

Algebra Lineare

Autore: Diego Stefanini Prof: Patrizio Frosini

Dispense del Corso

Università di Pisa - Informatica
Anno Accademico 2025/2026

Indice

1 Sistemi Lineari	3
2 Operazioni tra Matrici	4
3 Proprietà delle Operazioni Matriciali	5
4 Numeri Complessi	6
5 Teorema Fondamentale dell'Algebra	6
6 Trasformazioni Elementari e Metodo di Gauss	7

Lezione 1

Sistemi Lineari, Matrici e Numeri Complessi

1 Sistemi Lineari

1.1 Introduzione

L'obiettivo principale dell'algebra lineare è la risoluzione di **sistemi lineari**.

Definizione (Sistema Lineare)

Un sistema lineare in m equazioni e n incognite ha la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

1.2 Matrice Associata al Sistema

Definizione (Matrice Incompleta)

La **matrice incompleta** (o matrice dei coefficienti) del sistema lineare è:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Definizione (Matrice Completa)

La **matrice completa** (o matrice aumentata) include anche i termini noti:

$$(A | b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \quad (3)$$

Notazione: Per una matrice A , l'elemento $A(i, j)$ indica l'elemento in riga i e colonna j .

Esempio:

Dato il sistema:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 20 \\ x + y = 7 \end{cases} \quad (4)$$

La matrice completa è:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 20 \\ 1 & 1 & 7 \end{array} \right) \quad (5)$$

2 Operazioni tra Matrici

2.1 Somma di Matrici

Definizione (Somma di Matrici)

Date due matrici $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ di dimensione $m \times n$, la somma $A + B$ è definita come:

$$A + B \in M_{m \times n}(\mathbb{K}) \quad (6)$$

dove $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Nota: La somma è definita solo per matrici delle **stesse dimensioni**.

2.2 Moltiplicazione per uno Scalare

Definizione (Prodotto Scalare)

Data una matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ e uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\lambda \cdot A \in M_{m \times n}(\mathbb{K}) \quad (7)$$

dove $(\lambda A)_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$

Esempio:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (8)$$

2.3 Moltiplicazione tra Matrici

Definizione (Prodotto Matriciale)

Date $A \in M_{m \times k}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{k \times n}(\mathbb{K})$, il prodotto $C = A \cdot B$ è una matrice $C \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ dove:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} \cdot b_{lj} \quad (9)$$

Il numero di **colonne** di A deve essere uguale al numero di **righe** di B .

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 28 \\ 1 & 8 & 15 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}_{3 \times 3} \quad (10)$$

Calcolo elemento $(1, 1)$: $1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 4 - 1 = -1$ (*prodotto scalare riga per colonna*)

Calcolo elemento $(1, 3)$: $1 \cdot 4 + 4 \cdot 7 = 4 + 28 = 28$

3 Proprietà delle Operazioni Matriciali

3.1 Proprietà Distributiva

Date matrici $A, B \in M_{m \times k}$ e $C, D \in M_{k \times n}$:

$$(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD \quad (11)$$

3.2 Non Commutatività del Prodotto

Nota: Il prodotto tra matrici **non è commutativo**:

$$AB \neq BA \quad (12)$$

Esempio:

Date:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 14 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Quindi $AB \neq BA$.

Di conseguenza, per il quadrato di una somma:

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 \quad (15)$$

Nota: $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ perché $AB \neq BA$ in generale.

3.3 Proprietà Associativa

Il prodotto matriciale è **associativo**:

$$(AB)C = A(BC) \quad (16)$$

3.4 Altre Proprietà

- $A(BC) = AB + AC$ (distributiva a sinistra)
- $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ (associatività scalare)
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ (distributiva scalare)

3.5 Matrice Identità

Definizione (Matrice Identità)

La matrice identità $I_n \in M_{n \times n}$ ha 1 sulla diagonale principale e 0 altrove:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Proprietà: Per ogni matrice $A \in M_{m \times n}$:

$$I_m \cdot A = A = A \cdot I_n \quad (18)$$

4 Numeri Complessi

4.1 Definizione

Definizione (Insieme dei Numeri Complessi)

L'insieme dei numeri complessi è:

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\} \quad (19)$$

dove i è l'**unità immaginaria** con la proprietà:

$$i^2 = -1 \quad (20)$$

4.2 Operazioni con i Numeri Complessi

4.2.1 Somma

$$(2 + 3i) + (4 - i) = 6 + 2i \quad (21)$$

4.2.2 Prodotto

$$(2 + 3i)(4 - i) = 8 - 6i + 12i - 3i^2 = 8 + 10i - 3(-1) = 11 + 10i \quad (22)$$

4.2.3 Coniugato

Definizione (Complesso Coniugato)

Il coniugato di $z = a + bi$ è:

$$\bar{z} = a - bi \quad (23)$$

Proprietà utile:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R} \quad (24)$$

4.2.4 Divisione

Per dividere numeri complessi, si moltiplica numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore:

Esempio:

$$\frac{2 + 3i}{4 - i} = \frac{2 + 3i}{4 - i} \cdot \frac{4 + i}{4 + i} = \frac{(2 + 3i)(4 + i)}{4^2 + 1^2} = \frac{8 + 14i + 3i^2}{17} = \frac{5 + 14i}{17} \quad (25)$$

5 Teorema Fondamentale dell'Algebra

Teorema (Teorema Fondamentale dell'Algebra)

Ogni polinomio di grado n :

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (26)$$

con $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, ammette esattamente n radici complesse (contando la molteplicità delle radici).

6 Trasformazioni Elementari e Metodo di Gauss

6.1 Trasformazioni Elementari

Le seguenti operazioni **non cambiano le soluzioni** di un sistema lineare:

1. **Scambio:** Aggiungere a una equazione il multiplo di un'altra
2. **Moltiplicazione:** Moltiplicare una equazione per un numero non nullo
3. **Riordinamento:** Cambiare l'ordine delle equazioni

6.2 Metodo di Eliminazione di Gauss

Esempio:

Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases} \quad (27)$$

Matrice completa:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 8 \end{array} \right) \quad (28)$$

Passo 1: $Eq_2 \rightarrow Eq_2 - 4Eq_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -20 \end{array} \right) \quad (29)$$

Forma **ridotta per righe** (a scala, struttura a gradini)

Passo 2: $Eq_2 \rightarrow -\frac{1}{2}Eq_2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 10 \end{array} \right) \quad (30)$$

Passo 3: $Eq_1 \rightarrow Eq_1 - Eq_2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 10 \end{array} \right) \quad (31)$$

Forma **completamente ridotta** per righe

Soluzione: $(x, y) = (-3, 10)$