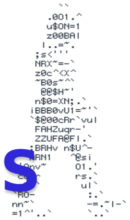
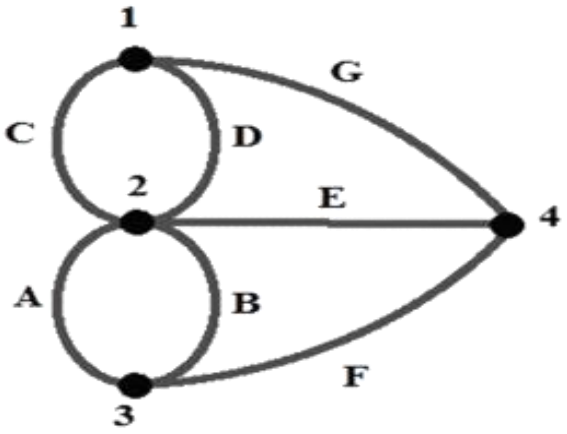
2. RECORRIDOS de GRAFOS POR ARISTAS

Nos vamos con Euler…



Pasamos por todas las aristas ?



Chuleta Recorridos EULER en GND

>> **TOUR : cadena cerrada** que atraviesa cada arista de *G* **al menos** una vez.

>> TOUR EULERIANO (TE): tour que atraviesa cada arista **exactamente una vez**.

GRAFO EULERIANO: grafo que contiene un tour euleriano

>> CAMINO EULERIANO (CE): cadena simple que atraviesa **cada arista** exactamente una vez.

*Ciclo: cadena simple cerrada con **vértices internos distintos***

¿ Camino euleriano

←→

camino ?

NO

Camino: <u>no repite vértices</u>

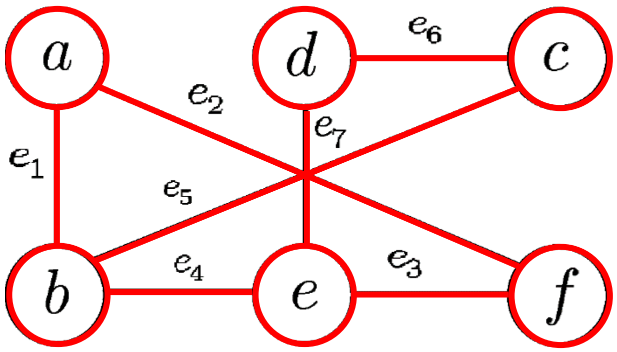
Camino Euleriano: no repite aristas pero pasa por todas aunque <u>repita vértices</u>.

¿ Ciclo

←→

tour ?

¿ De qué depende que un GND tenga TE, CE ?

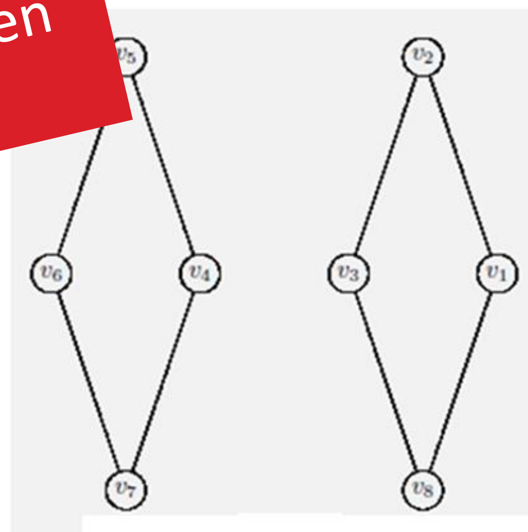


CE : $be_1ae_2fe_3ee_4be_5ce_6de_7e$

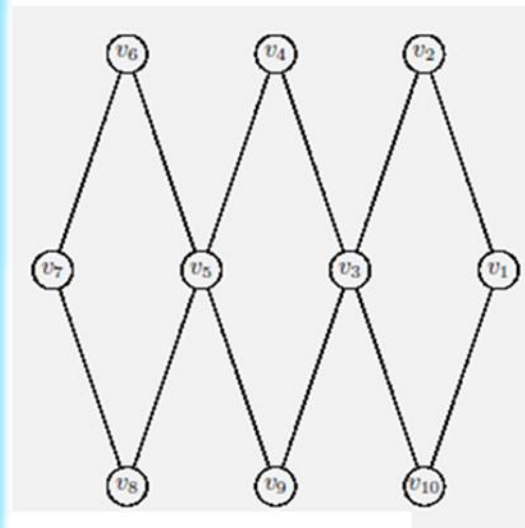
1º.- de que sea conexo

2º - del grado de sus vértices

¿ Estos grafos pueden ser GE o tener CE ?

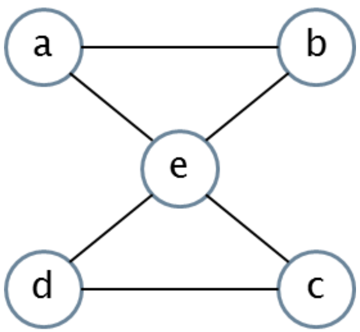


G

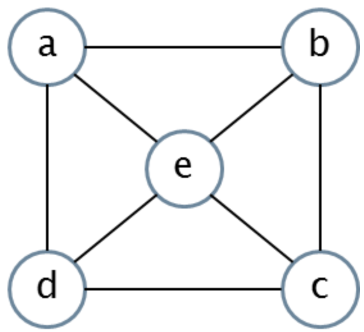


R

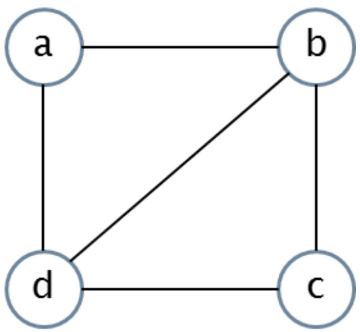
Para que un grafo sea euleriano es necesario, que el grafo sea conexo.



H



Z

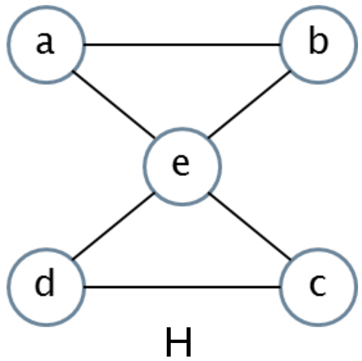


Y

EULER
GND

Cómo determinar si existe TE / CE

Ten en cuenta
1º** condición >> **GND conexo
2º** relación **vértices >> grado



TE → ***Tengo que salir sin repetir arista***

→ ***¿ Condición d(v) >> par ?***

1. G es euleriano sii, ∀v, d(v) par

EULER
GND

Cómo determinar si existe TE / CE

CE

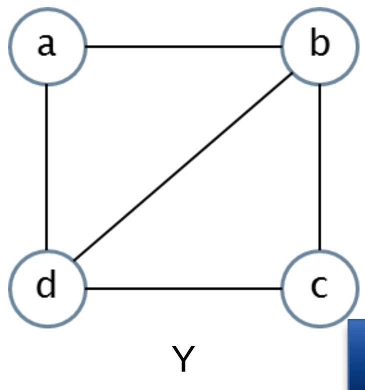
Tengo que empezar y terminar en vértices diferentes

¿ Condición en d(v) ?

Salgo de **u** >> **d(u) >> impar**

Termino en **v** >> **d(v) >> impar**

Grado de resto vértices
! A la fuerza! **d(p) >> par**

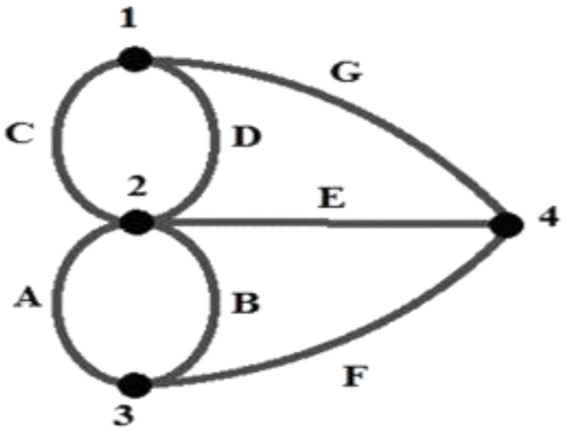


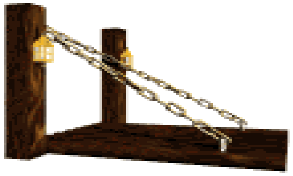
2. G contiene un **CE sii** tiene sólo 2 vértices de grado impar

Según esto

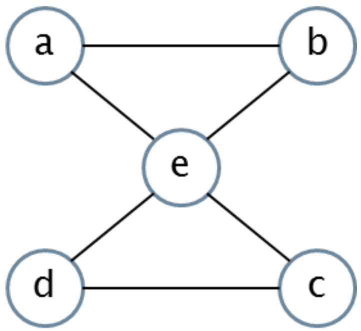
El problema de los puentes de Euler…

No tiene ***TE ni CE***

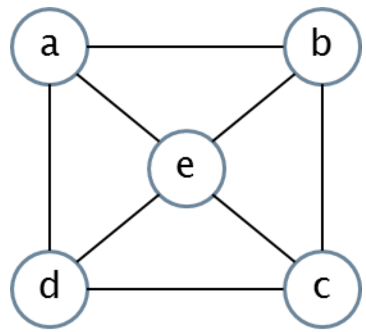




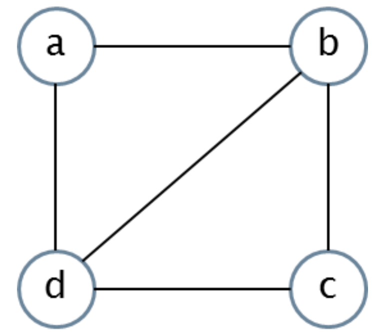
Which of the grafs in Figure have an Euler tour ?
Of those that do not, which have an Euler trail ?



H



Z



Y

Conexo,

$\forall v \in V$, d(v) par

TE: a b e c d e a

→ GE

Conexo

No tiene TE

No tiene CE

Conexo.

No tiene TE

d(b), d(d) >> **impar**

→ tiene CE

CE : d a b c d b

FLEURY
GND

Cómo se calcula un tour o un camino euleriano

Si buscamos TE: se debe construir una **cadena simple que no repita aristas** y que saliendo de un vértice regrese a él pasando por todas..

>> Elegir cualquier vértice para comenzar la cadena.

>> Elegir arista incidente con vértice, que no sea de corte.

>> Añadir arista a la cadena, eliminarla del recorrido

>> Situarnos en vértice extremo de dicha arista.

>> Seguir proceso hasta finalizar aristas.

CE: comenzar con un vértice de **grado impar** y seguir el proceso descrito.

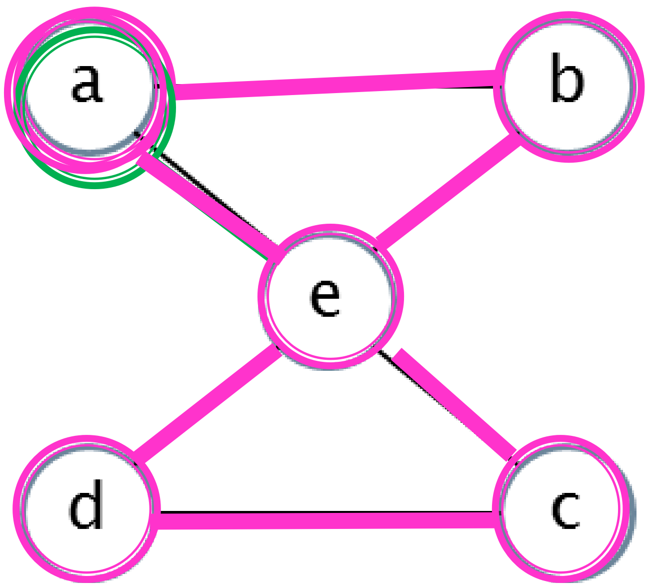
FLEURY
GND

Cómo se calcula
un tour o un camino euleriano

TE: Comienzo cadena >> Cualquier vértice >> **a**

Elige arista **incidente** a vértice a >> cualquiera que

no desconecte grafo Ej: **{a,b}**



En **b**, elige arista incidente >> **{b,e}**

En **e**, ¿qué arista elegimos? >>

¿ ~~{e,a}~~ → **¿ cómo "salimos" de a**

¿ {e,c}

¿ {e,d}

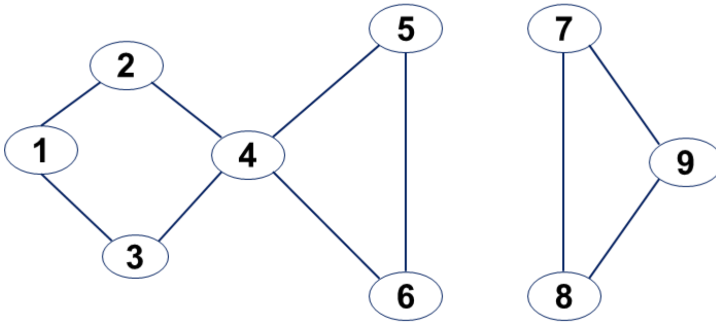
ALGORITMO DE FLEURY GND

Paso 1. i ←1; Gi = G. Iniciar cadena **T = Φ.**
Elegir v/ d(v) es impar; ecc otro v ∈ V.
Etiquetar v: local.

Paso 2. **No hay arista incidente** con **v** → **parar**
T es CE o TE.

Paso 3. **Sólo hay 1 arista** incidente con v / **e = {v,u}**
→ **Eliminar e** $E_{i+1} = E_i - \{e\}$
→ **Eliminar v** $V_{i+1} = V_i - \{v\}$

!cuidado! No desconectar



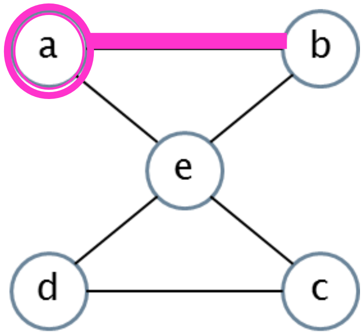
G

Paso 4. **Hay más de 1 arista** incidente con v, **elegir e = {v,u} no de corte**
→**Eliminar e** $E_{i+1} = E_i - \{e\}$

Paso 5. **Añadir** e = {v,u} a la cadena T = T U {e}.
Etiquetar u como local.
Hacer i ← i +1, y volver paso 2

Aplica Fleury.

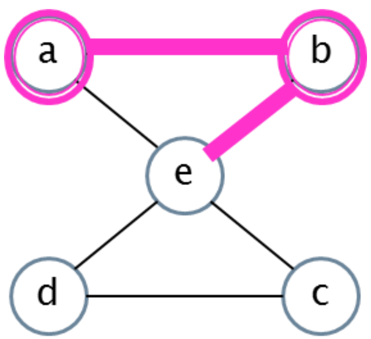
Th-1E: Grafo conexo, ∀vi, d(vi) par >> TE



P1: i ←1, **T = Φ**
Vértice local: **a**

P4: aristas incidentes a **a** >> {a,b}, {a,e}
Eliminar: {a,b}

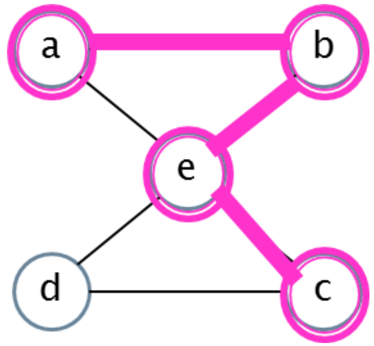
P5: añadir **{a,b}** >> **T = {a,b}**
Vértice local: **b**
i ← 2



P3: aristas incidentes a **b** >> {b,e}
Eliminar: {b,e}
Eliminar: b

P5: añadir **{b,e}** → **T = {a,b}, {b,e}**
Vértice local: **e**
i ← 3

Aplica Fleury.



i ← 3

P4: aristas incidentes a **e** >> {e,a}, {e,d}, {e,c}

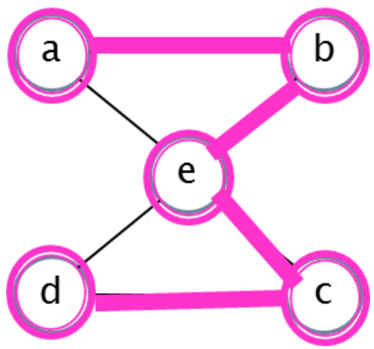
!cuidado! {e,a} arista de corte

Eliminar: {e,c}

P5: añadir **{e,c}** >> **T = {a,b}, {b,e}, {e,c}**

Vértice local: **c**

i ← 4



i ← 4

P3: aristas incidentes a **c**: {c,d}

Eliminar: {c,d}

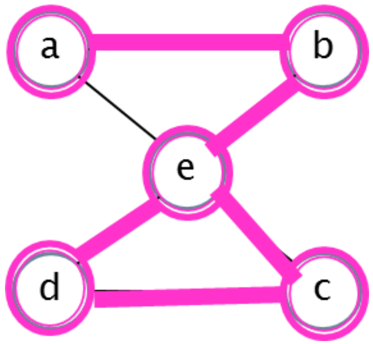
Eliminar: c

P5: añadir **{c,d}** >> **T = {a,b}, {b,e}, {e,c} {c,d}**

Vértice local: **d**

i ← 5

Aplica Fleury.



P3: aristas incidentes a d: {d,e}

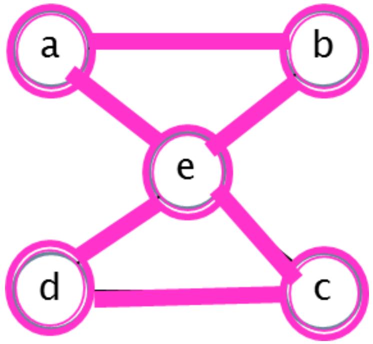
Eliminar: {d,e}

Eliminar: d

P5: añadir **{d,e}** >> TE = {a,b}, {b,e}, {e,c} {c,d},{d,e}

Vértice local: **e**

i ← 6



P3: aristas incidentes a e: {e,a}

Eliminar: {e,a}

Eliminar: e

P5: añadir **{e,a}** >>

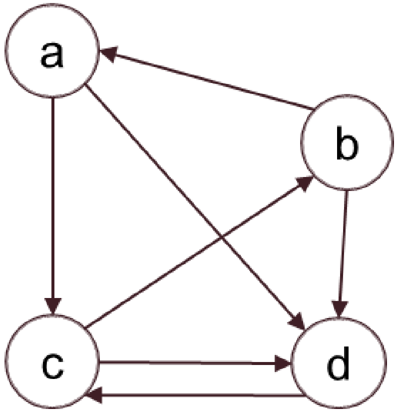
TE = {a,b}, {b,e}, {e,c} {c,d},{d,e}, {e,a}

EULER GD

Cómo determinar si existe TE / CE

Ten en cuenta
1º** condición >> **GD conexo /débilmente conexo
2º** relación **vértices >> grado

Averigua si se cumplen estas condiciones



H

TE → ***Tengo que salir y entrar***

→ ***¿ Condición en ds(v) y de(v) ?***

→ **! Tendrán que ser iguales ds(v) = de(v) !**

1. G es euleriano sii, $\forall v$, $d_e(v) = d_s(v)$

EULER
GD

Averigua si se cumplen estas condiciones

Cómo determinar si existe TE / CE

CE

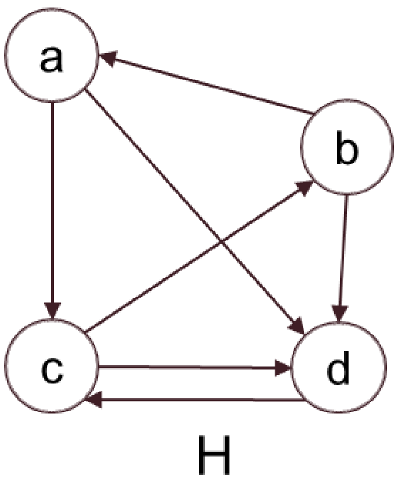
Tengo que salir y entrar en vértices diferentes

¿ Condición en ds(v) y de(v) ?

Salgo de **u** >> $\mathbf{d_e(u) = d_s(u) - 1}$

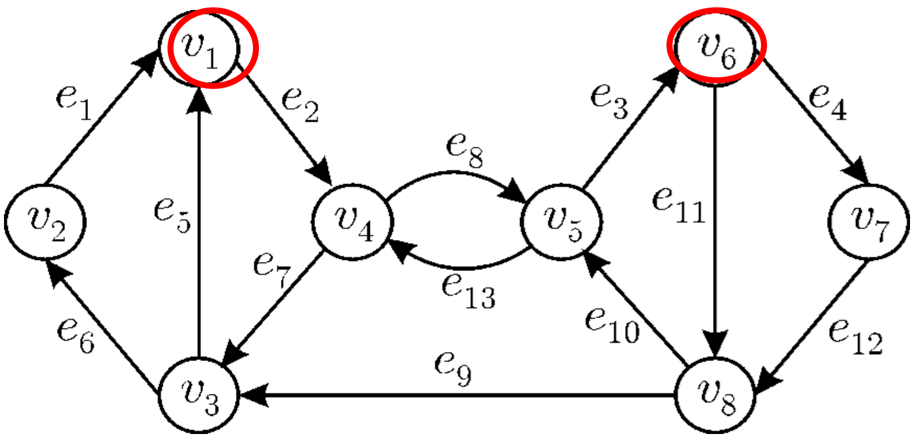
Termino en **v** >> $\mathbf{d_e(v) = d_s(v) + 1}$

Grado de resto vértices
! A la fuerza! $\mathbf{d_e(p) = d_s(p)}$



2. G contiene un **CE sii** $\mathbf{d_e(v) = d_s(v), \forall v \neq p, q}$
$\mathbf{d_e(p) = d_s(p) - 1,}$ **p** : v.inicial;
$\mathbf{d_e(q) = d_s(q) + 1,}$ **q** : v. final

FLEURY
GD



T

CONDICIONES ???

GD y **débilmente conexo**

$d_{\mathbf{e}}(\mathbf{v_i}) = d_{\mathbf{s}}(\mathbf{v_i})$, $\forall$vi, $i \neq 1, 6$

$d_e(v_6) = 1$

$d_s(v_6) = 2 - 1$

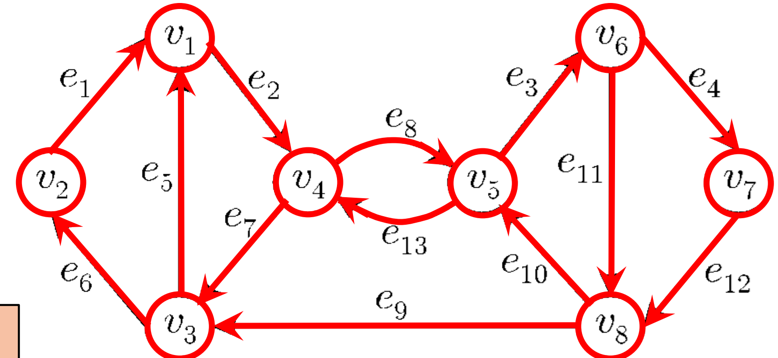
$d_e(v_1) = 2$

$d_s(v_1) = 1 + 1$

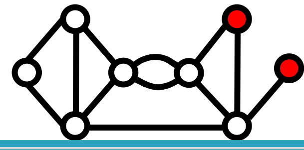
CE : sale de v_6
termina en v_1

Euler trails and Euler tours.

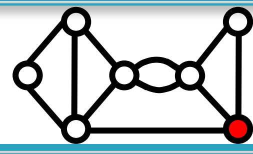
FLEURY'S ALGORITHM:



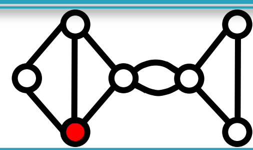
Iteration 1: T= e_4



Iteration 2: T= e_4e_{12}

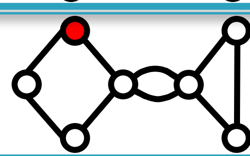


Iteration 3: T= $e_4e_{12}e_9$

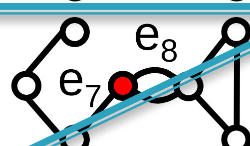


At this point, if we choose the arc $\boldsymbol{e_7}$, this arc is a cut edge of the undirected associated graph. Then, we have to choose $\boldsymbol{e_8}$.

Iteration 4: T= $e_4e_{12}e_9e_5$

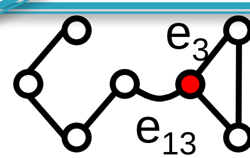


Iteration 5: T= $e_4e_{12}e_9e_5e_2$

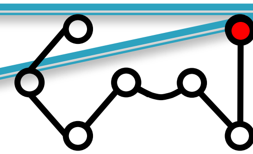


At this point, if we choose the arc $\boldsymbol{e_{13}}$, this arc is a cut edge of the undirected associated graph. Then, we have to choose $\boldsymbol{e_3}$.

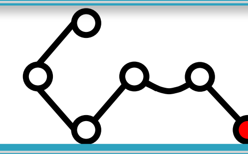
Iteration 6:
T= $e_4e_{12}e_9e_5e_2e_8$



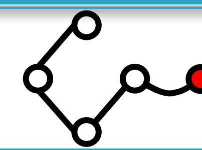
Iteration 7:
T= $e_4e_{12}e_9e_5e_2e_8e_3$



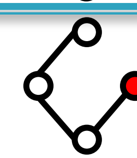
Iteration 8:
T= $e_4e_{12}e_9e_5e_2e_8e_3e_{11}$



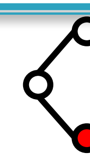
Iteration 9:
T= $e_4e_{12}e_9e_5e_2e_8e_3e_{11}e_{10}$



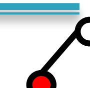
Iteration 10:
T= $e_4e_{12}e_9e_5e_2e_8e_3e_{11}e_{10}e_{13}$



Iteration 11:
T= $e_4e_{12}e_9e_5e_2e_8e_3e_{11}e_{10}e_{13}e_7$



Iteration 12: T= $e_4e_{12}e_9e_5e_2e_8e_3e_{11}e_{10}e_{13}e_7e_6$



Iteration 13: T= $e_4e_{12}e_9e_5e_2e_8e_3e_{11}e_{10}e_{13}e_7e_6e_1$

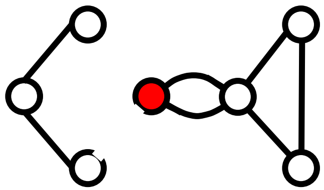
Euler trail

FLEURY
GD

Etapas críticas:

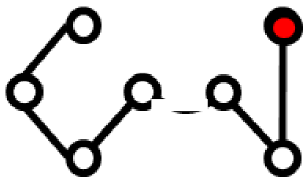
Iteration 5:

T= $e_4e_{12}e_9e_5e_2$



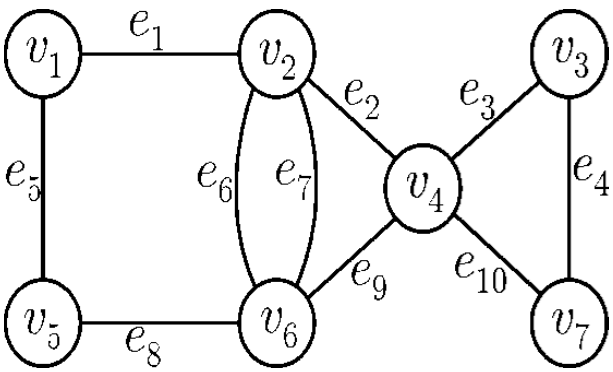
Iteration 7:

T= $e_4e_{12}e_9e_5e_2e_8e_3$



EJEMPLO 2 >> FLEURY para GND

1º COMPROBAR SI G CUMPLE REQUISITOS



Sea G, **GND y CONEXO**.

1 **GE sii no** tiene **vértices de grado impar**.

2 Existe **CE sii** tiene <u>**exactamente 2 vértices**</u> de **grado impar.**

Existe TE

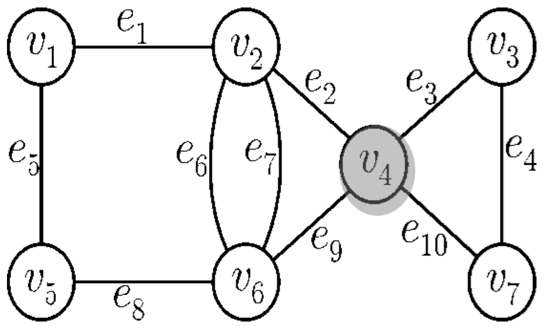
Lo buscamos

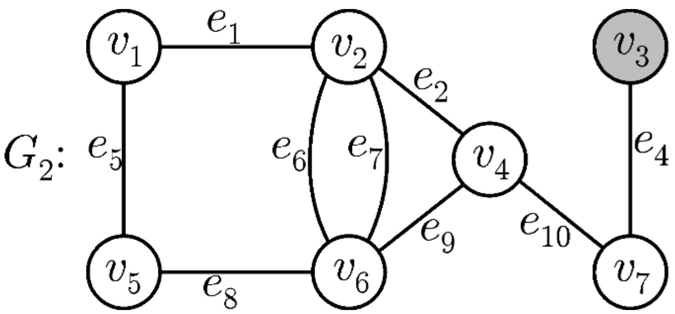
EJEMPLO 2 (cont) >> FLEURY GND

P1: i ←1, **T = Φ**
Vértice local: **v_4**

P4: aristas incidentes a v4: **e_2, e_3, e_9 e_{10}.**
Eliminar: e_3

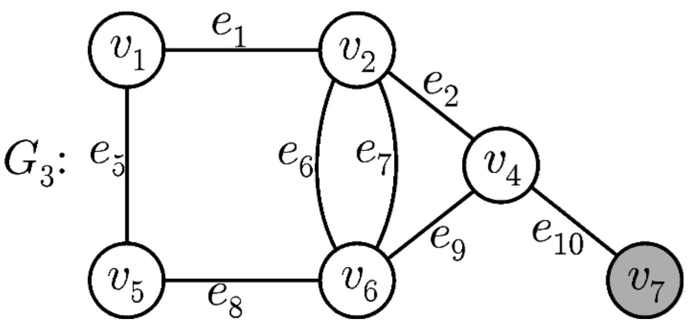
P5: añadir **e_3** al tour → **T = e_3**
Vértice local: **v_3**
i ← 2





P3: aristas incidentes a v_3: **e_4**
Eliminar: e_4
Eliminar: v_3

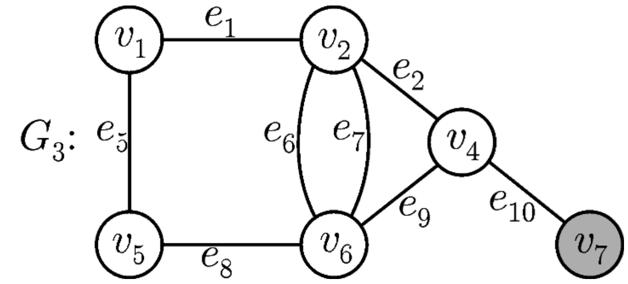
P5: añadir **e_4** al tour → **T = e_3e_4**
Vértice local: **v_7**
i ← 3



EJEMPLO 2 (cont) >> FLEURY GND

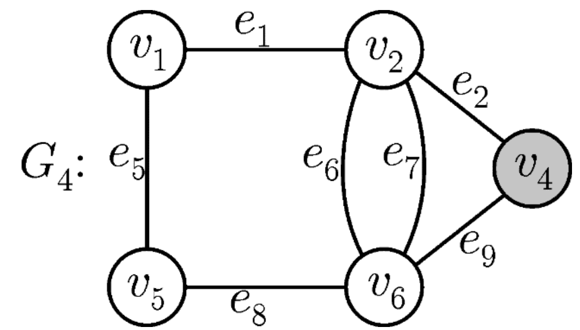
P3: aristas incidentes a v_7: $\mathbf{e_{10}}$
Eliminar: $\mathbf{e_{10}}$
Eliminar: $\mathbf{v_7}$

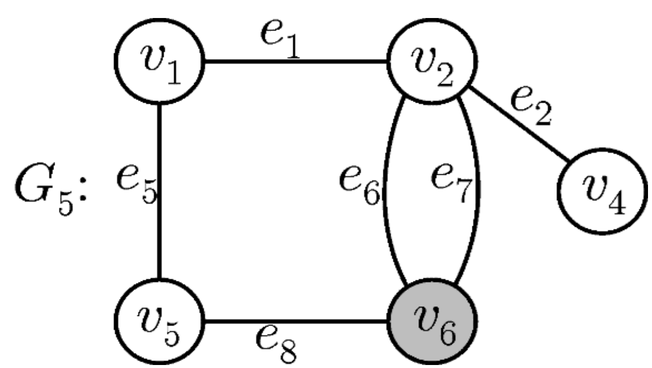
P5: añadir $\mathbf{e1_0}$ al tour → $\mathbf{T = e_3e_4e_{10}}$
Vértice local: $\mathbf{v_4}$
i ← 4



P4: aristas incidentes a v_4: $\mathbf{e_2, e_9}$
Eliminar: $\mathbf{e_9}$

P5: añadir $\mathbf{e_9}$ al tour →
$\mathbf{T = e_3e_4e_{10}e_9}$
Vértice local: $\mathbf{v_6}$
i ← 5



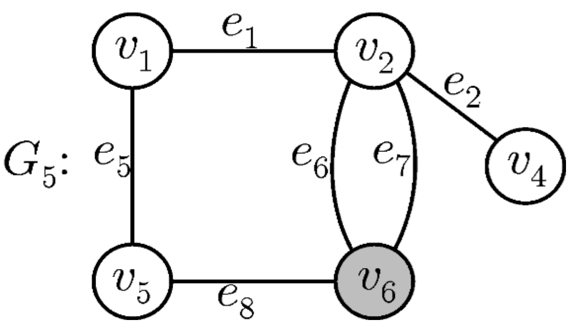


EJEMPLO 2 (cont) >> FLEURY GND

i ← 5
P4: aristas incidentes a $\mathbf{v_6}$: $\mathbf{e_6, e_7, e_8}$
Eliminar: $\mathbf{e_7}$

P5: añadir $\mathbf{e_7}$ al tour →
$T = e_3e_4e_{10}e_9e_7$

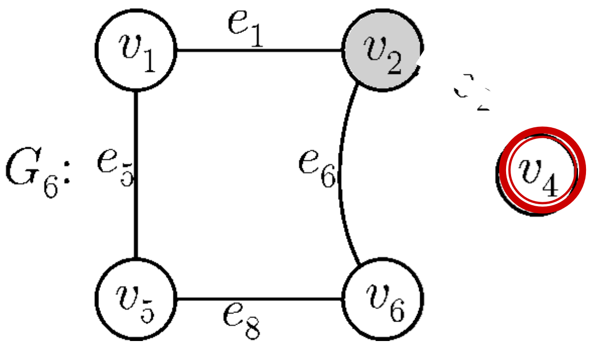
Vértice local: $\mathbf{v_2}$
i ← 6

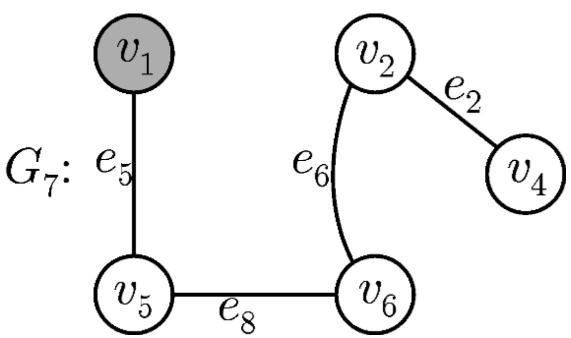


P4: aristas incidentes a $\mathbf{v_2}$: $\mathbf{e_6, e_1, e_2}$
!cuidado! $\mathbf{e_2}$ arista de corte
llegamos a v_4 y ¿cómo salimos?
Eliminar: $\mathbf{e_1}$

P5: añadir $\mathbf{e_1}$ al tour →
$T = e_3e_4e_{10}e_9e_7e_1$

Vértice local: $\mathbf{v_1}$
i ← 7





EJEMPLO 2 (cont) >> FLEURY GND

i ← 7

P3: aristas incidentes a v_1: $\mathbf{e_5}$

Eliminar: e_5

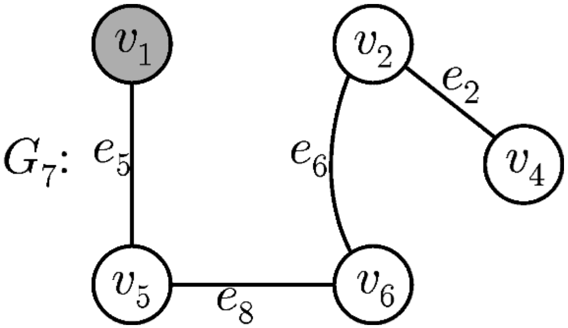
Eliminar: v_1

P5: añadir $\mathbf{e_5}$ al tour →

T = $e_3e_4e_{10}e_9e_7e_1e_5$

Vértice local: $\mathbf{v_5}$

i ← 8



P3: aristas incidentes a v_5: $\mathbf{e_8}$

Eliminar: e_8

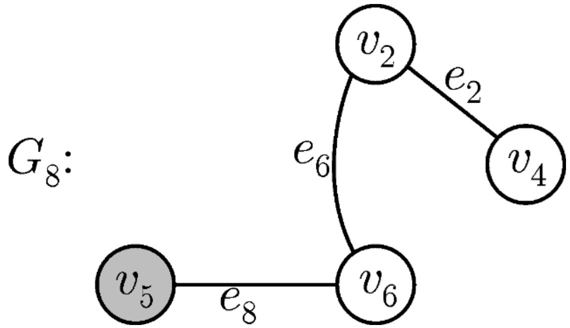
Eliminar: v_5

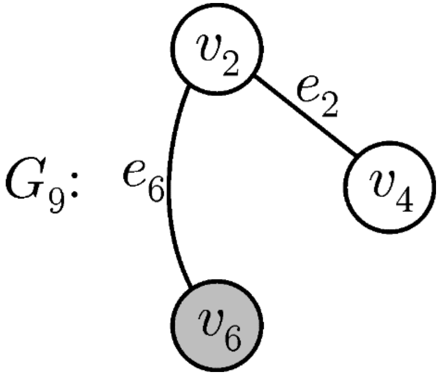
P5: añadir $\mathbf{e_8}$ al tour →

T = $e_3e_4e_{10}e_9e_7e_1e_5e_8$

Vértice local: $\mathbf{v_6}$

i ← 9

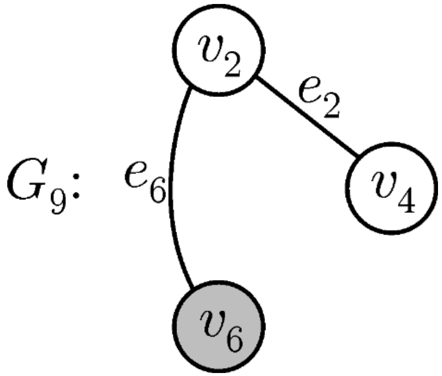




EJEMPLO 2 (cont) >> FLEURY GND

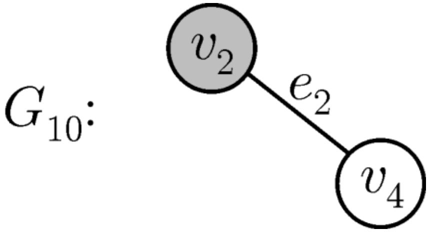
P3: aristas incidentes a v_6: $\mathbf{e_6}$
Eliminar: $\mathbf{e_6}$
Eliminar: $\mathbf{v_6}$

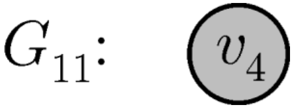
P5: añadir $\mathbf{e_6}$ al tour →
$T = e_3e_4e_{10}e_9e_7e_1e_5e_8e_6$
Vértice local: $\mathbf{v_2}$
$i \leftarrow 10$

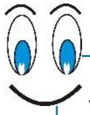


P3: aristas incidentes a v_2: $\mathbf{e_2}$
Eliminar: $\mathbf{e_2}$
Eliminar: $\mathbf{v_2}$

P5: añadir $\mathbf{e_2}$ al tour →
$T = e_3e_4e_{10}e_9e_7e_1e_5e_8e_6e_2$

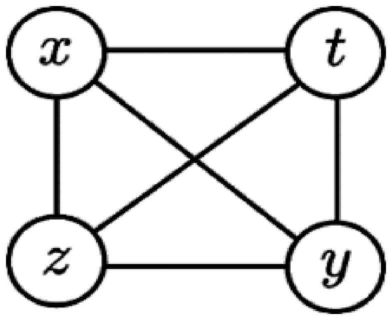






Si las aristas tuvieran un coste calcular un TE es equivalente a calcular un tour de mínimo coste:
***Problema del cartero chino** : recorrer todas las calles sin repetir*

Ejercicio1-H2: Si es posible escribe
a) un tour; b) un tour euleriano c) un camino euleriano d) ¿grafo euleriano?

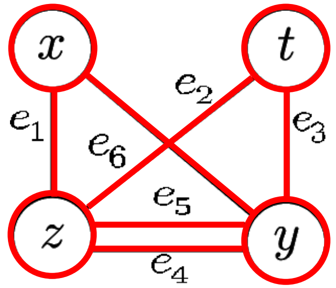


G$_5$

Tour: x t y z x y t z x

Esta cadena es un ciclo ? **no**

¿ Tiene TE / CE ?



TE: $te_3ye_4ze_1xe_6ye_5ze_2t$

GRAFO EULERIANO

¿ Tiene CE ?

*Ciclo: cadena <u>simple cerrada</u> con **vértices <u>internos</u> distintos***

Solución Ejercicio 3 Hoja 2

a) Para $v \in V_i$ ¿qué significa $\Gamma^2(v)$? Vértices alcanzables desde v mediante una cadena de longitud

b) Para $G_5 = (V_5, E_5)$, calcula de forma razonada $\Gamma^2(x)$, $x \in V_5$

$\Gamma(x) = \{y, z, t\}$, $\Gamma^2(x) = \Gamma(\Gamma(y,z)) = \{x, t, z, y\}$

c) Si R es la matriz de accesibilidad de un grafo. ¿Qué significa $R(v_i)$? $v_i \in V_i$

$R(v_i)$ es la fila i de la matriz R que indica los vértices a los que alcanza el vértice *vi*

d) Para G_5 calcula de forma razonada R(x), $x \in V_5$ a partir de los valores de los conjuntos $\Gamma^p(x)$

$R(x) = \Gamma^0(x) \cup \Gamma^1(x) \cup \ldots \Gamma^p(x)$, $p \leq n$, $\Gamma^0(x) = \{x\}$, $R(x) = \Gamma^0(x) \cup \Gamma^1(x) \cup \Gamma^2(x)$, $R(x) = \{x,y,z,t\}$.

e) Explica qué es un subgrafo conexo de un grafo y cómo se denominan. Busca todos los que tenga G_5

Como en la matriz R, R(x) = R(y) = R(z) = R(t) = {x,y,z,t}, G_3 es conexo y el mayor subgrafo conexo es el propio grafo G_3. A dicho subgrafo se le conoce como Componente Conexa del grafo.

Solución Ejercicio 3 Hoja 2

f) Explica cuándo un grafo no dirigido es euleriano y cuándo tiene un camino euleriano.

Un GND conexo G es euleriano si, y sólo si, no tiene vértices de grado impar. G tiene un camino euleriano si, y sólo si, tiene exactamente 2 vértices de grado impar.

g) Los resultados eulerianos que has definido en el apartado anterior ¿son válidos para todo GND? Según tu respuesta comprueba dichos conceptos para los grafos G_1, G_2, G_5, G_6

Sólo se aseguran dichos resultados para GND conexos.

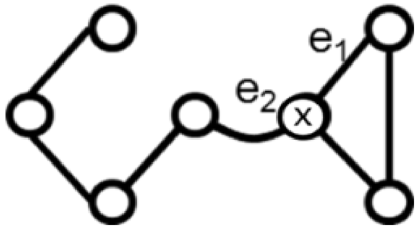
G1 es conexo, pero como no tiene arcos ni aristas no es euleriano ni tiene camino euleriano.

G2 no es conexo luego no se puede establecer que sea euleriano ni que tenga camino euleriano.

G3 es conexo, y como todos los vértices tienen grado impar no es euleriano ni tiene camino euleriano.

h) Al aplicar el algoritmo de Fleury en un GND en el que se está calculando un camino euleriano se llega a un vértice *x*, y se debe decidir la arista que debe pasar a formar parte de dicho camino ¿Puedes elegir cualquiera de las dos aristas propuestas? Explica..

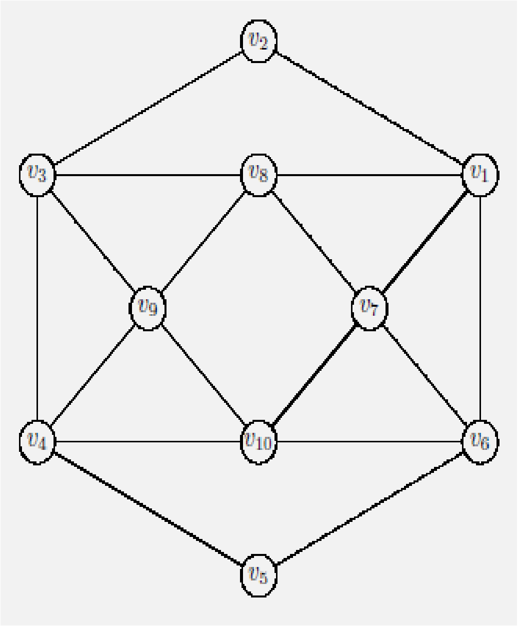
Se elige la arista e1 que no desconecta el grafo.



Problema del cartero chino (CPP)

Ejemplo 14.24

EJERCICIO propuesto



Se supone que el mapa que debe recorrer el cartero es el de la figura siguiente.

Demostrars si se puede obtener un TE o CE.

Como el grafo es GND, conexo y tiene todos los vértices de grado par entonces tiene al menos un TE.