Tema 4.- MOMENTO LINEAL Y ANGULAR: COLISIONES Y ROTACIÓN

Para poder analizar la dinámica de objetos reales y poder modelar y calcular sus movimientos de traslación y rotación es necesario introducir dos nuevas magnitudes: el momento lineal y el momento angular. En general, en un sistema de partículas hay un punto, el *centro de masas*, que se mueve como si todo el sistema estuviera concentrado en él y todas las fuerzas que afectan al sistema lo hacen cómo si sólo actuaran en ese punto. Así, en general el movimiento de un objeto cualquiera se puede descomponer en un movimiento de traslación de su centro de masas y en un movimiento de rotación en torno de un cierto eje que pasa por el centro de masas.

Ligado al *movimiento de traslación* surge la magnitud conocida como *momento lineal*, y ligado al *movimiento de rotación* surge la magnitud conocida como *momento angular*. Dos leyes fundamentales de la Física de gran utilidad para multitud de problemas son la *ley de conservación del momento lineal* y la *ley de conservación del momento angular*.

En general, *las diversas magnitudes definidas para el movimiento de traslación tienen su análogo en el movimiento de rotación*. Así, el análogo de la masa es el momento de inercia, para la fuerza el análogo es el momento de fuerzas, para el momento lineal es el momento angular, las magnitudes cinemáticas introducidas en el tema 2 tienen su contrapartida en las magnitudes cinemáticas angulares.

Centro de masas

El centro de masas, CM, de un *sistema de partículas* viene dado por:

$$M\,\vec{r}_{CM} = m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2 + \ldots; \quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Un *objeto continuo* (sólido rígido) se puede entender como un sistema continuo de partículas de modo que,

$$M\,\vec{r}_{CM} = \int_{objeto} \vec{r}\,dm; \quad M = \int_{objeto} dm$$

En objetos con elevada simetría se puede encontrar la localización del CM usando simplemente consideraciones geométricas.

En el caso de un sistema de partículas, la 2ª ley de Newton puede escribirse como,

$$\vec{F}_{neta,ext} = \sum_i \vec{F}_{i,ext} = M\,\vec{a}_{CM}$$

Donde $\vec{F}_{neta,ext}$ corresponde a la resultante de todas las fuerzas externas aplicadas al sistema de partículas, y $\vec{a}_{CM}$ es la aceleración del CM del sistema.

Momento lineal y ley de conservación

El *momento lineal* o cantidad de movimiento $\mathbf{p}$ de una partícula de masa m que se mueve con una velocidad $\mathbf{v}$ se define como: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$

Teniendo en cuenta la relación $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, la segunda ley de Newton puede escribirse como:

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$$

De igual modo, para un sistema de partículas se tendrá,

$$\vec{p}_{sistema} = \sum_i m_i\vec{v}_i = M\,\vec{v}_{CM}$$

$$\vec{F}_{neta,ext} = \frac{d\vec{p}_{sistema}}{dt}$$

La *ley de conservación del momento lineal* indica que en todo sistema aislado, es decir, no sometido a fuerzas externas, el momento lineal se conserva.

Colisiones

En un choque o colisión un objeto se ve sometido a una variación $\Delta\mathbf{p}$ de su cantidad de movimiento. Si tenemos en cuenta el intervalo de tiempo Δt durante el cual tiene lugar la colisión podemos tener una estimación de la fuerza promedio $\mathbf{F}_m$ a la que se ve sometido el objeto:

$$\mathbf{F}_m = \Delta\mathbf{p}/\Delta t$$

En general, esta fuerza es mucho mayor que las fuerzas externas existentes, con lo que durante el tiempo que dura la colisión se pueden ignorar y aplicar la ley de conservación del momento lineal al sistema formado por los objetos en colisión.

Se pueden distinguir dos tipos de colisiones:
- Elásticas: se conserva la suma de las energías cinéticas de los objetos antes y después de la colisión.
- Inelásticas: no se conserva dicha suma de energía cinética. La diferencia se acostumbra a perder en forma de calor. En el caso en que tras la colisión los cuerpos implicados resulten acoplados, la pérdida de energía cinética es máxima y el choque se dice *perfectamente inelástico*.

• Movimiento circular: magnitudes cinemáticas angulares

Un movimiento circular es un movimiento plano en el que la trayectoria es una circunferencia de radio R. El espacio recorrido s puede ponerse en función del ángulo θ en la forma:

$$\theta = s/R$$

La *velocidad angular* ω es la variación de θ con el tiempo t:

$$\omega = d\theta/dt$$

Se verifica la relación:

$$\omega = v/R$$

La *aceleración angular* α es la variación de ω con t:

$$\alpha = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2$$

Se cumple:

$$\alpha = a_T/R$$

Puede asignarse un vector $\boldsymbol{\omega}$ a la velocidad angular ω y otro $\boldsymbol{\alpha}$ a la aceleración angular α. Estos vectores son perpendiculares a la trayectoria circular de la partícula y se cumple:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} \qquad \mathbf{a}_T = \boldsymbol{\alpha} \wedge \mathbf{r} \qquad \mathbf{a}_N = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r})$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector que va desde el centro de la circunferencia a la posición de la partícula. La operación $\wedge$ corresponde al producto vectorial, que también se indica como $\mathbf{x}$.

En un *movimiento circular uniforme* la aceleración angular es nula y la velocidad angular es constante y no hay aceleración tangencial (el módulo de $\mathbf{v}$ también es constante). Así la aceleración normal es constante por serlo v y R. Se verifica:

$$\alpha(t) = 0 \quad \omega(t) = \omega = \text{cte.} \quad \theta(t) = \theta_0 + \omega\,t$$

En un *movimiento circular uniformemente acelerado* la aceleración angular es constante. La aceleración *tangencial* es constante, pero no lo es la aceleración normal. Se cumple:

$$\alpha(t) = \alpha = \text{cte.} \quad \omega(t) = \omega_0 + \alpha t \quad \theta(t) = \theta_0 + \omega\,t + \alpha t^2/2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

Momento angular y ley de conservación

El *momento angular* **L** de una partícula de masa *m* respecto a un punto *O* es:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} \qquad \text{(S.I.: kg·m}^2\text{/s)}$$

donde **r** es el vector con origen el punto *O* y final en la posición de la partícula, y **p** = *m***v** es el momento lineal de la partícula.

El *momento de fuerzas* **τ** viene definido como,

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \wedge \cdot \mathbf{F} \qquad \text{(S.I.: N·m)}$$

Derivando la ecuación **L** = **r** ∧ **p** respecto al tiempo se obtiene:

$$\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$$

Esta ecuación es a veces denominada 2ª ley de Newton aplicada a la rotación.

En multitud de problemas los vectores **ω** y **L** son paralelos entre sí, en cuyo caso se pueden utilizar expresiones más simples:

$$L = |\vec{r} \wedge \vec{p}| = mr^2 w$$

Y,
$$\tau = |\vec{r} \wedge \vec{F}| = mr^2 \alpha$$

Para el caso de un sistema de partículas tendremos,

$$L_{sistema} = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) w$$

Donde la suma entre paréntesis recibe el nombre de momento de inercia I respecto del eje de giro,

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \qquad \text{(S.I.: kg·m}^2\text{)}$$

Con lo que para el caso de un sistema de partículas (o de un objeto continuo) tendremos,

$$L = I\, w$$

Y,
$$\tau_{neta,ext} = I\alpha$$

Donde $\tau_{neta,ext}$ es el momento de fuerzas resultante debido a las fuerzas externas aplicadas al sistema. Si este momento de fuerzas es nulo el momento angular del sistema $L_{sistema}$ se conserva. Esta es la denominada *ley de conservación del momento angular*.

Energía cinética de rotación

La energía cinética asociada al movimiento de rotación se puede expresar como,

$$E_{c,rot} = \frac{1}{2} I\, w^2$$

De modo que la energía cinética total de un objeto o de un sistema de partículas viene dada por la suma de la energía cinética de su centro de masas y de su movimiento de rotación:

$$E_c = E_{c,tras} + E_{c,rot} = \frac{1}{2} M\, v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I\, w^2$$

• BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

[TIPLER 5ªEdición, 2005] *Cap. 8: Sistemas de partículas y conservación del momento lineal, Cap. 9: Rotación, Cap. 10: Conservación del momento angular.*