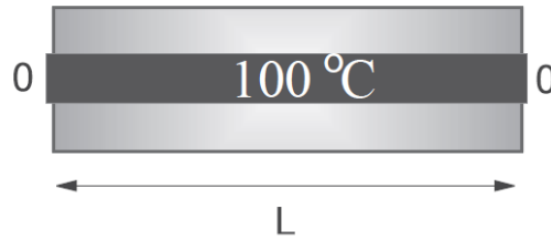


## Problema 1. Evolución de la temperatura en una barra

Se considera una barra cilíndrica de aluminio de longitud  $L = 1$  m y grosor  $w$ , colocada a lo largo del eje  $x$ . Dicha barra se encuentra aislada térmicamente a lo largo de su longitud, pero no en sus extremos, donde está en contacto con barras de hielo a  $0^\circ\text{C}$ . Inicialmente la barra se encuentra a temperatura uniforme de  $T_0 = 100^\circ\text{C}$ . El calor fluye únicamente a través de los extremos no aislados.



- a) La ecuación que modela el proceso es la ecuación de calor

$$\frac{\partial T(\vec{x}, t)}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T(\vec{x}, t) \quad (1)$$

que describe la variación de la temperatura  $T$  en función de la posición en el espacio ( $\vec{x}$ ) y del tiempo  $t$ . El parámetro  $\kappa$  se conoce como *coeficiente de difusión* y se relaciona con propiedades físicas del cuerpo a través de

$$\kappa = \frac{K}{C\rho} \quad (2)$$

donde  $K$  es la conductividad térmica,  $C$  el calor específico y  $\rho$  la densidad de la barra.

La ecuación del calor, también conocida como ecuación de difusión, es una ecuación diferencial parcial parabólica; éstas se caracterizan por tener solución para todo tiempo  $t$  siempre y cuando sea *lineal* (lo cual se verifica en este caso) y se tengan condiciones iniciales/de frontera asociadas.

Ciertamente esta ecuación tiene solución analítica y puede determinarse a través de la técnica de separación de variables.

Como la barra descrita está a lo largo del eje  $x$ , digamos, desde  $x = 0$  hasta  $x = L$ , la ecuación del calor es *unidimensional* y se puede escribir como

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \quad (3)$$

Las condiciones de frontera descritas son que, a lo largo del tiempo, los extremos de la barra se mantienen a temperatura constante de 0 °C, esto es

$$\begin{aligned} T(0, t) &= 0 \text{ °C} \\ T(L, t) &= 0 \text{ °C} \end{aligned} \quad \forall t \geq 0 \quad (4)$$

Mientras que la condición inicial es que la barra se encuentra a una temperatura uniforme de 100 °C, la cual se escribe como

$$T(x, 0) = 100 \text{ °C}, \quad 0 < x < L \quad (5)$$

- b) El problema es resolver numéricamente la ecuación (3) con las condiciones (4) y (5). Para esto, puede emplearse el algoritmo de *diferencias finitas*, el cual consiste en utilizar aproximaciones numéricas de la derivada para, en este caso, aproximar  $\frac{\partial T(x, t)}{\partial t}$  y  $\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}$ . Con esto en mente, se discretizan los dominios espacial y temporal, formando un conjunto de puntos  $(x, t)$  en los cuales se aproxima la solución  $T(x, t)$ .

- Dado que se tiene la condición inicial (5), se puede aproximar  $\frac{\partial T(x, t)}{\partial t}$  como una *forward difference* de la forma

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \approx \frac{T(x, t + \Delta t) - T(x, t)}{\Delta t} \quad (6)$$

- Dado que se tiene la condición de frontera (4) en los extremos de la barra, es posible utilizar la aproximación *central difference* para la derivada espacial, la cual es más precisa que otras aproximaciones. Así

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \approx \frac{T\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - T\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \quad (7)$$

De modo que la segunda derivada se aproxima como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &\approx \frac{\left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial x}\right)_{x=x+\frac{\Delta x}{2}} - \left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial x}\right)_{x=x-\frac{\Delta x}{2}}}{\Delta x} \\ &= \frac{\left(\frac{T(x + \Delta x, t) - T(x, t)}{\Delta x}\right) - \left(\frac{T(x, t) - T(x - \Delta x, t)}{\Delta x}\right)}{\Delta x} \\ &= \frac{T(x + \Delta x, t) + T(x - \Delta x, t) - 2T(x, t)}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

por tanto

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{T(x + \Delta x, t) + T(x - \Delta x, t) - 2T(x, t)}{\Delta x^2} \quad (9)$$

Sustituyendo las aproximaciones (7) y (9) en la ecuación de calor (3) permite obtener

$$\frac{1}{\Delta t}(T(x, t + \Delta t) - T(x, t)) = \frac{\kappa}{\Delta x^2}(T(x + \Delta x, t) + T(x - \Delta x, t) - 2T(x, t))$$

O bien, reacomodando para expresar el cálculo de  $T(x, t + \Delta t)$  en función de solo valores de  $T(x, t)$  en tiempos *anteriores*, se obtiene

$$T(x, t + \Delta t) = T(x, t) + \eta(T(x + \Delta x, t) + T(x - \Delta x, t) - 2T(x, t)) \quad (10)$$

donde se ha definido

$$\eta = \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} = \frac{K \Delta t}{C \rho \Delta x^2} \quad (11)$$

Ahora, el dominio de espacio es el intervalo  $0 \leq x \leq L$  y de tiempo es  $0 \leq t \leq t_f$ . Éstos pueden ser discretizados de la siguiente manera:

- Para el espacio, se define  $N_x$  como el número entero de intervalos en el que se divide el dominio espacial, luego  $\Delta x = \frac{L-0}{N_x} = \frac{L}{N_x}$ ; entonces, para  $i$  entero:

$$\begin{aligned} x &= i \Delta x \\ 0 &\leq i \leq N_x \end{aligned} \quad (12)$$

- Para el tiempo, se define  $N_t$  como el número entero de intervalos en el que se divide el dominio temporal, luego  $\Delta t = \frac{t_f-0}{N_t} = \frac{t_f}{N_t}$ ; entonces, para  $j$  entero:

$$\begin{aligned} t &= j \Delta t \\ 0 &\leq j \leq N_t \end{aligned} \quad (13)$$

Así, denotando  $T(x, t) = T(i \Delta x, j \Delta t) = T_{i,j}$ , la ecuación (10) se escribe como

$$T_{i,j+1} = T_{i,j} + \eta(T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}) \quad (14)$$

que es una ecuación en diferencias que permite resolver (3) por el método de diferencias finitas en el dominio discretizado de  $x$  y  $t$ , es decir, sobre la malla.

Finalmente, con los dominios ya discretizados, se pueden expresar las condiciones iniciales y de frontera (4) y (5) como

$$\begin{aligned} T_{0,j} &= 0^\circ\text{C} \\ T_{N_x,j} &= 0^\circ\text{C}, \quad 0 \leq j \leq N_t \\ T_{i,0} &= 100^\circ\text{C}, \quad 0 < i < N_x \end{aligned} \quad (15)$$

Para el programa, se requieren datos sobre la barra de aluminio. Se considera que

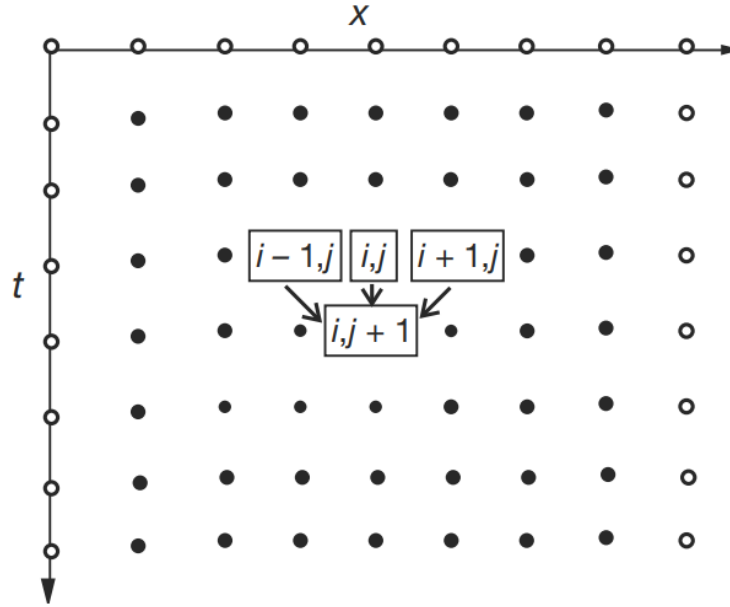
$$\rho = 2698 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad K = 237 \frac{\text{W}}{^\circ\text{C m}} \quad C = 897 \frac{\text{J}}{^\circ\text{C kg}}$$

por lo que el coeficiente difusión de la barra (dado por (2)) es aproximadamente

$$\kappa \approx 9.793 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Además, se requiere la implementación de las condiciones iniciales (15) antes del uso de (14) para generar la solución sobre la malla (que es, de hecho, una matriz de  $N_t + 1$  filas por  $N_x + 1$  columnas, como se puede ver esquematizada en la Figura 1).

Este algoritmo se implementa en el programa `t3p1_calor.py`.

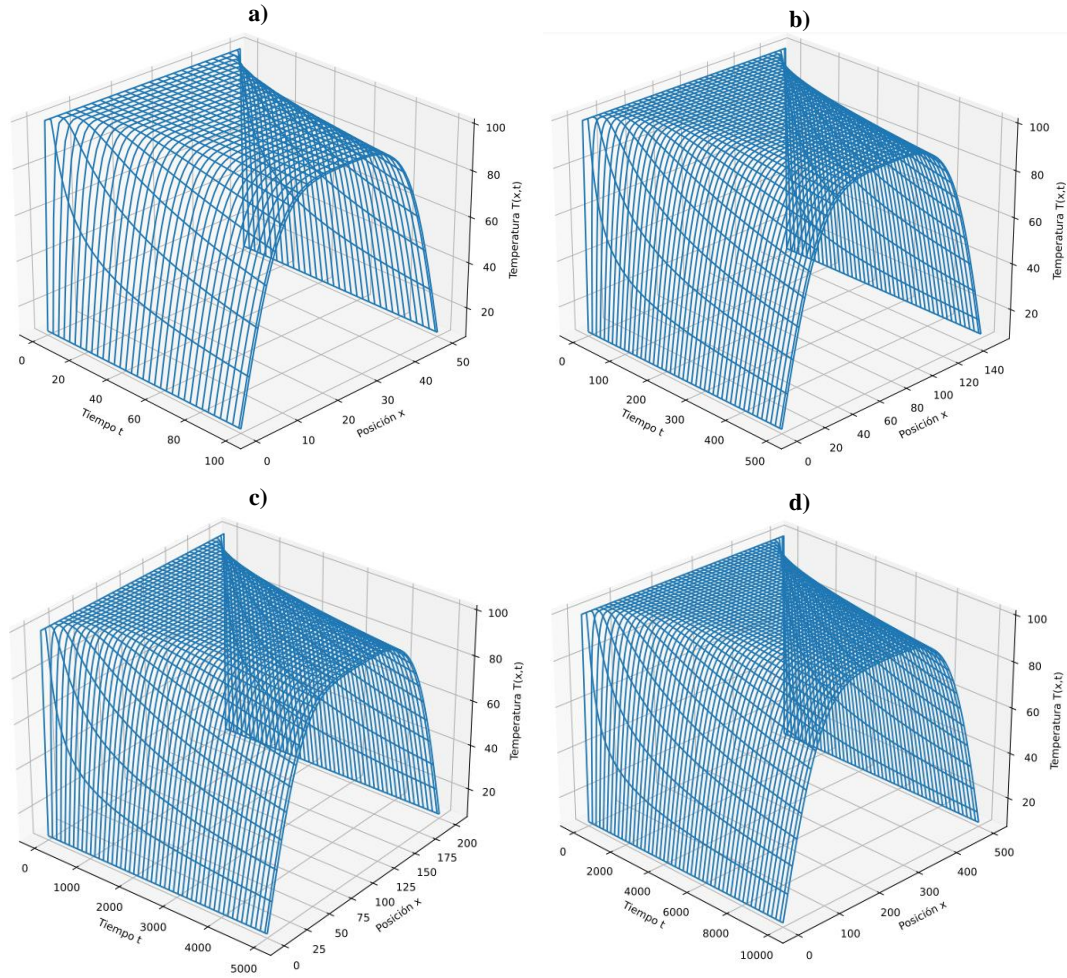


**Figura 1.** Representación de la malla para la resolución de la ecuación del calor por el método de diferencias finitas. Según la ecuación en diferencias (14), la solución  $T_{i,j+1}$  requiere de los valores  $T_{i-1,j}$ ,  $T_{i,j}$  y  $T_{i+1,j}$ . Los puntos blancos representan las condiciones iniciales/de frontera mientras que los negros representan valores discretos donde se aproxima la solución.

- c) Que la solución numérica sea estable y suave significa que no presente cambios bruscos de escala en el tiempo y espacio. Para esto han de elegirse los tamaños de paso  $\Delta x$  y  $\Delta t$  para verificar la *condición de estabilidad de Von Neumann – Courant*:

$$\eta = \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2}$$

En la Figura 2 se presentan distintas elecciones de estos pasos que satisfacen esta condición.

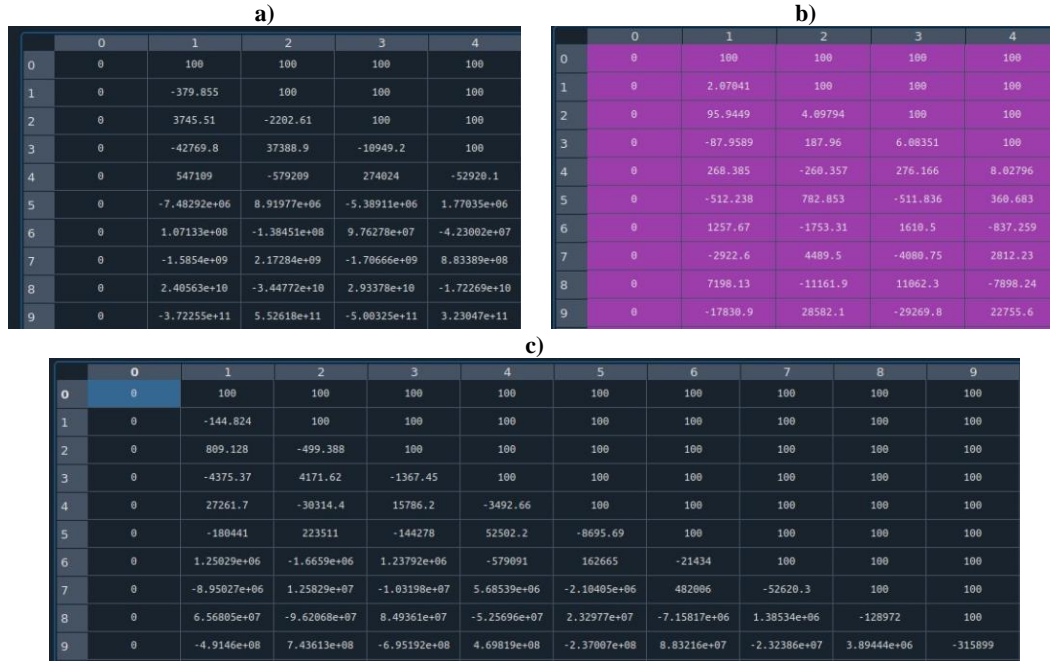


**Figura 2.** Evolución temporal de la temperatura de la barra de aluminio con  $t_f = 100$  s. En todos los casos, la elección de los parámetros genera soluciones suaves y estables.

- a)** Solución con  $N_x = 50$ ,  $N_t = 100$ ,  $\eta \approx 0.245$ . **b)** Solución con  $N_x = 150$ ,  $N_t = 500$ ,  $\eta \approx 0.006$ .  
**c)** Solución con  $N_x = 200$ ,  $N_t = 5000$ ,  $\eta \approx 0.078$ . **d)** Solución con  $N_x = 500$ ,  $N_t = 10^5$ ,  $\eta \approx 0.245$ .

- d) Cuando no se satisface la condición de estabilidad, se puede observar que el algoritmo produce salidas anómalas.

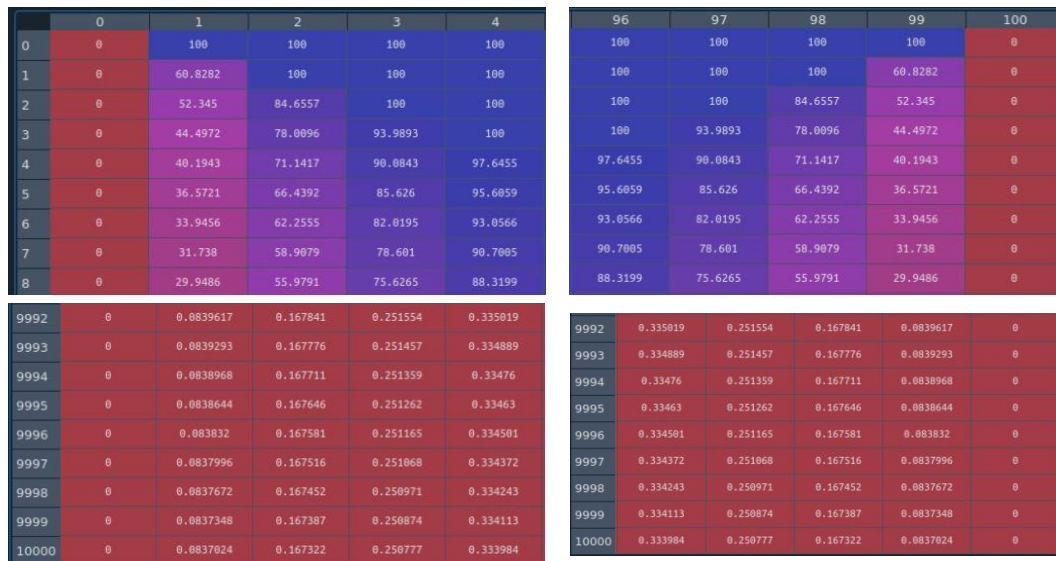
Como se puede observar en la Figura 3, las primeras soluciones generadas son o muy grandes o pequeñas en magnitud. La solución  $T_{i,j}$  depende de tres soluciones anteriores, algunas escaladas por el factor  $\eta$ , luego estos valores anómalos se propagan como consecuencia de la recurrencia (14). Esto acumula cada vez más error en las soluciones sucesivas (para tiempos mayores), dando origen a un comportamiento inestable.



**Figura 3.** Soluciones numéricas generadas con parámetros que no cumplen la condición de estabilidad de Von Neumann-Courant, para  $t_f = 100$  s. Se puede observar que, como consecuencia del valor de  $\eta$ , las soluciones sucesivas en tiempo (por filas) carecen de sentido, mismas que se propagan a lo largo de todas las otras soluciones.

a) Solución con  $N_x = 500$ ,  $N_t = 1000$ ,  $\eta \approx 2.45$ . b) Solución con  $N_x = N_t = 100$ ,  $\eta \approx 0.97$ . En este caso, la solución  $T_{1,1}$  baja súbitamente a aproximadamente 2 °C, que si concuerda con la condición de frontera impuesta pero que genera error para soluciones futuras. c) Solución con  $N_x = 350$ ,  $N_t = 250$ ,  $\eta \approx 4.8$ .

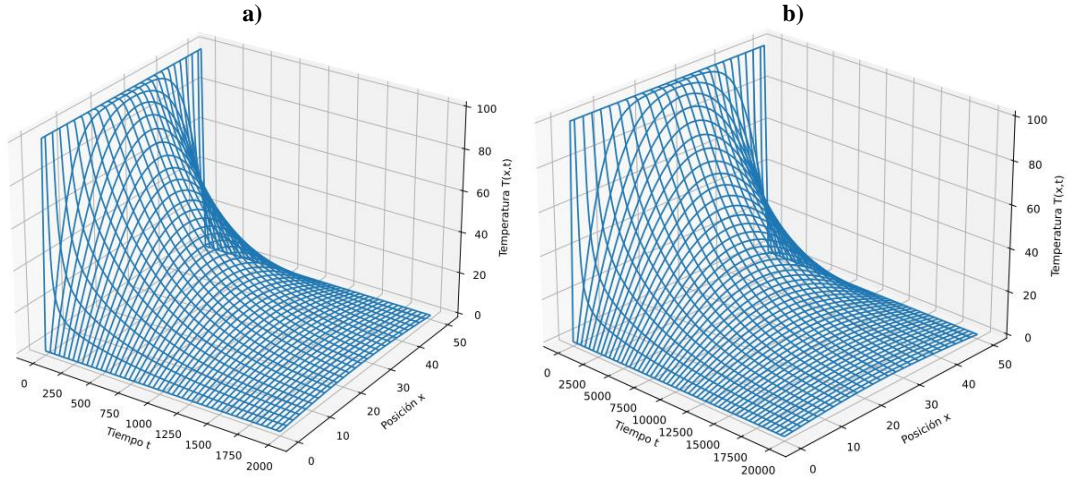
- e) Como consecuencia de la implementación del algoritmo de diferencias finitas, todos los resultados obtenidos que satisfacen la condición de estabilidad cumplen las condiciones de frontera establecidas (ver Figura 4).



**Figura 4.** Detalle de soluciones generadas con  $N_x = 100$ ,  $N_t = 10^4$ ,  $\eta \approx 0.39$ . Las condiciones de frontera en los extremos se respetan a lo largo de la ejecución del método de diferencias finitas.



- f) Las soluciones calculadas con tamaños de paso y parámetros que satisfacen la condición de estabilidad alcanzan el equilibrio térmico (esto es, una temperatura uniforme de 0 °C) para tiempos ligeramente mayores a  $t_f = 4,000$  s, como se muestra en la Figura 5.



**Figura 5.** Evolución temporal de la temperatura de la barra de aluminio con  $t_f = 4000$  s para diferentes tamaños de paso. Eventualmente se alcanza el equilibrio térmico de la barra con las condiciones de frontera en los extremos, fijadas a 0 °C.

a) Solución con  $N_x = 50$ ,  $N_t = 2000$ ,  $\eta \approx 0.49$ . b) Solución con  $N_x = 50$ ,  $N_t = 2 \times 10^4$ ,  $\eta \approx 0.05$ .

- g) La solución a la ecuación del calor (3)

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \quad x \in [0, L], \quad t \geq 0$$

sujeta a las condiciones iniciales y de frontera

$$\begin{aligned} T(x, 0) &= f(x) & \forall x \in [0, L] \\ T(0, t) &= T(L, t) = 0 & \forall t > 0 \end{aligned}$$

tiene solución analítica dada por

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 \kappa}{L^2} t\right), \quad D_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

En este caso, el perfil inicial de temperatura es constante  $f(x) = 100$  y la longitud de la barra es  $L = 1$ , entonces

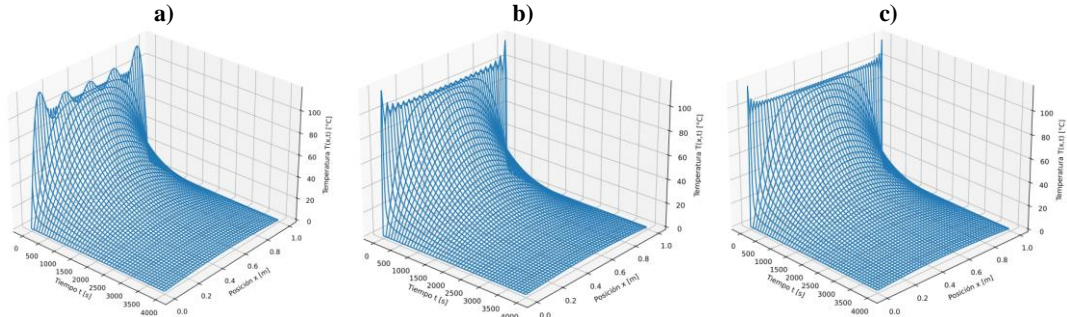
$$D_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 200 \int_0^1 \sin(n\pi x) dx = 200 \left( \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi} \right)$$

luego

$$T(x, t) = 200 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi} \right) \sin(n\pi x) \exp(-n^2 \pi^2 \kappa t)$$

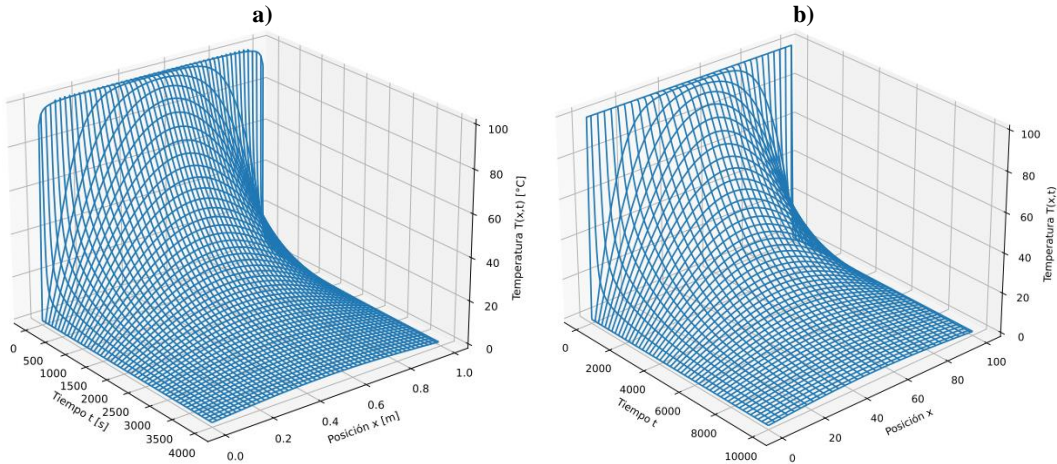
La gráfica de esta solución analítica se realiza eligiendo un número finito  $n_{max}$  de términos a considerar de su suma, algunas de estas elecciones se muestran en la Figura 6.

Así, en la Figura 7 se muestran de forma comparativa las gráficas generadas con los resultados numéricos y de la solución analítica. Se puede observar que, al menos de manera cualitativa, concuerdan de buena manera.



**Figura 6.** Evolución de la temperatura de la barra de aluminio obtenida a través de la solución analítica a la ecuación del calor, para  $0 \leq t \leq 4000$  y  $0 \leq x \leq 1$ , para distintas cantidades de términos considerados.

a) Solución con  $n_{max} = 10$ . b) Solución con  $n_{max} = 50$ . c) Solución con  $n_{max} = 100$ .



**Figura 7.** Evolución temporal de la temperatura de la barra de aluminio obtenidas analítica y numéricamente, para  $t_f = 4000$  s. De manera cualitativa, ambos resultados concuerdan de buena manera.

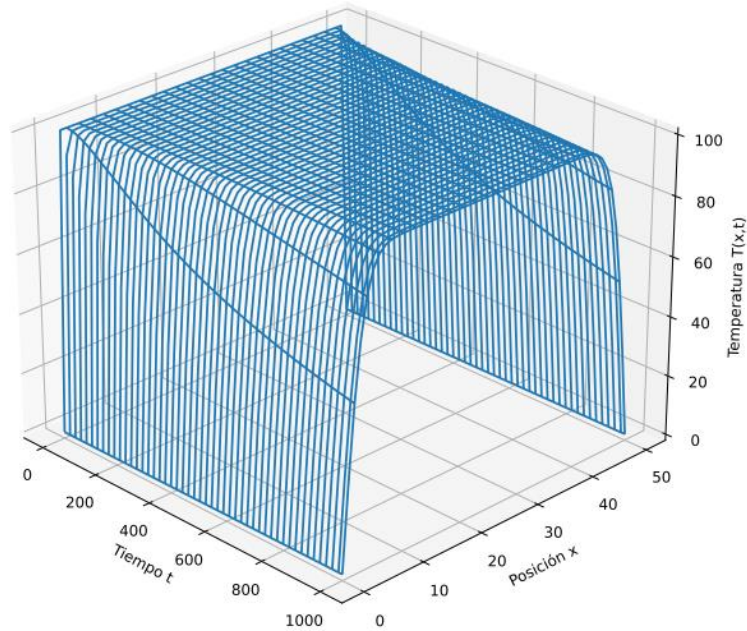
a) Gráfica de solución analítica con  $n_{max} = 200$ . b) Gráfica de solución numérica.

- h) Si se utiliza como material a la madera, se cambian las propiedades que definen el coeficiente de difusión. Ahora se considera que  $\rho = 700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ,  $C = 490 \frac{\text{J}}{^\circ\text{C kg}}$  (menor que el aluminio, ya que se requiere menos calor por unidad de masa para subir su temperatura) y  $K = 0.13 \frac{\text{W}}{^\circ\text{C m}}$  (mucho menor que el aluminio, ya que la madera conduce el calor a través de ella en mucho menor medida).



Estos coeficientes producen un coeficiente de difusión de  $\kappa \approx 3.79 \times 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$  para la madera.

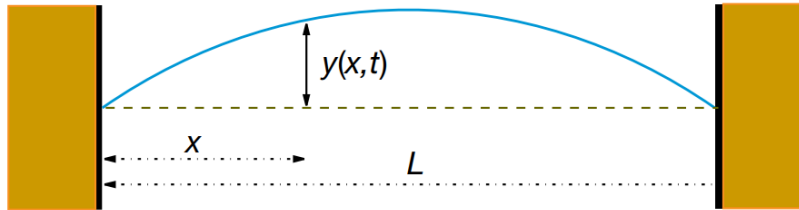
Los resultados obtenidos muestran que la disminución de la temperatura a lo largo del tiempo es en extremo lenta (ver Figura 8), consecuencia de sus propiedades físicas, especialmente de su baja conductividad térmica.



**Figura 8.** Evolución temporal de la temperatura en barra de madera con  $t_f = 4000$  s y  $\eta \approx 0.0038$ . Debido a su bajo coeficiente de difusión (consecuencia de su baja conductividad térmica), la madera tarda mucho más que la barra de aluminio en alcanzar el equilibrio térmico con las condiciones de frontera en los extremos (a  $0^\circ\text{C}$ ).

## Problema 2. Vibraciones en una cuerda.

Se considera una cuerda de longitud  $L$  y densidad  $\rho(x)$  por unidad de longitud, atada en ambos extremos y bajo una tensión  $T$ . Supóngase que el desplazamiento relativo de la cuerda con respecto a su posición de equilibrio  $\frac{y(x,t)}{L}$  es pequeño y que la pendiente  $\frac{\partial y}{\partial x}$  es pequeña.



a)

- b) A partir de  $\frac{dT(x)}{dx} \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} + T(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \rho(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$  veamos que, si la densidad es constante ( $\rho(x) = \rho = \text{cte}$ ) y si la tensión es uniforme y constante ( $T(x) = T = \text{cte}$ ) entonces  $\frac{dT(x)}{dx} = 0$ , luego

$$T \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

definiendo  $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$  se tiene  $\frac{1}{c^2} = \frac{\rho}{T}$ ; así, se obtiene la ecuación de onda estándar

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

- c) La ecuación de onda estándar en una dimensión es una ecuación diferencial parcial *hiperbólica*. Existe una estrecha relación entre la existencia y unicidad de la solución con las condiciones iniciales/de frontera que se puedan plantear para ella.

Las *condiciones de frontera de Dirichlet* especifican el valor de la función  $y(x,t)$  en la frontera (en este caso, los extremos atados de la cuerda); mientras que las *condiciones de frontera de Neumann* especifican el valor de la derivada parcial de  $y(x,t)$  con respecto a  $x$  o  $t$  también en la frontera (es posible elegir, por ejemplo, que la cuerda parta del reposo como  $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$ ). Sin embargo, ambas condiciones por separado solo aseguran la existencia de una solución, no proporcionan información suficiente para hacer que esta sea única.

Son las *condiciones de frontera de Cauchy* (que son la combinación de las de Dirichlet y de Neumann) las que proporcionan la información suficiente para dar una solución única a la ecuación de onda estándar.

Entonces, será necesario considerar tanto el valor de las amplitudes en los extremos (atados) como la magnitud de la derivada parcial de  $y(x,t)$  en  $x$  o  $t$ .

- d) Si se considera una malla con una discretización de  $N_x$  intervalos para el espacio ( $\Delta x = \frac{L-0}{N_x} = \frac{L}{N_x}$ ) y de  $N_t$  intervalos para el tiempo ( $\Delta t = \frac{t_f-0}{N_t} = \frac{t_f}{N_t}$ ) entonces para el espacio se tiene que

$$\begin{aligned} x &= i \Delta x \\ 0 &\leq i \leq N_x \end{aligned} \quad (12)$$

y para el tiempo

$$\begin{aligned} t &= j \Delta t \\ 0 &\leq j \leq N_t \end{aligned} \quad (12)$$

Así, se puede escribir a la amplitud como  $y(x, t) = y(i \Delta x, j \Delta t) = y_{i,j}$ .

- e) La EDP de onda estándar tiene dos segundas derivadas parciales, una para el espacio y otra para el tiempo. Éstas se pueden aproximar a través de la *central difference*:

- Para el espacio:

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \approx \frac{y\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t\right) - y\left(x - \frac{\Delta x}{2}, t\right)}{\Delta x}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} &\approx \frac{\left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x}\right)_{x=x+\frac{\Delta x}{2}} - \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x}\right)_{x=x-\frac{\Delta x}{2}}}{\Delta x} \\ &= \frac{\left(\frac{y(x + \Delta x, t) - y(x, t)}{\Delta x}\right) - \left(\frac{y(x, t) - y(x - \Delta x, t)}{\Delta x}\right)}{\Delta x} \\ &= \frac{y(x + \Delta x, t) + y(x - \Delta x, t) - 2y(x, t)}{\Delta x^2} \\ &= \frac{1}{\Delta x^2} (y(x + \Delta x, t) + y(x - \Delta x, t) - 2y(x, t)) \end{aligned}$$

por tanto

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta x^2} (y_{i+1,j} + y_{i-1,j} - 2y_{i,j})$$

- Para el tiempo se sigue un procedimiento análogo para concluir que

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \approx \frac{1}{\Delta t^2} (y_{i,j+1} + y_{i,j-1} - 2y_{i,j})$$

Entonces, sustituyendo en la ecuación de onda estándar se obtiene

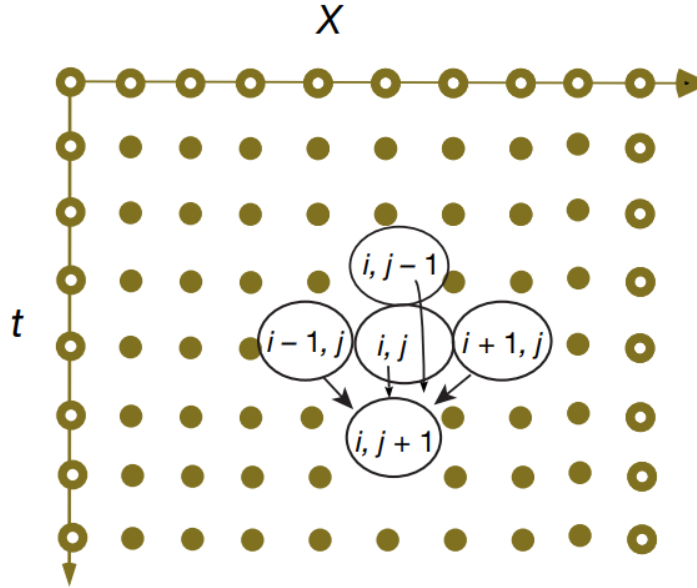
$$\frac{y_{i+1,j} + y_{i-1,j} - 2y_{i,j}}{\Delta x^2} = \frac{y_{i,j+1} + y_{i,j-1} - 2y_{i,j}}{c^2 \Delta t^2}$$

- f) Reacomodando para expresar el cálculo de  $y_{i,j+1}$  en función de solo valores de  $y(x, t)$  en tiempos anteriores:

$$\begin{aligned}\frac{y_{i,j+1} + y_{i,j-1} - 2y_{i,j}}{c^2 \Delta t^2} &= \frac{y_{i+1,j} + y_{i-1,j} - 2y_{i,j}}{\Delta x^2} \\ y_{i,j+1} + y_{i,j-1} - 2y_{i,j} &= \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} (y_{i+1,j} + y_{i-1,j} - 2y_{i,j}) \\ y_{i,j+1} &= 2y_{i,j} - y_{i,j-1} + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} (y_{i+1,j} + y_{i-1,j} - 2y_{i,j}) \\ y_{i,j+1} &= 2y_{i,j} - y_{i,j-1} + \frac{c^2}{c'^2} (y_{i+1,j} + y_{i-1,j} - 2y_{i,j})\end{aligned}$$

donde  $c' = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ , parámetro que se conoce como la *velocidad de la malla*.

Esta ecuación en diferencias dice que  $y_{i,j+1}$  (la solución a un tiempo posterior) requiere de los valores  $y_{i,j}$ ,  $y_{i,j-1}$ ,  $y_{i+1,j}$  y  $y_{i-1,j}$ , como se esquematiza en la Figura 9.



**Figura 9.** Representación de la malla para la resolución de la ecuación de onda por el método de diferencias finitas. Según la ecuación en diferencias, la solución  $y_{i,j+1}$  requiere de los valores  $y_{i-1,j}$ ,  $y_{i,j}$ ,  $y_{i+1,j}$  y  $y_{i,j-1}$ .

Los puntos blancos representan las condiciones iniciales/de frontera mientras que los negros representan valores discretos donde se aproxima la solución.

- g) Las condiciones de frontera son que la cuerda está atada en sus extremos, es decir, que la amplitud siempre es cero:  $y(0, t) = y(L, t) = 0, \forall t \geq 0$ . Estas condiciones se pueden escribir como

$$\begin{aligned}y_{0,j} &= 0 \\ y_{N_x,j} &= 0, \quad 0 \leq j \leq N_t\end{aligned}$$

Las condiciones iniciales requeridas de la forma  $y(x, 0)$ ,  $0 \leq x \leq L$  son las amplitudes iniciales de la cuerda a lo largo del eje  $x$ .

En este desarrollo se considerará que inicialmente la cuerda tenga forma triangular con un máximo de altura  $y_0$  en  $x_0 \in [0, L]$ , es decir,  $y(x_0, 0) = y_0$ . Entonces es posible calcular las amplitudes iniciales de los otros puntos de la cuerda para  $t = 0$ :

- La ecuación de la recta de  $(0,0)$  a  $(x_0, y_0)$  es  $y = \frac{y_0}{x_0} x$ .
- La ecuación de la recta de  $(x_0, y_0)$  a  $(L, 0)$  es  $y = \frac{y_0}{x_0 - L} (x - L)$ .

Si  $x_0 = i_0 \Delta x$  para  $i_0$  entero, entonces los valores iniciales  $y_{i,0}$  para  $0 \leq i \leq N_x$  son

$$y_{i,0} = \begin{cases} \frac{y_0}{x_0} \Delta x i & \text{si } 0 \leq i \leq i_0 \\ \frac{y_0}{x_0 - L} (\Delta x i - L) & \text{si } i_0 \leq i \leq N_x \end{cases}$$

Una vez establecidas las amplitudes iniciales  $y_{i,0}$  queda determinar al menos las condiciones iniciales de la forma  $y_{i,1}$  ya que son necesarias para el cálculo de soluciones posteriores a través de la ecuación en diferencias establecida.

Para esto se considerará que  $\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = 0$  en  $t = 0$ , para todo  $x \in [0, L]$ . La interpretación de esta condición inicial es que la cuerda no se suelta con una velocidad “extra” (con ningún impulso) inicialmente.

Si se aproxima  $\frac{\partial y}{\partial t}$  a través de una *forward difference*, en  $t = 0$  se tiene que

$$\left( \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right)_{t=0} \approx \left( \frac{y(x, t + \Delta t) - y(x, t)}{\Delta t} \right)_{t=0} = \frac{y(x, \Delta t) - y(x, 0)}{\Delta t} = 0$$

entonces  $y(x, \Delta t) = y(x, 0)$ , o bien

$$y_{i,1} = y_{i,0}, \quad 0 \leq i \leq N_x$$

Esta relación nos permite obtener una fila adicional de soluciones además de la dada por la condición inicial de amplitudes, con lo que ya será posible utilizar el algoritmo de diferencias finitas para resolver la ecuación de onda a través de la ecuación en diferencias obtenida.

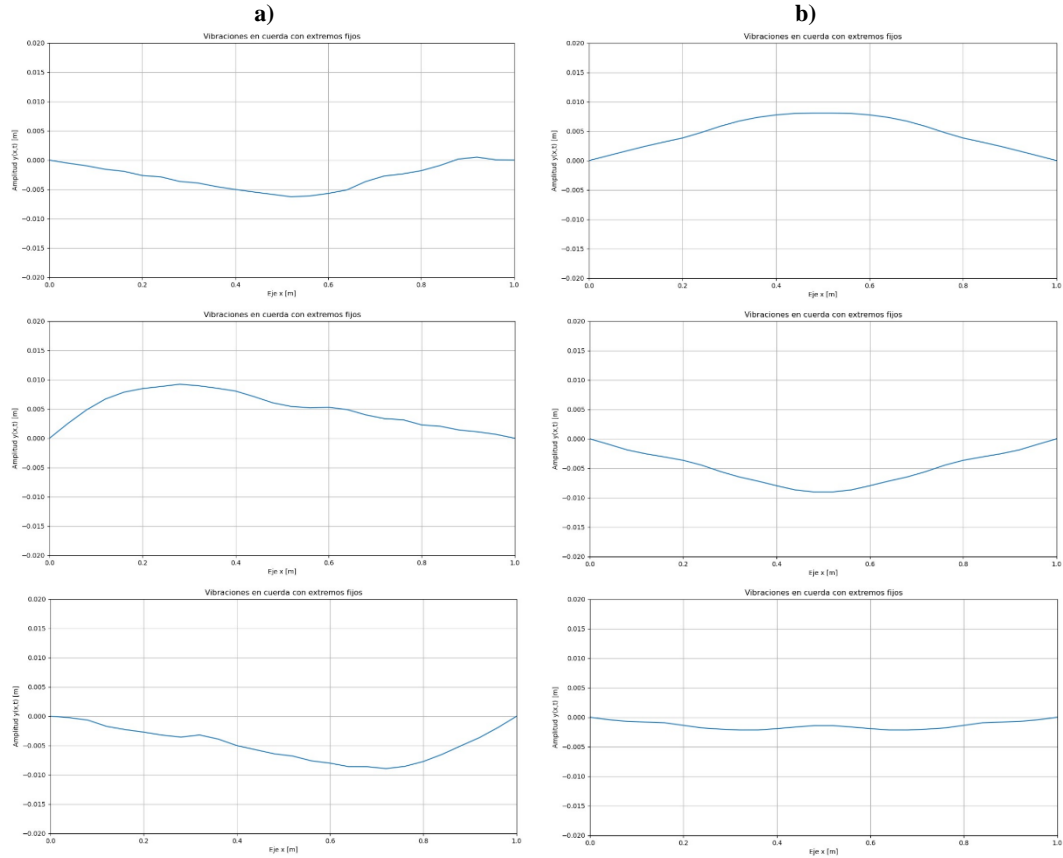
h) La condición de Courant de estabilidad es que  $\frac{c}{c'} \leq 1$ . Como  $c' = \frac{\Delta x}{\Delta t}$  se tiene que

$$c \leq \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

esto es que la velocidad de propagación de la onda debe ser menor o igual que la llamada *velocidad de la malla*. Otra posible forma de pensarlo es que  $\Delta t$ , escalado por  $c$ , debe permanecer menor o igual al  $\Delta x$ , de modo que si  $c$  es muy grande,  $\Delta t$  será muy pequeño (en principio, mucho más que  $\Delta x$ ).



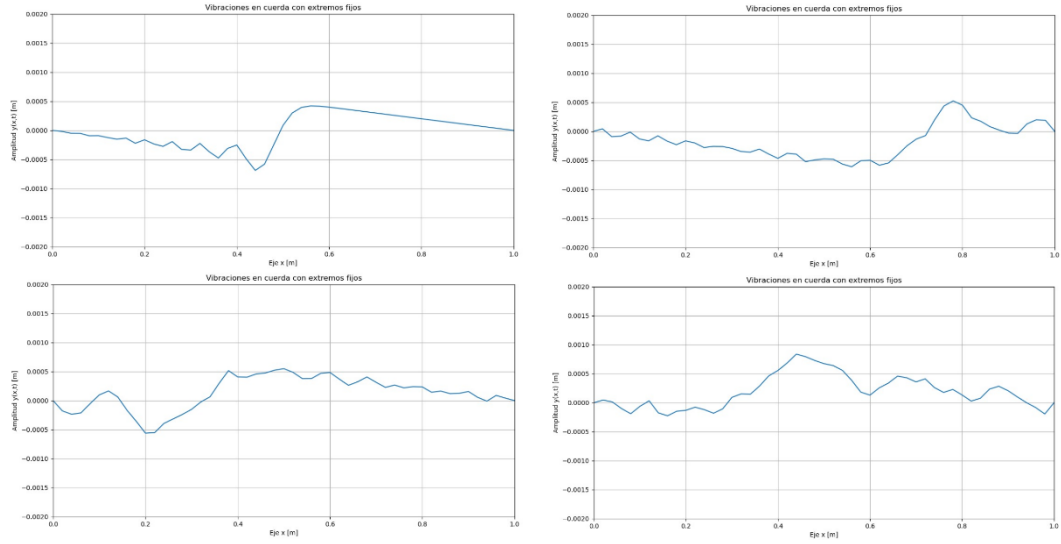
- i) La implementación de la ecuación en diferencias para la resolución numérica de la ecuación de onda se realiza en `t3p2_cuerda.py`. Se considera que la tensión a la que está sujeta la cuerda es de  $T = 10$  N, mientras que la densidad lineal de masa es de  $\rho = 0.1 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$ . La longitud de la cuerda es de  $L = 1$  m y el tiempo final de cálculo es de  $t_f = 5$  s. Los resultados obtenidos se muestran como una animación en dos dimensiones, graficando las amplitudes  $y(x, t)$  en función de  $x$  a lo largo del tiempo. Algunos de estos resultados se muestran en las Figuras 10, 11 y 12.



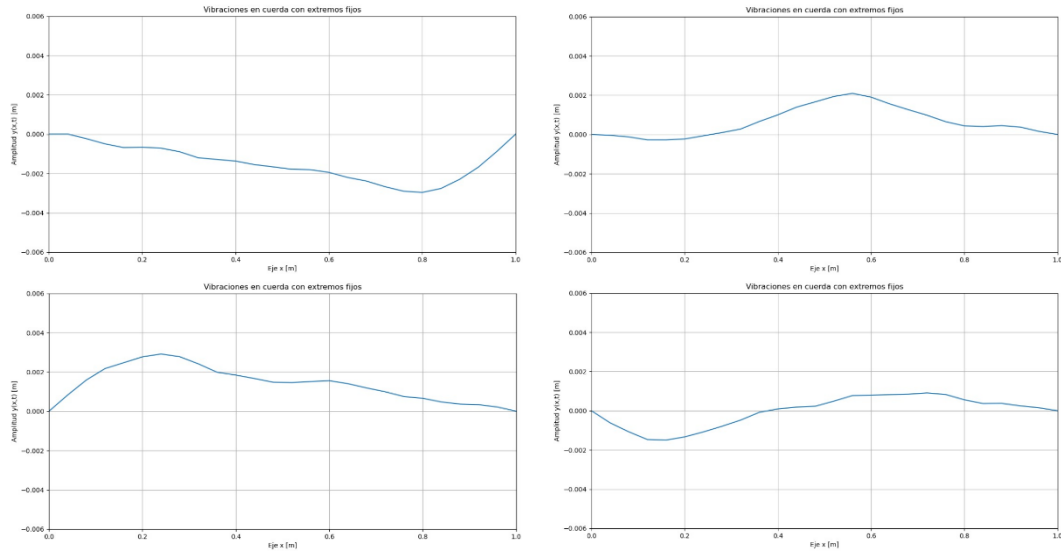
**Figura 10.** Vibraciones en cuerda con extremos fijos para distintas condiciones iniciales. Inicialmente la onda tiene forma triangular con máximo en  $(x_0, y_0)$  y en ambos casos  $N_x = 25$ ,  $N_t = 2500$ ,  $\frac{c}{c'} = 0.5$ .

Las ondas producidas viajan a través de la cuerda y se reflejan al llegar a los extremos.

**a)** Condición inicial  $(x_0, y_0) = (0.2, 0.01)$ . **b)** Condición inicial  $(x_0, y_0) = (0.5, 0.01)$ .

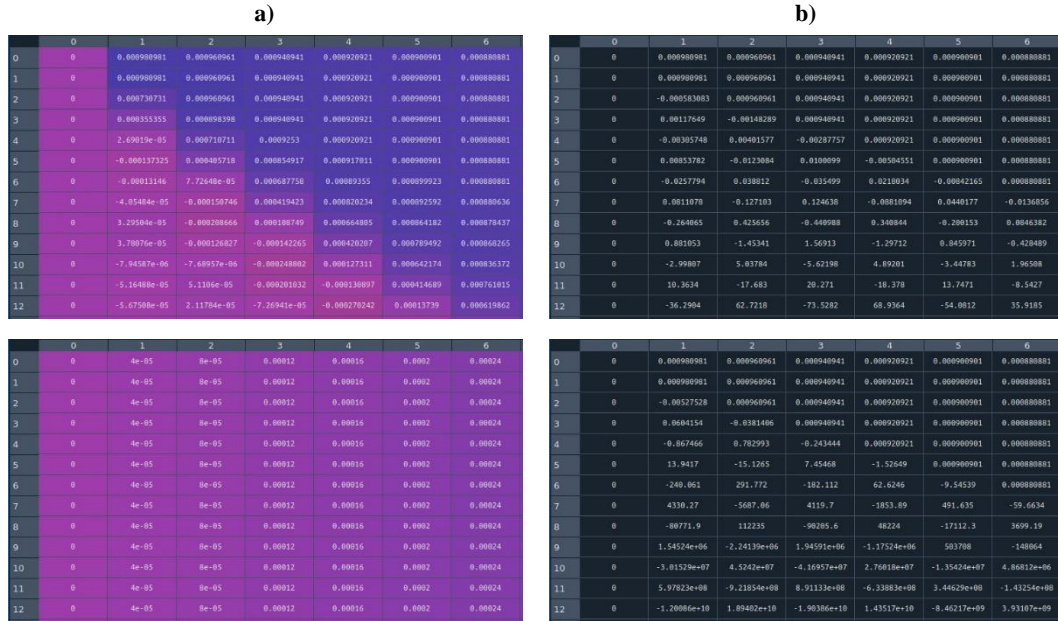


**Figura 11.** Vibraciones en cuerda con extremos fijos para condición inicial de forma triangular con máximo en  $(x_0, y_0) = (0.001, 0.001)$ ,  $N_x = 50$ ,  $N_t = 5000$ ,  $\frac{c}{c'} = 0.5$ . Las ondas viajan a través de la cuerda y se reflejan en los extremos, produciendo vibraciones a lo largo de toda la cuerda a lo largo del tiempo.



**Figura 12.** Vibraciones en cuerda con extremos fijos para condición inicial de forma triangular con máximo en  $(x_0, y_0) = (0.87, -0.003)$ ,  $N_x = 25$ ,  $N_t = 2500$ ,  $\frac{c}{c'} = 0.5$ . Las ondas viajan a través de la cuerda y se reflejan en los extremos, produciendo vibraciones a lo largo de toda la cuerda a lo largo del tiempo.

- j) Es posible hacer que la condición de Courant de estabilidad  $\frac{c}{c'} \leq 1$  no se satisfaga cambiando los valores de los tamaños de paso  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  o los parámetros que afectan la velocidad de propagación  $c$  de la onda: la tensión  $T$  o la densidad  $\rho$ . Para observar los efectos en las soluciones que en principio no son estables, en la Figura 13 se muestran detalles de dichos valores para algunas condiciones iniciales. Se puede observar que cuando no se verifica la condición de Courant, las amplitudes calculadas se vuelven muy grandes a lo largo del tiempo, propagando este comportamiento para soluciones futuras y produciendo elongaciones de varios ordenes de magnitud más grandes que el máximo inicial  $y_0$ .



**Figura 13.** Soluciones numéricas de la ecuación de onda para condiciones iniciales donde se satisface o no la condición de estabilidad de Courant  $\frac{c}{c'} \leq 1$ .

- a)** En este par de casos se tiene  $\frac{c}{c'} = 0.5, 0.8\bar{3}$  respectivamente. Las soluciones muestran un comportamiento suave y estable a lo largo del tiempo, acotadas por la elongación máxima  $y_0$ . **b)** En este par de casos se tiene  $\frac{c}{c'} = 1.25, 2.5$  respectivamente. Se observa que las soluciones se disparan durante las primeras iteraciones del algoritmo, propagando el comportamiento para soluciones futuras, creando un comportamiento inestable en ellas.