

3.37 The formula

$$Q(x, y) = f_{11} \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \right) \left(\frac{y - y_2}{y_1 - y_2} \right) + f_{12} \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \right) \left(\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \right) \\ + f_{21} \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) \left(\frac{y - y_2}{y_1 - y_2} \right) + f_{22} \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) \left(\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \right)$$

could be called a Lagrange form of the bilinear interpolating polynomial; consider the *Newton form*

$$Q(x, y) = a + b(x - x_1) + c(y - y_1) + d(x - x_1)(y - y_1)$$

Solve for a, b, c, d so that Q interpolates a function $f(x, y)$ at the four corners. As in the first formula, let $f_{ij} = f(x_i, y_i)$.

Consideremos el rectángulo con esquinas (x_1, y_1) , (x_1, y_2) , (x_2, y_1) y (x_2, y_2) , sus imágenes bajo f serán denotadas por f_{11} , f_{12} , f_{21} y f_{22} respectivamente.

Aplicando la condición de interpolación a $Q(x, y)$ en la forma de Newton obtenemos ecuaciones para obtener los valores de a, b, c, d :

- $Q(x_1, y_1) = f_{11} = a + b(x_1 - x_1) + c(y_1 - y_1) + d(x_1 - x_1)(y_1 - y_1) = a + 0 + 0 + 0$
Por lo tanto

$$a = f_{11}$$

- $Q(x_1, y_2) = f_{12} = a + b(x_1 - x_1) + c(y_2 - y_1) + d(x_1 - x_1)(y_2 - y_1) = a + 0 + c(y_2 - y_1) + 0$
Luego $c = \frac{f_{12} - a}{y_2 - y_1}$, pero $a = f_{11}$ por lo tanto

$$c = \frac{f_{12} - f_{11}}{y_2 - y_1}$$

- $Q(x_2, y_1) = f_{21} = a + b(x_2 - x_1) + c(y_1 - y_1) + d(x_2 - x_1)(y_1 - y_1) = a + b(x_2 - x_1) + 0 + 0$
Luego $b = \frac{f_{21} - a}{x_2 - x_1}$, pero $a = f_{11}$ por lo tanto

$$b = \frac{f_{21} - f_{11}}{x_2 - x_1}$$

- $Q(x_2, y_2) = f_{22} = a + b(x_2 - x_1) + c(y_2 - y_1) + d(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$
Luego $d = \frac{f_{22} - a - b(x_2 - x_1) - c(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}$, pero $a = f_{11}$, $b = \frac{f_{21} - f_{11}}{x_2 - x_1}$, $c = \frac{f_{12} - f_{11}}{y_2 - y_1}$
Por lo tanto

$$d = \frac{f_{22} + f_{11} - f_{12} - f_{21}}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}$$

3.38 Show that $Q(x, y)$, which is a quadratic polynomial in x and y [generalizing (3.50)], has six coefficients. On a triangle, its interpolating points are usually chosen to be the three triangle vertices and the three edge midpoints. For the triangle with vertices $(0, 0)$, $(1, 0)$, and $(0, 1)$ compute the shape function that is one at $(0, 0)$ and zero at the remaining five interpolating points.

En un triángulo general con los puntos medios entre cada lado y los vértices tenemos un total de seis puntos $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^6$ cuyas imágenes bajo la función a interpolar son $\{f_i\}_{i=1}^6$.

El polinomio interpolante $Q(x, y) = \sum_{i=1}^6 \Phi_i(x, y)f_i$ puede tener un grado arbitrario en cada uno de sus términos (es decir, en cada función de forma $\Phi_i(x, y)$ ya que ésta es un polinomio en dos variables) tanto en x como en y , sin embargo, para los seis puntos que estamos considerando, la condición de cada función de forma

$$\Phi_i(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) = (x_i, y_i), \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, 6$$

nos dan un conjunto de seis ecuaciones, por lo que necesariamente necesitamos seis incógnitas para determinar cada $\Phi_i(x, y)$ en una expresión del tipo

$$\Phi_i(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f, \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

Que es un polinomio general cuadrático en las variables x y y . Esto implica que el interpolante $Q(x, y)$ también es un polinomio general cuadrático en x y y pues es la suma de $\Phi_i(x, y)$. Notemos que este polinomio es el de grado más pequeño de entre todos los que pueden interpolar estos seis puntos arbitrarios.

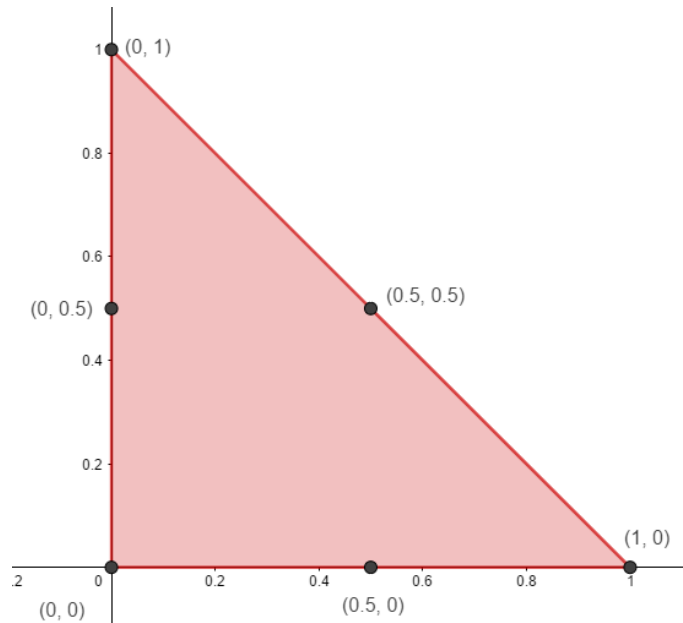


Fig. 1. Triángulo con vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$.

Consideremos el triángulo con vértices en $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ mostrado en la Fig. 1. Los puntos medios de cada lado son los puntos $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Se pide determinar la función de forma que verifica $\Phi(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) = (0,0) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$. Por el análisis anterior tomemos $\Phi(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$ y apliquemos la condición anterior a cada punto para obtener ecuaciones para a, b, c, d, e, f como sigue:

- $\Phi(0,0) = 1 = a(0) + b(0) + c(0)(0) + d(0) + e(0) + f = f$
- $\Phi(1,0) = 0 = a(1) + b(0) + c(1)(0) + d(1) + e(0) + f = a + d + f$
- $\Phi(0,1) = 0 = a(0) + b(1) + c(0)(1) + d(0) + e(1) + f = b + e + f$
- $\Phi\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 0 = a\left(\frac{1}{4}\right) + b(0) + c\left(\frac{1}{2}\right)(0) + d\left(\frac{1}{2}\right) + e(0) + f = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}d + f$
- $\Phi\left(0, \frac{1}{2}\right) = 0 = a(0) + b\left(\frac{1}{4}\right) + c(0)\left(\frac{1}{2}\right) + d(0) + e\left(\frac{1}{2}\right) + f = \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}e + f$
- $\Phi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0 = a\left(\frac{1}{4}\right) + b\left(\frac{1}{4}\right) + c\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + d\left(\frac{1}{2}\right) + e\left(\frac{1}{2}\right) + f = \frac{1}{4}(a + b + c) + \frac{1}{2}(d + e) + f$

De donde obtenemos el sistema lineal descrito en el análisis anterior para a, b, c, d, e, f :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cuyas soluciones son $a = 2$, $b = 2$, $c = 4$, $d = -3$, $e = -3$ y $f = 1$. Por lo tanto, la función de forma que cumple $\Phi(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) = (0,0) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ es

$$\Phi(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 4xy - 3x - 3y + 1$$

5.1 Use the method of undetermined coefficients to derive Newton's 3/8 rule:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = A_1 f(-1) + A_2 f\left(-\frac{1}{3}\right) + A_3 f\left(\frac{1}{3}\right) + A_4 f(1) + c f^{(d+1)}(\xi)$$

Calculate A_1, A_2, A_3, A_4, d and c in the usual manner.

Usando el método de coeficientes indeterminados

- Si $f(x) = 1$ implica $2 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$
- Si $f(x) = x$ implica $0 = -A_1 - \frac{1}{3}A_2 + \frac{1}{3}A_3 + A_4$
- Si $f(x) = x^2$ implica $\frac{2}{3} = A_1 + \frac{1}{9}A_2 + \frac{1}{9}A_3 + A_4$
- Si $f(x) = x^3$ implica $0 = -A_1 - \frac{1}{27}A_2 + \frac{1}{27}A_3 + A_4$

Ahora resolvemos el sistema lineal
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{27} & \frac{1}{27} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix},$$
 obteniendo las

soluciones $A_1 = \frac{1}{4}, A_2 = \frac{3}{4}, A_3 = \frac{3}{4}, A_4 = \frac{1}{4}$.

Por otro lado, si $f(x) = x^4$ entonces tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{5} = A_1 + \frac{1}{81}A_2 + \frac{1}{81}A_3 + A_4 + E(x^4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{108} + \frac{1}{108} + \frac{1}{4} + E(x^4) \\ &= \frac{56}{108} + E(x^4) = \frac{14}{27} + E(x^4) \end{aligned}$$

Luego $E(x^4) = \frac{2}{5} - \frac{14}{27} = -\frac{16}{135}$, como el error es distinto de cero entonces el grado de polinomio más grande que se integra exactamente es 3, por lo tanto $d = 3$.

Haciendo $E(x^4) = -\frac{16}{135} = c f^{(d+1)}(x) = c f^{(4)}(x) = c \cdot 4! = 24c$ por tanto $c = -\frac{2}{405}$.

5.2 Use the method of undetermined coefficients to find the two-point Gaussian quadrature formula with its associated error. Begin with

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = A_1 f(-x_1) + A_1 f(x_1) + E(f)$$

and calculate A_1 and x_1 in the usual manner. Assuming $E(f) = c f^{(d+1)}(\xi)$, find d and c . What is the corresponding formula and associated error on the general Interval $[a, b]$?

Usando el método de coeficientes indeterminados

- Si $f(x) = 1$ implica $2 = A_1 + A_1 = 2A_1$
- Si $f(x) = x$ implica $0 = -A_1 x_1 + A_1 x_1 = 0$
- Si $f(x) = x^2$ implica $\frac{2}{3} = A_1 x_1^2 + A_1 x_1^2 = 2A_1 x_1^2$

De aquí necesariamente $A_1 = 1$ y $x_1 = 1/\sqrt{3}$.

Por otro lado, si $f(x) = x^3$ entonces tenemos

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = 0 = A_1 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^3 + A_1 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^3 + E(x^3) = E(x^3)$$

Luego $E(x^3) = 0$, como el error es cero probemos con $f(x) = x^4$, en este caso tenemos

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{5} = A_1 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^4 + A_1 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^4 + E(x^4) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + E(x^4) = \frac{2}{9} + E(x^4)$$

Luego $E(x^4) = \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$, como el error es distinto de cero entonces el grado de polinomio más grande que se integra exactamente es 3, por lo tanto $d = 3$.

Haciendo $E(x^4) = \frac{8}{45} = c f^{(d+1)}(x) = c f^{(4)}(x) = c \cdot 4! = 24c$ por tanto $c = \frac{1}{135}$.

Juntando todos los resultados tenemos

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = A_1 f(-x_1) + A_1 f(x_1) + E(f) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{135} f^{(4)}(\xi)$$

Entonces la fórmula de cuadratura de doble punto correspondiente en el intervalo $[a, b]$ es

$$f\left(\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

y el error asociado es

$$\frac{(b-a)^5}{4320} f^{(4)}(\xi)$$

5.3 Implement the composite trapezoid rule and apply it to

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{4 + \sin(20x)}$$

Of course, you must choose h small enough that samples are taken in each period. Approximate the integral for a number of values of h that tend to 0. According to the theory of Example 5.5, the approximations T_n ought to converge extremely fast. Is that what you find?

Para este ejercicio se implementó en Matlab la regla compuesta del trapecio para calcular la integral de una función $f(x)$ en un intervalo dado $[a, b]$. Como parámetro se da n , el número de subdivisiones uniformemente espaciadas del intervalo. Se elige $h = \frac{b-a}{n}$ como espaciamiento para verificar que los puntos a considerar son $\{a, a + h, a + 2h, \dots, a + (n - 1)h, b\}$, o bien, de la forma $x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, n$.

La idea de la *regla del trapecio compuesta* es **aproximar la integral a través de la suma de las áreas trapezoidales** formadas en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n$ (recordemos que $x_{n+1} = b$). Estos trapecios tienen bases $f(x_i)$ y $f(x_{i+1})$, por lo que su área es $(f(x_i) + f(x_{i+1})) \frac{h}{2}$.

Específicamente para la función $f(x) = 1/(4 + \sin(20x))$, se utilizó un procesador simbólico para determinar su integral definida $\int_0^{\pi} 1/(4 + \sin(20x)) = \frac{\pi}{\sqrt{15}}$.

Se ejecutó el script desarrollado para distintos valores de n progresivamente mayores, mostrados en la Tabla 1.

Tabla 1. Aproximaciones de la integral de $f(x)$ para distintos n .

n	Aproximación calculada	Error absoluto
1	0.7854	0.025758
3	0.81115	6.8123e-06
6	0.811148922853103	6.81234161969968e-06
17	0.811155735194722	1.110223024625157e-16
20	0.785398163397448	0.025757571797274
45	0.811155735194722	0
103	0.811155735194723	2.22044604925031e-16

Es interesante ver que la aproximación ***parece converger rápidamente*** al valor de la integral, sin embargo, **existen valores de n especiales** (como 1,2,4,20) **para los cuales el error se mantiene debido a la forma que toman los trapecios, un solo rectángulo sin variaciones**. La conclusión es que **no podemos decir que la aproximación converge rápidamente según aumenta el valor de n (y por tanto $h \rightarrow 0$)** ya que depende mucho de como resultan empatar los trapecios con la forma de la función, aunque ciertamente es una buena aproximación en una mayoría de casos. Esto tiene la consecuencia interesante de que el error absoluto sube y baja de valor en tanto aumenta n . La solución claramente es tomar aquella con error absoluto mínimo considerando a n dentro de un intervalo de valores posible y determinado.

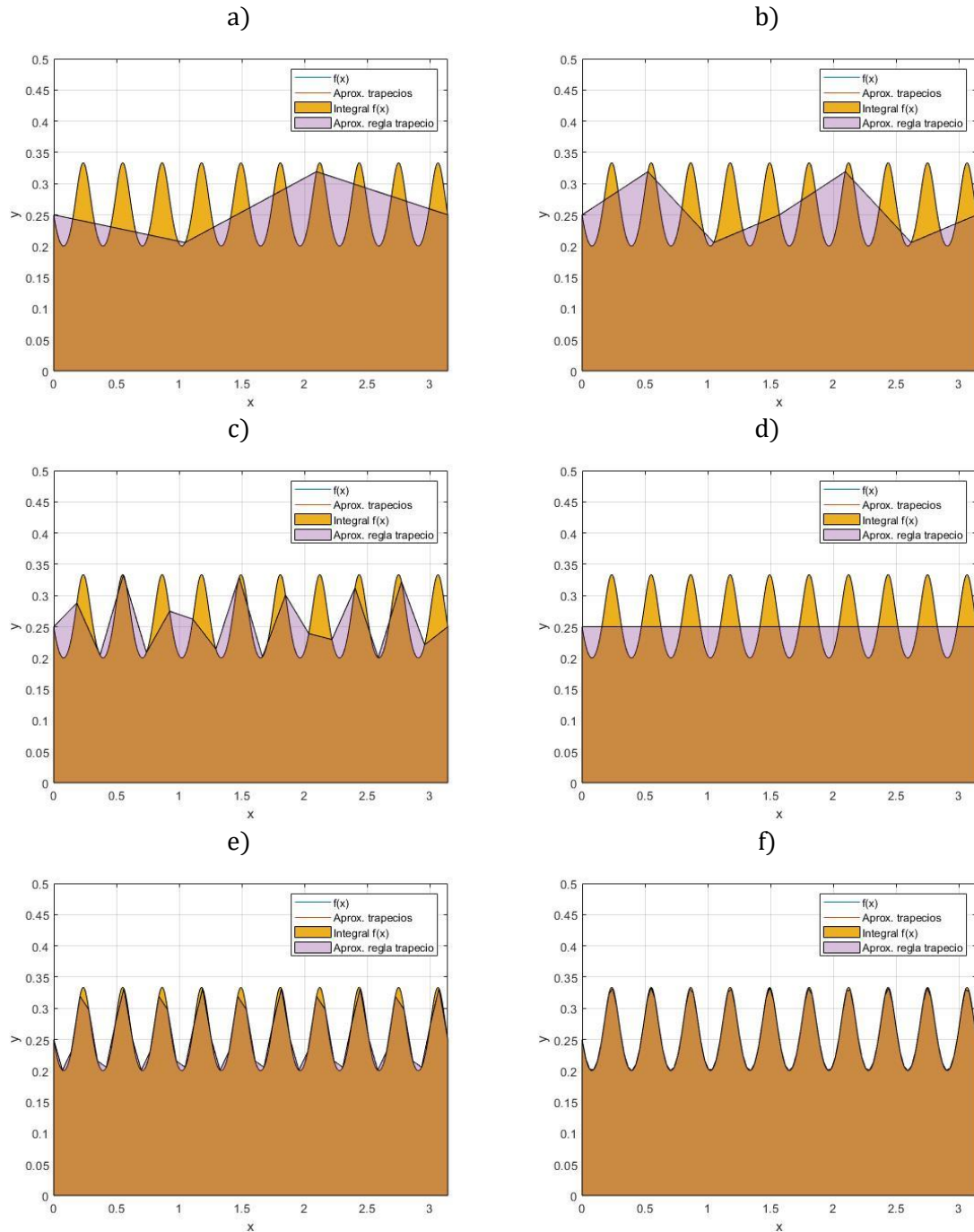


Fig. 2. Aproximaciones a $\int_0^\pi 1/(4 + \sin(20x)) = \frac{\pi}{\sqrt{15}} \approx 0.811155735194722$ utilizando la regla del trapecio. a) $n=3$. b) $n=6$. c) $n=17$. d) $n=20$. e) $n=45$. f) $n=103$.

Se debe hacer énfasis en que no necesariamente al aumentar el número de subdivisiones se mejora la aproximación a la integral, sino que depende en la forma en que los trapecios aproximen el área bajo la curva para un n determinado.

```
%Integral de 0 a pi de 1/(4+sin(20x))
f=@(x) (1./(4+sin(20*x)));
%Dividimos el intervalo [0,pi] en n piezas igualmente espaciadas
n=input('Número de puntos n: ');
a=0; b=pi; h=(b-a)/n;
x=0:h:pi;
%La integral es la suma de la regla del trapecio en cada intervalo
integral=0;
for i=1:n
    %Sacamos el area del trapecio en [x_i,x_{i+1}] con (B+b)*h/2
    trapecio=(f(x(i))+f(x(i+1)))*h/2;
    integral=integral+trapecio;
end
%Imprimimos la aproximación a la integral
disp('Integral por trapecio compuesto de 1/(4+sin(20x)) en [0,pi]');
disp('Aproximación:'); disp(integral);
%Sacamos el error entre la integral real y nuestra aproximación
disp('Error absoluto: '); disp(abs((pi/sqrt(15))-integral));

%Grafica bonita y opcional para ver la regla del trapecio
equis=0:pi/1000:pi;
plot(equis,f(equis)); hold on;
plot(x,f(x)); axis([0,pi,0,0.5]);
area(equis,f(equis)); area(x,f(x),'facealpha',0.3);
legend('f(x)', 'Aprox. trapecios', 'Integral f(x)', 'Aprox. regla trapecio');
xlabel('x'); ylabel('y'); grid on;
```