6.1 As an example of nonuniqueness of solutions, verify that for any constant $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{0 < c < b}$, the function $\boldsymbol{y(x)}$ defined by

$$\boldsymbol{y(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le c \\ \frac{1}{4}(x-c)^2 & c < x \le b \end{cases}}$$

Is a solution of the initial value problem $\boldsymbol{y' = \sqrt{|y|}}$, $\boldsymbol{y(0) = 0}$.

Es claro que $y(0) = 0$. Veamos que $y'(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le c \\ \frac{1}{2}(x-c) & c < x \le b \end{cases}$ por lo que $\left(y'(x)\right)^2 = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le c \\ \frac{1}{4}(x-c)^2 & c < x \le b \end{cases}$. El problema de valor inicial dado es $y'(x) = \sqrt{|y|}$, elevando al cuadrado tenemos $\left(y'(x)\right)^2 = |y|$, pero $\left(y(x)\right)^2 = |y(x)| = y(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le c \\ \frac{1}{4}(x-c)^2 & c < x \le b \end{cases}$, por lo tanto se satisface el problema de valor inicial.

6.2 Consider the problem $\boldsymbol{y' = \sqrt{|1-y^2|}}$, $\boldsymbol{y(0) = 1}$. Verify

a) **$\boldsymbol{y(x) = 1}$ is a solution on any interval containing $\boldsymbol{x = 0}$.**
b) **$\boldsymbol{y(x) = \cosh x}$ is a solution on $\boldsymbol{[0, b]}$ for any $\boldsymbol{b > 0}$**
c) **$\boldsymbol{y(x) = \cos x}$ is a solution on a suitable interval. What is the largest interval containing $\boldsymbol{x = 0}$ on which $\boldsymbol{\cos x}$ is a solution?**

a) Tomemos $y(x) = 1$. Claramente $y(0) = 1$. Como $y'(x) = 0$ verifiquemos que
$$y'(x) = 0 = \sqrt{|1-y^2|} = \sqrt{|1-1|} = 0$$
Por lo tanto, se satisface el problema de valor inicial.

b) Tomemos $y(x) = \cosh x$. Claramente $y(0) = 1$. Como $y'(x) = \sinh x$ verifiquemos que
$$y'(x) = \sinh x = \sqrt{|1-\cosh^2 x|} = \sqrt{|-\sinh^2 x|} = \sqrt{\sinh^2 x} = \sinh x$$
Por lo tanto, se satisface el problema de valor inicial, en particular en $[0, b]$ con $b > 0$.

c) Tomemos $y(x) = \cos x$. Claramente $y(0) = 1$. Como $y'(x) = -\sin x$ verifiquemos que
$$y'(x) = -\sin x = \sqrt{|1-\cos^2 x|} = \sqrt{|\sin^2 x|} \ge 0$$
Entonces necesariamente $-\sin x \ge 0$ por lo que $\sin x \le 0$, lo cual solo es cierto si $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi], k \in \mathbb{Z}$ pero en particular solo $[-\pi, 0]$, por lo que este es el intervalo solución.
Por lo tanto, además de que $[-\pi, 0]$ es el intervalo solución, también es el más grande que contiene a $x = 0$.

6.4 For each initial value problem, verify that the given $y(x)$ is a solution.

a) $y'(x) = -\frac{1}{2}y^3, y(0) = 1; y(x) = 1/\sqrt{1+x}$

b) $y'(x) = -2xy^2, y(0) = 1; y(x) = 1/(1+x^2)$

a) Claramente $y(0) = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = \frac{1}{1} = 1$ y además $y'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)' = -\frac{1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$, misma que es continua en $x = -1$.
Verifiquemos que

$$y'(x) = -\frac{1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2}y^3 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^3 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\right) = -\frac{1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$$

Por lo tanto, $y(x)$ es solución al problema.

b) Claramente $y(0) = \frac{1}{1+0^2} = \frac{1}{1} = 1$ y además $y'(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, que es continua en toda la recta real.
Verifiquemos que

$$y'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} = -2xy^2 = -2x\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

Por lo tanto, $y(x)$ es solución al problema.

6.6 Verify for each of the following systems of equations

a) $\boldsymbol{Y_1' = Y_2, Y_2' = -x^2 Y_1 - x Y_2}$

c) $\boldsymbol{Y_1' = -\left(\frac{x}{2}\right) Y_1 + Y_2, Y_2' = \left(\frac{1}{2} - \frac{3x^2}{4}\right) Y_1 - \left(\frac{x}{2}\right) Y_2}$

That $\boldsymbol{Y_1(x) = y(x)}$, where $\boldsymbol{y(x)}$ satisfies the second order equation

$$\boldsymbol{y''(x) + xy'(x) + x^2 y(x) = 0}$$

a) Si $Y_1(x) = y(x)$ entonces $Y_1'(x) = y'(x)$
Lo que implica $Y_1'(x) = Y_2(x) = y'(x)$
Luego $Y_2'(x) = y''(x) = -x^2 Y_1 - x Y_2 = -x^2 y(x) - xy'(x)$

Concluyendo $\boldsymbol{y''(x) + xy'(x) + x^2 y(x) = 0}$

c) Si $Y_1(x) = y(x)$ entonces $Y_1'(x) = y'(x) = -\left(\frac{x}{2}\right) y(x) + Y_2$
Lo que implica $\boldsymbol{Y_2(x) = y'(x) + \left(\frac{x}{2}\right) y(x)}$.

Luego $Y_2'(x) = \left(y'(x) + \left(\frac{x}{2}\right) y(x)\right)' = y''(x) + \frac{1}{2} y(x) + \frac{x}{2} y'(x)$
Pero también $Y_2'(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{3x^2}{4}\right) y(x) - \left(\frac{x}{2}\right)\left(y'(x) + \left(\frac{x}{2}\right) y(x)\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{3x^2}{4}\right) y(x) - \left(\frac{x}{2}\right) y'(x) - \left(\frac{x^2}{4}\right) y(x)$

Igualando ambas expresiones obtenemos $\left(\frac{1}{2} - \frac{3x^2}{4}\right) y(x) - \left(\frac{x}{2}\right) y'(x) - \left(\frac{x^2}{4}\right) y(x) - y''(x) - \frac{1}{2} y(x) - \frac{x}{2} y'(x) = 0$
Luego $\left(\frac{1}{2} - \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\right) y(x) - \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) y'(x) - y''(x) = 0$
Por lo tanto $-x^2 y(x) - xy'(x) - y''(x) = 0$

Concluyendo $\boldsymbol{y''(x) + xy'(x) + x^2 y(x) = 0}$

6.7 Put the following problems in standard form. Differentiation is with respect to t.

a) $u^{(4)} + e^t u' - tu = \cos \alpha t$

c) $u'' + 3v' + 4u + v = 8t$
$u'' - v' + u + v = \cos t$

e) $u^{(6)} + uu' = e^t$

a) A partir de $u^{(4)} + e^t u' - tu = \cos \alpha t$, apliquemos las sustituciones $U_1(t) = u(t)$, $U_2(t) = U_1'(t), U_3(t) = U_2'(t), U_4(t) = U_3'(t)$ para obtener el sistema

$$\begin{aligned} U_2 &= U_1' \\ U_3 &= U_2' \\ U_4 &= U_3' \\ U_4 + e^t U_2 - tU_1 &= \cos \alpha t \end{aligned}$$

c) A partir de $u'' + 3v' + 4u + v = 8t$, apliquemos las sustituciones $U_1(t) = u(t)$, $U_2(t) = U_1'(t), U_3(t) = U_2'(t), V_1(t) = v(t), V_2(t) = V_1'(t)$ para obtener el sistema

$$\begin{aligned} U_2 &= U_1' \\ U_3 &= U_2' \\ V_2 &= V_1' \\ U_3 + 3V_2 + 4U_1 + V_1 &= 8t \end{aligned}$$

Y para $u'' - v' + u + v = \cos t$, con las mismas sustituciones obtenemos

$$U_3 - V_2 + U_1 + V_1 = \cos t$$

Juntándolas, obtenemos el sistema de EDO consistente con el sistema original.

e) A partir de $u^{(6)} + uu' = e^t$ apliquemos las sustituciones $U_1(t) = u(t)$, $U_2(t) = U_1'(t)$, $U_3(t) = U_2'(t)$, $U_4(t) = U_3'(t)$, $U_5(t) = U_4'(t)$, $U_6(t) = U_5'(t)$, $U_7(t) = U_6'(t)$ para obtener el sistema

$$\begin{aligned} U_2 &= U_1' \\ U_3 &= U_2' \\ U_4 &= U_3' \\ U_5 &= U_4' \\ U_6 &= U_5' \\ U_7 &= U_6' \\ U_7 + U_1 U_2 &= e^t \end{aligned}$$

6.8 Use Euler's method on the following problems using a fixed step size h = 1.0, and then h = 0.5. In each case calculate the errors at x = 1.0.

a) $y' = -\frac{y}{x+1}$ **with** $y(0) = 1$**, so** $y(x) = \frac{1}{x+1}$

b) $y' = -\frac{y^3}{2}$ **with** $y(0) = 1$**, so** $y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

Para ambos incisos se creó un script en Matlab para implementar el método de Euler que además calcula el error cometido ya que se da la solución a la ecuación diferencial.

a) El método de Euler obtiene los siguientes resultados para $h = 0.1$ y $h = 0.5$

```
Command Window
>> ejercicio_6_8a
Método de Euler con tamaño de paso 0.100000
     x_n        y_n        y(x_n)     |y_n-y(x_n)|
          0     1.0000     1.0000          0
     0.1000     0.9000     0.9091     0.0091
     0.2000     0.8182     0.8333     0.0152
     0.3000     0.7500     0.7692     0.0192
     0.4000     0.6923     0.7143     0.0220
     0.5000     0.6429     0.6667     0.0238
     0.6000     0.6000     0.6250     0.0250
     0.7000     0.5625     0.5882     0.0257
     0.8000     0.5294     0.5556     0.0261
     0.9000     0.5000     0.5263     0.0263
     1.0000     0.4737     0.5000     0.0263
     1.1000     0.4500     0.4762     0.0262
     1.2000     0.4286     0.4545     0.0260
     1.3000     0.4091     0.4348     0.0257
     1.4000     0.3913     0.4167     0.0254
     1.5000     0.3750     0.4000     0.0250
     1.6000     0.3600     0.3846     0.0246
     1.7000     0.3462     0.3704     0.0242
     1.8000     0.3333     0.3571     0.0238
     1.9000     0.3214     0.3448     0.0234
     2.0000     0.3103     0.3333     0.0230
```

```
Command Window
>> ejercicio_6_8a
Método de Euler con tamaño de paso 0.500000
     x_n        y_n        y(x_n)     |y_n-y(x_n)|
          0     1.0000     1.0000          0
     0.5000     0.5000     0.6667     0.1667
     1.0000     0.3333     0.5000     0.1667
     1.5000     0.2500     0.4000     0.1500
     2.0000     0.2000     0.3333     0.1333
```

```
%Función de la EDO y'=f(x,y)
f=@(x,y) -y./(x+1);
%Función solución y
y=@(x) 1./(x+1);

%Tamaño de paso (ESCRIBIR)
h=0.5;
%Límites del método y número de iteraciones
a=0; b=2; n=(b-a)/h;
%Tabla de valores del método
sol=zeros(n+1,2);
%Valores iniciales (x0,y0)
sol(1,1)=0; sol(1,2)=1;
sol(:,1)=a:h:b;
%Método de Euler
for k=2:n+1
    %Calculamos yk con los anteriores
    %yk=x_{k-1}+h*f(x_{k-1},y_{k-1});
    sol(k,2)=sol(k-1,2)+h*f(sol(k-1,1),sol(k-1,2));
end
%Cálculo de los valores reales
sol_real=y(sol(:,1));
%Errores
error=abs(sol(:,2)-sol_real);
sol=[sol,sol_real,error];
%Impresiones y graficación
fprintf('Método de Euler con tamaño de paso %f\n',h);
disp('    x_n       y_n       y(x_n)    |y_n-y(x_n)|');
disp(sol);
```

b) El método de Euler obtiene los siguientes resultados para $h = 0.1$ y $h = 0.5$

```
Command Window
>> ejercicio_6_8b
Método de Euler con tamaño de paso 0.100000
    x_n        y_n        y(x_n)     |y_n-y(x_n)|
         0    1.0000    1.0000          0
    0.1000    0.9500    0.9535    0.0035
    0.2000    0.9071    0.9129    0.0057
    0.3000    0.8698    0.8771    0.0073
    0.4000    0.8369    0.8452    0.0082
    0.5000    0.8076    0.8165    0.0089
    0.6000    0.7813    0.7906    0.0093
    0.7000    0.7574    0.7670    0.0095
    0.8000    0.7357    0.7454    0.0097
    0.9000    0.7158    0.7255    0.0097
    1.0000    0.6974    0.7071    0.0097
    1.1000    0.6805    0.6901    0.0096
    1.2000    0.6647    0.6742    0.0095
    1.3000    0.6500    0.6594    0.0093
    1.4000    0.6363    0.6455    0.0092
    1.5000    0.6234    0.6325    0.0090
    1.6000    0.6113    0.6202    0.0089
    1.7000    0.5999    0.6086    0.0087
    1.8000    0.5891    0.5976    0.0085
    1.9000    0.5789    0.5872    0.0083
    2.0000    0.5692    0.5774    0.0082
```

```
Command Window
>> ejercicio_6_8b
Método de Euler con tamaño de paso 0.500000
    x_n        y_n        y(x_n)     |y_n-y(x_n)|
         0    1.0000    1.0000          0
    0.5000    0.7500    0.8165    0.0665
    1.0000    0.6445    0.7071    0.0626
    1.5000    0.5776    0.6325    0.0549
    2.0000    0.5294    0.5774    0.0479
```

```
%Función de la EDO y'=f(x,y)
f=@(x,y) -(y.^3)./2;
%Función solución y
y=@(x) 1./sqrt(1+x);

%Tamaño de paso (ESCRIBIR)
h=0.5;
%Límites del método y número de iteraciones
a=0; b=2; n=(b-a)/h;
%Tabla de valores del método
sol=zeros(n+1,2);
%Valores iniciales (x0,y0)
sol(1,1)=0; sol(1,2)=1;
sol(:,1)=a:h:b;
%Método de Euler
for k=2:n+1
    %Calculamos yk con los anteriores
    %yk=x_{k-1}+h*f(x_{k-1},y_{k-1});
    sol(k,2)=sol(k-1,2)+h*f(sol(k-1,1),sol(k-1,2));
end
%Cálculo de los valores reales
sol_real=y(sol(:,1));
%Errores
error=abs(sol(:,2)-sol_real);
sol=[sol,sol_real,error];
%Impresiones y graficación
fprintf('Método de Euler con tamaño de paso %f\n',h);
disp('    x_n       y_n       y(x_n)    |y_n-y(x_n)|');
disp(sol);
```

6.9 Implement Euler's method to estimate solutions of the initial value problem in Exercise 6.8b. Use $h = 1/40$ and $h = 1/80$. Compute the errors at $x = 0.5$ and $x = 1.0$ to see if they are roughly halved as h is. How small an h would you estimate is needed in order for the absolute error to be less than 10^{-6} in magnitude?

Se aplicó el mismo programa desarrollado anteriormente, pero cambiando el tamaño de paso.

```
Command Window
>> ejercicio_6_9
Método de Euler con tamaño de paso 0.025000
    x_n       y_n       y(x_n)    |y_n-y(x_n)|
         0    1.0000    1.0000         0
    0.0250    0.9875    0.9877    0.0002
    0.0500    0.9755    0.9759    0.0004
    0.0750    0.9639    0.9645    0.0006
    0.1000    0.9527    0.9535    0.0008
    0.1250    0.9419    0.9428    0.0009
    0.1500    0.9314    0.9325    0.0011
    0.1750    0.9213    0.9225    0.0012
    0.2000    0.9115    0.9129    0.0013
    0.2250    0.9021    0.9035    0.0014
    0.2500    0.8929    0.8944    0.0015
    0.2750    0.8840    0.8856    0.0016
    0.3000    0.8754    0.8771    0.0017
    0.3250    0.8670    0.8687    0.0018
    0.3500    0.8588    0.8607    0.0018
    0.3750    0.8509    0.8528    0.0019
    0.4000    0.8432    0.8452    0.0019
    0.4250    0.8357    0.8377    0.0020
    0.4500    0.8284    0.8305    0.0020
    0.4750    0.8213    0.8234    0.0021
    0.5000    0.8144    0.8165    0.0021
    0.5250    0.8076    0.8098    0.0021
    0.5500    0.8011    0.8032    0.0022
    0.5750    0.7946    0.7968    0.0022
    0.6000    0.7884    0.7906    0.0022
    0.6250    0.7822    0.7845    0.0022
    0.6500    0.7762    0.7785    0.0022
    0.6750    0.7704    0.7727    0.0023
    0.7000    0.7647    0.7670    0.0023
    0.7250    0.7591    0.7614    0.0023
    0.7500    0.7536    0.7559    0.0023
    0.7750    0.7483    0.7506    0.0023
    0.8000    0.7430    0.7454    0.0023
    0.8250    0.7379    0.7402    0.0023
    0.8500    0.7329    0.7352    0.0023
    0.8750    0.7280    0.7303    0.0023
    0.9000    0.7231    0.7255    0.0023
    0.9250    0.7184    0.7207    0.0023
    0.9500    0.7138    0.7161    0.0023
    0.9750    0.7092    0.7116    0.0023
    1.0000    0.7048    0.7071    0.0023
```

```
Command Window
>> ejercicio_6_9
Método de Euler con tamaño de paso 0.012500
    x_n       y_n       y(x_n)    |y_n-y(x_n)|
         0    1.0000    1.0000         0
    0.0125    0.9938    0.9938    0.0001
    0.0250    0.9876    0.9877    0.0001
    0.0375    0.9816    0.9818    0.0002
    0.0500    0.9757    0.9759    0.0002
    0.0625    0.9699    0.9701    0.0003
    0.0750    0.9642    0.9645    0.0003
    0.0875    0.9586    0.9589    0.0004
    0.1000    0.9531    0.9535    0.0004
    0.1125    0.9477    0.9481    0.0004
    0.1250    0.9423    0.9428    0.0005
    0.1375    0.9371    0.9376    0.0005
    0.1500    0.9320    0.9325    0.0005
    0.1625    0.9269    0.9275    0.0006
    0.1750    0.9219    0.9225    0.0006
    0.1875    0.9170    0.9177    0.0006
    0.2000    0.9122    0.9129    0.0007
    0.2125    0.9075    0.9082    0.0007
    0.2250    0.9028    0.9035    0.0007
    0.2375    0.8982    0.8989    0.0007
    0.2500    0.8937    0.8944    0.0008
    0.2625    0.8892    0.8900    0.0008
    0.2750    0.8848    0.8856    0.0008
    0.2875    0.8805    0.8813    0.0008
    0.3000    0.8762    0.8771    0.0008
    0.3125    0.8720    0.8729    0.0009
    0.3250    0.8679    0.8687    0.0009
    0.3375    0.8638    0.8647    0.0009
    0.3500    0.8598    0.8607    0.0009
    0.3625    0.8558    0.8567    0.0009
    0.3750    0.8519    0.8528    0.0009
    0.3875    0.8480    0.8490    0.0009
    0.4000    0.8442    0.8452    0.0010
    0.4125    0.8404    0.8414    0.0010
    0.4250    0.8367    0.8377    0.0010
    0.4375    0.8331    0.8341    0.0010
    0.4500    0.8294    0.8305    0.0010
    0.4625    0.8259    0.8269    0.0010
    0.4750    0.8224    0.8234    0.0010
    0.4875    0.8189    0.8199    0.0010
    0.5000    0.8155    0.8165    0.0010
    0.5125    0.8121    0.8131    0.0011
    0.5250    0.8087    0.8098    0.0011
    0.5375    0.8054    0.8065    0.0011
    0.5500    0.8021    0.8032    0.0011
    0.5625    0.7989    0.8000    0.0011
    0.5750    0.7957    0.7968    0.0011
    0.5875    0.7926    0.7937    0.0011
    0.6000    0.7895    0.7906    0.0011
    0.6125    0.7864    0.7875    0.0011
    0.6250    0.7834    0.7845    0.0011
    0.6375    0.7804    0.7815    0.0011
    0.6500    0.7774    0.7785    0.0011
```

```
    0.6625    0.7744    0.7756    0.0011
    0.6750    0.7715    0.7727    0.0011
    0.6875    0.7687    0.7698    0.0011
    0.7000    0.7658    0.7670    0.0011
    0.7125    0.7630    0.7642    0.0011
    0.7250    0.7603    0.7614    0.0011
    0.7375    0.7575    0.7586    0.0011
    0.7500    0.7548    0.7559    0.0011
    0.7625    0.7521    0.7532    0.0011
    0.7750    0.7494    0.7506    0.0011
    0.7875    0.7468    0.7480    0.0011
    0.8000    0.7442    0.7454    0.0011
    0.8125    0.7416    0.7428    0.0012
    0.8250    0.7391    0.7402    0.0012
    0.8375    0.7366    0.7377    0.0012
    0.8500    0.7341    0.7352    0.0012
    0.8625    0.7316    0.7327    0.0012
    0.8750    0.7291    0.7303    0.0012
    0.8875    0.7267    0.7279    0.0012
    0.9000    0.7243    0.7255    0.0012
    0.9125    0.7219    0.7231    0.0012
    0.9250    0.7196    0.7207    0.0012
    0.9375    0.7173    0.7184    0.0012
    0.9500    0.7150    0.7161    0.0012
    0.9625    0.7127    0.7138    0.0012
    0.9750    0.7104    0.7116    0.0012
    0.9875    0.7082    0.7093    0.0012
    1.0000    0.7060    0.7071    0.0012
```

```
%Función de la EDO y'=f(x,y)
f=@(x,y) -(y.^3)./2;
%Función solución y
y=@(x) 1./sqrt(1+x);
%Tamaño de paso (ESCRIBIR)
h=1/80;
%Límites del método y número de iteraciones
a=0; b=1; n=(b-a)/h;
%Tabla de valores del método
sol=zeros(n+1,2);
%Valores iniciales (x0,y0)
sol(1,1)=0; sol(1,2)=1;
sol(:,1)=a:h:b;
%Método de Euler
for k=2:n+1
    %Calculamos yk con los anteriores
    %yk=x_{k-1}+h*f(x_{k-1},y_{k-1});
    sol(k,2)=sol(k-1,2)+h*f(sol(k-1,1),sol(k-1,2));
end
%Cálculo de los valores reales
sol_real=y(sol(:,1));
%Errores
error=abs(sol(:,2)-sol_real);
sol=[sol,sol_real,error];
%Impresiones y graficación
fprintf('Método de Euler con tamaño de paso %f\n',h);
disp('    x_n       y_n       y(x_n)    |y_n-y(x_n)|');
disp(sol);
```