Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Campus Puebla

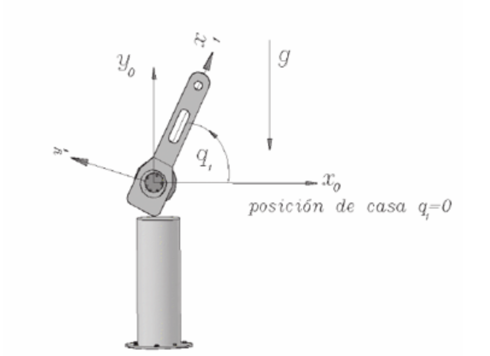
Fundamentación de Robótica (Gpo 101)

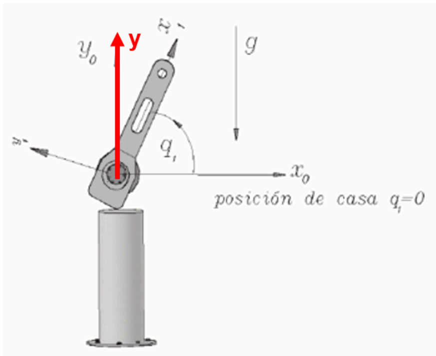
Actividad 5 (Modelo de Energía y Lagrangiano)

Alumno
José Diego Tomé Guardado A01733345
Pamela Hernández Montero A01736368
Victor Manuel Vázquez Morales A01736352
Fernando Estrada Silva A01736094

Fecha de entrega
Viernes 8 de Marzo de 2024

Ejercicio 1 - Robot Péndulo 1gdl:





Cálculo de alturas y Energía Potencial

Considerando el sistema de referencia dentro del robot, puede observarse que la altura se encuentra posicionada sobre el eje *y0*. Por lo tanto gracias también a dibujar el eje con rojo podemos darnos cuenta que se trata de un robot de 1 solo grado de libertad, la altura dependerá únicamente de la rotación del péndulo considerando la variación de *y0.* Tomamos la coordenada paralela al eje z teniendo sentido porque la energía potencial gravitatoria depende de la altura vertical del centro de masa del objeto tomando de referencia un nivel cero qué en este caso es el origen de nuestro sistema de coordenadas.

```
%Calculamos la energía potencial para cada uno de los eslabones
%Obtenemos las alturas respecto a la gravedad
h1= P01(2); %Tomo la altura paralela al eje y
```

La energía potencial en este caso se calculará como el producto de la masa con la aceleración de la gravedad y la altura qué tomamos antes. En este caso solo contamos con un eslabón por lo que la energía potencial total será la del eslabón 1.

```
h1= P01(2); %Tomo la altura paralela al eje z
U1=m1*g*h1;
%Calculamos la energía potencial total
U_Total= U1
```

Lagrangiano

El lagrangiano se definirá como una diferencia; una resta entre la energía cinética total y la energía potencial total del sistema, calculandolo con la resta de la energía potencial total de la cinética total. Es una función para la correcta formulación de las ecuaciones de movimiento de todo el sistema debido a que se utiliza para poder derivar las ecuaciones de Lagrange.

```
%Obtenemos el Lagrangiano
Lagrangiano= simplify (K_Total-U_Total);
pretty (Lagrangiano)
```

Modelo de Energìa

El modelo de energía definido como H es la suma de la energía cinética total con la energía potencial total del sistema, proporciona una representación de la energía del sistema y además se utiliza para poder analizar el comportamiento de nuestro sistema en distintas condiciones.

```
%Modelo de Energía
H= simplify (K_Total+U_Total);
 pretty (H)
```

Resultados

Energía cinética

```
Energía Cinética en el Eslabón 1
              2             2     ______         __            2             2
Izz1 |th1p(t)|     |th1p(t)|  cos(th1(t) - th1(t)) m1 (l1 |lc1|  + 2 lc1 |l1| ) (2 l1 + lc1)
--------------- + --------------------------------------------------------------------------
       2                                          8 l1 lc1


K_Total =

(Izz1*abs(th1p(t))^2)/2 + (abs(th1p(t))^2*cos(conj(th1(t)) - th1(t))*conj(m1)*(l1*abs(lc1)^2 + 2*lc1*abs(l1)^2)*(2*l1 + lc1))/

              2             2     ______         __            2             2
Izz1 |th1p(t)|     |th1p(t)|  cos(th1(t) - th1(t)) m1 (l1 |lc1|  + 2 lc1 |l1| ) (2 l1 + lc1)
--------------- + --------------------------------------------------------------------------
       2                                          8 l1 lc1
```

Energía Potencial total

```
U_Total =

 (g*lc1*m1*sin(th1(t)))/2
```

Podemos decir que la energía potencial es correcta debido a que solo tenemos un eslabón actuando en el eje y para la altura, por lo que a continuación observamos que en la posición de esta articulación en el eje y se encuentra el seno, por eso mismo es que en la energía potencial total vemos un seno multiplicándose.

```
%Articulación 1
%Posición de la articulación 1 respecto a 0
P(:,:,1)= [l1*cos(th1); l1*sin(th1);0];
```

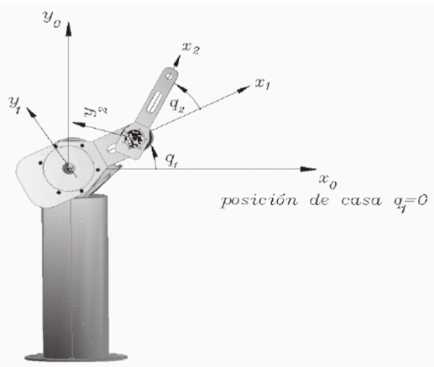
Lagrangiano

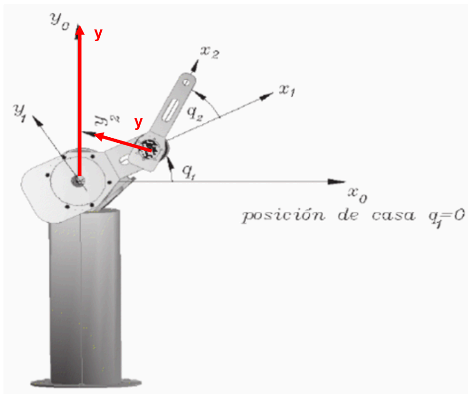
```
Lagrangiano =

(Izz1*abs(th1p(t))^2)/2 - (g*lc1*m1*sin(th1(t)))/2 + (abs(th1p(t))^2*cos(conj(th1(t)) - th1(t))*conj(m1)*(l1*abs(lc1)^2 + 2*l

                2                              2     ______         __          2            2
Izz1 |th1p(t)|    g lc1 m1 sin(th1(t))    |th1p(t)|  cos(th1(t) - th1(t)) m1 (l1 |lc1|  + 2 lc1 |l1| ) (2 l1 + lc1)
-------------- - -------------------- + -------------------------------------------------------------------------
       2                   2                                               8 l1 lc1

                2                              2     ______         __          2            2
Izz1 |th1p(t)|    g lc1 m1 sin(th1(t))    |th1p(t)|  cos(th1(t) - th1(t)) m1 (l1 |lc1|  + 2 lc1 |l1| ) (2 l1 + lc1)
-------------- + -------------------- + -------------------------------------------------------------------------
       2                   2                                               8 l1 lc1

Elapsed time is 2.668975 seconds.
```

Modelo de energía

```
H =

(Izz1*abs(th1p(t))^2)/2 + (g*lc1*m1*sin(th1(t)))/2 + (abs(th1p(t))^2*cos(conj(th1(t)) - th1(t))*conj(m1)*(l1*abs(lc1)^2 +

                2                              2     ______         __          2            2
Izz1 |th1p(t)|    g lc1 m1 sin(th1(t))    |th1p(t)|  cos(th1(t) - th1(t)) m1 (l1 |lc1|  + 2 lc1 |l1| ) (2 l1 + lc1)
-------------- + -------------------- + -------------------------------------------------------------------------
       2                   2                                               8 l1 lc1
```

Ejercicio 2 - Robot planar de 2gdl :





Cálculo de alturas y Energía Potencial

Considerando el diagrama anterior, se tiene que dentro del sistema de referencia, el eje de y es el que se encarga de posicionar la altura del robot. Por lo tanto, se infiere que la energía potencial del modelo debe depender únicamente de la altura sobre este eje para los 2 grados de libertad. Como lo observamos en el diagrama anterior del robot se ve marcado con rojo lo que es la altura del robot y es por ello que contamos con dos eslabones que tienen como altura el eje y, con ello definimos para h1 y h2 un 2 que significa la altura paralela al eje y.

```
%Calculamos la energía potencial para cada uno de los eslabones
%Obtenemos las alturas respecto a la gravedad
h1= P01(2); %Tomo la altura paralela al eje y
h2= P12(2); %Tomó la altura paralela al eje y
```

Ahora la energía potencial para cada eslabón se calculará como el producto de su masa con la aceleración debido a la gravedad y también la altura con la que se relaciona. Las energías potenciales de los dos eslabones se suman para poder obtener la energía potencial total de todo nuestro sistema.

```
U1=m1*g*h1; %Eslabon 1
U2=m2*g*h2; %Eslabon 2
%Calculamos la energía potencial total
U_Total= U1 + U2
```

Lagrangiano

El lagrangiano se definirá como una diferencia es decir una resta entre la energía cinética total y la energía potencial total del sistema, calculandolo con la resta de la energía potencial total de la cinética total. Es una función para la correcta formulación de las ecuaciones de movimiento de todo el sistema debido a que se utiliza para poder derivar las ecuaciones de Lagrange.

```
%Obtenemos el Lagrangiano
Lagrangiano= simplify (K_Total-U_Total);
pretty (Lagrangiano)
```

Modelo de Energía

El modelo de energía definido como H es la suma de la energía cinética total con la energía potencial total del sistema, proporciona una representación de la energía del sistema y además se utiliza para poder analizar el comportamiento de nuestro sistema en distintas condiciones.

```
%Modelo de Energía
H= simplify (K_Total+U_Total);
pretty (H)
```

Resultados

Energía cinética

```
Energía Cinética en el Eslabón 1
              2            2     ______           __          2             2
Izz1 |th1p(t)|    |th1p(t)|  cos(th1(t) - th1(t)) m1 (l1 |lc1|  + 2 lc1 |l1| ) (2 l1 + lc1)
--------------- + --------------------------------------------------------------------------
       2                                          8 l1 lc1

Energía Cinética en el Eslabón 2
/
| __ /                                                         lc2 sin(th2(t)) #1 \
| m2 | th1p(t) (l1 sin(th1(t)) + l2 sin(#4)) + l2 sin(#4) th2p(t) + ------------------ |
\    \                                                                 2              /

   /                                                                   ______  ___   \ \             / _______   _______ \
   | _______          __       ______  __    _______         __   sin(th2(t)) lc2 #2 | |             | th1p(t)   th2p(t) |
   | th1p(t) (sin(#3) l2 + sin(th1(t)) l1) + th2p(t) sin(#3) l2 + ------------------ | |/2 + Izz2 #1 | ------- + ------- |
   \                                                                      2          / /             \    2         2    /

     /
     | __ /                                                          lc2 cos(th2(t)) #1 \
   + | m2 | th1p(t) (l1 cos(th1(t)) + l2 cos(#4)) + l2 cos(#4) th2p(t) + ------------------ |
     \    \                                                                   2             /

   /                                                                   ______  ___   \ \
   | _______          __       ______  __    _______         __   cos(th2(t)) lc2 #2 | |
   | th1p(t) (cos(#3) l2 + cos(th1(t)) l1) + th2p(t) cos(#3) l2 + ------------------ | |/2
   \                                                                      2          / /
```

```
where

   #1 == th1p(t) + th2p(t)

         _______   _______
   #2 == th1p(t) + th2p(t)

         ______   ______
   #3 == th1(t) + th2(t)

   #4 == th1(t) + th2(t)
```

```
K_Total =

(Izz1*abs(th1p(t))^2)/2 + (conj(m2)*(th1p(t)*(l1*sin(th1(t)) + l2*sin(th1(t) + th2(t))) + l2*sin(th1(t) + th2(t))*th2p(t) +

          /
Izz1 #5   | __ /                                                      lc2 sin(th2(t)) #1 \
------- + | m2 | th1p(t) (l1 sin(th1(t)) + l2 sin(#4)) + l2 sin(#4) th2p(t) + ------------------ |
   2      \    \                                                             2            /

   /                                                             ______  ___    \ \             / _______   _______ \
   | _______            __             ______  __   _______            __   sin(th2(t)) lc2 #2 | |             | th1p(t)   th2p(t) |
   | th1p(t) (sin(#3) l2 + sin(th1(t)) l1) + th2p(t) sin(#3) l2 + ------------------ | |/2 + Izz2 #1 | ------- + ------- |
   \                                                                   2         / /             \    2         2    /

     /
     | __ /                                                       lc2 cos(th2(t)) #1 \
   + | m2 | th1p(t) (l1 cos(th1(t)) + l2 cos(#4)) + l2 cos(#4) th2p(t) + ------------------ |
     \    \                                                              2           /

   /                                                             ______  ___    \ \
   | _______            __             ______  __   _______            __   cos(th2(t)) lc2 #2 | |
   | th1p(t) (cos(#3) l2 + cos(th1(t)) l1) + th2p(t) cos(#3) l2 + ------------------ | |/2
   \                                                                   2         / /

             ______            __                 2               2
     #5 cos(th1(t) - th1(t)) m1 (l1 |lc1|  + 2 lc1 |l1| ) (2 l1 + lc1)
   + -----------------------------------------------------------------
                                8 l1 lc1
```

Energía potencial total

```
U_Total =

(g*lc1*m1*sin(th1(t)))/2 + (g*lc2*m2*sin(th2(t)))/2
```

Aquí podemos ver que tanto U1 como U2 están actuando debido a que las dos se encuentran en efecto a lo que es nuestro robot y algo importante que mencionar es que están siendo multiplicadas por seno y teniendo las thetas correspondientes a su articulación th1 y th2; todo ello es debido a que las posiciones de la articulación 1 y 2 en el eje Y se encuentran efectuándose en el seno como podemos verlo a continuación:

```
%Articulación 1
%Posición de la articulación 1 respecto a 0
P(:,:,1)= [l1*cos(th1); l1*sin(th1);0];

%Articulación 2
%Posición de la articulación 1 respecto a 0
P(:,:,2)= [l2*cos(th2); l2*sin(th2);0];
```

Lagrangiano

```
Lagrangiano =

(Izz1*abs(th1p(t))^2)/2 + (conj(m2)*(th1p(t)*(l1*sin(th1(t)) + l2*sin(th1(t) + th2(t))) + l2*sin(th1(t) + th2(t))*th2p(t) +

            /
Izz1 #5     |  __  /                                                      lc2 sin(th2(t)) #1 \
------- + | m2  | th1p(t)  (l1 sin(th1(t)) + l2 sin(#4)) + l2 sin(#4) th2p(t) + ------------------ |
   2        \      \                                                              2           /

   /                                                              ______   ___   \ \              / _______    _______ \
   |  _______            __           _______   __    _______         __   sin(th2(t)) lc2  #2  | |              | th1p(t)    th2p(t) |
   | th1p(t)  (sin(#3)  l2 + sin(th1(t))  l1) + th2p(t)  sin(#3)  l2 + ------------------ | |/2 + Izz2 #1 | ------- + ------- |
   \                                                                      2           / /              \    2         2     /

      /
      |  __  /                                                   lc2 cos(th2(t)) #1 \
   + | m2  | th1p(t)  (l1 cos(th1(t)) + l2 cos(#4)) + l2 cos(#4) th2p(t) + ------------------ |
      \      \                                                        2           /

   /                                                              ______   ___   \ \
   |  _______            __           _______   __    _______         __   cos(th2(t)) lc2  #2  | |     g lc1 m1 sin(th1(t))
   | th1p(t)  (cos(#3)  l2 + cos(th1(t))  l1) + th2p(t)  cos(#3)  l2 + ------------------ | |/2 - --------------------
   \                                                                      2           / /                2

     g lc2 m2 sin(th2(t))     #5 cos(th1(t) - th1(t)) m1 (l1 |lc1|  + 2 lc1 |l1| ) (2 l1 + lc1)
   - -------------------- + ---------------------------------------------------------------
              2                                   8 l1 lc1
```

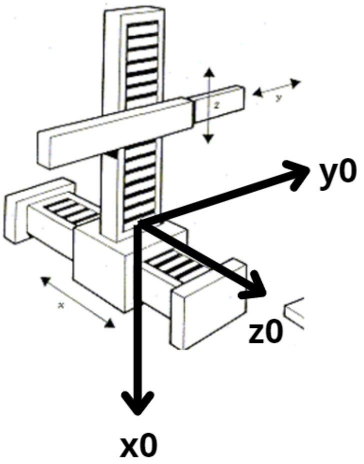
```
where

   #1 == th1p(t) + th2p(t)
          _______   _______
   #2 == th1p(t) + th2p(t)
          ______   ______
   #3 == th1(t) + th2(t)

   #4 == th1(t) + th2(t)
                    2
   #5 == |th1p(t)|
```

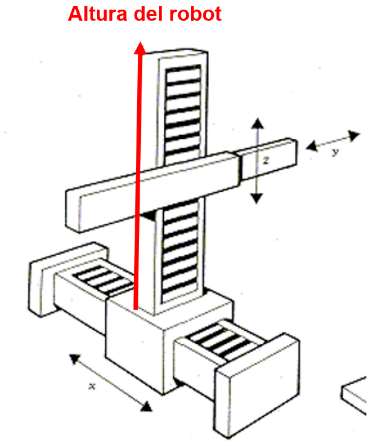
Modelo de energía

```
H =

(Izz1*abs(th1p(t))^2)/2 + (conj(m2)*(th1p(t)*(l1*sin(th1(t)) + l2*sin(th1(t) + th2(t))) + l2*sin(th1(t) + th2(t))*th2p(t) +

            /
Izz1 #5     |  __  /                                                      lc2 sin(th2(t)) #1 \
------- + | m2  | th1p(t)  (l1 sin(th1(t)) + l2 sin(#4)) + l2 sin(#4) th2p(t) + ------------------ |
   2        \      \                                                              2           /

   /                                                              ______   ___   \ \              / _______    _______ \
   |  _______            __           _______   __    _______         __   sin(th2(t)) lc2  #2  | |              | th1p(t)    th2p(t) |
   | th1p(t)  (sin(#3)  l2 + sin(th1(t))  l1) + th2p(t)  sin(#3)  l2 + ------------------ | |/2 + Izz2 #1 | ------- + ------- |
   \                                                                      2           / /              \    2         2     /

      /
      |  __  /                                                   lc2 cos(th2(t)) #1 \
   + | m2  | th1p(t)  (l1 cos(th1(t)) + l2 cos(#4)) + l2 cos(#4) th2p(t) + ------------------ |
      \      \                                                        2           /

   /                                                              ______   ___   \ \
   |  _______            __           _______   __    _______         __   cos(th2(t)) lc2  #2  | |     g lc1 m1 sin(th1(t))
   | th1p(t)  (cos(#3)  l2 + cos(th1(t))  l1) + th2p(t)  cos(#3)  l2 + ------------------ | |/2 + --------------------
   \                                                                      2           / /                2

     g lc2 m2 sin(th2(t))     #5 cos(th1(t) - th1(t)) m1 (l1 |lc1|  + 2 lc1 |l1| ) (2 l1 + lc1)
   + -------------------- + ---------------------------------------------------------------
              2                                   8 l1 lc1
```

```
where

   #1 == th1p(t) + th2p(t)
          _______   _______
   #2 == th1p(t) + th2p(t)
          ______   ______
   #3 == th1(t) + th2(t)

   #4 == th1(t) + th2(t)
                    2
   #5 == |th1p(t)|
```

Ejercicio 3 - Robot lineal de 3GDL:



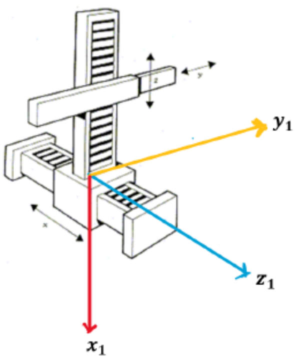


Para terminar ahora analizaremos las alturas para un robot cartesiano de 3GDL por lo que ya sabemos en las actividades anteriores se calcularon los jacobianos, las velocidades lineales y angulares y también la energía cinética de cada uno de los eslabones para obtener la total.

De la siguiente manera continuaremos por calcular la energía potencial para cada uno de los eslabones, tomaremos primero en cuenta nuestro análisis para las alturas:

Altura 1

Para definir la primera altura tomaremos en cuenta nuestra primera matriz de rotación en con una rotación de -90 grados en el eje y, también definimos la posición y sobre todo podemos observar el marco de referencia y algo importante es darnos cuenta gracias a la imagen del robot que solo contaremos con una altura por lo que en este caso está definida en x.



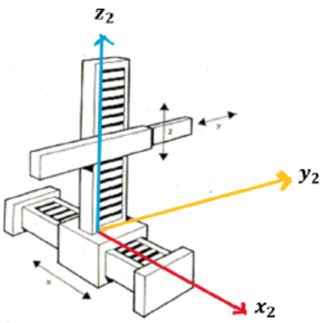

```
% Articulación 1
% Posición
P(:,:,1) = [0; 0; l1];
% Matriz de rotación
R(:,:,1) = [0 0 -1;
            0 1 0;
            1 0 0];
```

Por eso en la definición de la primera altura pondremos el h1 como 1 qué es lo que significa que está en el eje x:

```
%Obtenemos las alturas respecto a la gravedad
h1= P01(1); %Tomo la altura paralela al eje x
```

Altura 2

Para la segunda altura ya podemos ver que tuvimos una rotación de -90 grados en el eje x, por lo que observamos que ahora nuestra altura del robot dada en la segunda articulación se encuentra en el eje z



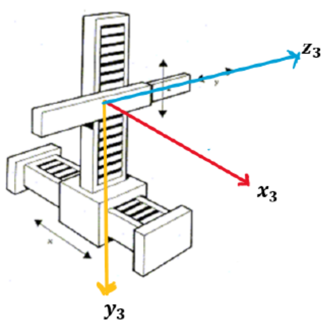

```
% Articulación 2
%Posición
P(:,:,2) = [0; 0; l2];
%Matriz de rotación
R(:,:,2) = [1 0 0;
            0 0 1;
            0 -1 0];
```

Entonces nuestra definición para la segunda altura quedará de forma en qué h2 le asignemos un 3 que significa que está en el eje z:

```
h2= P12(3); %Tomo la altura paralela al eje z
```

Altura 3

Por último para definir nuestra altura 3 en la que ya nada más tenemos la traslación en el eje z definida en la articulación y por ello pusimos nuestra matriz de identidad. Es por ello qué como observamos nuestro nuevo marco de referencia podemos ver que ahora la altura de nuestro robot se encuentra en el eje y.




```
% Articulación 3
%Posición
P(:,:,3) = [0; 0; l3];
%Matriz de rotación
R(:,:,3) = [1 0 0;
            0 1 0;
            0 0 1];
```

Finalmente esta altura de y la vamos a indicar para nuestra h3 en la que le asignamos un 2 debido a que significa que se encuentra la altura en este eje para este caso:

```
h3= P12(2); %Tomo la altura paralela al eje y
```

Energía Potencial

Ahora para el cálculo de la energía potencial es primordial primeramente calcularla para cada eslabón por lo que al tener 3 lo haremos para cada uno, se calculará como el producto de la masa con la aceleración de la gravedad y la altura qué tomamos antes de cada eslabón. Para este caso hacemos el cálculo de 3 energías potenciales y posteriormente al obtenerlas tendremos que hacer una sumatoria para poder tener la energía potencial total de todo el sistema.

```
U1=m1*g*h1;
U2=m2*g*h2;
U3=m2*g*h3;

%Calculamos la energía potencial total
U_Total= U1 + U2 +U3
```

Lagrangiano

El lagrangiano se definirá como una diferencia es decir una resta entre la energía cinética total y la energía potencial total del sistema, calculandolo con la resta de la energía potencial total de la cinética total. Es una función para la correcta formulación de las ecuaciones de movimiento de todo el sistema debido a que se utiliza para poder derivar las ecuaciones de Lagrange.

```
%Obtenemos el Lagrangiano
Lagrangiano= simplify (K_Total-U_Total);
pretty (Lagrangiano)
```

Modelo de Energía

El modelo de energía definido como H es la suma de la energía cinética total con la energía potencial total del sistema, proporciona una representación de la energía del sistema y además se utiliza para poder analizar el comportamiento de nuestro sistema en distintas condiciones.

```
%Modelo de Energía
H= simplify (K_Total+U_Total);
 pretty (H)
```

Resultados

Energía cinética

```
K_Total =

(conj(m3)*(abs(l1p(t))^2 + abs(l2p(t))^2 + abs(l3p(t))^2))/2 + (abs(l1p(t))^2*conj(m1))/2 + (conj(m2)*(abs(l1p(t))^2 + abs(l2p(

__             2            2            2             2 __    __             2            2
m3  (|l1p(t)|  + |l2p(t)|  + |l3p(t)| )    |l1p(t)|  m1    m2  (|l1p(t)|  + |l2p(t)| )
------------------------------------- + ------------ + --------------------------
                  2                            2                     2
```

```
Energía Cinética en el Eslabón 1
        2 __
|l1p(t)|  m1
------------
      2

Energía Cinética en el Eslabón 2
__           2           2
m2  (|l1p(t)|  + |l2p(t)| )
--------------------------
             2

Energía Cinética en el Eslabón 3
__           2           2           2
m3  (|l1p(t)|  + |l2p(t)|  + |l3p(t)| )
--------------------------------------
                   2

__           2           2           2            2 __   __            2           2
m3  (|l1p(t)|  + |l2p(t)|  + |l3p(t)| )   |l1p(t)|  m1   m2  (|l1p(t)|  + |l2p(t)| )
-------------------------------------- + ------------ + --------------------------
                   2                          2                     2
```

Energía potencial total

```
U1 =

0

U2 =

g*lc2*m2

U3 =

0
```

```
U_Total =

g*lc2*m2
```

Algo que podemos ver correcto debido a que en la posición de la primera articulación vemos que tenemos un 0 en x que es U1 y también para la posición de la articulación 3 donde vemos que y también se tiene como 0. Es por eso que solo se considera U2 ya que aquí sí es donde coincide la altura con la articulación de l2, la energía potencial total actúa en U2. Como podemos verlo a continuación:

```
% Articulación 1
% Posición de la junta 1 respecto al origen
P(:,:,1) = [0; 0; l1];

% Articulación 2
%Posición de la articulación 2 respecto a 1
P(:,:,2) = [0; 0; l2];
```

```
% Articulación 3
%Posición de la articulación 3 respecto a 2
P(:,:,3) = [0; 0; l3];
```

Lagrangiano

```
Lagrangiano =

(conj(m3)*(abs(l1p(t))^2 + abs(l2p(t))^2 + abs(l3p(t))^2))/2 + (abs(l1p(t))^2*conj(m1))/2 + (conj(m2)*(abs(l1p(t))^2 + abs(l2p(

__            2            2            2             2 __    __            2            2
m3 (|l1p(t)|  + |l2p(t)|  + |l3p(t)| )    |l1p(t)|  m1    m2 (|l1p(t)|  + |l2p(t)| )
-------------------------------------- + ------------ + -------------------------- - g lc2 m2
                  2                            2                      2
```

Modelo de energía

```
H =

(conj(m3)*(abs(l1p(t))^2 + abs(l2p(t))^2 + abs(l3p(t))^2))/2 + (abs(l1p(t))^2*conj(m1))/2 + (conj(m2)*(abs(l1p(t))^2 + abs(l2p

__            2            2            2             2 __    __            2            2
m3 (|l1p(t)|  + |l2p(t)|  + |l3p(t)| )    |l1p(t)|  m1    m2 (|l1p(t)|  + |l2p(t)| )
-------------------------------------- + ------------ + -------------------------- + g lc2 m2
                  2                            2                      2
```