

Lanzamiento de martillo

El récord mundial para hombres en lanzamiento de martillo es de 86.74 m por Yuri Sedykh y se ha mantenido desde 1986. El martillo pesa 7.26 kg, es esférico y tiene un radio de 6 cm. La fricción en el martillo puede ser considerada proporcional al cuadrado de la velocidad del martillo relativa al aire, cuya magnitud es

$$F_D = \frac{1}{2} \rho A c_d v^2$$

donde $\rho = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ es la densidad del aire y $A = \pi r^2$ es la sección transversal del martillo. El martillo puede experimentar, en principio, un flujo laminar con coeficiente de rozamiento $c_d = 0.5$ o un flujo inestable oscilante con $c_d = 0.75$.

Considérese que el vuelo del martillo se da en el plano xy . Inicialmente el martillo se encuentra en el punto $(x_0, y_0) = (0 \text{ m}, 2 \text{ m})$, se lanza a un ángulo $\phi_0 = \frac{\pi}{4} \text{ rad} = 45^\circ$ y tiene una velocidad inicial \vec{v}_0 . Las constantes que intervienen en la dinámica del martillo se definen como

$$\begin{aligned} m &= 7.26 \text{ kg} & r &= 0.06 \text{ m} & g &= 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ c_{d \text{ lam}} &= 0.5 & c_{d \text{ inos}} &= 0.75 & \text{dist}_{rec} &= 86.74 \text{ m} \end{aligned}$$

Durante el vuelo del martillo actúan dos fuerzas sobre él en todo momento, su propio peso \vec{P} que actúa en dirección de $-y$ y la fuerza de fricción \vec{F}_D que se considera que actúa en dirección opuesta al vector velocidad $\vec{v} = (v_x, v_y)\hat{v}$, es decir

$$\vec{P} = -mg \hat{e}_y$$

$$\vec{F}_D = -\frac{\rho A c_d}{2} v^2 \hat{v} = -\frac{\rho A c_d}{2} v^2 \left(\frac{v_x}{v} \hat{e}_x + \frac{v_y}{v} \hat{e}_y \right) = -\frac{\rho A c_d}{2} \frac{v_x}{v} \hat{e}_x - \frac{\rho A c_d}{2} \frac{v_y}{v} \hat{e}_y$$

donde $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Es importante mencionar que la velocidad \vec{v} es función del tiempo, por lo que la fuerza de fricción no es constante a lo largo del movimiento del martillo.

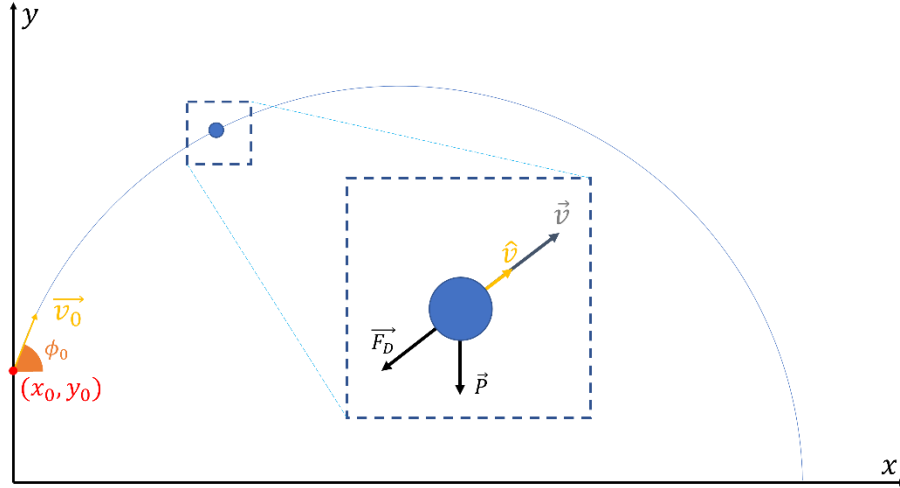


Figura 1. Diagrama de fuerzas y trayectoria en el vuelo del martillo. Se asume que la fricción \vec{F}_D actúa en dirección opuesta al vector velocidad \vec{v} en cada punto de la trayectoria.

El movimiento del martillo está descrito por la segunda ley de Newton $m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \sum \vec{F}$, la cual se puede descomponer en las direcciones de \hat{e}_x y \hat{e}_y como

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\rho A c_d}{2} \frac{v_x}{v}$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{\rho A c_d}{2} \frac{v_y}{v} - mg$$

que forman un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Si realizamos la sustitución $v_x = \frac{dx}{dt}$ y $v_y = \frac{dy}{dt}$ entonces obtenemos un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y$$

$$m \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\rho A c_d}{2} \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\rho A c_d}{2} \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} - mg$$

que se pueden reescribir en un sistema de primer orden de la forma $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{r})$ como

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ -\frac{\rho A c_d}{2m} \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \\ -\frac{\rho A c_d}{2m} \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} - g \end{pmatrix}$$

Que se pueden resolver con las condiciones iniciales descritas anteriormente

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad v_x(0) = v_0 \cos \phi_0, \quad v_y(0) = v_0 \sin \phi_0$$

el único problema es determinar el valor de v_0 , es decir, la magnitud de la velocidad inicial con la condición de producir una trayectoria tal que tenga un alcance horizontal igual a la distancia del récord mundial $dist_{rec}$.

La trayectoria descrita por el martillo es parabólica (o semejante a ésta); este problema tiene solución analítica sencilla para el caso en que no hay fricción presente ($c_d = 0$), sin embargo, se vuelve complicada cuando sí está presente.

Para determinar v_0 para distintos valores de c_d tales que el punto final de la trayectoria coincida con el punto $(dist_{rec}, 0)$ se emplea el método de bisección como:

1. Se eligen velocidades iniciales que acotan al valor v_0 que deseamos buscar, es decir, se eligen valores de v_{min} y v_{max} para considerar el intervalo de búsqueda como $[v_{min}, v_{max}]$.
2. Se elige la velocidad $v := \frac{v_{max} + v_{min}}{2}$
3. Se calcula la trayectoria completa usando v , rescatando su alcance x_{final}
4. Mientras x_{final} no sea $dist_{rec}$ en menos que una tolerancia impuesta ε
 - a. Si $x_{final} \leq dist_{rec}$
 - i. Se actualiza el valor de $v_{min} = v$
 - b. Si $x_{final} > dist_{rec}$
 - i. Se actualiza el valor de $v_{max} = v$
 - c. Se calcula la velocidad $v := \frac{v_{max} + v_{min}}{2}$
 - d. Se calcula la siguiente trayectoria completa usando v , rescatando su alcance x_{final}
5. Retornar la última velocidad utilizada v , ésta corresponde con la que produce el récord mundial.

En este sentido, cada vez se aproxima más a una velocidad que produce una trayectoria tal que su alcance horizontal es igual al récord mundial. La tolerancia impuesta ε representa el máximo error absoluto que se está dispuesto a aceptar en la búsqueda de la velocidad inicial; arbitrariamente se elige que disten en no menos que 1 mm, esto es, $\varepsilon = 1 \times 10^{-3}$.

Con “se calcula la trayectoria” en realidad se está solucionando el sistema de ecuaciones diferenciales derivado anteriormente para el movimiento del martillo. La condición que se debe

cumplir para llevar a cabo la integración del sistema es que el martillo siga en vuelo, es decir, que la coordenada y de las aproximaciones sucesivas se mantenga positiva.

Para hacer esto se emplea una implementación propia del método de Runge-Kutta de cuarto orden, atendiendo al siguiente algoritmo:

1. Se inicializan las condiciones iniciales de posición, velocidad y tiempo; añadir las a la lista general de soluciones y tiempo para la integración actual.
2. Mientras $y > 0$
 - a. Aumentar un paso de tiempo h .
 - b. Actualizar la solución mediante el método de Runge-Kutta implementado, obteniendo en particular una nueva y .
 - c. Añadir las nuevas soluciones a las listas generales de solución.
3. Convertir las listas a matrices.
4. Retornar la última solución en x calculada, esta es el alcance horizontal.

La razón en usar listas durante la ejecución de la solución es que es necesario añadir más y más soluciones (valores de x, y, v_x, v_y) en tanto el martillo siga en vuelo. No se conoce el tiempo de vuelo del martillo dado que el problema que se está solucionando tiene fricción, más bien, el tiempo de vuelo en principio también es una incógnita del problema.

Vale la pena mencionar que las listas utilizadas son propias de Python y soportan el añadido de nuevos elementos (soluciones) en un tiempo mucho menor que los arreglos proporcionados por Numpy, por lo que, en favor de optimizar el tiempo de ejecución, se opta por trabajar con las primeras y al final transformarlas a matrices de Numpy.

Entonces, con las condiciones iniciales provistas en el problema (x_0, y_0, ϕ_0) , se dispone a calcular la velocidad inicial del martillo que produce un alcance horizontal igual al record mundial para cada uno de los tres casos: sin fricción ($c_d = 0$), en flujo laminar ($c_d = c_{d\text{ lam}} = 0.5$) y en flujo inestable oscilante ($c_d = c_{d\text{ inos}} = 0.75$).

Se estima que las velocidades iniciales en cada caso están en el intervalo $[v_{\min}, v_{\max}]$ con $v_{\min} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $v_{\max} = 64 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, intervalo de trabajo para el método de bisección. Estas velocidades fueron elegidas producto de distintas simulaciones en el problema.

En la Figura 2 se muestran las gráficas generadas durante la ejecución del método de bisección hasta la determinación de v_0 correcta para cada uno de los tres regímenes de fricción descritos. Los resultados obtenidos son:

$$\begin{aligned} v_0 &= 28.83984375 \frac{\text{m}}{\text{s}} & \text{para } c_d &= 0 \\ v_0 &= 29.30517578125 \frac{\text{m}}{\text{s}} & \text{para } c_d &= 0.5 \\ v_0 &= 29.5439453125 \frac{\text{m}}{\text{s}} & \text{para } c_d &= 0.75 \end{aligned}$$

y verifican que, para más fricción, la velocidad inicial debe ser mayor para alcanzar la distancia del récord mundial $dist_{rec}$.

En la Figura 4 se muestran las gráficas de la trayectoria del martillo para cada régimen de fricción, esto es, la altura del martillo y en función del desplazamiento horizontal x .

Es posible apreciar que al variar el c_d hace que la trayectoria cambie notablemente, conservando el mismo alcance de $dist_{rec}$ que se pedía.

En la Figura 5 se muestran las gráficas de y en función del tiempo, para cada régimen de fricción. El tiempo de vuelo de cada trayectoria es distinto, consecuencia de las distintas velocidades de disparo.

Para cuantificar la influencia de la distancia a causa de la fricción se debe investigar la relación entre la variación de la distancia de un tiro friccionado con uno sin fricción, en función del coeficiente de rozamiento utilizado.

Para esto, fijamos condiciones iniciales arbitrarias $x_0 = 0$ m, $y_0 = 2$ m, $v_0 = 32 \frac{m}{s}$, $v_{x0} = v_0 \cos \phi_0$, $v_{y0} = v_0 \sin \phi_0$, $\phi_0 = \frac{\pi}{4}$ rad.

Luego, se calcula el alcance del martillo sin fricción $x_{frictionless}$. Con esto, se varía el coeficiente de rozamiento c_d desde 0 hasta 1 en pasos de 0.05 (límites escogidos arbitrariamente) y se calcula la trayectoria, específicamente se calcula el alcance horizontal x_{final} para cada caso. Finalmente se define la variación del alcance con fricción y si no tuviera fricción como

$$\Delta x = x_{frictionless} - x_{final}$$

Esta Δx es, por supuesto, función del c_d . En la Figura 6 se grafica Δx en función del c_d , mostrando una relación lineal entre ambos. Con esto, se ajustó dicha relación a una recta a través de funciones propias de Scipy para obtener el ajuste lineal:

$$\Delta x(c_d) = a c_d + b$$

con $a = 7.43243$ m y $b = 0.1056$ m (parámetros obtenidos computacionalmente). Esto responde completamente a la cuestión de la influencia del rozamiento en el alcance horizontal, concluyendo que hay una relación lineal entre la variación de la diferencia de los alcances (que es progresivamente menor debido a los efectos de fricción) en función al coeficiente de rozamiento (que incrementa progresivamente).

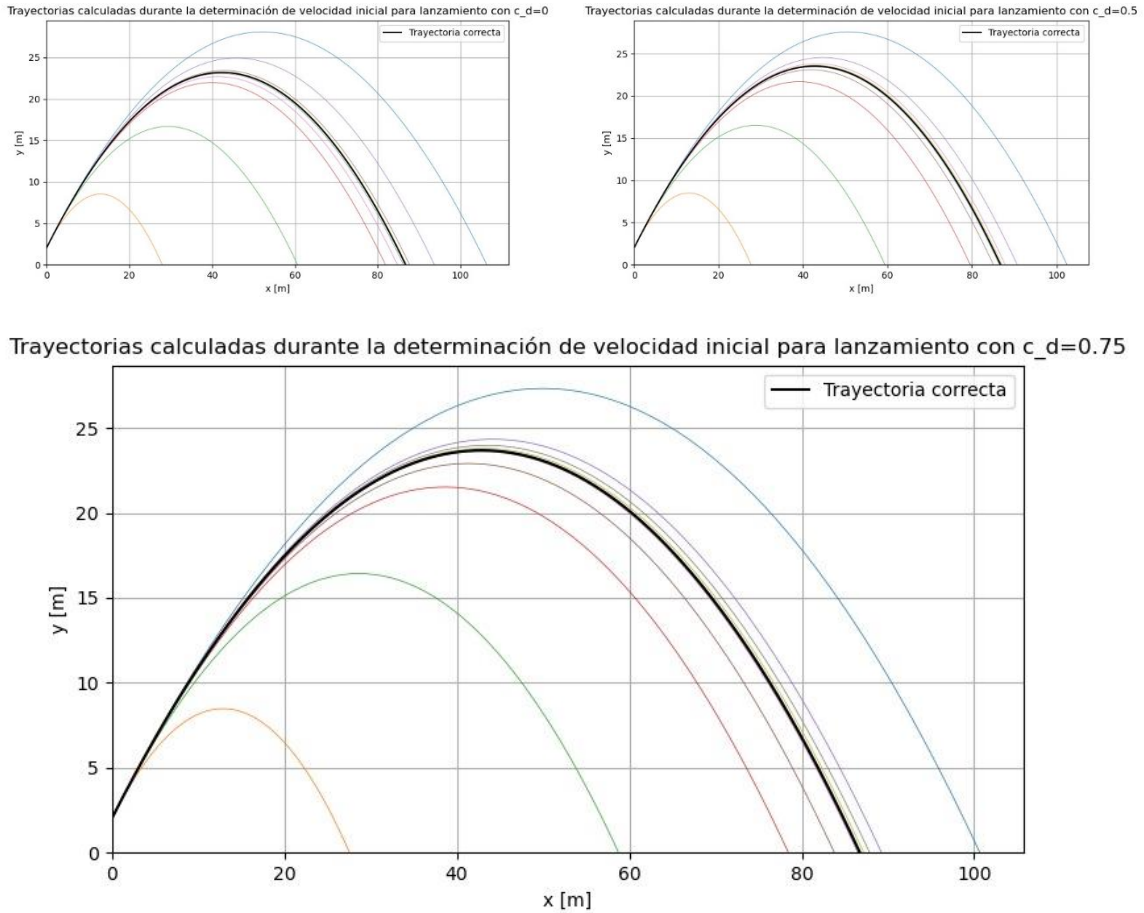


Figura 2. Trayectorias generadas durante la ejecución del método de bisección para determinar la velocidad inicial del disparo para el cumplimiento de alcanzar la distancia de récord mundial.

Se puede apreciar que en cada caso se generan distintas trayectorias que poco a poco van acercándose a la trayectoria correcta. En cada caso se emplean aproximadamente 16 iteraciones del método de bisección para alcanzar un error absoluto con $dist_{rec}$ de a lo más 1×10^{-3} m.

Las gráficas conjuntas de estas trayectorias se muestran en la Figura 4.

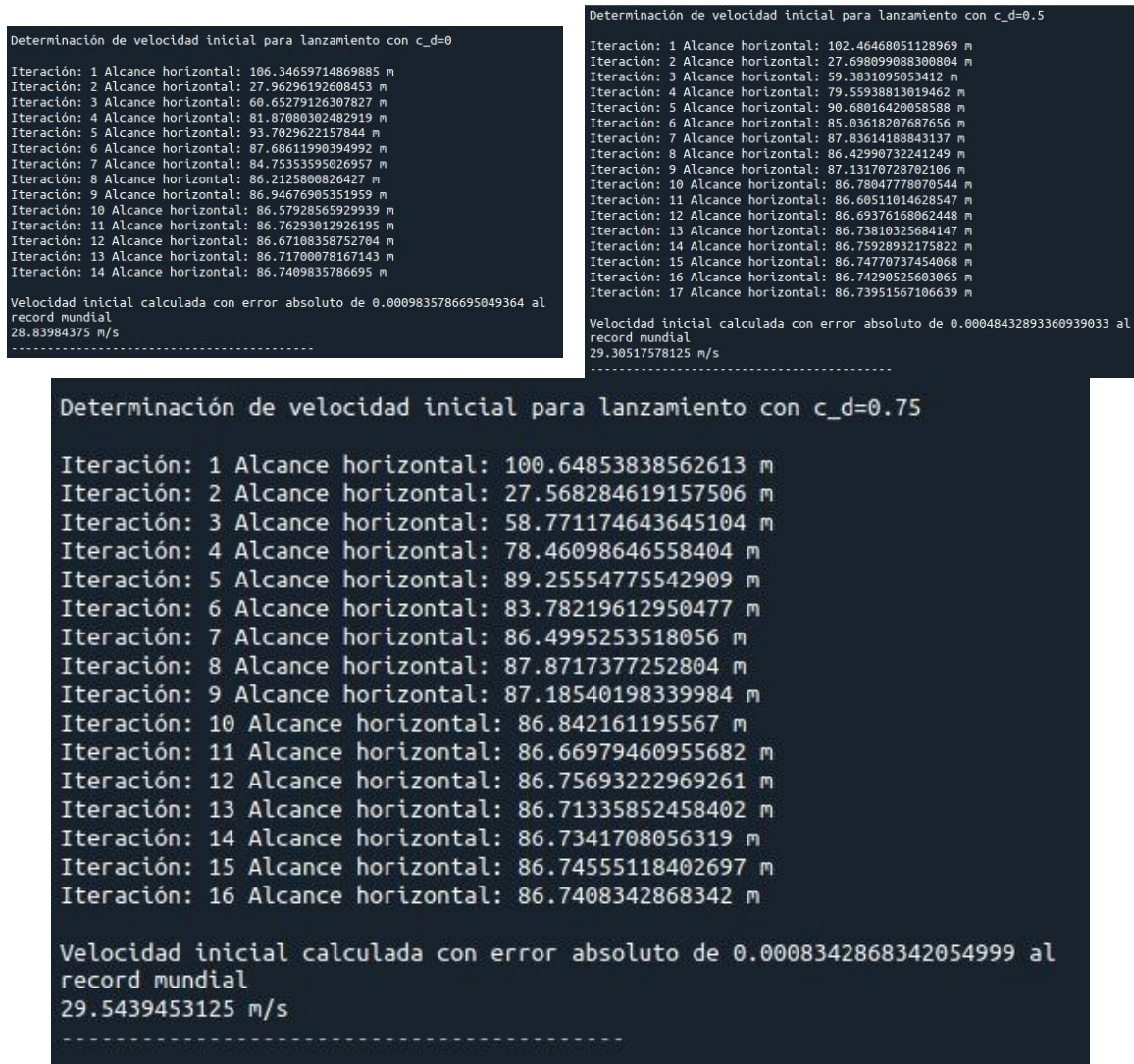


Figura 3. Alcances horizontales de las trayectorias generadas por el método de bisección, etiquetadas con su correspondiente iteración del método.

En cada una de las ejecuciones con distinto coeficiente de rozamiento c_d se puede apreciar como progresivamente el alcance llega a la distancia de record mundial. Las velocidades iniciales calculadas en cada caso (reportadas anteriormente) aumentan en tanto aumenta c_d .

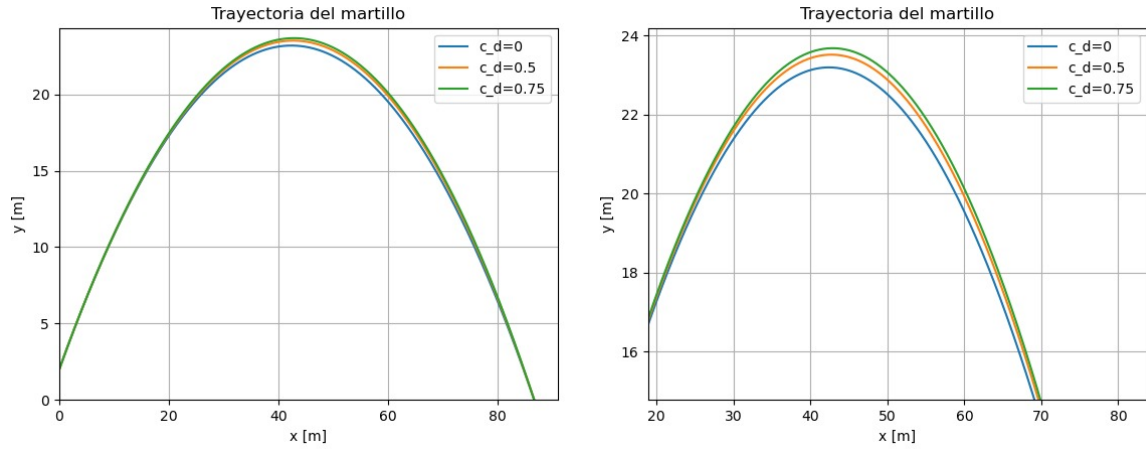


Figura 4. Trayectorias del martillo para distintos coeficientes de rozamiento c_d .

Es posible apreciar las diferencias en el alcance máximo del martillo en cada caso. Cuando se considera flujo laminar ($c_d = 0.5$) el alcance máximo es más grande que sin fricción, pero menor que si se tiene flujo laminar inestable ($c_d = 0.75$). En todas las trayectorias se cumple que el alcance máximo difiere en no más de la tolerancia impuesta de 1×10^{-3} .

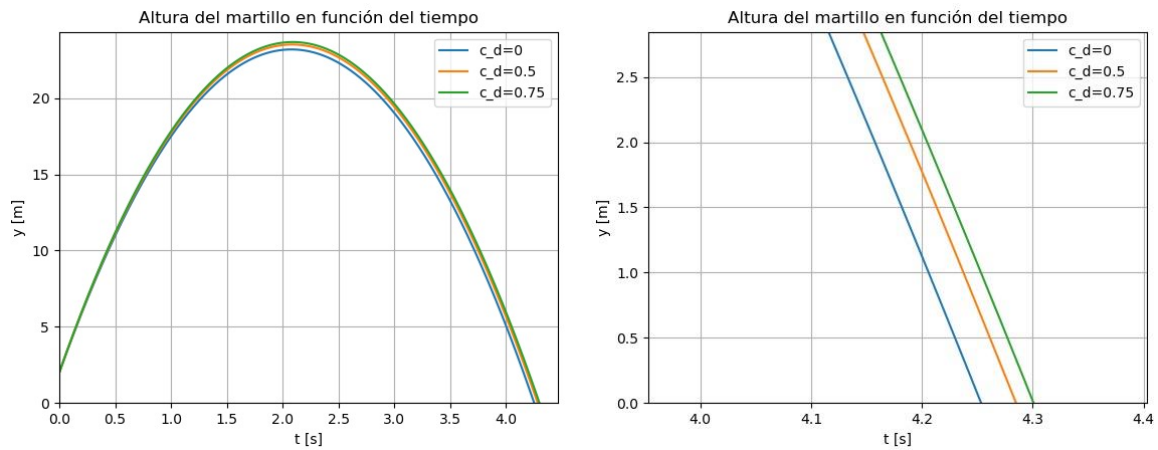


Figura 5. Alturas del martillo en función del tiempo para distintos coeficientes de rozamiento c_d .

Es posible apreciar que la altura de cada uno de los lanzamientos es distinta (ver Figura 4) pero un hecho más importante es que los tiempos de vuelo son distintos con valores entre 4.25 s y 4.3 s.

Una observación interesante es que el tiempo de vuelo para el caso sin fricción es el menor, aumentando progresivamente con el aumento del coeficiente c_d .

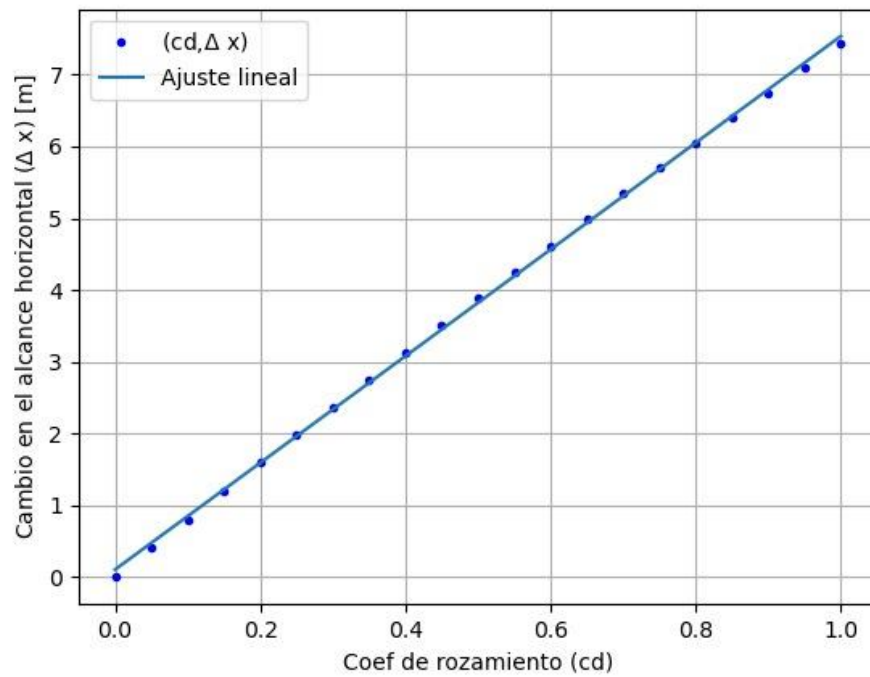


Figura 6. Variaciones de alcances horizontales Δx en función del coeficiente de rozamiento c_d .

La influencia que provoca el rozamiento con el alcance del lanzamiento efectuado se representa con la Δx , definida como la diferencia entre el alcance horizontal y el alcance de un tiro sin fricción para las mismas condiciones iniciales. Es posible observar que, conforme el rozamiento crece (c_d incrementa) también incrementa Δx , lo cual indica que el alcance horizontal decrementa. La relación entre estas cantidades es linealmente proporcional.