

---

# Introducción a la lógica

*Faraón Llorens Largo*

*Dpto. de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial*

LÓGICA (MATEMÁTICAS 1)  
Grado en Ingeniería Multimedia

Curso 2016-2017

Nuestra presuposición de partida es que el lector, y todos, sabemos ya de antemano una cantidad considerable de lógica. Si no fuera así, no podríamos siquiera hablar, menos aún manejarnos por el mundo. Así que nuestro primer objetivo es hacer ese conocimiento suyo explícito, sistemático y preciso.

Tom Tymoczko y Jim Henle, *Razón, dulce razón*

# 1. LÓGICA, RAZONAMIENTO Y COMPUTACIÓN

La *Lógica Formal* forma parte ya de la cultura de la sociedad de la información y su conocimiento es imprescindible para realizar un trabajo serio en muchas tareas científicas. En concreto, la formalización del conocimiento es un paso previo e indispensable para poder automatizar formas de razonamiento y su posterior aplicación a muchas áreas de la Informática, y fundamentalmente de la Inteligencia Artificial. Y la gran ventaja del formalismo lógico es que proporciona de manera inmediata un método muy potente para la obtención de nuevo conocimiento a partir del antiguo: la deducción matemática. Como escribe Robert Moore [Moore, 1995] “dos importantes convicciones que he conservado desde los primeros días son: 1) que la mayoría de formas superiores de conducta inteligente requieren la representación explícita de conocimiento, y 2) que la lógica formal constituye la piedra angular de la representación del conocimiento”. Otro aspecto interesante de la lógica, y que justificaría por sí solo su inclusión en el currículo de informática, es el paradigma de la Programación Lógica. Los lenguajes de programación lógica son una aplicación directa de los conceptos y mecanismos de la Lógica Formal.

El estudio de la historia de una determinada ciencia nos proporcionará una perspectiva global de la misma y su estructura general, así como la relación existente con otros campos del saber. Si se conoce cuál ha sido la evolución que ha sufrido una ciencia, se comprenderá mejor lo que se sabe de ella actualmente. No se debe olvidar que los conocimientos del momento surgieron como respuesta a problemas que se plantearon en su tiempo. Veamos por tanto la evolución que ha experimentado la lógica a lo largo de la historia para finalmente centrarnos en su estado actual y su papel en el desarrollo y aplicación de las nuevas tecnologías.

## 1.1. LA LÓGICA DESDE ARISTÓTELES

La Lógica se origina hace 2.500 años en la antigua Grecia. Aunque Sócrates y Platón fueron dos genios en el arte dialéctico, los principales logros en los estudios de la lógica como teoría de la inferencia se atribuyen a Aristóteles. Los Estoicos no sólo dominan el lenguaje de los conectores sino que cuentan con un sistema deductivo basado en cinco reglas de inferencia. Con ellos aparece la primera paradoja semántica “Todos los cretenses mienten”, que le fue atribuida al filósofo cretense Epiménides y que advierte que si es verdad que todos los cretenses mienten, como él es cretense también miente y por tanto la frase no es verdad. Así, se constituye en la antigüedad la lógica como ciencia dedicada a la identificación de formas humanas de razonamiento, con el objetivo de crear criterios de discernimiento de las verdades filosóficas, estudiando la construcción y el análisis de esquemas de argumentos. Esta concepción perdura durante la Edad Media y el Renacimiento. En el siglo XIII se producen intentos no-sistemáticos de mecanización del razonamiento (el *Ars Magna* de Llull). Pero es en el siglo XVIII cuando se inicia el camino de la formalización o matematización de la Lógica. En 1787 el filósofo alemán E. Kant llegó a decir que desde Aristóteles la lógica formal “no ha sido capaz de avanzar un sólo paso, y según todas las apariencias, es un cuerpo de doctrina cerrado y completo”. A la lógica formal, tal como venía siendo desde Aristóteles hasta Kant, se la ha llamado lógica tradicional.

## 1.2. LA IMAGEN MATEMÁTICA DE LA LÓGICA

En el siglo XVIII se inicia la gran evolución de la lógica como *ciencia de la cualidad*, con la incorporación a las técnicas de trabajo de ésta de la *exactitud* y el *rigor* matemático. A esta lógica se le llamará lógica simbólica o lógica matemática. Y para ello es necesario la definición de un lenguaje formal (artificial) y la utilización de unas reglas operacionales

precisas. En su *Calculus Ratiocinator* («cálculo ideológico»), G. W. Leibniz formula la Lógica como un cálculo de razones como base de sus teorías matemáticas, de manera que mediante un sistema de reglas se pueda operar con las ideas de modo exacto, de manera similar a como se hace con los números en matemáticas. Propone un esquema de asignación de números a conceptos y plantea su manipulación formal, pero choca con el problema de la interconexión de los conceptos, donde queda manifiesta la extraordinaria complejidad de realizar una formalización completa.

Sobre esta base se realizan, a mediados del siglo XIX, nuevas y decisivas aportaciones, principalmente por dos ilustres matemáticos, George Boole y Gottlob Frege. En efecto, los trabajos de De Morgan y la publicación en 1854 de *The Laws of Thought* (Las Leyes del Pensamiento) de Boole [Boole, 1854], suponen la primera propuesta de un cálculo algebraico de significados proposicionales bivalentes o *álgebra lógica*, que tienen el mismo rigor que las leyes del álgebra matemática. Esto es completado en 1879 por la *Begriffsschrift* (Conceptografía) de Frege [Frege, 1879] con la definición del cálculo de predicados (Lógica de Primer Orden) en la que plantea la construcción de una escritura artificial perfecta que permite la formalización de la lógica deductiva elemental.

Ya en el siglo XIX destaca la escritura simbólica de Peano. En 1902 Russell manifiesta a Frege la detección de una aparente contradicción en su teoría: “Sea R, el conjunto de los conjuntos que no pertenecen a sí mismos. ¿Pertenece R a sí mismo?”. Russell, Whitehead y North abordan este aspecto en su obra *Principia Mathematica*, donde se formula la teoría de tipos. En los años siguientes Brouwer y Hilbert fundan la escuela intuicionista y la escuela formalista, respectivamente, y plantean la axiomatización de las matemáticas; tenemos autores destacados como Wittgenstein y Lukasiewicz; Herbrand y Tarski desarrollan la semántica; Gentzen plantea la deducción natural; y el establecimiento de las teorías de computación de Emil Post y Alan Turing. En 1931 se publica el artículo, “*Sobre Cuestiones Formalmente Indecidibles de los Principia Mathematica y Sistemas Afines*”, escrito por Gödel [Gödel, 1931]. Este trabajo junto con el teorema de limitación de Church da al traste con los planteamientos axiomáticos de Hilbert y revoluciona los cimientos de la Lógica al identificar cuestiones no demostrables en los sistemas lógicos, tal como se plantea en el *teorema de incompletitud de la aritmética* (Teorema de Gödel). Este evento abre una etapa de desencanto, en cuanto a la Lógica se refiere, que se extiende hasta principios de los años 60 y durante la cual surgen las tablas semánticas de Beth y los hallazgos metalógicos de Henkin y Craig. Más relacionado con la computación, fue von Neumann quien introdujo el punto de vista formal y lógico en el diseño de la computación alrededor de 1945, lo que acabó conduciendo a la concepción del programa (“software”) como algo distinto del soporte material (“hardware”) y a la arquitectura actual de los computadores (con memoria y programas almacenables).

### 1.3. INCLUSIÓN EN LA TECNOLOGÍA

La Informática marcará y determinará la siguiente etapa de desarrollo de la Lógica. A finales de los 50 y principios de los 60 la aparición de ordenadores de 3ª generación y el nacimiento de la *Inteligencia Artificial* (I.A.) impulsan de forma definitiva el desarrollo de la Lógica, proporcionándole soporte para experimentación y multitud de nuevos problemas y aplicaciones. Investigadores como McCarthy, Sanuels, Shortliffe y Newell, entre otros, trabajan con modelos basados en la lógica para la resolución de problemas que hasta el momento eran resueltos por personas. El primer programa de I.A., desarrollado en 1956 por Newell, Simon y Shaw, es el *Logic Theoristic* y tiene por objetivo demostrar de forma automática algunos de los teoremas de los “*Principia Mathematica*”, para lo cual desarrolla y gestiona un árbol de búsqueda. Esta aportación abre un nuevo campo de investigación, la *deducción automática*, basado en la utilización y extensión de las teorías lógicas para la formulación de problemas dentro del límite de la indecidibilidad de la Lógica de Primer Orden. En 1965 Robinson formula el *principio de resolución con unificación* [Robinson, 1965] y en 1969 Green [Green, 1969] sienta las bases de las estrategias de optimización computacional de los procesos de resolución y propone algoritmos de extracción de

respuestas por resolución. En 1970, Colmerauer define el sistema Q [Colmerauer, 1970], embrión del lenguaje PROLOG [Colmerauer y otros, 1973].

A primeros de la década de los 80 la Lógica constituye una base en el desarrollo de técnicas informáticas, enfocadas principalmente en tres grandes líneas:

- Mientras aparecían los primeros atisbos de programación lógica, el replanteamiento motivado por la crisis del software desemboca, en la década de los 70, en la aparición de nuevas líneas de trabajo. Una de ellas es la *verificación de algoritmos* y tiene por objetivo el desarrollo de métodos de comprobación de la consistencia del programa con un conjunto de declaraciones lógicas (predicados) intercaladas que representan la forma de entender el problema. Esta línea se desarrolla de forma significativa durante los años 80 impulsada por los trabajos de y Dijkstra.
- Otra línea de trabajo en la que la Lógica tiene un gran protagonismo es en el desarrollo, durante los años 70, de los *sistemas expertos*. Se plantea el problema de la representación y proceso del conocimiento. La necesidad de incrementar la capacidad expresiva de la lógica clásica motiva la aparición y desarrollo de extensiones para la modelización del *razonamiento de "sentido común"*: Lógica Modal (Lukasiewicz, Lewis, Carnap y Kripke), Lógicas Polivalentes (Lukasiewicz, Rosser, Zadeh), Lógicas no-Monótonas, etc.
- El papel fundamental de la Lógica en los *modelos formales de computación* queda patente en el desarrollo, durante los 70 y los 80, de los lenguajes declarativos, y especialmente los *lenguajes lógicos*. A partir de la idea de que los elementos fundamentales de la programación son: el *programa*, la *interpretación* (semántica declarativa) y el *mecanismo de computación* (semántica operacional), se desarrollan los estilos de programación declarativa, siendo los principales los estilos funcional y lógico, éste último basado en lógicas de primer orden (fundamentalmente cláusulas de Horn) [Kowalski, 1974].

Durante los 80 toma cuerpo el desarrollo, liderado por Japón, de los lenguajes lógicos (y también funcionales) como base (lenguaje máquina) de las arquitecturas computacionales de 5ª generación, como alternativa a la arquitectura clásica de von Newman. La idea fundamental es producir máquinas adaptadas tanto a procesar *datos* como *conocimientos*. Aunque parece ser que este proyecto no ha llegado a ver la luz. Finalmente, en los años siguientes la programación declarativa, y en particular la lógica [Bruynooghe y otros, 1994], se ha desarrollado ampliamente tomando contacto con otros campos como son el Lenguaje Natural, las Bases de Datos (restricciones de integridad, bases de datos deductivas, etc.), o el Prototipado Automático (especificación de sistemas de información), combinación que está resultando ser muy productiva en la actualidad y cuyos resultados definirán el protagonismo futuro de la Lógica en la Informática [Handbook, 1992a].

## 1.4. LÓGICAS NO CLÁSICAS

Posiblemente el rasgo más destacable del estado actual de la lógica sea la existencia y proliferación de las llamadas *Lógicas No Clásicas*, surgidas como respuesta a la aplicación de la lógica a los problemas de la Inteligencia Artificial para la representación del conocimiento [Handbook, 1993d]. Se trata de sistemas lógicos que difieren en una o más cualidades de la lógica clásica. Las características que asumimos en los sistemas lógicos clásicos serían, entre otras:

- los enunciados están provistos de un valor de verdad
- dichos valores de verdad son únicamente dos : *verdadero* o *falso*
- no existen matizaciones entre estos valores
- las conexiones entre enunciados dan lugar a enunciados compuestos cuyo valor de verdad está completamente en función de los valores de verdad de los enunciados conectados

Resumiendo podemos decir que la lógica clásica es *apofántica bivalente asertórica y extensional*. Con respecto a estas características, y en contraposición a la lógica normal, van surgiendo distintas *lógicas desviadas o divergentes*:

<i>Polivalente</i>	Lukasiewicz, Post, Rosser	Cuestionan el principio de bivalencia. Tenemos lógicas finitamente polivalentes (trivalente, ...) e infinitamente polivalentes.
<i>Difusa</i> ("fuzzy")	Zadeh	Se trata de una lógica polivalente que trata el tema de la vaguedad (ambigüedad, imprecisión, carácter borroso de ciertos términos, ...).
<i>Probabilística</i>	Bacchus, Pearl	Aplicación de las probabilidades y el conocimiento estadístico a sistemas formales de razonamiento y representación del conocimiento.
<i>No monótonas</i>	McDermott, McCarthy	La obtención de nueva información puede llevarnos a revisar y/o cambiar creencias anteriores.
<i>Temporal</i>	Gardies, Allen, McDermott	Reconoce la existencia de esquemas de inferencia específicamente temporales, donde una misma sentencia puede tener diferente valor de verdad en diferentes momentos.
<i>Modal</i>	Lewis, Carnap, Kripke	Incorpora matices a la valoración de verdad de los enunciados, admitiendo modalidades de esa verdad: necesario, posible, imposible, ...
<i>Deóntica</i>	Wright	Se puede considerar una rama de la Lógica Modal. Se ocuparía de las relaciones de inferencia entre normas, es decir, entre proposiciones prescriptivas (obligatorias).
<i>Intuicionista</i>	Heyting, Dummett	
<i>Combinatoria</i>	Curry	
<i>Epistémica</i>	Hintikka	
...	...	

## 2. ENSEÑANZA DE LA LÓGICA

### 2.1. PRINCIPIOS PARA LA ENSEÑANZA DE LA LÓGICA

La Lógica se ha convertido en uno de los fundamentos matemáticos y en una base formal indispensable en todo informático. La formalización del conocimiento y la automatización de las formas de razonamiento son primordiales en muchas áreas de la Informática. La importancia de la Lógica en los currículos de Informática va tomando cuerpo propio debido a sus aplicaciones en contextos específicos tales como la Programación, la Ingeniería del

Software, el Diseño de Sistemas de Bases de Datos y la Inteligencia Artificial [Bender, 1996], [Russell y Norving, 1996], [Bratko, 1990]. En los últimos años han ido surgiendo libros de texto de lógica escritos específicamente para estudiantes de Ingeniería Informática, que abordan la Lógica desde una perspectiva de aplicación a la computación [Nerode y Shore, 1997], [Grassmann y Tremblay, 1997], [Arenas, 1996], [Reeves y Clarke, 1993], [Cuenca, 1985]. Por todo ello, el programa de la asignatura va más allá de la Lógica Formal o Matemática para adentrarse en los aspectos de la *Resolución Automática de Teoremas* y la *Programación Lógica*.

Empleada como un lenguaje para comunicarse con los ordenadores, la lógica representa un formalismo de nivel superior y más orientado a la persona que otros lenguajes de programación clásicos, y por ello se ha convertido en el pilar de una nueva generación de lenguajes de programación: la *Programación Lógica* [Dodd, 1990]. Este paradigma de programación justificaría por sí solo la inclusión de la Lógica en el currículo de Informática. En la parte práctica de la asignatura se estudiará *Prolog* ("PROgramation en LOGique") [Sterling y Shapiro, 1994], [O'Keefe, 1990], [Giannesini y otros, 1989], [Clocksin y Mellish, 1987], el más extendido de los lenguajes de programación lógica basado en el cálculo de predicados de primer orden y ampliamente utilizado en investigaciones de Inteligencia Artificial [Kowalski, 1986]. La idea central la podemos resumir utilizando la conocida ecuación de Kowalski *algoritmo=lógica+control*, de manera que el control (estrategia para encontrar la solución) lo dejamos en manos de la máquina y sólo debemos preocuparnos de la lógica (información acerca del problema).

Por otro lado, la enseñanza de la lógica puede ser divertida y no tiene porqué ser estirada, aburrida y sólo para iniciados; tiene muchos aspectos lúdicos que harán más interesantes nuestras clases. Ludwig Wittgenstein, filósofo austriaco, escribió que "podría escribirse una obra filosófica buena y sería compuesta enteramente por chistes". Si se entiende el chiste se entenderá el argumento implícito en él. Para ello se pueden consultar una serie de *pequeños* libros escritos por *grandes* autores [Carroll, 1988], [Gardner, 1989], [Paulos, 1994], [Smullyan, 1991], con un claro carácter lúdico y recreativo pero que son mucho más que simples amenidades, y que pueden llevarnos hasta nociones muy profundas. Al final de cada tema hemos incluido una sección que hemos titulado "La Lógica en la Vida" que presenta actividades entresacadas de este tipo de libros y relacionadas con el tema en cuestión. Libros como *Razón, dulce razón* [Tymoczko y Henle, 2002] al mismo tiempo que describen los fundamentos básicos de la lógica formal e informal, sitúan al estudiante en el mundo real haciéndole disfrutar, entreteniéndole y sorprendiéndole con la lógica.

## 2.2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL CONOCIMIENTO

La visualización es importante debido a su fuerza expresiva y nos sirve para alcanzar cierta comprensión acerca del contenido. Recurriremos a la representación gráfica para organizar de forma espacial los conceptos de un determinado dominio o ámbito del conocimiento científico. En Inteligencia Artificial se desarrollaron las *redes semánticas* [Quillian, 1968] como representación formal del conocimiento inspiradas en la memoria humana y planteadas como un modelo asociativo basado en redes, de forma que el significado de un concepto depende del modo en que se encuentre conectado con otros conceptos. Una red semántica consiste en entidades y relaciones entre estas entidades, y las representaremos como un grafo dirigido donde los nodos simbolizan conceptos y los arcos las relaciones de diverso tipo existentes entre los conceptos que conectan.

También las disciplinas cognitivas, en el ámbito pedagógico, emplean este tipo de representaciones para describir la organización del conocimiento, dándoles el nombre de *mapas conceptuales*. Los mapas conceptuales hacen su aparición en el ámbito de la didáctica de las disciplinas científicas de la mano de Novak [Novak y Gowin, 1984]. Propone el uso de una herramienta que llama "concept map" y que define como "un dispositivo esquemático que representa un conjunto de significados conceptuales incluidos en una estructura de

proposiciones". Novak considera estos mapas como auténticas *herramientas metacognitivas*, que permiten visualizar la articulación de los conceptos y expresar los elementos conocidos acerca de un tópico para, a partir de ahí, desarrollar estrategias de profundización.

Al igual que en las redes semánticas, en los mapas conceptuales los *conceptos* son representados por nodos (gráficamente en forma de círculos o cajas) y las *relaciones* entre ellos por arcos etiquetados que conectan ambos conceptos. Las etiquetas especifican dichas relaciones y, habitualmente, vienen dadas por verbos encargados de su descripción y frases simplificadas. Los conceptos son representados jerárquicamente, desde los conceptos más generales en la parte alta del mapa conceptual a los más específicos en la parte baja. Cuando las palabras seleccionadas para representar los conceptos y las relaciones se escogen cuidadosamente, los mapas conceptuales pueden ser herramientas muy útiles para observar matices de significado, ayudado a los estudiantes a organizar sus pensamientos y resumir áreas de estudio.

Para elaborar los mapas conceptuales se puede utilizar el artículo "The Theory Underlying Concept Maps and How To Construct Them" de Joseph D. Novak (Cornell University) [Novak, 2002] y la aplicación *Concept Map Software. A knowledge construction toolkit* [IHMC, 2002] del *Institute for Human and Machine Cognition* (<http://www.coginst.uwf.edu>) de la Universidad de West Florida (USA) con la participación del Doctor J. D. Novak. El programa permite a los usuarios construir, navegar, compartir y criticar modelos de conocimiento representados en Mapas Conceptuales. La herramienta es independiente de la plataforma y se puede utilizar en red, permitiendo a los usuarios construir y colaborar durante la construcción de los mapas conceptuales con colegas conectados en red, así como compartir y navegar a través de modelos de otros autores distribuidos en servidores en Internet. Se pueden enlazar los conceptos con recursos multimedia (vídeo, imágenes, sonido, mapas, sede web etc.) y permite la publicación de los mapas en diversos servidores y su exportación a la Web. Está escrito en Java y puede ser ejecutado bajo Windows, Macintosh, UNIX, etc. Por medio de una arquitectura flexible, la herramienta permite al usuario instalar únicamente las funcionalidades requeridas en ese momento, añadiendo más módulos cuando sean necesarios o conforme se vayan desarrollando nuevos con funcionalidades adicionales.

## 2.3. LOS JUEGOS

Es cosa notoria que el juego potencia el aprendizaje y suscita la curiosidad. Los juegos pueden convertirse en una herramienta docente. Es habitual encontrar secciones de juegos matemáticos en revistas científicas de divulgación. Penrose ha escrito que su pensamiento matemático se organiza en forma visual, diagramático y no verbal, muy similar a los juegos. En el caso que aquí nos ocupa, la enseñanza de la Lógica no tiene por qué ser aburrida. Todos recordamos las novelas de Sherlock Holmes o Hercules Poirot, y cómo sus mentes lógicas y deductivas eran capaces de realizar hábiles razonamientos para descubrir a los culpables a partir de pequeños indicios. Los juegos necesitan lógica para su resolución [Llorens y otros, 2001]. Las paradojas parecen engaños mágicos que "desafían la capacidad de razonamiento y la intuición del lector" pero "mucho podemos aprender de las paradojas; al igual que los buenos trucos de ilusionismo, nos causan tanto asombro que inmediatamente queremos saber cómo se han hecho" [Gardner, 1989]. Los esfuerzos por resolver las paradojas lógicas clásicas han sido motor del avance de la lógica. Los trucos lógicos, los acertijos sobre mentirosos y veraces, los rompecabezas ("puzzles") ayudan a ejercitar la destreza mental [Smullyan, 1995].

## 2.4. PROGRAMAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA LÓGICA

En los últimos años ha habido un creciente interés por la lógica desde el campo de la informática, ya que ésta aporta un método formal para la gestión del conocimiento (tanto en

el aspecto de representación como de razonamiento). Como contrapartida, los informáticos han desarrollado distintos programas que ayudan a los estudiantes a adquirir estas técnicas formales [Goldson, Reeves, y Bornat, 1993]. Los ordenadores nos proporcionan una excelente herramienta para entender, de forma práctica, algunas de las nociones fundamentales de la lógica así como la forma de representar y razonar [Barwise y Etchemendy, 1998]. En junio de 2000 tuvo lugar en la Universidad de Salamanca el *First International Congress on Tools for Teaching Logic* [TTL, 2000], donde se puede encontrar una panorámica de los programas y herramientas software existentes para la enseñanza de la lógica.

Los trabajos pioneros y más representativos son los llevados a cabo por Jon Barwise y John Etchemendy [Barwise y Etchemendy, 2000] del “Center for the Study of Language and Information” (CSLI) de la Universidad de Stanford y por los que recibieron en 1997 la Educom Medal. Presentan una nueva aproximación pedagógica a la enseñanza de la Lógica de Primer Orden que tiene sus precedentes en los libros “The Language of First Order Logic” [Barwise] y “Hyperproof” [Barwise], que partiendo de las ventajas que nos proporcionan los programas Tarski’s World, Fitch y Boole trabajan los distintos conceptos de la lógica. Su gran interés radica en que los estudiantes aprenden mejor lógica a través de los problemas, y la mejor manera de aprender un lenguaje es utilizándolo directamente. *Tarski’s World* proporciona un entorno de manera que podemos construir mundos tridimensionales de bloques y describirlos en el lenguaje simbólico de la lógica de primer orden, utilizando y practicando el lenguaje de la lógica de primer orden de la misma manera que usamos el lenguaje natural. *Fitch* ayuda a los estudiantes a construir pruebas usando el estilo de deducción natural, comprobando la demostración, respondiendo si es correcta y si no lo es indicando los pasos erróneos. *Boole* permite construir tablas de verdad. Además se acompaña del programa *Submit* que permite entregar los ejercicios accediendo al “Grade Grinder”, un servicio de corrección de ejercicios a través de internet.

En el departamento de Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial, los profesores responsables de las asignaturas relacionadas con la lógica ([logica@dccia.ua.es](mailto:logica@dccia.ua.es)) hemos ido diseñando y realizando, con la ayuda de estudiantes de ingeniería informática, a través de proyectos finales de carrera o trabajos en las distintas asignaturas, herramientas didácticas de apoyo para la enseñanza/aprendizaje de la lógica (<http://www.dccia.ua.es/logica>). Una de ellas es el programa MyC (*Moros y Cristianos*), que está basado en el programa Tarski’s World. Otra es el *Asistente para Deducción Natural* (ADN), que supervisa las demostraciones que realizamos utilizando la técnica de la deducción natural y nos da pistas de los pasos posibles a seguir ([Llorens y Mira, 2000a], [Llorens y Mira, 2000b] y [Llorens y Mira, 2002]).

### 3. REFERENCIAS DOCUMENTALES

La información bibliográfica se puede presentar en multitud de formatos, tanto impresos como electrónicos: libros, revistas científicas y técnicas, actas de congresos, informes técnicos, etc. El mejor lugar para empezar la búsqueda bibliográfica es la Biblioteca de la Universidad. Aunque en los últimos tiempos Internet se ha convertido en una valiosa fuente de información, debemos ser cautos al hacer uso de la información recogida en la red, ya que podemos encontrar tanto información de gran valor como información poco fiable. Se ha definido a la búsqueda bibliográfica como la “recopilación sistemática de la información publicada relacionada con un tema”. Destacar de esta definición los términos *sistemática* (desde una perspectiva estructurada y profesional y no leer todo lo que caiga en nuestras manos) y *publicada* (reconocida y revisada por expertos). Hay que ser selectivo y centrarse en las referencias documentales adecuadas y relevantes para nuestro trabajo. A continuación presento los libros de texto sobre lógica que más me gustan y que pueden servir de ayuda a los estudiantes. Todos ellos se encuentran disponibles en la Biblioteca de la Escuela Politécnica Superior de la Universidad de Alicante. Los he separado en dos niveles, bibliografía básica y bibliografía complementaria.



### 3.1. BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

[Barwise y Etchemendy, 2000]

***Language, Proof and Logic***

Jon Barwise y John Etchemendy

En colaboración con Gerard Allwein, Dave Barker-Plummer y Albert Liu

Seven Bridges Press y CSLI Publications, 2000

Consiste en un libro de texto y un paquete de software completo que proporciona una introducción autocontenida a los conceptos básicos de la lógica: lenguaje, verdad, argumento, consecuencia, prueba y contraejemplo. El texto no asume conocimientos previos sobre lógica y puede servir para un curso introductorio y un segundo curso sobre lógica. El libro presenta una nueva aproximación a la enseñanza de la Lógica de Primer Orden que tiene sus precedentes en los libros “The Language of First Order Logic” y “Hyperproof”, que partiendo de las ventajas que nos proporcionan los programas que vienen en el CD-ROM que acompaña al libro (Tarski’s World, Fitch, Boole y Submit) se trabajan los distintos conceptos de la lógica. Su gran interés radica en que los estudiantes aprenden mejor lógica a través de los problemas, y la mejor manera de aprender un lenguaje es utilizándolo directamente: *Tarski’s World* proporciona un entorno de manera que podemos utilizar y practicar el lenguaje de la lógica de primer orden de la misma manera que usamos el lenguaje natural; *Fitch* ayuda a los estudiantes a construir pruebas usando el estilo de deducción natural, comprobando la demostración, respondiendo si es correcta y si no lo es indicando los pasos erróneos; *Boole* permite construir tablas de verdad; *Submit* permite entregar los ejercicios accediendo al “Grade Grinder”, un servicio de corrección de ejercicios a través de internet.

[Clocksin y Mellish, 1987]

***Programación en Prolog***

W. F. Clocksin y C. S. Mellish

Ed. Gustavo Gili. 1987

Desde la primera publicación del libro original *Programming in Prolog* en 1981, Prolog ha experimentado un inesperado auge en el mundo de la informática. Este libro de texto se ha convertido en un clásico de Prolog y en un libro de obligada referencia al tratar el tema de la programación en Prolog. Se ha etiquetado al Prolog descrito en este libro como el estándar de Edimburgo. Los autores se centran en la enseñanza del núcleo de Prolog, ajustándose todos los ejemplos a este estándar, ejemplos que funcionarán sobre la mayor parte de las implementaciones reales de Prolog.

[Giannesini, Kanoui, Pasero, y van Caneghem, 1989]

***Prolog***

Françis Giannesini, Henry Kanoui, Robert Pasero y Michel van Caneghem

Addison-Wesley Iberoamericana, 1989

Prolog (PROgramming in LOGic) fue desarrollado en 1972 por Alain Colmerauer y otros miembros del Grupo de Inteligencia Artificial de Marsella. Este libro reúne la experiencia del grupo de Marsella en la implantación y enseñanza de Prolog. El prefacio es de Alain Colmerauer y la traducción de José Cuena y Ana M<sup>a</sup> García de la Universidad Politécnica de Madrid. Es un libro con abundantes ejemplos, ejercicios y problemas (con soluciones). Como dicen los autores en la introducción, “este lenguaje es, a la vez, fácil y difícil”: en poco tiempo se pueden escribir programas con resultados espectaculares, pero elaborar programas complejos requiere un dominio conceptual del lenguaje laborioso de adquirir. Este libro puede contribuir como guía, ya que en un lenguaje muy claro transmite la experiencia de los autores en la *buena* programación en Prolog. La primera parte del libro presenta los conceptos y

mecanismos básicos de la programación en Prolog, refinando gradualmente un programa, mostrando así los principios de un buen estilo de programación lógica. La segunda parte del texto se dedica a las principales aplicaciones de Prolog: escritura de compiladores, comprensión de lenguajes naturales, bases de datos y sistemas expertos.

[Llorens y Castel, 1998]

*Lògica de Primer Ordre* (Col.lecció Joan Fuster nº 5)

Faraón Llorens y M<sup>a</sup> Jesús Castel

Secretariat de Normalització Lingüística, Universitat d' Alacant, 1998

[Llorens y Castel, 1999]

*Lógica de Primer Orden*

Faraón Llorens y M<sup>a</sup> Jesús Castel

Dpto. Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial, Univ. de Alicante, 1999

Se puede descargar desde: <http://hdl.handle.net/10045/57966>

Libro surgido de los apuntes de la asignatura *Lógica de Primer Orden* para los estudios de Ingeniería Informática impartidos en la Escuela Politécnica Superior de la Universidad de Alicante. Escrito por los profesores de dicha asignatura, no pretende ser un estudio exhaustivo y excesivamente formal de la Lógica de Primer Orden, si no más bien se le ha querido dotar de un carácter didáctico y, en lo posible, ameno, y sobre todo se han resaltado aquellos aspectos de la Lógica que puedan ser interesantes desde el punto de vista de la Informática, y que puedan servir de base para otras materias de la carrera. Por ello, se ha estado más interesado en mostrar la utilidad y aplicación de la lógica que en la formalización matemática de la misma, evitando las largas demostraciones de teoremas. El libro está estructurado, al igual que la asignatura, en 9 capítulos y un anexo de Prolog.

[Reeves y Clarke, 1993]

*Logic for Computer Science*

Steve Reeves y Michael Clarke

Ed. Addison-Wesley, 1990

Este libro esta escrito dirigido a estudiantes de informática y la mayoría del material ha sido experimentado por los autores en cursos iniciales de Informática. El objetivo básico es proporcionar una base lógica necesaria para razonar acerca de los programas de ordenadores y de como aplicar la lógica a campos como la Inteligencia Artificial. Según los autores, la actividad de construir y razonar sobre programas no difiere de la actividad de construir y razonar sobre demostraciones. La estructura del libro es la habitual, con un capítulo introductorio, uno dedicado al cálculo de proposiciones, otro al cálculo de predicados y uno a la deducción natural. Destacar la presencia de un capítulo dedicado a las tablas semánticas ("Semantic Tableaux"). A lo largo del libro se muestran ejemplos y programas en Prolog que ayudan a afianzar los conceptos y a comprender mejor los algoritmos. Aparte de estos conceptos básicos de la lógica de primer orden, incluye un capítulo sobre programación lógica y otro dedicado a lógicas no clásicas (modal e intuicionista). Los autores intentan mostrar como la lógica y la informática pueden interactuar y beneficiarse mutuamente: la informática sugiere nuevas ideas para el análisis lógico, y estas herramientas lógicas permiten a la informática desarrollos futuros.

[Tymoczko y Henle, 2002]

*Razón, dulce razón. Una guía de campo de la lógica moderna*

Tom Tymoczko y Jim Henle

Editorial Ariel, 2002

En palabras del prólogo del libro, *Razón, dulce razón* es un libro que no sólo muestra la lógica sino que ayuda a redescubirla repensándola; que guía al lector para que se la haga suya. Es un texto que nos pone en contacto tanto con las formas del razonamiento deductivo como con las del razonamiento inductivo; con los

argumentos precisos y con los imprecisos, así como con los probables; con la perplejidad en que nos sitúan las paradojas, y con la argumentación informal para defender o atacar opiniones y conjeturas. Si algo destaca de este libro es su estilo particular y su lenguaje sencillo y claro. Es un libro de introducción a la lógica, describiendo claramente los fundamentos básicos de la lógica formal e informal. Pero todo ello enriquecido por situaciones del mundo real, desde rompecabezas, paradojas, demostraciones matemáticas, debates, reglamentaciones gubernamentales y tebeos.

## 3.2. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

[Arenas, 1996]

***Lógica Formal para Informáticos***

Lourdes Arenas Alegrías

Ediciones Díaz de Santos, Madrid 1996

El libro consta de tres partes. La primera trata del estudio de la Lógica Formal a nivel básico, es decir, el Cálculo de Proposiciones, desde la simplicidad en la formalización del lenguaje hasta los métodos de demostración, la teoría de los sistemas formales y las propiedades de los mismos. Una segunda parte que desarrolla el Cálculo de Predicados de Primer Orden, con el consiguiente aumento de complejidad tanto en la construcción del lenguaje, como en los métodos de demostración; también se analizan sus propiedades. Finaliza la obra con una tercera parte dedicada a la Demostración Automática de Teoremas, cuyo objetivo es preparar el camino para abordar el estudio posterior de otros temas del área de Inteligencia Artificial. Destacar el apéndice, que contiene las soluciones a los ejercicios propuestos a lo largo del libro. Es un libro recomendable para el alumno ya que está diseñado como libro de texto para la asignatura *Lógica Formal* de primer curso de Ingeniería Informática de la Universidad de Deusto.

[Barwise y Etchemendy, 1992]

***The Language of First Order Logic***

Incluye la versión windows de *Tarki's World 4.0*

Jon Barwise y John Etchemendy

CSLI Lecture Notes n° 34, third ed. CSLI Publications. Stanford Univ. 1992

El libro presenta una nueva aproximación a la enseñanza de la Lógica de Primer Orden. Partiendo de la ventaja que nos proporciona el programa *Tarki's World*, el libro trabaja tanto el aspecto semántico de la lógica como los métodos de prueba. El texto contiene once capítulos, organizados en cuatro partes: la parte I trata la lógica proposicional; la parte II la lógica cuantificada; la parte III contiene capítulos sobre la teoría de conjuntos y las definiciones inductivas; y la parte IV incluye temas avanzados en lógica. Una característica destacable es que contiene gran cantidad de ejercicios, algunos que se realizan sobre el programa *Tarki's World* y otros no. Su gran interés radica en que los estudiantes aprenden mejor lógica a través de los problemas, y la mejor manera de aprender un lenguaje es utilizándolo directamente. *Tarki's World* proporciona un entorno de manera que podemos utilizar y practicar el lenguaje de la lógica de primer orden de la misma manera que usamos el lenguaje natural.

[Barwise y Etchemendy, 1994]

***Hyperproof***

Jon Barwise y John Etchemendy

CSLI lecture notes n° 42, CSLI Publications, Stanford, California, 1994

*Hyperproof* es un sistema para aprender los principios básicos del razonamiento analítico y la construcción de demostraciones, que consiste en un texto y un programa de ordenador. Combina información en forma de sentencias e información gráfica, presentando un conjunto de regla lógicas para integrar estas diferentes formas de información. Hyperproof ayuda a los estudiantes a construir pruebas usando un intuitivo sistema que extiende el conjunto estándar de reglas al incorporar información representada gráficamente, y que permite centralizar su esfuerzo en la tarea de razonar, y no en la estructura sintáctica de las sentencias.

[Burke y Foxley, 1996]

***Logic and its Applications***

Edmund Burke y Eric Foxley

Prentice Hall International series in Computer Science, 1996

Libro de introducción a la lógica matemática y a sus aplicaciones en el campo de la informática. Cubre tanto aspectos del Cálculo de Proposiciones (1. Lógica Proposicional, 2. Aproximación Formal a la Lógica Proposicional) y del Cálculo de Predicados (4. Lógica de Predicados) como de sus aplicaciones en computación (3. Aplicaciones al Diseño Lógico, 5. Programación Lógica y 6. Especificación de Sistemas Formales). Contiene gran cantidad de ejercicios y ejemplos.

[Cuenca, 1985]

***Lógica Informática***

José Cuenca

Alianza Editorial, 1985

Este texto ofrece a los estudiantes y profesionales de la informática una exposición de las teorías lógicas y de sus aplicaciones a la programación y al campo de la inteligencia artificial. Los capítulos iniciales del libro exponen las teorías matemáticas del cálculo proposicional (cap. 1 al 4) y del cálculo de predicados (cap. 5 al 7), en su enfoque tanto axiomático como semántico. Les sigue un capítulo de introducción a la lógica modal (cap. 8). Los capítulos siguientes (cap. 9 al 13) están dedicados a la verificación de programas procedimentales, las técnicas de deducción automática y su aplicación a la programación lógica. Finalmente se estudian algunas aplicaciones: la planificación automática de robots (cap. 14) y el razonamiento aproximado en sistemas expertos (cap. 15). Su gran ventaja es que está concebido para ser explicado en dos cursos para estudiantes de Informática, con lo que la primera parte del libro se adaptaría a la asignatura aquí tratada.

[Deaño, 1992]

***Introducción a la Lógica Formal***

Alfredo Deaño

Alianza Universidad Textos, 1992

Libro que ofrece los fundamentos de la Lógica, que sin ceder en el rigor técnico de los planteamientos y desarrollos, presta una especial atención a las finalidades propiamente didácticas. Aunque preferentemente dirigido a los estudiantes de filosofía, el volumen puede ser leído sin mayor dificultad por todos aquellos que deseen introducirse en el mundo de la lógica. El libro se estructura en cuatro capítulos: un primer capítulo dedicado a los *Primeros conceptos*, un segundo para la *Lógica de enunciados*, el tercero trata de *La lógica de predicados de primer orden*, y el cuarto capítulo, *Más allá de este libro*, ofrece un completo panorama de los más recientes desarrollos de la lógicas no clásicas, así como cuestiones metalógicas y problemas filosóficos. Contiene además un apéndice con ejercicios resueltos sobre deducción.

[Dodd, 1990]

***Prolog. A Logical Approach***

Tony Dodd

Oxford University Press, 1990

El objetivo de la programación lógica es ofrecer un formalismo de alto nivel para representar la solución a un problema dado: la lógica. Este libro empieza con una explicación de cómo la lógica puede ser usada como un lenguaje de programación y las restricciones a las que debe atenderse, para continuar con el lenguaje Prolog. La segunda parte describe las principales características y utilidades que suelen proporcionar los sistemas Prolog. La tercera parte muestra como diseñar y escribir programas lógicos en un estilo adecuado y según los principios de la programación lógica. Trata también temas de eficiencia y depuración de programas lógicos. Incluye gran cantidad de ejemplos y ejercicios, así como la solución de estos al final del libro.

[Garrido, 1991]

***Lógica Simbólica***

Manuel Garrido

Editorial Tecnos, 2ª ed. 1991

Este libro es una introducción a la lógica simbólica para personas de formación humanística. Su objetivo es facilitar a lectores que carezcan de base matemática y científica, sin ayuda de profesor, un dominio de las técnicas modernas de deducción lógica y la comprensión de las principales nociones teóricas que sirven de fundamento a la metodología de las ciencias deductivas. Es muy interesante por su tratamiento preferente de los cálculos deductivos, y en particular de la Deducción Natural basada en las reglas de Gentzen, por el valor pedagógico que otorga a dichos métodos su proximidad al razonamiento informal y su vinculación al significado intuitivo de las partículas lógicas. En cuanto a su estructura, contiene un capítulo introductorio (cap. I), una parte para la formalización del lenguaje (cap. II-III), y otras para cálculos deductivos (cap. IV-X), semántica (cap. XI-XIII), el método axiomático (cap. XIV) y metalógica (cap. XV). También contiene anexos dedicados a la computación lógica.

[Grassmann y Tremblay, 1997]

***Matemática Discreta y Lógica. Una perspectiva desde la Ciencia de la Computación***

Winfried Karl Grassmann y Jean-Paul Tremblay

Ed. Prentice-Hall, 1997

La *matemática discreta* proporciona los fundamentos teóricos apropiados para el estudio de la computación: Lógica, Conjuntos, Relaciones, Funciones y Grafos. Todos estos temas son tratados en este libro, siempre, tal como refleja el título, desde una perspectiva de la informática. En particular expone de forma completa el razonamiento lógico y la manera de razonar de forma sistemática acerca de los programas. También incluye un capítulo en el que describe el lenguaje de programación lógica Prolog. El libro contiene multitud de ejemplos que relacionan los conceptos matemáticos con temas de computación, así como gran cantidad de problemas con soluciones de algunos de ellos. Se trata de un libro de texto orientado a los estudiantes con un marcado espíritu didáctico, en el que se ha buscado siempre la claridad en la exposición.

[Hofstadter, 1998b]

***Gödel, Escher, Bach. Un Eterno y Grácil Bucle***

Douglas R. Hofstadter

Metatemas 14, sexta edición, Tusquets editores, 1998

Libro de lectura obligada para cualquier estudiante y estudioso de la Ciencia de la Computación. De forma amena y envolvente, Hofstadter intenta responder a la pregunta de si *¿puede un sistema comprenderse a sí mismo?* Como se dice en la contraportada del libro, "todo lenguaje, todo sistema formal, todo programa de ordenador, todo proceso de pensamiento, llega tarde o temprano, a la situación límite

de la autorreferencia". Se trata de un libro divertido, fascinante, que trata de conceptos abstractos difíciles de entender, pero que con la lectura de esta obra se convierten en ideas sencillas. Traza paralelismos entre los grabados de Escher, la música de Bach y el teorema de Gödel. Hofstadter recibió el *Premio Pulitzer* en 1980 por este libro.

[Kelly, 1997]

***The essence of LOGIC***

John Kelly

Serie Essence of Computing, Editorial Prentice Hall, 1997

Este libro forma parte de la serie *essence of computing*, cuyo objetivo es proporcionar a los estudiantes de Informática temas básicos en distintos aspectos fundamentales. Este libro en concreto, ofrece una aproximación a la lógica formal, abordando también la aplicación de dichas técnicas lógicas a la computación. Aborda tanto el Cálculo de Proposiciones (1. Tablas de Verdad, 2. Tableros Semánticos, 3. Deducción Natural, 4. Lógica Proposicional Axiomática, 5. Resolución en Lógica Proposicional) como el Cálculo de Predicados (6. Introducción a la Lógica de Predicados, 7. Una Aproximación Axiomática a la Lógica de Predicados, 8. Tableros Semánticos en Lógica de Predicados, 9. Resolución en Lógica de Predicados). Contiene numerosos ejercicios y ejemplos, así como soluciones a algunos de ellos al final del libro.

[Mosterín, 2000]

***Los Lógicos***

Jesús Mosterín

Espasa Calpe, 2000

Original introducción a varios temas fundamentales de la lógica, la teoría de conjuntos, la teoría de la computación y la filosofía de la matemática a través de las vidas fascinantes y extremas de seis pensadores geniales y atormentados: Gottlob Frege, Georg Cantor, Bertrand Russell, John von Neumann, Kurt Gödel y Alan Turing. Sus fracasos vitales contrastan con sus éxitos intelectuales, que todavía iluminan el pensamiento de nuestro tiempo e incluso el desarrollo tecnológico del mundo computerizado en que vivimos. Libro de lectura agradable, que combina biografía y lógica, anécdotas y conceptos, contexto histórico y desarrollo abstracto.

[Nerode y Shore, 1997]

***Logic for Applications***

Anil Nerode y Richard A. Shore

Springer-Verlag, Second edition, 1997

Este libro de texto, dirigido tanto a estudiantes de matemáticas como de informática, proporciona una primera introducción a la lógica matemática, enfocada primordialmente a la aplicación de la lógica a la informática. Se enfatiza la noción de deducción como una forma de computación. Además de los conceptos tradicionales de la lógica (sintaxis y semántica), este libro incluye aspectos más específicos tales como la demostración automática de teoremas, la programación lógica y las lógicas no clásicas (modal e intuicionista). Contiene ejercicios al final de cada sección y problemas a resolver en Prolog. El libro se estructura en un primer capítulo dedicado a la Lógica Proposicional, el segundo a la Lógica de Predicados, un tercer capítulo sobre Prolog y el cuarto y quinto sobre Lógica Modal e Intuicionista, respectivamente. Finaliza con un apéndice sobre la historia de la lógica. También incluye una extensa bibliografía sobre el tema.

[Carroll, 1988]

***El juego de la Lógica***

[Gardner, 1989]

***¡Ajá! Paradojas. Paradojas que hacen pensar***

[Paulos, 1994]

***Pienso, luego río***

[Smullyan, 1991]

***Alicia en el País de las Adivinanzas***

Se trata de *pequeños* libros escritos por *grandes* autores, con un claro carácter lúdico y recreativo pero que son mucho más que simples amenidades, y que pueden llevarnos hasta nociones muy profundas. Como dice Martin Gardner la virtud está en encontrar el equilibrio entre el juego y la seriedad: el juego mantendrá interesados a nuestros alumnos y alumnas, y motivará su discusión más allá de las paredes del aula; la seriedad convertirá nuestras clases en algo útil y provechoso. Estos libros están llenos de anécdotas, historias, chistes, parábolas, acertijos, adivinanzas, pasatiempos, paradojas, ... relacionados de un modo u otro con distintos problemas lógicos. Si se entiende el chiste se entenderá el argumento implícito. Se han referenciado únicamente cuatro como muestra de cuatro autores (Lewis Carroll, Martin Gardner, John Allen Paulos y Raymond Smullyan) pero cada uno de ellos tiene otros libros similares igual de interesantes.