Problema 1.

Las soluciones para la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1' = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \qquad x_2' = \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

El fenómeno de cancelación sustractiva se presenta cuando $b^2 \gg 4ac$. En este caso, usando $a = b = 1$ y variando c como $c = 10^{-1}, 10^{-2}, \cdots, 10^{-n}$ se pueden observar los efectos de la cancelación sustractiva:

- Las soluciones x_1 y x_1' mantienen un error absoluto del orden de 10^{-17} mientras se varía c.
- Las soluciones x_2 y x_2' comienzan con un error absoluto de 10^{-16} que va incrementando conforme c se hace más pequeño en factores de 10. Cuando $c = 10^{-9}$ el error absoluto se mantiene en 10^{-8}, sin embargo, cuando $c = 10^{-12}$, el error se dispara súbitamente, alcanzando eventualmente valores muy grandes debido a la ejecución de una división entre cero, producto de la cancelación sustractiva en las fórmulas primadas ya que

$$b - \sqrt{b^2 - 4ac} \approx b - \sqrt{b^2} = b - b = 0$$

```
Soluciones de ax²+bx+c=0 con a= 1.0 , b= 1.0 , c= 0.1
x_1= -0.1127016653792583     x'_1=-0.1127016653792583     ErrAbs=1.3877787807814460e-17
x_2= -0.8872983346207417     x'_2=-0.8872983346207418     ErrAbs=1.110223024625157e-16


Soluciones de ax²+bx+c=0 con a= 1.0 , b= 1.0 , c= 0.01
x_1= -0.0101020514433644     x'_1=-0.01010205144336438    ErrAbs=2.081668171172169e-17
x_2= -0.9898979485566356     x'_2=-0.9898979485566336     ErrAbs=1.998401444325282e-15


Soluciones de ax²+bx+c=0 con a= 1.0 , b= 1.0 , c= 0.001
x_1= -0.001001002005014018   x'_1=-0.001001002005014042   ErrAbs=2.42861286636753e-17
x_2= -0.998998997994986      x'_2=-0.9989989979950102     ErrAbs=2.420286193682841e-14


Soluciones de ax²+bx+c=0 con a= 1.0 , b= 1.0 , c= 0.0001
x_1= -0.00010001000200004946 x'_1=-0.0001000100020005001  ErrAbs=5.55653613398821e-18
x_2= -0.9998999899979994     x'_2=-0.9998999899980551     ErrAbs=5.562217353372034e-14


Soluciones de ax²+bx+c=0 con a= 1.0 , b= 1.0 , c= 1e-05
x_1= -1.000010000201668e-05  x'_1=-1.000010000200005e-05  ErrAbs=1.662556268870741e-17
x_2= -0.9999899998999979     x'_2=-0.9999899998983355     ErrAbs=1.662447957073709e-12


Soluciones de ax²+bx+c=0 con a= 1.0 , b= 1.0 , c= 1e-06
x_1= -1.000001000006634e-06  x'_1=-1.000001000002e-06     ErrAbs=4.633905496191464e-18
x_2= -0.999998999999         x'_2=-0.999998999994366      ErrAbs=4.633959882482941e-12


Soluciones de ax²+bx+c=0 con a= 1.0 , b= 1.0 , c= 1e-07
x_1= -1.000000099948828e-07  x'_1=-1.00000010000002e-07   ErrAbs=5.119215670298775e-18
x_2= -0.9999998999999899     x'_2=-0.9999999000511821     ErrAbs=5.119216162086104e-11


Soluciones de ax²+bx+c=0 con a= 1.0 , b= 1.0 , c= 1e-08
x_1= -1.000000010575874e-08  x'_1=-1.00000001e-08         ErrAbs=5.758740434726798e-18
x_2= -0.9999999899999998     x'_2=-0.9999999894241257     ErrAbs=5.758741261630007e-10
```

```
Soluciones de ax²+bx+c=0 con a= 1.0 , b= 1.0 , c= 1e-09
x_1= -1.00000002722922e-09   x'_1=-1.000000001e-09        ErrAbs=2.622921955633967e-17
x_2= -0.9999999989999999     x'_2=-0.999999972770781      ErrAbs=2.622921890793606e-08


Soluciones de ax²+bx+c=0 con a= 1.0 , b= 1.0 , c= 1e-10
x_1= -1.000000082740371e-10  x'_1=-1.0000000001e-10       ErrAbs=8.264037090120814e-18
x_2= -0.9999999999           x'_2=-0.9999999172596359     ErrAbs=8.264036410743358e-08


Soluciones de ax²+bx+c=0 con a= 1.0 , b= 1.0 , c= 1e-11
x_1= -1.000000082740371e-11  x'_1=-1.00000000001e-11      ErrAbs=8.273037105991075e-19
x_2= -0.99999999999          x'_2=-0.9999999172596358     ErrAbs=8.273036422590252e-08


Soluciones de ax²+bx+c=0 con a= 1.0 , b= 1.0 , c= 1e-12
x_1= -1.00003338943111e-12   x'_1=-1.000000000001e-12     ErrAbs=3.338943010972546e-17
x_2= -0.9999999999989999     x'_2=-0.9999666116837072     ErrAbs=3.338831529275943e-05


Soluciones de ax²+bx+c=0 con a= 1.0 , b= 1.0 , c= 1e-13
x_1= -1.000310945187266e-13  x'_1=-1.0000000000001e-13    ErrAbs=3.109451871659219e-17
x_2= -0.9999999999999        x'_2=-0.9996891514695885     ErrAbs=0.0003108485303114916


Soluciones de ax²+bx+c=0 con a= 1.0 , b= 1.0 , c= 1e-14
x_1= -9.992007221626409e-15  x'_1=-1.00000000000001e-14   ErrAbs=7.992778373690521e-18
x_2= -0.99999999999999       x'_2=-1.000799917193444      ErrAbs=0.0007999171934536253


Soluciones de ax²+bx+c=0 con a= 1.0 , b= 1.0 , c= 1e-15
x_1= -9.992007221626409e-16  x'_1=-1.000000000000001e-15  ErrAbs=7.992778373601774e-19
x_2= -0.999999999999999      x'_2=-1.000799917193444      ErrAbs=0.0007999171934446325


Soluciones de ax²+bx+c=0 con a= 1.0 , b= 1.0 , c= 1e-16
x_1= -1.110223024625157e-16  x'_1=-1e-16                  ErrAbs=1.102230246251564e-17
x_2= -0.9999999999999999     x'_2=-0.9007199254740992     ErrAbs=0.09928007452590071


Soluciones de ax²+bx+c=0 con a= 1.0 , b= 1.0 , c= 1e-17
x_1= 0                       x'_1=-1e-17                  ErrAbs=1e-17
x_2= -1                      x'_2=-inf                    ErrAbs=inf


Soluciones de ax²+bx+c=0 con a= 1.0 , b= 1.0 , c= 1e-18
x_1= 0                       x'_1=-1e-18                  ErrAbs=1e-18
x_2= -1                      x'_2=-inf                    ErrAbs=inf
```

Problema 2.

Las funciones de Bessel esféricas se denotan por $j_l(x)$ y sus primeras funciones son

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$$

Existen dos fórmulas de recurrencia para calcular cualquier $j_l(x)$

Up	*Down*
$j_{l+1}(x) = \frac{2l+1}{x} j_l(x) - j_{l-1}(x)$	$j_{l-1}(x) = \frac{2l+1}{x} j_l(x) - j_{l+1}(x)$
Toma su nombre porque la recurrencia está en función de dos valores de la función “anteriores”, de modo que es necesario conocerlos de antemano.	Por otra parte, esta recurrencia está en función de dos valores “superiores”.

Para calcular $j_l(x)$ utilizando la recurrencia *up* para un valor de x dado es necesario conocer los valores de $j_0(x)$ y $j_1(x)$, cuyas expresiones analiticas son conocidas.

En cambio, para calcular $j_l(x)$ con la recurrencia *down* no se conocen expresiones de las cuales partir. Sin embargo, se puede utilizer el *algoritmo de Miller*, el cual es una aproximación buena para los $j_l(x)$:

- Supóngase que se desea conocer el valor de $j_l(x)$ para $l = 0,1,\cdots,l_{max}$
- Se inicia con dos valores arbitrarios de $j_L(x)$ y $j_{L+1}(x)$ para $L > l_{max}$, esto es, dos valores *semilla* para comenzar a generar los anteriores. Para denotarlos como aproximaciones computadas, estos serán
$$j_{L+1}^C(x), \qquad j_L^C(x)$$
- Se calculan las aproximaciones $j_{l-1}^C(x)$ a traves de la recurrencia *down* iniciando en $l = L$. Esto producirá eventualmente todos los valores de interés $j_l^C(x)$ de $l = 0$ a $l = l_{max}$.
- Ahora, se debe aplicar la normalización a todos los valores computados. Dado que se conoce la expresión analítica de $j_0(x)$ se debe buscar que $j_0^C(x)$ coincida con este valor, este razonamiento aplica para todas las otras aproximaciones $j_l^C(x)$, de modo que se calculan
$$j_l^N(x) = j_l^C(x) \times \frac{j_0(x)}{j_0^C(x)}$$
- Los valores normalizados $j_l^N(x)$ de $l = 0$ a $l = l_{max}$ son las mejores aproximaciones a los valores $j_l(x)$ que el algoritmo de Miller puede obtener para el L dado.

La función de proporcionar un valor de L más grande que el l_{max} es que se calculen valores de $j_l^C(x)$ por arriba de los de interés para asegurar una correcta convergencia a valores reales de los $j_l(x)$. La elección de los valores iniciales para comenzar a iterar debe ser, en principio, adecuados para el correcto desempeño del algoritmo de Miller.

a) Para calcular los valores de $j_l(x)$ para $0 \leq l \leq 25$ se emplean los algoritmos antes descritos para las dos fórmulas de recurrencia, para $x = 0.1, 1, 10$.

b) El ajuste del programa para producir valores de $j_l(x)$ con un error relativo del orden de 10^{-10} es precisamente la utilización del algoritmo de Miller en el uso de la recurrencia *down*. Los valores de $j_l(x)$ para comparar son

x	$j_3(x)$	$j_5(x)$	$j_8(x)$
0.1	$9.518519719 \times 10^{-6}$	$9.616310231 \times 10^{-10}$	$2.901200102 \times 10^{-16}$
1	$9.006581118 \times 10^{-3}$	$9.256115862 \times 10^{-5}$	$2.826498802 \times 10^{-8}$
10	$-3.949584498 \times 10^{-2}$	$-5.553451162 \times 10^{-2}$	$1.255780236 \times 10^{-1}$

Los errores relativos de los valores calculados con la recurrencia *up* crecen demasiado. Esto se debe a que el uso de esta fórmula implica la aparición de la *cancelación sustractiva*, introduciendo demasiado error conforme se calculan valores superiores. En cambio, los valores calculados usando el algoritmo de Miller con la recurrencia *down* mantienen el orden del error en 10^{-10}, comprobando que la precisión de sus aproximaciones calculadas es adecuada.

c) La comparación entre los valores *up* y *down* (generados por dichas recurrencias, respectivamente) a través de la expresión

$$\frac{\left|j_l^{up}(x) - j_l^{down}(x)\right|}{\left|j_l^{up}(x)\right| + \left|j_l^{down}(x)\right|}$$

representa la razón de la *distancia* entre las soluciones calculadas divida por la suma de sus magnitudes.

Inicialmente, esta expresión es cero debido a que se utilizan/obtienen valores exactos para $j_0(x)$. Gradualmente, su valor va incrementando poco a poco hasta alcanzar valores de 1, lo cual se explica observando los valores calculados con las dos fórmulas: los *up* se disparan a valores muy elevados mientras que los *down* se mantienen muy pequeños, de modo que $\left|j_l^{up}(x) - j_l^{down}(x)\right| \approx \left|j_l^{up}(x)\right|$ y $\left|j_l^{up}(x)\right| + \left|j_l^{down}(x)\right| \approx \left|j_l^{up}(x)\right|$, haciendo que

$$\frac{\left|j_l^{up}(x) - j_l^{down}(x)\right|}{\left|j_l^{up}(x)\right| + \left|j_l^{down}(x)\right|} \approx \frac{\left|j_l^{up}(x)\right|}{\left|j_l^{up}(x)\right|} = 1$$

```
l      j_l UP                   j_l DOWN                 |UP-DOWN|/(|UP|+|DOWN|)
0      0.9983341664682815       0.9983341664682815       0
1      0.03330001190255594      0.03330001190255757      2.458826390383923e-14
2      0.0006661906083965663    0.0006661906084455688    3.677811434893473e-11
3      9.518517272377736e-06    9.518519720865568e-06    1.286170654059302e-07
4      1.056006698751943e-07    1.057720150209873e-07    0.0008106305025984 77
5      -1.445698361024483e-08   9.616310232916446e-10    1
6      -1.695868867002126e-06   7.397541093587706e-12    1
7      -0.0002204484957266661   4.931887475731974e-14    1
8      -0.03306557849013292     2.90120010253019e-16     1
9      -5.620927894826869       1.52698569349482e-18     1
10     -1067.943234438615       7.271510996713672e-21    1
11     -224262.4583042143       3.161581505151069e-23    1
12     -51579297.46673486       1.264651337875089e-25    1
13     -12894600104.22541       4.683953665255988e-28    1
14     -3481490448843.394       1.615174402815654e-30    1
15     -1009619335564480        5.210290941008979e-33    1
16     -3.1297851253454e+17     1.578889712876359e-35    1
17     -1.032818995170626e+20   4.511148300724449e-38    1
18     -3.614835185245938e+22   1.219237719844757e-40    1
19     -1.337478690351045e+25   3.126270115223255e-43    1
20     -5.216130744017225e+27   7.625092312409068e-46    1
21     -2.138600230260159e+30   1.773286446269968e-48    1
22     -9.195928828811243e+32   3.94065517928688e-51     1
23     -4.138146586962757e+35   8.384409128498702e-54    1
24     -1.944919699943667e+38   1.711110750957122e-56    1
25     -9.530065148258098e+40   0                        1


Comparación con valores dados
j_l      Error relativo con j_l UP     Error relativo con j_l DOWN
j_3        2.570381042724419e-07         1.959935051399947e-10
j_5        16.03381573905551             1.992911089961857e-10
j_8        113972071307107.7             1.827484987219891e-10
```

```
Valores de la función de Bessel esférica j_l(x) con x= 1
l      j_l UP                   j_l DOWN                 |UP-DOWN|/(|UP|+|DOWN|)
0      0.8414709848078965       0.8414709848078965       0
1      0.3011686789397567       0.3011686789397568       9.215956889454931e-17
2      0.06203505201137371      0.06203505201137387      1.230398467772465e-15
3      0.009006581117111834     0.009006581117112517     3.794342385015958e-14
4      0.001011015808409121     0.001011015808413753     2.290515539861257e-12
5      9.256115857025904e-05    9.256115861125818e-05    2.214705738040222e-10
6      7.156935863728009e-06    7.156936310087088e-06    3.118367085841809e-08
7      4.790076582050773e-07    4.79013419873949e-07     6.014135809234825e-06
8      2.817900934815043e-08    2.826498802214731e-08    0.001523256289465421
9      3.550071348001893e-11    1.491376502555146e-09    0.953498928260645
10     -2.750449579203007e-08   7.116552640047315e-11    1
11     -5.776299123461115e-07   3.09955185479008e-12     1
12     -1.325798348816853e-05   1.241662596987106e-13    1
13     -0.0003308719572918672   4.604637677683789e-15    1
14     -0.008920284863392247    1.589575987516977e-16    1
15     -0.2583573890810833      5.132686115443763e-18    1
16     -8.000158776650188       1.556708270590173e-19    1
17     -263.7468822403752       4.451177503806803e-21    1
18     -9223.14071963648        1.203855742208201e-22    1
19     -340992.4597443094       3.08874236353955e-24     1
20     -13289482.78930843       7.537795722236875e-26    1
21     -544527801.9019014       1.753882577569021e-27    1
22     -23401405998.99245       3.899361309912166e-29    1
23     -1052518742152.758       8.300118914541852e-31    1
24     -49444979475180.66       1.694579922504541e-32    1
25     -2421751475541699        0                        1


Comparación con valores dados
j_l      Error relativo con j_l UP     Error relativo con j_l DOWN
j_3        9.861303251471957e-11         9.853714566702674e-11
j_5        5.37384797773118e-10          9.444365030500494e-11
j_8        0.003041878941846129          7.59704769868148e-11
```

```
Valores de la función de Bessel esférica j_l(x) con x= 10
l     j_l UP                  j_l DOWN                |UP-DOWN|/(|UP|+|DOWN|)
0     -0.05440211108893698    -0.05440211108893698    0
1     0.07846694179875155     0.07846694179875152     1.768615864169599e-16
2     0.07794219362856245     0.07794219362856243     8.902615619179114e-17
3     -0.03949584498447033    -0.03949584498447031    2.63530020941529e-16
4     -0.1055892851176917     -0.1055892851176917     6.571589054867656e-17
5     -0.05553451162145218    -0.05553451162145218    6.247370960247028e-17
6     0.04450132233409427     0.04450132233409425     2.338883500521645e-16
7     0.1133862306557747      0.1133862306557747      1.223939426114759e-16
8     0.1255780236495678      0.1255780236495678      0
9     0.1000964095484906      0.1000964095484906      6.932210590976052e-17
10    0.06460515449256424     0.06460515449256427     2.148092968249418e-16
11    0.03557441488589434     0.03557441488589438     4.876323283294938e-16
12    0.01721599974499274     0.0172159997449928      1.612196562892117e-15
13    0.007465584476587517    0.007465584476587616    6.622337369617079e-15
14    0.002941078341793552    0.002941078341793764    3.605309350733426e-14
15    0.001063542714613782    0.001063542714614298    2.42623181472493e-13
16    0.0003559040735091729   0.0003559040735105606   1.949500530970639e-12
17    0.0001109407279664886   0.0001109407279705517   1.831161133610397e-11
18    3.238847437353736e-05   3.238847438637024e-05   1.981087629703335e-10
19    8.896627215599598e-06   8.896627259018248e-06   2.440174715991977e-09
20    2.308371767301072e-06   2.308371923800925e-06   3.389831954953433e-08
21    5.676970303347975e-07   5.676976285655444e-07   5.268923384232996e-07
22    1.32725463138557e-07    1.327278790309156e-07   9.101005618969277e-06
23    2.956755378870884e-08   2.957782707357589e-08   0.0001736954723645507
24    6.242039668374581e-09   6.287908214891082e-09   0.003660713272220457
25    1.018440586326613e-09   0                       1


Comparación con valores dados
j_l      Error relativo con j_l UP      Error relativo con j_l DOWN
j_3        1.131847385137524e-10          1.131842114537105e-10
j_5        2.614912083931294e-11          2.614924578673215e-11
j_8        3.947173291004684e-10          3.947173291004684e-10
```