

Tarea 3

Criptografía y Seguridad

Curvas elípticas

Castro Mejia Jonatan Alejandro

June 20, 2020

1. Sea $E: y^2 + 20x = x^3 + 21 \pmod{35}$ y sea $Q = (15, -4) \in E$.

a) Factoriza 35 tratando de calcular $3Q$.

Hay que obtener $2Q$, y esto es haciendo $Q + Q$, y como son iguales, entonces: $\lambda = (3x_1^2 + a)(2y_1)^{-1}$
Entonces $\lambda = (3(15)^2 - 20)(2(-4))^{-1}(-8^{-1} \equiv 13 \pmod{35}) = (675-20)(13) \pmod{35} = 655(13) = 8515 \pmod{35}$

$\lambda = 10$

Ahora hay que calcular $x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2$ y $y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1$

$x_3 = 10^2 - 15 - 15 \pmod{35}$

$= 100 - 30 \pmod{35} = 70 \pmod{35} = 0$

$y_3 = 10(15-0)+4 = 154 \pmod{35} = 14$.

Entonces $2Q = (0, 14)$.

Ahora ya podemos obtener $3Q$, y para eso hay que sumar $(15, -4)$ y $(0, 14)$.

Como son diferentes entonces $\lambda = (y_2 - y_1)(x_2 - x_1)^{-1}$

$\lambda = (14 + 4)(15 - 0)^{-1} = 18(15)^{-1} (15^{-1} \equiv 1 \pmod{35})$ entonces esto nos indica que hay que sacar el **mcd(15, 35) = 5**. y este es un factor de factorización.

b) Factoriza 35 tratando de calcular $4Q$ duplicándolo.

Del ejercicio anterior ya tenemos $2Q$ y como son iguales, entonces hay que calcular

$\lambda = (3x_1^2 + a)(2y_1)^{-1}$

$\lambda = (3(0)^2 - 20)(2(14))^{-1}$

$\lambda = (-20)(28)^{-1} (28^{-1} \equiv 1 \pmod{35})$ entonces hay que sacar el **mcd(28, 35) = 7**, entonces este es una factor de factorización

c) Calcula $3Q$ y $4Q$ sobre $E \pmod{5}$ y sobre $E \pmod{7}$ explica por que el factor 5 se obtiene calculando $3Q$ y por que el factor 7 se obtiene calculando $4Q$.

2. Sea E la curva elíptica $y^2 = x^3 + x + 28$ definida sobre \mathbb{Z}_{71}

a) Calcula y muestra el número de puntos de E .

Puntos:

$O, (1, 32), (1, 39), (2, 31), (2, 40), (3, 22), (3, 49), (4, 5), (4, 66), (5, 4), (5, 67), (6, 26), (6, 45), (12, 8), (12, 63), (13, 26), (13, 45), (15, 9), (15, 62), (19, 27), (19, 44), (20, 5), (20, 66), (21, 3), (21, 68), (22, 30), (22, 41), (23, 19), (23, 52), (25, 22), (25, 49), (27, 0), (31, 32), (31, 39), (33, 1), (33, 70), (34, 23), (34, 48), (35, 14), (35, 57), (36, 12), (36, 59), (37, 33), (37, 38), (39, 32), (39, 39), (41, 7), (41, 64), (43, 22), (43, 49), (47, 5), (47, 66), (48, 11), (48, 60), (49, 24), (49, 47), (52, 26), (52, 45), (53, 0), (58, 27), (58, 44), (61, 15), (61, 56), (62, 0), (63, 17), (63, 54), (65, 27), (65, 44), (66, 18), (66, 53), (69, 35), (69, 36).$

b) Muestra que E no es un grupo cíclico.

c) ¿Cuál es el máximo orden de un elemento en E ? Encuentra un elemento que tenga ese orden.

3. Sea $E: y^2 - 2 = x^3 + 333x$ sobre \mathbb{F}_{347} y sea $P = (110, 136)$.

a) ¿Es $Q = (81, -176)$ un punto de E ?

Para verificar esto hay que sustituir en E Q ,

$(-176)^2 - 2 = (81)^3 + 333(81)$

$30976 - 2 = 531441 + 26973$.

$30974 = 558414 \pmod{347}$

Entonces $347 | 558414 - 30974 = 1520, P \in E_{347}$

- b) si sabemos que $|E| = 358$ ¿Podemos decir E es criptográficamente útil? ¿Cuál es el orden de P?
¿Entre que valores se puede escoger la clave privada?
- c) si tu clave privada es $k=101$ y algún conocido te ha enviado el mensaje cifrado ($M_1=(232,278)$ y $M_2=(135,214)$) ¿Cuál era el mensaje original?
4. Sea $E : F(x,y)=y^2 - x^3 - 2x - 7$ sobre \mathbb{Z}_{31} con $\neq E = 39$ y $P = (2,9)$ es un punto de orden 39 sobre E, el ECIES simplificado definido sobre E tiene \mathbb{Z}_{31}^* como espacio de texto plano, supongamos que la clave privada es $m = 8$.

a) Calcula $Q=mP$

Hay que calcular $Q = 8P$

$$= 4P + 4P = (2P+2P) + (2P+2P)$$

Como son los mismos puntos tenemos $\lambda = (3x_1^2 + A)(2y_1)^{-1} = (3(2)^2 + 2)(2(9))^{-1}$ hay que encontrar el inverso de 9 mod 31 usando el algoritmo extendido de euclides, $2(9)^{-1} \equiv 18^{-1} \equiv 19 \pmod{31}$.

Entonces $\lambda = (12+2) \times 19 = 266$.

Queda calcular $x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2$, $y_3 = \lambda(x_1 - x_2) - y_1$.

$$x_3 = (266)^2 - 2 - 2 = 70,756 - 4 = 70,752 \equiv 10 \pmod{31}.$$

$$y_3 = 266(2 - 2) - 9 = -18,819,509 \equiv 2 \pmod{31}.$$

Entonces $2P = (10,2)$.

$$4P = 2P + 2P = (10,2) + (10,2).$$

Entonces $\lambda = (3(10)^2 + 2)(2(2))^{-1} = 2,416$.

$$x_3 = (2,416)^2 - 10 - 10 = 5,837,036 \equiv 15 \pmod{31}.$$

$$y_3 = 2,416(10 - 5,837,036) - 2 = -14,102,254,818 \equiv 8 \pmod{31}.$$

Por lo que $4P = (15,8)$, solo falta calcular $8P = 4P + 4P = (15,8) + (15,8)$.

Ahora $\lambda = (3(15)^2 + 2)(2(8))^{-1}$; $2(8)^{-1} \equiv 2 \pmod{31}$.

entonces $\lambda = 677 \times 2 = 1354$.

$$x_3 = 1,354^2 - 15 - 15 = 1,833,286 \equiv 8 \pmod{31}.$$

$$y_3 = 1354(15 - 1,833,286) - 8 = -24,82,248,942 \equiv 15 \pmod{31}.$$

Entonces $8P = (8,15)$.

b) Descifra la siguiente cadena de texto cifrado:

$((18,1),21),((3,1),18),((17,0),19),((28,0),8)$

$E : y^2 = x^3 + 2x + 7 \pmod{31}$

1) $((18,1),21)$

Evaluamos 18 en E:

$$\text{Entonces } 18^3 + 2(18) + 7 = 5875 \equiv 16 \pmod{31}.$$

$y = \pm 4$, ahora hay que fijarnos en la segunda entrada la cual nos dice que $y \equiv 1 \pmod{2}$, entonces $y = 27$.

El punto de descompresión es $(18,27)$, entonces $8(18,27) = (15,8)$

Ahora hay que encontrar $15^{-1} \equiv 29 \pmod{31}$, y con esto hay que calcular $29(21) \pmod{31}$ que nos da: 20.

2) $((3,1),18)$

Evaluamos 3 en E :

$$\text{Entonces } 3^3 + 2(3) + 7 = 40 \equiv 9 \pmod{31}$$

$y = \pm 3$, ahora hay que fijarnos en la segunda entrada la cual nos dice que $y \equiv 1 \pmod{2}$, entonces $y = 28$

El punto de descompresión es $(3,28)$, entonces $8(3,28) = (2,22)$

Ahora hay que encontrar $2^{-1} \equiv 16 \pmod{31}$, y con esto hay que calcular $16(18) \pmod{31}$ que nos da: 9.

3) $((17,0),19)$

Evaluamos 17 en E:

$$\text{Entonces } 17^3 + 2(17) + 7 = 4954 \equiv 25 \pmod{31}$$

$y = \pm 5$, ahora hay que fijarnos en la segunda entrada la cual nos dice que $y \equiv 0 \pmod{2}$, entonces $y = 26$

El Punto de descompresión es $(17,26)$, entonces $8(17,26) = (29,29)$

Ahora hay que encontrar $29^{-1} \equiv 15 \pmod{31}$, y con esto hay que calcular $15(19) \pmod{31}$ que nos da: 6

4) $((28,0),8)$

Evaluamos 28 en E:

Entonces $28^3 + 2(28) + 7 = 22015 \equiv 5 \pmod{31}$ Hay que sumarle a 5, 31 tantas veces como sea necesario para que nos genere un cuadrado perfecto. En este caso $5 + 31 = 36$.
Entonces $y = \pm 6$, ahora nos fijamos en la segunda entrada la cual nos dice que $y \equiv 0 \pmod{2}$, entonces $y = 26$
El punto de descompresión es $(28,26)$, entonces $8(28,26) = (5,10)$
Ahora hay que encontrar $5^{-1} \equiv 25 \pmod{31}$, y con esto hay que calcular $25(8) \pmod{31}$ que nos da: 14.

- c) Supongamos que cada texto plano representa un caracter alfabético, convierte el texto plano en una palabra en ingles, usa la asociación ($A \rightarrow 1, \dots, Z \rightarrow 26$) en este caso 0 no es considerado como un texto plano o par ordenado.

Del ejercicio anterior obtuvimos los valores $\{20, 9, 6, 14\}$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Y con los valores obtenemos **TIFN** y si buscamos por acronimo, obtenemos **That's it for now**