

# Tarea 3

## Criptografía y Seguridad

### Curvas elípticas

Castro Mejia Jonatan Alejandro

June 18, 2020

1. Sea  $E: y^2 + 20x = x^3 + 21 \pmod{35}$  y sea  $Q = (15, -4) \in E$ .
  - a) Factoriza 35 tratando de calcular  $3Q$ .  
 Entonces  $\lambda = (3x_1^2 + A)(2y_1)^{-1}$   
 $= (2025 - 20)(-8)^{-1}$   
 $8^{-1} \equiv 13 \pmod{35}$ .  
 $= (2005)(13) = 26065$ .  
 Queda calcular  $x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2, y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1$   
 $=$
  - b) Factoriza 35 tratando de calcular  $4Q$  duplicándolo.
  - c) Calcula  $3Q$  y  $4Q$  sobre  $E \pmod{5}$  y sobre  $E \pmod{7}$  explica por que el factor 5 se obtiene calculando  $3Q$  y por que el factor 7 se obtiene calculando  $4Q$ .
2. Sea  $E$  la curva elíptica  $y^2 = x^3 + x + 28$  definida sobre  $\mathbb{Z}_{71}$ 
  - a) Calcula y muestra el número de puntos de  $E$ .  
 Puntos:  
 $O, (1,32), (1,39), (2,31), (2,40), (3,22), (3,49), (4,5), (4,66), (5,4), (5,67), (6,26), (6,45), (12,8),$   
 $(12,63), (13,26), (13,45), (15,9), (15,62), (19,27), (19,44), (20,5), (20,66), (21,3), (21,68), (22,30),$   
 $(22,41), (23,19), (23,52), (25,22), (25,49), (27,0), (31,32), (31,39), (33,1), (33,70), (34,23), (34,48),$   
 $(35,14), (35,57), (36,12), (36,59), (37,33), (37,38), (39,32), (39,39), (41,7), (41,64), (43,22), (43,49),$   
 $(47,5), (47,66), (48,11), (48,60), (49,24), (49,47), (52,26), (52,45), (53,0), (58,27), (58,44), (61,15),$   
 $(61,56), (62,0), (63,17), (63,54), (65,27), (65,44), (66,18), (66,53), (69,35), (69,36).$
  - b) Muestra que  $E$  no es un grupo cíclico.
  - c) ¿Cuál es el máximo orden de un elemento en  $E$ ? Encuentra un elemento que tenga ese orden.
3. Sea  $E: y^2 - 2 = x^3 + 333x$  sobre  $\mathbb{F}_{347}$  y sea  $P = (110, 136)$ .
  - a) ¿Es  $Q = (81, -176)$  un punto de  $E$ ?  
 Para verificar esto hay que sustituir en  $E: x = 81, y = -176$ .  
 $(-176)^2 = (81)^2 + 333(81) + 2$   
 $30976 = 6561 + 26973 + 2$ .  
 $30976 = 33536 \pmod{347}$   
 $30976 \neq 224 \pmod{347}$ .  
 Entonces  $Q$  no es un punto de  $E$ .
  - b) si sabemos que  $|E| = 358$  ¿Podemos decir  $E$  es criptográficamente útil? ¿Cuál es el orden de  $P$ ?  
 ¿Entre que valores se puede escoger la clave privada?
  - c) si tu clave privada es  $k=101$  y algún conocido te ha enviado el mensaje cifrado ( $M_1=(232,278)$  y  $M_2=(135,214)$ ) ¿Cuál era el mensaje original?
4. Sea  $\mathbb{E}: F(x,y)=y^2 - x^3 - 2x - 7$  sobre  $\mathbb{Z}_{31}$  con  $\neq \mathbb{E} = 39$  y  $P = (2,9)$  es un punto de orden 39 sobre  $\mathbb{E}$ , el ECIES simplificado definido sobre  $\mathbb{E}$  tiene  $\mathbb{Z}_{31}^*$  como espacio de texto plano, supongamos que la clave privada es  $m = 8$ .
  - a) Calcula  $Q=mP$   
 Hay que calcular  $Q = 8P$   
 $= 4P + 4P = (2P+2P) + (2P+2P)$

Como son los mismos puntos tenemos  $\lambda = (3x_1^2 + A)(2y_1)^{-1} = (3(2)^2 + 2)(2(9))^{-1}$  hay que encontrar el inverso de 9 mod 31 usando el algoritmo extendido de euclides,  $2(9)^{-1} \equiv 18^{-1} \equiv 19 \pmod{31}$ .

Entonces  $\lambda = (12+2) \times 19 = 266$ .

Queda calcular  $x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2$ ,  $y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1$ .

$$x_3 = (266)^2 - 2 - 2 = 70,756 - 4 = 70,752 \equiv 10 \pmod{31}.$$

$$y_3 = 266(2 - 70,752) - 9 = -18,819,509 \equiv 2 \pmod{31}.$$

Entonces  $2P = (10,2)$ .

$$4P = 2P + 2P = (10,2) + (10,2).$$

$$\text{Entonces } \lambda = (3(10^2) + 2)(2(2))^{-1} = 2,416.$$

$$x_3 = (2,416)^2 - 10 - 10 = 5,837,036 \equiv 15 \pmod{31}.$$

$$y_3 = 2,416(10 - 5,837,036) - 2 = -14102254818 \equiv 8 \pmod{31}.$$

Por lo que  $4P = (15,8)$ , solo falta calcular  $8P = 4P + 4P = (15,8) + (15,8)$ .

$$\text{Ahora } \lambda = (3(15)^2 + 2)(2(8)^{-1}); 2(8)^{-1} \equiv 2 \pmod{31}.$$

$$\text{entonces } \lambda = 677 \times 2 = 1354.$$

$$x_3 = 1,354^2 - 15 - 15 = 1,833,286 \equiv 8 \pmod{31}.$$

$$y_3 = 1354(15 - 1,833,286) - 8 = -24,82,248,942 \equiv 15 \pmod{31}.$$

Entonces  $8P = (8,15)$ .

b) Descifra la siguiente cadena de texto cifrado:

$((18,1),21),((3,1),18),((17,0),19),((28,0),8)$

$$E : y^2 = x^3 + 2x + 7 \pmod{31}$$

1)  $((18,1),21)$

Evaluamos 18 en E:

$$\text{Entonces } 18^3 + 2(18) + 7 = 5875 \equiv 16 \pmod{31}.$$

$y = \pm 4$ , ahora hay que fijarnos en la segunda entrada la cual nos dice que  $y \equiv 1 \pmod{2}$ , entonces  $y = 27$ .

El punto de descompresión es  $(18,27)$ , entonces  $8(18,27) = (15,8)$

Ahora hay que encontrar  $15^{-1} \equiv 29 \pmod{31}$ , y con esto hay que calcular  $29(21) \pmod{31}$  que nos da: 20.

2)  $((3,1),18)$

Evaluamos 3 en E :

$$\text{Entonces } 3^3 + 2(3) + 7 = 40 \equiv 9 \pmod{31}$$

$y = \pm 3$ , ahora hay que fijarnos en la segunda entrada la cual nos dice que  $y \equiv 1 \pmod{2}$ , entonces  $y = 28$

El punto de descompresión es  $(3,28)$ , entonces  $8(3,28) = (2,22)$

Ahora hay que encontrar  $2^{-1} \equiv 16 \pmod{31}$ , y con esto hay que calcular  $16(18) \pmod{31}$  que nos da: 9.

3)  $((17,0),19)$

Evaluamos 17 en E:

$$\text{Entonces } 17^3 + 2(17) + 7 = 4954 \equiv 25 \pmod{31}$$

$y = \pm 5$ , ahora hay que fijarnos en la segunda entrada la cual nos dice que  $y \equiv 0 \pmod{2}$ , entonces  $y = 26$

El Punto de descompresión es  $(17,26)$ , entonces  $8(17,26) = (29,29)$

Ahora hay que encontrar  $29^{-1} \equiv 15 \pmod{31}$ , y con esto hay que calcular  $15(19) \pmod{31}$  que nos da: 6

4)  $((28,0),8)$

Evaluamos 28 en E:

Entonces  $28^3 + 2(28) + 7 = 22015 \equiv 5 \pmod{31}$  Hay que sumarle a 5, 31 tantas veces como sea necesario para que nos genere un cuadrado perfecto. En este caso  $5 + 31 = 36$ .

Entonces  $y = \pm 6$ , ahora nos fijamos en la segunda entrada la cual nos dice que  $y \equiv 0 \pmod{2}$ , entonces  $y = 26$

El punto de descompresión es  $(28,26)$ , entonces  $8(28,26) = (5,10)$

Ahora hay que encontrar  $5^{-1} \equiv 25 \pmod{31}$ , y con esto hay que calcular  $25(8) \pmod{31}$  que nos da: 14.

c) Supongamos que cada texto plano representa un caracter alfabético, convierte el texto plano en una palabra en ingles, usa la asociación  $(A \rightarrow 1, \dots, Z \rightarrow 26)$  en este caso 0 no es considerado como un texto plano o par ordenado.

Del ejercicio anterior obtuvimos los valores  $\{20, 9, 6, 14\}$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Y con los valores obtenemos **TIFN** y si buscamos por acronimo,  
obtenemos **That's it for now**