

MODELAGEM MAGNÉTICA 3D PARA CORPOS ELIPSOIDAIIS

Diego Takahashi Tomazella

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Geofísica do Observatório Nacional/MCTI, como parte dos requisitos necessários à obtenção do Grau de Mestre em Ciências.

Orientador: Vanderlei Coelho de Oliveira Jr.

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2017

MODELAGEM MAGNÉTICA 3D PARA CORPOS ELIPSOIDAIIS

Diego Takahashi Tomazella

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA DO OBSERVATÓRIO NACIONAL/MCTI COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM GEOFÍSICA.

Examinada por:

Prof. Vanderlei Coelho de Oliveira Jr. - Orientador, D.Sc.

Prof.^a Valéria Cristina Ferreira Barbosa, D.Sc.

Prof. Wladimir Shukowsky, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
FEVEREIRO DE 2017

Takahashi Tomazella, Diego

Modelagem Magnética 3D para corpos elipsoidais/Diego
Takahashi Tomazella. – Rio de Janeiro: ON/MCTI, 2017.
XIII, 57 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Vanderlei Coelho de Oliveira Jr.

Dissertação (mestrado) – ON/MCTI/Programa de Pós-
graduação em Geofísica, 2017.

Referências Bibliográficas: p. 47 – 51.

1. Métodos Potenciais. 2. Magnetometria. 3.
Modelagem direta. 4. Modelagem elipsoidal. I.
, . II. Observatório Nacional/MCTI, Programa de Pós-
graduação em Geofísica. III. Título.

*Dedico este trabalho a todos que
ainda sobrevivem com a ciência.
Apesar do golpe.*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que me acompanharam ao longo deste trabalho e que de alguma forma contribuíram para que fosse concluído.

À minha mãe, que ainda me aceita dentro de casa toda vez que volto lá.

Aos amigos do Observatório Nacional, que me aceitam toda vez que volto aqui.

Ao meu orientador Vanderlei, que sempre arranja tempo para mais uma conversa e mais uma explicação.

Aos companheiros de janta, que sempre arranjam estômago para mais uma pizza e um hambúrguer, em especial, Daniel, Felipe e Wellington.

Às companheiras de trabalho, que sempre me alertam para o perigo de mais uma pizza e um hambúrguer, em especial, Larissa, Pillar e Shayane.

Ao senhor Sérgio do prédio, que me deixa o jornal todos os dias no escaninho do apartamento.

E também ao CNPq, que financiou esta pesquisa e não me deixou morrer de fome.

Resumo da Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Geofísica do Observatório Nacional/MCTI como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

MODELAGEM MAGNÉTICA 3D PARA CORPOS ELIPSOIDAIIS

Diego Takahashi Tomazella

Fevereiro/2017

Orientador: Vanderlei Coelho de Oliveira Jr.

Programa: Geofísica

Apresenta-se, nesta dissertação, a modelagem direta do campo magnético gerado por fontes elipsoidais triaxiais, prolatas e oblatas. Os dados sintéticos foram produzidos com uma implementação utilizando linguagem Python, para obtenção dos mapas das três componentes de campo magnético e também da anomalia total de campo aproximada para n-fontes. Como o modelo elipsoidal permite uma grande flexibilidade em sua forma geométrica, apresentaremos os resultados obtidos para validação do código comparando com outras formas, como esferas e também por simulações numéricas que incluem o efeito de anisotropia e o de desmagnetização no cálculo do vetor de magnetização resultante da fonte, uma vez que esta pode ser calculada de forma analítica em elipsoides. Isto torna o trabalho relevante tanto como ferramenta educacional (e.g., métodos potenciais e magnetismo de rochas) e geofísica aplicada (e.g., caracterização de corpos mineralizados de alta susceptibilidade). O código está disponibilizado livremente para uso da comunidade científica pelo software *Fatiando a Terra*.

Abstract of Dissertation presented to Observatório Nacional/MCTI as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

3D MAGNETIC MODELLING FOR ELLIPSOIDAL BODIES

Diego Takahashi Tomazella

February/2017

Advisor: Vanderlei Coelho de Oliveira Jr.

Department: Geophysics

In this work, we present results from a numerical modeling of the magnetic field and total field anomaly, represented by triaxial, prolate and oblate ellipsoid sources. The synthetic data is generated by means of a Python code to obtain the three components of the magnetic field and the approximate total-field anomaly for n-sources. Numerical tests allowed us to compare the results with other implementation (e.g. spheres) and to provide analytical results for anisotropy of magnetic susceptibility as well as for self-demagnetization effects, which can be easily adapted for distinctive geologic structures - hence being an useful tool for educational (e.g., potential methods and rock magnetism) and applied geophysics (e.g., characterization of high magnetic susceptibility, mineralized bodies) purposes. This code will be freely available to the scientific community through the *Fatiando a Terra* software.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xii
1 Introdução	1
2 Metodologia	4
2.1 Parâmetros geométricos e sistemas de coordenadas	4
2.2 Background Teórico	6
2.3 Transformação de coordenadas	9
2.4 Tensores de depolarização transformados $\tilde{\mathbf{N}}(\tilde{\mathbf{r}})$	11
2.4.1 Tensor de depolarização $\tilde{\mathbf{N}}^\dagger$	11
2.4.2 Tensor de depolarização $\tilde{\mathbf{N}}^\dagger(\tilde{\mathbf{r}})$	13
2.5 Campo magnético interno e magnetização	14
2.6 Campo magnético externo e anomalia de campo-total	18
3 Implementação computacional	20
4 Simulações Numéricas e Discussões	24
4.1 Modelos elipsoidais	24
4.2 Elementos do tensor de depolarização	31
4.3 Comparações entre os modelos elipsoidais	33
4.4 Susceptibilidade	40
4.5 Anisotropia de forma	41
5 Conclusões	45
Referências Bibliográficas	47
A Relação entre as derivadas das funções $f(\mathbf{r})$ e $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})$	52
B Parâmetro λ e suas derivadas espaciais	54
B.1 Parâmetro λ definido para os elipsoides triaxiais	54

B.2	Parâmetro λ que define os elipsoides prolatos e oblatos	56
B.3	Derivadas espaciais do parâmetro λ	57

Lista de Figuras

2.1	Figura que mostra as orientações de um elipsoide dado um sistema de coordenadas principal (x, y, z) e um sistema local $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$	7
3.1	Cookbook para gerar um modelo elipsoidal triaxial e calcular a anomalia de campo total.	21
3.2	Função que calcula a anomalia de campo total aproximada de um elipsoide triaxial.	22
3.3	Soma dos fatores de desmagnetização. No SI a soma deverá ser igual à 1 (um).	23
4.1	As componentes do campo magnético gerado por um elipsoide triaxial e a anomalia de campo total aproximada.	25
4.2	As componentes do campo magnético gerado por um elipsoide prolato e a anomalia de campo total aproximada.	27
4.3	As componentes do campo magnético gerado por um elipsoide oblato e a anomalia de campo total aproximada.	28
4.4	As componentes do campo magnético gerado por dois corpos triaxiais e a anomalia de campo total aproximada.	30
4.5	Teste dos fatores de desmagnetização para um elipsoide triaxial. . . .	31
4.6	Teste dos fatores de desmagnetização para um elipsoide prolato. . . .	32
4.7	Teste dos fatores de desmagnetização para um elipsoide oblato. . . .	33
4.8	Comparação da anomalia de campo total aproximada entre um elipsoide triaxial com três semi-eixos muito próximos, simulando uma esfera, e uma esfera.	35
4.9	Comparação da anomalia de campo total aproximada entre um elipsoide triaxial com um dos semi-eixos mais alongado que o restante e um elipsoide prolato.	37
4.10	Comparação da anomalia de campo total aproximada entre um elipsoide triaxial com três semi-eixos muito próximos e um elipsoide oblato. . . .	39

4.11	Teste do efeito da susceptibilidade na desmagnetização de um elipsoide imerso em um campo externo constante de inclinação 30° e declinação -15°	40
4.12	Simulação, da mudança do vetor de magnetização resultante, de um elipsoide triaxial com o aumento do semi-eixo maior.	42
4.13	Simulação, da mudança do vetor de magnetização resultante, de um elipsoide triaxial com o aumento do semi-eixo maior.	44

Lista de Tabelas

4.1	Parâmetros do elipsoide triaxial modelado. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulo de azimuth, δ e γ , respectivamente, para as orientações da susceptibilidade.	24
4.2	Parâmetros do elipsoide prolato modelado. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulo de azimuth, δ e γ , respectivamente, para as orientações da susceptibilidade.	26
4.3	Parâmetros do elipsoide oblato modelado. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulo de azimuth, δ e γ , respectivamente, para as orientações da susceptibilidade.	26
4.4	Parâmetros dos dois elipsoides triaxiais modelados. O segundo elipsoide é mostrada na tabela pela índice 2 nos parâmetros. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulo de azimuth, δ e γ , respectivamente, para as orientações da susceptibilidade.	29
4.5	Parâmetros do elipsoide triaxial modelado para comparação com a esfera. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulo de azimuth, δ e γ , respectivamente, para as orientações da susceptibilidade.	34
4.6	Parâmetros do elipsoide triaxial modelado para comparação com o elipsoide prolato. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulo de azimuth, δ e γ , respectivamente, para as orientações da susceptibilidade.	36
4.7	Parâmetros do elipsoide prolato modelado para comparação com elipsoide triaxial. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulo de azimuth, δ e γ , respectivamente, para as orientações da susceptibilidade.	36
4.8	Parâmetros do elipsoide triaxial modelado para comparação com o elipsoide oblato. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulo de azimuth, δ e γ , respectivamente, para as orientações da susceptibilidade.	38

4.9	Parâmetros do elipsoide oblato modelado para compração com o elipsoide triaxial. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulo de azimuth, δ e γ , respectivamente, para as orientações da susceptibilidade.	38
4.10	Parâmetros do elipsoides triaxiais modelados com o semi-eixo a crescente e azimuth com grande diferença na direção com relação ao campo da Terra para verificar a anisotropia de forma. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulo de azimuth, δ e γ , respectivamente, para as orientações da susceptibilidade.	41
4.11	Parâmetros do elipsoides triaxiais modelados com o semi-eixo a crescente e azimuth com grande diferença na direção com relação ao campo da Terra para verificar a anisotropia de forma. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulo de azimuth, δ e γ , respectivamente, para as orientações da susceptibilidade.	43

Capítulo 1

Introdução

Baseado na teoria matemática da indução magnética desenvolvida por POISSON (1824), MAXWELL (1873), afirmou que se U é o potencial gravitacional produzido por um corpo de densidade ρ e forma geométrica arbitrária num ponto (x, y, z) , então, $-\frac{\partial U}{\partial x}$ é o potencial escalar magnético que seria produzido por este mesmo corpo, no mesmo ponto, se sua magnetização for uniforme ao longo do eixo x com intensidade ρ . MAXWELL (1873), generalizou essa ideia como uma forma de determinar o potencial magnético escalar produzido por um corpo magnetizado uniformemente em qualquer direção. Presumindo que esta magnetização uniforme seria devida à indução e proporcional ao campo magnético resultante (intensidade) dentro do corpo, Maxwell postulou que este campo também deveria ser uniforme e paralelo à magnetização, uma vez que este é proporcional ao gradiente do potencial magnético escalar dentro do corpo. Como consequência, o potencial gravitacional U nos pontos dentro do corpo deve ser descrito por uma função quadrática das coordenadas espaciais. Aparentemente, MAXWELL (1873) foi o primeiro a postular que elipsoides são os únicos corpos finitos que possuem um potencial gravitacional que satisfaz essa propriedade e que, portanto, são os únicos que podem ser magnetizados uniformemente na presença de um campo magnético uniforme.

Esta propriedade pode ser estendida para outros corpos cuja forma se deriva de um elipsoide (e.g., esferas, cilindros elípticos). Por outro lado, todos os demais corpos não podem ser magnetizados uniformemente na presença de um campo indutor uniforme (CLARK e EMERSON, 1999; JAHREN, 1963; JOSEPH e SCHLÖMANN, 1965). Uma consequência importante proveniente da uniformidade do campo magnético interno em elipsoides, é que estes corpos são os únicos que possuem solução verdadeiramente analítica para a desmagnetização CLARK *et al.* (1986). A desmagnetização (campo criado em resposta ao campo indutor sobre o corpo) contribui para o decréscimo da magnetização resultante e o seu cálculo é dependente apenas da forma do corpo (i.e. dos seus semi-eixos) por componentes chamados de fatores de desmagnetização. A desmagnetização dá origem a anisotropia

magnética de forma, ou seja, à direções preferenciais para um corpo se magnetizar. Ao magnetizar um corpo, forças magnetoestáticas produzem uma certa concentração de carga em sua superfície que criam um polo magnético para certa direção (HROUDA, 1982; TAUXE, 2003). Há outros dois tipos de anisotropia magnética: a anisotropia magnetocristalina, originada da geometria interna e da composição química dos cristais, que cria direções preferenciais de magnetização, pois seus eixos possuem diferentes propriedades magnéticas. Isso ocorre, porque o momento de energia magnética tende a se alinhar na direção ao longo do eixo que minimiza a energia magnética. Uma outra forma é a anisotropia de *stress*, que ocorre quando as propriedades magnéticas são alteradas devido à uma tensão aplicada no grão magnético, num fenômeno conhecido como efeito magnetostriectivo (o equivalente magnético do efeito piezo-elétrico) (HROUDA, 1982; TAUXE, 2003; THOMPSON e OLDFIELD, 1986).

É de conhecimento geral, que a desmagnetização pode ser negligenciada se um corpo possui uma susceptibilidade menor que 0.1 SI (AUSTIN *et al.*, 2014; CLARK *et al.*, 1986; CLARK, 2014; EMERSON *et al.*, 1985; ESKOLA e TERVO, 1980; GUO *et al.*, 1998, 2001; HILLAN e FOSS, 2013; PURSS e CULL, 2005). Entretanto, negligenciar a desmagnetização em situações geológicas em que os corpos possuem alta susceptibilidade (> 0.1 SI), como formações ferríferas bandadas por exemplo, podem alterar drasticamente os resultados obtidos de métodos magnéticos.

Devido a flexibilidade de parametrização, elipsoides podem assumir uma grande variedade de formas, assim podem ser usados para representar diferentes corpos geológicos, como por exemplo, desde corpos esféricos (três semi-eixos de valores similares) ou corpos mineralizados em formato de *pipe* (um semi-eixo mais alongado). FARRAR (1979), demonstrou a importância do modelo elipsoidal, levando em consideração a desmagnetização e determinando direções de perfuração confiáveis no campo de Tennant Creek, Austrália. Posteriormente, HOSCHKE (1991) mostrou a eficiência do modelo elipsoidal, localizando e definindo corpos mineralizados de ferro no campo de Tennant Creek. CLARK (2000), fornece uma discussão sobre a influência da desmagnetização na interpretação magnética do depósito de cobre-ouro de Osborne, Austrália. Este depósito é hospedado por corpos mineralizados de ferro de alta susceptibilidade. De acordo com CLARK (2000), negligenciar o efeito de desmagnetização levaria a um erro de $\approx 55^\circ$ na interpretação da inclinação. Baseado na modelagem magnética e em medidas das propriedades da rocha, AUSTIN *et al.* (2014), mostrou que, ao contrário de interpretações anteriores, a magnetização do depósito de óxido de ferro-cobre-ouro (IOCG) em Candelaria, Chile não é dominada pela componente da indução. Na verdade, o depósito tem uma fraca magnetização remanente e é fortemente afetada pela desmagnetização.

Estes exemplos mostram a importância prática da desmagnetização para a cor-

reta interpretação dos dados magnéticos produzidos por corpos geológicos de alta susceptibilidade. Além disso, mostram a importância do modelo elipsoidal para produzir modelos geológicos confiáveis de corpos mineralizados, o que pode significar em uma redução significativa dos custos associados com perfuração.

Uma vasta literatura sobre a modelagem magnética de corpos elipsoidais foi desenvolvida ao longo dos anos, por brilhantes pesquisadores. No entanto, o interesse sobre o assunto ainda não se esgotou, evidenciado por diversos trabalhos recentes publicados neste campo. Além disso, falta para a comunidade de geociências uma ferramenta de fácil uso para simular o campo magnético produzido por elipsoides uniformemente magnetizados. Tal ferramenta pode ser útil tanto como para ensino, como para geofísica de exploração. Para preencher esta lacuna, provemos aqui uma série de rotinas para modelar o campo magnético produzido por elipsoides. As rotinas são escritas em linguagem Python como parte do *Fatiando a Terra* (UIEDA *et al.*, 2013), que é uma biblioteca livre de modelagem e inversão em geofísica. Tentamos usar as melhores práticas de integração contínua, documentação, teste de unicidade, e controle de versão para prover um código confiável e fácil de usar. Esperamos que os aspectos teóricos e práticos apresentados aqui, sejam úteis para toda a comunidade de geocientistas.

Capítulo 2

Metodologia

2.1 Parâmetros geométricos e sistemas de coordenadas

Seja (x, y, z) um ponto referido à um sistema de coordenadas cartesiano com eixos x , y e z com direções para, respectivamente, Norte, Leste e para baixo. Por conveniência, nós denominamos este sistema de coordenadas como *sistema de coordenadas principal*. Considerando um corpo elipsoidal com centro nos pontos (x_c, y_c, z_c) , semi-eixos definidos por constantes positivas a , b , c , onde $a > b > c$, e orientações definidas por três ângulos ε , ζ , e η conforme Figura 2.1. Os ângulos ε , ζ , e η são chamados *strike*, *dip* e *rake*, respectivamente, e são comumente usados para definir linhas de orientação em geologia estrutural (ALLMENDINGER *et al.*, 2012; CLARK *et al.*, 1986).

Os pontos (x, y, z) , que descrevem a superfície deste corpo elipsoidal, satisfazem a seguinte equação:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_c)^T \mathbf{A} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c) = 1, \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{r} = [x \ y \ z]^T$, $\mathbf{r}_c = [x_c \ y_c \ z_c]^T$, \mathbf{A} é uma matriz positiva definida dada por:

$$\mathbf{A} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} a^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & c^{-2} \end{bmatrix} \mathbf{V}^T, \quad (2.2)$$

e \mathbf{V} é uma matriz ortogonal cujas colunas são definidas por vetores unitários \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , e \mathbf{v}_3 (Fig. 2.1b), respectivamente. Estes vetores unitários são comumente descritos em termos dos ângulos de orientações auxiliares α , γ , e δ , que não são usados pela comunidade geocientífica. Entretanto podemos defini-los a partir de ε , ζ , e η (Fig. 2.1a) como dado por (CLARK *et al.*, 1986):

$$\alpha = \varepsilon - \cos^{-1} \left[\frac{\cos \eta}{(1 - \sin^2 \zeta \sin^2 \eta)^{\frac{1}{2}}} \right], \quad (2.3)$$

$$\gamma = \tan^{-1} \left(\frac{\cos \zeta}{\sin \zeta \cos \eta} \right) \quad (2.4)$$

e

$$\delta = \sin^{-1} (\sin \zeta \sin \eta), \quad (2.5)$$

onde $-90^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$ e $0 \leq \delta \leq 90^\circ$. Assim, dados os ângulos de orientações ε , ζ , e η (Fig. 2.1a e Eqs. 2.3, 2.4, e 2.5), podemos definir os vetores unitários \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , e \mathbf{v}_3 (Fig. 2.1b) de acordo com o tipo de elipsoide. Para elipsoides triaxiais (i.e., $a > b > c$), estes vetores unitários são dados por (CLARK *et al.*, 1986):

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -\cos \alpha \cos \delta \\ -\sin \alpha \cos \delta \\ -\sin \delta \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \gamma \sin \delta + \sin \alpha \sin \gamma \\ \sin \alpha \cos \gamma \sin \delta - \cos \alpha \sin \gamma \\ -\cos \gamma \cos \delta \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma \sin \delta \\ -\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma \sin \delta \\ \sin \gamma \cos \delta \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Para elipsoides triaxiais (i.e., $a > b > c$), a matriz ortogonal \mathbf{V} (Eq. 2.9) é calculada usando as Eqs. 2.6, 2.7, e 2.8:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Similarmente, a matriz \mathbf{V} para elipsoides prolatos (i.e., $a > b = c$) é calculada de acordo com a Eq. 2.9 usando as Eqs. 2.6, 2.7, e 2.8, mas com $\gamma = 0^\circ$ (EMERSON *et al.*, 1985).

Finalmente, a matriz \mathbf{V} (Eq. 2.9) para elipsoides oblatos (i.e., $a < b = c$) é calculada como dado por (EMERSON *et al.*, 1985):

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -\cos \alpha \sin \gamma \sin \delta + \sin \alpha \cos \gamma \\ -\sin \alpha \sin \gamma \sin \delta - \cos \alpha \cos \gamma \\ \sin \gamma \cos \delta \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\cos \alpha \cos \delta \\ -\sin \alpha \cos \delta \\ -\sin \delta \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma \sin \delta \\ -\cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma \sin \delta \\ -\cos \gamma \cos \delta \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

A modelagem magnética de um corpo elipsoidal é comumente feita em um sistema de coordenadas Cartesiana particular, que está alinhada com os semi-eixos, e sua origem coincide com o centro do corpo (Fig. 2.1b). Por conveniência, denominaremos este sistema de coordenadas como *sistema de coordenadas local*. A relação entre as coordenadas Cartesianas $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ de um ponto no sistema de coordenadas local e as coordenadas Cartesianas (x, y, z) do mesmo ponto no sistema principal é dada por:

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{V}^\top (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c), \quad (2.13)$$

onde $\tilde{\mathbf{r}} = [\tilde{x} \ \tilde{y} \ \tilde{z}]^\top$, \mathbf{r} e \mathbf{r}_c são definidas na Eq. 2.1 e a matriz \mathbf{V} 2.9 é definida de acordo do tipo de elipsoide. Na sequência deste trabalho, referiremos a grandezas no sistema de coordenadas local, pelo símbolo “ \sim ”

2.2 Background Teórico

Considere um corpo elipsoidal imerso em um campo magnético uniforme \mathbf{H}_0 (Am^{-1}) dado por:

$$\mathbf{H}_0 = \|\mathbf{H}_0\| \begin{bmatrix} \cos I \cos D \\ \cos I \sin D \\ \sin I \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma Euclidiana e D e I são respectivamente, a declinação e inclinação do campo geomagnético local no sistema de coordenadas principal (Fig. 2.1a). Este campo uniforme pode ser, por exemplo, a componente principal do campo magnético da Terra, que presume ser gerado na núcleo externo líquido da Terra. Na ausência de correntes de condução, o campo magnético total $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ na posição \mathbf{r} (Eqs. 2.2 e 2.13) de um ponto no sistema de coordenadas principal é definido como (ESKOLA e TERVO, 1980; REITZ *et al.*, 1992; SHARMA, 1966; STRATTON, 2007):

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 - \nabla V(\mathbf{r}), \quad (2.15)$$

onde o segundo termo é o gradiente negativo do potencial escalar magnético $V(\mathbf{r})$

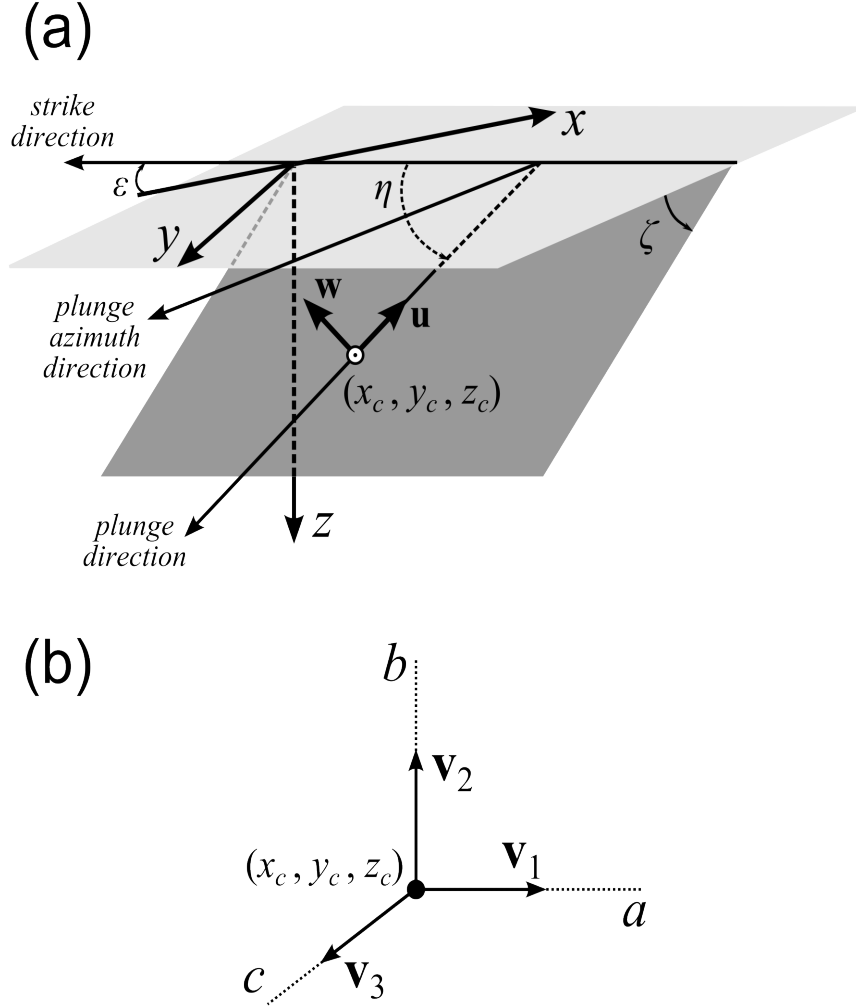


Figura 2.1: a) Figura que mostra as orientações de um elipsoide com centro em (x_c, y_c, z_c) dado um sistema de coordenadas principal (x, y, z) e um sistema local $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. Os vetores unitários w e u definem dois semi-eixos do elipsoide. O ângulo ε é chamado de strike e está entre a direção "menos x " e a direção de strike contida no plano xy . O vetor u dá a uma linha de direção de plunge, e faz um ângulo ζ com o plano xy . O ângulo entre a direção de strike e a direção de plunge é chamado de η . b) Figura que representa o sistema de coordenadas local de um corpo elipsoidal com centro em x_c, y_c e z_c , semi-eixos a, b e c , que são definidos pelos vetores unitários v_1, v_2 e v_3 .

dado por:

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\vartheta} \mathbf{M}(\mathbf{r}')^\top \nabla \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) dx' dy' dz'. \quad (2.16)$$

Nesta equação, $\mathbf{r}' = [x' \ y' \ z']^\top$ é o vetor posição de um ponto localizado dentro do volume ϑ , a integral é feita sobre as variáveis x', y' e z' representando as coordenadas de um ponto localizado dentro do volume ϑ do elipsoide e $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$ é o vetor de magnetização (em Am^{-1}). A Eq. 2.16 é válida em qualquer ponto, independente-

mente se o vetor posição \mathbf{r} representa um ponto localizado dentro ou fora do corpo magnetizado (DUBOIS, 1896).

Baseado no postulado de MAXWELL, assumiremos que o corpo tem uma magnetização uniforme dada por:

$$\mathbf{M} = \mathbf{K} \mathbf{H}^\dagger, \quad (2.17)$$

onde \mathbf{H}^\dagger é o campo magnético uniforme resultante em qualquer ponto dentro do corpo e \mathbf{K} é um tensor de segunda ordem constante, representando a susceptibilidade magnética do corpo. Esta é uma boa aproximação para corpos em temperatura ambiente, sujeitos a um campo indutor \mathbf{H}_0 com força ≤ 1 mT (ROCHETTE *et al.*, 1992). Neste caso, o tensor de susceptibilidade \mathbf{K} é comumente representado no sistema de coordenadas principal (Fig. 2.1a), como a seguir:

$$\mathbf{K} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \mathbf{U}^\top, \quad (2.18)$$

onde $k_1 > k_2 > k_3$ são as *susceptibilidades principais* e \mathbf{U} é uma matrix ortogonal cujas colunas \mathbf{u}_i , $i = 1, 2, 3$, são vetores unitários chamados de *direções principais*. Os vetores unitários \mathbf{u}_i podem ser definidos de modo similar a \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , e \mathbf{v}_3 (Eqs. 2.6, 2.7, 2.8, 2.10, 2.11, e 2.12), por um conjunto de ângulos de orientações ε , ζ , e η (Eqs. 2.3, 2.4, e 2.5).

Se as susceptibilidades principais são diferentes umas das outras, dizemos que o corpo possui uma anisotropia de susceptibilidade magnética (AMS). A AMS é geralmente associada à uma preferência de orientação dos grãos magnéticos dos minerais que formam a rocha (DUNLOP e ÖZDEMİR, 1997; FULLER, 1963; HROUDA, 1982; JANÁK, 1972; MACDONALD e ELLWOOD, 1987; ROCHETTE *et al.*, 1992; TAUXE, 2003; THOMPSON e OLDFIELD, 1986; UYEDA *et al.*, 1963). Para o caso particular em que as direções principais coincidem com os eixos do elipsoide, a matriz \mathbf{U} é igual a matriz \mathbf{V} (Eq. 2.2). Outro caso particular importante, é quando a susceptibilidade é isotrópica e, consequentemente, as susceptibilidades principais k_1 , k_2 , e k_3 (Eq. 2.18) são iguais a constante χ . Neste caso, o tensor de susceptibilidades \mathbf{K} (Eq. 2.18) assume a forma particular:

$$\mathbf{K} = \chi \mathbf{I}, \quad (2.19)$$

onde \mathbf{I} representa a matriz identidade.

Usando a magnetização \mathbf{M} definida pela Eq. 2.17, o campo magnético total $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ (Eq. 2.15) pode ser reescrito como:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 - \mathbf{N}(\mathbf{r}) \mathbf{K} \mathbf{H}^\dagger, \quad (2.20)$$

onde $\mathbf{N}(\mathbf{r})$ é uma matriz simétrica cujo ij -elemento $n_{ij}(\mathbf{r})$ é dado por:

$$n_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 f(\mathbf{r})}{\partial r_i \partial r_j}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.21)$$

$r_1 = x$, $r_2 = y$, $r_3 = z$ são os elementos do vetor posição \mathbf{r} (Eq. 2.1), e

$$f(\mathbf{r}) = \iiint_{\vartheta} \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dx' dy' dz'. \quad (2.22)$$

Note que a função escalar $f(\mathbf{r})$ (Eq. 2.22) é proporcional ao potencial gravitacional que seria produzido pelo corpo elipsoidal de volume ϑ se tivesse uma densidade uniforme igual à inversa da constante gravitacional. Pode ser mostrado que os elementos $n_{ij}(\mathbf{r})$ são finitos tanto se \mathbf{r} é um ponto dentro ou fora do volume ϑ (PEIRCE, 1902; WEBSTER, 1904). A matriz $\mathbf{N}(\mathbf{r})$ (Eq. 2.20) é chamada de *tensor de depolarização* (SOLIVÉREZ, 1981, 2008).

A parte seguinte deste dissertação é dedicada a descrever o campo magnético $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ (Eq. 2.20) nos pontos localizados tanto dentro como fora do volume ϑ do corpo elipsoidal. Entretanto, o desenvolvimento matemático são convenientemente feitos no sistema de coordenadas local (Fig. 2.1b) relacionado ao corpo elipsoidal.

2.3 Transformação de coordenadas

Para continuar a descrição da modelagem magnética de corpos elipsoidais, é conveniente realizar duas importantes transformações de coordenadas. A primeira transforma a função escalar $f(\mathbf{r})$ (Eq. 2.22) do sistema de coordenadas principal para uma nova função escalar $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})$ com relação ao sistema de coordenada local. A função $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})$ foi primeiro apresentada por DIRICHLET (1839) para descrever o potencial gravitacional produzido por elipsoides homogêneos. Posteriormente, diversos autores deduziram e usaram esta função para descrever os campos magnéticos e gravitacionais produzidos por elipsoides triaxiais, prolatos e oblatos (CHANG, 1961; CLARK *et al.*, 1986; DUBOIS, 1896; KELLOGG, 1929; LOWES, 1974; MAXWELL, 1873; OSBORN, 1945; PEAKE e DAVY, 1953; PEIRCE, 1902; STONER, 1945; STRATTON, 2007; TEJEDOR *et al.*, 1995; THOMSON e TAIT, 1879; WEBSTER, 1904). É conveniente usar $\tilde{f}^\dagger(\tilde{\mathbf{r}})$ e $\tilde{f}^\ddagger(\tilde{\mathbf{r}})$ para definir a função $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})$, calculada nos pontos $\tilde{\mathbf{r}}$ dentro e fora do volume ϑ do corpo elipsoidal, respectivamente.

A função escalar $\tilde{f}^\dagger(\tilde{\mathbf{r}})$ é dada por:

$$\tilde{f}^\dagger(\tilde{\mathbf{r}}) = \pi abc \int_0^\infty \left(1 - \frac{\tilde{x}^2}{a^2 + u} - \frac{\tilde{y}^2}{b^2 + u} - \frac{\tilde{z}^2}{c^2 + u} \right) \frac{1}{R(u)} du, \quad \tilde{\mathbf{r}} \in V, \quad (2.23)$$

onde

$$R(u) = \sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}. \quad (2.24)$$

Esta função representa o potencial gravitacional que seria produzido pelo corpo elipsoidal nos pontos localizados dentro do volume ϑ se possuísse uma densidade uniforme igual ao inverso da constante gravitacional. Note que, para este caso, o potencial gravitacional é uma função quadrática das coordenadas espaciais \tilde{x} , \tilde{y} , e \tilde{z} , que sustenta o postulado de MAXWELL (1873) sobre elipsoides uniformemente magnetizados. De forma similar, a função $\tilde{f}^\dagger(\tilde{\mathbf{r}})$ é dada por:

$$\tilde{f}^\dagger(\tilde{\mathbf{r}}) = \pi abc \int_{\lambda}^{\infty} \left(1 - \frac{\tilde{x}^2}{a^2 + u} - \frac{\tilde{y}^2}{b^2 + u} - \frac{\tilde{z}^2}{c^2 + u} \right) \frac{1}{R(u)} du, \quad \tilde{\mathbf{r}} \notin V, \quad (2.25)$$

onde $R(u)$ é definido pela Eq. 2.24 e o parâmetro λ é definido de acordo com o tipo de elipsoide como uma função das coordenadas espaciais \tilde{x} , \tilde{y} , e \tilde{z} (ver Apêndice B). Para leitores interessados em informações adicionais sobre o parâmetro λ , recomendamos WEBSTER (1904, p. 234), KELLOGG (1929, p. 184) e CLARK *et al.* (1986).

A segunda importante transformação de coordenada é definida com respeito a Eq. 2.20. Usando apropriadamente a ortogonalidade de matriz \mathbf{V} (Eqs. 2.9 e ??), o campo magnético $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ (Eq. 2.20) pode ser transformado do sistema de coordenadas principal para o sistema de coordenadas local usando:

$$\underbrace{\mathbf{V}^\top \mathbf{H}(\mathbf{r})}_{\tilde{\mathbf{H}}(\tilde{\mathbf{r}})} = \underbrace{\mathbf{V}^\top \mathbf{H}_0}_{\tilde{\mathbf{H}}_0} - \underbrace{\mathbf{V}^\top \mathbf{N}(\mathbf{r}) \mathbf{V}}_{\tilde{\mathbf{N}}(\tilde{\mathbf{r}})} \underbrace{\mathbf{V}^\top \mathbf{K} \mathbf{V}}_{\tilde{\mathbf{K}}} \underbrace{\mathbf{V}^\top \mathbf{H}^\dagger}_{\tilde{\mathbf{H}}^\dagger}, \quad (2.26)$$

onde o sobrescrito “ \sim ” representa grandezas referidas ao respectivo sistema de coordenada local.

Na Eq. 2.26, o tensor de depolarização transformado $\tilde{\mathbf{N}}(\tilde{\mathbf{r}})$ é calculado como uma função do tensor de depolarização original $\mathbf{N}(\mathbf{r})$ (Eq. 2.20). Neste caso, os elementos de $\tilde{\mathbf{N}}(\tilde{\mathbf{r}})$ são calculados como função das derivadas segundas da função $f(\mathbf{r})$ (Eq. 2.22), que é definida no sistema de coordenadas principal. Pode ser mostrado (Apêndice A), entretanto, que os elementos $\tilde{n}_{ij}(\tilde{\mathbf{r}})$ de $\tilde{\mathbf{N}}(\tilde{\mathbf{r}})$ também podem ser calculados como:

$$\tilde{n}_{ij}(\tilde{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_i \partial \tilde{r}_j}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.27)$$

onde $\tilde{r}_1 = \tilde{x}$, $\tilde{r}_2 = \tilde{y}$, e $\tilde{r}_3 = \tilde{z}$ são os elementos do vetor transformado $\tilde{\mathbf{r}}$ (Eq. 2.13) e $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})$ é dada pela Eq. 2.23 ou 2.25, dependendo se $\tilde{\mathbf{r}}$ representa um ponto localizado dentro ou fora do volume ϑ do corpo elipsoidal.

2.4 Tensores de depolarização transformados $\tilde{\mathbf{N}}(\tilde{\mathbf{r}})$

2.4.1 Tensor de depolarização $\tilde{\mathbf{N}}^\dagger$

Os elementos do tensor de depolarização transformado $\tilde{\mathbf{N}}^\dagger$, usados para calcular o campo magnético uniforme $\tilde{\mathbf{H}}^\dagger$ (Eq. 2.50) e a magnetização $\tilde{\mathbf{M}}$ (Eqs. 2.53 e 2.56) são calculadas de acordo com a Eq. 2.27, com $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})$ dado por $\tilde{f}^\dagger(\tilde{\mathbf{r}})$ (Eq. 2.23). Como previamente apontado, $\tilde{f}^\dagger(\tilde{\mathbf{r}})$ (Eq. 2.23) é uma função quadrática das coordenadas espaciais \tilde{x} , \tilde{y} and \tilde{z} . Consequentemente, os elementos \tilde{n}_{ij}^\dagger , $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$, de $\tilde{\mathbf{N}}^\dagger$ não dependem do vetor de posição transformado $\tilde{\mathbf{r}}$ (equação 2.13). Além disso, os elementos não-diagonais são zeros e os elementos diagonais são dados por (STONER, 1945):

$$\tilde{n}_{ii}^\dagger = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{1}{(e_i^2 + u) R(u)} du, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.28)$$

onde $R(u)$ é definido pela Eq. 2.24 e $e_1 = a$, $e_2 = b$, e $e_3 = c$. Estes elementos são comumente conhecidos como *fatores de desmagnetização* e são definidos de acordo com o tipo de elipsoide. Observa-se que, de acordo com as Eqs. 2.26 e A.7,

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}) = \mathbf{V} \tilde{\mathbf{N}}^\dagger \mathbf{V}^\top, \quad (2.29)$$

onde $\tilde{\mathbf{N}}^\dagger$ (Eqs. 2.50, 2.53 e 2.56) é uma matriz diagonal e \mathbf{V} (Eqs. 2.9) é uma matriz ortogonal. Esta equação mostra que, para o caso particular em que \mathbf{r} e consequentemente $\tilde{\mathbf{r}}$ representam um ponto dentro do volume ϑ do elipsoide, os elementos \tilde{n}_{ii}^\dagger (Eq. 2.28) de $\tilde{\mathbf{N}}^\dagger$ representam os autovalores, enquanto as colunas de \mathbf{V} representam os autovetores do tensor de depolarização original $\mathbf{N}(\mathbf{r})$.

Elipsoides triaxiais Para elipsoides triaxiais (e.g., $a > b > c$), os fatores de desmagnetização obtidos resolvendo a Eq. 2.28 são dados por:

$$\tilde{n}_{11}^\dagger = \frac{abc}{(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}} (a^2 - b^2)} [F(\kappa, \phi) - E(\kappa, \phi)], \quad (2.30)$$

$$\tilde{n}_{22}^\dagger = -\frac{abc}{(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}} (a^2 - b^2)} [F(\kappa, \phi) - E(\kappa, \phi)] + \frac{abc}{(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}} (b^2 - c^2)} E(\kappa, \phi) - \frac{c^2}{b^2 - c^2} \quad (2.31)$$

e

$$\tilde{n}_{33}^\dagger = -\frac{abc}{(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}} (b^2 - c^2)} E(\kappa, \phi) + \frac{b^2}{b^2 - c^2}, \quad (2.32)$$

onde

$$F(\kappa, \phi) = \int_0^\phi \frac{1}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \psi)^{\frac{1}{2}}} d\psi, \quad (2.33)$$

e

$$E(\kappa, \phi) = \int_0^\phi (1 - \kappa^2 \sin^2 \psi)^{\frac{1}{2}} d\psi, \quad (2.34)$$

com $\kappa = [(a^2 - b^2) / (a^2 - c^2)]^{\frac{1}{2}}$ e $\cos \phi = c/a$. As funções $F(\kappa, \phi)$ (Eq. 2.33) e $E(\kappa, \phi)$ (Eq. 2.34) são chamadas de integrais elípticas normais de Legendre de primeiro e segundo tipo, respectivamente. STONER (1945) apresentou uma detalhada dedução dos fatores de desmagnetização \tilde{n}_{11}^\dagger (Eq. 2.30), \tilde{n}_{22}^\dagger (Eq. 2.31) e \tilde{n}_{33}^\dagger (Eq. 2.32). CLARK *et al.* (1986) apresentou fórmulas similares, mas sem nenhuma dedução.

Elipsoides prolatos Para elipsoides prolatos (e.g., $a > b = c$), os fatores de desmagnetização são obtidos resolvendo a Eq. 2.28, sendo dados por:

$$\tilde{n}_{11}^\dagger = \frac{1}{m^2 - 1} \left\{ \frac{m}{(m^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \ln \left[m + (m^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right] - 1 \right\} \quad (2.35)$$

e

$$\tilde{n}_{22}^\dagger = \frac{1}{2} \left(1 - \tilde{n}_{11}^\dagger \right), \quad (2.36)$$

onde $\tilde{n}_{33}^\dagger = \tilde{n}_{22}^\dagger$, e usa \tilde{n}_{11}^\dagger definida na Eq. 2.35, com $m = a/b$. A dedução detalhada dos fatores de desmagnetização \tilde{n}_{11}^\dagger (Eq. 2.35) e \tilde{n}_{22}^\dagger (Eq. 2.36) pode ser encontrada, por exemplo, em STONER (1945). Essas fórmulas foram posteriormente apresentadas por EMERSON *et al.* (1985), mas sem nenhuma prova matemática.

Elipsoides oblatos Para elipsoides oblatos (e.g., $a < b = c$), os fatores de desmagnetização obtidos resolvendo a Eq. 2.28 são dados por:

$$\tilde{n}_{11}^\dagger = \frac{1}{1 - m^2} \left[1 - \frac{m}{(1 - m^2)^{\frac{1}{2}}} \cos^{-1} m \right], \quad (2.37)$$

e

$$\tilde{n}_{22}^\dagger = \frac{1}{2} \left(1 - \tilde{n}_{11}^\dagger \right), \quad (2.38)$$

onde $\tilde{n}_{22}^\dagger = \tilde{n}_{33}^\dagger$ e são calculados de acordo com a Eq. 2.36, mas com \tilde{n}_{11}^\dagger definido na Equação 2.37, e $m = a/b$. A dedução detalhada dos fatores de desmagnetização pode ser encontrada, por exemplo, em STONER (1945). Essas fórmulas também podem ser encontradas em EMERSON *et al.* (1985), mas sem nenhuma prova matemática. A única diferença, entretanto, é que EMERSON *et al.* (1985) trocou o termo \cos^{-1} por um termo \tan^{-1} , de acordo com a identidade trigonométrica

$\tan^{-1} x = \cos^{-1}(1/\sqrt{x^2 + 1})$, $x > 0$. Pode ser mostrado que estes fatores de desmagnetização satisfazem as condições $\tilde{n}_{11}^\dagger + 2\tilde{n}_{22}^\dagger = 1$ e $\tilde{n}_{11}^\dagger > \tilde{n}_{22}^\dagger$

2.4.2 Tensor de depolarização $\tilde{\mathbf{N}}^\dagger(\tilde{\mathbf{r}})$

Os elementos $\tilde{n}_{ij}^\dagger(\tilde{\mathbf{r}})$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$, do tensor de depolarização transformado $\tilde{\mathbf{N}}^\dagger(\tilde{\mathbf{r}})$ usados para calcular o campo magnético $\Delta\tilde{\mathbf{H}}(\tilde{\mathbf{r}})$ (Eq. ??) e a anomalia de campo total $\Delta\tilde{T}(\tilde{\mathbf{r}})$ (Eqs. 2.71 e 2.72) são calculadas de acordo com a Eq. 2.27, com $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})$ dado por $\tilde{f}^\dagger(\tilde{\mathbf{r}})$ (Eq. 2.25). Seguindo CLARK *et al.* (1986), os elementos diagonais \tilde{n}_{ii}^\dagger e os elementos não-diagonais \tilde{n}_{ij}^\dagger , $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$, são dados por:

$$\tilde{n}_{ii}^\dagger(\tilde{\mathbf{r}}) = \frac{abc}{2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \tilde{r}_i} h_i \tilde{r}_i - g_i \right) \quad (2.39)$$

e

$$\tilde{n}_{ij}^\dagger(\tilde{\mathbf{r}}) = \frac{abc}{2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \tilde{r}_i} h_j \tilde{r}_j \right), \quad (2.40)$$

Onde

$$h_i = \frac{1}{(e_i^2 + \lambda) R(\lambda)}, \quad (2.41)$$

$$g_i = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{(e_i^2 + u) R(u)} du, \quad (2.42)$$

$e_1 = a$, $e_2 = b$, $e_3 = c$, e $\frac{\partial \lambda}{\partial \tilde{r}_i}$ é definido no Apêndice B (Eq. B.22). As funções g_i (Eq. 2.42) são definidas de acordo com o tipo de elipsoide.

Elipsoides Triaxiais Para elipsoides triaxiais (e.g., $a > b > c$), as funções g_i (Eq. 2.42) são definidas como em (CLARK *et al.*, 1986):

$$g_1 = \frac{2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}} [F(\kappa, \phi) - E(\kappa, \phi)], \quad (2.43)$$

$$g_2 = \frac{2(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)} \left[E(\kappa, \phi) - \frac{(b^2 - c^2)}{(a^2 - c^2)} F(\kappa, \phi) - \frac{\kappa^2 \sin \phi \cos \phi}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (2.44)$$

e

$$g_3 = \frac{2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\sin \phi (1 - \kappa^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}}{\cos \phi} - E(\kappa, \phi) \right], \quad (2.45)$$

onde $F(\kappa, \phi)$ e $E(\kappa, \phi)$ são definidos pelas Eqs. 2.34 e 2.33, mas com $\sin \phi = \sqrt{(a^2 - c^2)/(a^2 + \lambda)}$.

Elipsoides prolatos Para elipsoides prolatos (e.g., $a > b = c$), as funções g_i (Eq. 2.42) são dadas por:

$$g_1 = \frac{2}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \ln \left[\frac{(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} + (a^2 + \lambda)^{\frac{1}{2}}}{(b^2 + \lambda)^{\frac{1}{2}}} \right] - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + \lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (2.46)$$

e

$$g_2 = \frac{1}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{[(a^2 - b^2)(a^2 + \lambda)]^{\frac{1}{2}}}{b^2 + \lambda} - \ln \left[\frac{(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} + (a^2 + \lambda)^{\frac{1}{2}}}{(b^2 + \lambda)^{\frac{1}{2}}} \right] \right\}, \quad (2.47)$$

onde $g_3 = g_2$. Estas fórmulas podem ser obtidas manipulando apropriadamente aquelas apresentadas por (EMERSON *et al.*, 1985).

Elipsoides oblatos Para elipsoides oblatos (i.e., $a < b = c$), as funções g_i (Eq. 2.42) são dadas por:

$$g_1 = \frac{2}{(b^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2 + \lambda} \right)^{\frac{1}{2}} - \tan^{-1} \left[\left(\frac{b^2 - a^2}{a^2 + \lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} \quad (2.48)$$

e

$$g_2 = \frac{1}{(b^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \tan^{-1} \left[\left(\frac{b^2 - a^2}{a^2 + \lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \right] - \frac{[(b^2 - a^2)(a^2 + \lambda)]^{\frac{1}{2}}}{b^2 + \lambda} \right\}, \quad (2.49)$$

onde $g_3 = g_2$. De forma similar ao caso prolato mostrado anteriormente, estas fórmulas podem ser obtidas manipulando apropriadamente aquelas apresentadas por (EMERSON *et al.*, 1985).

2.5 Campo magnético interno e magnetização

Considerando $\tilde{\mathbf{r}}$ um ponto dentro do volume ϑ do elipsoide e usando o postulado de Maxwell sobre a uniformidade do campo magnético $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ dentro de corpos elipsoidais, podemos usar a Eq. 2.26 para definir o campo magnético uniforme resultante $\tilde{\mathbf{H}}^\dagger$ dentro do corpo como:

$$\tilde{\mathbf{H}}^\dagger = \left(\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{N}}^\dagger \tilde{\mathbf{K}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{H}}_0, \quad (2.50)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade e $\tilde{\mathbf{N}}^\dagger$ representa o tensor de depolarização transformado calculado dentro do volume ϑ do corpo. Os elementos de $\tilde{\mathbf{N}}^\dagger$ serão apresentados em uma seção posterior.

Colocando o campo magnético $\tilde{\mathbf{H}}^\dagger$ para o sistema de coordenadas principal \mathbf{H}^\dagger :

$$\underbrace{\mathbf{V}^\top \tilde{\mathbf{H}}^\dagger}_{\mathbf{H}^\dagger} = \underbrace{\mathbf{V} \left(\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{N}}^\dagger \tilde{\mathbf{K}} \right)^{-1} \mathbf{V}^\top}_{\Upsilon} \underbrace{\mathbf{V} \tilde{\mathbf{H}}_0}_{\mathbf{H}_0} \quad (2.51)$$

$$\mathbf{H}^\dagger = \Upsilon \mathbf{H}_0, \quad (2.52)$$

Pré-multiplicando o campo interno uniforme $\tilde{\mathbf{H}}^\dagger$ (Eq. 2.50) pelo tensor de susceptibilidade transformado $\tilde{\mathbf{K}}$ (Eq. 2.26) obtemos:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}} &= \tilde{\mathbf{K}} \left(\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{N}}^\dagger \tilde{\mathbf{K}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{H}}_0 \\ &= \left(\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{N}}^\dagger \right)^{-1} \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{H}}_0, \end{aligned} \quad (2.53)$$

onde $\tilde{\mathbf{M}}$ representa a magnetização transformada, que pode ser facilmente verificada usando as Eqs. 2.17 e 2.26. A matriz identidade usada para obter a segunda linha da Eq. 2.53 é dada por SEARLE (1982, p. 151).

Escrevendo a equação 2.53 no sistema principal:

$$\underbrace{\mathbf{V} \tilde{\mathbf{M}}}_{\mathbf{M}} = \underbrace{\mathbf{V} \left(\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{N}}^\dagger \right)^{-1} \mathbf{V}^\top}_{\Lambda} \underbrace{\mathbf{V} \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{V}^\top}_{\mathbf{K}} \underbrace{\mathbf{V} \tilde{\mathbf{H}}_0}_{\mathbf{H}_0} \quad (2.54)$$

$$\mathbf{M} = \Lambda \mathbf{K} \mathbf{H}_0 \quad (2.55)$$

A equação 2.55 pode ser facilmente generalizada para o caso em que o elipsoide também possui uma magnetização remanente uniforme \mathbf{M}_R . Primeiramente, consideremos que a magnetização remanente uniforme satisfaz a condição $\mathbf{H}_A = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{M}_R$, onde \mathbf{H}_A representa um campo remoto uniforme hipotético. Assim, se assumirmos que \mathbf{H}_0 , na Eqs. 2.52 e 2.55, é de fato a soma do campo magnético uniforme \mathbf{H}_0 e o hipotético campo remoto \mathbf{H}_A , obtemos a seguinte equação generalizada:

$$\mathbf{M} = \Lambda (\mathbf{K} \mathbf{H}_0 + \mathbf{M}_R), \quad (2.56)$$

onde Λ é dado na equação 2.54.

A equação 2.56 é consistente com a dada por CLARK *et al.* (1986, Eq. 38), porém no sistema principal de coordenadas. Ela mostra o efeito combinado da anisotropia de susceptibilidade magnética (AMS) e a anisotropia de forma. A AMS é representada pelo tensor de susceptibilidade \mathbf{K} (Eq. 2.18) e reflete a orientação preferencial dos minerais magnéticos que formam o corpo. O tensor de susceptibilidade aparece na Eq. 2.56, definido no sistema de coordenadas principal (Fig. 2.1a), e na Eq. 2.54, definido no sistema de coordenada local (Fig. 2.1b). A anisotropia de

forma, na Eq. 2.56, é representada pelo tensor de depolarização $\tilde{\mathbf{N}}^\dagger$ e reflete a desmagnetização associada à forma do corpo. Notemos que a magnetização resultante, \mathbf{M} (Eq. 2.56), não necessariamente possui a mesma direção do campo indutor \mathbf{H}_0 (Eq. 2.14). A diferença angular entre a magnetização resultante e o campo indutor depende do efeito combinado da anisotropia de susceptibilidade magnética e a anisotropia de forma.

Para o caso particular em que a susceptibilidade é isotrópica, o tensor de susceptibilidade é definido de acordo com a Eq. 2.19. Neste caso, a magnetização \mathbf{M} (Eqs. 2.17 e ??), referida no sistema de coordenada principal (Fig. ??a), e a matriz $\mathbf{\Lambda}$ (Eq. ??) podem ser reescritas como segue:

$$\mathbf{M} = \mathbf{\Lambda} (\chi \mathbf{H}_0 + \mathbf{M}_R) , \quad (2.57)$$

e

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{V} \left(\mathbf{I} + \chi \tilde{\mathbf{N}}^\dagger \right)^{-1} \mathbf{V}^\top . \quad (2.58)$$

Além da transformação de coordenadas representada pela matriz \mathbf{V} (Eq. 2.2), esta equação está perfeitamente de acordo com as apresentadas por GUO *et al.* (2001, Eqs. 13–15). O primeiro termo, dependente do campo indutor \mathbf{H}_0 (Eq. 2.14), representa a magnetização induzida, enquanto o termo dependente de \mathbf{M}_R é a magnetização remanente. A equação 2.57 nos mostra que, como apontado por vários autores (e.g., CLARK *et al.*, 1986; DUBOIS, 1896; MAXWELL, 1873; STONER, 1945; STRATTON, 2007), a magnetização induzida se opõe ao campo indutor se este é paralelo ao eixo do elipsoide, independente do tipo de elipsoide. No entanto, a magnetização não é necessariamente paralela ao campo indutor. Se adicionalmente considerarmos que $\chi \ll 1$, a matriz $\mathbf{\Lambda}$ (Eq. 2.58) se aproxima à identidade e a magnetização \mathbf{M} (Eq. 2.57) pode ser aproximada por:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \chi \mathbf{H}_0 + \mathbf{M}_R , \quad (2.59)$$

que é a equação clássica que descreve a magnetização resultante em geofísica aplicada (BLAKELY, 1996, p. 89). Notemos que, neste caso particular, a magnetização induzida é paralela ao campo indutor \mathbf{H}_0 (Eq. 2.14), seja ele paralelo ao elipsoide ou não. Usualmente, Eq. 2.59 é considerada uma boa aproximação $\chi \leq 0.1$ SI. Apesar deste valor ser vastamente utilizado na literatura, houve poucas investigações empíricas e/ou teóricas sobre.

Relação entre χ e o erro da magnetização

No caso da susceptibilidade isotrópica, a magnetização resultante \mathbf{M} (Eq. 2.57) pode ser determinada resolvendo o seguinte sistema linear:

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{M} = \chi \mathbf{H}_0 + \mathbf{M}_R, \quad (2.60)$$

onde, de acordo com a Eq. 2.58,

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} = \mathbf{V} \left(\mathbf{I} + \chi \tilde{\mathbf{N}}^\dagger \right) \mathbf{V}^\top. \quad (2.61)$$

Considere uma matriz perturbada $\delta\mathbf{\Lambda}^{-1}$ dada por:

$$\delta\mathbf{\Lambda}^{-1} = \mathbf{\Lambda}^{-1} - \mathbf{I} \quad (2.62)$$

e, similarmente, um vetor de magnetização perturbado $\delta\mathbf{M}$ dado por:

$$\delta\mathbf{M} = \mathbf{M} - \check{\mathbf{M}}, \quad (2.63)$$

Usando essas duas equações, podemos reescrever a magnetização aproximada $\check{\mathbf{M}}$ (Eq. 2.59) como:

$$(\mathbf{\Lambda}^{-1} - \delta\mathbf{\Lambda}^{-1}) (\mathbf{M} - \delta\mathbf{M}) = \chi \mathbf{H}_0 + \mathbf{M}_R. \quad (2.64)$$

Subtraindo a magnetização verdadeira \mathbf{M} (Eq. 2.60) deste sistema linear (Eq. 2.64) e rearranjando os termos, obtemos o seguinte sistema linear para a magnetização perturbada $\delta\mathbf{M}$ (Eq. 2.63):

$$\delta\mathbf{M} = -\delta\mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{M}. \quad (2.65)$$

Usando o conceito de norma de um vetor e seu correspondente operador de norma (??), podemos usar a Eq. 2.65 para escrever a seguinte desigualdade:

$$\frac{\|\delta\mathbf{M}\|}{\|\mathbf{M}\|} \leq \|\delta\mathbf{\Lambda}^{-1}\|. \quad (2.66)$$

onde $\|\delta\mathbf{M}\|$ e $\|\mathbf{M}\|$ denota normas Euclidianas (ou norma-2) e o termo $\|\delta\mathbf{\Lambda}^{-1}\|$ denota a norma-2 da matriz de $\delta\mathbf{\Lambda}^{-1}$. Usando as Eqs. 2.61 e 2.62 e a variância ortogonal da norma-2 da matriz (??), definimos $\|\delta\mathbf{\Lambda}^{-1}\|$ como:

$$\|\delta\mathbf{\Lambda}^{-1}\| = \chi \tilde{n}_{max}^\dagger, \quad (2.67)$$

onde \tilde{n}_{max}^\dagger é o fator de desmagnetização associado ao menor semi-eixo do elipsoide. Para um elipsoide triaxial, $\tilde{n}_{max}^\dagger \equiv \tilde{n}_{33}^\dagger$ (Eq. 2.32). Para um elipsoide prolato, $\tilde{n}_{max}^\dagger \equiv$

\tilde{n}_{22}^\dagger (Eq. 2.36). Para um elipsoide oblato, $\tilde{n}_{max}^\dagger \equiv \tilde{n}_{11}^\dagger$ (Eq. 2.37). É importante lembrar que, independentemente do tipo de elipsoide, \tilde{n}_{max}^\dagger é uma função escalar dos semi-eixos do elipsoide. Na Eq. 2.66, a razão $\|\delta\mathbf{M}\| \|\mathbf{M}\|^{-1}$ representa o *erro relativo* da magnetização aproximada $\check{\mathbf{M}}$ (Eq. 2.59) com respeito a magnetização verdadeira \mathbf{M} (Eqs. 2.57 e 2.60).

Dado um erro relativo como alvo $\epsilon = \|\delta\mathbf{M}\| \|\mathbf{M}\|^{-1}$ e um elipsoide com determinados semi-eixos, podemos usar a desigualdade representada pela Eq. 2.67 para definir

$$\chi_{max} = \frac{\epsilon}{\tilde{n}_{max}^\dagger}, \quad (2.68)$$

que representa a máxima susceptibilidade isotrópica que o corpo elipsoidal pode assumir para garantir um erro relativo menor que ou igual a ϵ . Para susceptibilidades isotrópicas maiores que χ_{max} , não é possível garantir que o erro relativo na magnetização aproximada $\check{\mathbf{M}}$ (Eq. 2.59) com respeito a magnetização verdadeira \mathbf{M} (Eqs. 2.57 e 2.60) seja menor ou igual a ϵ . A comunidade geocientífica tem usado $\chi_{max} = 0.1$ SI como um valor limite para negligenciar a desmagnetização e, conseqüentemente, a magnetização $\check{\mathbf{M}}$ (Eq. 2.59) como uma boa aproximação para a magnetização verdadeira \mathbf{M} (Eqs. 2.57 e 2.60). Por outro lado, a equação 2.68, define χ_{max} como uma função dos semi-eixos do elipsoide, de acordo com um erro relativo ϵ especificado pelo usuário.

2.6 Campo magnético externo e anomalia de campo-total

O campo magnético $\Delta\mathbf{H}(\mathbf{r})$ produzido por um elipsoide nos pontos externos é calculado pelas Eqs. 2.26 e 2.56 como a diferença entre o campo resultante $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ e o campo uniforme \mathbf{H}_0 :

$$\Delta\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{N}^\dagger(\mathbf{r}) \mathbf{M}, \quad (2.69)$$

onde $\mathbf{N}^\dagger(\mathbf{r})$ é dado por:

$$\mathbf{N}^\dagger(\mathbf{r}) = \mathbf{V} \tilde{\mathbf{N}}^\dagger(\mathbf{r}) \mathbf{V}^\top \quad (2.70)$$

O $\Delta\mathbf{H}(\mathbf{r})$ pode ser interpretado como um corpo uniformemente magnetizado localizado na crosta terrestre, enquanto o campo uniforme \mathbf{H}_0 pode ser interpretado como a componente principal do campo geomagnético da área de estudo, que é comumente assumido ser produzido na parte líquida do núcleo da Terra. A equação ?? nos dá o campo magnético (em A m^{-1}) produzido por um elipsoide. Entretanto, na geofísica, a maneira mais usual de representar a indução magnética é em nT. Esta conversão pode ser facilmente feita multiplicando a Eq. ?? por $k_m = 10^9 \mu_0$, onde μ_0 representa a constante magnética (em H m^{-1}).

Para aplicações geofísicas, é preferível calcular a anomalia de campo total produzida por fontes magnéticas. Esta quantidade escalar é definida como (BLAKELY, 1996):

$$\Delta T(\mathbf{r}) = \|\mathbf{B}_0 + \Delta\mathbf{B}(\mathbf{r})\| - \|\mathbf{B}_0\| , \quad (2.71)$$

onde $\mathbf{B}_0 = k_m \mathbf{H}_0$ e $\Delta\mathbf{B}(\mathbf{r}) = k_m \Delta\mathbf{H}(\mathbf{r})$ (Eq. ??). Em situações prática, entretanto, $\|\mathbf{B}_0\| \gg \|\Delta\mathbf{B}(\mathbf{r})\|$ e, conseqüentemente, a seguinte aproximação é válida (BLAKELY, 1996):

$$\Delta T(\mathbf{r}) \approx \frac{\mathbf{B}_0^\top \Delta\mathbf{B}(\mathbf{r})}{\|\mathbf{B}_0\|} . \quad (2.72)$$

Capítulo 3

Implementação computacional

A implementação computacional do programa foi feita com base na linguagem livre Python, utilizando as vantagens e facilidades que os pacotes dela provém. O algoritmo deste trabalho será distribuído livremente sob a licença BSD 3-clause como parte do *Fatiando a Terra* UIEDA *et al.* (2013), que é uma biblioteca Python livre, usada para modelagem e inversão em geofísica. As documentações e instruções para instalação da versão mais atual do *Fatiando a Terra* podem ser encontrados em <http://www.fatiando.org>. Os códigos e documentações sobre instalação e uso do programa podem ser encontrados no Github pelo link: <https://github.com/DiegoTaka/ellipsoid-magnetic>. O uso do programa é bastante facilitado e consiste em apenas colocar os parâmetros necessários para gerar o corpo elipsoidal como mostra a Figura 3.1.

Como mostrado neste exemplo, é necessário importar outras ferramentas do próprio *Fatiando a Terra* antes de criar o modelo elipsoidal desejado.

Em "*The regional field*" é necessário colocar o campo regional (intensidade (nT), inclinação e declinação ($^{\circ}$)).

Em "*bounds*" o tamanho do *grid* onde será feito os cálculos.

Em "*model*" é criado o modelo através da classe "*ellipsoid triaxial*". Os parâmetros são, respectivamente: posição x , y e z (m) do centro do corpo, semi-eixos a , b e c (m), orientações de *azimuth*, β e γ ($^{\circ}$). Dentro do dicionário '*remanence*' a intensidade (A/m), inclinação e declinação ($^{\circ}$) do vetor de magnetização remanente. Já dentro do dicionário '*k*' os valores de $k1$, $k2$ e $k3$ de susceptibilidade (SI) e as orientações de azimuth, inclinação ($^{\circ}$) e *tilt* que formam os vetores de susceptibilidade. Em "*shape*" é dado quantos pontos serão calculados dentro da área escolhida na malha criada em xp , yp e zp . Em "*tf*" é calculado a anomalia de campo total aproximada dados os parâmetros e modelo elipsoidal criado. Abaixo é dado a *plotagem* da figura.

As classes elipsoidais criadas no "*mesher*" são separadas para cada um dos casos de elipsoide. Neles são guardados os parâmetros geométricos do objeto e suas

```

"""
GravMag: 3D forward modeling of total-field magnetic anomaly using triaxial
ellipsoids (model with induced and remanent magnetization)
"""

from fatiando import mesher, gridder, utils
from fatiando.gravmag import ellipsoid_triaxial
from fatiando.vis import mpl, myv

# The regional field
inten, inc, dec = 60000., 30, -15
bounds = [-5000, 5000, -5000, 5000, 0, 5000]
model = [mesher.EllipsoidTriaxial(-2500., -2500., 500., 2000., 100., 50., 0., 0., 0.,
    {'remanence': [10000, 90., 0.],
     'k': [0.2, 0.1, 0.05, 0., 90., 90.]}),
    mesher.EllipsoidTriaxial(2500., 2500., 500., 2000., 100., 50., 0., 0., 0.,
    {'remanence': [10000, 90., 0.],
     'k': [0.2, 0.1, 0.05, 0., 90., 90.]})]

# Create a regular grid at 0m height
shape = (200, 200)
area = bounds[:4]
xp, yp, zp = gridder.regular(area, shape, z=0)
# Calculate the anomaly for a given regional field
tf = ellipsoid_triaxial.tf_c(xp, yp, zp, inten, inc, dec, model)
# Plot
mpl.figure()
mpl.title("Total-field anomaly (nT)")
mpl.axis('scaled')
mpl.contourf(yp, xp, tf, shape, 15)
mpl.colorbar()
mpl.xlabel('East y (km)')
mpl.ylabel('North x (km)')
mpl.m2km()
mpl.show()

```

Figura 3.1: Cookbook para gerar um modelo elipsoidal triaxial e calcular a anomalia de campo total aproximada.

propriedades físicas. A classe elipsoidal também inclui a função para o cálculo da matriz de transformação de coordenadas. Na documentação também são inclusos testes automáticos para verificar a integridade das classes e funções. Já na biblioteca "gravmag" é onde se encontra as funções que de fato calculam o campo magnético e a anomalia total aproximada como exemplificada na Figura 3.2, do modelo criado no "mesher".

Os cálculos de b_1 , b_2 , b_3 e V estão descritos na seção de metodologia deste trabalho.

É importante ressaltar que diversos cálculos são feitos com auxílio de bibliotecas do *Python* como o *Scipy* JONES *et al.* (2001–), *Matplotlib* HUNTER (2007–) e do

```

def tf_c(xp,yp,zp,inten,inc,dec,ellipsoids):
    """
    Calculates the approximated total-field anomaly generated by n-ellipsoid.

    Parameters:

    * xp,yp,zp: arrays
        Grid of observation points x, y, and z.
    * inten,inc,dec: floats
        Intensity, inclination and declination of the Earth's magnetic field.
    * ellipsoids: list of :class:`fatiando.mesher.Sphere`
        Ellipsoid model.

    Returnss:

    * tf : array
        The total-field anomaly
    """

    if xp.shape != yp.shape != zp.shape:
        raise ValueError("Input arrays xp, yp, and zp must have same shape!")
    size = len(xp)
    res = np.zeros(size, dtype=np.float)
    ctemag = 1.

    for ellipsoid in ellipsoids:
        b1,b2,b3,V = ellipsoid.def (xp,yp,zp,inten,inc,dec,ellipsoid)
        bx = b1*V[0,0]+b2*V[0,1]+b3*V[0,2]
        by = b1*V[1,0]+b2*V[1,1]+b3*V[1,2]
        bz = b1*V[2,0]+b2*V[2,1]+b3*V[2,2]
        tf = bx*np.cos(np.deg2rad(inc))*np.cos(np.deg2rad(dec)) + by*np.cos\
            (np.deg2rad(inc))*np.sin(np.deg2rad(dec)) + bz*np.sin(np.deg2rad(inc))
        res += tf
    res = res*ctemag
    return res

```

Figura 3.2: Função que calcula a anomalia de campo total aproximada de um elipsoide triaxial.

pacote *NumPy* STÉFAN VAN DER WALT e VAROQUAUX (2011–).

Uma nota a respeito das funções *scipy.special.ellipkinc* e *scipy.special.ellipeinc* do pacote SciPy para o cálculo das integrais elípticas normais incompletas de Legendre de primeiro e segundo tipo: a variável k das funções $F(\kappa, \phi)$ e $E(\kappa, \phi)$ já deve ser elevada ao quadrado quando utilizada como argumento, uma vez que, no pacote Scipy, sua implementação não é feita com a fórmula comumente encontrada, onde geralmente se usa k^2 :

$$F(\kappa, \phi) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2 \quad (3.1)$$

e

$$E(\kappa, \phi) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \, d\theta \quad (3.2)$$

Uma forma eficiente de testar se essas integrais estão corretas é verificar se a soma dos fatores de desmagnetização é igual à 1 (um), independente do tamanho dos eixos do elipsoide, como mostra a Figura 3.3

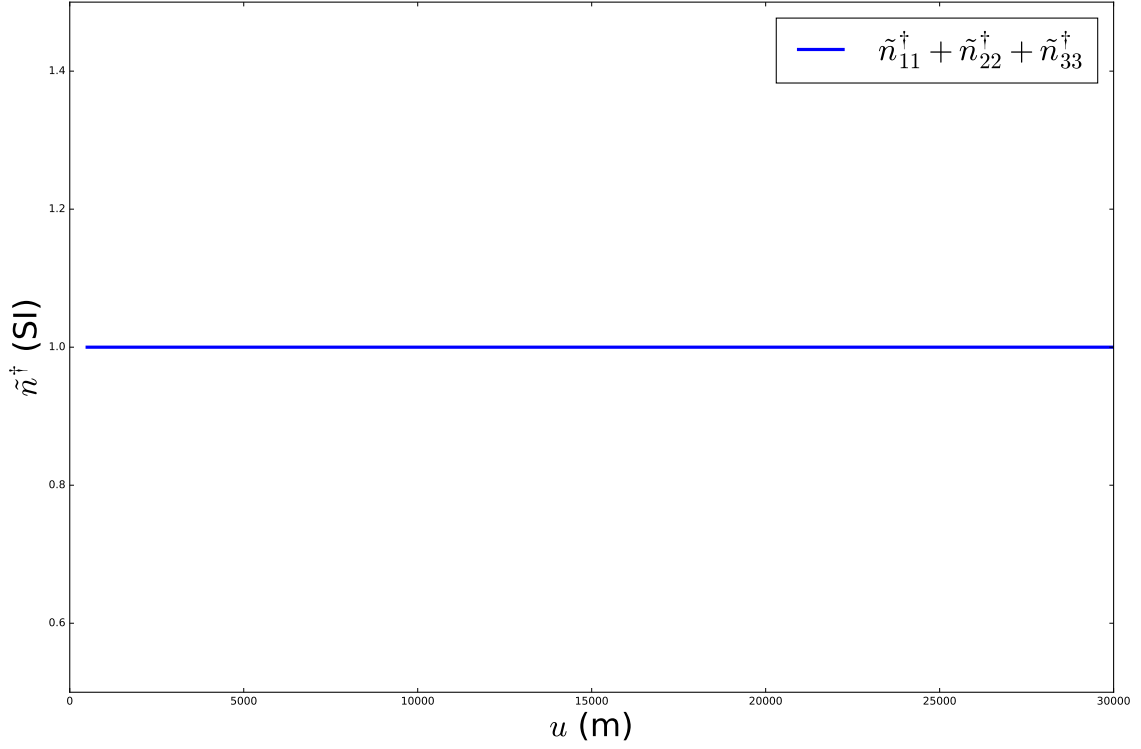


Figura 3.3: Soma dos fatores de desmagnetização. No SI a soma deverá ser igual à 1 (um). O fator u são números reais crescentes, que soma, simultaneamente, todos os semi-eixos.

Capítulo 4

Simulações Numéricas e Discussões

Diversas simulações com o código foram aplicadas, com o intuito de confirmar a resposta obtida pelo código, verificar as aplicações e levantar discussões à cerca do modelo elipsoidal.

4.1 Modelos elipsoidais

A implementação computacional feita, nos permite modelar elipsoides triaxiais, prolatos e oblatos para calcular o campo magnético gerado por estes corpos e a anomalia de campo total aproximada (Eqs. 2.69 e 2.72). Na Figura 4.1 temos a resposta do campo magnético gerado por um elipsoide triaxial com parâmetros conforme dado na Tabela 4.1.

Parâmetro	Valor	Unidade
a, b, c	150, 100, 75	m
Azimuth	0	°
δ	0	°
γ	0	°
xc	0	m
yc	0	m
zc	1000	m
J_{NRM}^*	100, 25°, 40°	A/m
F^*	60000, 50°, 20°	nT
k1, k2, k3	0.1, 0.1, 0.1	SI
Orientações k**	0, 90, 90	°

Tabela 4.1: Parâmetros do elipsoide triaxial modelado. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulo de azimuth, δ e γ , respectivamente, para as orientações da susceptibilidade.

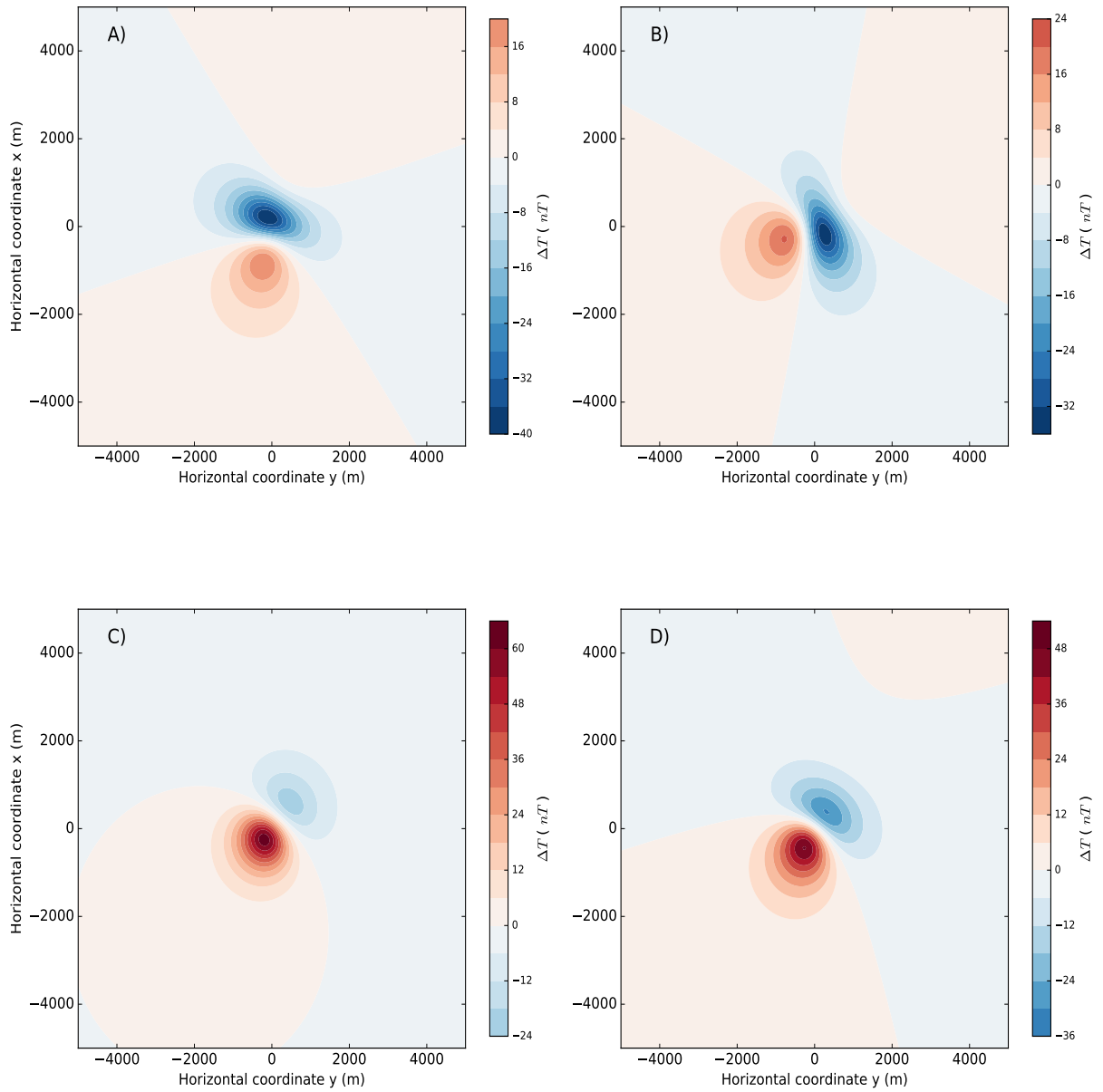


Figura 4.1: As componentes do campo magnético gerado por um elipsoide triaxial de parâmetros conforme a tabela 4.1 e a anomalia de campo total aproximada. Em A) a componente Bx do campo, em B) a componente By, em C) a componente Bz e em D) a anomalia de campo total aproximada.

Uma malha de de 40000 pontos foi criada (200x200) para os cálculos das três componentes e da anomalia de campo total aproximada em todas as simulações.

Na Figura 4.2 temos as três componentes do campo magnético gerado por um elipsoide triaxial com os parâmetros da Tabela 4.2.

Na Figura 4.3 temos as três componentes do campo magnético gerado por um elipsoide triaxial com os parâmetros da Tabela 4.3.

Parâmetro	Valor	Unidade
a,b	200, 100	m
Azimuth	45	°
δ	0	°
γ	0	°
xc	0	m
yc	0	m
zc	1000	m
J_{NRM}^*	100, 90°, 0°	A/m
F*	60000, 50°, 20°	nT
k1, k2, k3	0.1, 0.1, 0.1	SI
Orientações k**	0, 90, 90	°

Tabela 4.2: Parâmetros do elipsoide prolato modelado. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulo de azimuth, δ e γ , respectivamente, para as orientações da susceptibilidade.

Parâmetro	Valor	Unidade
a, b	100, 200	m
Azimuth	45	°
δ	0	°
γ	0	°
xc	0	m
yc	0	m
zc	1000	m
J_{NRM}^*	100, 90°, 0°	A/m
F*	60000, 50°, 20°	nT
k1, k2, k3	0.1, 0.1, 0.1	SI
Orientações k**	0, 90, 90	°

Tabela 4.3: Parâmetros do elipsoide oblato modelado. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulo de azimuth, δ e γ , respectivamente, para as orientações da susceptibilidade.

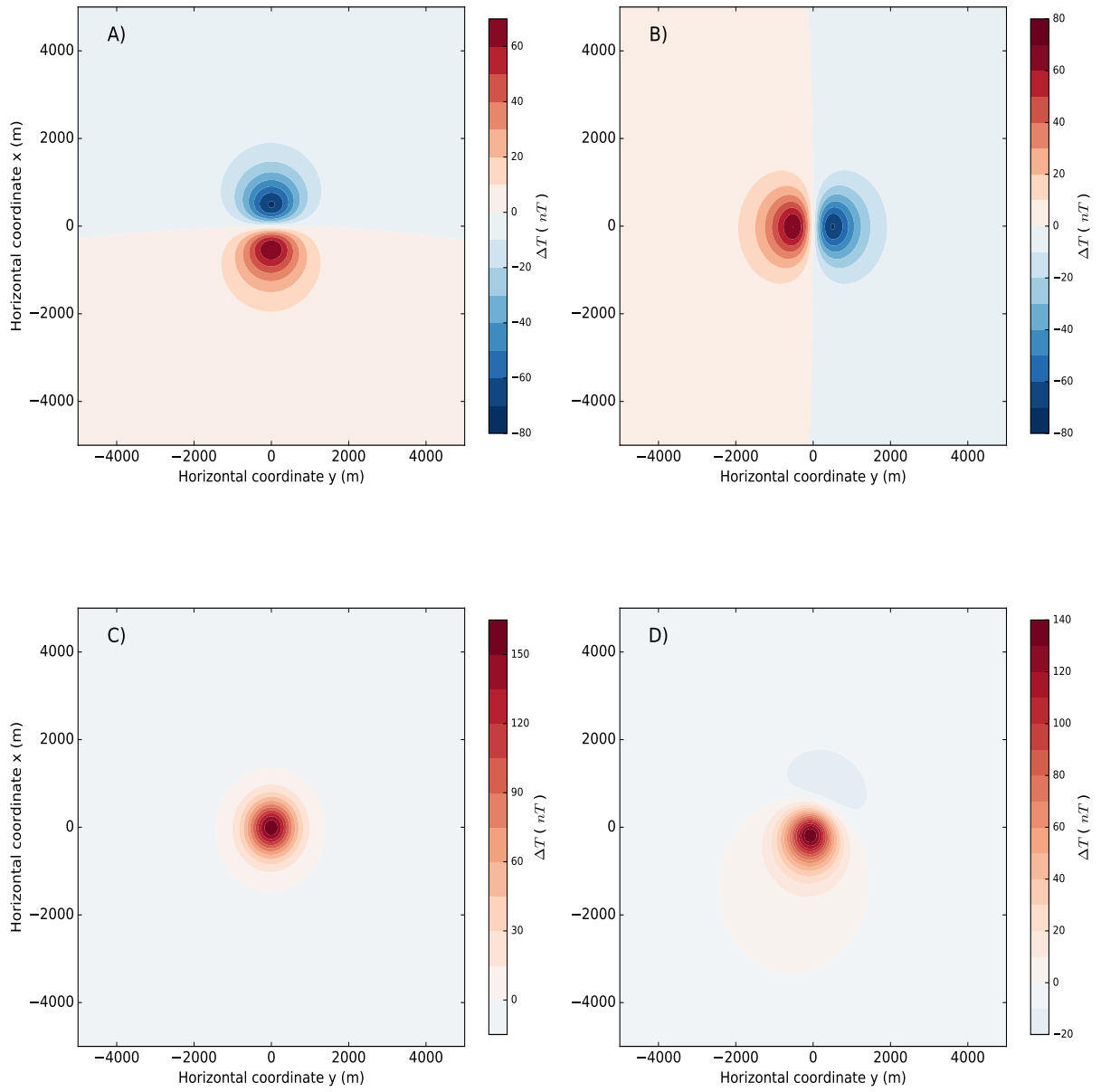


Figura 4.2: As componentes do campo magnético gerado por um elipsoide prolato de parâmetros conforme a tabela 4.2 e a anomalia de campo total aproximada. Em A) a componente B_x do campo, em B) a componente B_y , em C) a componente B_z e em D) a anomalia de campo total aproximada.

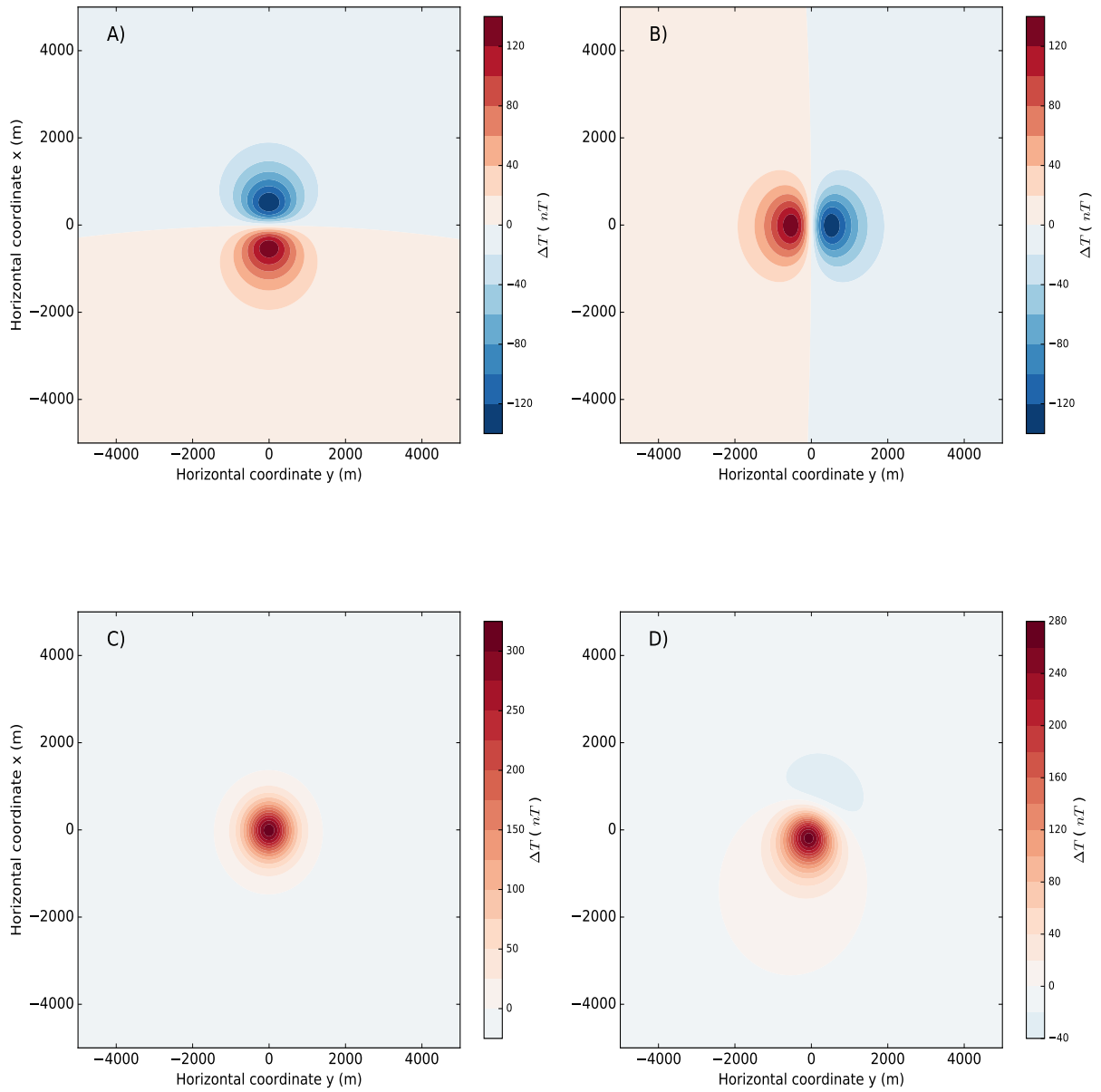


Figura 4.3: As componentes do campo magnético gerado por um elipsoide oblato de parâmetros conforme a tabela 4.3 e a anomalia de campo total aproximada. Em A) a componente B_x do campo, em B) a componente B_y , em C) a componente B_z e em D) a anomalia de campo total aproximada.

Já na Figura 4.4, fizemos uma simulação de dois corpos elipsoidais triaxiais sendo modelados dentro da mesma malha, que pode ser feita de forma prática usando a classe elipsoidal, implementada no *mesher* do *Fatiando a Terra*. Novamente temos as três componentes do campo magnético gerado pelos corpos com os parâmetros da Tabela 4.4.

Parâmetro	Valor	Unidade
a, b, c	150, 100, 75	m
Azimuth	0	°
δ	0	°
γ	0	°
xc	-2500	m
yc	-2500	m
zc	1000	m
J_{NRM}^*	100, 25°, 40°	A/m
k1, k2, k3	0.1, 0.1, 0.1	SI
Orientações k**	0, 90, 90	°
a ₂ , b ₂ , c ₂	200, 120, 60	m
Azimuth ₂	0	°
δ_2	0	°
γ_2	0	°
xc ₂	2500	m
yc ₂	2500	m
zc ₂	1000	m
J_{2NRM}^*	75, 25°, 40°	A/m
k1 ₂ , k2 ₂ , k3 ₂	0.1, 0.1, 0.1	SI
Orientações k ₂ **	0, 90, 90	°
F*	60000, 50°, 20°	nT

Tabela 4.4: Parâmetros dos dois elipsoides triaxiais modelados. O segundo elipsoide é mostrada na tabela pela índice ₂ nos parâmetros. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulo de azimuth, δ e γ , respectivamente, para as orientações da susceptibilidade.

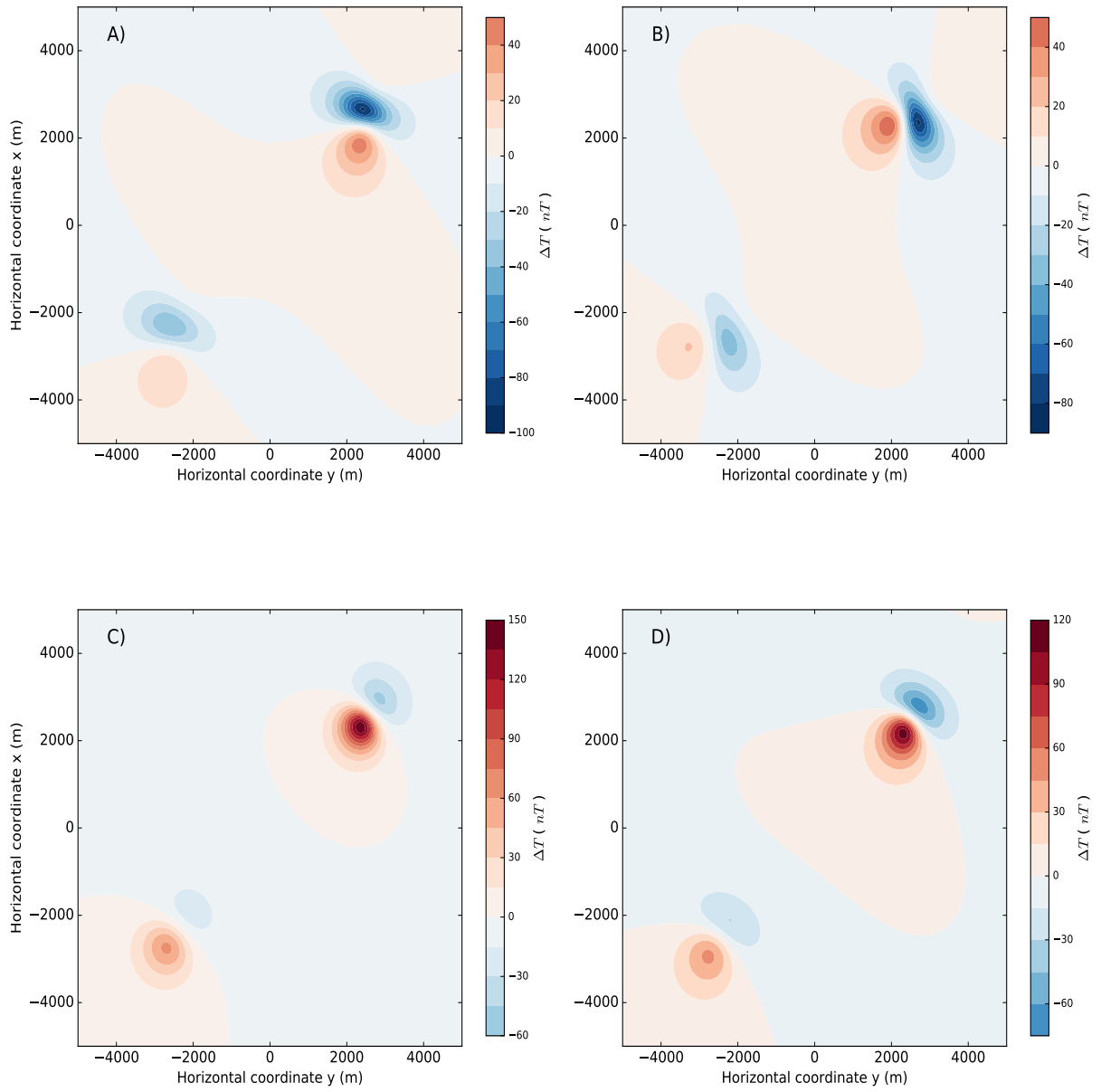


Figura 4.4: As componentes do campo magnético gerado pelos elipsoides triaxiais de parâmetros conforme a tabela 4.4 e a anomalia de campo total aproximada. Em A) a componente B_x do campo, em B) a componente B_y , em C) a componente B_z e em D) a anomalia de campo total aproximada.

4.2 Elementos do tensor de depolarização

Os fatores de desmagnetização são importantíssimos para a modelagem de corpos com alta susceptibilidade e dependem apenas da sua forma geométrica, no modelo elipsoidal.

Na Figura 4.5 observamos o comportamento afastado destes elementos, quando os semi-eixos de elipsoide triaxial possuem tamanhos diferentes, e a tendência de se aproximarem para um mesmo valor quando possuem tamanhos próximos (se aproximando de uma esfera, que possui o valor de $1/3$ no SI para todos os elementos dos fatores de desmagnetização).

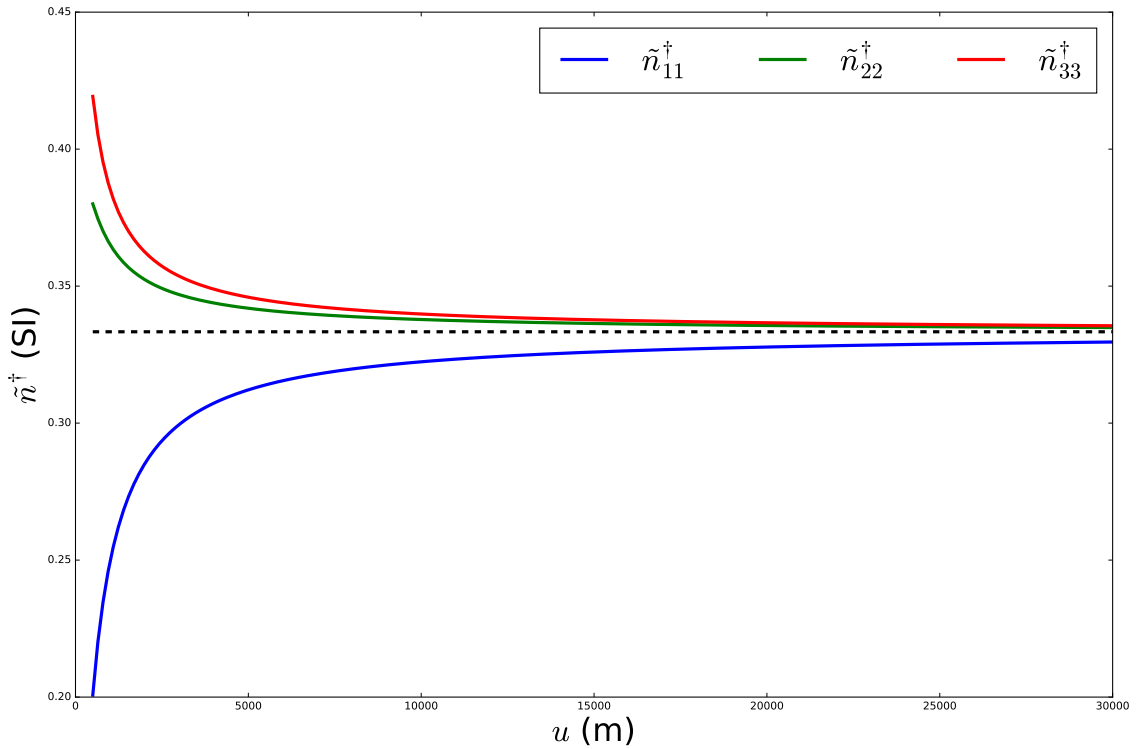


Figura 4.5: Teste dos fatores de desmagnetização: \tilde{n}_{11}^\dagger , \tilde{n}_{22}^\dagger e \tilde{n}_{33}^\dagger para um elipsoide triaxial originalmente com semi-eixos 500, 100 e 50 metros, com um fator u crescente, somando, simultaneamente, todos os semi-eixos.

Na Figura 4.6 observamos o mesmo comportamento no caso triaxial para o caso do elipsoide prolato. Neste gráfico no eixo horizontal é feita a relação entre os semi-eixos a e b (m) onde aumenta-se o valor do semi-eixo maior e mantém o semi-eixo menor constante. No começo, quando os semi-eixos estão próximos, os elementos tendem à $1/3$ e se afastam conforme a é muito maior que b .

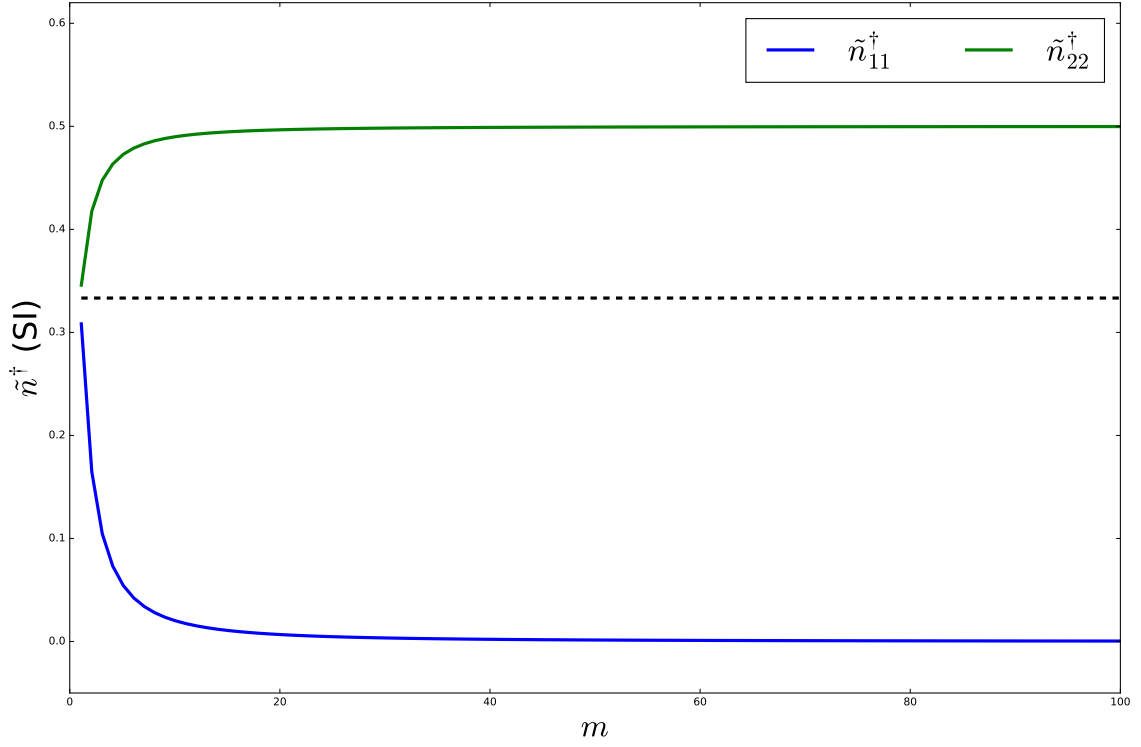


Figura 4.6: Teste dos fatores de desmagnetização: \tilde{n}_{11}^{\dagger} e \tilde{n}_{22}^{\dagger} para um elipsoide prolato originalmente com semi-eixos 110 e 100 metros, com um fator $m(a/b)$ crescente, aumentando a valor do semi-eixo maior e mantendo o semi-eixo menor constante.

Já na figura 4.7 realizamos a mesma relação entre os semi-eixos a e b do caso prolato, onde aumenta-se o valor de a . Lembremos que no caso do elipsoide oblato a é o semi-eixo menor e b o semi-eixo maior. No começo, quando os semi-eixos estão afastados, os elementos estão afastados para b muito maior que a e tendem à $1/3$ conforme se aproximam.

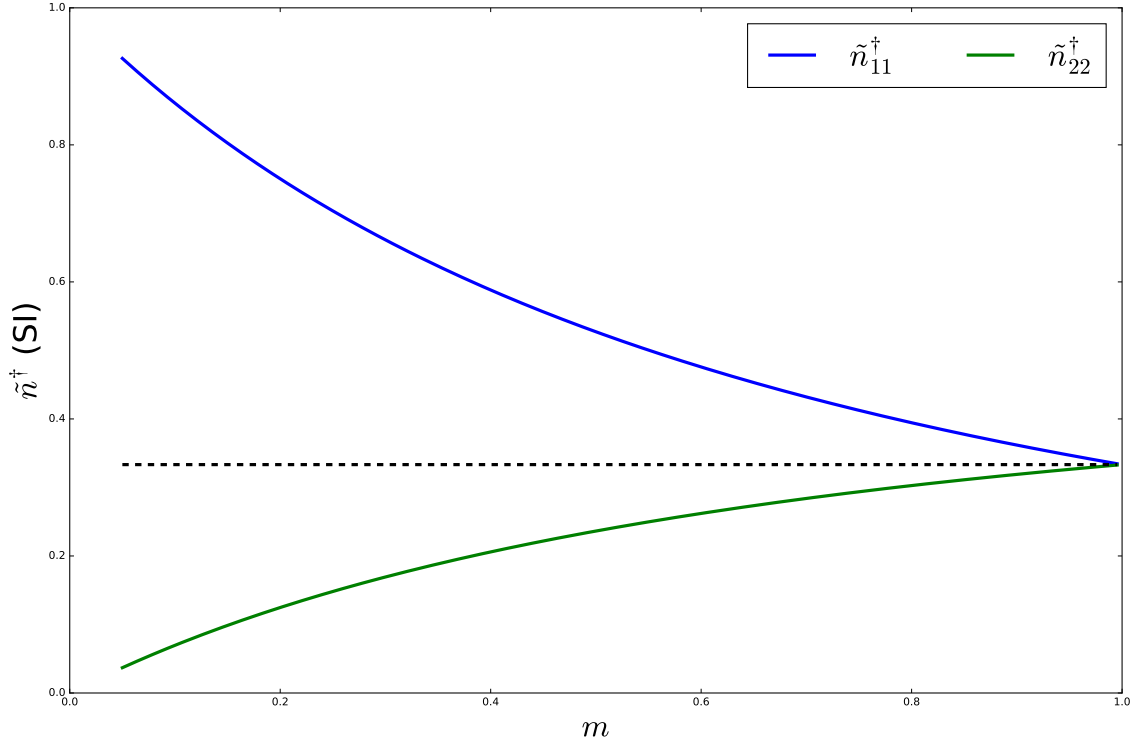


Figura 4.7: Teste dos fatores de desmagnetização: \tilde{n}_{11}^\dagger e \tilde{n}_{22}^\dagger para um elipsoide oblato originalmente com semi-eixos 1000 e 50 metros, com um fator $u(a/b)$ crescente, mantendo o semi-eixo maior constante (neste caso o b), e tornando o semi-eixo menor maior, até o ponto de quase se igualarem.

Através destes gráficos é possível observar como os fatores de desmagnetização possuem valor menor, quanto maior o semi-eixo do elipsoide. De fato há uma relação: \tilde{n}_{11}^\dagger está relacionado com o semi-eixo maior, \tilde{n}_{22}^\dagger com o semi-eixo intermediário e \tilde{n}_{33}^\dagger com o semi-eixo menor. Fisicamente, isto significa que há a tendência, do elipsoide se desmagnetizar com maior intensidade na direção dos seus semi-eixos menores.

4.3 Comparações entre os modelos elipsoidais

Testamos a implementação computacional comparando com resultados conhecidos. Na Figura 4.8 comparamos um elipsoide triaxial com seus três semi-eixos muito próximos um do outro (simulando uma esfera), conforme Tabela 4.5, e comparamos com a implementação da esfera do software *Fatiando a Terra*.

Parâmetro	Valor	Unidade
a, b, c	500.0001, 500.0, 499.9999	m
Azimuth	0	°
δ	0	°
γ	0	°
xc	0	m
yc	0	m
zc	1000	m
J_{NRM}^*	100, 25°, 40°	A/m
F^*	1, 50°, 20°	nT
k1, k2, k3	0.1, 0.1, 0.1	SI
Orientações k**	0, 90, 90	°

Tabela 4.5: Parâmetros do elipsoide triaxial modelado para comparação com a esfera. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulo de azimuth, δ e γ , respectivamente, para as orientações da susceptibilidade.

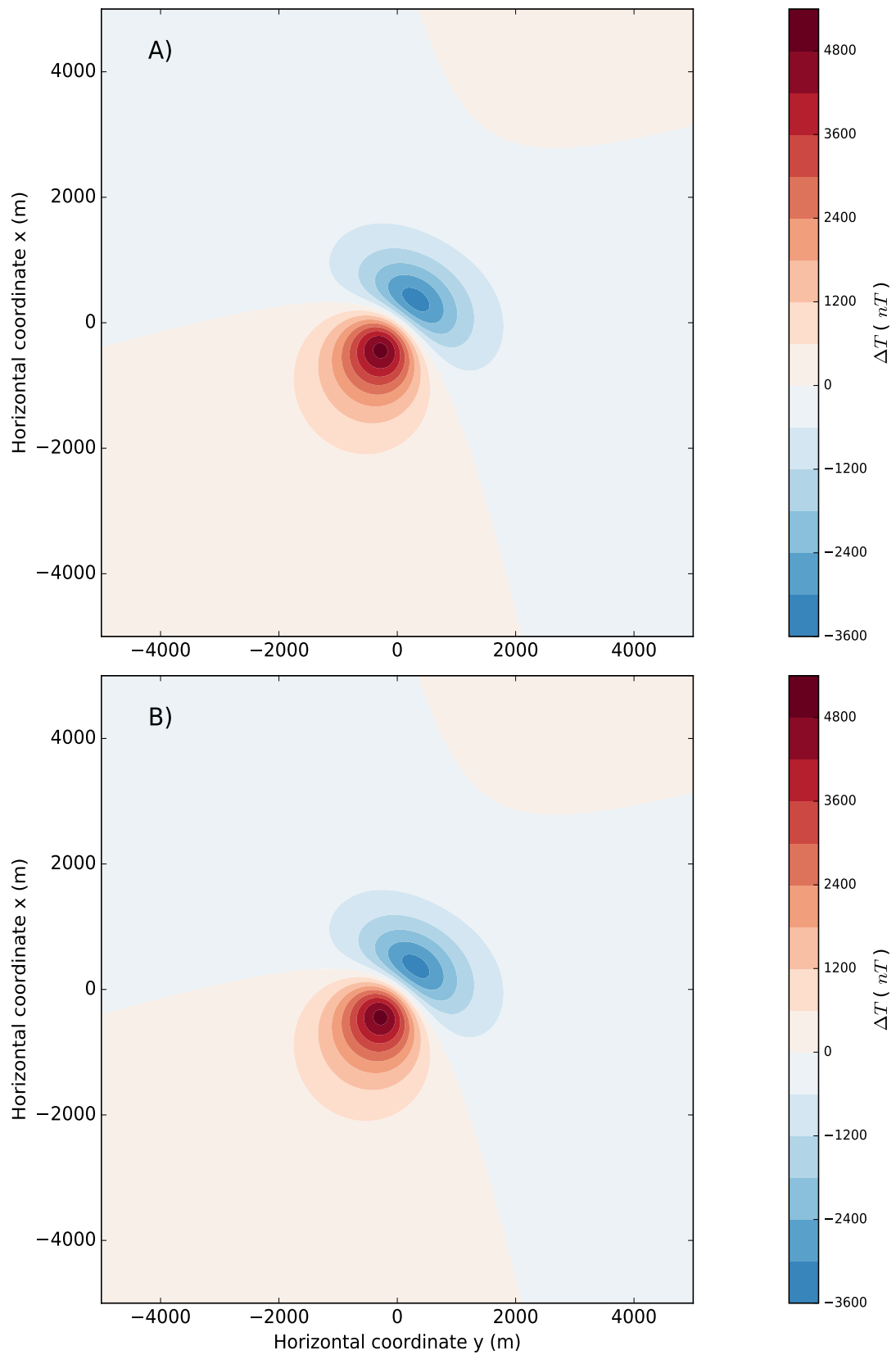


Figura 4.8: Comparação da anomalia de campo total aproximada entre um elipsoide triaxial com três semi-eixos muito próximos, simulando uma esfera, e uma esfera implementada pelo software *Fatiando a Terra*.

Os resultados da comparação foram muito próximos. Confirmado a implementação do elipsoide triaxial, o usamos para comparar com a implementação do elipsoide prolato de parâmetros conforme tabelas 4.6 e 4.7. O resultado está na Figura 4.9.

Parâmetro	Valor	Unidade
a, b, c	500, 100, 99.99	m
Azimuth	90	°
δ	45	°
γ	0	°
xc	0	m
yc	0	m
zc	1000	m
J_{NRM}^*	100, 90°, 0°	nT
F*	60000, 50°, 20°	A/m
k1, k2, k3	0.2, 0.1, 0.05	SI
Orientações k**	0, 90, 90	°

Tabela 4.6: Parâmetros do elipsoide triaxial modelado para comparação com o elipsoide prolato. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulo de azimuth, δ e γ , respectivamente, para as orientações da susceptibilidade.

Parâmetro	Valor	Unidade
a, b	500, 100	m
Azimuth	90	m
δ	45	°
γ	0	°
xc	0	m
yc	0	m
zc	1000	m
J_{NRM}^*	100, 90°, 0°	A/m
F*	60000, 50°, 20°	nT
k1, k2, k3	0.2, 0.1, 0.05	SI
Orientações k**	0, 90, 90	°

Tabela 4.7: Parâmetros do elipsoide prolato modelado para comparação com elipsoide triaxial. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulo de azimuth, δ e γ , respectivamente, para as orientações da susceptibilidade.

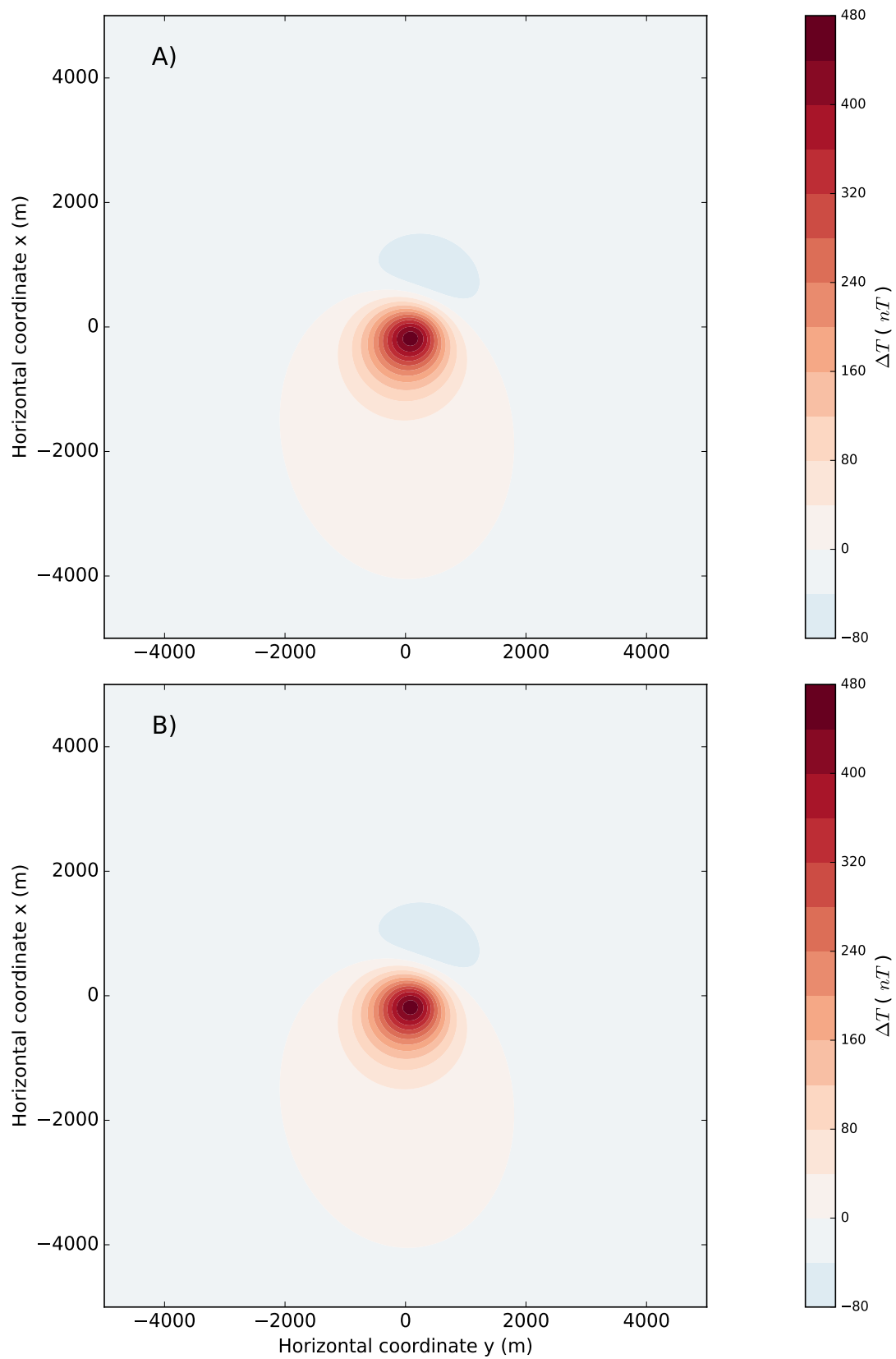


Figura 4.9: Comparação da anomalia de campo total aproximada entre um elipsoide triaxial com um dos semi-eixos mais alongado que o restante e um elipsoide prolato.

Também usamos a implementação do elipsoide triaxial, para comparar com a implementação do elipsoide oblato de parâmetros conforme tabelas 4.8 e 4.9. O resultado está na Figura 4.10.

Parâmetro	Valor	Unidade
a, b, c	500, 499.99, 499.98	m
Azimuth	0	m
δ	0	°
γ	90	°
xc	0	m
yc	0	m
zc	1000	m
J_{NRM}^*	100, 90°, 0°	A/m
F*	60000, 50°, 20°	nT
k1, k2, k3	0.1, 0.1, 0.1	SI
Orientações k**	0, 90, 90	°

Tabela 4.8: Parâmetros do elipsoide triaxial modelado para comparação com o elipsoide oblato. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulo de azimuth, δ e γ , respectivamente, para as orientações da susceptibilidade.

Parâmetro	Valor	Unidade
a, b	499.99, 500	m
Azimuth	0	°
δ	0	°
γ	0	°
xc	0	m
yc	0	m
zc	1000	m
J_{NRM}^*	100, 90°, 0°	A/m
F*	60000, 50°, 20°	nT
k1, k2, k3	0.1, 0.1, 0.1	SI
Orientações k**	0, 90, 90	°

Tabela 4.9: Parâmetros do elipsoide oblato modelado para compração com o elipsoide triaxial. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulo de azimuth, δ e γ , respectivamente, para as orientações da susceptibilidade.

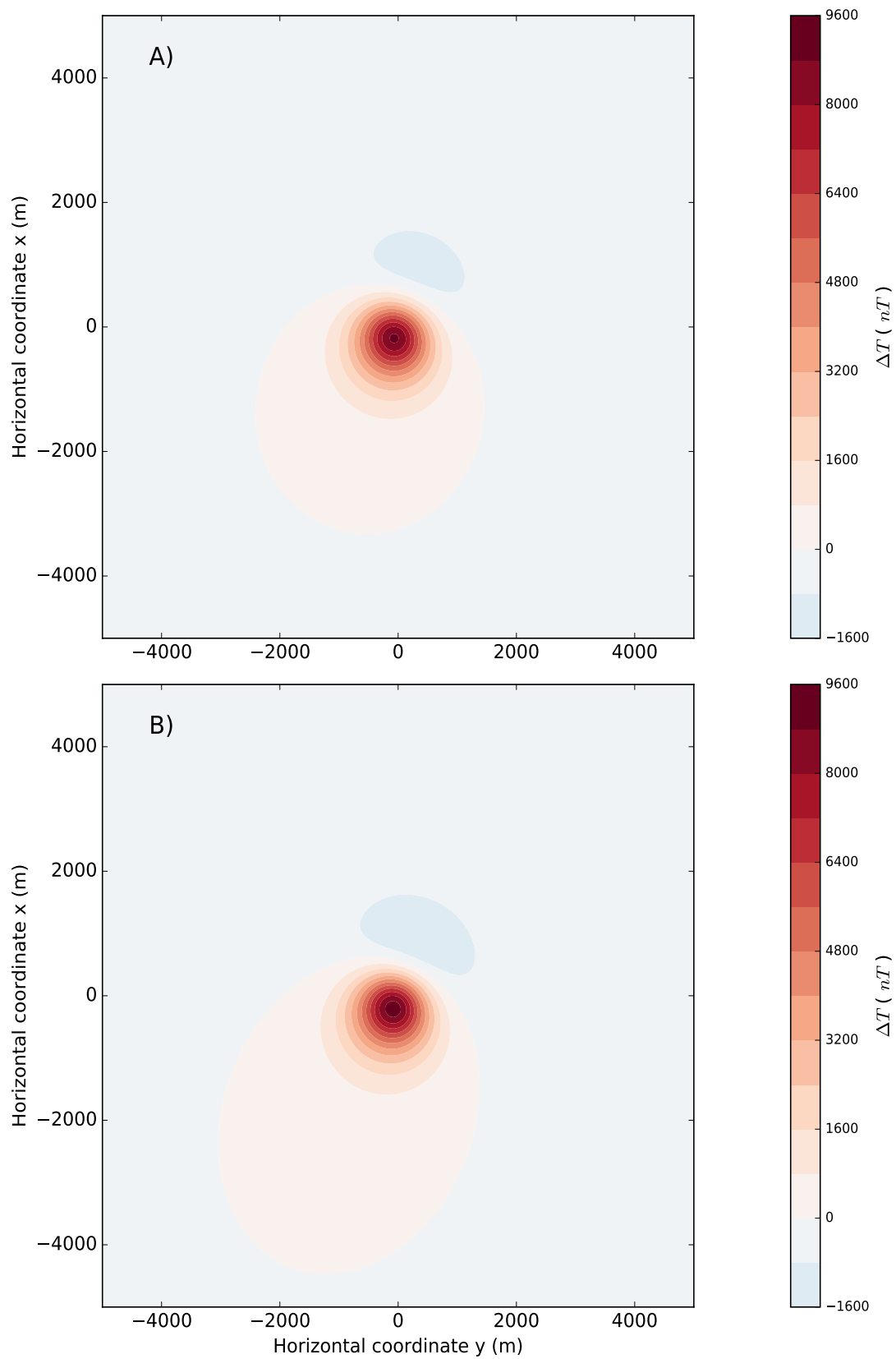


Figura 4.10: Comparação da anomalia de campo total aproximada entre um elipsoide triaxial com três semi-eixos muito próximos e um elipsoide oblato também com seus dois semi-eixos muito próximos.

4.4 Susceptibilidade

Em corpos de alta susceptibilidade, a desmagnetização é um fator muito importante, pois isso pode acarretar em erros de interpretação das anomalias em dados magnéticos. Na Figura 4.11, mostramos com um aumento gradual da susceptibilidade (neste caso isotrópica), a diferença na inclinação e declinação que o vetor de magnetização resultante sofre. É conhecido na literatura que o valor de susceptibilidade de 0.1 SI é o ponto onde a desmagnetização não deve ser desconsiderada na modelagem, o que de fato observa-se neste gráfico.

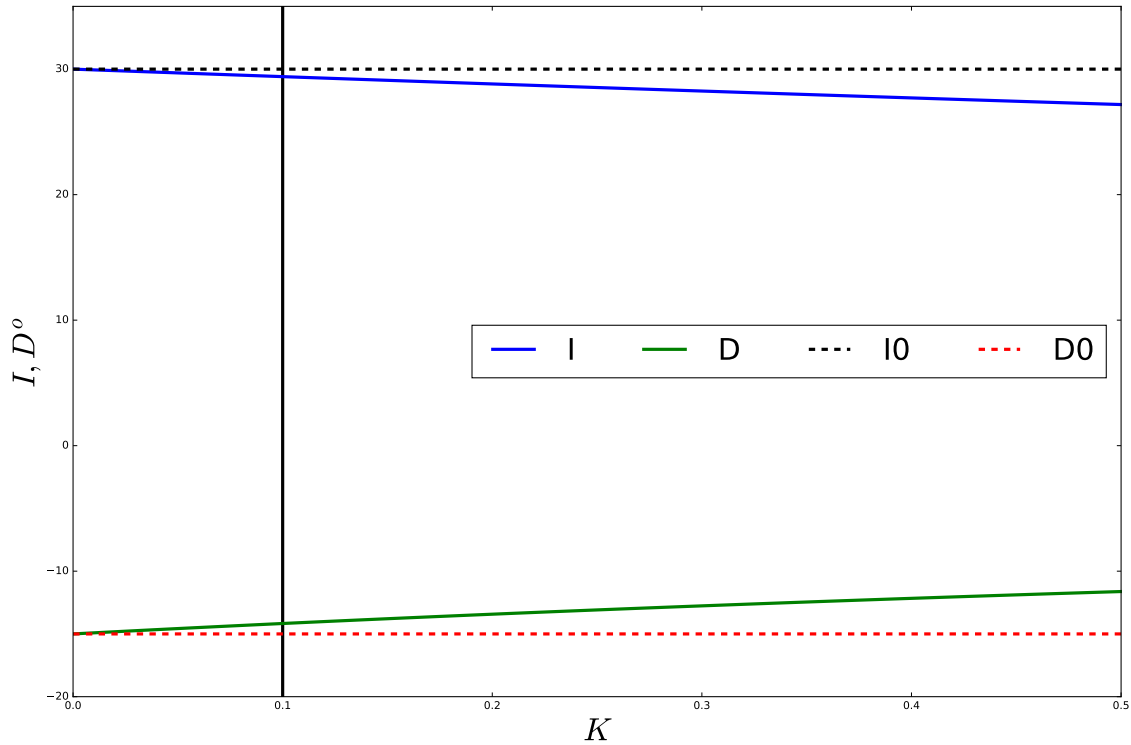


Figura 4.11: Teste do efeito da susceptibilidade na desmagnetização de um elipsoide imerso em um campo externo constante de inclinação 30° e declinação -15° , sem magnetização remanente, que recebe gradativamente, de forma isotrópica, uma susceptibilidade crescente. Em destaque uma linha demarcatória em $K = 0.1$ SI, onde a literatura reconhece como um valor limite para desconsiderar os efeitos da desmagnetização.

4.5 Anisotropia de forma

Conforme dito na seção 4.2 existe uma relação entre os elementos do tensor de depolarização e os semi-eixos. Na Figura 4.12 mostramos como o aumento do semi-eixo maior afeta o vetor de magnetização resultante. A princípio, os três semi-eixos estão muito próximos, simulando uma esfera. Quando postos sob um campo externo, o vetor de magnetização resultante se direciona para a direção deste campo. Porém a medida que aumenta-se o semi-eixo maior, ocorre a depolarização dos demais e o vetor de magnetização resultante tende a se alinhar na direção do semi-eixo maior (neste caso o elipsoide triaxial possui um azimuth de 10°).

Parâmetro	Valor	Unidade
a, b, c	50.1-1000, 50, 49.9	m
Azimuth	10	°
δ	0	°
γ	0	°
xc	0	m
yc	0	m
zc	1000	m
J_{NRM}^*	100, 0° , 0°	A/m
F^*	60000, 90° , 20°	nT
k1, k2, k3	50, 50, 50	SI
Orientações k**	0, 90, 90	°

Tabela 4.10: Parâmetros do elipsoides triaxiais modelados com o semi-eixo a crescente e azimuth com grande diferença na direção com relação ao campo da Terra para verificar a anisotropia de forma. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulo de azimuth, δ e γ , respectivamente, para as orientações da susceptibilidade.

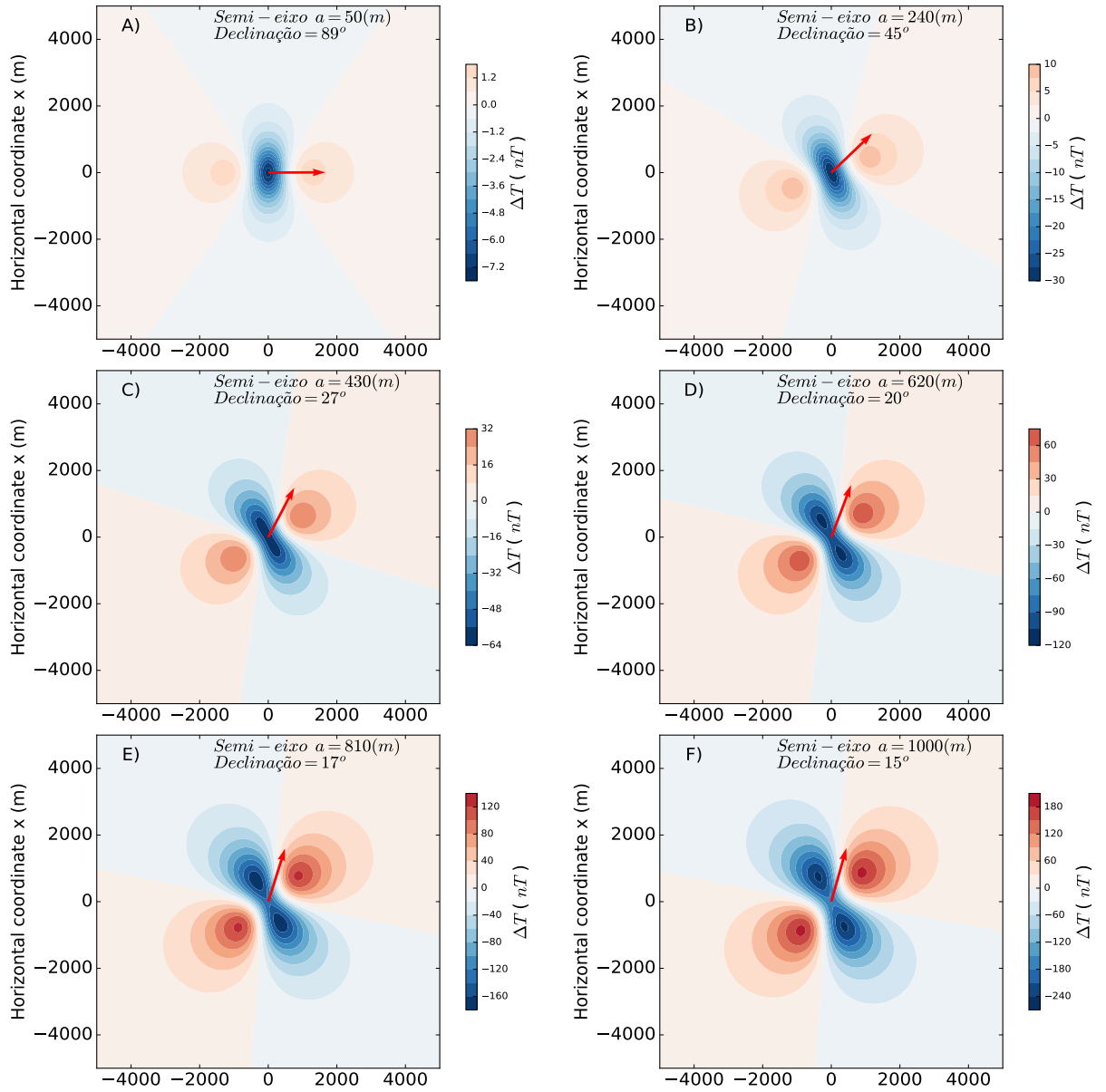


Figura 4.12: Simulação, da mudança do vetor de magnetização resultante, de um elipsoide triaxial com o aumento do semi-eixo maior. O elipsoide está imerso em um campo externo constante de declinação 90° , possui susceptibilidade isotrópica e constante e está direcionado com um azimuth de 10° . Ao longo da sequência das figuras, seu semi-eixo maior aumenta de proporção em relação aos demais (variando entre 50 e 3000 m.). Nota-se a tendência do vetor de magnetização resultante (seta em vermelho) em se alinhar com o semi-eixo maior.

Para efeito de comparação realizamos o mesmo teste, porém com um azimuth de 80° para o elipsoide. A variação é bem menor, mas também se confirma a tendência do alinhamento do vetor de magnetização resultante para a direção do semi-eixo maior.

Parâmetro	Valor	Unidade
a, b, c	50.1-1000, 50, 49.9	m
Azimuth	80	$^\circ$
δ	0	$^\circ$
γ	0	$^\circ$
xc	0	m
yc	0	m
zc	1000	m
J_{NRM}^*	100, 0° , 0°	A/m
F^*	60000, 50° , 20°	nT
k1, k2, k3	50, 50, 50	SI
Orientações k**	0, 90, 90	$^\circ$

Tabela 4.11: Parâmetros do elipsoides triaxiais modelados com o semi-eixo a crescente e azimuth com grande diferença na direção com relação ao campo da Terra para verificar a anisotropia de forma. *Valores de intensidade, inclinação e declinação respectivamente. **Ângulo de azimuth, δ e γ , respectivamente, para as orientações da susceptibilidade.

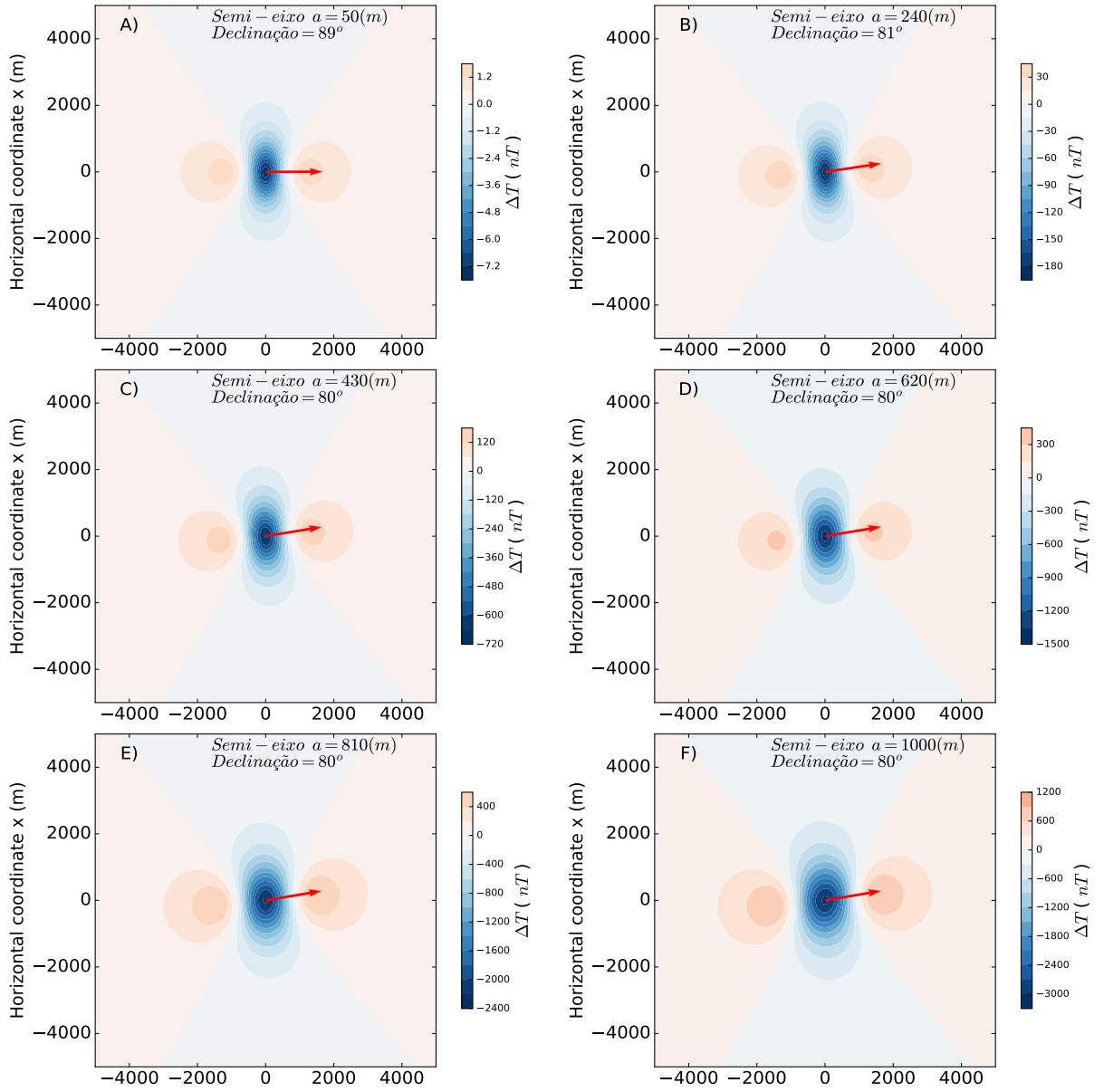


Figura 4.13: Simulação, da mudança do vetor de magnetização resultante, de um elipsoide triaxial com o aumento do semi-eixo maior. O elipsoide está imerso em um campo externo constante de declinação 90° , possui susceptibilidade constante e direcionado com um azimuth de 80° . Ao longo da sequência das figuras, seu semi-eixo maior aumenta de proporção em relação aos demais (variando entre 50 e 3000 m.). Nota-se a tendência do vetor de magnetização resultante (seta em vermelho) em se alinhar com o semi-eixo maior. Diferente da figura anterior, houve pouca mudança na declinação devido ao alinhamento do elipsoide com a campo externo.

Capítulo 5

Conclusões

A modelagem direta do campo magnético gerado por fontes elipsoidais se mostrou satisfatória para os testes conduzidos neste trabalho. As componentes do campo magnético e a anomalia de campo total aproximada foram calculadas conforme o esperado para as três implementações deste trabalho: para os elipsoides triaxiais, prolatos e oblatos.

Para validação do nosso código realizamos algumas simulações. Colocando os valores dos semi-eixos próximos uns dos outros aproximamos o elipsoide para uma esfera e encontramos valores perto da indução magnética causada por uma esfera verdadeira. Alongando o semi-eixo maior aproximamos o elipsoide para uma forma de *pipe* e comparamos com um elipsoide prolato. Novamente os resultados encontrados foram próximos, demonstrando a flexibilidade da forma geométrica do elipsoide. Na comparação com um elipsoide oblato, que possui algumas diferenças na parametrização dos ângulos, aproximamos tanto o elipsoide triaxial, quanto o oblato, para uma esfera, a fim de facilitar comparações. Os resultados foram muito próximos também.

Os elementos dos fatores de desmagnetização se comportaram conforme o esperado para todos os tipos de elipsoide, afastados uns dos outros quando os semi-eixos tem valores diferentes e todos tendendo a $1/3$ quando próximos, indicando que a depolarização ocorre de forma homogênea neste caso. Como esperado na teoria a soma dos elementos é igual a 1.

Para o teste de susceptibilidade foi calculado a mudança de direção do vetor de magnetização resultante conforme a intensidade da susceptibilidade é aumentada. E de fato, assim como é conhecido na literatura, foi verificado que a mudança de direção começa a ser relevante a partir de uma susceptibilidade maior que 0.1 no SI.

Em outro teste que foi conduzido, verificamos a mudança de direção do vetor de magnetização, com a tendência de se alinhar ao semi-eixo maior do elipsoide conforme este aumentava, mesmo com uma susceptibilidade (k_1 , k_2 e k_3) constante. Isto, se deve ao fato que o sei-eixo maior sofrerá menor desmagnetização que os

demais, o que é chamado de anisotropia de susceptibilidade de forma.

A implementação também se mostrou eficaz para modelar, de forma prática, múltiplos corpos de uma única vez, utilizando a classe elipsoidal. Por esta implementação fazer parte do software *Fatiando a Terra*, é também beneficiado por ter à disposição as ferramentas já nele implementadas, e também sua estrutura que permite acessibilidade e maior difusão na comunidade científica.

Futuramente este código poderá ser utilizado para modelar situações mais complexas e também situações geológicas reais. Devido a particularidade do corpo elipsoidal em ter solução analítica para a desmagnetização, estudos mais profundos sobre a susceptibilidade magnética e a relação desta com o erro da modelagem magnética podem ser feitos. O código também poderá servir para estudos de inversão magnética, podendo-se estimar diversos parâmetros como o vetor de magnetização, semi-eixos e as orientações angulares do corpo elipsoidal.

Referências Bibliográficas

- ALLMENDINGER, R., CARDOZO, N., FISHER, D. M., 2012, *Structural geology algorithms : vectors and tensors*. Cambridge University Press. ISBN: 978-1-107-40138-9.
- AUSTIN, J., GEUNA, S., CLARK, D., et al., 2014, “Remanence, self-demagnetization and their ramifications for magnetic modelling of iron oxide copper-gold deposits: An example from Candelaria, Chile”, *Journal of Applied Geophysics*, v. 109, pp. 242 – 255. ISSN: 0926-9851. doi: 10.1016/j.jappgeo.2014.08.002.
- BLAKELY, R. J., 1996, *Potential theory in gravity and magnetic applications*. Cambridge University Press.
- CHANG, H., 1961, “Fields external to open-structure magnetic devices represented by ellipsoid or spheroid”, *British Journal of Applied Physics*, v. 12, n. 4, pp. 160.
- CLARK, D., 2000, “Self-Demagnetisation in Practice: the Osborne Cu-Au Deposit”, *Preview (Magazine of the Australian Society of Exploration Geophysicists)*, , n. 85, pp. 31–36. ISSN: 1443-2471.
- CLARK, D., EMERSON, D., 1999, “Self-Demagnetisation”, *Preview (Magazine of the Australian Society of Exploration Geophysicists)*, , n. 79, pp. 22–25.
- CLARK, D., SAUL, S., EMERSON, D., 1986, “Magnetic and gravity anomalies of a triaxial ellipsoid”, *Exploration Geophysics*, v. 17, n. 4, pp. 189–200.
- CLARK, D. A., 2014, “Methods for determining remanent and total magnetisations of magnetic sources—a review”, *Exploration Geophysics*, v. 45, n. 4, pp. 271–304.
- DIRICHLET, L. P. G., 1839, “Sur un nouvelle methode pour la determination des integrales multiples”, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, v. 1, n. 4, pp. 164–168. Disponível em: <http://sites.mathdoc.fr/JMPA/PDF/JMPA_1839_1_4_A11_0.pdf>.

- DUBOIS, H., 1896, *The Magnetic Circuit in Theory and Practice*. Longmans, Green, and Co.
- DUNLOP, D., ÖZDEMİR, Ö., 1997, *Rock Magnetism: Fundamentals and Frontiers*. Cambridge Studies in Magnetism. Cambridge University Press. ISBN: 9780521325141.
- EMERSON, D. W., CLARK, D., SAUL, S., 1985, “Magnetic exploration models incorporating remanence, demagnetization and anisotropy: HP 41C handheld computer algorithms”, *Exploration Geophysics*, v. 16, n. 1, pp. 1–122.
- ESKOLA, L., TERVO, T., 1980, “Solving the magnetostatic field problem (a case of high susceptibility) by means of the method of subsections”, *Geoexploration*, v. 18, n. 2, pp. 79 – 95. ISSN: 0016-7142. doi: 10.1016/0016-7142(80)90022-8.
- FARRAR, L., 1979, “Some comments on detailed magnetic investigations of ellipsoidal bodies at Tennant Creek”, *Exploration Geophysics*, v. 10, n. 1, pp. 26–33.
- FULLER, M. D., 1963, “Magnetic anisotropy and paleomagnetism”, *Journal of Geophysical Research*, v. 68, n. 1, pp. 293–309. ISSN: 2156-2202. doi: 10.1029/JZ068i001p00293.
- GUO, W., DENTITH, M. C., LI, Z., et al., 1998, “Self demagnetisation corrections in magnetic modelling: some examples”, *Exploration Geophysics*, v. 29, n. 3/4, pp. 396–401.
- GUO, W., DENTITH, M. C., BIRD, R. T., et al., 2001, “Systematic error analysis of demagnetization and implications for magnetic interpretation”, *Geophysics*, v. 66, n. 2, pp. 562–570.
- HILLAN, D., FOSS, C., 2013, “Correction schemes for self-demagnetisation”. In: *ASEG Extended Abstracts 2012: 22nd Geophysical Conference*, pp. 1–4. doi: 10.1071/ASEG2012ab402.
- HOSCHKE, T., 1991, “Geophysical discovery and evaluation of the West Peko copper-gold deposit, Tennant Creek”, *Exploration Geophysics*, v. 22, n. 3, pp. 485–495.
- HROUDA, F., 1982, “Magnetic anisotropy of rocks and its application in geology and geophysics”, *Geophysical surveys*, v. 5, n. 1, pp. 37–82.

- HUNTER, J. D., 2007–. “Matplotlib: A 2D Graphics Environment”. Disponível em: <<http://scitation.aip.org/content/aip/journal/cise/9/3/10.1109/MCSE.2007.55>>. [Online; accessed 2017-02-02].
- JAHREN, C. E., 1963, “Magnetic susceptibility of bedded iron-formation”, *GEOPHYSICS*, v. 28, n. 5, pp. 756–766. doi: 10.1190/1.1439268.
- JANÁK, F., 1972, “Magnetic susceptibility anisotropy of various rock types and its significance for geophysics and geology”, *Geophysical Prospecting*, v. 20, n. 2, pp. 375–384. ISSN: 1365-2478. doi: 10.1111/j.1365-2478.1972.tb00640.x.
- JONES, E., OLIPHANT, T., PETERSON, P., et al., 2001–. “SciPy: Open source scientific tools for Python”. Disponível em: <<http://www.scipy.org/>>. [Online; accessed 2017-02-02].
- JOSEPH, R. I., SCHLÖMANN, E., 1965, “Demagnetizing Field in Nonellipsoidal Bodies”, *Journal of Applied Physics*, v. 36, n. 5, pp. 1579–1593. doi: 10.1063/1.1703091.
- KELLOGG, O. D., 1929, *Foundations of Potential Theory*. Frederick Ungar Publishing Company.
- LOWES, F. J., 1974, “The Torque on a Magnet”, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, v. 337, n. 1611, pp. 555–567. ISSN: 00804630. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/78532>>.
- MACDONALD, W. D., ELLWOOD, B. B., 1987, “Anisotropy of magnetic susceptibility: Sedimentological, igneous, and structural-tectonic applications”, *Reviews of Geophysics*, v. 25, n. 5, pp. 905–909. ISSN: 1944-9208. doi: 10.1029/RG025i005p00905.
- MAXWELL, J. C., 1873, *A treatise on electricity and magnetism*, v. 2. Clarendon press.
- OSBORN, J., 1945, “Demagnetizing factors of the general ellipsoid”, *Physical review*, v. 67, n. 11-12, pp. 351.
- PEAKE, H. J., DAVY, N., 1953, “The magnetic fields produced by uniformly magnetized ellipsoids of revolution”, *British Journal of Applied Physics*, v. 4, n. 7, pp. 207.
- PEIRCE, B., 1902, *Elements of the Theory of the Newtonian Potential Function*. Cornell University Library historical math monographs. Ginn.

- POISSON, S. D., 1824, “Second mémoire sur ta théorie du magnétism”, *Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France*, pp. 488–533.
- PURSS, M. B. J., CULL, J. P., 2005, “A new iterative method for computing the magnetic field at high magnetic susceptibilities”, *GEOPHYSICS*, v. 70, n. 5, pp. L53–L62. doi: 10.1190/1.2052469.
- REITZ, J. R., MILFORD, F. J., CHRISTY, R. W., 1992, *Foundations of Electromagnetic Theory*. Addison Wesley. ISBN: 0201526247.
- ROCHETTE, P., JACKSON, M., AUBOURG, C., 1992, “Rock magnetism and the interpretation of anisotropy of magnetic susceptibility”, *Reviews of Geophysics*, v. 30, n. 3, pp. 209–226. ISSN: 1944-9208. doi: 10.1029/92RG00733.
- SEARLE, S. R., 1982, *Matrix Algebra Useful for Statistics*. Wiley-Interscience. ISBN: 0471866814.
- SHARMA, P. V., 1966, “Rapid computation of magnetic anomalies and demagnetization effects caused by bodies of arbitrary shape”, *pure and applied geophysics*, v. 64, n. 1, pp. 89–109. ISSN: 1420-9136. doi: 10.1007/BF00875535.
- SOLIVÉREZ, C. E., 1981, “Magnetostatics of anisotropic ellipsoidal bodies”, *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 17, n. 3 (May), pp. 1363–1364. ISSN: 0018-9464. doi: 10.1109/TMAG.1981.1061200.
- SOLIVÉREZ, C. E., 2008, “Campos eléctricos generados por elipsoides uniformemente polarizados”, *Revista mexicana de física E*, v. 54 (12), pp. 203 – 207. ISSN: 1870-3542.
- STÉFAN VAN DER WALT, S. C. C., VAROQUAUX, G., 2011–. “The NumPy Array: A Structure for Efficient Numerical Computation”. Disponible en: <<http://scitation.aip.org/content/aip/journal/cise/13/2/10.1109/MCSE.2011.37>>. [Online; accessed 2017-02-02].
- STONER, E. C., 1945, “The demagnetizing factors for ellipsoids”, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, v. 36, n. 263, pp. 803–821.
- STRATTON, J. A., 2007, *Electromagnetic Theory*. Wiley-IEEE Press. ISBN: 0470131535.
- TAUXE, L., 2003, “Rudiments of rock magnetism”, *Paleomagnetic Principles and Practice*, pp. 35–81.

- TEJEDOR, M., RUBIO, H., ELBAILE, L., et al., 1995, “External fields created by uniformly magnetized ellipsoids and spheroids”, *IEEE transactions on magnetics*, v. 31, n. 1, pp. 830–836.
- THOMPSON, R., OLDFIELD, F., 1986, *Environmental magnetism*. Springer Science & Business Media.
- THOMSON, W., TAIT, P., 1879, “Treatise on Natural Philosophy”, *Part II*,” *Cambridge University Press, Cambridge*.
- UIEDA, L., JR, V. C. O., BARBOSA, V. C. F., 2013, “Modeling the Earth with Fatiando a Terra”. In: van der Walt, S., Millman, J., Huff, K. (Eds.), *Proceedings of the 12th Python in Science Conference*, pp. 96 – 103.
- UYEDA, S., FULLER, M. D., BELSHÉ, J. C., et al., 1963, “Anisotropy of magnetic susceptibility of rocks and minerals”, *Journal of Geophysical Research*, v. 68, n. 1, pp. 279–291. ISSN: 2156-2202. doi: 10.1029/JZ068i001p00279.
- WEBSTER, A., 1904, *The Dynamics of Particles and of Rigid, Elastic, and Fluid Bodies: Being Lectures on Mathematical Physics*. B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. B.G. Teubner.
- WEISSTEIN, E. W., 2017. “Cubic Formula: From MathWorld – A Wolfram Web Resource”. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/CubicFormula.html>>. [Online; accessed 2017-01-23].

Apêndice A

Relação entre as derivadas das funções $f(\mathbf{r})$ e $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})$

Sendo $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})$ a função escalar obtida transformando $f(\mathbf{r})$ (Eq. 2.22) do sistema de coordenadas principal para um sistema de coordenadas local, por conveniência, reescreveremos a Eq. 2.13 como:

$$\tilde{r}_k = v_{k1} r_1 + v_{k2} r_2 + v_{k3} r_3 + c_k , \quad (\text{A.1})$$

onde \tilde{r}_k , $k = 1, 2, 3$, são os elementos do vetor posição transformado $\tilde{\mathbf{r}}$ (Eq. 2.13), r_j , $j = 1, 2, 3$, são os elementos do vetor posição \mathbf{r} (Eq. 2.1), v_{kj} , $j = 1, 2, 3$, são os elementos da matriz \mathbf{V} (Eq. 2.9 ou ??), e c_k é uma constante definida pelas coordenadas x_c , y_c , e z_c do centro do corpo elipsoidal.

Considerando as funções $f(\mathbf{r})$ (Eq. 2.22) e $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})$ calculadas no mesmo ponto, mas em diferentes sistemas de coordenadas, temos:

$$\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial r_j} = \frac{\partial \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_1} \frac{\partial \tilde{r}_1}{\partial r_j} + \frac{\partial \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_2} \frac{\partial \tilde{r}_2}{\partial r_j} + \frac{\partial \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_3} \frac{\partial \tilde{r}_3}{\partial r_j} , \quad j = 1, 2, 3 ,$$

que, da Eq. A.1, pode ser dada por:

$$\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial r_j} = v_{j1} \frac{\partial \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_1} + v_{j2} \frac{\partial \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_2} + v_{j3} \frac{\partial \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_3} , \quad j = 1, 2, 3 . \quad (\text{A.2})$$

Derivando $\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial r_j}$ (Eq. A.2) com respeito ao i -ésimo elemento r_i do vetor posição

\mathbf{r} (Eq. 2.1), obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f(\mathbf{r})}{\partial r_i \partial r_j} &= v_{j1} \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\frac{\partial \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_1} \right) + v_{j2} \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\frac{\partial \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_2} \right) + v_{j3} \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\frac{\partial \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_3} \right) \\
&= v_{j1} \left(\frac{\partial^2 \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_1 \partial \tilde{r}_1} v_{i1} + \frac{\partial^2 \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_2 \partial \tilde{r}_1} v_{i2} + \frac{\partial^2 \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_3 \partial \tilde{r}_1} v_{i3} \right) + \\
&+ v_{j2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_1 \partial \tilde{r}_2} v_{i1} + \frac{\partial^2 \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_2 \partial \tilde{r}_2} v_{i2} + \frac{\partial^2 \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_3 \partial \tilde{r}_2} v_{i3} \right) + \\
&+ v_{j3} \left(\frac{\partial^2 \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_1 \partial \tilde{r}_3} v_{i1} + \frac{\partial^2 \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_2 \partial \tilde{r}_3} v_{i2} + \frac{\partial^2 \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_3 \partial \tilde{r}_3} v_{i3} \right) \\
&= \begin{bmatrix} v_{j1} & v_{j2} & v_{j3} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{r}}) \begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ v_{i3} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

onde $\tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{r}})$ é uma 3×3 matriz cujo ij -ésimo elemento é $\frac{\partial^2 \tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})}{\partial \tilde{r}_i \partial \tilde{r}_j}$. Da Eq. A.3, obtemos:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{V} \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{r}}) \mathbf{V}^\top, \tag{A.4}$$

onde $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ é uma 3×3 matriz cujo ij -ésimo elemento é $\frac{\partial^2 f(\mathbf{r})}{\partial r_i \partial r_j}$ e \mathbf{V} é definido pelas Eqs. 2.9 ou ??, dependendo do tipo de elipsoide. Como pode ter notada, as matrizes $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ e $\tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{r}})$ representam as Hessianas das funções $f(\mathbf{r})$ (Eq. 2.22) e $\tilde{f}(\tilde{\mathbf{r}})$, respectivamente. Além disso, o tensor de depolarização $\mathbf{N}(\mathbf{r})$ (Eq. 2.20) pode se reescrito usando a matriz $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ como:

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}). \tag{A.5}$$

Usando apropriadamente a ortogonalidade de matrizes \mathbf{V} , podemos reescrever a Eq. A.4 como:

$$\tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{r}}) = \mathbf{V}^\top \mathbf{F}(\mathbf{r}) \mathbf{V}. \tag{A.6}$$

Finalmente, multiplicando os dois lados da Eq. A.6 por $-\frac{1}{4\pi}$ e usando a Eq. A.5, nós concluimos que

$$\tilde{\mathbf{N}}(\tilde{\mathbf{r}}) = \mathbf{V}^\top \mathbf{N}(\mathbf{r}) \mathbf{V}. \tag{A.7}$$

Apêndice B

Parâmetro λ e suas derivadas espaciais

Aqui, mostramos o raciocínio apresentado por WEBSTER (1904) para análise do parâmetro λ que define os elipsoides triaxiais, prolatos e oblatos.

B.1 Parâmetro λ definido para os elipsoides triaxiais

Consideremos um elipsoide de semi-eixos a, b, c orientados ao longo dos eixos \tilde{x}, \tilde{y} , e \tilde{z} , respectivamente, no seu sistema de coordenadas local, onde $a > b > c > 0$. Este elipsoide é definido pela seguinte equação:

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} + \frac{\tilde{z}^2}{c^2} = 1. \quad (\text{B.1})$$

Uma superfície quádrlica (e.g., elipsoide, hiperboloides de uma camada ou hiperboloides de duas camadas) que é confocal à um elipsoide definido pela Eq. B.1 pode ser descrito como:

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2 + u} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2 + u} + \frac{\tilde{z}^2}{c^2 + u} = 1, \quad (\text{B.2})$$

onde u é um número real. A equação B.2 representa um elipsoide para u que satisfaz a condição:

$$u + c^2 > 0. \quad (\text{B.3})$$

Dado a, b, c , e um u que satisfaz B.3, podemos usar B.2 para determinar um conjunto de pontos (x, y, z) situado na superfície de um elipsoide que é confocal aquele definido pela Eq. B.1. Considere o problema em determinar o elipsoide que é confocal com aquele definido em B.1 e que passa por um ponto particular $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. Este problema consiste em determinar o número real u que, dado $a, b, c, \tilde{x}, \tilde{y}$, e \tilde{z} ,

satisfaz a Eq. B.2 e a condição expressa pela Eq. B.3. Rearranjando a Eq. B.2, obtemos a seguinte equação cúbica para u

$$p(u) = (a^2+u)(b^2+u)(c^2+u) - (b^2+u)(c^2+u)\tilde{x}^2 - (a^2+u)(c^2+u)\tilde{y}^2 - (a^2+u)(b^2+u)\tilde{z}^2. \quad (\text{B.4})$$

Esta equação cúbica mostra que:

$$u = \begin{cases} d \rightarrow \infty & , \quad p(u) > 0 \\ -c^2 & , \quad p(u) < 0 \\ -b^2 & , \quad p(u) > 0 \\ -a^2 & , \quad p(u) < 0 \end{cases}. \quad (\text{B.5})$$

Note que, de acordo com B.5, a menor, a intermediária e a maior raiz da equação cúbica $p(u)$ (Eq. B.4) estão localizadas, respectivamente, nos intervalos $[-a^2, -b^2]$, $[-b^2, -c^2]$ and $[-c^2, \infty[$. Lembremos que estamos procurando um u que satisfaz a condição expressa pela Eq. B.3. Consequentemente, de acordo com a análise de sinal mostrada na Eq. B.5, estamos interessados na maior raiz λ da equação cúbica $p(u)$ (Eq. B.4).

Da Eq. B.4, obtemos uma mais simples dada por:

$$p(u) = u^3 + p_2 u^2 + p_1 u + p_0, \quad (\text{B.6})$$

onde

$$p_2 = a^2 + b^2 + c^2 - \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2, \quad (\text{B.7})$$

$$p_1 = b^2 c^2 + a^2 c^2 + a^2 b^2 - (b^2 + c^2) \tilde{x}^2 - (a^2 + c^2) \tilde{y}^2 - (a^2 + b^2) \tilde{z}^2 \quad (\text{B.8})$$

e

$$p_0 = a^2 b^2 c^2 - b^2 c^2 \tilde{x}^2 - a^2 c^2 \tilde{y}^2 - a^2 b^2 \tilde{z}^2. \quad (\text{B.9})$$

Finalmente, das Eqs. B.7, B.8 e B.9, a maior raiz λ de $p(u)$ (Eq. B.6) pode ser calculada como mostra (WEISSTEIN, 2017):

$$\lambda = 2 \sqrt{-Q} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \frac{p_2}{3}, \quad (\text{B.10})$$

onde

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{R}{\sqrt{Q^3}}\right), \quad (\text{B.11})$$

$$Q = \frac{3p_1 - p_2^2}{9} \quad (\text{B.12})$$

e

$$R = \frac{9 p_1 p_2 - 27 p_0 - 2 p_2^3}{54} . \quad (\text{B.13})$$

B.2 Parâmetro λ que define os elipsoides prolatos e oblatos

Vamos agora considerar um elipsoide prolato de semi-eixos a , b , c orientados ao longo dos eixos \tilde{x} , \tilde{y} , e \tilde{z} , respectivamente, de seu sistema de coordenadas local, onde $a > b = c > 0$. Neste caso, a equação que define a superfície do elipsoide é obtida substituindo $c = b$ na Eq. B.1. Consequentemente, a equação que define a respectiva superfície quádrlica confocal é dada por:

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2 + u} + \frac{\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2}{b^2 + u} = 1 \quad (\text{B.14})$$

e a nova condição que a variável u precisa satisfazer para que a Eq. B.14 represente um elipsoide é:

$$u + b^2 > 0 . \quad (\text{B.15})$$

Similarmente ao caso do elipsoide triaxial apresentado na subseção anterior, estamos interessados em determinar o número real u que, dado a , b , \tilde{x} , \tilde{y} , e \tilde{z} , satisfaz a Eq. B.14 e a condição expressa por Eq. B.15. Da Eq. B.14, obtemos a seguinte equação quádrlica para u :

$$p(u) = (a^2 + u)(b^2 + u) - (b^2 + u) \tilde{x}^2 - (a^2 + u) (\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2) . \quad (\text{B.16})$$

Esta equação mostra que:

$$u = \begin{cases} d \rightarrow \infty & , \quad f(\rho) > 0 \\ -b^2 & , \quad f(\rho) < 0 \\ -a^2 & , \quad f(\rho) > 0 \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

e, consequentemente, que duas raízes se situam nos intervalos $[-a^2, -b^2]$ e $[-b^2, \infty[$. Assim, de acordo com a condição estabelecida pela Eq. B.15 e a análise de sinais mostrada na Eq. B.17, estamos interessados na maior raiz λ da equação quádrlica $p(u)$ (Eq. B.16).

Manipulando corretamente a Eq. B.16, obtemos uma mais simples dada por:

$$p(u) = u^2 + p_1 u + p_0 , \quad (\text{B.18})$$

onde

$$p_1 = a^2 + b^2 - \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 \quad (\text{B.19})$$

e

$$p_0 = a^2 b^2 - b^2 \tilde{x}^2 - a^2 (\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2) . \quad (\text{B.20})$$

Finalmente, usando as Eqs. B.19 e B.20, a maior raiz λ de $p(u)$ (Eq. B.18) pode ser facilmente calculada como:

$$\lambda = \frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_0}}{2} . \quad (\text{B.21})$$

Para o caso do elipsoide oblato, o procedimento para determinar o parâmetro λ é muito similar para os elipsoides prolatos. Os semi-eixos a , b , c do elipsoide oblato são definidos de forma que $b = c > a > 0$ e a condição que a variável u deve satisfazer é $u + a^2 > 0$. Neste caso, as duas raízes que resultam da equação quádrlica situam-se nos intervalos $[-b^2, -a^2]$ e $[-a^2, \infty[$. Consequentemente, continuamos interessados na maior raiz da equação quádrlica para a variável u , que também é calculada usando a Eq. B.21.

B.3 Derivadas espaciais do parâmetro λ

A modelagem magnética dos elipsoides triaxiais, prolatos e oblatos necessitam além do parâmetro λ definidos pelas Eqs. B.10 e B.21, das suas derivadas com respeito as coordenadas espaciais \tilde{x} , \tilde{y} , and \tilde{z} . Felizmente, as derivadas espaciais do parâmetro λ podem ser calculadas de forma bastante similares para todos os tipos de elipsoides.

Vamos considerar um elipsoide triaxial primeiro. Neste caso, as derivas espaciais de λ são dadas por:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \tilde{r}_j} = \frac{\frac{2\tilde{r}_j}{(e_j^2 + \lambda)}}{\left(\frac{\tilde{x}}{a^2 + \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{y}}{b^2 + \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{z}}{c^2 + \lambda}\right)^2}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (\text{B.22})$$

onde $\tilde{r}_1 = \tilde{x}$, $\tilde{r}_2 = \tilde{y}$, $\tilde{r}_3 = \tilde{z}$, $e_1 = a$, $e_2 = b$, and $e_3 = c$. Esta equação pode ser determinada diretamente da equação B.2. As derivadas espaciais de λ no caso dos elipsoides prolatos e oblatos podem ser calculados usando a Eq. B.22 para o caso particular em que $b = c$.