Tarea 3
Criptografía y Seguridad
Curvas Elípticas

Castro Mejia Jonatan Alejandro 314027687
Leyva Castillo Luis Angel 314050577
Rosado cabrera Diego 314293804

June 24, 2020

1. Sea E: $y^2 + 20x = x^3 + 21(mod 35)$ y sea Q =(15,-4) $\in$ E.

   a) Factoriza 35 tratando de calcular 3Q.
   Hay que obtener 2Q, y esto es haciendo Q + Q, y como son iguales, entonces: $\lambda = (3x_1^2 + a)(2y_1)^{-1}$
   Entonces λ = $(3(15)^2$ - 20)$(2(-4))^{-1}$(-8^{-1} $\equiv$13 mod 35) = (675-20)(13) mod 35 = 655(13) = 8515 mod 35
   $\lambda = 10$
   Ahora hay que calcular $x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2$ y $y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1$
   $x_3 = 10^2 - 15 - 15$ mod 35
   = 100 -30 mod 35 = 70 mod 35 = 0
   y_3 = 10(15-0)+4 = 154 mod 35 = 14.
   Entonces 2Q = (0,14).
   Ahora ya podemos obtener 3Q,y para eso hay que sumar (15,-4) y (0,14).
   Como son diferentes entonces $\lambda = (y_2 - y_1)(x_2 - x_1)^{-1}$
   λ = (14 + 4)$(15 - 0)^{-1}$ = 18$(15)^{-1}$ (15^{-1} $\equiv$ 1 mod 35) entonces esto nos indica que hay que sacar el **mcd(15,35) = 5.** y este es un factor de factorización.

   b) Factoriza 35 tratando de calcular 4Q duplicándolo.
   Del ejercicio anterior ya tenemos 2Q y como son iguales, entonces hay que calcular
   $\lambda = (3x_1^2 + a)(2y_1)^{-1}$
   λ = (3(0) -20)$(2(14))^{-1}$
   λ = (-20)$(28)^{-1}$ (28^{-1} $\equiv$ 1 mod 35) entonces hay que sacar el **mcd(28, 35) = 7**, entonces este es una factor de factorización

   c) Calcula 3Q y 4Q sobre E (mod 5) y sobre E (mod 7) explica por que el factor 5 se obtiene calculando 3Q y por que el factor 7 se obtiene calculando 4Q.

   - Al calcular 3Q llegamos a un problema, este problema es que no podemos sacar el inverso de 15 en el grupo 35. Esto ocurre ya que 15 y 35 no son primos, por lo que tenemos que sacar el **mcd(15,35)** que nos da 5. por eso es que el factor 5 se obtiene calculando 3Q.

   - Al calcular 4Q llegamos a un problema, este problema es que no podemos sacar el inverso de 28 en el grupo 35. Esto ocurre ya que 28 y 35 no son primos, por lo que tenemos que sacar el **mcd(28,35)** que nos da 7, por eso es que el factor 7 se obtiene calculando4Q.

   - Calculando 3Q sobre E(mod 5)
   Hay que obtener 2Q, y esto es haciendo Q + Q, y como son iguales, entonces:
   $\lambda = (3x_1^2 + a)(2y_1)^{-1}$
   Entonces λ = $(3(15)^2$ - 20)$(2(-4))^{-1}$(-8^{-1} $\equiv$2 mod 5) = (675-20)(2) mod 5 = 655(2) = 1310 mod 5
   $\lambda = 0$
   Ahora hay que calcular $x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2$ y $y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1$
   $x_3 = 0^2 - 15 - 15$ mod 5
   = -30 mod 5 = 70 mod 5 = 0
   y_3 = 0(15-0)+4 = 4 mod 5 = 4.
   Entonces 2Q = (0,4).

Ahora ya podemos obtener 3Q,y para eso hay que sumar (15,-4) y (0,4).
Como son diferentes entonces $\lambda = (y_2 - y_1)(x_2 - x_1)^{-1}$
λ = (4 + 4)(15 - 0)$^{-1}$ = 8(15)$^{-1}$ (15^{-1} $\equiv$ 0 mod 5)
15 no tiene inverso en 5 multiplicativo entonces terminamos aquí.

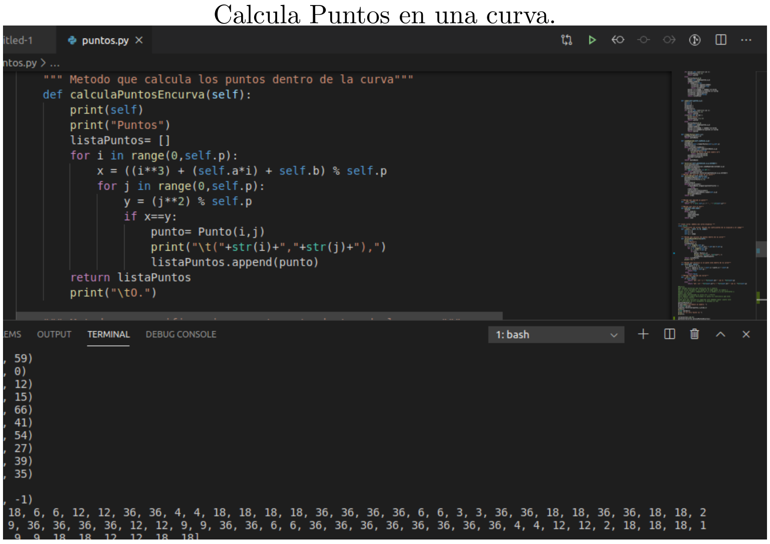
- Calculando 4Q mod 5
Ya tenemos 2Q para obtener 4Q hay que sumar 2Q + 2Q
Como son iguales
λ = (3x$_1^2$ + a)$(2y_1)^{-1}$
λ = (3(0) -20)(2(4))$^{-1}$
λ = (-20)(8)$^{-1}$ (8^{-1} $\equiv$ 5 mod 5)
λ = (-20)(5) = -100 $\equiv$ 0 mod 5
Entonces 4Q = (0,1)
- Calculando 3Q sobre E(mod 7)
Hay que obtener 2Q, y esto es haciendo Q + Q, y como son iguales, entonces:
λ = (3x$_1^2$ + a)$(2y_1)^{-1}$
λ = (3(15)^2 - 20)(2(-4))$^{-1}$(-8^{-1} $\equiv$6 mod 7) = (675-20)(6) mod 7 = 655(6) = 3930 mod 7 = 3
λ =3
x$_3$ = $3^2 - 15 - 15$ mod 7 = 0
y$_3$ = 3(15-0)+4 mod 7 = 0 .
Entonces 2Q = (0,0)
Ahora ya podemos obtener 3Q, y para esto hay que sumar (15,-4) y (0,0).
Como son diferentes entonces $\lambda = (y_2 - y_1)(x_2 - x_1)^{-1}$
λ = (0+4)(0-15)$^{-1}$ =(4)(-15)$^{-1}$ ((-15)$^{-1}$ $\equiv$ 6 mod 7)
λ = 4(6) = 24 mod 7 = 3
λ = 3
Ahora hay que calcular x$_3$ = $\lambda^2 - x_1 - x_2$ y y$_3$ = $\lambda(x_1 - x_3) - y_1$
x$_3$ = $3^2 - 15 - 0$ = 9-15 = -6 $\equiv$ 1 mod 7
y$_3$ = $3(15 - 1) + 4 = 46 \equiv 4$ mod 7
Entonces 3Q = (1,4)
- Calculando 4Q sobre E(mod 7)
Ya tenemos 2Q para obtener 4Q hay que sumar 2Q + 2Q
Como son iguales
λ = (3x$_1^2$ + a)$(2y_1)^{-1}$
λ =(3(0)-20)(2(0))$^{-1}$ = (-20)(0)$^{-1}$.
Pero no podemos obtener el valor del inverso de 0, ya que no existe.

2. Sea E la curva elíptica $y^2 = x^3 + x + 28$ definida sobre $\mathbb{Z}_{71}$

   a) Calcula y muestra el número de puntos de E.

   Para poder realizar este pegunta creamos una clase curva en python debido a que realizarlo a mano nos tomaría demasiado tiempo por lo cual decidimos programarlo para que nos dieran los puntos correspondientes los cuales anotamos a continuación (el código se puede ver en la imagen Calcula puntos)

Calcula Puntos en una curva.

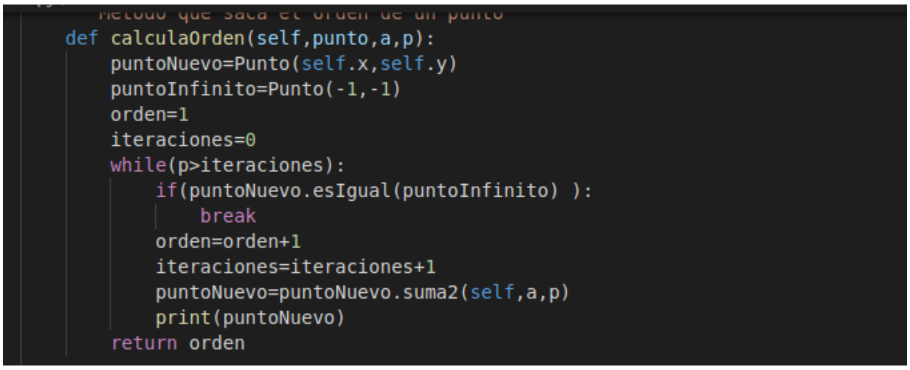


O , (1,32), (1,39), (2,31), (2,40), (3,22), (3,49), (4,5), (4,66), (5,4), (5,67), (6,26), (6,45), (12,8), (12,63), (13,26), (13,45), (15,9), (15,62), (19,27), (19,44), (20,5), (20,66), (21,3), (21,68), (22,30), (22,41), (23,19), (23,52), (25,22), (25,49), (27,0), (31,32), (31,39), (33,1), (33,70), (34,23), (34,48), (35,14), (35,57), (36,12), (36,59), (37,33), (37,38), (39,32), (39,39), (41,7), (41,64), (43,22), (43,49), (47,5), (47,66), (48,11), (48,60), (49,24), (49,47), (52,26), (52,45), (53,0), (58,27), (58,44), (61,15), (61,56), (62,0), (63,17), (63,54), (65,27), (65,44), (66,18), (66,53), (69,35), (69,36).

b) Muestra que E no es un grupo cíclico.

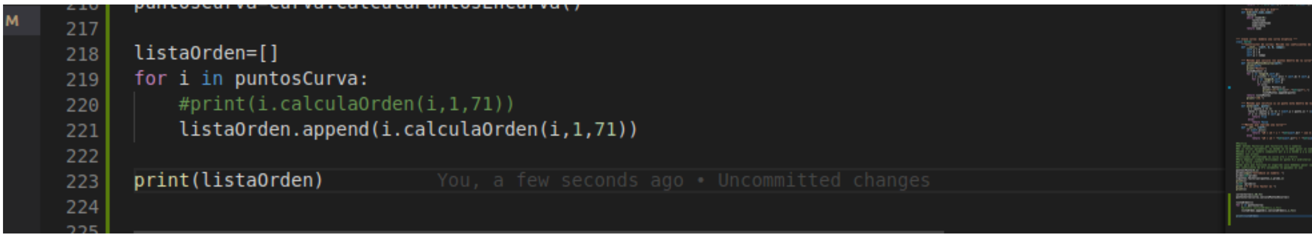
c) ¿Cuál es el máximo orden de un elemento en E? Encuentra un elemento que tenga ese orden.

El máximo numero es 36, lo sabemos debido a que creamos un Sricpt en python que sacara el orden, modificando la instrucciones que hicimos para el script uno pudimos devolver una lista de puntos y a cada punto le sacábamos el orden con el código que se puede ver en la imagen de orden



```
def calculaOrden(self,punto,a,p):
    puntoNuevo=Punto(self.x,self.y)
    puntoInfinito=Punto(-1,-1)
    orden=1
    iteraciones=0
    while(p>iteraciones):
        if(puntoNuevo.esIgual(puntoInfinito) ):
            break
        orden=orden+1
        iteraciones=iteraciones+1
        puntoNuevo=puntoNuevo.suma2(self,a,p)
        print(puntoNuevo)
    return orden
```

Calcula Orden.

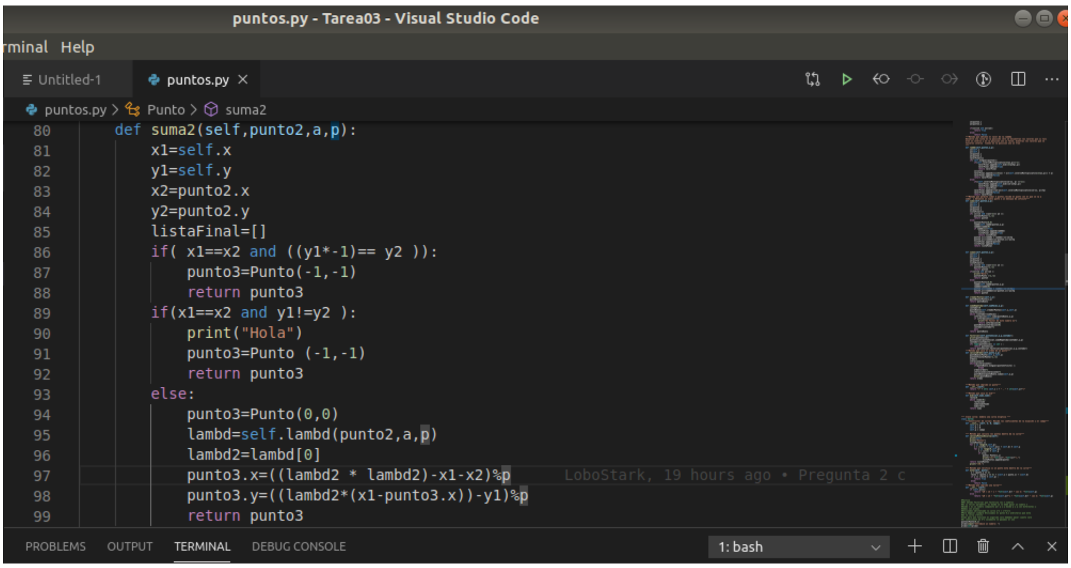


```
listaOrden=[]
for i in puntosCurva:
    #print(i.calculaOrden(i,1,71))
    listaOrden.append(i.calculaOrden(i,1,71))

print(listaOrden)          You, a few seconds ago • Uncommitted changes
```

Imagen donde mostramos como calculamos el orden de cada punto que nos devolvió el método calculaPuntos .

Y para realizar la suma de puntos utilizábamos este método que creamos en una clase puntos se puede ver en la imagen de suma.




```
def suma2(self,punto2,a,p):
    x1=self.x
    y1=self.y
    x2=punto2.x
    y2=punto2.y
    listaFinal=[]
    if( x1==x2 and ((y1*-1)== y2 )):
        punto3=Punto(-1,-1)
        return punto3
    if(x1==x2 and y1!=y2 ):
        print("Hola")
        punto3=Punto (-1,-1)
        return punto3
    else:
        punto3=Punto(0,0)
        lambd=self.lambd(punto2,a,p)
        lambd2=lambd[0]
        punto3.x=((lambd2 * lambd2)-x1-x2)%p      LoboStark, 19 hours ago • Pregunta 2 c
        punto3.y=((lambd2*(x1-punto3.x))-y1)%p
        return punto3
```

Suma de puntos.

3. Sea E :$y^2 - 2 = x^3 + 333x$ sobre $\mathbb{F}_{347}$ y sea P = (110,136).

   a) ¿Es Q=(81,-176) un punto de E?

      Para verificar esto hay que sustituir en E Q,
      (-176)$^2 - 2 = (81)^3 + 333(81)$
      30976 - 2 = 531441 + 26973.
      30974 = 558414 mod 347
      Entonces 347|558414 - 30974 = 1520, P $\in F_{347}$

   b) si sabemos que $|E|$ = 358 ¿Podemos decir E es criptográficamente útil? ¿Cuál es el orden de P? ¿Entre que valores se puede escojer la clave privada?

      El orden de P = 179. E no es criptográficamente útil, ya que no es capaz de dividir a un número primo grande, este número se determina por 172*2, siendo 2 nuestro primo.

   c) si tu clave privada es k=101 y algún conocido te ha enviado el mensaje cifrado (M_1=(232,278) y M_2=(135,214)) ¿Cuál era el mensaje original?

      $M = M_2 - kM_1$
      $M = (135, 214) - 101(232, 278)$
      aplicando sumas consecutivas -101(232,278) = (275,176)
      $M = (135, 214) - (275, 176)$
      $M = (135, 214) + (275, -176)$
      $M = (74, 87)$ mensaje original

4. Sea $\mathbb{E}$: F(x,y)=$y^2 - x^3 - 2x - 7$ sobre $\mathbb{Z}_{31}$ con $\neq \mathbb{E}$ = 39 y P = (2,9) es un punto de orden 39 sobre $\mathbb{E}$, el ECIES simplifado definido sobre $\mathbb{E}$ tiene $\mathbb{Z}_{31}^*$ como espacio de texto plano, supongamos que la clave privada es m = 8.

   a) Calcula Q=mP
      Hay que calcular Q = 8P
      = 4P + 4P = (2P+2P) + (2P+2P)

      Como son los mismos puntos tenemos $\lambda = (3x_1^2$ + A) $(2y_1)^{-1} = (3(2)^2{+}2)(2(9))^{-1}$ hay que encontrar el inverso de 9 mod 31 usando el algoritmo extendido de euclides, $2(9)^{-1} \equiv 18^{-1} \equiv 19$ mod 31.
      Entonces λ = (12+2) x 19 = 266.
      Queda calcular $x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2$, $y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1$.

      x_3 = (266)^2 - 2 - 2 = 70,756-4 = 70,752 $\equiv$ 10 mod 31.
      y_3 = 266(2-70752) - 9 = -18,819,509 $\equiv$ 2 mod 31.
      Entonces 2P = (10,2).
      4P = 2P + 2P = (10,2)+(10,2).
      Entonces $\lambda = (3(10^2) + 2)(2(2))^{-1}$ = 2,416.
      x_3 = (2,416)^2 -10 -10 = 5,837,036 $\equiv$ 15 mod 31.
      y_3 = 2,416(10 - 5,837,036) - 2 = -14102254818 $\equiv$ 8 mod 31.
      Por lo que 4P = (15,8), solo falta calcular 8P = 4P + 4P = (15,8) + (15,8).
      Ahora $\lambda = (3(15)^2 + 2)(2(8)^{-1})$; $2(8)^{-1} \equiv 2$ mod 31.
      entonces λ = 677 x 2 = 1354.
      x_3 = 1,354^2 - 15 -15 = 1.833,286 $\equiv$ 8 mod 31.
      y_3 = 1354(15 - 1,833,286)-8 = -24,82,248,942 $\equiv$ 15 mod 31.
      Entonces 8P = (8,15).

   b) Descifra la siguiente cadena de texto cifrado:
      ((18,1),21),((3,1),18),((17,0),19),((28,0),8)
      E : y$^2 = x^3 + 2x + 7$ mod 31

      1) ((18,1),21)
         Evaluamos 18 en E:
         Entonces $18^3 + 2(18) + 7 = 5875 \equiv$16 mod 31.

y = ± 4, ahora hay que fijarnos en la segunda entrada la cual nos dice que y ≡ 1 mod 2, entonces y = 27.
El punto de descompresión es (18,27), entonces 8(18,27) = (15,8)
Ahora hay que encontrar $15^{-1} \equiv 29$ mod 31,y con esto hay que calcular 29(21) mod 31 que nos da: 20.

2) ((3,1),18)
Evaluamos 3 en E :
Entonces $3^3 + 2(3) + 7 = 40 \equiv 9$ mod 31
y = ± 3, ahora hay que fijarnos en la segunda entrada la cual nos dice que y ≡ 1 mod 2, entonces y = 28
El punto de descompresión es (3,28), entonces 8(3,28) = (2,22)
Ahora hay que encontrar $2^{-1} \equiv 16$ mod 31, y con esto hay que calcular 16(18) mod 31 que nos da: 9.

3) ((17,0),19)
Evaluamos 17 en E:
Entonces $17^3 + 2(17) + 7 = 4954 \equiv 25$ mod 31
y = ± 5, ahora hay que fijarnos en la segunda entrada la cual nos dice que y ≡ 0 mod 2, entonces y = 26
El Punto de descompresión es (17,26) ,entonces 8(17,26) = (30,29)
Ahora hay que encontrar $30^{-1} \equiv 30$ mod 31, y con esto hay que calcuar 30(19) mod 31 que nos da: 12

4) ((28,0),8)
Evaluamos 28 en E:
Entonces $28^3 + 2(28) + 7 = 22015 \equiv 5$ mod 31 Hay que sumarle a 5, 31 tantas veces como sea necesario para que nos genere un cuadrado perfecto. En este caso 5 + 31 = 36.
Entonces y = ± 6, ahora nos fijamos en la segunda entrada la cual nos dice que y ≡ 0 mod 2, entonces y = 25
El punto de descompresión es (28,26), entonces 8(28,25) = (14,12)
Ahora hay que encontrar $14^{-1} \equiv 20$ mod 31, y con esto hay que calcular 20(8) mod 31 que nos da: 5.

c) Supongamos que cada texto plano representa un caracter alfabético, convierte el texto plano en una palabra en ingles, usa la asociación (A → 1, ... , Z → 26) en este caso 0 no es considerado como un texto plano o par ordenado.
Del ejercicio anterior obtuvimos los valores $\{20, 9, 12, 5\}$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Y con los valores obtenemos: **TILE** como mensaje descifrado.