 Diego Emilio Dominguez Tableros

2.1 Usando eliminación con pivoteo parcial, determina cuales de los siguientes sistemas son singulares y cuales no son singulares. Para los problemas no singulares, encuentra las soluciones. Usa aritmética exacta.

a)
$$\begin{array}{rrrcr} -x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 5 \\ x_1 & +4x_2 & -3x_3 & = & -8 \\ -2x_1 & & +x_3 & = & 5 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Partimos de la representación matricial del sistema.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos las filas 1 y 3 ya que $|-2| > |-1|$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -5/2 \\ 0 & 2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

Restamos la fila 1 multiplicada por $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$ de la fila 2 y 3 respectivamente.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -5/2 \\ 0 & 0 & 7/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11/2 \\ 21/4 \end{pmatrix}$$

Restamos la fila 2 multiplicada por $\frac{1}{2}$ de la fila 3, completando la eliminación.

Finalmente, usando sustitución hacia atrás concluimos que $\boldsymbol{x_3 = 3}$, $\boldsymbol{x_2 = \frac{1}{2}}$ **y** $\boldsymbol{x_1 = -1}$.

b)
$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & -x_2 & -2x_3 & = & -1 \\ -2x_1 & -2x_2 & +4x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Partimos de la representación matricial del sistema.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos las filas 1 y 3 ya que $|3| > |1|$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 14/3 \\ 0 & -2 & -7/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}$$

Restamos la fila 1 multiplicada por $-\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$ de la fila 2 y 3 respectivamente.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -7/3 \\ 0 & 0 & 14/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4/3 \\ 14/3 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos las filas 2 y 3.

Finalmente, usando sustitución hacia atrás concluimos que $\boldsymbol{x_3 = 1}$, $\boldsymbol{x_2 = -\frac{1}{2}}$ **y** $\boldsymbol{x_1 = \frac{1}{2}}$.

$$\text{c)}\quad \begin{array}{rrrcr} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{+2x_2} & \boldsymbol{-x_3} & = & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{2x_1} & \boldsymbol{+4x_2} & \boldsymbol{+x_3} & = & \boldsymbol{7} \\ \boldsymbol{3x_1} & \boldsymbol{+6x_2} & \boldsymbol{-2x_3} & = & \boldsymbol{7} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Partimos de la representación matricial del sistema.

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos las filas 1 y 3 ya que $|3| > |1|$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 7/3 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Restamos la fila 1 multiplicada por $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$ de la fila 2 y 3 respectivamente.

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 7/3 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Tras el último paso obtuvimos que las entradas (2,2) y (3,2) son cero, no hay pivote posible para tomar, por lo tanto, la matriz es singular.

Las soluciones de este sistema son infinitas, claramente $x_3 = 1$ y si $x_2 = c$ con c una constante arbitraria, entonces $x_1 = 3 - 2c$.

$$\text{d)}\quad \begin{array}{rrrcr} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{-x_2} & \boldsymbol{+x_3} & = & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{2x_1} & \boldsymbol{+x_2} & \boldsymbol{-x_3} & = & \boldsymbol{-3} \\ \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{+2x_2} & \boldsymbol{-2x_3} & = & \boldsymbol{-2} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Partimos de la representación matricial del sistema.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos las filas 1 y 2 ya que $|2| > |1|$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & -3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Restamos la fila 1 multiplicada por $\frac{1}{2}$ de la fila 2 y 3 respectivamente.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Restamos la fila 2 multiplicada por -1 de la fila 3.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tras el último paso la entrada (3,3) es cero, provocando que toda la fila sea linealmente independiente, la matriz es singular.

Este sistema no tiene solución ya que la condición $0x_3 = 1$ no se puede satisfacer.

e)
$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = & -3 \\ 2x_1 & & -4x_3 & = & -6 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Partimos de la representación matricial del sistema.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos las filas 1 y 2 ya que $|2| > |1|$. También se pueden intercambiar 1 y 3.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3/2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Restamos la fila 1 multiplicada por $\frac{1}{2}$ y 1 de la fila 2 y 3 respectivamente.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos las filas 2 y 3 ya que $|-1| > |1/2|$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Restamos la fila 2 multiplicada por $-\frac{1}{2}$ de la fila 3.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tras el último paso la entrada (3,3) es cero, por lo que la fila 3 es linealmente independiente, la matriz es singular.

Este sistema tiene infinitas soluciones. Si $0x_3 = 0$ entonces $x_3 = c$ con c una constante arbitraria. Luego de $-x_2 - 3x_3 = -3$ tenemos $x_2 = 3 - 3c$ y finalmente de $2x_1 + x_2 - x_3 = -3$ tenemos $x_1 = 4c - 6$.

f)
$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & -3x_2 & +2x_3 & +5x_4 & = & 3 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & -3x_3 & -x_4 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Partimos de la representación matricial del sistema.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos las filas 1 y 3 ya que $|3| > |2|$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -\frac{13}{3} & \frac{2}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Restamos la fila 1 multiplicada por $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$ de la fila 1, 2 y 3 respectivamente.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{13}{3} & \frac{2}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos la fila 1 y 2 ya que $\left|-\frac{13}{3}\right| > |-\frac{5}{3}|$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{13}{3} & \frac{2}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{13} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{47}{13} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -\frac{2}{13} \\ \frac{3}{13} \end{pmatrix}$$

Restamos la fila 2 multiplicada por $\frac{5}{13}$ y $-\frac{1}{13}$ de la fila 2 y 3 respectivamente.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{13}{3} & \frac{2}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{47}{13} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{13} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ \frac{3}{13} \\ -\frac{2}{13} \end{pmatrix}$$

Intercambiamos las filas 2 y 3 ya que $\left|-\frac{47}{13}\right| > \left|\frac{1}{13}\right|$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{13}{3} & \frac{2}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{47}{13} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{47} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ \frac{3}{13} \\ -\frac{91}{481} \end{pmatrix}$$

Restamos la fila 3 multiplicada por $-\frac{1}{47}$ de la fila 4.

Finalmente, usando sustitución hacia atrás tenemos que

$$-\frac{1}{47}x_4 = -\frac{91}{481} \Longrightarrow x_4 = \frac{91}{13} \quad \therefore \boldsymbol{x_4 = 7}.$$

$$-\frac{47}{13}x_3 - x_4 = \frac{3}{13} \Longrightarrow x_3 = -\left(\frac{13}{47}\right)\left(\frac{94}{13}\right) \quad \therefore \boldsymbol{x_3 = -2}.$$

$$-\frac{13}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{13}{3}x_4 = 3 \Longrightarrow x_2 = \left(-\frac{3}{13}\right)\left(\frac{9-91+4}{3}\right) = \left(-\frac{3}{13}\right)\left(-\frac{78}{3}\right) \quad \therefore \boldsymbol{x_2 = 6}.$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \Longrightarrow x_1 = \left(\frac{1}{3}\right)(-7+4-12) = -\frac{15}{3} \quad \therefore \boldsymbol{x_1 = -5}.$$

2.2 Cuatro cargas aplicadas en una mesa de tres soportes produce el siguiente sistema para las reacciones en los soportes:

$$R_1 + R_2 + R_3 = 110.00$$
$$R_1 + R_2 = 78.33$$
$$R_2 + R_3 = 58.33$$

Resuelve para R_1, R_2 y R_3 a mano.

Aplicando eliminación con pivoteo parcial tenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110.00 \\ 78.33 \\ 58.33 \end{pmatrix}$$

Partimos de la representación matricial del sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110.00 \\ -31.67 \\ 58.33 \end{pmatrix}$$

Restamos la fila 1 multiplicada por 1 de la fila 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110.00 \\ 58.33 \\ -31.67 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos las filas 2 y 3.

Aplicando sustitución hacia atrás tenemos que

$-R_3 = -31.67 \quad \therefore \boldsymbol{R_3 = 31.67}.$

$R_2 + R_3 = 58.33 \Longrightarrow R_2 = 58.33 - 31.67 \quad \therefore \boldsymbol{R_2 = 26.66}$

$R_1 + R_2 + R_3 = 110.00 \Longrightarrow R_1 = 110.00 - 26.66 - 31.67 \quad \therefore \boldsymbol{R_1 = 51.67}$

Vale la pena mencionar que si expresamos las cantidades 110.00, 78.33 y 58.33 como 110, 7833/100 y 5833/100, el sistema resuelto con aritmética exacta proporciona las mismas soluciones.

2.4 Considera el sistema lineal

$$x_1 + 1/2\, x_2 + 1/3\, x_3 = 1$$
$$1/2\, x_1 + 1/3\, x_2 + 1/4\, x_3 = 0$$
$$1/3\, x_1 + 1/4\, x_2 + 1/5\, x_3 = 0$$

a) Resuelve el sistema usando aritmética *exacta* (cualquier método).

b) Pon el sistema en forma matricial usando representación decimal de dos dígitos truncados.

c) Resuelve el sistema de b) *sin usar* pivoteo parcial.

d) Resuelve el sistema de b) *usando* pivoteo parcial.

e) Resuelve el sistema de b) usando aritmética exacta.

a) Usando eliminación con pivoteo parcial

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Partimos de la representación matricial del sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Restamos la fila 1 multiplicada por $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ de las filas 2 y 3 respectivamente.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Restamos la fila 2 multiplicada por 1 de la fila 3.

Aplicando sustitución hacia atrás obtenemos

$$\frac{1}{180}x_3 = \frac{1}{6} \therefore \boldsymbol{x_3 = 30}$$
$$\frac{1}{12}x_2 + \frac{1}{12}x_3 = -\frac{1}{2} \therefore \boldsymbol{x_2 = -36}$$
$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 1 \therefore \boldsymbol{x_1 = 9}$$

b) Expresando las fracciones como decimales con truncamiento a dos dígitos se obtiene la representación matricial dada por

$$\begin{pmatrix} 1.00 & 0.50 & 0.33 \\ 0.50 & 0.33 & 0.25 \\ 0.33 & 0.25 & 0.20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{pmatrix}$$

c) Resolviendo, usando eliminación sin pivoteo parcial

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.50 & 0.33 \\ 0.50 & 0.33 & 0.25 \\ 0.33 & 0.25 & 0.20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Partimos de la representación matricial del sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.50 & 0.33 \\ 0 & 0.08 & 0.085 \\ 0 & 0.085 & 0.0911 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -0.33 \end{pmatrix}$$

Restamos la fila 1 multiplicada por 0.5 y 0.33 de las filas 2 y 3 respectivamente.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.50 & 0.33 \\ 0 & 0.08 & 0.085 \\ 0 & 0 & 0.0007875 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \\ 0.20125 \end{pmatrix}$$

Restamos la fila 2 multiplicada por 1.0625 de la fila 3.

Aplicando sustitución hacia atrás obtenemos

$$\begin{aligned} &0.0007875x_3 = 0.20125 \therefore \boldsymbol{x_3 = 255.\overline{5}} \\ &0.08x_2 + 0.085x_3 = -0.5 \therefore \boldsymbol{x_2 = -277.\overline{7}} \\ &x_1 + 0.5x_2 + 0.33x_3 = 1 \therefore \boldsymbol{x_1 = 55.\overline{5}} \end{aligned}$$

Claramente las soluciones obtenidas difieren de las exactas del inciso a). Veamos que, por ejemplo, para una expansión decimal a 7 dígitos se obtiene que para la primera ecuación

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 255.5555555 - \frac{1}{2}277.7777777 + \frac{1}{3}55.5555555 = 0.999999965 \neq 1$$

La misma situación se obtiene para las otras dos ecuaciones, concluyendo que los valores obtenidos no son soluciones del sistema.

d) Resolviendo, usando eliminación con pivoteo parcial

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.50 & 0.33 \\ 0.50 & 0.33 & 0.25 \\ 0.33 & 0.25 & 0.20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Partimos de la representación matricial del sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.50 & 0.33 \\ 0 & 0.08 & 0.085 \\ 0 & 0.085 & 0.0911 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -0.33 \end{pmatrix}$$

Restamos la fila 1 multiplicada por 0.5 y 0.33 de las filas 2 y 3 respectivamente.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.50 & 0.33 \\ 0 & 0.085 & 0.0911 \\ 0 & 0.08 & 0.085 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.33 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

Intercambiamos las filas 2 y 3 ya que $|0.085| > |0.08|$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.50 & 0.33 \\ 0 & 0.085 & 0.0911 \\ 0 & 0 & -0.0007411 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.33 \\ -0.5857411 \end{pmatrix}$$

Restamos la fila 2 multiplicada por $\frac{0.08}{0.085}$ de la fila 3.

Aplicando sustitución hacia atrás obtenemos

$$-0.0007411x_3 = -0.5857411 \therefore \boldsymbol{x_3} \approx \mathbf{790.285}$$
$$0.085x_2 + 0.0911x_3 = -0.33 \therefore \boldsymbol{x_2} \approx \mathbf{-8754.45}$$
$$x_1 + 0.5x_2 + 0.33x_3 = 1 \therefore \boldsymbol{x_1} \approx \mathbf{4117.431}$$

Estas soluciones difieren mucho más (en comparación al inciso anterior) de las exactas obtenidas en el inciso a) y obtenemos una situación parecida a la del inciso anterior, al tratar de verificar las ecuaciones del sistema encontramos que difieren en poca medida del resultado correcto.

e) Resolviendo, usando aritmética exacta y eliminación con pivoteo parcial

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.50 & 0.33 \\ 0.50 & 0.33 & 0.25 \\ 0.33 & 0.25 & 0.20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Partimos de la representación matricial del sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{33}{100} \\ \frac{1}{2} & \frac{33}{100} & \frac{1}{4} \\ \frac{33}{100} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Expresamos como fracciones convenientemente para efectuar aritmética exacta.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{33}{100} \\ 0 & \frac{2}{25} & \frac{17}{200} \\ 0 & \frac{17}{200} & \frac{911}{10000} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{33}{100} \end{pmatrix}$$

Restamos la fila 1 multiplicada por $\frac{1}{2}$ y $\frac{33}{100}$ de las filas 2 y 3 respectivamente.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{33}{100} \\ 0 & \frac{17}{200} & \frac{911}{10000} \\ 0 & \frac{2}{25} & \frac{17}{200} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{33}{100} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Intercambiamos las filas 2 y 3 ya que $\left|\frac{17}{200}\right| > \left|\frac{2}{25}\right|$.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{33}{100} \\ 0 & \frac{17}{200} & \frac{911}{10000} \\ 0 & 0 & \frac{-63}{85000} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{33}{100} \\ -\frac{161}{850} \end{pmatrix}$$

Restamos la fila 2 multiplicada por $\frac{16}{17}$ a la fila 3.

Usando sustitución hacia atrás obtenemos

$$-\frac{63}{85000}x_3 = -\frac{161}{850} \quad \therefore \boldsymbol{x_3} = \frac{\mathbf{2300}}{\mathbf{9}} = \mathbf{255.\overline{5}}$$
$$\frac{17}{200}x_2 + \frac{911}{10000}x_3 = -\frac{33}{100} \quad \therefore \boldsymbol{x_2} = -\frac{\mathbf{2500}}{\mathbf{9}} = \mathbf{-277.\overline{7}}$$
$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{33}{100}x_3 = 1 \quad \therefore \boldsymbol{x_3} = \frac{\mathbf{500}}{\mathbf{9}} = \mathbf{55.\overline{5}}$$

Este comportamiento en los valores obtenidos (incluyendo los incisos c), d) y e)) se debe al truncamiento a dos dígitos de la expansión de las fracciones originales, de hecho, principalmente a la de 1/3 ya que claramente su expansión decimal es periódica e infinita.

Al haber truncado 1/3 tenemos otro sistema completamente distinto cuya solución es la mostrada en e), sin embargo, es interesante ver que la solución con aritmética de punto flotante del inciso c) coincide con la de aritmética exacta a pesar de no hacer pivoteo parcial, aún más interesante es ver que la solución con el pivoteo parcial d) es incorrecta para es nuevo sistema, por lo que concluimos que el método de pivoteo debe realizarse con más cuidado para este tipo de sistemas especiales.

2.5 Encuentra las matrices L y U de la descomposición LU (sin pivoteo) para las matrices de coeficientes

a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

Recordemos que la descomposición LU se puede obtener con la eliminación con o sin pivoteo parcial. Sin pivoteo parcial no es necesario añadir ninguna matriz de permutación, por lo que verificaremos que, si A es la matriz por descomponer, entonces $A = LU$. Tomando en cuenta el algoritmo de eliminación:

- L está formada por elementos 1 en su diagonal principal y por los *multiplicadores* del algoritmo de eliminación, i.e. los factores de multiplicación de un determinado renglón para eliminar entradas por debajo de él. Se señalan sus elementos con color azul.
- U está formada por los elementos remanentes del proceso de eliminación tras la resta de los múltiplos de renglones subsecuentes. Se señalan sus elementos con color rojo.

a)

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Partimos de la matriz original A.

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Restamos la fila 1 multiplicada por -1 de la fila 2. La entrada (2,1) es cero.

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ Restamos la fila 1 multiplicada por 2 de la fila 2. La entrada (3,1) es cero.

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & -2 \\ 2 & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$ Restamos la fila 2 multiplicada por $-\frac{2}{3}$ de la fila 3. La entrada (3,2) es cero.

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & -2 \\ 2 & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$ Descomposición finalizada.

Tenemos que $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Se verifica que $A = LU$.

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$ Partimos de la matriz original A.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$ Restamos la fila 1 multiplicada por -2 de la fila 2. La entrada (2,1) es cero.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$ Restamos la fila 1 multiplicada por 3 de la fila 2. La entrada (3,1) es cero.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & -\frac{3}{2} & 7 \end{pmatrix}$$ Restamos la fila 2 multiplicada por $-\frac{3}{2}$ de la fila 3. La entrada (3,2) es cero.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & -\frac{3}{2} & 7 \end{pmatrix}$$ Descomposición finalizada.

Tenemos que $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Se verifica que $A = LU$.

c)

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$ Partimos de la matriz original A.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{13}{2} & -1 & -\frac{13}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -4 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$ Restamos la fila 1 multiplicada por $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ y $\frac{1}{2}$ de la fila 2, 3 y 4 respectivamente. Las entradas (2,1), (3,1) y (4,1) son cero.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 13 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Restamos la fila 2 multiplicada por 13 y 5 de la fila 3 y 4. Las entradas (3,2) y (4,2) son cero.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 13 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Restamos la fila 3 multiplicada por 4 de la fila 4. La entrada (4,3) es cero.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 13 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Descomposición finalizada.

Tenemos que $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 13 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Se verifica que $A = LU$.

2.7 Para el sistema lineal $\begin{pmatrix} 0.461 & 0.311 \\ 0.209 & 0.141 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.150 \\ 0.068 \end{pmatrix}$ denotado por $Ax = b$ sean $y = \begin{pmatrix} 0.999 \\ -1.001 \end{pmatrix}$ y $z = \begin{pmatrix} 0.463 \\ -0.204 \end{pmatrix}$. En aritmética exacta, calcula los residuales $r = b - Ay$ y $s = b - Az$. ¿Tiene la mejor aproximación el menor residual?

- Residual r

$$r = b - Ay = \begin{pmatrix} 0.150 \\ 0.068 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.461 & 0.311 \\ 0.209 & 0.141 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.999 \\ -1.001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.150 \\ 0.068 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.149228 \\ 0.06765 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000772 \\ 0.00035 \end{pmatrix}$$

- Residual s

$$s = b - Az = \begin{pmatrix} 0.150 \\ 0.068 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.461 & 0.311 \\ 0.209 & 0.141 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.463 \\ -0.204 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.150 \\ 0.068 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.149999 \\ 0.068003 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000001 \\ -0.000003 \end{pmatrix}$$

La norma (utilizando la norma euclidiana) del residual r es

$$\|r\| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = 8.4763 \times 10^{-4}$$

Mientras que la norma del residual s es

$$\|s\| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = 3.1622 \times 10^{-6}$$

Podemos decir que de nuestro sistema original $Ax = b$ tenemos soluciones de dos sistemas de la forma $Ay = b + r$ y $Az = b + s$, de modo que la mejor aproximación a la solución del sistema es aquella que tenga un menor residual ya que entonces es solución de un sistema muy cercano al requerido, por lo tanto, una mejor aproximación de solución al sistema es $z = \begin{pmatrix} 0.463 \\ -0.204 \end{pmatrix}$.