esta red [31], ilustrado en la Figura 7.2, es el siguiente:

$$H = \sum_n \left[\frac{\delta\beta}{2} (p_{n,1}^* p_{n,1} - s_{n,1}^* s_{n,1} + p_{n,2}^* p_{n,2} - s_{n,2}^* s_{n,2}) + \kappa_{ss,2} s_{n,2}^* s_{n,1} - \kappa_{pp,2} p_{n,2}^* p_{n,1} \right. \\ + \kappa_{ss,1} (s_{n-1,2}^* s_{n,1} + s_{n+1,2}^* s_{n,2}) - \kappa_{pp,1} (p_{n-1,2}^* p_{n,1} + p_{n+1,2}^* p_{n,2}) + \kappa_{sp,2} (s_{n,2}^* p_{n,1} - p_{n,2}^* s_{n,1}) \\ \left. + \kappa_{sp,1} (s_{n-1,2}^* p_{n,1} - p_{n-1,2}^* s_{n,1} + s_{n+1,1}^* p_{n,2} - p_{n+1,1}^* s_{n,2}) \right] + \text{c.c.}$$

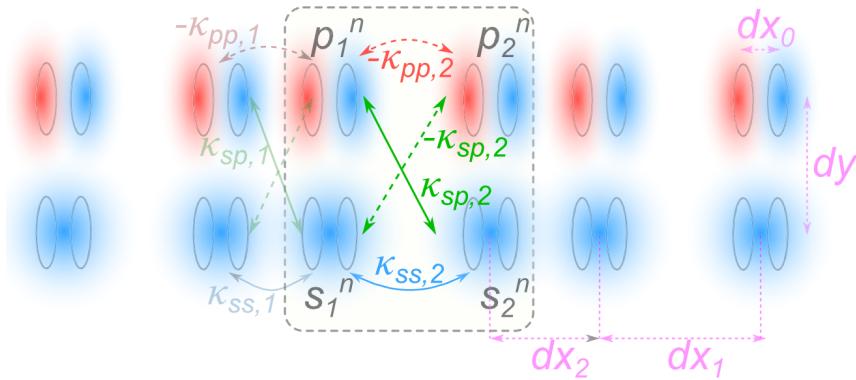


Figura 7.2: Esquema de la red SP-SSH y los acoplamientos considerados.

Si se elige la base $\mathbf{v}^n = (s_1^n, p_1^n, s_2^n, p_2^n)^T$, el Hamiltoniano de Bloch se puede escribir en bloques como:

$$\hat{H}(k) = \begin{pmatrix} \hat{\beta} & e^{-ika} \hat{\chi}_{1-} + \hat{\chi}_{2+} \\ e^{ika} \hat{\chi}_{1+} + \hat{\chi}_{2-} & \hat{\beta} \end{pmatrix},$$

donde $\hat{\beta} = \frac{k_z^S - k_z^P}{2} \hat{\sigma}_z$ y $\hat{\chi}_{i\pm} = \begin{pmatrix} \kappa_{ss,i} & \pm \kappa_{sp,i} \\ \mp \kappa_{sp,i} & -\kappa_{pp,i} \end{pmatrix}$.

7.3. Topología en la Red SP-SSH

El modelo SP-SSH permite explorar nuevas fases topológicas más allá del modelo SSH convencional, ya que incorpora dos orbitales (modos S y P) cuyas combinaciones lineales pueden interpretarse como un pseudoespín. Al aplicar la transformación unitaria

$$\hat{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

se hace más evidente cómo interpretar el sistema. En particular, para $\Delta\beta = 0$ y $\varkappa_{ss,1} = \varkappa_{pp,1}$ se tiene

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \hat{H}_+ & 0 \\ 0 & \hat{H}_- \end{pmatrix},$$

con

$$\hat{H}_{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-ika}(\varkappa_{ss,1} \mp \varkappa_{sp,1}) + (\varkappa_{ss,2} \pm \varkappa_{sp,2}) \\ e^{ika}(\varkappa_{ss,1} \mp \varkappa_{sp,1}) + (\varkappa_{ss,2} \pm \varkappa_{sp,2}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir, se tienen dos subsistemas tipo SSH, con acoplamiento intercelda (intracelada) $\varkappa_{ss,1} \mp \varkappa_{sp,1}$ ($\varkappa_{ss,2} \pm \varkappa_{sp,2}$). En el caso $\varkappa_{ss,1} \neq \varkappa_{pp,1}$ aún es posible capturar la topología mediante el determinante de $\hat{h} = e^{-ika}\hat{\chi}_{1-} + \hat{\chi}_{2+}$ (ver Figura 7.3) ya que en el plano complejo se puede contar el número de vueltas (*winding number*) en torno al origen al barrer todos los cuasimomentos en la primera zona de Brillouin. Estos bucles son una generalización de lo mostrado en la Figura 2.6 relativo al ángulo que forma la proyección en el plano xy del vector $\mathbf{d}(k)$.

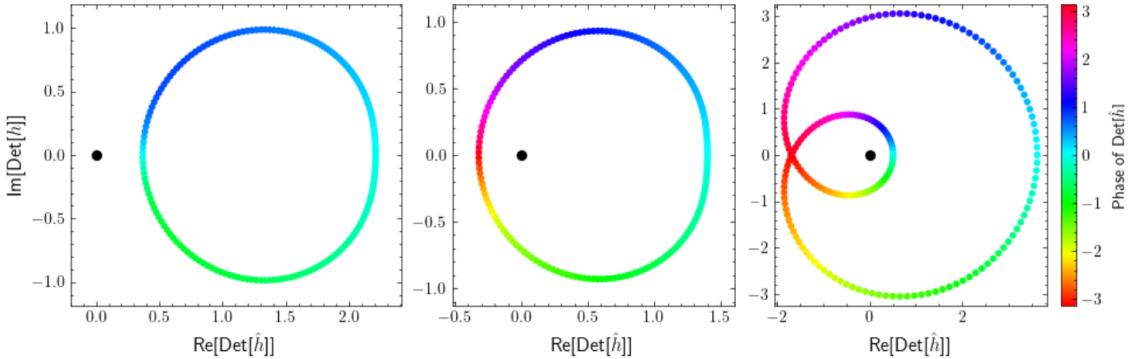


Figura 7.3: Topología de la Red SP-SSH para $\Delta\beta = 0$. Determinante de la matriz-bloque \hat{h} para los cuasimomentos $-\frac{\pi}{a} \leq k < \frac{\pi}{a}$. Se aprecian exactamente tres fases topológicas distintas.

Para obtener todo el diagrama de fase (en particular, para $\Delta\beta \neq 0$), basta con variar $\Delta\beta$ y observar cuando hay cierre de brecha en las bandas, como se observa en la Figura 7.4. La red SP-SSH presenta dos mecanismos topológicos: uno debido a la hibridización SP y otro debido a la dimerización.

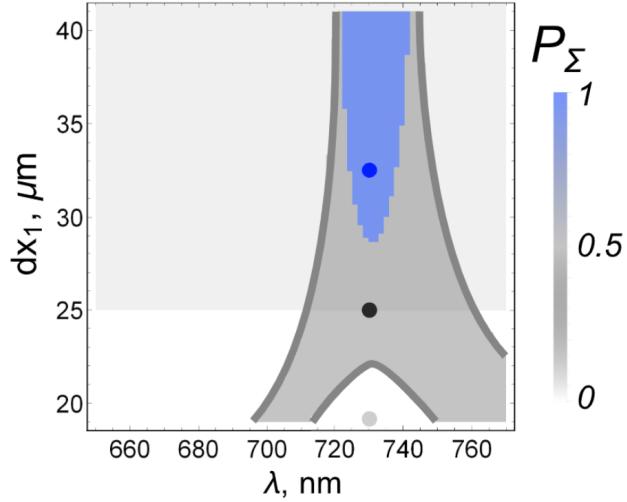


Figura 7.4: Diagrama de fases topológicas.

7.4. Implementación Experimental

Para implementar experimentalmente el modelo SP-SSH, se fabricaron 25 redes fotónicas mediante la técnica de escritura con láser femtosegundo descrita en el Capítulo 4.1. Los parámetros geométricos se ajustaron con separaciones entre moléculas: dx_1 variable, $dx_2 = 25 \mu\text{m}$, $dy = 20 \mu\text{m}$ y entre guías: $dx_0 = 7 \mu\text{m}$. Se optimizaron los contrastes de índice de refracción para lograr degeneración de modos: $k_z^S \sim k_z^P$ en $\lambda = 730 \text{ nm}$ [30]. Las mediciones se realizaron mediante barrido de longitud de onda (Capítulo 4.2) con $\lambda \in \{700, 780\} \text{ nm}$ y paso de 5 nm. La excitación se aplicó a la guía S en un extremo de la red, midiendo la potencia relativa en el mismo extremo ($I_{\text{edge}}/I_{\text{total}}$). Aunque inicialmente no se distinguen claramente las fases topológicas con polarización de bulto $P_\Sigma = 1/2$ o $P_\Sigma = 1$, el análisis numérico revela que durante la segunda transición topológica la razón $I_{\text{edge}}/I_{\text{total}}$ debería formar una meseta. La Figura 7.5 confirma este comportamiento, mientras que la Figura 7.6 muestra resultados experimentales representativos: Uno para una $\lambda = 680 \text{ nm}$, donde sólo se aprecia topología por dimerización y otro para $\lambda = 725 \text{ nm}$, donde ocurre una doble transición topológica al cambiar la dimerización.

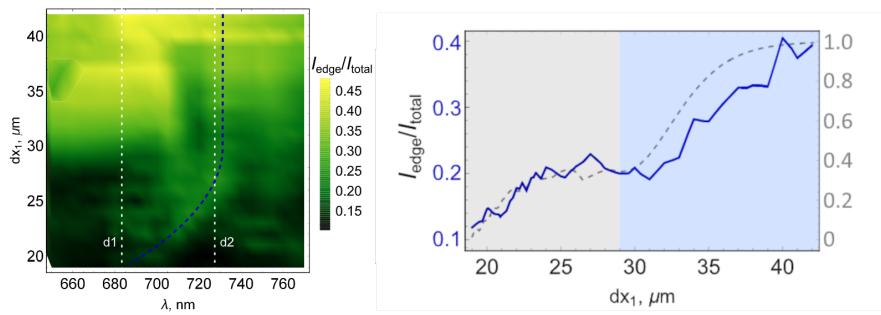


Figura 7.5: **Izquierda:** Resultados numéricos mostrando la meseta característica. **Derecha:** Comparación cuantitativa entre datos experimentales y simulaciones.

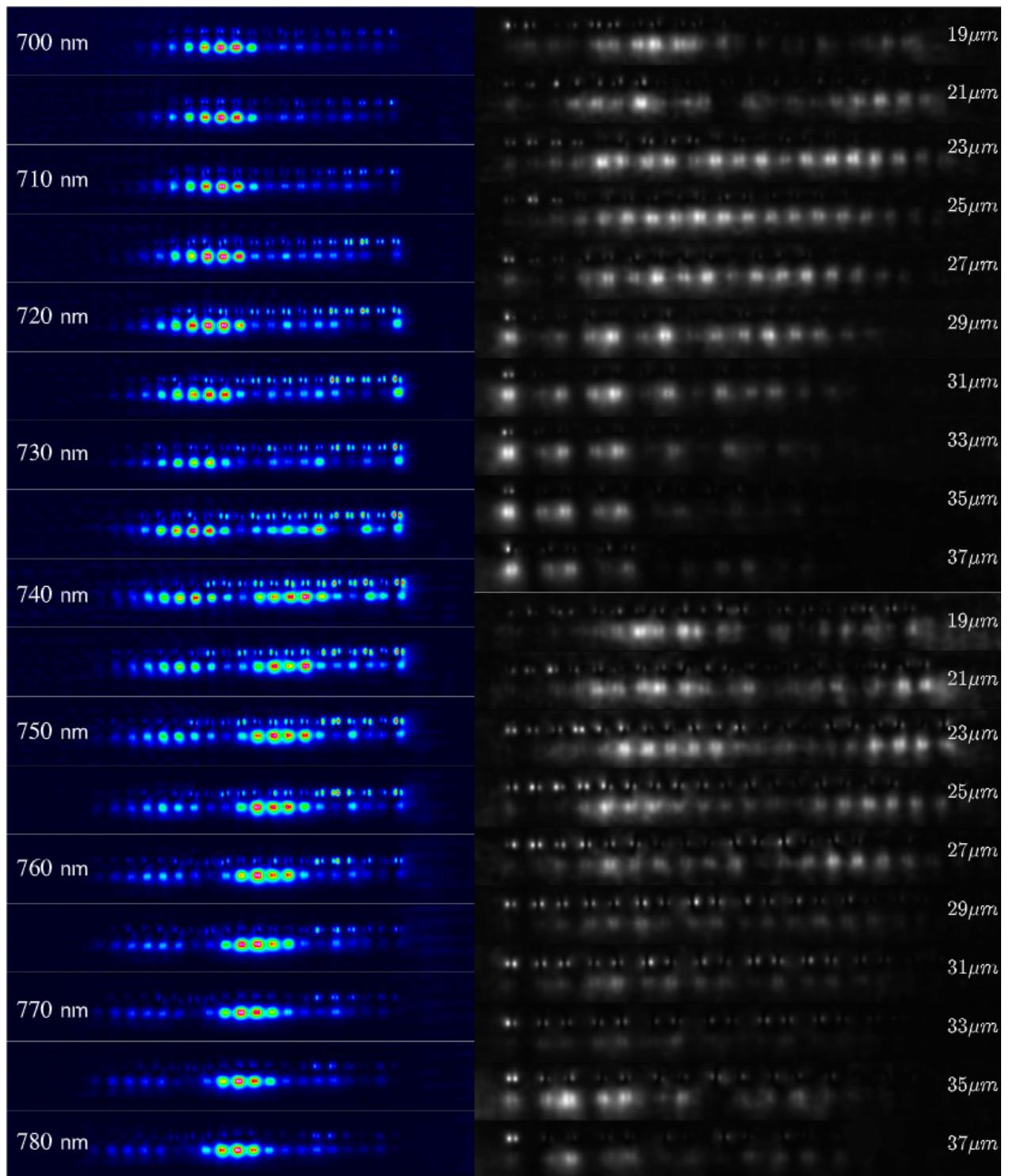


Figura 7.6: **Izquierda:** Red SP-SSH homogénea ($dx_1 = dx_2$) para diferentes longitudes de onda. **Derecha:** Arriba: Excitación en 680 nm para distintas dimerizaciones. Abajo: Misma excitación en 725 nm.

8. Conclusiones

Esta tesis ha investigado sistemáticamente las propiedades de redes fotónicas discretas con modos transversales no convencionales, centrándose en configuraciones que incluyen modos P , acoplamientos interorbitales SP y acoplamientos evanescentes no simétricos. La investigación combinó herramientas analíticas, simulaciones numéricas y validación experimental para abordar diferentes manifestaciones de la estructura orbital de la luz guiada.

En el Capítulo 5, se caracterizó una red fotónica tipo panal de abeja compuesta por modos p_y , demostrando que el *ángulo de invisibilidad* induce un régimen de bandas cuasi-planas alrededor de $\theta \approx 0.56$ radianes. Mediante un análisis detallado que incorporó correcciones por no ortogonalidad y acoplamientos de largo alcance, se estableció que el confinamiento tipo Aharonov-Bohm persiste aún en presencia de estas perturbaciones. En particular, se comprobó que los efectos de no ortogonalidad son esenciales para describir correctamente la localización en los bordes de la red, lo cual fue cuantificado mediante el inverso del grado de participación (IPR) y corroborado experimentalmente.

El Capítulo 6 abordó el fenómeno de acoplamiento evanescente no simétrico en dímeros fotónicos con diferentes contrastes de índice de refracción. Se presentó una generalización de la teoría de modos acoplados que incluye términos de no ortogonalidad y permite modelar correctamente la dinámica direccional observada. Experimentalmente, se verificó un desbalance en la transferencia de energía dependiente del canal de entrada, en acuerdo con las predicciones teóricas basadas en matrices de acoplamiento efectivas no simétricas.

En el Capítulo 7, se estudió la implementación de redes SP-SSH construidas a partir de moléculas fotónicas. Se demostró que la dimerización estructural, combinada con la hibridación entre modos S y P , da lugar a una doble transición de fase topológica controlable de forma independiente. Se identificaron fases con distinta polarización de bullo cuantizada, y se diseñó un protocolo experimental para detectar modos de borde mediante la razón $I_{\text{borde}}/I_{\text{total}}$, en excelente acuerdo con simulaciones numéricas. Este modelo extiende la física del sistema SSH unidimensional al contexto multiorbital, revelando nuevos mecanismos de localización topológica mediados por grados de libertad internos.

Desde el punto de vista metodológico, esta tesis desarrolló un método numérico continuo, basado en la expansión en modos normales (EME), que permite extender la teoría de modos acoplados en el régimen de guías próximas o contrastes de índice arbitrarios. Este enfoque fue complementado con técnicas experimentales de fabricación y caracterización de redes multiorbitales como la calibración de constantes de propagación..

Los resultados obtenidos abren nuevas posibilidades en el diseño de dispositivos fotónicos que explotan mecanismos de localización y control basados en geometría, simetría transversal y topología. Asimismo, se establece un marco teórico-experimental adaptable a plataformas más complejas, por ejemplo, en sistemas con momentum angular orbital [42].

Bibliografía

- [1] All nobel prizes in physics. URL <https://www.nobelprize.org/prizes/lists/all-nobel-prizes-in-physics/>.
- [2] P. Maine, D. Strickland, P. Bado, M. Pessot, and G. Mourou. Generation of ultrahigh peak power pulses by chirped pulse amplification. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 24(2):398–403, 1988. doi: 10.1109/3.137.
- [3] M. Lewenstein, Ph. Balcou, M. Yu. Ivanov, Anne L’Huillier, and P. B. Corkum. Theory of high-harmonic generation by low-frequency laser fields. *Phys. Rev. A*, 49:2117–2132, Mar 1994. doi: 10.1103/PhysRevA.49.2117. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.49.2117>.
- [4] P. M. Paul, E. S. Toma, P. Breger, G. Mullot, F. Augé, Ph. Balcou, H. G. Muller, and P. Agostini. Observation of a train of attosecond pulses from high harmonic generation. *Science*, 292(5522):1689–1692, 2001. doi: 10.1126/science.1059413. URL <https://www.science.org/abs/10.1126/science.1059413>.
- [5] Thomas Brabec and Ferenc Krausz. Intense few-cycle laser fields: Frontiers of nonlinear optics. *Reviews of Modern Physics*, 72:545–591, 2000. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:120371634>.
- [6] J F Clauser and A Shimony. Bell’s theorem. experimental tests and implications. *Reports on Progress in Physics*, 41(12):1881, dec 1978. doi: 10.1088/0034-4885/41/12/002. URL <https://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/41/12/002>.
- [7] Alain Aspect, Jean Dalibard, and Gérard Roger. Experimental test of bell’s inequalities using time-varying analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, 49:1804–1807, Dec 1982. doi: 10.1103/PhysRevLett.49.1804. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.49.1804>.
- [8] Paul G. Kwiat, Klaus Mattle, Harald Weinfurter, Anton Zeilinger, Alexander V. Sergienko, and Yanhua Shih. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 75:4337–4341, Dec 1995. doi: 10.1103/PhysRevLett.75.4337. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.4337>.
- [9] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, and T. Yamane. Optical trapping and manipulation of single cells using infrared laser beams. *Nature*, 330(6150):769–771, Dec 1987. ISSN 1476-4687. doi: 10.1038/330769a0. URL <https://doi.org/10.1038/330769a0>.

- [10] Isamu Akasaki. Gan-based p-n junction blue-light-emitting devices. *Proc. IEEE*, 101(10):2200–2210, 2013. doi: 10.1109/JPROC.2013.2274928. URL <https://doi.org/10.1109/JPROC.2013.2274928>.
- [11] Michael Kneissl, Tae-Yeon Seong, Jung Han, and Hiroshi Amano. The emergence and prospects of deep-ultraviolet light-emitting diode technologies. *Nature Photonics*, 13(4):233–244, Apr 2019. ISSN 1749-4893. doi: 10.1038/s41566-019-0359-9. URL <https://doi.org/10.1038/s41566-019-0359-9>.
- [12] Shuji Nakamura, Takashi Mukai, and Masayuki Senoh. Candela-class high-brightness InGaN/AlGaN double-heterostructure blue-light-emitting diodes. *Applied Physics Letters*, 64(13):1687–1689, 03 1994. ISSN 0003-6951. doi: 10.1063/1.111832. URL <https://doi.org/10.1063/1.111832>.
- [13] Submarine cable frequently asked questions, . URL <https://www2.telegeography.com/submarine-cable-faqs-frequently-asked-questions>.
- [14] Hogares con acceso a internet fijo alcanzan el 67% y usuarios aumentan preferencia por redes de alta velocidad, . URL <https://www.subtel.gob.cl/hogares-con-acceso-a-internet-fijo-alcanzan-el-67-y-usuarios-aumentan-preferencia-por-redes-de-alta-velocidad>.
- [15] Zhaoyang Zhang, Shaohuan Ning, Hua Zhong, Milivoj R. Belić, Yiqi Zhang, Yuan Feng, Shun Liang, Yanpeng Zhang, and Min Xiao. Experimental demonstration of optical bloch oscillation in electromagnetically induced photonic lattices. *Fundamental Research*, 2(3):401–404, 2022. ISSN 2667-3258. doi: <https://doi.org/10.1016/j.fmre.2021.08.019>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2667325821001746>.
- [16] Tal Schwartz, Guy Bartal, Shmuel Fishman, and Mordechai Segev. Transport and anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices. *Nature*, 446(7131):52–55, Mar 2007. ISSN 1476-4687. doi: 10.1038/nature05623. URL <https://doi.org/10.1038/nature05623>.
- [17] Rodrigo A. Vicencio, Camilo Cantillano, Luis Morales-Inostroza, Bastián Real, Cris-tian Mejía-Cortés, Steffen Weimann, Alexander Szameit, and Mario I. Molina. Obser-vation of localized states in lieb photonic lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 114:245503, Jun 2015. doi: 10.1103/PhysRevLett.114.245503. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.245503>.
- [18] Sebabrata Mukherjee, Alexander Spracklen, Debaditya Choudhury, Nathan Goldman, Patrik Öhberg, Erika Andersson, and Robert R. Thomson. Observation of a lo-calized flat-band state in a photonic lieb lattice. *Phys. Rev. Lett.*, 114:245504, Jun 2015. doi: 10.1103/PhysRevLett.114.245504. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.245504>.

- [19] Daniel Leykam, Alexei Andrianov, and Sergej Flach. Artificial flat band systems: from lattice models to experiments. *Advances in Physics: X*, 3(1):1473052, 2018. doi: 10.1080/23746149.2018.1473052. URL <https://doi.org/10.1080/23746149.2018.1473052>.
- [20] Rodrigo A. Vicencio. Photonic flat band dynamics. *Advances in Physics: X*, 6(1):1878057, 2021. doi: 10.1080/23746149.2021.1878057. URL <https://doi.org/10.1080/23746149.2021.1878057>.
- [21] Sebabrata Mukherjee, Alexander Spracklen, Manuel Valiente, Erika Andersson, Patrik Öhberg, Nathan Goldman, and Robert R. Thomson. Experimental observation of anomalous topological edge modes in a slowly driven photonic lattice. *Nature Communications*, 8(1):13918, Jan 2017. ISSN 2041-1723. doi: 10.1038/ncomms13918. URL <https://doi.org/10.1038/ncomms13918>.
- [22] Lukas J. Maczewsky, Julia M. Zeuner, Stefan Nolte, and Alexander Szameit. Observation of photonic anomalous floquet topological insulators. *Nature Communications*, 8(1):13756, Jan 2017. ISSN 2041-1723. doi: 10.1038/ncomms13756. URL <https://doi.org/10.1038/ncomms13756>.
- [23] G. Cáceres-Aravena, L. E. F. Foa Torres, and R. A. Vicencio. Topological and flat-band states induced by hybridized linear interactions in one-dimensional photonic lattices. *Phys. Rev. A*, 102:023505, Aug 2020. doi: 10.1103/PhysRevA.102.023505. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.102.023505>.
- [24] Roman S. Savelev and Maxim A. Gorlach. Topological states in arrays of optical waveguides engineered via mode interference. *Phys. Rev. B*, 102:161112, Oct 2020. doi: 10.1103/PhysRevB.102.161112. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.102.161112>.
- [25] Falk Lederer, George I. Stegeman, Demetri N. Christodoulides, Gaetano Assanto, Moti Segev, and Yaron Silberberg. Discrete solitons in optics. *Physics Reports*, 463(1):1–126, 2008. ISSN 0370-1573. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2008.04.004>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157308001257>.
- [26] S. Rojas-Rojas, E. Barriga, C. Muñoz, P. Solano, and C. Hermann-Awigiano. Manipulation of multimode squeezing in a coupled waveguide array. *Phys. Rev. A*, 100:023841, Aug 2019. doi: 10.1103/PhysRevA.100.023841. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.100.023841>.
- [27] R. Julius, A. N. Alias, and M. S. A. Halim. Quantum squeezing in coupled waveguide networks with quadratic and cubic nonlinearity. *The European Physical Journal Plus*, 137(1):91, Jan 2022. ISSN 2190-5444. doi: 10.1140/epjp/s13360-021-02302-1. URL <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-02302-1>.

- [28] Joaquin Medina Dueñas, Gabriel O’Ryan Pérez, Carla Hermann-Avigliano, and Luis E. F. Foa Torres. Quadrature protection of squeezed states in a one-dimensional photonic topological insulator. *Quantum*, 5:526, August 2021. ISSN 2521-327X. doi: 10.22331/q-2021-08-17-526. URL <https://doi.org/10.22331/q-2021-08-17-526>.
- [29] Diego Román-Cortés, Maxim Mazanov, Rodrigo A. Vicencio, and Maxim A. Gorlach. Observation of invisibility angle and flat band physics in dipolar photonic lattices. *Nano Letters*, 25(11):4291–4297, 2025. doi: 10.1021/acs.nanolett.4c05951. URL <https://doi.org/10.1021/acs.nanolett.4c05951>. PMID: 40048281.
- [30] Diego Guzmán-Silva, Gabriel Cáceres-Aravena, and Rodrigo A. Vicencio. Experimental observation of interorbital coupling. *Phys. Rev. Lett.*, 127:066601, Aug 2021. doi: 10.1103/PhysRevLett.127.066601. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.127.066601>.
- [31] Maxim Mazanov, Diego Román-Cortés, Gabriel Cáceres-Aravena, Christofer Cid, Maxim A. Gorlach, and Rodrigo A. Vicencio. Photonic molecule approach to multiorbital topology. *Nano Letters*, 24(15):4595–4601, 2024. doi: 10.1021/acs.nanolett.4c00728. URL <https://doi.org/10.1021/acs.nanolett.4c00728>. PMID: 38574276.
- [32] W. P. Su, J. R. Schrieffer, and A. J. Heeger. Solitons in Polyacetylene. *Physical Review Letters*, 42(25):1698–1701, June 1979. ISSN 0031-9007. doi: 10.1103/PhysRevLett.42.1698. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.42.1698>.
- [33] H. Haus, W. Huang, S. Kawakami, and N. Whitaker. Coupled-mode theory of optical waveguides. *Journal of Lightwave Technology*, 5(1):16–23, January 1987. ISSN 1558-2213. doi: 10.1109/JLT.1987.1075416. URL <https://ieeexplore.ieee.org/document/1075416/?arnumber=1075416>. Conference Name: Journal of Lightwave Technology.
- [34] John D. Joannopoulos, Steven G. Johnson, Joshua N. Winn, and Robert D. Meade. *Photonic crystals: molding the flow of light*. Princeton University Press, Princeton Oxford, 2nd edition edition, 2008. ISBN 978-0-691-12456-8.
- [35] Natalia Malkova, Ivan Hromada, Xiaosheng Wang, Garnett Bryant, and Zhigang Chen. Observation of optical shockley-like surface states in photonic superlattices. *Opt. Lett.*, 34(11):1633–1635, Jun 2009. doi: 10.1364/OL.34.001633. URL <https://opg.optica.org/ol/abstract.cfm?URI=ol-34-11-1633>.
- [36] Tomoki Ozawa, Hannah M. Price, Alberto Amo, Nathan Goldman, Mohammad Hafezi, Ling Lu, Mikael C. Rechtsman, David Schuster, Jonathan Simon, Oded Zilberberg, and Iacopo Carusotto. Topological photonics. *Reviews of Modern Physics*, 91(1):015006, March 2019. ISSN 0034-6861, 1539-0756. doi: 10.1103/RevModPhys.91.015006. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.91.015006>.

- [37] J. Zak. Berry's phase for energy bands in solids. *Physical Review Letters*, 62(23):2747–2750, June 1989. ISSN 0031-9007. doi: 10.1103/PhysRevLett.62.2747. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.62.2747>.
- [38] Xiao-Liang Qi and Shou-Cheng Zhang. Topological insulators and superconductors. *Rev. Mod. Phys.*, 83:1057–1110, Oct 2011. doi: 10.1103/RevModPhys.83.1057. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.83.1057>.
- [39] János K. Asbóth, László Oroszlány, and András Pályi. *A Short Course on Topological Insulators*, volume 919 of *Lecture Notes in Physics*. Springer International Publishing, Cham, 2016. ISBN 978-3-319-25605-4 978-3-319-25607-8. doi: 10.1007/978-3-319-25607-8. URL <http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-25607-8>.
- [40] Monika A. M. Marte and Stig Stenholm. Paraxial light and atom optics: The optical schrödinger equation and beyond. *Phys. Rev. A*, 56:2940–2953, Oct 1997. doi: 10.1103/PhysRevA.56.2940. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.56.2940>.
- [41] Yonatan Plotnik, Or Peleg, Felix Dreisow, Matthias Heinrich, Stefan Nolte, Alexander Szameit, and Mordechai Segev. Experimental observation of optical bound states in the continuum. *Phys. Rev. Lett.*, 107:183901, Oct 2011. doi: 10.1103/PhysRevLett.107.183901. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.183901>.
- [42] Christina Jörg, Gerard Queraltó, Mark Kremer, Gerard Pelegrí, Julian Schulz, Alexander Szameit, Georg von Freymann, Jordi Mompart, and Verònica Ahufinger. Artificial gauge field switching using orbital angular momentum modes in optical waveguides. *Light: Science & Applications*, 9(1):150, Aug 2020. ISSN 2047-7538. doi: 10.1038/s41377-020-00385-6. URL <https://doi.org/10.1038/s41377-020-00385-6>.
- [43] Zhichan Hu, Domenico Bongiovanni, Ziteng Wang, Xiangdong Wang, Daohong Song, Jingjun Xu, Roberto Morandotti, Hrvoje Buljan, and Zhigang Chen. Topological orbital angular momentum extraction and twofold protection of vortex transport. *Nature Photonics*, 19(2):162–169, Feb 2025. ISSN 1749-4893. doi: 10.1038/s41566-024-01564-2. URL <https://doi.org/10.1038/s41566-024-01564-2>.
- [44] Ginés Lifante Pedrola. *Beam Propagation Method for Design of Optical Waveguide Devices*. Wiley, 2015. ISBN 9781119083382. URL <https://books.google.cl/books?id=ZV6-CgAAQBAJ>.
- [45] K. M. Davis, K. Miura, N. Sugimoto, and K. Hirao. Writing waveguides in glass with a femtosecond laser. *Optics Letters*, 21(21):1729, November 1996. ISSN 0146-9592, 1539-4794. doi: 10.1364/OL.21.001729. URL <https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=ol-21-21-1729>.

- [46] Bernd Terhalle. *Controlling Light in Optically Induced Photonic Lattices*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2011. ISBN 978-3-642-16646-4 978-3-642-16647-1. doi: 10.1007/978-3-642-16647-1. URL <https://link.springer.com/10.1007/978-3-642-16647-1>.
- [47] Thorlabs - BC106N-VIS CCD Camera Beam Profiler, Ø30 µm - 6.6 mm, 350 - 1100 nm. URL <https://www.thorlabs.com>.
- [48] Herman J. C. Berendsen. Nuclear magnetic resonance study of collagen hydration. *The Journal of Chemical Physics*, 36(12):3297–3305, 06 1962. ISSN 0021-9606. doi: 10.1063/1.1732460. URL <https://doi.org/10.1063/1.1732460>.
- [49] Guinea F. Lewenstein M. Manoharan H. C. Polini, M. and Pellegrini V. Artificial honeycomb lattices for electrons, atoms and photons. *Nature Nanotech*, 8, 2013. doi: 10.1038/nnano.2013.161. URL <https://doi.org/10.1038/nnano.2013.161>.
- [50] M. Bayer, T. Gutbrod, J. P. Reithmaier, A. Forchel, T. L. Reinecke, P. A. Knipp, A. A. Dremin, and V. D. Kulakovskii. Optical modes in photonic molecules. *Phys. Rev. Lett.*, 81:2582–2585, Sep 1998. doi: 10.1103/PhysRevLett.81.2582. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.2582>.
- [51] Rodrigo A. Vicencio, Diego Román-Cortés, Martín Rubio-Saldías, Paloma Vildoso, and Luis E. F. Foa Torres. Nonsymmetric evanescent coupling in photonics. *Phys. Rev. A*, 111:043510, Apr 2025. doi: 10.1103/PhysRevA.111.043510. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.111.043510>.

A. Ortogonalidad de los Modos Normales

La ortogonalidad de los modos normales \mathbf{E}_ν^\perp puede demostrarse utilizando el convenio de Einstein en la ecuación (2.28) para simplificar la notación:

$$T_{ij}E_j^\nu = \beta_\nu^2 E_i^\nu, \quad (\text{A.1})$$

donde el operador T_{ij} actúa como $T_{ij}E_j \equiv \delta_{ij}(\nabla_\perp^2 + k_0^2 n^2)E_j + \partial_i(E_j \partial_j \ln(n^2))$.

A.1. Hermiticidad del Operador T_{ij}

Para demostrar la ortogonalidad de los modos E_i , se puede demostrar equivalentemente que T_{ij} es hermítico:

$$\iint (T_{ij}E_j^\mu)^* E_i^\nu dA = \iint (E_i^\mu)^* (T_{ij}E_j^\nu) dA. \quad (\text{A.2})$$

Esta propiedad se sigue de la identidad:

$$(T_{ji}E_i^\mu)^* E_j^\nu - (E_i^\mu)^* (T_{ij}E_j^\nu) = \nabla_\perp \cdot [E_i^\nu \nabla_\perp (E_i^\mu)^* - (E_i^\mu)^* \nabla_\perp E_i^\nu] + [E_j^\nu \partial_j (E_i^\mu)^* - (E_j^\mu)^* \partial_j E_i^\nu] \partial_i \ln(n^2).$$

Al integrar sobre el plano transversal el término de divergencia se anula para modos guiados (que decaen en el infinito), pero el segundo término desaparece sólo si $\nabla n^2 = \mathbf{0}$. Es decir, el operador T_{ij} sólo es Hermítico en la condición de guaje débil.

A.2. Ortogonalidad del Sistema Completo

El sistema completo es hermítico, como se demuestra partiendo de la ecuación (2.5):

$$\begin{aligned} \iiint_V (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}^\nu) \cdot (\mathbf{E}^\mu)^* dV &= \iiint_V n^2 \frac{\omega_\nu^2}{c^2} \mathbf{E}^\nu \cdot (\mathbf{E}^\mu)^* dV \\ \iiint_V [\nabla \times \nabla \times (\mathbf{E}^\mu)^*] \cdot \mathbf{E}^\nu dV &= \iiint_V n^2 \frac{\omega_\mu^2}{c^2} (\mathbf{E}^\mu)^* \cdot \mathbf{E}^\nu dV \end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones y aplicando el teorema de divergencia:

$$\frac{\omega_\nu^2 - \omega_\mu^2}{c^2} \iiint_V n^2 \mathbf{E}^\nu \cdot (\mathbf{E}^\mu)^* dV = \iint_{\partial V} [\dots] \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \\ \xrightarrow{\partial V \rightarrow \infty} 0$$

Se obtienen así dos posibilidades: o los modos son degenerados ($\omega_\nu^2 = \omega_\mu^2$), o se tiene que $\iiint n^2 \mathbf{E}^\nu \cdot (\mathbf{E}^\mu)^* dV = 0$.

B. Código en Python para cálculo de modos normales

```
1 # Scalar Eigenmode Solver
2
3 # Copyright (C) 2025 Diego Roman-Cortes
4
5 # This program is free software: you can redistribute it and/or modify
6 # it under the terms of the GNU General Public License as published by
7 # the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or
8 # (at your option) any later version.
9
10 # This program is distributed in the hope that it will be useful,
11 # but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
12 # MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
13 # GNU General Public License for more details.
14
15 # You should have received a copy of the GNU General Public License
16 # along with this program. If not, see <https://www.gnu.org/licenses/>.
17
18 # contact: diego.roman.c@ug.uchile.cl
19
20 import numpy as np
21 from scipy.sparse import diags, linalg, spdiags, kronsum
22
23 # Define the parameters
24 Nx = 240
25 Ny = 240
26 Lx = 80E-6
27 Ly = 80E-6
28
29 x, dx = np.linspace(-Lx/2, Lx/2, Nx, retstep=True)
30 y, dy = np.linspace(-Ly/2, Ly/2, Ny, retstep=True)
31
32 X, Y = np.meshgrid(x, y, indexing="xy")
33
34
35 n0 = 1.48 # Refractive index of the background
36 dn1 = 4.00E-3 # Amplitude of the refractive index modulation
37 wavelength = 730E-9 # Wavelength of the light
38 k0 = 2 * np.pi / wavelength # Wavenumber
39
40 n_eigen = 4
41
42 wx1 = 0.9E-6 # Width of the refractive index modulation
```

```

43 wy1 = 3.3E-6
44
45 a1 = 25E-6
46
47 ##create matrix
48 if dx == dy:
49     # Create the 2D Laplacian matrix for dx = dy using the 5-point stencil
50     # 0 1 0
51     # 1 -4 1
52     # 0 1 0
53
54     diag0 = -4 * np.ones(Nx * Ny)
55     diag1 = np.ones(Nx * Ny - 1)
56     diag1[np.arange(1, Nx * Ny) % Nx == 0] = 0    # Remove wrap-around
57     connections
58     diagNx = np.ones(Nx * Ny - Nx)
59
60     diags_data = [diag0, diag1, diag1, diagNx, diagNx]
61     diags_offsets = [0, -1, 1, -Nx, Nx]
62
63     T = spdiags(diags_data, diags_offsets, Nx * Ny, Nx * Ny) / (dx**2)
64 else:
65     # Just the Kronecker sum of the 1D Laplacian matrices
66     diagx = np.ones([Nx])
67     diagy = np.ones([Ny])
68
69     diagsx = np.array([diagx, -2 * diagx, diagx])
70     diagsy = np.array([diagy, -2 * diagy, diagy])
71     Dx = spdiags(diagsx, np.array([-1, 0, 1]), Nx, Nx) / (dx**2)
72     Dy = spdiags(diagsy, np.array([-1, 0, 1]), Ny, Ny) / (dy**2)
73
74     T = kronsum(Dx, Dy)
75
76 def dn_func(X, Y, wx, wy):
77     output = np.tanh(33.0*np.exp(-(X/wx)**2- ((Y)/wy)**2))
78     return output
79
80
81 # Create the refractive index modulation
82 dn_array = np.zeros(X.shape)
83 dn_array += dn1 * dn_func(X, Y, wx1, wy1)
84
85 # Create the sparse matrix for the Helmholtz problem
86 n = n0 + dn_array
87 n = diags(n.reshape(Nx*Ny), (0))
88
89 H = T + (k0*n)**2
90

```

```
91 # Solve the eigenvalue problem
92 eigenvalues, eigenvectors = linalg.eigsh(H, k=n_eigen, which='LA')
93
94 np.save(f"eigenvalues.npy", eigenvalues)
95 np.save(f"eigenvectors.npy", eigenvectors)
```

C. Código en C de BPM

```
1 // Saves into a text file the output of a gaussian light beam propagating in a
2 // 2D waveguide array
3 /*
4 Copyright (C) 2025 Diego Roman-Cortes
5
6 This program is free software: you can redistribute it and/or modify
7 it under the terms of the GNU General Public License as published by
8 the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or
9 (at your option) any later version.
10
11 This program is distributed in the hope that it will be useful,
12 but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
13 MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
14 GNU General Public License for more details.
15
16 You should have received a copy of the GNU General Public License
17 along with this program. If not, see <https://www.gnu.org/licenses/>.
18
19 contact: diego.roman.c@ug.uchile.cl
20 */
21
22 #include <stdio.h>
23 #include <stdlib.h>
24 #include <string.h>
25 #include <math.h>
26 #include <complex.h>
27 #include <fftw3.h>
28
29 int main(int argc, char* argv[]){
30     // number of points in grid
31     int Nx = 700;
32     int Ny = 700;
33     int Nz = 5000;
34
35     // parameters
36     double n0 = 1.48; // refraction index of borosilicate
37     double l0 = 730E-9; // wavelenght of light
38     double wx = 1.2E-6; // width of the waveguide
39     double wy = 3.0E-6; // height of the waveguide
40     double sigma = 8.0E-6; // width of LG-mode
41     double l = 0; // azimuthal parameter of LG-mode
42     double Lx = 350E-6; // width of the grid
43     double Ly = 350E-6; // height of the grid
```

```

44
45     double zmax = 50E-3; // propagation distance
46
47     // auxiliar variables
48     double dx = Lx/(Nx-1);
49     double dy = Ly/(Ny-1);
50     double dz = zmax/(Nz-1);
51     double k0 = 2*M_PI/10;
52     double beta = k0 * n0;
53     double xi, yj, r, phi;
54
55 //phi = atof(argv[1])*1E-9;
56 //printf("%f", phi);
57
58     double* dn = malloc(sizeof(double) * Nx * Ny);
59
60     // 1D array setup
61     double dn1 = 9.5E-4; // contrast of first waveguide
62
63     double d1x = 17E-6; // X separation of waveguides
64     double d1y = 18.5E-6; // Y separation of waveguides
65
66     // for animation
67     int frames = 50;
68     int rem, div;
69     char filename[10];
70
71     int i, j, k;
72
73     FILE *fp1, *fp2, *fp3;
74
75     //initialization of FFTW
76
77     fftw_init_threads();
78     fftw_complex *in = (fftw_complex*) fftw_malloc(sizeof(fftw_complex) * Nx * Ny);
79     fftw_complex *aux = (fftw_complex*) fftw_malloc(sizeof(fftw_complex) * Nx * Ny);
80     fftw_complex *out = (fftw_complex*) fftw_malloc(sizeof(fftw_complex) * Nx * Ny);
81     fftw_plan_with_nthreads(8);
82
83     fftw_plan p_forward = fftw_plan_dft_2d(Nx, Ny, in, out, FFTW_BACKWARD,
84     FFTW_PATIENT);
84     fftw_plan p_inverse = fftw_plan_dft_2d(Nx, Ny, aux, in, FFTW_FORWARD,
85     FFTW_PATIENT);
85
86     fp1 = freopen("refractive2d.txt", "w", stdout);
87     // shape of refractive index contrast

```

```

88     for(i = 0; i < Nx; i++){
89         for(j = 0; j < Ny; j++){
90             xi = -0.5*Lx + i*dx;
91             yj = -0.5*Ly + j*dy;
92
93             for(int n=-9; n<10; n++){
94                 dn[i+Nx*j] += dn1 * tanh(33.0 / (exp(((xi-n*d1x)/wx)*((xi-n*d1x)/wx) + ((yj)/wy)*((yj)/wy))));}
95             }
96             printf("%e\n", dn[i+Nx*j]);
97         }
98         printf("\n");
99     }
100    fclose(fp1);
101
102 // initial field (gaussian)
103 for(i = 0; i < Nx; i++){
104     for(j = 0; j < Ny; j++){
105         xi = -0.5*Lx + i*dx;
106         yj = -0.5*Ly + j*dy;
107         r = sqrt((xi)*(xi) + (yj)*(yj));
108         in[i+Nx*j] += (cexp(-r*r/(sigma*sigma))); // hermite-gaussian mode
109     }
110 }
111 // save the input (gaussian) in a text file
112 fp2 = freopen("00.txt", "w", stdout);
113 for(i = 0; i < Nx; i++){
114     for(j = 0; j < Ny; j++){
115         xi = -0.5*Lx + i*dx;
116         yj = -0.5*Ly + j*dy;
117         printf("%e\n", cabs(in[i+Nx*j])*cabs(in[i+Nx*j]));
118     }
119     printf("\n");
120 }
121 fclose(fp2);
122
123 // frequency indices
124 int freqidx[Nx + Ny];
125
126 for(i=0; i < Nx/2; i++){
127     freqidx[i] = i;
128 }
129 for(j=0; j < Ny/2; j++){
130     freqidx[Nx+j] = j;
131 }
132 for(i=Nx/2; i < Nx; i++){
133     freqidx[i] = i-Nx;
134 }
135 for(j=Ny/2; j < Ny; j++){

```

```

136     freqidx[Nx+j] = j-Ny;
137 }
138
139
140 fftw_complex *phase = (fftw_complex*) fftw_malloc(sizeof(fftw_complex) *
141 Nx * Ny);
142 for(i = 0; i < Nx; i++){
143     for(j = 0; j < Ny; j++){
144         phase[i+j*Nx] = cexp(I*dz*( (2*M_PI) * (2*M_PI) * ( (freqidx[i]/Lx)
145 ) * (freqidx[i]/Lx) + (freqidx[Nx+j]/Ly) * (freqidx[Nx+j]/Ly) )/(4*beta));
146     }
147 }
148
149 // main loop
150
151 for(k=1; k <= Nz; k++){
152
153     fftw_execute(p_forward); // 'out' now points towards the DFT of 'in'
154
155     for(i = 0; i < Nx*Ny; i++){
156         aux[i] = out[i] * phase[i];
157     }
158
159     fftw_execute(p_inverse); // 'in' now points towards the inverse DFT of
160     // 'aux'
161
162     for(i = 0; i < Nx * Ny; i++){
163         in[i] /= (Nx * Ny); // normalization of FFT
164         in[i] *= cexp(-I * k0 * (((n0+dn[i])*(n0+dn[i]))- (n0*n0)) * dz
165 / (2*n0)); // potential operator in real space
166     }
167
168     fftw_execute(p_forward); // 'out' now points towards the DFT of 'in'
169
170     for(i = 0; i < Nx*Ny; i++){
171         aux[i] = out[i] * phase[i];
172     }
173
174     fftw_execute(p_inverse); // 'in' now points towards the inverse DFT of
175     // 'aux'
176     for(i = 0; i < Nx * Ny; i++){
177         in[i] /= (Nx * Ny); // normalization of FFT
178     }
179
180     // save to txt
181     rem = k % (Nz/frames);
182     if(rem == 0){
183         div = k / (Nz/frames);
184         sprintf(filename, "%02d.txt", div);

```

```

180
181     fp3 = freopen(filename, "w", stdout);
182
183     for(i = 0; i < Nx; i++){
184         for(j = 0; j < Ny; j++){
185             printf("%e\n", cabs(in[i+j*Nx])*cabs(in[i+j*Nx]));
186         }
187         printf("\n");
188     }
189     fclose(fp3);
190 }
191
192 fftw_cleanup_threads();
193 fftw_destroy_plan(p_forward);
194 fftw_destroy_plan(p_inverse);
195 fftw_free(in);
196 fftw_free(aux);
197 fftw_free(out);
198 fftw_free(phase);
199 free(dn);
200 return 0;
201 }
```

D. Código en Python generador de hologramas

```
1 # Copyright (C) 2024 Diego Roman-Cortes
2 #
3 # This program is free software: you can redistribute it and/or modify
4 # it under the terms of the GNU General Public License as published by
5 # the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or
6 # (at your option) any later version.
7 #
8 # This program is distributed in the hope that it will be useful,
9 # but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
10 # MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
11 # GNU General Public License for more details.
12 #
13 # You should have received a copy of the GNU General Public License
14 # along with this program. If not, see <https://www.gnu.org/licenses/>.
15 #
16 # e-mail: diego.roman.c@ug.uchile.cl
17
18 import numpy as np
19 import matplotlib.pyplot as plt
20 from PIL import Image, ImageChops
21 from scipy.special import eval_genlaguerre
22 from scipy import signal
23
24 my_dpi = 120 #120
25 plt.style.use('dark_background')
26
27 WIDTH = 1920
28 HEIGHT = 1080
29
30 sigma = HEIGHT/4
31
32 sigmax = HEIGHT/2.2/4*2.2
33 sigmay = HEIGHT/5.0*1.1
34
35 x = np.linspace(-WIDTH/2, WIDTH/2, num=WIDTH)
36 y = np.linspace(-HEIGHT/2, HEIGHT/2, num=HEIGHT)
37
38 Xn, Yn = np.meshgrid(x, y, indexing='xy')
39
40 angle = -0.05
41 X = Xn*np.cos(angle) - Yn*np.sin(angle)
42 Y = Yn*np.cos(angle) + Xn*np.sin(angle)
```

```

43
44 Z = np.zeros(X.shape, dtype=complex)
45 Z += (np.exp(-((X)/sigma/1.0)**2)*np.exp(-((Y)/sigma)**2)) # any function of x
46     and y
47 Z /= np.sqrt(np.sum(np.abs(Z)**2))
48
49 phase = (np.angle(Z)+np.pi) * 255.0 / (2*np.pi)
50
51 fig = plt.figure(figsize=(1920/my_dpi, 1080/my_dpi), dpi=my_dpi)
52
53 plt.imsave('fase.png', phase, cmap="gray", vmin=0, vmax=255)
54 plt.close("all")
55
56 fig = plt.figure(figsize=(1920/my_dpi, 1080/my_dpi), dpi=my_dpi)
57
58 blaze = (signal.sawtooth(Xn*2.0*np.pi/5.0) + 1)/2.0*255
59
60 plt.imsave('blaze.png', blaze, cmap="gray", vmin=0, vmax=255)
61 plt.close("all")
62
63 fig = plt.figure(figsize=(1920/my_dpi, 1080/my_dpi), dpi=my_dpi)
64
65 amplitude = (np.abs(Z)**2/np.max(np.abs(Z)**2)) * blaze/255
66 amplitude /= amplitude.max()
67 amplitude *= 255
68
69 plt.imsave('amplitude.png', amplitude, cmap="gray", vmin=0, vmax=255)
70 plt.close("all")
71
72
73 im1 = np.array(Image.open('amplitude.png').convert('L'), dtype="uint16")
74 im2 = np.array(Image.open('fase.png').convert('L'), dtype="uint16")
75
76 imf = (((amplitude + phase) % 255))
77 im = (imf).astype(np.uint8)
78
79 plt.imsave('vortex2.png', im, cmap="gray", vmin=0, vmax=255)

```