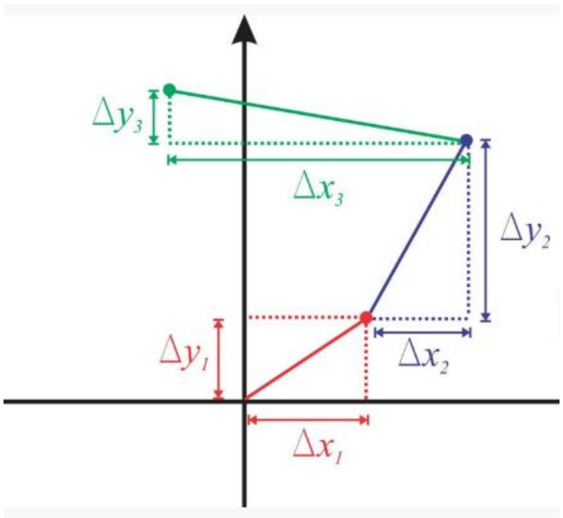
Problema 1: Estudiando una caminata aleatoria en 2D



Para implementar una caminata aleatoria de n pasos en el plano xy basta generar por cada paso un par de números aleatorios uniformes Δx_i, Δy_i en el intervalo $[-1,1]$. Para hacer que el paso sea unitario, se dividen éstos últimos entre la longitud L_i del paso dada por

$$L_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$$

Luego, para visualizar de forma gráfica la trayectoria, es necesario graficar los diferentes puntos del plano por donde pasa la caminata, esto es que, si se va en el i-ésimo paso, el vector de trayectoria $[x_i, y_i]^T$ es

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{i} \Delta x_j \\ \sum_{j=1}^{i} \Delta y_j \end{bmatrix}, 1 \leq i, j \leq n$$

La implementación de este procedimiento se realiza en el programa `caminata2D.py`.

Si el número de pasos planeado para cada caminata es n y se desean hacer $k = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ experimentos entonces basta, con ayuda de un ciclo, dicho número de caminatas aleatorias. Se debe procurar que se inicien desde el origen de coordenadas, se guarden los datos de los pasos y los puntos de trayectoria de cada experimento. Algunos ejemplos de caminatas obtenidas se muestran en la Figura 1.

Para estimar $\langle R^2(n) \rangle$ (que es el valor esperado del cuadrado de la longitud del desplazamiento R de una caminata aleatoria de n pasos) se promedia este valor obtenido para cada uno de los k experimentos. Esto se realiza obteniendo las coordenadas del punto de trayectoria final de la caminata (x_n, y_n) para el experimento i-ésimo de la forma

$$R_i^2(n) = x_n^2 + y_n^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} \Delta x_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} \Delta y_j \right)^2, \qquad 1 \leq i \leq k$$

de modo que

$$\langle R^2(n) \rangle \approx \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} R_i^2(n)$$

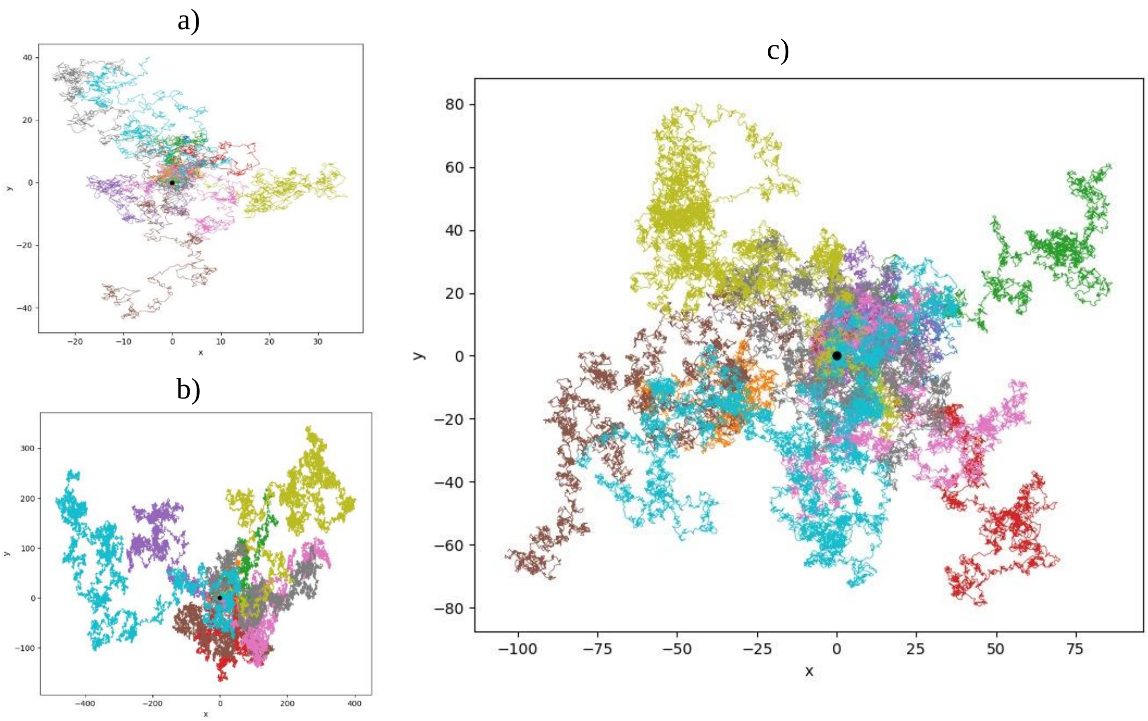


Figura 1. Caminatas aleatorias en el plano xy; se muestran 10 caminatas para distintos n en cada gráfica. Es interesante notar que el espacio en el que se distribuyen las trayectorias permanece acotado por valores del orden de $\sqrt{n}$. **a)** Caminatas aleatorias con $n = \{100, 200, \cdots, 10^3\}$. **b)** Caminatas aleatorias con $n = \{1000, 2000, \cdots, 10^4\}$. **c)** Caminatas aleatorias con $n = \{1 \times 10^4, 2 \times 10^4, \cdots, 10^5\}$.

Para corroborar la hipótesis teórica de que, para una caminata de n pasos, se verifica que

$$\frac{\langle \Delta x_i \Delta x_j \rangle_{i \neq j}}{R^2(n)} = \frac{\Delta x_i \cdot \Delta x_j}{n \cdot R^2(n)} \approx 0$$

se eligen arbitrariamente un par de valores de paso Δx_i, Δx_j en cada experimento una vez calculado el valor de $R^2(n)$. Algunos resultados se muestran en la Figura 2. Es interesante observar que para valores cada vez más grandes de n, el cociente $\frac{\langle \Delta x_i \Delta x_j \rangle_{i \neq j}}{R^2(n)}$ es más pequeño.

```
Hipotesis teorica para N= 100 pasos:
3.483942229752906e-08
Hipotesis teorica para N= 200 pasos:
1.70712265802379e-08
Hipotesis teorica para N= 300 pasos:
-1.0998153181843944e-08
Hipotesis teorica para N= 400 pasos:
-7.861517938080326e-11
Hipotesis teorica para N= 500 pasos:
7.486956405548278e-10
Hipotesis teorica para N= 600 pasos:
2.2414290979734624e-09
Hipotesis teorica para N= 700 pasos:
7.452943073261697e-10
Hipotesis teorica para N= 800 pasos:
2.8557947419563277e-10
Hipotesis teorica para N= 900 pasos:
2.3129653438929694e-10
Hipotesis teorica para N= 1000 pasos:
5.361435671327508e-10
```

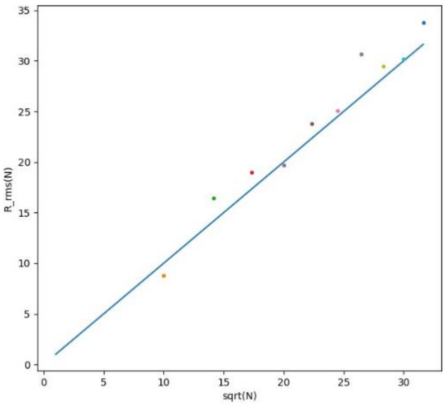
```
Hipotesis teorica para N= 1000 pasos:
1.2948973948598254e-10
Hipotesis teorica para N= 2000 pasos:
1.0654577047976953e-10
Hipotesis teorica para N= 3000 pasos:
2.3998470474726543e-12
Hipotesis teorica para N= 4000 pasos:
3.2533314982413784e-12
Hipotesis teorica para N= 5000 pasos:
-1.1357006786862402e-11
Hipotesis teorica para N= 6000 pasos:
2.564121302920838e-12
Hipotesis teorica para N= 7000 pasos:
8.847057906346643e-13
Hipotesis teorica para N= 8000 pasos:
-4.311211290719875e-13
Hipotesis teorica para N= 9000 pasos:
5.559187410083578e-13
Hipotesis teorica para N= 10000 pasos:
4.2620593054518975e-13
```

```
Hipotesis teorica para N= 10000 pasos:
-4.612845971263644e-13
Hipotesis teorica para N= 20000 pasos:
-1.011118015255641e-13
Hipotesis teorica para N= 30000 pasos:
1.3263141286180672e-14
Hipotesis teorica para N= 40000 pasos:
-1.6850806471062255e-15
Hipotesis teorica para N= 50000 pasos:
-6.085219480070168e-15
Hipotesis teorica para N= 60000 pasos:
5.574992490005297e-15
Hipotesis teorica para N= 70000 pasos:
-1.0990264057676836e-15
Hipotesis teorica para N= 80000 pasos:
-1.419192507658299e-15
Hipotesis teorica para N= 90000 pasos:
9.983717857889993e-16
Hipotesis teorica para N= 100000 pasos:
-1.0722934497060309e-15
```

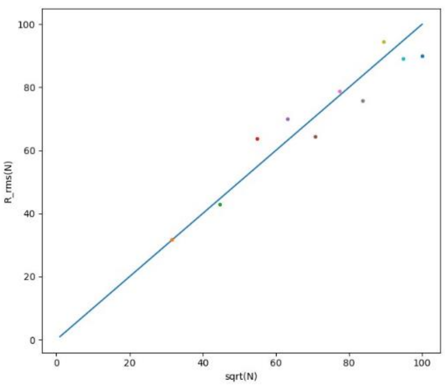
Figura 2. Obtención del cociente $\frac{\langle \Delta x_i \Delta x_j \rangle_{i \neq j}}{R^2(N)}$ para diversas caminatas aleatorias de N pasos. Es interesante observar cómo, para mayor cantidad de pasos, este cociente tiende a cero.

Finalmente, para observar la relación entre $\sqrt{N}$ y $R_{rms} = \sqrt{\langle R^2(N) \rangle}$ para diversos valores de N (cada vez más grandes) se implementa un ciclo en el que se realizan por cada N, $k = \lfloor \sqrt{N} \rfloor$ experimentos (caminatas aleatorias) de N pasos cada uno, tras los que se calcula el valor del R_{rms} correspondiente. Algunos resultados se muestran en la Figura 3.

a)



b)



c)

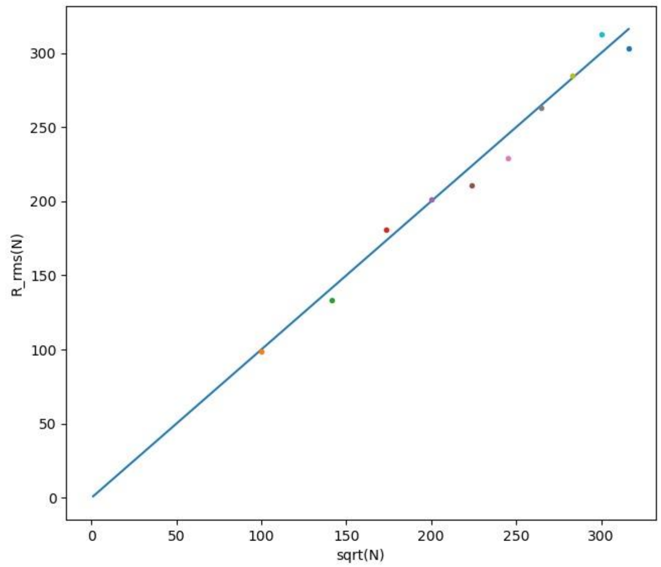


Figura 3. Valor cuadrático medio $R_{rms}(N)$ en función de $\sqrt{N}$ para diversas secuencias de valores de N. En cada gráfica se añade una recta correspondiente a la función identidad.
a) En este caso $N = \{100,200,\cdots,1000\}$. Es posible observar que los diversos puntos de la gráfica parecen mostrar un comportamiento lineal, pero con distancias a la recta identidad relativamente grandes.
b) En este caso $n = \{1000,2000,\cdots,10^4\}$. Es posible apreciar cómo las distancias de los puntos decrecen con respecto a **a)** en algunos casos, manteniendo una relación aproximadamente lineal.
c) En este caso $n = \{1\times10^4, 2\times10^4,\cdots,10^5\}$. La principal observación es que es posible decir que $R_{rms}(N) \approx \sqrt{N}$, como se puede observar por la cercanía a la recta identidad.