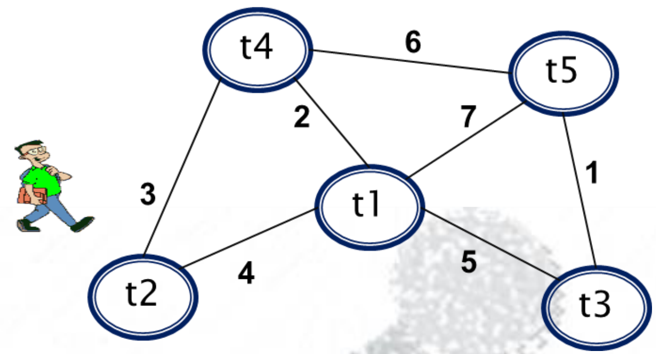
3. Búsqueda de los **caminos más cortos**

3.1. Ecuaciones de Bellman. Aplicación: PERT.

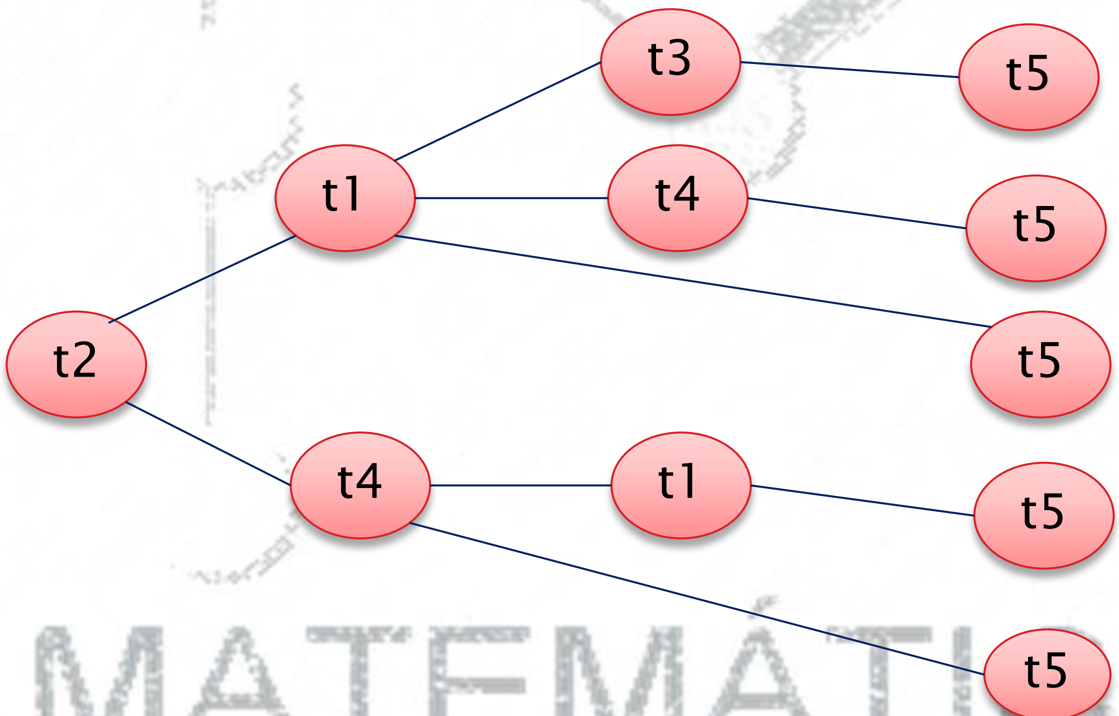
3.2. Algoritmo de Dijkstra

3.3. Algoritmo de Floyd-Warshall



*Si Friqui se encuentra en **t2***
*¿cuál es el CAMINO MÁS **CORTO** hasta **t5** ?*
>> datos en aristas >> distancia

*¿cuál es el más **LARGO** ?*



D = 10

D = 12

D = 11

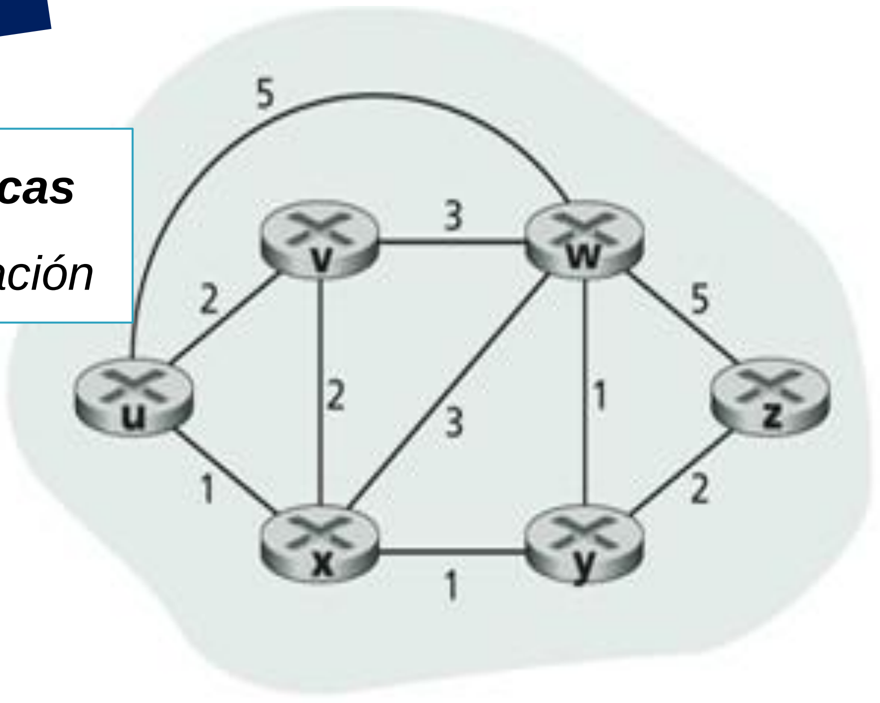
D = 12

D = 9

APLICACIONES DE BUSCAR EL CAMINO MÁS CORTO

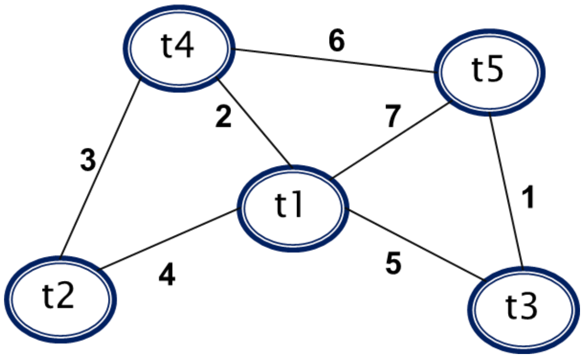
- ***redes informáticas***

costes de comunicación



Costo del enlace: congestión, $

NUEVO TIPO DE GRAFO:
GRAFO PONDERADO
CON TIEMPO, DISTANCIAS, COSTES...



Peso arista {t4,t5} = 6

>> $w_{ij} = 6$

Matriz de pesos

$$\Omega = \begin{bmatrix} \infty & 4 & 5 & 2 & 7 \\ 4 & \infty & \infty & 3 & \infty \\ 5 & \infty & \infty & \infty & 1 \\ 2 & 3 & \infty & \infty & 6 \\ 7 & \infty & 1 & 6 & \infty \end{bmatrix}$$

¿peso de un camino?

$$\Omega = \begin{bmatrix} \infty & 4 & 5 & 2 & 7 \\ 4 & \infty & \infty & 3 & \infty \\ 5 & \infty & \infty & \infty & 1 \\ 2 & 3 & \infty & \infty & 6 \\ 7 & \infty & 1 & 6 & \infty \end{bmatrix}$$

Camino C1 : t2 - t1 – t3 – t5

PESO (C1) $= w_{21} + w_{13} + w_{35}$

$= 4 + 5 + 1$

$= \mathbf{10}$

! Tenemos que calcular el que "cueste" menos…!

2 “tipos” de caminos

- **Camino más corto** entre 2 vértices:

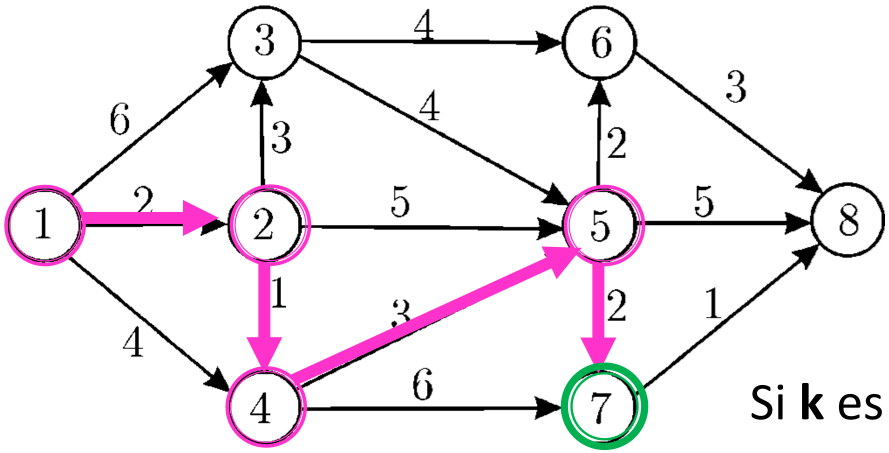
  camino de **peso mínimo** entre dichos vértices.

- **Camino más largo** (**camino crítico)** entre 2 vértices :

  camino de **peso máximo** entre dichos vértices.

! A TENER EN CUENTA…

>> Cualquier sección de un cmc es un cmc



cmc(1-7) = 1 2 4 5 7

Los caminos:

S1 = 1 2 4 : cmc (1- 4)

S2 = 4 5 7 : cmc (4 – 7)

Si **k** es el vértice inmediato anterior a **j** >>

cmc(1-j) = cmc(1-k) + arco(k,j)

Se elije el mínimo

cmc(1-7) = cmc(1-5) + arco(5,7) = 6 + 2

cmc(1-7) = cmc(1-4) + arco(4,7) = 3 + 6

Ecuaciones de Bellman (B1) para calcular el camino más corto entre dos vértices

$$u_1 = 0$$

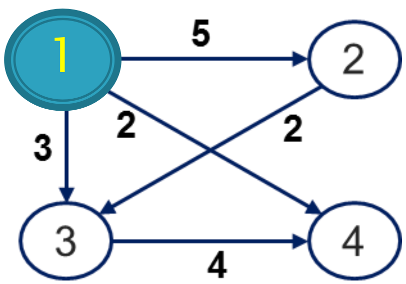
$$u_j \;=\; \min_{k<j,\; v_k \in \Gamma^{-1}(v_j)} \{u_k + \omega_{kj}\}, \quad j = 2, \ldots, n$$

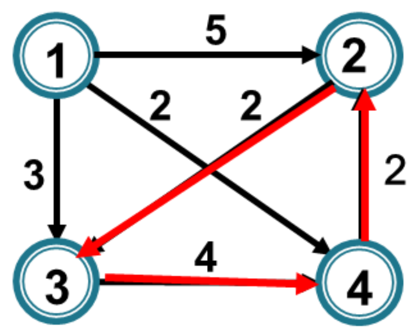
- Grafo **dirigido** ponderado sin circuitos
- **Vértices** del grafo: numerados de **1** a **n,** V = {v_1,…v_n}.
- **Vértice origen**: vértice numerado **1**.
- **w_{ij} : peso del arco (i, j) / w_{ij} no negativo /∞ si no** existe arco (i,j)**.**
- **u_j : peso** del **cmc(1- j).**
- El **peso** de vértice origen del camino >> **u_1 = 0**

$\Gamma^{-1}(v)$: vértices que **alcanzan a v** con cadena de long 1

>> Un GDP **no tiene circuitos** si, y sólo si, existe una numeración de los vértices para la que se cumple que si **(i,j) ∈ E entonces i < j**

Si se pueden reordenar los vértices >> grafo sin circuitos





Vértice: 1	**2**	**3**	**4**	
Numer.: 1	**2**	**3**	**4**	

Vértice: 1 no se puede seguir

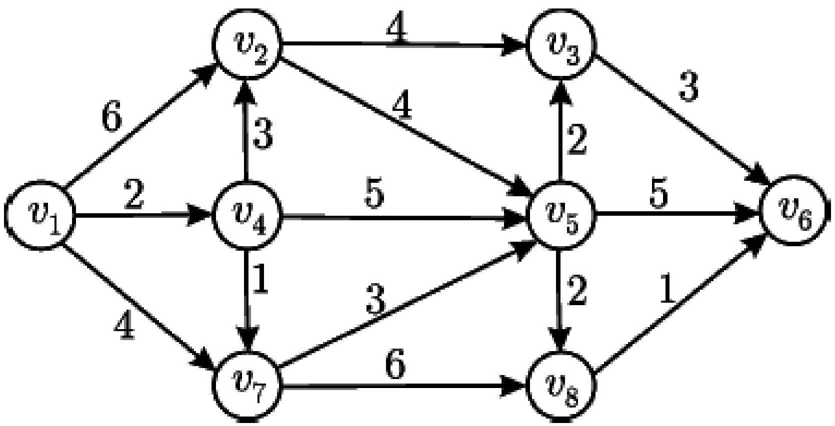
Numer.: 1

(1,2) ∈ E >> 1 < 2
(1,3) ∈ E >> 1 < 3
(1,4) ∈ E >> 1 < 4…

(1,2) ∈ E >> 1 < 2
(1,3) ∈ E >> 1 < 3

(4,2) ∈ E >> 4 >2 >> ERROR >> hay circuito

EJEMPLO >> NUMERACIÓN d VÉRTICES



ALGORITMO DE NUMERACIÓN

Etapa 1. Inicializar $i \leftarrow 1$, $V^{(1)} = V$

Etapa 2. Tomar $v \in V^{(i)}$ / $d_e(v) = 0$ en $G[V^{(i)}]$

Etapa 3. Numerar el vértice v como vértice i.

Hacer $V^{(i+1)} = V^{(i)} \sim \{v\}$

Hacer $i \leftarrow i + 1$

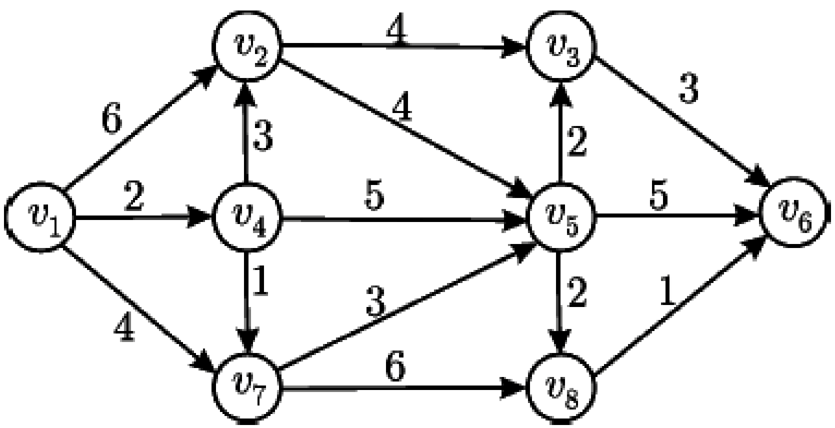
Etapa 4. Si $V^{(i)} = \{\ \}$ entonces PARAR

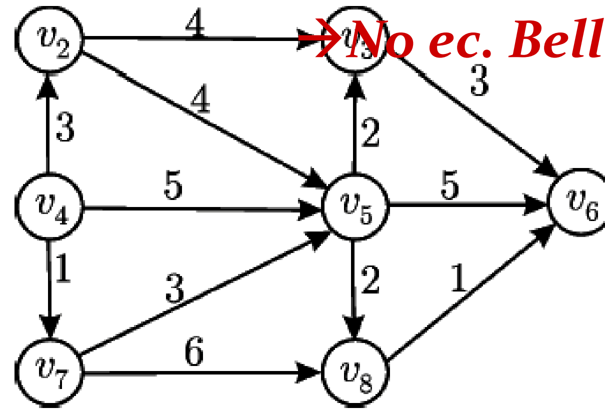
En otro caso, volver a la etapa 2.

EJEMPLO >> NUMERACIÓN d VÉRTICES

Vértice:	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
Numer.:	1							

OjO: *si no se pueden RENUMERAR vértices → existe circuito → No ec. Bellman*





ALGORITMO DE NUMERACIÓN

Etapa 1. Inicializar $i \leftarrow 1$, $V^{(1)} = V$

Etapa 2. Tomar $v \in V^{(i)}$ / $d_e(v) = 0$ en $G[V^{(i)}]$

Etapa 3. Numerar el vértice v como vértice i.

Hacer $V^{(i+1)} = V^{(i)} \sim \{v\}$

Hacer $i \leftarrow i + 1$

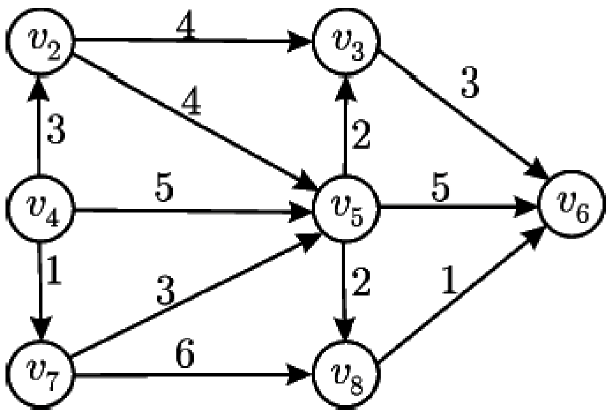
Etapa 4. Si $V^{(i)} = \{\ \}$ entonces PARAR

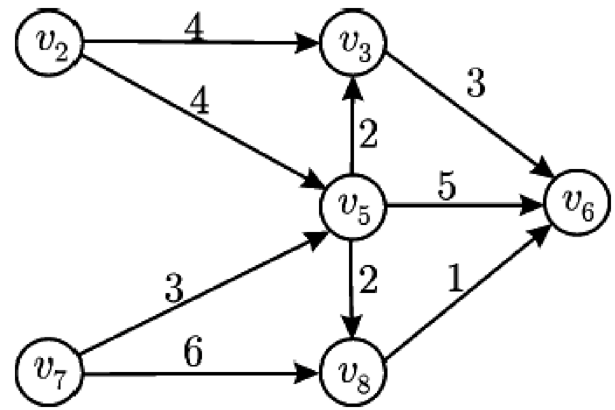
En otro caso, volver a la etapa 2.

EJEMPLO (cont) >> NUMERACIÓN d VÉRTICES

$i = 2.$
$V^{(2)} = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}.$
Tomamos $v_4 \in V^{(2)} \;/\; d_e(v_4) = 0.$

Vértice:	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
Numer.:	1			2				



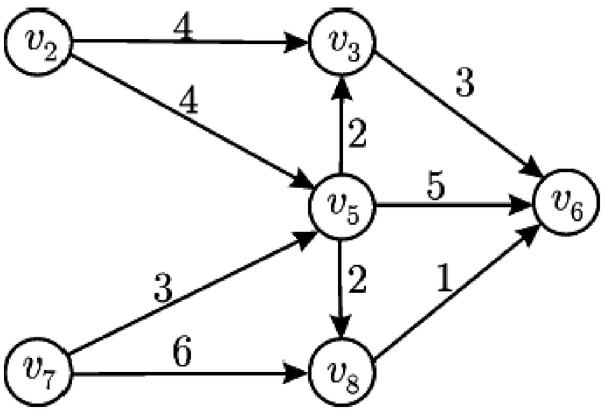


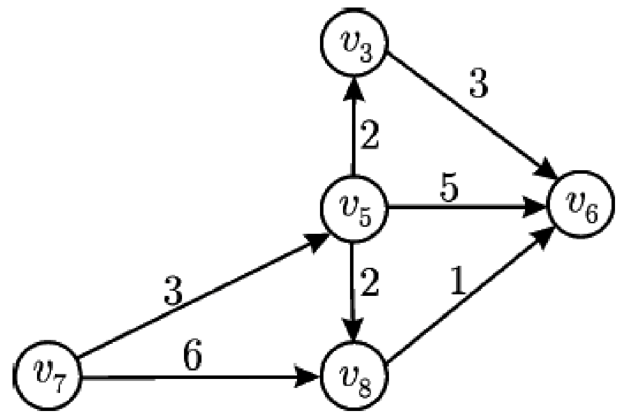
Numeramos v_4 *con* 2.
Eliminamos v_4 *de* $V^{(2)}$, *es decir,*
$V^{(3)} = V^{(2)} \sim \{v_4\}.$

EJEMPLO (cont) >> NUMERACIÓN d VÉRTICES

$i = 3.$
$V^{(3)} = \{v_2, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8\}.$
Tomamos $v_2 \in V^{(3)}$ / $d_e(v_2) = 0.$

Vértice:	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
Numer.:	1	3		2				



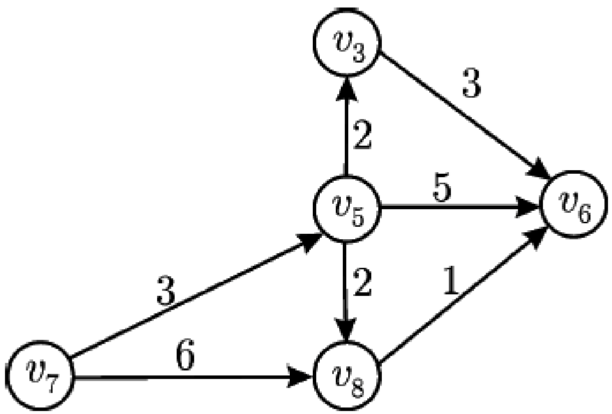


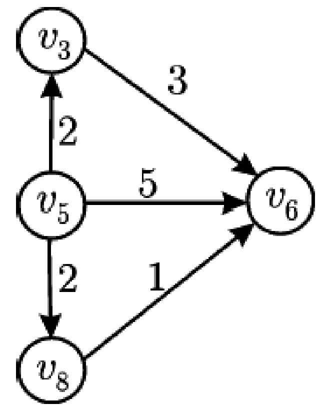
Numeramos v_2 *con* 3.
Eliminamos v_2 *de* $V^{(3)}$, *es decir,*
$V^{(4)} = V^{(3)} \sim \{v_2\}.$

EJEMPLO (cont) >> NUMERACIÓN d VÉRTICES

Vértice:	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
Numer.:	1	3		2			4	

$i = 4.$
$V^{(4)} = \{v_3, v_5, v_6, v_7, v_8\}.$
Tomamos $v_7 \in V^{(4)}$ / $d_e(v_7) = 0.$



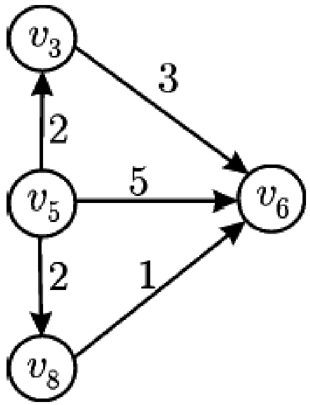


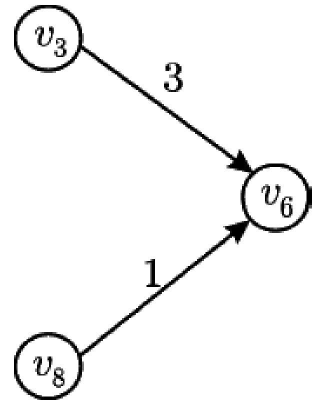
Numeramos v_7 *con* 4.
Eliminamos v_7 *de* $V^{(4)}$, *es decir,*
$V^{(5)} = V^{(4)} \sim \{v_7\}.$

EJEMPLO (cont) >> NUMERACIÓN d VÉRTICES

Vértice:	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
Numer.:	1	3		2	5		4	

$i = 5.$
$V^{(5)} = \{v_3, v_5, v_6, v_8\}.$
Tomamos $v_5 \in V^{(5)} \;/\; d_e(v_5) = 0.$



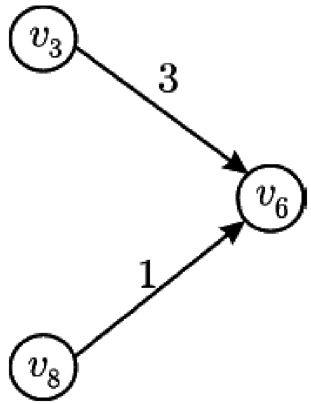


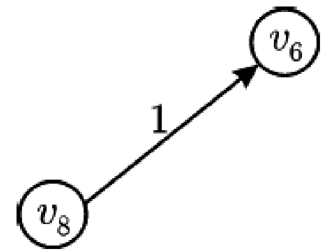
Numeramos v_5 *con* 5.
Eliminamos v_5 *de* $V^{(5)}$, *es decir,*
$V^{(6)} = V^{(5)} \sim \{v_5\}.$

EJEMPLO (cont) >> NUMERACIÓN d VÉRTICES

$i = 6.$
$V^{(6)} = \{v_3, v_6, v_8\}.$
Tomamos $v_3 \in V^{(6)}$ / $d_e(v_3) = 0.$

Vértice:	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
Numer.:	1	3	6	2	5		4	



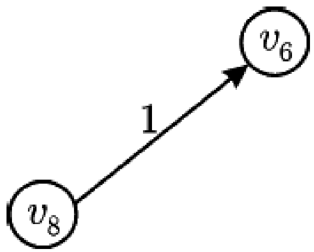


Numeramos v_3 *con* 6.
Eliminamos v_3 *de* $V^{(6)}$, *es decir,*
$V^{(7)} = V^{(6)} \sim \{v_3\}.$

EJEMPLO (cont) >> NUMERACIÓN d VÉRTICES

$i = 7.$
$V^{(7)} = \{v_6, v_8\}.$
Tomamos $v_8 \in V^{(7)}$ / $d_e(v_8) = 0.$

Vértice:	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
Numer.:	1	3	6	2	5		4	7



Numeramos v_8 *con* 7.
Eliminamos v_8 *de* $V^{(7)}$, *es decir,*
$V^{(8)} = V^{(7)} \sim \{v_8\}.$

EJEMPLO (cont) >> NUMERACIÓN d VÉRTICES

$i = 8.$

$V^{(8)} = \{v_6\}.$

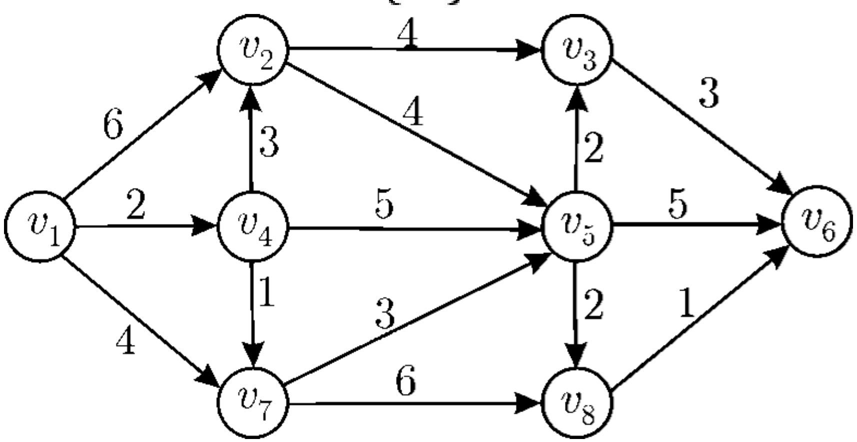
Tomamos $v_6 \in V^{(8)} \;/\; d_e(v_6) = 0.$

v_6

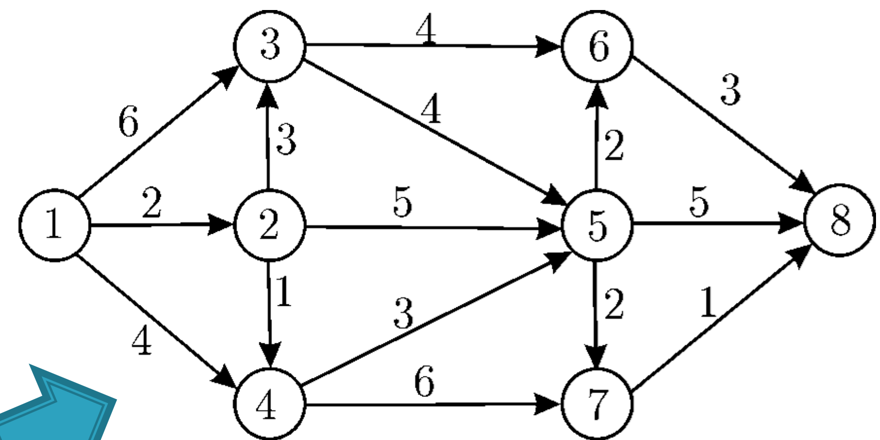
Numeramos v_6 *con* 8.

Eliminamos v_6 de $V^{(8)}$, *es decir*,

$V^{(9)} = V^{(8)} \sim \{v_6\} = \emptyset.$



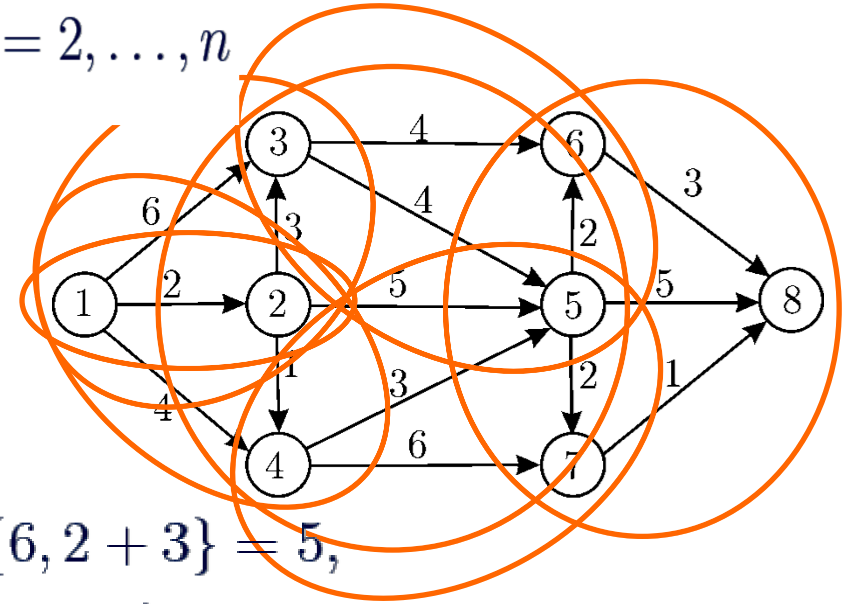
Vértice:	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
Numer.:	1	3	6	2	5	8	4	7



Se cumple
∀ (i, j) → i < j
→ Grafo sin circuitos
→ Ec-Bellman

EJEMPLO (cont) >> BELLMAN >> CMC(1-j)

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ u_j &= \min_{k<j,\ v_k \in \Gamma^{-1}(v_j)} \{u_k + \omega_{kj}\}, \quad j = 2, \ldots, n \end{aligned}$$



1º PESOS

$$\begin{aligned}
u_1 &= 0, \\
u_2 &= \min\{u_1 + \omega_{12}\} = 2, \\
u_3 &= \min\left\{u_1 + \omega_{13}, \underline{u_2 + \omega_{23}}\right\} = \min\{6, 2+3\} = 5, \\
u_4 &= \min\left\{u_1 + \omega_{14}, \underline{u_2 + \omega_{24}}\right\} = \min\{4, 2+1\} = 3, \\
u_5 &= \min\left\{u_2 + \omega_{25}, u_3 + \omega_{35}, \underline{u_4 + \omega_{45}}\right\} = \min\{2+5, 5+4, 3+3\} = 6, \\
u_6 &= \min\left\{u_3 + \omega_{36}, \underline{u_5 + \omega_{56}}\right\} = \min\{5+4, 6+2\} = 8, \\
u_7 &= \min\left\{u_4 + \omega_{47}, \underline{u_5 + \omega_{57}}\right\} = \min\{3+6, 6+2\} = 8, \\
u_8 &= \min\left\{u_5 + \omega_{58}, u_6 + \omega_{68}, \underline{u_7 + \omega_{78}}\right\} = \min\{6+5, 8+3, 8+1\} = 9.
\end{aligned}$$

VÉRTICES DEL CAMINO

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 0,\\
u_2 &= \min\{u_1 + \omega_{12}\} = 2,\\
u_3 &= \min\{u_1 + \omega_{13}, \underline{u_2 + \omega_{23}}\} = \min\{6, 2+3\} = 5,\\
u_4 &= \min\{u_1 + \omega_{14}, \underline{u_2 + \omega_{24}}\} = \min\{4, 2+1\} = 3,\\
u_5 &= \min\{u_2 + \omega_{25}, u_3 + \omega_{35}, \underline{u_4 + \omega_{45}}\} = \min\{2+5, 5+4, 3+3\} = 6\\
u_6 &= \min\{u_3 + \omega_{36}, \underline{u_5 + \omega_{56}}\} = \min\{5+4, 6+2\} = 8,\\
u_7 &= \min\{u_4 + \omega_{47}, \underline{u_5 + \omega_{57}}\} = \min\{3+6, 6+2\} = 8,\\
u_8 &= \min\{u_5 + \omega_{58}, u_6 + \omega_{68}, \underline{u_7 + \omega_{78}}\} = \min\{6+5, 8+3, 8+1\} = 9.
\end{aligned}
$$

CMC(1-J)

V	v1	v4	v2	v7	v5	v3	v8	v6
Numer.	1	2	3	4	5	6	7	8
Peso u_i i=1,…8	0	2	5	3	6	8	8	9
Vértices cmc	--	1,2	1,2,3	1,2,4	1,2,4,5	1,2,4,5,6	1,2,4,5,7	1,2,4,5,7,8

PROYECTOS QUE INCLUYEN LA REALIZACIÓN DE UN GRAN Nº DE ACTIVIDADES RELACIONADAS

Para realizar una actividad es necesario que otras previas hayan finalizado.

¿ Cuánto tiempo se necesita para realizarlo ?

PERT

(Proyect Evaluation Research Task)

Técnicas de Evaluación y Revisión de Proyectos

Basado en Ec. Bellman

Visión de PERT:

Permite calcular la **duración de un proyecto** usando **grafos** en los que se representan las distintas **tareas** que forman el proyecto y los **plazos de cada una**.

El proyecto debe informar de las relaciones entre las distintas tareas y el orden en que se deben realizar.

PERT es una **herramienta valiosa para gestionar proyectos complejos a largo plazo y en los que interactúen muchos actores**.

G = (V,E) GD, Ponderado

CAMINO CRÍTICO (camino más largo) entre dos vértices: camino de **peso máximo** entre dichos vértices.

CAMINO CRÍTICO del proyecto:

Inicio camino: 1ª actividad

Final camino: última actividad

Camino formado por **todas** las actividades que determinan la **duración** total del proyecto.

Actividades del camino crítico: **Actividades críticas**.

PESO del camino crítico: **Tiempo** (u otra unidad) **MÍNIMO** necesario para desarrollar el proyecto

Ecuaciones de Bellman (B2)

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 0, \\
u_j &= \max_{k<j,\ v_k \in \Gamma^{-1}(v_j)} \{u_k + \omega_{kj}\}, \quad j = 2, \ldots, n,
\end{aligned}
$$

Vértices del grafo >> actividades

A. Críticas: *forman parte del camino crítico (han intervenido en el cálculo del tiempo)*

No críticas *no forman parte del camino crítico*

¿ qué sucede si alguna actividad se retrasa?

Si una Actividad crítica

se **retrasa** u/unidades :

El proyecto se retrasa u/unidades

Si una Actividad NO crítica

se **retrasa** u/unidades :

Se calcula si se

retrasa el proyecto

(lo vemos en el ejemplo)

PASOS para calcular el **camino crítico** de un proyecto de secuencia de actividades, que se corresponde con el cálculo del **mínimo tiempo** en el que se realizará el proyecto, se realizan los siguientes pasos:

1.- Modelar el proyecto mediante un **GD Ponderado**.

2.- Comprobar que el grafo es **acíclico** (aplicar Th-4.1).

3.- Calcular la **duración mínima** en la que se realizará el proyecto aplicando las Ec. Bellman (B2) (cálculo de camino crítico).

4.- **Identificar** las actividades críticas .

$$\boxed{\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ u_j &= \max_{k<j,\ v_k \in \Gamma^{-1}(v_j)} \{u_k + \omega_{kj}\}, \quad j = 2, \ldots, n, \end{aligned}}$$

Ejercicio 4-H3

Proyecto 1 :

hacer tortilla de patatas

actividad	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7
tiempo	6	3	2	15	6	10	7
prerrequisito	-	-	-	a1 a3	a2 a4	a5	a6

¿qué necesitamos? .

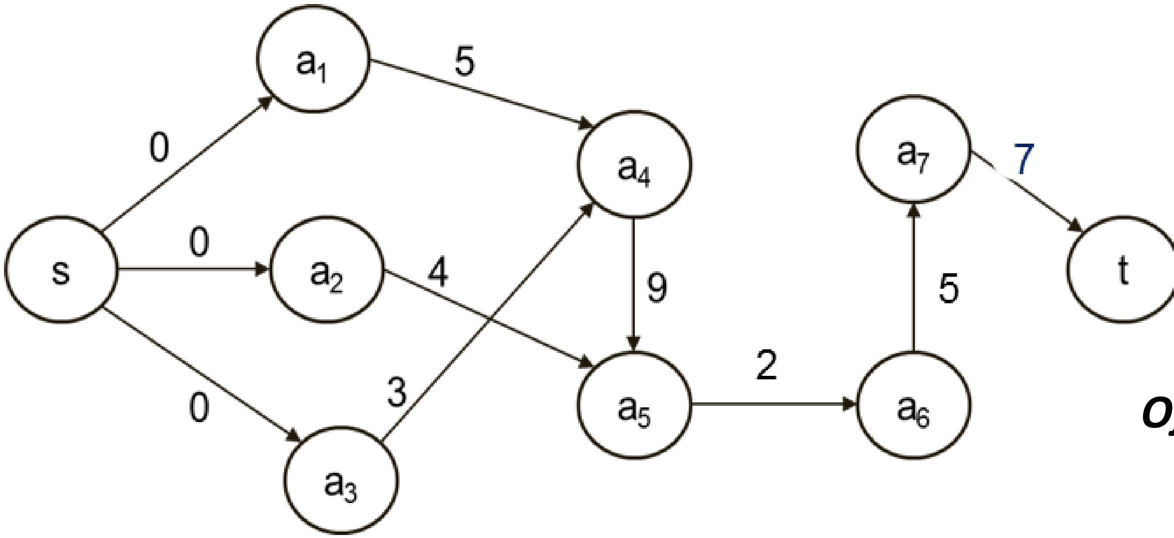
ORDEN ACTIVIDADES/TAREAS	TIEMPO DURACIÓN	PRERREQUISITOS
a1: Pelar patatas	a1: 6u	a1: --
a2: Batir huevos	a2: 3u	a2: --
a3: Pelar cebolla	a3: 2u	a3: --
a4: Freir patatas y cebolla	a4: 15u	a4: a1, a3
a5: Añadirlo a huevo	a5: 6u	a5: a2, a4
a6: Cuajar tortilla	a6: 10u	a6: a5
a7: Zampar tortilla	a7: 7u	a7: a6

Proyecto 1

Actividad	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
Tiempo/u	5	4	3	9	2	5	7
Prerrequisitos	-	-	-	a_1 a_3	a_2 a_4	a_5	a_6

Diseño del GDP

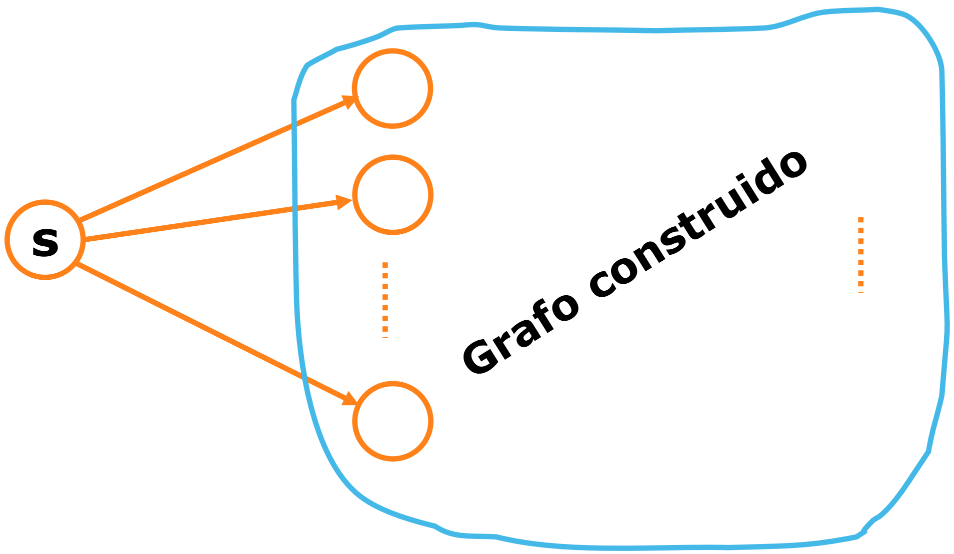
- **Vértices vi: actividades.**
- **Arcos:** (v_i, v_j) >> v_i es prerrequisito de v_j,



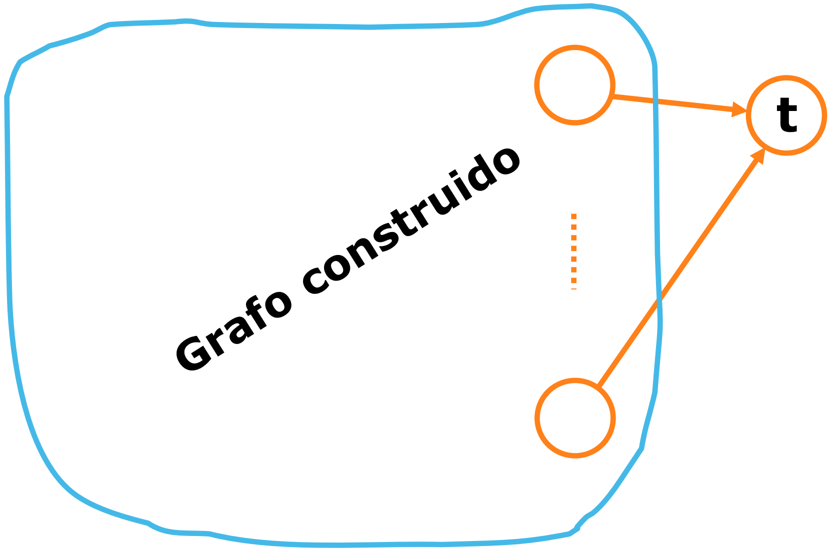
Ojo: añadir vértices s, t

- w_{ij} : **tiempo** que debe transcurrir entre el **inicio** de v_i y el **inicio** de v_j.

- Añadir vértice ficticio **s** → **inicio proyecto /**
- Añadir arco (s,vi) / **de(vi)=0**
- $\mathbf{w_{si}} = 0$ (tiempo para empezar)



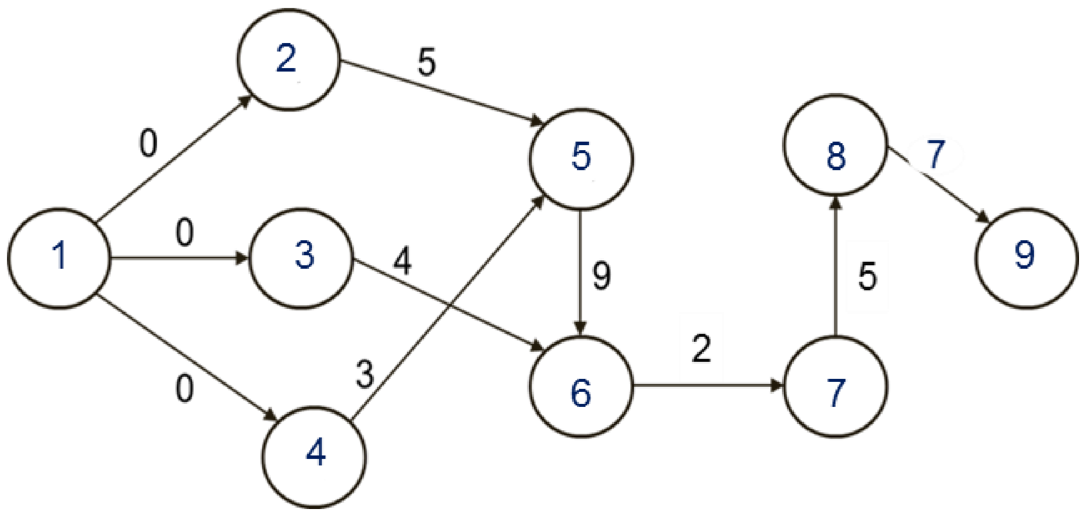
- Añadir vértice ficticio **t** → **final proyecto /**
- Añadir arco (vi, t) / **ds(vi) = 0**
- ($\mathbf{w}_{jt}$) = tiempo de vj



Proyecto 1

Paso 2: ¿Grafo acíclico?

Renumerar >> comprobar i < j para cada (i,j)

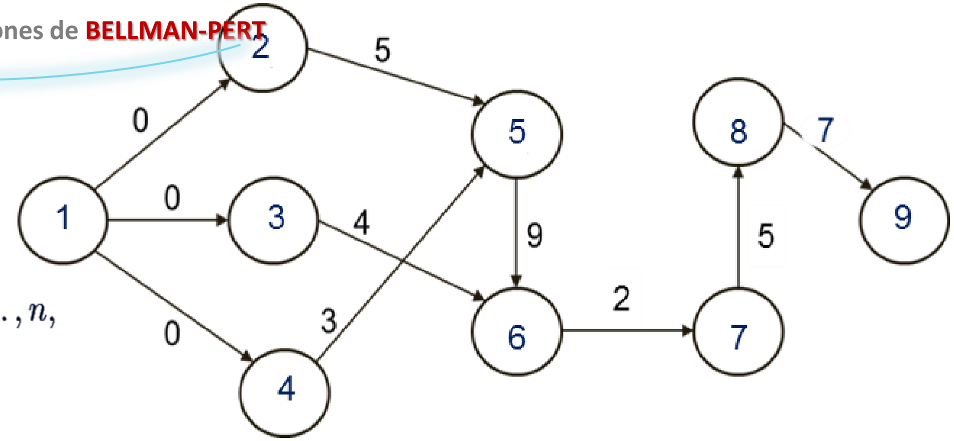


VÉRTICE	s	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	t
NUMERACIÓN	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Proyecto 1

Paso 3: Cálculo del camino crítico.

$$u_1 = 0,$$
$$u_j = \max_{k<j,\ v_k \in \Gamma^{-1}(v_j)} \{u_k + \omega_{kj}\}, \quad j = 2, \ldots, n,$$



$u_1 = 0$

$u_2 = \max\{\underline{u_1 + w_{12}}\} = 0$ (1<2, $v_1 \in \Gamma^{-1}(v_2)$)

$u_3 = \max\{u_1 + w_{13}\} = 0$ (1,2<3, $v_1 \in \Gamma^{-1}(v_3)$)

$u_4 = \max\{u_1 + w_{14}\} = 0$ (1,2,3<4, $v_1 \in \Gamma^{-1}(v_4)$)

$u_5 = \max\{u_2 + w_{25}, u_4 + w_{45}\} = 5$ (1,..4<5, $v_2, v_4 \in \Gamma^{-1}(v_5)$)

$u_6 = \max\{u_3 + w_{36}, u_5 + w_{56}\} = 14$ (1,..5<6, $v_3, v_5 \in \Gamma^{-1}(v_6)$)

$u_7 = \max\{u_6 + w_{67}\} = 16,$ (1,..6<7, $v_6 \in \Gamma^{-1}(v_7)$)

$u_8 = \max\{u_7 + w_{78}\} = 21$ (1,..7<8, $v_7 \in \Gamma^{-1}(v_8)$)

$u_9 = \max\{u_8 + w_{89}\} = 28$ (1,..8<9, $v_8 \in \Gamma^{-1}(v_9)$)

PESO CAMINO CRÍTICO = 28 u

Mínimo tiempo para hacer la tortilla

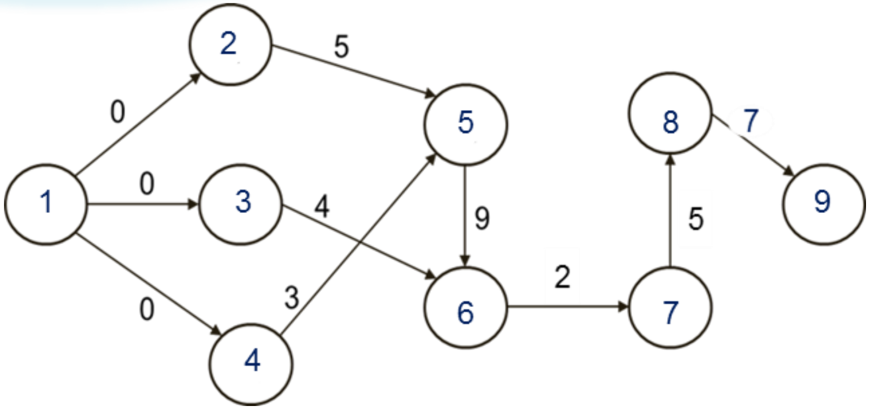
Paso 4: Vértices : 1 2 5 6 7 8 9

Se corresponden con las actividades:

s a_1 a_4 a_5 a_6 a_7 t: actividades críticas

a_2 a_3: actividades **NO** críticas

Proyecto 1



Alguna actividad se retrasa?

>> a_4 se retrasa 2u ¿en cuánto tiempo se terminará el proyecto?

>> La actividad a_3 (4) pide tiempo "extra".

¿Cuánto tiempo le podemos dar de holgura para que no se retrase el proyecto ?

RETRASO EN LAS ACTIVIDADES NO CRÍTICAS

Para **no retrasar** el proyecto no se debe retrasar **ninguna actividad crítica**

Sea P_{jk} el camino desde

la actividad **no** crítica **j** a la actividad crítica **k.**

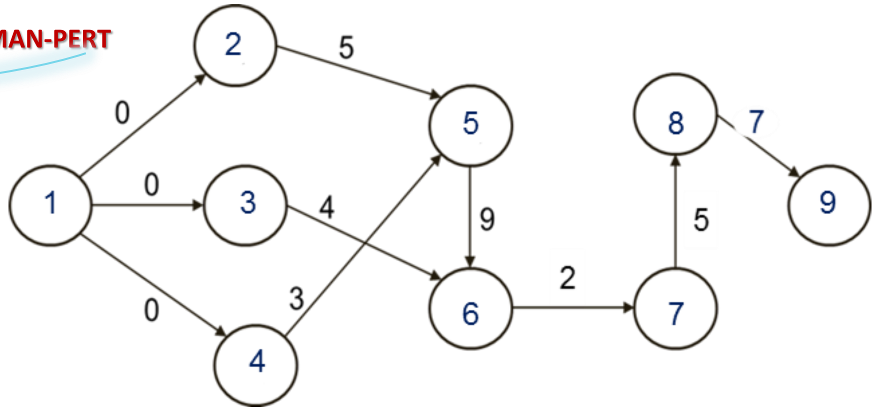
Sea $W(P_{jk})$ **el peso** del camino de j a k

Si **j se retrasa en X** unidades

Para que **no haya retraso** en el proyecto debe verificarse

$$u_j + W(P_{jk}) + X \leq u_k$$

Proyecto 1



>> a_4 se retrasa 2u ¿en cuánto tiempo se terminará el proyecto?

La actividad a_4 es un actividad crítica luego cualquier retraso en su realización retrasará también la duración del proyecto. El proyecto tardará 28 + 2 = 30u

>> a_3 (4) pide tiempo "extra".

De a_3 (4) se accede al c. crítico por la actividad crítica a_4 (5).

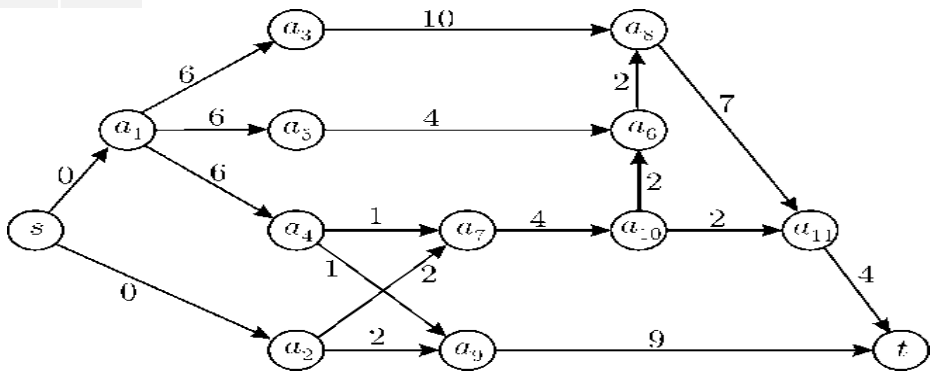
Camino: $P_{4,5,}$ $w(P_{4,5}) = 3$

$\mathbf{u_4 + w(P_{4,5}) + x \leq u_5 \rightarrow 0 + 3 + x \leq 5 \rightarrow x \leq 2}$

Para que **no se retra**se el proyecto la actividad a_3 (4) se puede retrasar como máximo 2u/.

5. Se presenta un proyecto de secuencia de actividades determinado por una lista de actividades $a_{1,\dots}$ a_{11} y las actividades que deben completarse antes de poder iniciarse otras. Para cada una se indican las unidades de tiempo necesario para realizarla. a) Se debe calcular el mínimo tiempo en que puede completarse el proyecto identificando su camino crítico . Para ello indica los pasos a seguir y escribe las ecuaciones de Bellman que se usan para calcular dicho camino. b) Si la actividad a_{12} se retrasa 2u ¿en cuánto tiempo se terminará el proyecto? c) La actividad a_7 pide algo más de tiempo para terminar ¿Cuánta holgura de tiempo se le puede asignar para que no retrase el proyecto?

Actividad	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
Tiempo/u	6	2	10	1	4	2	4	7	9	2	4
Prerrequisitos	-	-	a_1	a_1	a_1	a_5 a_{10}	a_2 a_4	a_3 a_6	a_2 a_4	a_7	a_8 a_{10}



Sol **a) Cálculo del camino crítico:**

Paso 1: Diseño del GDP

Vértices : actividades.

Arco (v_i,v_j): tiempo que tarda v_j antes de que comience v_j

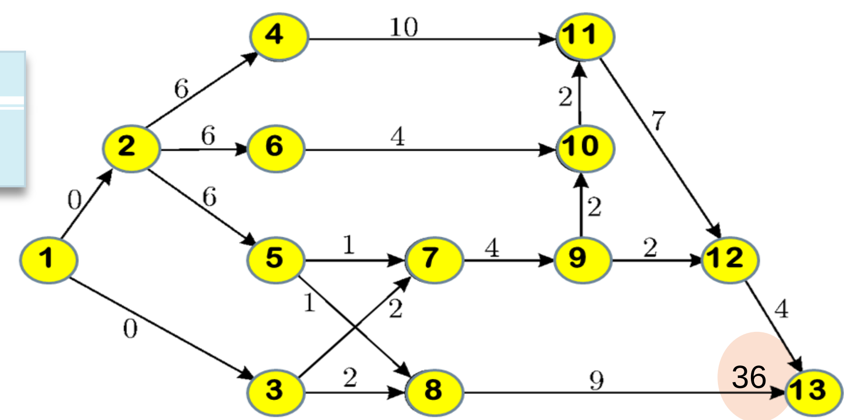
Añadir vértices s, t.

Paso 2: ¿Grafo acíclico?

Se renumeran los vértices aplicando alg.numeración y se comprueba Th-4.1

VÉRTICE	s	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	t
NUMERAC.	1	2	3	4	5	6	10	7	11	8	9	12	13

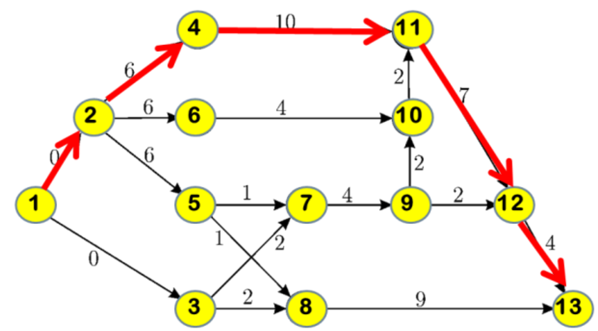
Se comprueba que $\forall(i,j) \in E$, $i < j$



Sigue 5

Paso 3: Cálculo del camino crítico.

$$u_1 = 0,$$
$$u_j = \max_{k<j,\ v_k \in \Gamma^{-1}(v_j)} \{u_k + \omega_{kj}\}, \quad j = 2, \ldots, n,$$



PESO CAMINO CRÍTICO = **27 u**

Mínimo tiempo para hacer la tortilla

$u_1 = 0$

$u_2 = \max\{u_1 + \omega_{12}\} = 0$ (1<2, $v_1 \in \Gamma^{-1}(v_2) = \{v_1\}$)

$u_3 = \max\{u_1 + \omega_{13}\} = 0$ (1,2<3, $v_1 \in \Gamma^{-1}(v_3) = \{v_1\}$)

$u_4 = \max\{u_2 + \omega_{24}\} = 6$ (1,2,3<4, $v_1 \in \Gamma^{-1}(v_4) = \{v_1\}$)

$u_5 = \max\{u_2 + \omega_{25}\} = 6$ (1,..4<5, $v_1 \in \Gamma^{-1}(v_5) = \{v_1\}$)

$u_6 = \max\{u_2 + \omega_{26}\} = 6$ (1,..5<6, $v_1 \in \Gamma^{-1}(v_6) = \{v_1\}$)

$u_7 = \max\{u_3 + \omega_{37},\ u_5 + \omega_{57}\} = \max\{0 + 2, 6 + 1\} = 7$ (1,..6<7, $v_3, v_5 \in \Gamma^{-1}(v_7) = \{v_3, v_5\}$)

$u_8 = \max\{u_3 + \omega_{38},\ u_5 + \omega_{58}\} = \max\{0 + 2, 6 + 1\} = 7$ (1,..7<8, $v_3, v_5 \in \Gamma^{-1}(v_8) = \{v_3, v_5\}$)

$u_9 = \max\{u_7 + \omega_{79}\} = 7 + 4 = 11$ (1,..8<9, $v_7 \in \Gamma^{-1}(v_9) = \{v_7\}$)

$u_{10} = \max\{u_6 + \omega_{610},\ u_9 + \omega_{910}\} = \max\{6 + 4, 11 + 2\} = 13$ (1,..9<10, $v_6, v_9 \in \Gamma^{-1}(v_{10}) = \{v_6, v_9\}$)

$u_{11} = \max\{u_4 + \omega_{411},\ u_{10} + \omega_{1011}\} = \max\{6 + 10, 13 + 2\} = 16$ (1,..10<11, $v_4, v_{10} \in \Gamma^{-1}(v_{11}) = \{v_4, v_{10}\}$)

$u_{12} = \max\{u_9 + \omega_{912},\ u_{11} + \omega_{1112}\} = \max\{11 + 2, 16 + 7\} = 23$ (1,..11<12, $v_9, v_{11} \in \Gamma^{-1}(v_{12}) = \{v_9, v_{11}\}$)

$u_{13} = \max\{u_8 + \omega_{813},\ u_{12} + \omega_{1213}\} = \max\{7 + 9, 23 + 4\} = 27$ (1,..12<13, $v_8, v_{12} \in \Gamma^{-1}(v_{13}) = \{v_8, v_{12}\}$)

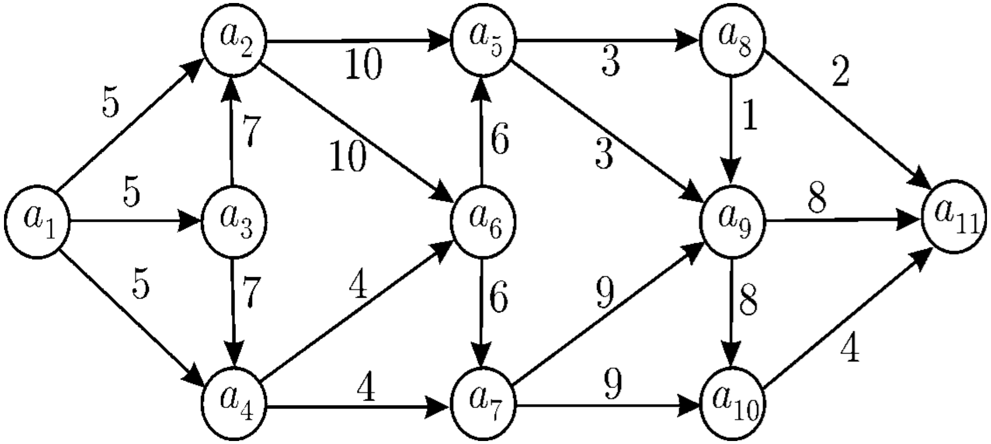
Paso 4: Vértices del camino crítico: 1 2 4 11 12 13
Se corresponden con las actividades:
s a_1 a_3 a_8 a_{11} t: actividades críticas
a_2 a_5 a_6 a_7 a_9 a_{10} : actividades NO críticas

b) La actividad a_{10} (9) se retrasa 2u ¿en cuánto tiempo se terminará el proyecto?
Como la actividad a_{10} es un actividad no crítica calculamos si su retraso afecta a la duración total del proyecto. $u_j + w(P_{jk}) + x \leq u_k$

Camino $P_{9,11}$: 9, 10, 11; $w(P_{9,11}) = 2 + 2 = 4$; $u_9 + w(P_{9,11}) + x \leq u_{11}$; $11 + 4 + x \leq 16$; $x \leq 1$

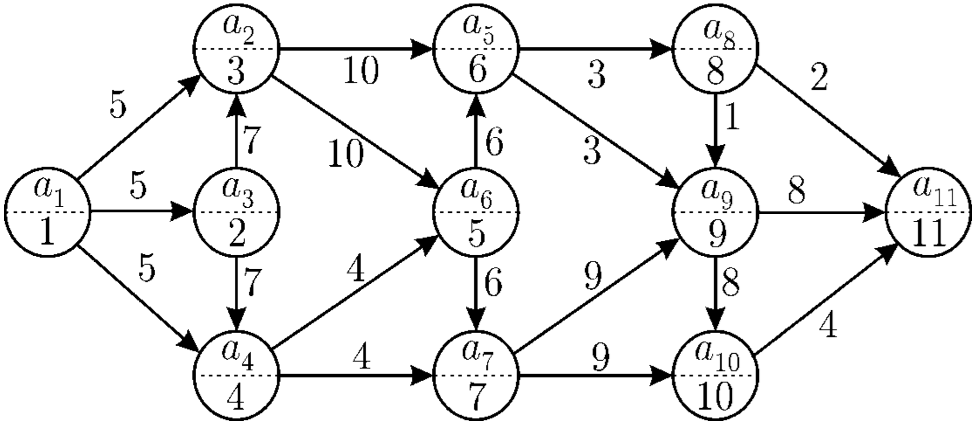
Camino $P_{9,12}$: 9, 12; $w(P_{9,12}) = 2$; $u_9 + w(P_{9,12}) + x \leq u_{12}$; $11 + 2 + x \leq 16$; $x \leq 3$, si **$x \leq 1$, el proyecto no se retrasa pero si X>1 la actividad** u_8 (la actividad a_{10} se puede retrasar como máximo 1 unidad de tiempo.

Ejercicio 2-PERT. Calcula el **mínimo nº de días** para c**ompletar** el proyecto implementado en el grafo.

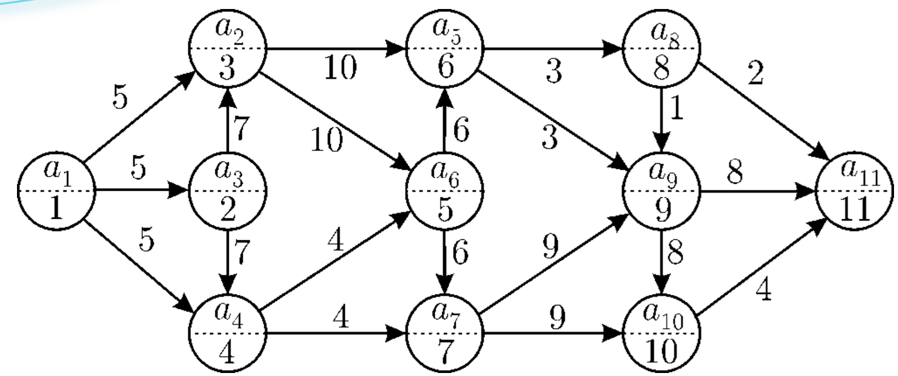


¿Cuántos días se puede **retrasar** la actividad **a_5** sin afectar a la duración total del proyecto**?**

Renumerar vértices



EJ2-PERT (cont)

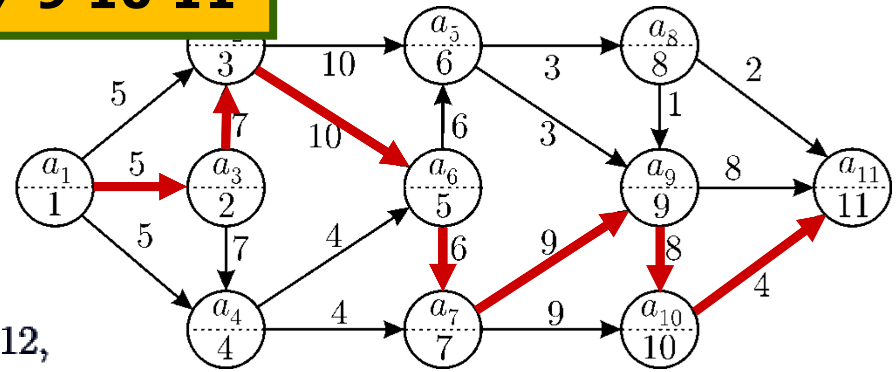


Pesos

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 0, \\
u_2 &= \max\{u_1+\omega_{12}\} = 5, \\
u_3 &= \max\{u_1+\omega_{13}, \underline{u_2+\omega_{23}}\} = \max\{5, 5+7\} = 12, \\
u_4 &= \max\{u_1+\omega_{14}, \underline{u_2+\omega_{24}}\} = \max\{5, 5+7\} = 12, \\
u_5 &= \max\{\underline{u_3+\omega_{35}}, u_4+\omega_{45}\} = \max\{12+10, 12+4\} = \\
u_6 &= \max\{u_3+\omega_{36}, \underline{u_5+\omega_{56}}\} = \max\{12+10, 22+6\} = \\
u_7 &= \max\{u_4+\omega_{47}, \underline{u_5+\omega_{57}}\} = \max\{12+4, 22+6\} = 28, \\
u_8 &= \max\{u_6+\omega_{68}\} = 28+3 = 31, \\
u_9 &= \max\{u_6+\omega_{69}, \underline{u_7+\omega_{79}}, u_8+\omega_{89}\} = \max\{28+3, 28+9, 31+1\} = 37, \\
u_{10} &= \max\left\{u_7+\omega_{7,10}, \underline{u_9+\omega_{9,10}}\right\} = \max\{28+9, 37+8\} = 45, \\
u_{11} &= \max\left\{u_8+\omega_{8,11}, u_9+\omega_{9,11}, \underline{u_{10}+\omega_{10,11}}\right\} = \max\{31+2, 37+8, 45+4\} = 49.
\end{aligned}
$$

Mínimo nº de días para completar el proyecto: **49**
peso del camino crítico

Camino crítico: 1 2 3 5 7 9 10 11



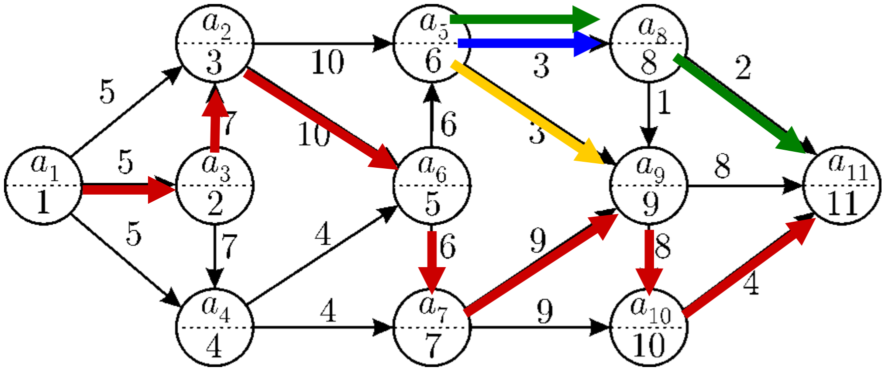
Vértices

$$
\begin{aligned}
u_2 &= \text{máx}\{u_1+\omega_{12}\} = 5,\\
u_3 &= \text{máx}\{u_1+\omega_{13}, \underline{u_2+\omega_{23}}\} = \text{máx}\{5, 5+7\} = 12,\\
u_4 &= \text{máx}\{u_1+\omega_{14}, \underline{u_2+\omega_{24}}\} = \text{máx}\{5, 5+7\} = 12,\\
u_5 &= \text{máx}\{\underline{u_3+\omega_{35}}, u_4+\omega_{45}\} = \text{máx}\{12+10, 12+4\} = 22,\\
u_6 &= \text{máx}\{u_3+\omega_{36}, \underline{u_5+\omega_{56}}\} = \text{máx}\{12+10, 22+6\} = 28,\\
u_7 &= \text{máx}\{u_4+\omega_{47}, \underline{u_5+\omega_{57}}\} = \text{máx}\{12+4, 22+6\} = 28,\\
u_8 &= \text{máx}\{u_6+\omega_{68}\} = 28+3 = 31,\\
u_9 &= \text{máx}\{u_6+\omega_{69}, \underline{u_7+\omega_{79}}, u_8+\omega_{89}\} = \text{máx}\{28+3, 28+9, 31+1\} = 37,\\
u_{10} &= \text{máx}\left\{u_7+\omega_{7,10}, \underline{u_9+\omega_{9,10}}\right\} = \text{máx}\{28+9, 37+8\} = 45,\\
u_{11} &= \text{máx}\left\{u_8+\omega_{8,11}, u_9+\omega_{9,11}, \underline{u_{10}+\omega_{10,11}}\right\} = \text{máx}\{31+2, 37+8, 45+4\} = 49.
\end{aligned}
$$

Actividades críticas:
a1 a3 a2 a6 a7 a9 a10 a11

EJ2-PERT (cont)

Cálculo del máximo retraso permitido para actividad a_5 (nº 6)



a_5 (6) es actividad NO crítica.

Caminos desde 6 por los que accedemos al camino crítico.

Camino: $\mathbf{P_{6,9}}$, **vértices: 6,9;** $w(P_{6,9}) = 3$, $\mathbf{u_6 + w(P_{6,9}) + x \leq u_9}$ → $\mathbf{x \leq 6}$

Camino: $\mathbf{P_{6,9}}$, **vértices: 6,8,9** $w(P_{6,9}) = 4$, $\mathbf{u_6 + w(P_{6,9}) + x \leq u_9}$ → $\mathbf{x \leq 5}$

Camino: $\mathbf{P_{6,11}}$, **vértices: 6,8,11** $w(P_{6,11}) = 5$, $\mathbf{u_6 + w(P_{6,11}) + x \leq u_9}$ → $\mathbf{x \leq 16}$

El máximo retraso que se le puede otorgar a la actividad a_5 (6) es de **5 u/.**