



LICENCIATURA EN SISTEMAS

DEPARTAMENTO DE DESARROLLO PRODUCTIVO Y TECNOLÓGICO

MATEMÁTICA 2 **(Guía de estudio y trabajos prácticos)**

Docentes a cargo:

Laura Loidi
Vanesa Plaul

Año 2021

Trabajo Práctico N° 1 (Límite-Asíntotas)

1. **Optativo.** Pruebe los siguientes límites aplicando la definición. (Busque la definición en la bibliografía)

a) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5$ b) $\lim_{x \rightarrow -1} (5x + 8) = 3$

2. **Optativo.** Pruebe los siguientes límites aplicando la definición, en los intervalos indicados.

a) $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - x + 5) = 17$ si $x \in [2; 6]$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 3x^2 + 4x) = 12$ si $x \in (1; 5)$

3. Calcule los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow -1} (5x^3 - 3x^2 + 4x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5x^3 - 3x + 1}{2x + 1} \right)^{3x+5}$

4. Calcule los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 3x}{9x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2}$ d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 12}$
e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - x^3}{x^5 - 2x^2}$ f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{64 - 8x^3}{4 - 2x}$ g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x}}$ h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{1 - x}}$
i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$ j) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$ k) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$ l) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x + 2}}{\sqrt{4x + 1} - 3}$
ll) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$ m) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin^2 x + 3\sin x - 4}{\sin^2 x - 3\sin x + 2}$ Hágase: $\sin x = t \begin{cases} x \rightarrow \pi/2 \\ t \rightarrow 1 \end{cases}$

Resolución punto ll):

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = \text{se trata de una indet. de la forma } \frac{0}{0}$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x} + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$

5. Calcule los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 2x}$
d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{2x}$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2 - x}$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$

Resolución punto e):

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2 - x} = \text{Se trata de una indet. de la forma } \frac{0}{0}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x - 1} \right) = 1 \cdot (-1) = -1$

6. Límites infinitos.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{3}{x}$ d) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x + 1}$
e) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x - x^2}$ f) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{(x - 3)^2}$ g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^8 - 2x^4}{4x^7 - x^5}$ h) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2} - 1}$

7. Límites en infinito.

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{x} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{a} \quad a > 0 & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{a} \quad a < 0 & \text{d) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x+1}{3x-2} \\
 \text{e) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x+1}{3x+5} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x^2+2x}{-3x^2-2x+3} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x+1}{3x^2+5x} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x^3+x}{3x^2+5}
 \end{array}$$

Los siguientes límites los debe poder resolver sin efectuar ningún cálculo:

$$\begin{array}{lll}
 \text{i) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(5x-1)^3}{(3x^2-x)^2} & \text{j) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(2x^2-3)(x^2+1)}{(3x^2-x)^2} & \text{k) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3+1}+2}{\sqrt{x^2+1}-3}
 \end{array}$$

Resolución punto f):

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x^2+2x}{-3x^2-2x+3} = \text{Se trata de una indet. de la forma } \frac{+\infty}{-\infty}$$

Dividimos numerador y denominador por x con su mayor exponente.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5 + \frac{2}{x}}{-3 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} = -\frac{5}{3}$$

8. Calcule los siguientes límites.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} \right) & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} + x) & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2}) \\
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x+1} + x) & \text{e) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} (x^2 + x) & \text{f) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2} (x^2 + x) \\
 \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (x^2 + x)
 \end{array}$$

Resolución punto a):

$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} \right) =$ Se trata de una indeterminación de la forma $(+\infty - \infty)$ ó $(-\infty + \infty)$, según x tienda a 1 por la derecha o a 1 por la izquierda.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2-1} = \pm\infty$$

9. Calcule los siguientes límites.

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} 3^{\frac{1}{x}} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^-} 3^{\frac{1}{x}} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} \\
 \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-3^{\frac{1}{x}}}{2+3^{\frac{1}{x}}} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-3^{\frac{1}{x}}}{2+3^{\frac{1}{x}}} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5^{\frac{1}{x}}-2}{3+5^{\frac{1}{x}}} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5^{\frac{1}{x}}-2}{3+5^{\frac{1}{x}}}
 \end{array}$$

Resolución punto e):

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 3^{\frac{1}{x}}}{2 + 3^{\frac{1}{x}}} = \text{Se trata de una indeterminación de la forma } \frac{-\infty}{+\infty} \text{ pues } \lim_{x \rightarrow 0^+} 3^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 3^{\frac{1}{x}}}{2 + 3^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{3^{\frac{1}{x}}} - \frac{1}{3^{\frac{1}{x}}}}{\frac{2}{3^{\frac{1}{x}}} + \frac{3^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}}}} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

Resolución punto f):

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - 3^{\frac{1}{x}}}{2 + 3^{\frac{1}{x}}} = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}$$

10. El número “e” como límite. (Indet. forma $1^{\pm\infty}$). Calcule los siguientes límites sabiendo que:

$$\lim_{u \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e \quad \text{y} \quad \lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e$$

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{5x} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{5x} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{x+5} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{5x+1}{5x+3}\right)^{2x-1} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{5}{x}} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{5}{x}} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} (1+mx)^{\frac{n}{x}} \end{array}$$

Resolución punto c):

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{x+5} = \text{Se trata de una indeterminación de la forma: } 1^{\pm\infty}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{x+5} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x-3+4}{2x-3}\right)^{x+5} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{4}{2x-3}\right)^{x+5} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}}\right)^{\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)} \right]^{\frac{x+5}{\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}}}$$

Como el límite de una potencia es el límite de la base elevado al límite del exponente y el

límite de la base es el maravilloso número “e”, nos queda: $e^{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+5}{\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}}} = e^2$

11. **Miscelánea.** Calcule los siguientes límites.

- a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^3 - 7x^2 + 15x - 9}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x + 3\cos x - 4}{\cos^2 x - 1}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{cosec} 4x)$ e) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x+5}{2x-7} \right)^{\frac{3x+5}{2x+3}}$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x + 1}{\cos x - 1}$
- g) Calcular $k / \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+k)^{2x}}{(x^2+5)^x} = e^5$

12. **Optativo.**

- a) Calcule el monto producido por un capital de \$300000, colocado durante un año y medio, con capitalización mensual, a una tasa del 24% anual.
- b) ¿Qué tiempo se requiere para que un capital C se triplique, colocado al 27% anual con composición mensual?
- c) Supongamos que se coloca \$1 en el banco al 100% anual, durante un año. ¿Cuál será el monto obtenido si la capitalización es: i) anual, ii) semestral, iii) cuatrimestral, iv) trimestral, v) bimestral, vi) mensual, vii) diaria?
- d) ¿Nos haremos millonarios si se aumentan infinitamente los períodos de capitalización?
- e) Calcule el mayor monto a interés compuesto que se puede obtener con un capital de \$500000, colocado durante dos años al 30% anual.
13. Un fabricante de productos eléctricos, mediante un estudio estadístico, calcula que el porcentaje de aparatos que se mantiene en buenas condiciones de funcionamiento, después de x años, responde aproximadamente a la ley $p(x) = 100e^{-0,5x}$.
- a) ¿Qué porcentaje de aparatos puede esperarse que funcionen durante dos años?
- b) ¿A qué valor límite tiende ese porcentaje cuando el número de años aumente indefinidamente?
14. Como resultado de los avances tecnológicos en la producción de computadoras, cada vez más poderosas y compactas, cae el precio de las que existen hoy día en el mercado. Suponga que dentro de x meses el precio de cierto modelo será $p(x) = 20000 + \frac{3000}{x+1}$.
- a) ¿Cuál será el precio dentro de 5 meses?
- b) ¿En cuánto bajará el precio en el quinto mes?
- c) ¿Cuándo el precio será de \$20250?
- d) ¿Qué le sucederá al precio a largo plazo?
15. Hacia un tanque de agua que contiene agua pura, fluye agua salada de modo que la concentración de sal en un tiempo t está dada por la función $c(t) = \frac{t}{10t+100}$ $t > 0$. Grafique $c(t)$, analice el comportamiento de la función cuando $t \rightarrow +\infty$ e interprete su significado.
16. Indique las asíntotas de las siguientes funciones.
- a) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ b) $f(x) = \frac{3-2x}{3x-2}$ c) $f(x) = \frac{-x-4}{-x-1}$ d)

$$f(x) = \frac{5x+1}{x^2-3}$$

$$f(x) = \frac{x^3-3x^2-x+3}{x^2+x}$$

$$\text{e) } f(x) = \frac{x^3-4x^2+3x}{x^2+2x} \quad \text{f) }$$

$$\text{g) } f(x) = \frac{x^2+4}{x-2}$$

$$\text{h) } f(x) = \frac{5x^2+3}{x^2-4}$$

$$\text{i) } f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+16} + \frac{1}{2}x$$

$$\text{j) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Resolución punto e): $f(x) = \frac{x^3-4x^2+3x}{x^2+2x}$

Asíntota horizontal

Se trata de una función racional (cociente de polinomios) y por ser el numerador un polinomio de mayor grado que el denominador, el límite para $x \rightarrow \pm\infty$ **siempre** es infinito, positivo o negativo, pero infinito al fin. Por lo tanto la gráfica de la función no posee asíntota horizontal.

Asíntota vertical

Buscamos asíntotas verticales en los puntos en que se anula el denominador y calculamos los límites en esos puntos. En nuestro caso el denominador se anula en $x = -2$ y en $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3-4x^2+3x}{x^2+2x} = \frac{-30}{0} = \pm\infty, \text{ como el límite se hace infinito, hay una A.V. en } x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3-4x^2+3x}{x^2+2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2-4x+3)}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2-4x+3)}{(x+2)} = \frac{3}{2}, \text{ luego, } \boxed{\text{en } x = 0 \text{ no hay A.V.}}$$

Asíntotas oblicuas

Por ser el polinomio del numerador, **exactamente un grado mayor** al del denominador, la gráfica presenta asíntota oblicua.

$$\text{Hacemos : } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3-4x^2+3x}{x^3+2x^2} = 1, \text{ luego } m = 1 \text{ es la pendiente de la A.O.}$$

$$\text{Hacemos : } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3-4x^2+3x}{x^2+2x} - 1x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3-4x^2+3x-x^3-2x^2}{x^2+2x} = -6,$$

luego $b = -6$ y la ecuación de la asíntota oblicua queda: $y = x - 6$

Respuestas

1. a) $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ b) $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ 2. a) $\delta = \frac{\varepsilon}{9}$ b) $\delta = \frac{\varepsilon}{29}$ 3. a) -12 b) 0 c) 1
4. a) -1/3 b) 6 c) -2 d) 4/7 e) -1 f) 48 g) 0
- h) 0 i) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ j) 6 k) -1/56 l) 9/8 ll) $2\sqrt{2}$ m) -5
5. a) 5/3 b) 0 c) 1/2 d) 3/2 e) -1 f) 2

6. a) $\pm \infty$ b) $\pm \infty$ c) $+\infty$ d) $-\infty$ e) $+\infty$ f) $+\infty$ g) $\pm \infty$ h) $-\infty$
7. a) 0 b) $+\infty$ c) $+\infty$ d) $4/3$ e) $-2/3$ f) $-5/3$
 g) 0 h) $\pm \infty$ i) 0 j) $2/9$ k) $+\infty$
8. a) $\pm \infty$ b) 0 c) 0 d) $-1/2$ e) $\pm \infty$ f) 1 g) 1
9. a) $+\infty$ b) 0 c) 0 d) $+\infty$ e) -1 f) $1/2$ g) 1 h) $-2/3$
10. a) e^{15} b) e^{-15} c) e^2 d) e^2 e) $e^{-4/5}$ f) e^{15} g) e^{-15} h) $e^{m \cdot n}$
11. a) $1/2$ b) $5/2$ c) -2 d) $1/2$ e) 1 f) $-\infty$ g) $k = \frac{5}{2}$
12. a) \$428473,87 b) 4 años y dos meses e) \$911059,4
13. a) Aprox. 37% b) 0%
14. a) \$20500 b) $p(0) - p(5) = 2500$ c) 11 meses d) Será de \$20000
16. a) A.V : $x = 1$; A.H : $y = 1$ b) A.V : $x = \frac{2}{3}$; A.H : $y = -\frac{2}{3}$
 c) A.V : $x = -1$; A.H : $y = 1$ d) A.V : $x = \pm\sqrt{3}$; A.H : $y = 0$
 e) A.V : $x = -2$; A.O : $y = x - 6$ f) A.V : $x = 0$; A.O : $y = x - 4$
 g) A.V : $x = 2$; A.O : $y = x + 2$ h) A.V : $x = \pm 2$; A.H : $y = 5$
 i) A.H : $y = 0$; A.O : $y = x$ j) A.H : $y = 0$; A.V : $x = 0$; A.O : $y = x$