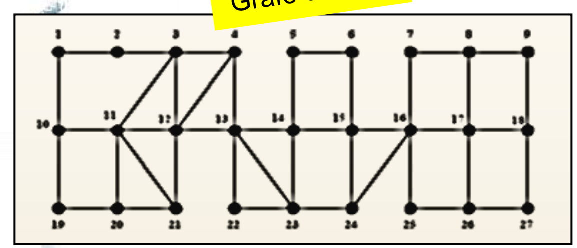
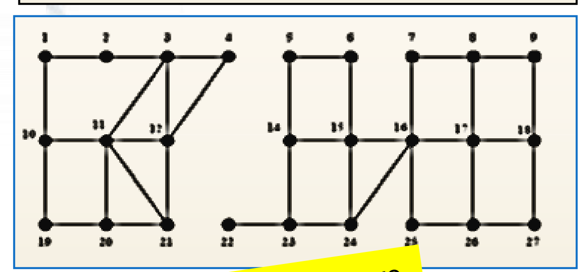
1. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRAFOS

1.3. GRAFOS CONEXOS

- Trayectorias en un grafo.
- Conexión en grafos no dirigidos.
- Vértices y aristas que cortan la conexión.
- Subgrafos conexos: componentes conexas.
- Conexión en grafos dirigidos.
- Ejercicios

Grafo conexo





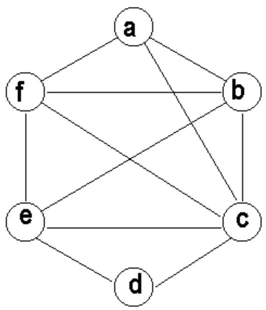
Grafo NO conexo

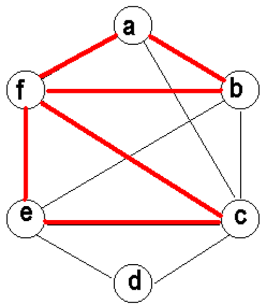
Existen problemas que se pueden resolver por medio de los caminos que se forman al recorrer un grafo como p..ej., los problemas de diseñar las rutas de distribución de un producto, de determinar los enlaces en una red de ordenadores, etc. Si desde cualquier vértice podemos encontrar un camino a todos los demás tendremos que todos los vértices están conectados y el grafo será un grafo conexo.
Precisamente ésta es una de las propiedades más importantes de las que puede gozar cualquier grafo .

Dedicaremos este tema al estudio de los grafos conexos.

Trayectorias en un grafo

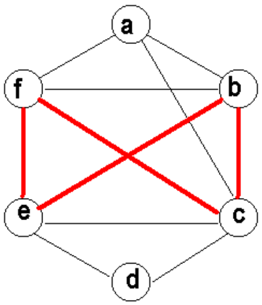
- Una **cadena** es una sucesión finita de vértices y aristas/arcos $W = v_0 e_1 v_1 \ldots e_k v_k$. Es cerrada cuando coinciden los vértices inicial y final.
- Una **cadena es simple** si una cadena con todas sus aristas/arcos distintas.
- Una cadena es un **camino** si es una cadena con todos sus vértices distintos.
- Un **ciclo** (circuito en GD) es una cadena simple cerrada con vértices internos distintos.
- La longitud de una cadena es el nº de aristas/arcos distintos que tiene.





C1: a,b,f,c,e,f,a es una cadena cerrada que no es camino ni ciclo.

La longitud de C1 es 6.



C2: b,c,f,e,b es una cadena cerrada y un ciclo.

La longitud de C2 es 4.

Conexión en grafos NO dirigidos

Sea un grafo no dirigido.

En un **GND** G = (V,E), $v_i, v_j \in V$ **un camino** es una secuencia de aristas que comienza en un vértice v_i y termina en otro distinto v_j sin repetir vértices internos. Cualquier camino se identifica por las aristas por las que pasa, pero si el grafo es simple es suficiente con poner sólo los vértices.

Def. El vértice v_i **alcanza** al vértice v_j si existe una cadena de v_i a v_j de cualquier longitud.

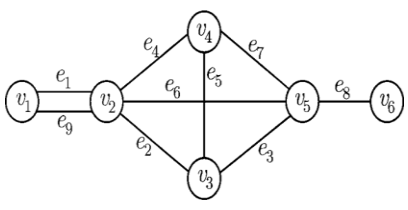
Todo vértice se alcanza a sí mismo con una cadena de longitud cero.

Como el grafo es no dirigido si v_i alcanza a v_j, es evidente, que v_j también alcanza a $v_{ji,}$ por lo que se dice que los vértices v_i y v_j están **conectados.**

Def. Un grafo no dirigido es **conexo** si todo par de vértices está conectado i.e., si existe un camino entre cada par de vértices distintos .

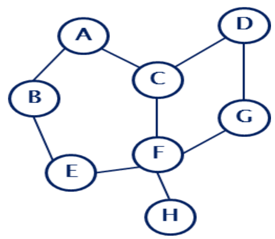
En el conjunto V de vértices de G se define la relación binaria de equivalencia **R**, donde **vRw** si *v* y *w* están conectados.

Grafo conexo

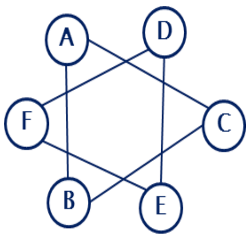


G_{12}

Grafo conexo



Grafo no conexo, p.ej., no hay camino entre los vértices A y D.



Conexión en grafos dirigidos

En un grafo dirigido G = (V,E), $v_i, v_j \in V$ un camino dirigido es una secuencia de arcos que comienza en un vértice v_i y termina en otro diferente v_j sin repetir vértices internos. Si el camino comienza y termina en el mismo vértice es un circuito.

Def. El vértice v_i **alcanza** al vértice v_j si existe un camino dirigido de v_i a v_j

Todo vértice se alcanza a sí mismo con un camino dirigido de longitud cero.

Def. El vértice v_i está **conectado** al vértice v_j si existe un camino dirigido de v_i a v_j y de v_j a v_i. Si todos los vértices están conectados, entonces el grafo dirigido es conexo.

Def. Un grafo GD es **debilmente conexo** si no es conexo pero su GND asociado sí lo es.

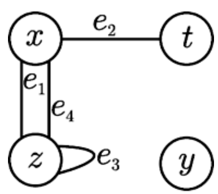
Grafo débilmente conexo.
Los vértices A y D alcanzan a F pero F no los alcanza a ellos

Grafo asociado es conexo

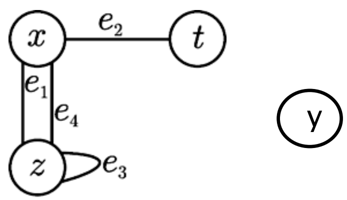
Grafos no conexos Un grafo no conexo está formado por *n* subgrafos conexos que se conocen como **componentes conexas** (CC).

Sabemos que un **subgrafo** de G es un grafo H = (V', E') tal que $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$.

- Una CC de G es el máximo subconjunto del conjunto de vértices $V' \subseteq V$ / para u, v $\in$ V' / existen caminos en G desde *u* hasta *v* y viceversa
- Una CC es cada uno de los elementos de la partición del conjunto de vértices determinada por la relación de equivalencia de conexión
- Las aristas de las CC de G son exactamente las aristas de G que inciden en estos vértices.
- Un grafo es conexo sí, y sólo si, posee una sola CC.



G_1

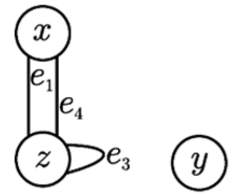


H_1 H_2

El grafo G_1 no es conexo, tiene dos CC definidas por los grafos

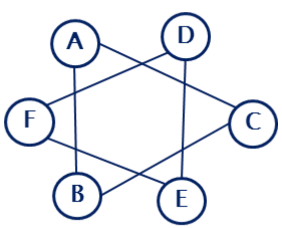
$H_1 = (V_1', E_1')$, $H_2 = (V_2'', E_2'')$,

$V_2' = \{x,z,t\}$, $V''_2 = \{y\}$

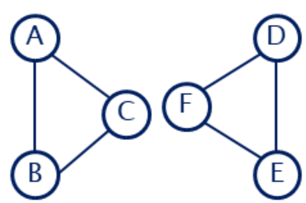


G_1'

>> *no todo subgrafo de un grafo es una CC del grafo. p.ej., El grafo G_1' es un subgrafo de G_1, pero no es una CC de G_1 ya que el vértice 'y' está desconectado de todos los vértices*



G_2



G_2' G_2''

El grafo G_2 tiene dos CC definidas por los grafos

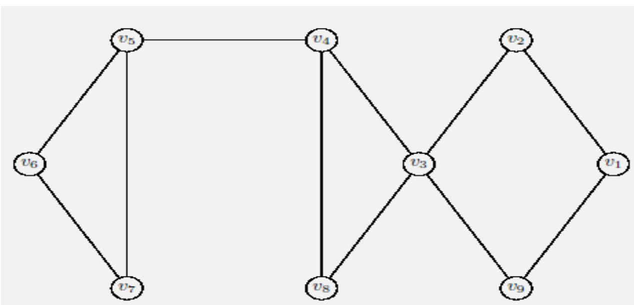
$G_2' = (V_2', E_2')$, $G_2'' = (V_2'', E_2'')$,

$V_2' = \{A,B,C\}$, $V_2'' = \{D,E,F\}$

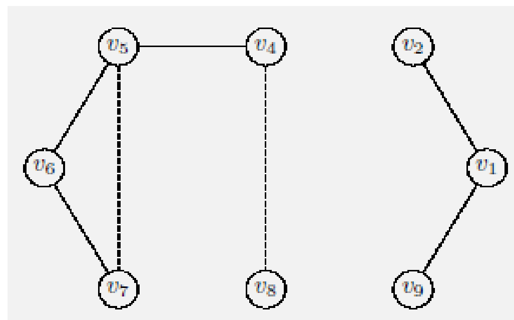
Vértices y aristas de corte A veces eliminar un vértice y todas las aristas incidentes con él hace que el grafo aumente de componentes conexas.

Def. Dado un grafo conexo G = (V, E) / v ∈ V. El vértice *v* es un **vértice de corte** cuando el subgrafo H = (V',E'), donde V' = V \ {v} y E' está formado por todas las aristas de E cuyos vértices están en V \ {v}, no es conexo.

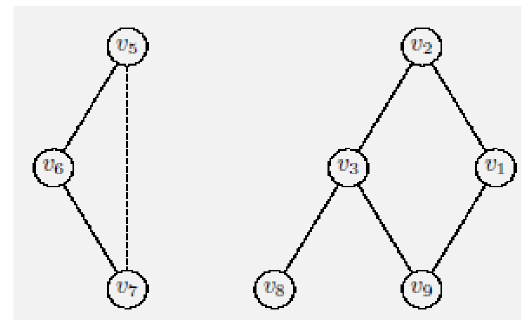
Def. Dado un grafo conexo G = (V, E) cualquier arista de E que hace que el grafo H = (V', E\{e}) no sea conexo, es una **arista de corte**.



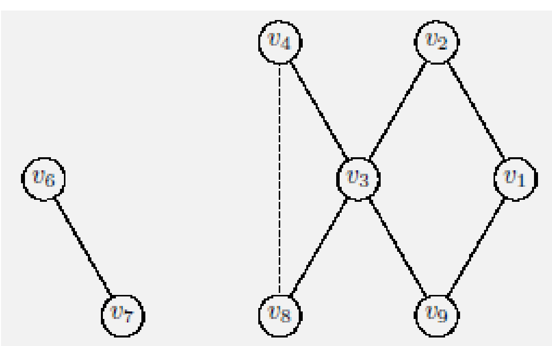
G



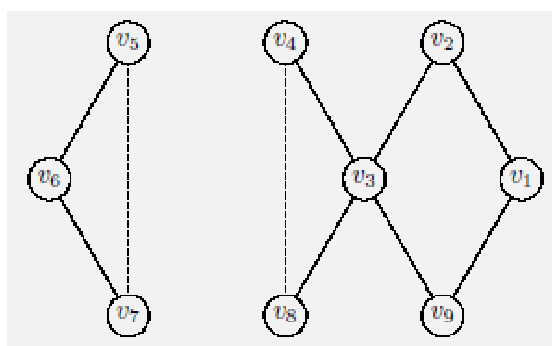
G_{v_3}



G_{v_4}



G_{v_5}



Puente

Vértices de corte: son los vértices v_3, v_4,v_5 ya que en los grafos Gv_3, Gv_4, Gv_5 existen vértices que no pueden conectarse a través de ningún camino, luego ninguno de los 3 es conexo.

Aristas de corte: la única que existe es la arista $\{v_4,v_5\}$ ya que al eliminarla el grafo resultante tiene vértices que no están conectados, no es conexo.

Puntos de Corte y Puentes

Cálculo de las componentes conexas Las CC de un grafo las calcularemos a partir de la matriz de accesibilidad R y de acceso Q

Def. Sea G = (V,E) un grafo con |V| = n. Se define la **matriz de accesibilidad $R = [r_{ij}]$** de G como la matriz de orden *n* siguiente:

$$R = [r_{ij}] \;/\; r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si } v_i \text{ alcanza a } v_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Dado V = {vi}, I=1,…n, R(Vi) denota el conjunto de vértices a los que alcanza vi.
- Los elementos de la diagonal de R son 1 ya que todo vértice se alcanza a sí mismo.
- Si $\Gamma(v)$ es el conjunto de vértices adyacentes a v, ie., el conjunto de vértices a los que v alcanza con una cadena de longitud 1, entonces,.
  - $\Gamma(\Gamma(v))$ será el conjunto de vértices a los que v alcanza con una cadena de longitud 2 y en general, .
  - $\Gamma^p(v)$ será el conjunto de vértices a los que alcanza *v* mediante una cadena de longitud *p.*

Con esto, cada fila i de la matriz R que se corresponde con cada vértice v_i (i=1,…n) del grafo, se calcula de la forma siguiente:

$$\mathbf{R(v_i) = \Gamma^0(v_i) \cup \Gamma(v_i) \cup \Gamma^2(v_i) \ldots \cup \Gamma^p(v_i)}, \quad \text{donde} \quad \Gamma^{p+1}(v_i) \subseteq \Gamma^0(v_i) \cup \Gamma(v_i) \cup \Gamma^2(v_i) \ldots \cup \Gamma^p(v_i), \; p \le n.$$

En el siguiente ejemplo, dada la matriz de adyacencia A de un grafo se calcula la matriz R teniendo en cuenta los conjuntos $\Gamma^p(v_i)$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los vértices en las filas de R coinciden con los de las filas de A.

Se calcula $R(v_1)$.

$\Gamma^0(v_1) = \{v_1\}$

$\Gamma^1(v_1) = \{v_2\}$

$\Gamma^2(v_1) = \Gamma(\Gamma(v_1)) = \Gamma(\{v_2\}) = \{v_1, v_3\}$

$\Gamma^3(v_1) = \Gamma(\Gamma^2(v_1)) = \Gamma(\{v_1,v_3\}) = \Gamma(v_1) \cup \Gamma(v_3) = \{v_2, v_4\}$

$\Gamma^4(v_1) = \Gamma(\Gamma^3(v_1)) = \Gamma(\{v_2,v_4\}) = \Gamma(v_2) \cup \Gamma(v_4) = \{v_2, v_4\}$

Como $\Gamma^4(v_1) \subseteq \Gamma^0(v_1) \cup \Gamma(v_1) \cup \Gamma^2(v_1) \cup \Gamma^3(v_1)$, entonces

$R(v_1) = \Gamma^0(v_1) \cup \Gamma(v_1) \cup \Gamma^2(v_1) \cup \Gamma^3(v_1) \cup \Gamma^4(v_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

De forma similar se calculan $R(v_2)$, $R(v_3)$, $R(v_4)$ y queda R:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Def. Sea G = (V,E) un grafo con |V| = n. Se define la **matriz de acceso Q = [q_{ij}]** de *G* como la matriz de orden *n* siguiente:

$$Q = [q_{ij}] \,/\, q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si } v_j \text{ alcanza a } v_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como Q(v_i) es el conjunto de vértices del grafo que alcanzan a v_i, su cálculo se realiza de la forma siguiente:

$\mathbf{Q(v_i) = \Gamma^0(vi) \cup \Gamma^{-1}(v_i) \cup \Gamma^{-2}(v_i) \ldots \cup \Gamma^{-p}(v_i)}$, $\Gamma^{-(p+1)}(v_i) \subseteq \Gamma^0(v_i) \cup \Gamma^{-1}(v_i) \cup \Gamma^{-2}(v_i) \ldots \cup \Gamma^{-p}(v_i)$, $p \leq n$

Por las definiciones de R y Q es evidente que **Q = R^T**

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Método y algoritmo para el cálculo de las componentes conexas

- Sea $G = (V,E)$ un grafo con $|V| = n$, R su matriz de accesibilidad y Q la matriz de acceso..
- La CC de un vértice v_i , $CC(v_i)$, estará formada por aquellos vértices a los que v_i alcanza, $R(v_i)$, y los vértices que lo alcanzan a él, $Q(v_i)$.
- Luego $CC(v_i) = R(v_i) \cap Q(v_i)$
- Cada vértice de G sólo puede pertenecer a una CC.
- G será conexo si el número de CC es 1.

Método para calcular las CC

- Elegir un vértice cualquiera $v \in V$.
- Calcular CC(v) aplicando algoritmo.
- Elegir vértice que no esté en CC(v) y calcular su CC.
- Repetir hasta finalizar los vértices de V.

Algoritmo

1. Inicializar $i \leftarrow 1$, $V^{(1)} = V$.
2. Tomar $v_{i\,\in} V^{(i)}$.
3. Calcular $R(v_i) \cap Q(v_i)$

   Hacer $V^{(i+1)} = V^{(i)} \sim R(v_i) \cap Q(v_i)$

   $i \leftarrow i + 1$
4. Si $V^{(1)} = 0 \rightarrow$ Stop

   en otro caso, volver a 2.

En el siguiente ejemplo se muestra cómo se calculan las CC de un grafo que tiene la siguiente matriz de accesibilidad R:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se elige un vértice cualquiera, por ejemplo, v_2 y se calcula su CC,

$CC(v_2) = R(v_2) \cap Q(v_2) = \{v_2,v_4\} \cap \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\} = \{v_2,v_4\}$

Se elige vértice, $v_{1,}$ que no esté en $CC(v_2)$ y se calcula $CC(v_1)$.

$CC(v_1) = R(v_1) \cap Q(v_1) = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\} \cap \{v_1,v_3,v_5\} = \{v_1,v_3,v_5\}$

Como todos los vértices están en alguna CC el proceso se termina.

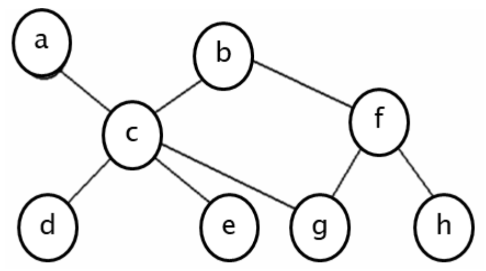
El grafo tiene 2 CC que son los subgrafos formados por los vértices $V_1 = \{v_2,v_4\}$, $V_2 = \{v_1,v_3,v_5\}$

EJERCICIOS

Ejercicio-1 Para los siguientes grafos escribe:, si es posible

a) Una cadena que no sea un camino y otra que sí lo sea, de longitud ≥ 3.

b) Un ciclo / circuito de longitud ≥ 3.

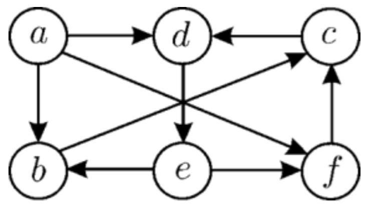


G_8

Grafo G_8

a) Cadena que no es camino, C1: 0 2 1 5 6 2, long(C1) = 5.
Camino, C2: 0 2 1 5 7, long(C2) = 4

b) Ciclo. C3: 2 1 5 6, long(C3) = 4

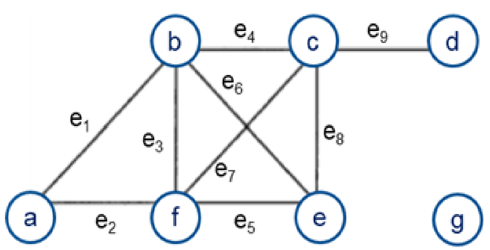


G_9

Grafo G_9

a) Cadena que no es camino, C1: a d e f c d, long(C1) = 5.
Camino, C2: a b c d, long(C2) = 3

b) Circuito. C3: e f c d e, long(C3) = 4



G_{10}

Grafo G_{10}

a) Cadena que no es camino, C1: a b e f a, long(C1) = 4.
Camino, C2: a b c d, long(C2) = 3

b) Circuito. C3: a b c e f a, long(C3) = 5

EJERCICIOS (la solución al final)

Ejercicio-2 Dado el grafo G=(V,E), V = {1,2,3,4,A,B}, E = {(1,A), (1,B), (2,B), (3,A), (4,A), (4,B)}.

a) Escribe los vértices a los que alcanza el vértice 1 y a los que alcanza el vértice A.

b) Indica la longitud de los caminos que resultan desde 1 y A a cada vértice a los que alcanzan.

Ejercicio-3 Para los grafos G y H escribe:

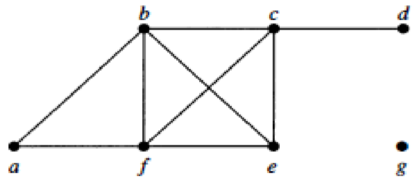
a) Vértices a los que alcanza el vértice *a* con una cadena de longitud 2.

b) Vértices conectados con el vértice *b.*

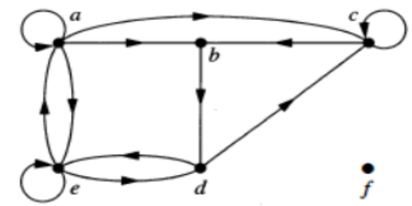
c) Un subgrafo.

d) Un subgrafo generador.

e) Un subgrafo conexo.



G



H

Ejercicio-4 Para los grafos G y H anteriores escribe:

a) Un camino de longitud 3.

b) Para el grafo G una cadena cerrada que comience en el vértice *d.*

c) Para el grafo H un ciclo que comience en el vértice *e* y que sea de máxima longitud.

Ejercicio-5 **Razona** si son ciertas o falsas estas afirmaciones.

a) Para que un recorrido sea un ciclo es suficiente que el camino empiece y termine en el mismo vértice.

b) Un bucle es un camino de longitud 1.

c) Todo camino es una cadena simple.

d) Toda cadena simple es un camino.

e) Toda cadena cerrada es una cadena simple.

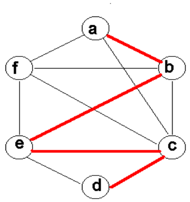
f) Toda cadena cerrada es una cadena simple.

EJERCICIOS (la solución al final)

Ejercicio-6 Da ejemplos de grafos con vértices *x, y, z* que cumplan las siguientes propiedades:

a) Hay un ciclo que utiliza los vértices *x*, *y*.

b) Hay un ciclo que utiliza los vértices *y, z*.



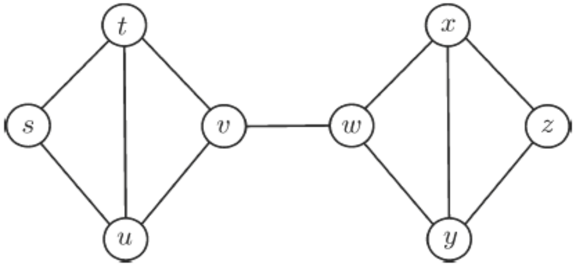
Ejercicio-7 La **cadena** C: a b e c d ¿Es simple? ¿Es un camino? ¿Es un ciclo? ¿Es cerrada? Razona cada respuesta.

Ejercicio-8

a) Escribe lo que significa que una cadena sea un camino.

b) Indica cuál de las siguientes sucesiones de vértices describen caminos:

stuvwxyz; tvwzyx; stus; tuss; vwvwvwv; wvustvw.



c) Escribe lo que significa que una cadena sea cerrada y que sea ciclo.

d) Indica, de las cadenas b) cuáles son cerradas y cuáles ciclos.

e) Escribe qué se entiende por longitud de una cadena.

f) Obtén, si es posible, dos ciclos de longitud impar.

g) Obtén los caminos de menor longitud que conecten los siguientes vértices, dando la longitud: s,v; s,z; u, y; v, w.

Ejercicio-9

a) Describe lo que es un subgrafo generador. Obtén uno para el grafo dado ¿Es único?

b) Da ejemplos de cadenas no simples y que no sean caminos.

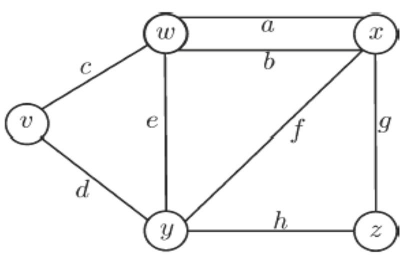
c) Da ejemplos de cadenas simples.

d) Da ejemplos de cadenas cerradas y de ciclos.

e) Escribe una condición necesaria para que un grafo sea conexo.

f) ¿El grafo es conexo? ¿Por qué?

g) Escribe la matriz de adyacencia A y la de incidencia M.



EJERCICIOS (la solución al final)

Ejercicio-10 Sea R la matriz de accesibilidad de un grafo G con vértices $V = \{v_i\}$ $i = 1,2,3,4$. Si las filas de R se corresponden con el orden de los vértices en V indica lo que representa la fila $R(v_1) = (1,1,0,0)$.

Ejercicio-11 Sea Q la matriz de acceso de un grafo G con vértices $V = \{v_i\}$ $i = 1,2,3,4$. Si las filas de Q se corresponden con el orden de los vértices en V indica lo que representa la fila $Q(v_1) = (1,1,1,0)$.

Ejercicio-12 Sea el grafo $G =(V,E)$, $V = \{1,2,3,4,5\}$, $E =\{(1,2), (1,3), (2,4), (3,5), (4,2), (5,1), (5,4)\}$.

a) Escribe la matriz de adyacencia A.

b) Escribe cómo se calcula la matriz R a partir de los conjuntos de adyacencia de un vértice.

c) Calcula la matriz de accesibilidad R a partir de los conjuntos de vértices adyacentes $\Gamma(v)$.

d) Estudia si el grafo G es conexo a partir del número de CC.

Ejercicio-13 Sea $G= (V,E)$ un grafo simple con $V = \{1,2,3,4,5\}$ y $E = \{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{3,2\}, \{4,5\} \}$.
Razona y describe las CC del grafo G indicando el conjunto de vértices y aristas de cada una.

EJERCICIOS (la solución al final)

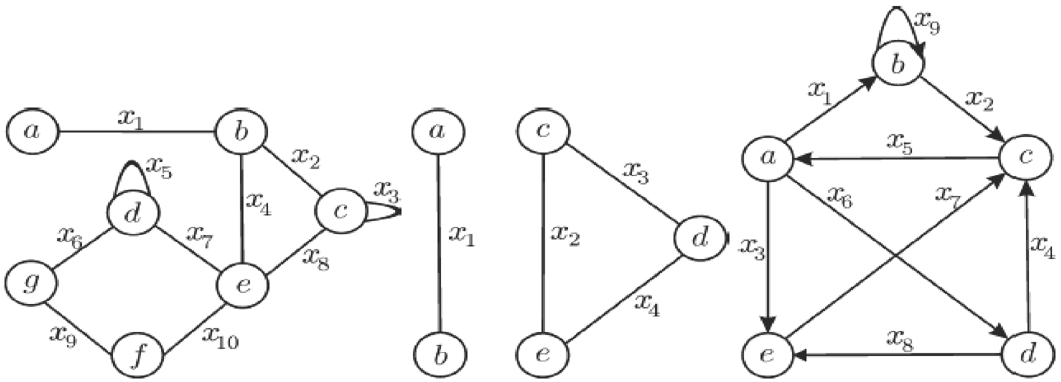
Ejercicio-14 La siguiente matriz de adyacencia A define un grafo G.

a) Calcula la matriz de accesibilidad R teniendo en cuenta la matriz A dada.

b) Estudia si el grafo G es conexo a partir del número de CC.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio-15 Estudia si los siguientes grafos son conexos a partir del estudio de sus componentes conexas.



Ejercicio-2 Dado el grafo G=(V,E), V = {1,2,3,4,A,B}, E = {(1,A), (1,B), (2,B), (3,A), (4,A), (4,B)}.

a) Escribe los vértices a los que alcanza el vértice 1 y a los que alcanza el vértice A.

b) Indica la longitud de los caminos que resultan desde 1 y A, a cada vértice a los que alcanzan.

Solución

a) El vértice 1 alcanza a los vértices 1, A y B. El vértice A sólo se alcanza a sí mismo.

b) Longitudes de los caminos: long(C_{11})=0; long(C_{1A})=1; long(C_{1B})=1.

Ejercicio-3 Para los grafos G y H escribe:

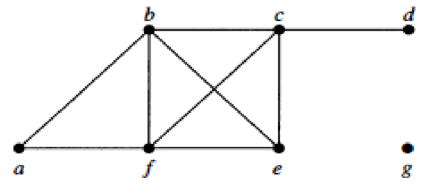
a) Vértices a los que alcanza el vértice *a* con una cadena de longitud 2.

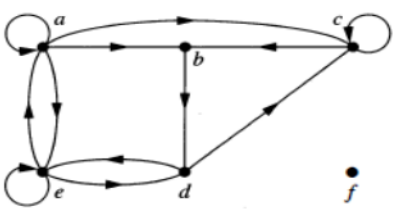
b) Vértices conectados con el vértice *b.*

c) Un subgrafo.

d) Un subgrafo generador.

e) Un subgrafo conexo.





Solución

a) Grafo G: Cadena desde *a* de longitud 2: a, b, c

Grafo H: Cadena desde *a* de longitud 2: a, e, d.

b) Vértices conectados con b: a, b, c, d, e.

c) Subgrafo de G: G1 =(V1,E1), V1 = {a,b}, E1 = {{a,b}}; Subgrafo de H: H2 =(V2,E2), V2 = {b,c,d}, E2 = {(c,b), (d,c)};

d) Subgrafo generador de G: G11 = (V11,E11), V11 = V1 ={a,b,c,d,e,f,g}; E11 = {{a,b}, {a,f}, {b,c}, {b,e}, {b,f}}

Subgrafo generador de H: H21 = (V21,E21), V21 = V2 ={a,b,c,d,e,f}; E21 ={(a,b),(a,c),(b,d)}

e) Un subgrafo conexo de G estaría formado por los vértices {a,b,f}

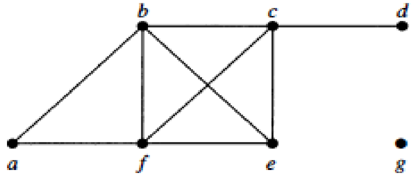
Un subgrafo conexo de H estaría formado por los vértices {b,c,d}

Ejercicio-4 Para los grafos G y H anteriores escribe:

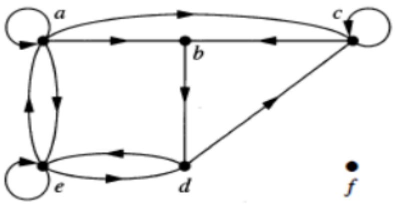
a) Un camino de longitud 3.

b) Para el grafo G una cadena cerrada que comience en el vértice *d.*

c) Para el grafo H un ciclo que comience en el vértice *e* y que sea de máxima longitud.



G



H

Solución

a) Grafo G: camino de longitud 3: b, c, e, f.

Grafo H: camino de longitud 3: e, d, c, b.

b) Grafo G: cadena cerrada que comienza en d: d, c, b, d.

c) Grafo H: ciclo que comience en el vértice e: e, a, c, b, d, e

Ejercicio-5 Razona si son ciertas o falsas estas afirmaciones*:*

a) Para que recorrido sea un ciclo es suficiente que el camino empiece y termine en el mismo vértice.

b) Todo bucle es un camino de longitud 1.

c) Todo camino es una cadena simple.

d) Toda cadena simple es un camino.

e) Toda cadena cerrada es una cadena simple.

f) Toda cadena cerrada es una cadena simple.

Solución

a) Falso ya que debe incluir la condición de que sus aristas sean distintas.

b) Cierto.

c) Cierto ya que todo camino al no repetir vértices tendrá también aristas distintas luego será cadena simple.

d) Falso. Una cadena simple puede repetir vértices y el camino no.

e) Falso. Una cadena cerrada es una sucesión de vértices y aristas en donde la única condición es que el vértice inicial y final coincidan y para que el recorrido sea una cadena simple es necesario que todas las aristas sean distintas.

f) Falso. La cadena simple exige que las aristas sean distintas algo que no se exige en una cadena cerrada.

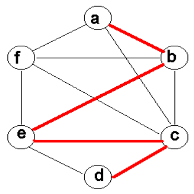
Ejercicio-6 Da ejemplos de grafos con vértices *x, y, z* que cumplan las siguientes propiedades:

a) Hay un ciclo que utiliza los vértices *x* , *y*.
b) Hay un ciclo que utiliza los vértices *y*, *z*.

Solución El grafo puede ser G = (V,E), V = {x,y,z}.

a) Ciclo que usa vértices *x* e *y,* el conjunto E puede ser: E = { {x,y} {z,y} {z,x} }.
b) Ciclo que usa vértices *y* e *z,* el conjunto E puede ser: E = { {x,y} {z,y} {z,x} }.

Ejercicio-7 La cadena C: a b e c d. a) ¿Es simple? b) ¿Es un camino? c) ¿Es un ciclo? d) ¿Es cerrada? Razona cada respuesta.



Solución

a) C es simple ya que tiene todas sus aristas distintas.
b) C es camino ya que tiene todos los vértices distintos.
c) C no es ciclo porque no es cerrada.
d) C no cerrada ya que el vértice inicial y final no coinciden.

Ejercicio-8

a) Escribe lo que significa que una cadena sea un camino.

b) Indica cuál de las siguientes sucesiones de vértices describen caminos:

stuvwxyz; tvwzyx; stus; tuss; vwvwvwv; wvustvw.

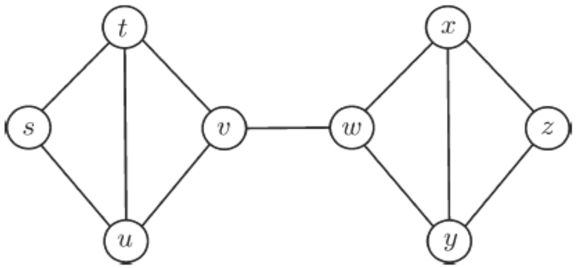
c) Escribe lo que significa que una cadena sea cerrada y que sea ciclo.

d) Indica, de las cadenas b) cuáles son cerradas y cuáles ciclos.

e) Escribe qué se entiende por longitud de una cadena.

f) Obtén, si es posible, dos ciclos de longitud impar.

g) Obtén los caminos de menor longitud que conecten los siguientes vértices, dando la longitud: s,v; s,z; u, y; v, w.



Solución

a) Un camino es una cadena con todos sus vértices distintos.

b) Sólo la cadena stuvwxyz es un camino.

c) Una cadena cerrada es una cadena de longitud no nula donde el vértice inicial y final coinciden Un ciclo es una cadena simple y cerrada con todos sus vértices distintos.

d) Son cadenas cerradas: stus; vwvwvwv; wvustvw; Sólo es ciclo la cadena: stus;

e) En un GND la longitud de una cadena es el número de aristas que contiene.

f) Ciclo-1: stus, Ciclo-2: zyxz ambos tiene longitud impar 3.

g) Camino que conecta el vértice *s* con *v* que sea de menor longitud: c1: suv, long(c1) = 2.

Camino que conecta el vértice *s* con *z* que sea de menor longitud: c2: suvwyz, long(c2) = 5.

Camino que conecta el vértice *u* con *y* que sea de menor longitud: c3: uvwy, long(c3) = 3.

Camino que conecta el vértice *v* con *w* que sea de menor longitud: c4: vw, ong(c4) = 1.

Ejercicio-9

a) Describe lo que es un subgrafo. Obtén uno para el grafo dado ¿Es único?

b) Da ejemplos de cadenas no simples y que no sean caminos.

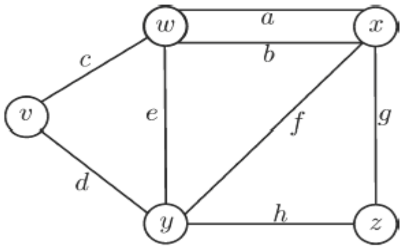
c) Da ejemplos de cadenas simples.

d) Da ejemplos de cadenas cerradas y de ciclos.

e) Escribe una condición necesaria para que un grafo sea conexo.

f) ¿El grafo es conexo? ¿Por qué?

g) Escribe la matriz de adyacencia A y la de incidencia M.



Solución

a) Sean los grafos G = (V,E) y H = (V',E'). H es subgrafo de G si V' $\subseteq$ V y E' $\subseteq$ E. Un subgrafo para el grafo dado sería, por ejemplo, V = {v,w,x} y E = {a,c,b}. Este subgrafo no es único ya que cualquier otro subconjunto del conjunto de vértices y aristas original daría lugar a otro subgrafo.

b) La cadena no debe ser simple luego repetirá aristas, y no debe ser camino luego repetirá vértices.

Ej: vcwaxbwey

c) Cadena simple: no repite aristas.

Ej: vcwaxbwey, vcwaxfy.

d) Cadena cerrada: cadena de longitud no nula donde el vértice inicial y final coinciden.

Ej: vcwaxbweydv, xfyhzgx

Ciclo: cadena simple cerrada con todos sus vértices distintos.

Ej: xfyhzgx, vcweydv

e) Para que un grafo sea conexo es necesario que sólo tenga una componente conexa

f) El grafo es conexo porque para todo par de vértices del grafo se verifica que ambos están conectados.

g) Matriz de adyacencia A = [0,1,1,0,0; 1,0,1,2,0; 1,1,0,1,1; 0,2,1,0,1; 0,0,1,1,0]

Matriz de incidencia B = [0,0,1,1,0,0,0,0; 1,1,1,0,1,0,0,0; 0,0,0,1,1,1,0,1; 1,1,0,0,0,1,1,0; 0,0,0,0,0,0,1,1]

Ejercicio-10 Sea R la matriz de accesibilidad de un grafo G con vértices $V = \{v_i\}$ $i = 1,2,3,4$. Si las filas de R se corresponden con el orden de los vértices en V indica lo que representa la fila $R(v_1) = (1,1,0,0)$.

Solución

La fila $R(v_1)$ indica los vértices a los que alcanza el vértice v_1 en este caso serían los vértices v_1,v_2

Ejercicio-11 Sea Q la matriz de acceso de un grafo G con vértices $V = \{v_i\}$ $i = 1,2,3,4$. Si las filas de Q se corresponden con el orden de los vértices en V indica lo que representa la fila $Q(v_1) = (1,1,1,0)$.

Solución

La fila $Q(v_1)$ indica los vértices que alcanzan al vértice v_1 en este caso serían los vértices v_1,v_2,v_3

SOLUCIONES

EJERCICIOS

Ejercicio-12 Sea el grafo G =(V,E), V = {1,2,3,4,5}, E ={(1,2), (1,3), (2,4), (3,5), (4,2), (5,1), (5,4)}.

a) Escribe la matriz de adyacencia A.

b) Escribe cómo se calcula la matriz R a partir de los conjuntos de adyacencia de un vértice.

c) Calcula la matriz de accesibilidad R a partir de los conjuntos de vértices adyacentes $\Gamma(v)$.

d) Estudia si el grafo G es conexo a partir del número de CC.

Solución

a) En la matriz A las filas se corresponden con el orden en que aparecen los vértices en V.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $R(v_i) = \{v_i\} \cup \Gamma(v_i) \cup \Gamma^2(v_i) \ldots \cup \Gamma^p(v_i)$, p ≤ , donde $\Gamma^{p+1}(v_i) \subseteq \{v_i\} \cup \Gamma(v_i) \cup \Gamma^2(v_i) \ldots \cup \Gamma^p(v_i)$

Los vértices en las filas de R coinciden con las filas de A.

Se calcula $R(v_1)$.

$\Gamma^0(v_1) = \{v_1\}$

$\Gamma^1(v_1) = \{v_2, v_3\}$

$\Gamma^2(v_1) = \Gamma(\Gamma(v_1)) = \Gamma(v_2) \cup \Gamma(v_3) = \{v_4, v_5\}$

$\Gamma^3(v_1) = \Gamma(\Gamma^2(v_1)) = \Gamma(\{v_4, v_5\}) = \Gamma(v_4) \cup \Gamma(v_5) = \{v_2, v_1, v_4\}$

$\Gamma^4(v_1) = \Gamma(\Gamma^3(v_1)) = \Gamma(v_2) \cup \Gamma(v_1) \cup \Gamma(v_4) = \{v_4, v_2, v_3\}$

Como $\Gamma^4(v_1) \subseteq \Gamma^0(v_1) \cup \Gamma(v_1) \cup \Gamma^2(v_1) \cup \Gamma^3(v_1)$, entonces

$R(v_1) = \Gamma^0(v_1) \cup \Gamma(v_1) \cup \Gamma^2(v_1) \cup \Gamma^3(v_1) \cup \Gamma^4(v_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

De forma similar se calculan las filas de R de los otros vértices.

c)
$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

d) La matriz de acceso $Q = R^T$. Se calculan las intersecciones $R(v_i) \cap Q(v_i)$.

$R(v_i) \cap Q(v_i) = (1,0,1,0,1)$, para i = 1,3,5; $R(v_i) \cap Q(v_i) = (0,1,0,1,0)$ para i = 2, 4.

El grafo G tiene 2 CC, una está formada por los vértices $\{v_1,v_3,v_5\}$ y otra por $\{v_2,v_4\}$.

El grafo G no es conexo ya que tiene dos componentes conexas.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio-13 Sea G= (V,E) un grafo simple con V = {1,2,3,4,5} y E = { {1,2}, {1,3}, {3,2}, {4,5} }.

Describe las CC del grafo G indicando el conjunto de vértices y aristas de cada una.

Solución

El grafo G tiene dos componentes conexas formadas por los vértices {1,2,3} y {4,5}.

Ejercicio-14 La siguiente matriz de adyacencia A define un grafo G.

a) Calcula la matriz de accesibilidad R teniendo en cuenta la matriz A dada.

b) Estudia si el grafo G es conexo a partir del número de CC.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución a) Se calcula la matriz R.

$\Gamma^0(v_1) = \{v_1\}$; $\Gamma^1(v_1) = \{v_2\}$; $\Gamma^2(v_1) = \Gamma(\Gamma(\{v_1\}) = \Gamma(\{v_2\}) = \{v_5\}$; $\Gamma^3(v_1) = \Gamma(\Gamma^2(v_1)) = \Gamma(\{v_5\}) = \{v_1\}$

$R(v_1) = \{v_1, v_2, v_5\}$

$\Gamma^0(v_2) = \{v_2\}$; $\Gamma^1(v_2) = \{v_5\}$; $\Gamma^2(v_2) = \Gamma(\Gamma(\{v_2\}) = \Gamma(\{v_5\}) = \{v_1\}$; $\Gamma^3(v_2) = \Gamma(\Gamma^2(v_2)) = \Gamma(\{v_1\}) = \{v_2\}$

$R(v_2) = \{v_1, v_2, v_5\}$

$\Gamma^0(v_3) = \{v_3\}$; $\Gamma^1(v_3) = \{v_4, v_5\}$; $\Gamma^2(v_3) = \Gamma(\Gamma(\{v_3\}) = \Gamma(\{v_4,v_5\}) = \{v_1,v_6\}$; $\Gamma^3(v_3) = \Gamma(\Gamma^2(v_3)) = \{v_2,v_1,v_3,v_5\}$

$R(v_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

$\Gamma^0(v_4) = \{v_4\}$; $\Gamma^1(v_4) = \{v_1, v_6\}$; $\Gamma^2(v_4) = \Gamma(\Gamma(\{v_4\}) = \Gamma(\{v_1,v_6\}) = \{v_2,v_1,v_3,v_5\}$; $\Gamma^3(v_4) = \Gamma(\{v_1,v_2,v_3,v_5\}) = \{v_2,v_5,v_4,v_1\}$

$R(v_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

$\Gamma^0(v_5) = \{v_5\}$; $\Gamma^1(v_5) = \{v_1\}$; $\Gamma^2(v_5) = \Gamma(\Gamma(\{v_5\}) = \Gamma(\{v_1\}) = \{v_2\}$; $\Gamma^3(v_5) = \Gamma(\Gamma^2(v_5)) = \Gamma(\{v_2\}) = \{v_5\}$

$R(v_5) = \{ v_1, v_2, v_5 \}$

$\Gamma^0(v_6) = \{v_6\}$; $\Gamma^1(v_6) = \{v_1, v_3, v_5\}$; $\Gamma^2(v_6) = \Gamma(\{v_1,v_3,v_5\}) = \{v_2,v_4,v_5,v_1\}$;

$R(v_6) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

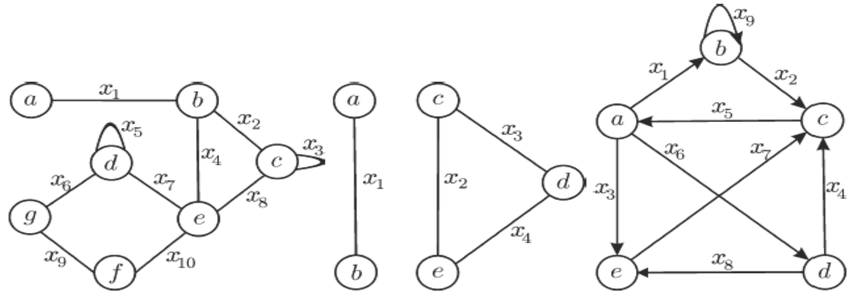
$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) El grafo G no es conexo ya que tiene dos componentes conexas definidas por los conjuntos de vértices: $\{v_1, v_2, v_5\}$ y $\{v_3, v_4, v_6\}$

SOLUCIONES

EJERCICIOS

Ejercicio-15 Estudia si los siguientes grafos son conexos a partir del estudio de sus componentes conexas.



Solución

El primer grafo tiene una única CC definida por el conjunto {a,b,c,d,e,f,g}, luego es conexo. El segundo grafo no es conexo ya que tiene dos CC definidas por los conjuntos de vértices {a,b} y {c,d,e}. El tercer grafo es conexo ya que tiene una única CC definida por {a,b,c,d,e}.

Matriz de accesibilidad para el primer grafo:

$\Gamma^0(a) = \{a\}$; $\Gamma^1(a) = \{b\}$; $\Gamma^2(a) = \Gamma(\Gamma(\{a\}) = \Gamma(b) = \{a,c, e\}$;

$\Gamma^3(a) = \Gamma(\Gamma^2(\{a\}) = \Gamma(a) \cup \Gamma(c) \cup \Gamma(e) = \{b, c, e, d, f\}$

$\Gamma^4(a) = \Gamma(b) \cup \Gamma(c) \cup \Gamma(e) \cup \Gamma(d) \cup \Gamma(f) = \{a,c,e,d,f,g\}$

R1(a) = {a,b,c,d,e,f,g}. Similar los demás vértices.

$R(v_i) \cap Q(v_i) = (1,1,1,1,1)$, i = 1,2,3,4,5

$$R1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad Q1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de accesibilidad para el segundo grafo:

$\Gamma^0(a) = \{a\}$; $\Gamma^1(a) = \{b\}$; $\Gamma^2(a) = \Gamma(\Gamma(\{a\}) = \Gamma(b) = \{a\}$;

$\Gamma^3(a) = \Gamma(\Gamma^2(\{a\}) = \Gamma(a) = \{b\}$

R2(a) = R2(b) = {a,b}

$\Gamma^0(c) = \{c\}$; $\Gamma^1(c) = \{d,e\}$; $\Gamma^2(c) = \Gamma(d) \cup \Gamma(e) = \{c,d,e\}$;

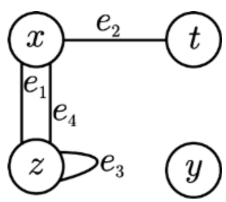
R2(c) = R2(d) = R2(e) = {c,d,e}

$R(v_i) \cap Q(v_i) = (1,1,0,0,0)$, i = 1,2

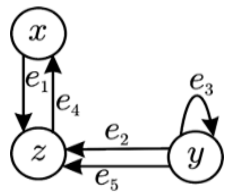
$R(v_i) \cap Q(v_i) = (0,0,1,1,1)$, i = 3,4,5

$$R2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad Q2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

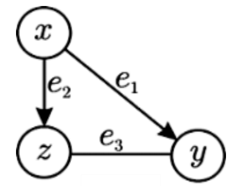
GRAFOS



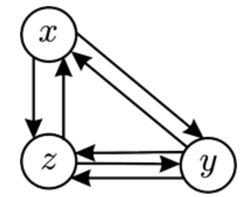
G_1



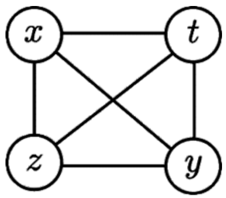
G_2



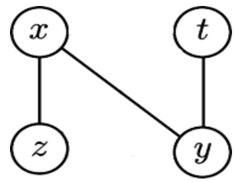
G_3



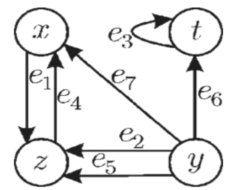
G_4



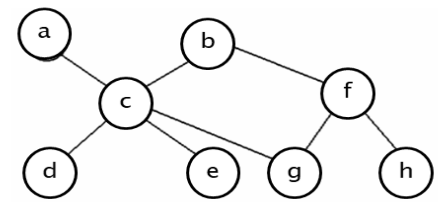
G_5



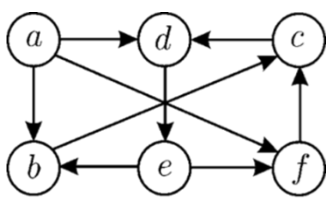
G_6



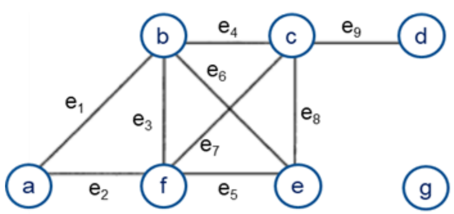
G_7



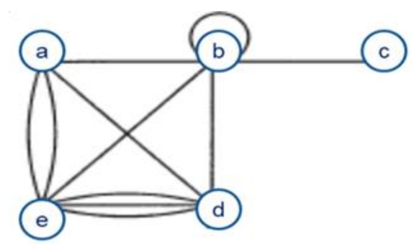
G_8



G_9



G_{10}



G_{11}