Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Leyva Castillo Luis Angel 314050577
Rosado Cabrera Diego Rosado Cabrera 314293804

1. Sea E: $y^2 + 20x = x^3 + 21(mod35)$ y sea Q =(15,-4) $\in$ E.

   A Factoriza 35 tratando de calcular 3Q.

   Primero para poder realizar esta operación tenemos que enontrar 2Q, para ello tenemos que sumar los puntos (15,4) + (15,4) Recordando que la suma se define de la siguiente forma

   P+Q=
$$\begin{cases} Infinito & \text{SI } x_1 = x_2 \ \& - y_1 = y_2; \\ (x_3, y_3) & x_3 = (\lambda - x_1 - x_2)\ mod\ p\ y\ y_3 = (\lambda(x_1 - x_3) - x_1)\ mod\ p \end{cases}$$

   Pero para esto necesitamos sacar primero a λ que recordemos que se difine de la siguiente manera

   λ=
$$\begin{cases} ((3x_1^2 + A) * 2(y_1)^{-1}))\ mod\ p & \text{si } P = Q; \\ ((y1 - y2) * (x_1 - x_2))\ mod\ p & \text{si } P! = Q; \end{cases}$$

   Para esto entonces simplemente sustituimos los valores, en lambda debido a que P=Q entonces usamos el primer caso de la lamda lo cual nos dice que $\lambda = (((3(15)^2) + -20) * 2(-4)^{-1}))mod35$
   $\rightarrow$ (((3*225)-20* $(-8)^{-1}$)mod 35
   $\rightarrow$ ((675-20)*13)mod 35
   $\rightarrow$ (655 * 13) mod 35
   $\rightarrow$ 8515 mod 35
   $\therefore \lambda = 10$

   Ahora ya podemos sumar, primero sacaremos $x_3 = 10^2$-15-15 mod 35
   $\rightarrow$ 100-30 mod 35
   $\rightarrow$70 mod 35
   $\therefore$ x3=0

   Ahora debemos sacar a y_3=(10(15-0)- -4) mod 35
   $\rightarrow$ 150+4 mod 35
   $\rightarrow$ 154 mod 35
   $\therefore y_3 = 14$
   Entonces ya sabemos el valor del punto 2Q, ahora debemos sumar Q+2q para tener 3Q, para eso debemos calcular de nuevo λ por lo que haremos $\lambda = \frac{-4-14}{15-0}$

   Aquí encontramos un error debido a que 15 no tiene inverso multiplicativo en el grupo 35 así que eso implica que tenemos que sacar el MCD(35,15) = 5 $\therefore$ 5 es factor de 35.

2 Factoriza 35 tratando de calcular 4Q duplicándolo.

Ahora no calcularemos 2Q debido a que ya lo calculamos anteriormente en el ejercicio 1 por lo cual pasaremos a calcular λ bajo la definición del ejercicio 1

$\lambda= \frac{3(0)^2}{2(14)}$mod 35

Encontramos de nuevo el mismo problema que en el ejercicio anterior debido a que 28 mod 35 no tiene inverso, por lo cual debemos sacar su MCD(28,35) = 7 $\therefore$ 7 es un factor de 35

3 Calcula 3Q y 4Q sobre E (mod 5) y sobre E (mod 7) explica por que el factor 5 se obtiene calculando 3Q y por que el factor 7 se obtiene calculando 4Q.

Debido a que cuando calculas 3Q , intentamos sacar el inverso de 15 en el grupo 35, esto conflictuá ya que como 15 y 35 no son primos $\rightarrow$ que son números compuesto por primos esto nos lo sabemos por el teorema fundamental de la aritmética , ahora al sacar su MCD descubrimos que 5 es ese número $\therefore$ por esa razón 3 q , nos dio el valor 5 por compartir ese primo con 15 y análogamente pasa lo mismo con 28 y 35

Ahora el valor de 3 Q con 5 = No se puede calcular debido a que tenemos que cuando intentamos sumar Q= (15,-4) con 2Q=(0,4)(Los calculos de como se llego a 2q se dejan como ejercicio para el lector) e intentamos sacar α = (-4-4).(0-15)$^{-1}$

$\rightarrow$ 8 . (-15)$^{-1}$ y como -15 no esta en el campo de 5 entonces lo que hacemos es devolverlo con la operación modulo $\rightarrow$ -15 mod 5 = 0 y 0 no tiene inverso multiplicativo en 5 y no existe MCD(0,5) por lo que nuestro proceso termina aquí

2. Sea E la curva elíptica $y^2 = x^3 + x + 28$ definida sobre $\mathbb{Z}_{71}$

   a) Calcula y muestra el número de puntos de E.
   Puntos:
   O, (1,32), (1,39), (2,31), (2,40), (3,22), (3,49), (4,5), (4,66), (5,4), (5,67), (6,26), (6,45), (12,8), (12,63), (13,26), (13,45), (15,9), (15,62), (19,27), (19,44), (20,5), (20,66), (21,3), (21,68), (22,30), (22,41), (23,19), (23,52), (25,22), (25,49), (27,0), (31,32), (31,39), (33,1), (33,70), (34,23), (34,48), (35,14), (35,57), (36,12), (36,59), (37,33), (37,38), (39,32), (39,39), (41,7), (41,64), (43,22), (43,49), (47,5), (47,66), (48,11), (48,60), (49,24), (49,47), (52,26), (52,45), (53,0), (58,27), (58,44), (61,15), (61,56), (62,0), (63,17), (63,54), (65,27), (65,44), (66,18), (66,53), (69,35), (69,36).

   b) Muestra que E no es un grupo cíclico.

   c) ¿Cuál es el máximo orden de un elemento en E? Encuentra un elemnto que tenga ese orden.

3. Sea E :$y^2 - 2 = x^3 + 333x$ sobre $\mathbb{F}_{347}$ y sea P = (110,136).

   a) ¿Es Q=(81,-176) un punto de E?
   Para verificar esto hay que sustituir en E: x = 81, y = -176.
   $(-176)^2 - 2 \equiv (81)^3 + 333(81)$ mod 347
   $30976 - 2 \equiv 531441 + 26973$ mod 347
   $30974 \equiv 558414$ mod 347
   P = $347|558414 - 30974 = 1520$
   Como 347 divide a 527440 entonces:
   P= $(81, -176) \in E(\mathbb{F}_347)$

   b) si sabemos que $|E| = 358$ ¿Podemos decir E es criptográficamente útil? ¿Cuál es el orden de P? ¿Entre que valores se puede escojer la clave privada?

   c) si tu clave privada es k=101 y algún conocido te ha enviado el mensaje cifrado (M_1=(232,278) y M_2=(135,214)) ¿Cuál era el mensaje original?
   $M_1 = (232, 278)$
   $M_2 = (135, 214)$
   k=101
   Utilizando la expresión $M = M_2 - kM_1$

$M = (135, 214) - 101(232, 278)$
Pero -101(232,278) = (275,176)
$= (135, 214) - (275, 176)$
$= (135, 214) + (275, -176)$
$= (74, 87)$
$\therefore$ el Mensaje original era (74,87)

4. Sea $\mathbb{E}$: F(x,y)=$y^2 - x^3 - 2x - 7$ sobre $\mathbb{Z}_{31}$ con $\neq \mathbb{E} = 39$ y P = (2,9) es un punto de orden 39 sobre $\mathbb{E}$, el ECIES simplifado definido sobre $\mathbb{E}$ tiene $\mathbb{Z}_{31}^*$ como espacio de texto plano, supongamos que la clave privada es m = 8.

   a) Calcula Q=mP
   Hay que calcular Q = 8P
   = 4P + 4P = (2P+2P) + (2P+2P)

   Como son los mismos puntos tenemos λ = ($3x_1^2$ + A) $(2y_1)^{-1} = (3(2)^2 + 2)(2(9))^{-1}$ hay que encontrar el inverso de 9 mod 31 usando el algoritmo extendido de euclides, $2(9)^{-1} \equiv 18^{-1} \equiv 19$ mod 31.
   Entonces λ = (12+2) x 19 = 266.
   Queda calcular $x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2$, $y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1$.

   $x_3 = (266)^2$ - 2 - 2 = 70,756-4 = 70,752 $\equiv$ 10 mod 31.
   y_3 = 266(2-70752) - 9 = -18,819,509 $\equiv$ 2 mod 31.
   Entonces 2P = (10,2).
   4P = 2P + 2P = (10,2)+(10,2).
   Entonces $\lambda = (3(10^2) + 2)(2(2))^{-1} = 2{,}416$.
   $x_3 = (2{,}416)^2$ -10 -10 = 5,837,036 $\equiv$ 15 mod 31.
   y_3 = 2,416(10 - 5,837,036) - 2 = -14102254818 $\equiv$ 8 mod 31.
   Por lo que 4P = (15,8), solo falta calcular 8P = 4P + 4P = (15,8) + (15,8).
   Ahora $\lambda = (3(15)^2 + 2)(2(8)^{-1})$; $2(8)^{-1} \equiv 2$ mod 31.
   entonces λ = 677 x 2 = 1354.
   $x_3 = 1{,}354^2$ - 15 -15 = 1.833,286 $\equiv$ 8 mod 31.
   y_3 = 1354(15 - 1,833,286)-8 = -24,82,248,942 $\equiv$ 15 mod 31.
   Entonces 8P = (8,15).

   b) Descifra la siguiente cadena de texto cifrado:
   ((18,1),21),((3,1),18),((17,0),19),((28,0),8)
   E : $y^2 = x^3 + 2x + 7$ mod 31

      1) ((18,1),21)
      Evaluamos 18 en E:
      Entonces $18^3 + 2(18) + 7 = 5875 \equiv$16 mod 31.
      y = $\pm$ 4, ahora hay que fijarnos en la segunda entrada la cual nos dice que y $\equiv$ 1 mod 2, entonces y = 27.
      El punto de descompresión es (18,27), entonces 8(18,27) = (15,8)
      Ahora hay que encontrar $15^{-1} \equiv 29$ mod 31,y con esto hay que calcular 29(21) mod 31 que nos da: 20.

      2) ((3,1),18)
      Evaluamos 3 en E :
      Entonces $3^3 + 2(3) + 7 = 40 \equiv 9$ mod 31
      y = $\pm$ 3, ahora hay que fijarnos en la segunda entrada la cual nos dice que y $\equiv$ 1 mod 2, entonces y = 28
      El punto de descompresión es (3,28), entonces 8(3,28) = (2,22)
      Ahora hay que encontrar $2^{-1} \equiv 16$ mod 31, y con esto hay que calcular 16(18) mod 31 que nos da: 9.

3) ((17,0),19)
Evaluamos 17 en E:
Entonces $17^3 + 2(17) + 7 = 4954 \equiv 25 \bmod 31$
y = $\pm$ 5, ahora hay que fijarnos en la segunda entrada la cual nos dice que y $\equiv$ 0 mod 2, entonces y = 26
El Punto de descompresión es (17,26) ,entonces 8(17,26) = (29,29)
Ahora hay que encontrar $29^{-1} \equiv 15 \bmod 31$, y con esto hay que calcuar 15(19) mod 31 que nos da: 6

4) ((28,0),8)
Evaluamos 28 en E:
Entonces $28^3 + 2(28) + 7 = 22015 \equiv 5 \bmod 31$ Hay que sumarle a 5, 31 tantas veces como sea necesario para que nos genere un cuadrado perfecto. En este caso 5 + 31 = 36.
Entonces y = $\pm$ 6, ahora nos fijamos en la segunda entrada la cual nos dice que y $\equiv$ 0 mod 2, entonces y = 26
El punto de descompresión es (28,26), entonces 8(28,26) = (5,10)
Ahora hay que encontrar $5^{-1} \equiv 25 \bmod 31$, y con esto hay que calcular 25(8) mod 31 que nos da: 14.

c) Supongamos que cada texto plano representa un caracter alfabético, convierte el texto plano en una palabra en ingles, usa la asociación (A $\rightarrow$ 1, ... , Z $\rightarrow$ 26) en este caso 0 no es considerado como un texto plano o par ordenado.
Del ejercicio anterior obtuvimos los valores $\{20, 9, 6, 14\}$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Y con los valores obtenemos **TIFN** y si buscamos por acronimo, obtenemos **That's it for now**