Tarea 3
Criptografía y Seguridad
Curvas elípticas

Castro Mejia Jonatan Alejandro

June 18, 2020

1. Sea E: $y^2 + 20x = x^3 + 21(mod 35)$ y sea Q =(15,-4) $\in$ E.

   a) Factoriza 35 tratando de calcular 3Q.

   b) Factoriza 35 tratando de calcular 4Q duplicándolo.

   c) Calcula 3Q y 4Q sobre E (mod 5) y sobre E (mod 7) explica por que el factor 5 se obtiene calculando 3Q y por que el factor 7 se obtiene calculando 4Q.

2. Sea E la curva elíptica $y^2 = x^3 + x + 28$ definida sobre $\mathbb{Z}_{71}$

   a) Calcula y muestra el número de puntos de E.
   Puntos:
   O, (1,32), (1,39), (2,31), (2,40), (3,22), (3,49), (4,5), (4,66), (5,4), (5,67), (6,26), (6,45), (12,8), (12,63), (13,26), (13,45), (15,9), (15,62), (19,27), (19,44), (20,5), (20,66), (21,3), (21,68), (22,30), (22,41), (23,19), (23,52), (25,22), (25,49), (27,0), (31,32), (31,39), (33,1), (33,70), (34,23), (34,48), (35,14), (35,57), (36,12), (36,59), (37,33), (37,38), (39,32), (39,39), (41,7), (41,64), (43,22), (43,49), (47,5), (47,66), (48,11), (48,60), (49,24), (49,47), (52,26), (52,45), (53,0), (58,27), (58,44), (61,15), (61,56), (62,0), (63,17), (63,54), (65,27), (65,44), (66,18), (66,53), (69,35), (69,36).

   b) Muestra que E no es un grupo cíclico.

   c) ¿Cuál es el máximo orden de un elemento en E? Encuentra un elemnto que tenga ese orden.

3. Sea E :$y^2 - 2 = x^3 + 333x$ sobre $\mathbb{F}_{347}$ y sea P = (110,136).

   a) ¿Es Q=(81,-176) un punto de E?
   Para verificar esto hay que sustituir en E: x = 81, y = -176.
   $(-176)^2 = (81)^2 + 333(81) + 2$
   30976 = 6561 + 26973 + 2.
   30976 = 33536 mod 347
   30976 $\neq$ 224 mod 347.
   Entonces Q no es un punto de E.

   b) si sabemos que $|E| = 358$ ¿Podemos decir E es criptográficamente útil? ¿Cuál es el orden de P? ¿Entre que valores se puede escojer la clave privada?

   c) si tu clave privada es k=101 y algún conocido te ha enviado el mensaje cifrado (M_1=(232,278) y M_2=(135,214)) ¿Cuál era el mensaje original?

4. Sea $\mathbb{E}$: F(x,y)=$y^2 - x^3 - 2x - 7$ sobre $\mathbb{Z}_{31}$ con $\neq \mathbb{E} = 39$ y P = (2,9) es un punto de orden 39 sobre $\mathbb{E}$, el ECIES simplifado definido sobre $\mathbb{E}$ tiene $\mathbb{Z}_{31}^*$ como espacio de texto plano, supongamos que la clave privada es m = 8.

   a) Calcula Q=mP
   Hay que calcular Q = 8P
   = 4P + 4P = (2P+2P) + (2P+2P)

   Como son los mismos puntos tenemos $\lambda = (3x_1^2 + \text{A})\ (2y_1)^{-1} = (3(2)^2+2)(2(9))^{-1}$ hay que encontrar el inverso de 9 mod 31 usando el algoritmo extendido de euclides, $2(9)^{-1} \equiv 18^{-1} \equiv 19$ mod 31.
   Entonces λ = (12+2) x 19 = 266.
   Queda calcular $x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2$, $y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1$.

x_3 = $(266)^2$ - 2 - 2 = 70,756-4 = 70,752 $\equiv$ 10 mod 31.
y_3 = 266(2-70752) - 9 = -18,819,509 $\equiv$ 2 mod 31.
Entonces 2P = (10,2).
4P = 2P + 2P = (10,2)+(10,2).
Entonces $\lambda = (3(10^2) + 2)(2(2))^{-1}$ = 2,416.
x_3 = $(2,416)^2$ -10 -10 = 5,837,036 $\equiv$ 15 mod 31.
y_3 = 2,416(10 - 5,837,036) - 2 = -14102254818 $\equiv$ 8 mod 31.
Por lo que 4P = (15,8), solo falta calcular 8P = 4P + 4P = (15,8) + (15,8).
Ahora $\lambda = (3(15)^2 + 2)(2(8)^{-1})$; $2(8)^{-1} \equiv 2$ mod 31.
entonces λ = 677 x 2 = 1354.
x_3 = $1,354^2$ - 15 -15 = 1.833,286 $\equiv$ 8 mod 31.
y_3 = 1354(15 - 1,833,286)-8 = -24,82,248,942 $\equiv$ 15 mod 31.
Entonces 8P = (8,15).

b) Descifra la siguiente cadena de texto cifrado:
((18,1),21),((3,1),18),((17,0),19),((28,0),8)
E : $y^2 = x^3 + 2x + 7$ mod 31

1) ((18,1),21)
Evaluamos 18 en E:
Entonces $18^3 + 2(18) + 7 = 5875 \equiv 16$ mod 31.
y = $\pm$ 4, ahora hay que fijarnos en la segunda entrada la cual nos dice que y $\equiv$ 1 mod 2, entonces y = 27.
El punto de descompresión es (18,27), entonces 8(18,27) = (15,8)
Ahora hay que encontrar $15^{-1} \equiv 29$ mod 31,y con esto hay que calcular 29(21) mod 31 que nos da: 20.

2) ((3,1),18)
Evaluamos 3 en E :
Entonces $3^3 + 2(3) + 7 = 40 \equiv 9$ mod 31
y = $\pm$ 3, ahora hay que fijarnos en la segunda entrada la cual nos dice que y $\equiv$ 1 mod 2, entonces y = 28
El punto de descompresión es (3,28), entonces 8(3,28) = (2,22)
Ahora hay que encontrar $2^{-1} \equiv 16$ mod 31, y con esto hay que calcular 16(18) mod 31 que nos da: 9.

3) ((17,0),19)
Evaluamos 17 en E:
Entonces $17^3 + 2(17) + 7 = 4954 \equiv 25$ mod 31
y = $\pm$ 5, ahora hay que fijarnos en la segunda entrada la cual nos dice que y $\equiv$ 0 mod 2, entonces y = 26
El Punto de descompresión es (17,26) ,entonces 8(17,26) = (29,29)
Ahora hay que encontrar $29^{-1} \equiv 15$ mod 31, y con esto hay que calcuar 15(19) mod 31 que nos da: 6

4) ((28,0),8)
Evaluamos 28 en E:
Entonces $28^3 + 2(28) + 7 = 22015 \equiv 5$ mod 31 Hay que sumarle a 5, 31 tantas veces como sea necesario para que nos genere un cuadrado perfecto. En este caso 5 + 31 = 36.
Entonces y = $\pm$ 6, ahora nos fijamos en la segunda entrada la cual nos dice que y $\equiv$ 0 mod 2, entonces y = 26
El punto de descompresión es (28,26), entonces 8(28,26) = (5,10)
Ahora hay que encontrar $5^{-1} \equiv 25$ mod 31, y con esto hay que calcular 25(8) mod 31 que nos da: 14.

c) Supongamos que cada texto plano representa un caracter alfabético, convierte el texto plano en una palabra en ingles, usa la asociación (A $\rightarrow$ 1, ... , Z $\rightarrow$ 26) en este caso 0 no es considerado como un texto plano o par ordenado.
Del ejercicio anterior obtuvimos los valores $\{20, 9, 6, 14\}$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Y con los valores obtenemos **TIFN** y si buscamos por acronimo, obtenemos **That's it for now**