# Teoría de Errores

**Fundamentos Físicos de la Ingeniería**

# Índice

# Índice

## Objetivo de la Física

- Describir y cuantificar los fenómenos físicos. Hay que medir lo observado.

- A la Física se la denomina ciencia de las medidas.

- El objetivo de una experiencia es, en general, conocer el valor que tiene una determinada magnitud física.

## 1. Medidas experimentales

- Medir cualquier magnitud: comparar con otra magnitud de la misma naturaleza que se toma como patrón.

- El valor exacto de una medida es un concepto utópico pues siempre tiene un cierto grado de incertidumbre o error.

- Por tanto, además del valor de la medida efectuada se necesita otro valor asociado que nos garantice la fiabilidad de éste.

| T ± 0,2 (°C) | d ± 0,01 (g/cm$^3$) |
|---|---|
| 40,0 | 0,99 |
| 30,0 | 0,99 |
| 20,0 | 0,99 |
| 10,0 | 0,99 |

| T ± 0,2 (°C) | d ± 0,0001 (g/cm$^3$) |
|---|---|
| 40,0 | 0,9922 |
| 30,0 | 0,9957 |
| 20,0 | 0,9982 |
| 10,0 | 0,9997 |

**¿cómo interpretar los datos?**

# 1. Medidas experimentales

- Hay que definir tres conceptos asociados a una medida experimental:

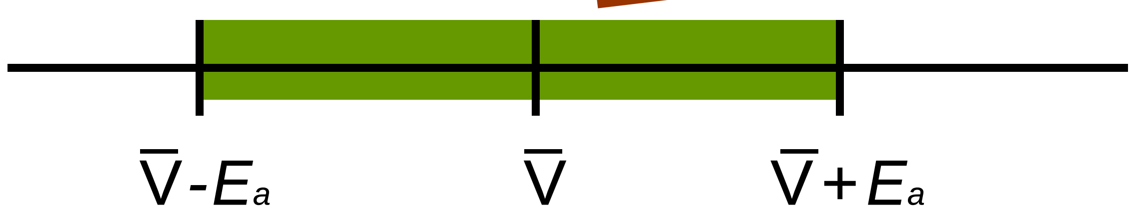
  - exactitud, ⇒ Error sistemático
  - sensibilidad, ⇒ Error absoluto
  - precisión. ⇒ Error relativo

- **Exactitud**

  Es la cercanía del valor experimental obtenido con el valor “exacto” de dicha medida.

  Dicho valor exacto es imposible conocerlo sin incertidumbre alguna.

~~**¿V “verdadera”?**~~

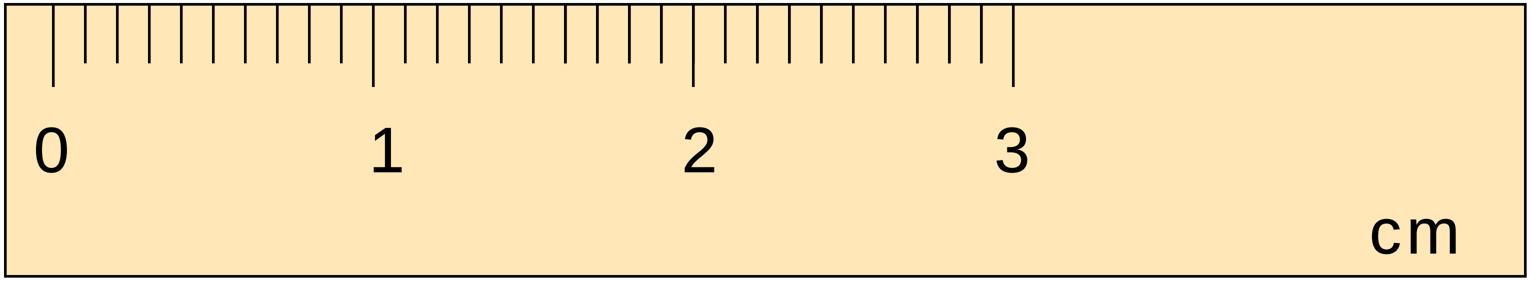


- **Sensibilidad**

  Es la unidad más pequeña que puede detectar un instrumento de medida.

  La sensibilidad es un concepto relacionado con el dispositivo de medida.

**S = 0.1 cm**



- **Precisión**

  Se entiende como la repetición, dentro de los márgenes más estrechos posibles, de los resultados experimentales obtenidos al realizar varias veces una misma medida.

  La precisión también hace referencia al método experimental utilizado.

# Índice

## Error sistemático

- Es un error que se produce de igual modo, por exceso o por defecto, en todas las medidas que se realizan de una magnitud.

- Su origen es un defecto del instrumento de medida, una particularidad del observador o del proceso de medida, etc.

## Error sistemático

- No disminuye si se aumenta el tamaño de la muestra.
- Se pueden corregir.
- Da lugar a inexactitud en la medida.

## Error accidental o aleatorio

- Es un error que se produce a veces por exceso y otras por defecto, de forma aleatoria, en todas las medidas que se realizan de una magnitud.
- Su origen está en situaciones imposibles de controlar durante el proceso de medición, tales como las condiciones experimentales o del propio objeto medido.

## Error accidental o aleatorio

- Disminuye si se aumenta el tamaño de la muestra.
- No se pueden corregir.
- Da lugar a la imprecisión de la medida.

**Objetivo del cálculo de errores:**

Acotar el intervalo de valores dentro del cual es fiable nuestra medida experimental.

- **Error absoluto**: es la diferencia entre el valor exacto y el valor obtenido para la medida.

  Se denota como $E_a$

  Tiene la misma unidad que la medida.

- **Error relativo**: es el cociente entre el error absoluto y el valor medido. Se suele expresar en tanto por ciento.

$$\boxed{E_r(\%) = \frac{E_a}{V} \times 100}$$

No tienen unidades (es adimensional).

Da idea de la calidad de la medida.

# Índice

## 3. Expresión de resultados y errores

- El error absoluto se coloca detrás de la medida precedido por el signo ($\pm$).

**Resultado = Medida $\pm$ $E_a$** unidades (SI)

- **Cifras significativas** del error:

  2 cifras si la primera es 1 o si la primera es 2 y la siguiente es menor que 5.

  1 cifra en el resto de los casos.

# 3. Expresión de resultados y errores

- Además el valor de la medida debe tener sólo las cifras necesarias para que su última cifra significativa sea del mismo orden de magnitud que la última del error absoluto, llamada cifra de acotamiento del valor.

- Detrás de la medida y el error se coloca el símbolo de la unidad (SI).

$$t = (2.9 \pm 0.2)\ \text{s}$$

## Redondeo

- Si la primera cifra descartada es menor que 5 se queda igual la cifra anterior.
- Si la primera cifra descartada es mayor o igual que 5 se suma 1 a la última cifra no descartada.

# 3. Expresión de resultados y errores

Las **cifras significativas** determinan el número de cifras "relevantes" que posee una medida.

- Cifra más significativa:
  - Cifra más a la izquierda que no sea 0.
  - **Ej. 45230……… 0,0270**
- Cifra menos significativa:
  - Si no hay coma decimal, la cifra más a la derecha que no sea 0.
  - **Ej. 45230**
  - Si hay coma decimal, la cifra más a la derecha aunque sea 0.
  - **Ej. 0,0270**
- Número de cifras significativas:
  - Es el número de cifras desde la más significativa a la menos significativa.

# 3. Expresión de resultados y errores

Las **cifras significativas** permiten estimar las cifras “relevantes” que tiene el resultado de una operación matemática.

- Multiplicación o división: el nº de cifras significativas del resultado viene determinado por el factor que tenga menor número de cifras significativas. Ej: $2{,}83 \times 15{,}2462 = 43{,}1$

- Suma o resta: el resultado se expresa con un número de decimales igual al del sumando con el menor número de decimales. Ej: $37{,}5 + 8{,}77 = 46{,}3$

## Ejemplo:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3215 | 3215,4 | 3200 | 0,032 | 3200,0 | 18,00 | 0,180 |
| +xx- | +xxx,- | +-xx | x,x+- | +xxx,- | +x,x- | x,+x- |
| 4(*) | 5 | 2 | 2 | 5 | 4 | 3 |

cifra más significativa → +

cifra menos significativa → -

(*) nº de cifras significativas

**Ejemplo:** valores correctos e incorrectos de resultados experimentales

| **Incorrecto** | **Correcto** |
|---|---|
| 2,41~~8~~ ±0,12~~2~~ | 2,42 ±0,12 |
| 7,30±0,08~~5~~ | 7,30 ±0,09 |
| 428,3~~51~~ ±0,3~~7~~ | 428,4 ±0,3 |
| 356,1~~262~~ ±0,3~~719~~ | 356,1 ±0,3 |
| 1548 ±31 | 1550 ±30 |

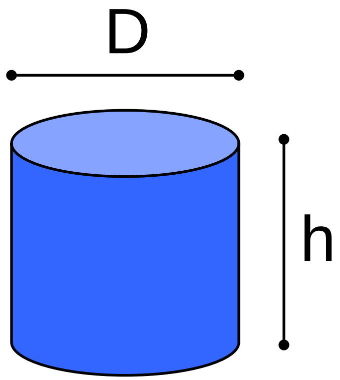
# 3. Expresión de resultados y errores

## Medidas directas e indirectas

- Medida directa: se determina con la aplicación de un único instrumento de medida (metro, balanza, cronómetro, amperímetro, voltímetro, etc.).

- Medida indirecta: es el resultado de la aplicación de una fórmula.

$$\boxed{V = \frac{\pi D^2 h}{4}}$$



## Error absoluto de una medida directa

¿Cuántas medidas es necesario realizar?

- Se realizan tres medidas: $\boxed{M_1 , M_2 , M_3}$
- Cálculo de la dispersión absoluta: $\boxed{D = M_{max} - M_{min}}$
- Cálculo del valor medio: $\boxed{\overline{M} = \dfrac{M_1 + M_2 + M_3}{3}}$

- Cálculo de la desviación relativa: $$T = \frac{\overline{\overline{D}}}{\overline{\overline{M}}} \times 100$$

| Desviación relativa | Nº de medidas |
|---|---|
| T < 2% | 3 |
| 2% < T < 8% | 6 |
| 8% < T < 15% | 15 |
| 15% < T | 50 |

Para valores de T superiores al 8%, lo adecuado es intentar descubrir la causa y corregirla en la manera de lo posible.

# 3. Expresión de resultados y errores

Valor experimental a partir de n medidas:

- Valor medio:

$$\overline{M} = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{n}$$

- Desviación media:

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left|M_i - \overline{M}\right|}{n}$$

# 3. Expresión de resultados y errores

- <u>Error absoluto</u>: es el valor más grande entre la sensibilidad del instrumento y la desviación media de las medidas efectuadas.

$$\boxed{E_a = \text{máx}\,[S, \delta]}$$

El error absoluto de una medida directa nunca puede ser menor que la sensibilidad del instrumento de medida.

- La medida se expresa como:

$$\boxed{\overline{M} \pm E_a \text{ unidad}}$$

## Error absoluto de una medida indirecta

- La medida indirecta de una magnitud se obtiene por la aplicación de una fórmula que relaciona ésta con otras magnitudes medibles directamente.
- El error absoluto de una medida indirecta se aproxima a la diferencial de la función.

- Sea la magnitud z = f(x,y,t).
- El error absoluto de dicha magnitud es:

$$z = f(x, y, t)$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

$$E_z = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| E_x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| E_y + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| E_t$$ **Error absoluto**

$$\frac{E_z}{z} = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \frac{E_x}{z} + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \frac{E_y}{z} + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| \frac{E_t}{z}$$ **Error relativo**

**Ejemplo**: cálculo del error absoluto del volumen de un cilindro.

$$V = \frac{\pi D^2 h}{4} \quad \Rightarrow \quad V = f(D,h)$$

$$E_V = \left|\frac{\partial V}{\partial D}\right| E_D + \left|\frac{\partial V}{\partial h}\right| E_h$$

$$E_V = \frac{1}{2}\pi Dh\, E_D + \frac{\pi D^2}{4} E_h$$ Error absoluto

$$\frac{E_V}{V} = 2\frac{E_D}{D} + \frac{E_h}{h} \quad \Rightarrow E_r(V) = 2E_r(D) + E_r(h)$$ Error relativo

# 3. Expresión de resultados y errores

Reglas para el cálculo del error absoluto de las cuatro operaciones aritméticas.

$$A \pm E_A ; B \pm E_B$$

$$E_{A\pm B} = E_A + E_B$$

$$E_{A\cdot B} = B \cdot E_A + A \cdot E_B \Rightarrow E_{r,A\cdot B} = E_{r,A} + E_{r,B}$$

$$E_{A/B} = \frac{B \cdot E_A + A \cdot E_B}{B^2} \Rightarrow E_{r,A/B} = E_{r,A} + E_{r,B}$$

# Índice

# 4. Presentación de resultados

- Los resultados de las medidas experimentales se agrupan en forma de tabla, ya que esta presentación permite una mejor comprensión y posterior análisis de resultados.

- En la cabecera de la tabla se indican las magnitudes medidas, sus unidades y sus errores.

- Así se evitan las reiteraciones en las unidades y en los errores.

# 4. Presentación de resultados

- Es conveniente colocar al pie de la tabla una frase o título explicativo que indique a que se refiere.
- Sirven de paso intermedio para una posterior representación gráfica.
- La tabla debe contener la máxima información posible sin sobrecargarla demasiado.

Ejemplo de tabla:

| T ± 0,2 (° C) | d ± 0,0001 (g/cm$^3$) |
|---|---|
| 40,0 | 0,9922 |
| 30,0 | 0,9957 |
| 20,0 | 0,9982 |
| 10,0 | 0,9997 |

Densidad de un líquido en función de la temperatura

# 4. Presentación de resultados

- La representación gráfica es un método eficaz y adecuado para presentar y analizar los datos.

- Las gráficas se utilizan para interpolar valores, discutir errores y visualizar funciones analíticas que mejor aproximan las medidas experimentales.

# 4. Presentación de resultados

- Las normas que deben observarse para realizar una correcta representación gráfica son las siguientes:

1. Las gráficas se realizan en papel milimetrado.

2. La variable independiente se coloca siempre en el eje de abcisas, y la dependiente en el eje de ordenadas; nunca al revés.

# 4. Presentación de resultados

3. Es necesario colocar las divisiones en la escala pero no los valores de los puntos experimentales medidos, para no ensuciar los ejes coordenados.

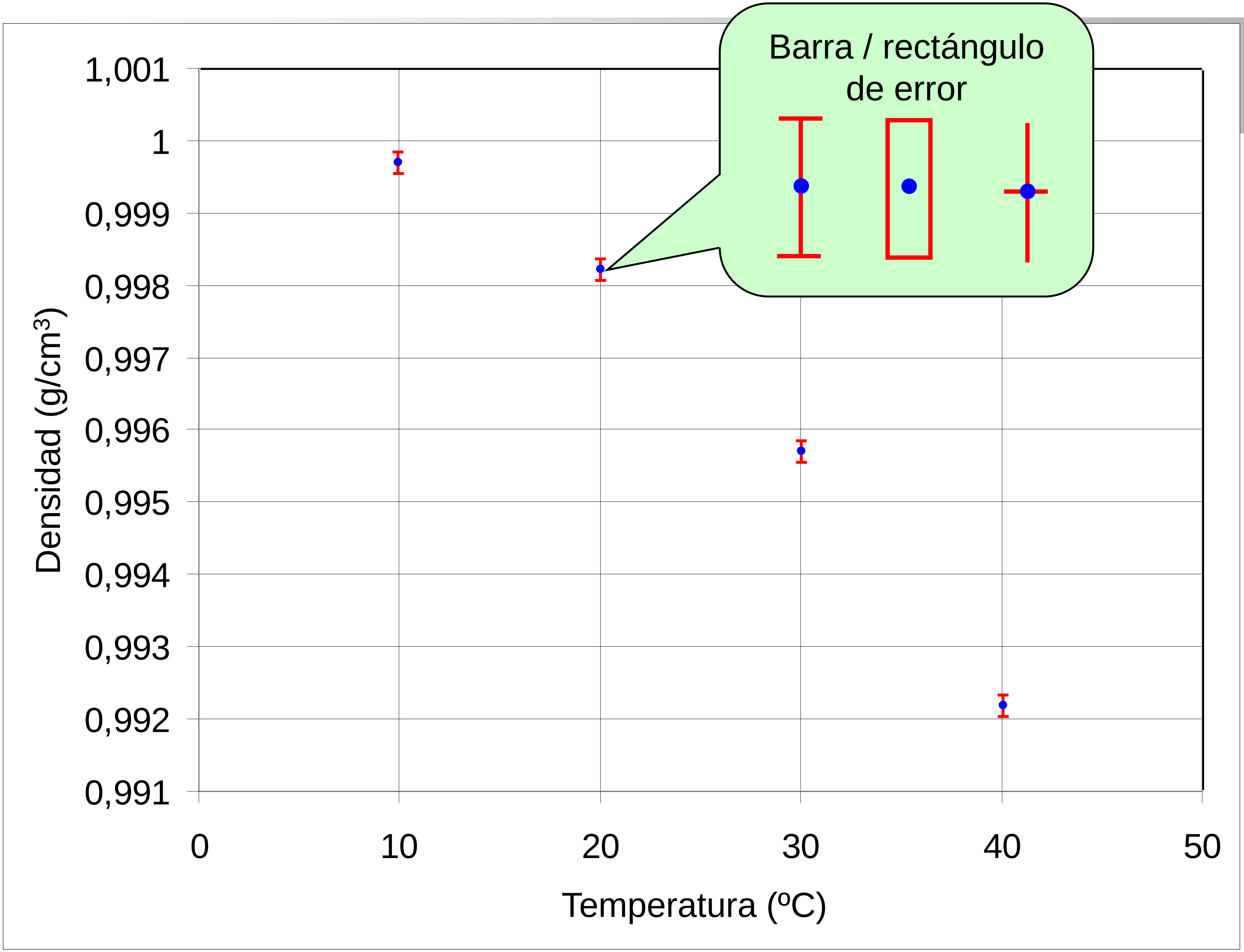
4. Hay que elegir la escala convenientemente para aprovechar al máximo el papel, evitando dejar espacios desaprovechados.

5. La escala debe ser simple, por ejemplo de uno en uno o de dos en dos.

# 4. Presentación de resultados

6. Los valores se localizan por un punto y por su barra/rectángulo de error, que tendrá de base desde $x-E_x$ hasta $x+E_x$ y de altura desde $y-E_y$ hasta $y+E_y$.

7. No se unen los puntos con una línea quebrada.


Barra / rectángulo de error
1,001
1
0,999
0,998
0,997
0,996
0,995
0,994
0,993
0,992
0,991
Densidad (g/cm3)
0
10
20
30
40
50
Temperatura (ºC)

# Índice

# 5. Interpolación lineal

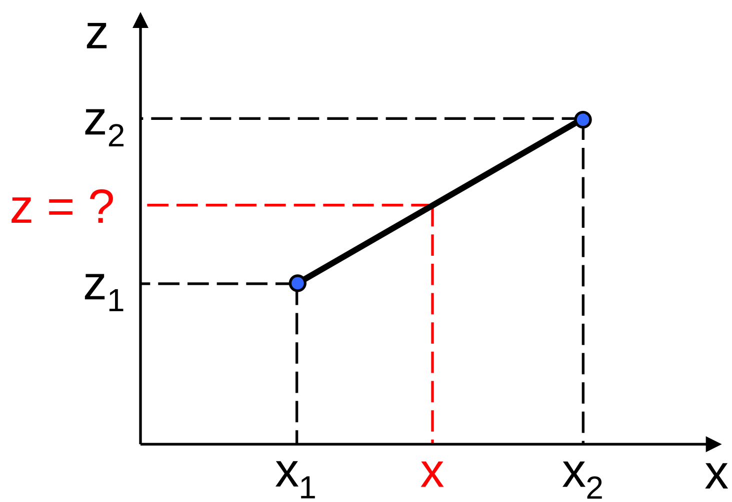
- Un problema típico en física se presenta cuando es necesario conocer el valor de una magnitud para valores que no se han determinado experimentalmente.

- Por ejemplo, si queremos conocer la variación de la densidad de un líquido con la temperatura, efectuamos medidas cada 10 ºC. El problema de interpolación es obtener la densidad a 25 ºC sin tener que volver a medir.

- La interpolación lineal consiste en suponer que la función entre dos medidas sucesivas es una recta.

$$\boxed{z = m \cdot x + b}$$

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= m \cdot x_1 + b \\ z_2 &= m \cdot x_2 + b \end{aligned}\right\} \rightarrow m = \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1}$$




$$z = z_1 + \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$E_z = \max\left\{ \left| \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} \right| \cdot E_x , E'_z \right\}$$

- **Ejemplo:** Calcular la densidad para T=25 ºC

T=25 ºC

| T ± 0,2 (° C) | d ± 0,0001 (g/cm³) |
|---|---|
| 40,0 | 0,9922 |
| 30,0 | 0,9957 |
| 20,0 | 0,9982 |
| 10,0 | 0,9997 |

Densidad de un líquido en función de la temperatura

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = 20\,^{o}C \rightarrow d_1 = 0{,}9982\ \ g/cm^3 \\ T_2 = 30\,^{o}C \rightarrow d_2 = 0{,}9957\ \ g/cm^3 \end{array}\right\} \quad T = 25\,^{o}C \rightarrow d = ?$$

$$d = 0{,}9982 + \frac{0{,}9957 - 0{,}9982}{30 - 20}\left(25 - 20\right) = 0{,}99695$$

$$E_d = \max\left\{\left|\frac{0{,}9957 - 0{,}9982}{30 - 20}\right| \cdot 0{,}2;\ 0{,}0001\right\} =$$

$$= \left\{0{,}00005;\ 0{,}0001\right\} = 0{,}0001$$

$$\boxed{T = 25\,^{o}C \rightarrow d = 0{,}9970 \pm 0{,}0001\ \ g/cm^3}$$

# Índice

# 6. Método de los mínimos cuadrados

- Muchas veces es preciso trabajar analíticamente con curvas obtenidas experimentalmente.

- Esa curva se corresponde con una ley física, cuya función analítica es con frecuencia una recta del tipo $y=m\cdot x+n$

- Por ello, hay que ajustar los puntos obtenidos a esa recta de forma que el error introducido al realizar el ajuste sea mínimo.

# 6. Método de los mínimos cuadrados

- El método de los mínimos cuadrados soluciona este problema.

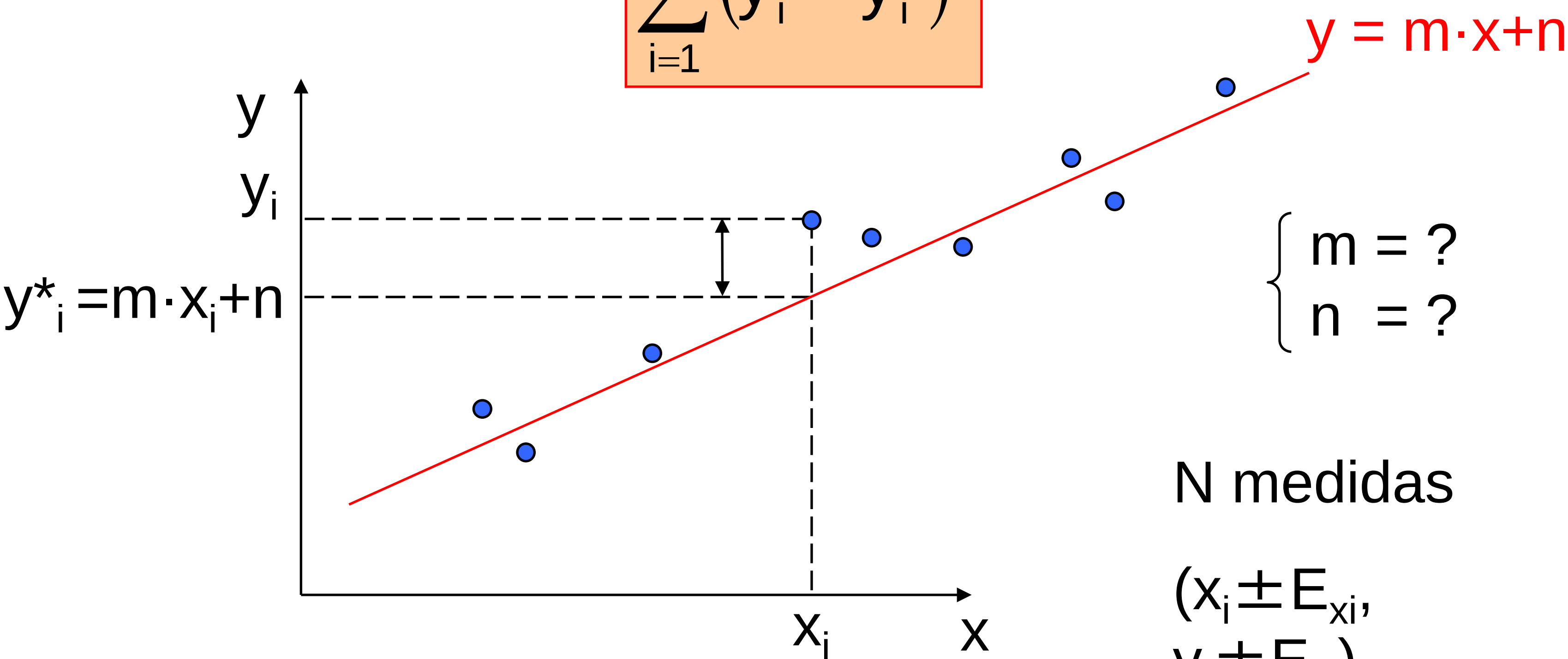
- Se trata de obtener el par de valores que caracteriza una recta $y=m\cdot x+n$ (pendiente $m$ y ordenada en el origen $n$) a partir de una serie de pares de puntos $(x_i, y_i)$ que se han obtenido experimentalmente.

- La recta obtenida es la que mejor se ajusta a los valores experimentales y se denomina recta de regresión.

# 6. Método de los mínimos cuadrados

- La suma de las distancias de cada punto a la recta, elevada al cuadrado, debe ser mínima.

$$\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - y_i^*\right)^2$$



# 6. Método de los mínimos cuadrados

- Condición de mínimo:

$$\frac{d}{dm}\left[\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - m\cdot x_i - n\right)^2\right] = 0$$

$$A = \sum_{i=1}^{N} x_i \qquad B = \sum_{i=1}^{N} y_i$$

$$C = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \qquad D = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot y_i$$

$$\boxed{m = \frac{N\cdot D - A\cdot B}{N\cdot C - A^2}}$$

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N} \qquad \overline{y} = \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{N}$$

$$\left(\overline{x},\ \overline{y}\right) \in y = m\cdot x + n$$

$$\boxed{n = \overline{y} - m\cdot \overline{x}}$$

# 6. Método de los mínimos cuadrados

- Cálculo de errores de m y n:

$$E_m = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C} \left| y_i' - 2 \cdot m \cdot x_i \right| \cdot E_{x_i} + \sum_{i=1}^{N} \frac{|x_i|}{C} \cdot E_{y_i}$$

$$E_n = |m| \cdot \overline{E}_x + \overline{E}_y + |\overline{x}| \cdot E_m$$

- Si n=0 $\rightarrow$ y = m·x

$$y_i' = y_i - n$$

$$\overline{E}_x = \sum_{i=1}^{N} \frac{E_{x_i}}{N} \qquad \overline{E}_y = \sum_{i=1}^{N} \frac{E_{y_i}}{N}$$

$$m = \frac{D}{C}$$

$$E_m = \frac{A}{C}\left(|m| \cdot \overline{E}_x + \overline{E}_y\right)$$

Para errores iguales:

$$\overline{E}_x = E_x \qquad \overline{E}_y = E_y$$

# 6. Método de los mínimos cuadrados

## Coeficiente de correlación

- Sirve para evaluar la bondad del ajuste.

$$\boxed{r = m\sqrt{\frac{N \cdot C - A^2}{N \cdot F - B^2}}} \qquad \boxed{-1 < r < 1}$$

$$A = \sum_{i=1}^{N} x_i \quad B = \sum_{i=1}^{N} y_i \quad C = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \quad F = \sum_{i=1}^{N} y_i^2$$

- El ajuste es mejor cuanto más próximo sea el módulo del coeficiente de correlación a 1.

# 6. Método de los mínimos cuadrados

- **Ejemplo:** Hallar la recta de regresión que mejor ajusta los siguientes puntos.

| $x \pm 0{,}1$ | $y \pm 0{,}2$ |
|---|---|
| 3,0 | 4,0 |
| 4,0 | 5,6 |
| 8,0 | 9,5 |
| 10,0 | 11,0 |

$$y = m \cdot x + n \rightarrow \begin{cases} m = 0{,}99 \pm 0{,}04 \\ n = 1{,}4 \pm 0{,}7 \end{cases}$$

$$r = 0{,}995$$

# Índice

# 7. Memoria de prácticas

Idea básica: un experimento siempre debe poder reproducirse, con datos y conclusiones análogas, a partir de la descripción que se haga del mismo.

Apartados de la memoria de prácticas:

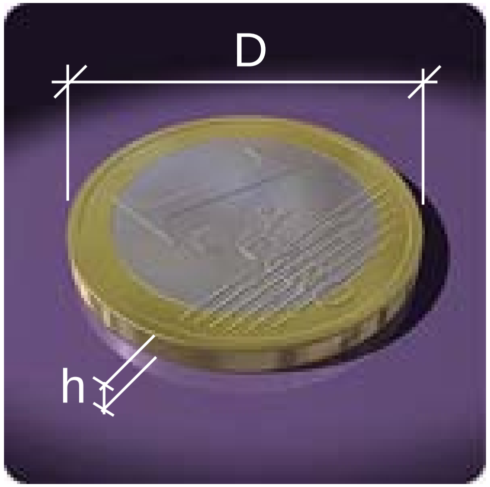
- **Encabezamiento:** Apellidos y nombre, título de la práctica, fecha, grupo (día y hora).
- **Objetivo:** Qué se desea verificar con la práctica.
- **Montaje experimental:** Breve descripción.

# 7. Memoria de prácticas

- **Procedimiento:** Comentarios sobre como se hizo la práctica, problemas encontrados, etc.
- **Datos:** En tablas, con las unidades y errores.
- **Gráficos:** Según las instrucciones dadas.
- **Cálculos:** Traza de las operaciones realizadas.
- **Resultados:** Respuestas a las cuestiones planteadas.
- **Conclusiones:** Discusión sobre los resultados obtenidos.

# Práctica 1

- Determinación del volumen, acotando su error, de una moneda de 1 euro.



- En primer lugar se determinan los valores del diámetro y del canto de la moneda, con sus respectivos errores (medidas directas).

- Una vez conocidos $D \pm E_D$ y $h \pm E_h$ se calcula el volumen de la moneda (medida indirecta).

$$V = \frac{\pi}{4} D^2 h \qquad E_V = \left|\frac{\partial V}{\partial D}\right| E_D + \left|\frac{\partial V}{\partial h}\right| E_h$$

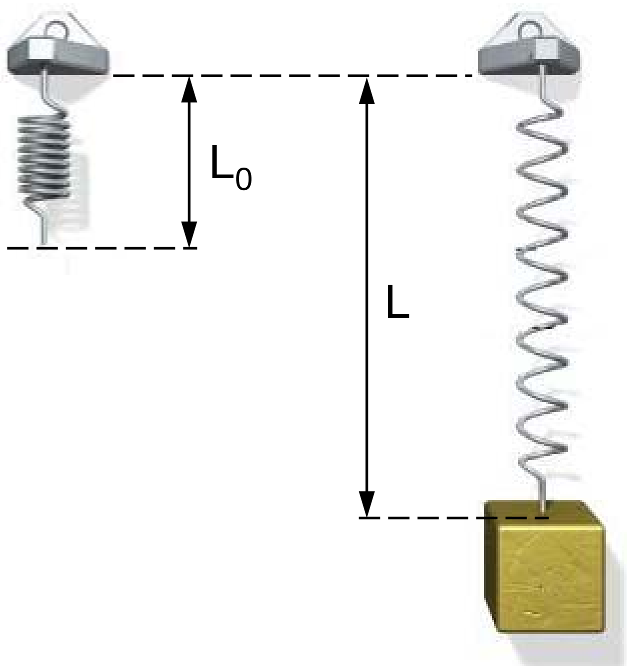
$$E_V = \frac{\pi}{2} D h E_D + \frac{\pi}{4} D^2 E_h$$

# Práctica 2

- Las longitudes de un muelle sometido a diferentes pesos son las siguientes:

| Peso ± 0,1 N | 3,0 | 5,0 | 7,0 | 9,0 | 11,0 | 13,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Longitud ± 0,1 cm | 6,4 | 7,0 | 8,2 | 10,2 | 12,1 | 15,0 |

a) Representar gráficamente los datos.
b) Realizar el ajuste a una recta por el método de mínimos cuadrados.
c) Determinar el valor de la constante del muelle y la longitud inicial del mismo.




$$F = K \cdot \Delta L$$

$$F = K \cdot (L - L_0)$$

$$L = \frac{1}{K} F + L_0$$

$$\boxed{y = m \cdot x + n}$$

Constante del muelle: $K \pm E_K$

Longitud inicial del muelle: $L_0 \pm E_{Lo}$