3: CAMINOS MÁS CORTOS

3.1 BELLMAN.

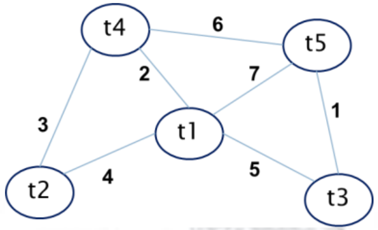
- Ecuaciones de Bellman.
- Proyectos PERT.
- Ejercicios resueltos.

3.2. DIJSKTRA.

- Algoritmo de Dijkstra.
- Ejercicios resueltos.

3.3. FLOYD-WARSHALL.

- Algoritmo de Floyd-Warshall.
- Ejercicios resueltos



G = (V,E) GRAFO NO DIRIGIDO **PONDERADO**

V = { t1, t2, t3, t4, t5 }

E = { {t1,t2}, {t1,t3}, {t1,t4}, {t1,t5}, {t2,t4}, {t3,t5}, {t4,t5} }

Un camino desde t2 a t5 sería C1: t2,t1,t3,t5

con un coste = 10

Otros caminos de t2 a t5 serían:

C2: t2,t1,t4,t5 con coste = 12.

C3: t2,t1,t5 con coste = 11

C4:t2,t4,t1,t5 con coste = 12

C5:t2,t4,t5 con coste = 9

Evidente, que el "mejor" camino será el que tenga menor coste, en este caso será el camino C5.

Para calcular los caminos más cortos (cmc) entre pares de vértices de un grafo aplicaremos diversos algoritmos:

>> Ecuaciones de Bellman: calculan los cmc desde un vértice inicial, numerado con el valor 1, al resto de vértices.

>> Algoritmo de Dijkstra: calcula los cmc desde un vértice cualquiera al resto de vértices.

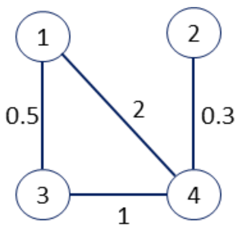
>> Algoritmo de Floyd-Warshall: calcula los cmc entre todos los pares de vértices

Estos algoritmos resultan muy útil en problemas de optimización como los problemas de rutas, de flujo, planificación de proyectos , etc.

>> Un grafo simple G = (V,E) sea GND o GD, es un **grafo ponderado** (GP) si cada arista $\{v_i,v_j\}$ / arco (v_i,v_j) tiene un valor asociado $\mathbf{w_{ij}}$ llamado **peso**.

>> **Matriz de peso Ω (nxn)**:

$$\Omega = [eij] / eij = \begin{cases} wij & \text{si } \{vi, vj\} \in E \text{ (si } (vi, vj) \in E \text{ en el caso dirigido)} \\ \infty & \text{si } \{vi, vj\} \notin E \text{ (si } (vi, vj) \notin E \text{ en el caso dirigido)} \end{cases}$$



Ω	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	∞	∞	0.5	2
v_2	∞	∞	∞	0.3
v_3	0.5	∞	∞	1
v_4	2	0.3	1	∞

>> **Peso de un camino**: suma de los pesos de las aristas/arcos que lo forman.

>> **Camino más corto** (cmc) entre dos vértices es el camino de <u>peso mínimo</u> entre dichos vértices. Usaremos cmc(i-j): camino más corto desde el vértice v_i al v_j

>> **Camino más largo o camino crítico** entre dos vértices es el camino de <u>peso máximo</u> entre dichos vértices.

Los pesos pueden representar costes, tiempos, etc que pueden ser positivos o negativos aunque trabajaremos sólo con pesos positivos ya que si conseguimos un cmc pasando por una arista con coste negativo, al pasar otra vez por la misma reduciríamos el peso del cmc y el problema no tendría fin,

Se debe tener en cuenta:

Vértices numerados de 1 a n.

- Las secciones de un cmc son a su vez cmc.
- Una sección de un camino de vértices 1…n es un camino
- Si C: 1,...,k,...,j es la sucesión de vértices que determina el cmc entre los vértices *1* y *j* de un GP, entonces las secciones S1: 1,...,k, y S2: k,...,j del camino C, son los cmc entre los vértices respectivos (Principio de Optimalidad de la Programación Dinámica).

<u>Corolario</u>: Sea C un cmc entre los vértices *1* y *j*.

Si *k* es el vértice <u>inmediatamente anterior</u> a *j* en el camino C, la sección del camino desde *1* a *k* es el cmc entre estos dos vértices.

Con las ecuaciones de Bellman calcularemos los cmc desde un vértice inicial v_i, que estará numerado con el valor 1, al resto de vértices

Suponemos:
>> GD ponderado.
>> Vértices : numerados de **1** a **n.** $V = \{v_1,\ldots v_n\}$
>> Vértice $\mathbf{v_1}$: origen del camino.
>> $\mathbf{w_{ij}}$: peso del arco (v_i,v_j), **no** negativo.
>> $\mathbf{u_j}$: peso del cmc de v_i a v_j

El peso del cmc desde el vértice v_1 a él mimos es $u_1 = 0$.
Los pesos de los cmc desde el vértice v_1 a cualquier vértice $v_j \neq v_1$ se calculan teniendo en cuenta los pesos de los cmc de las secciones que van desde v_1 al vértice inmediato anterior a v_j , que será v_k.

Ecuaciones de Bellman (B1)

$$u_1 = 0$$
$$u_j = \min_{k<j,\ v_k \in \Gamma^{-1}(v_j)} \{u_k + \omega_{kj}\}, \quad j = 2, \ldots, n$$

>> Bellman sólo se puede aplicar a grafos sin circuitos.
Se debe comprobar que el grafo no tiene circuitos.

Si G es un grafo sin circuitos entonces se pueden ordenar los vértices de tal forma que $\forall$ (i,j) $\in$ E se cumpla que i < j, con esto las ecuaciones (1) se pueden resolver recursivamente / para calcular u_j sólo será necesario considerar los vértices $i < j$, $i \in \Gamma^{-1}(v_j)$ ya que para los demás vértices i > j será $w_{ij} = \infty$

Th-4.1B: Un GD no tiene circuitos si, y sólo si, existe una numeración de los vértices para la que se cumple que si (i,j) $\in$ E entonces $i < j$
Dem: Si existe un circuito en el grafo, e.g., $v_{i1}, v_{i2}, \ldots v_{ik}, v_{i1}$, por la propiedad que cumple la numeración de los vértices tendríamos: $i_1 < i_2 < \ldots < i_k < i_1$, (contradicción en $i_1 < i_1$) → grafo no tiene circuitos. Recíproco: Sea GD sin circuitos, entonces existe un vértice / $de(v_i)=0$ que enumeramos $v_i=1$ y lo eliminamos junto con sus arcos incidentes con él; el grafo resultante es acíclico; se repite el proceso hasta que todos los vértices queden numerados, evidente que no puede existir un arco (v_i,v_j) / i > j.

Proposición: Todo GD sin circuitos tiene al menos un vértice con grado de entrada cero.
Dem: Sup. un GD sin circuitos y $\forall v_i \in V$, $de(v_i)>0$.
Si |V|=2, existe un arco (v_1,v_2) y (v_2,v_1) que sería un circuito, contradicción. Para |V|≥2 también se repetirían vértices y tendríamos un circuito, luego si G es un GD al menos un vértice debe tener $de(v_i)=0$ para que en la cadena no se repita ningún vértice.

$\Gamma^{-1}(v) = \{u \in V / (u,v) \in E\}$ los vértices u son los extremos iniciales de los arcos que acaban en v

ALGORITMO DE NUMERACIÓN

Si el grafo no tiene circuitos sus vértices se pueden renumerar.

Etapa 1. Inicializar $i \leftarrow 1$, $V^{(1)} = V$

Etapa 2. Tomar $v \in V^{(i)}$ / $d_e(v) = 0$ en $G[V^{(i)}]$

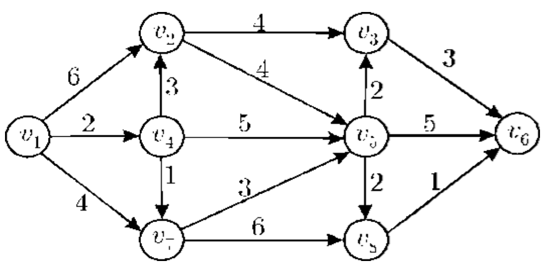
Etapa 3. Numerar el vértice v como vértice i.

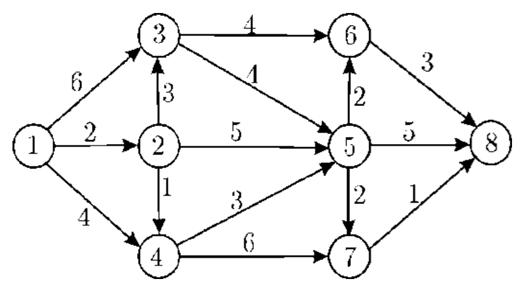
Hacer $V^{(i+1)} = V^{(i)} \sim \{v\}$

Hacer $i \leftarrow i + 1$

Etapa 4. Si $V^{(i)} = \{\ \}$ entonces PARAR

En otro caso, volver a la etapa 2.





Ejemplo. 4.1.1. Sea el grafo dirigido G = (V,E) determinado por la matriz de pesos Ω cuyas filas siguen el orden del conjunto $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

a) Se comprueba si G tiene circuitos aplicando el Th-4.1B, para ello se consideran los vértices numerados V = {1,2,3,4}.

b) Determina, si es el caso, los pesos y vértices de los cmc desde el vértice 1 al resto de vértices aplicando las ecuaciones (B1).

$$\Omega = \begin{bmatrix} \infty & 5 & 3 & 2 \\ \infty & \infty & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

Sol. a) Se comprueba si G tiene circuitos.

Como V = {1,2,3,4} los arcos son E = { (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (3,4) }.

Podemos observar que todos los arcos (i,j) cumplen que i < j, luego G no tiene circuitos.

b) Como G no tiene circuitos se pueden aplicar las ecuaciones Bellman (B1).

$u_1 = 0$

$u_2 = \min\{\underline{u_1 + w_{12}}\} = 5$ (1<2, (1,2) $\in$ E)

$u_3 = \min\{\underline{u_1 + w_{13}}, u_2 + w_{23}\} = \min\{0+3, 5+2\} = 3$ (1,2<3, (1,3), (2,3) $\in$ E)

$u_4 = \min\{\underline{u_1 + w_{14}}, u_3 + w_{34}\} = \min\{0+2, 3+4\} = 2$ (1,2,3<4, (1,4), (3,4) $\in$ E)

Se determinan los vértices que conforman los cmc a partir de las ecuaciones anteriores observando dónde se han alcanzado los mínimos valores.

El peso del cmc(1-2), $u_2 = 5$, se ha obtenido con el arco (1,2), luego cmc(1-2) = 1, 2.

El peso del cmc(1-3), $u_3 = 3$, se ha obtenido con el arco (1,3), luego cmc(1-3) = 1, 3.

El peso del cmc(1-4), $u_4 = 2$, se ha obtenido con el arco (1,4), luego cmc(1-4) = 1, 4.

APLICACIÓN de las Ec. Bellman: PROYECTOS de SECUENCIA DE ACTIVIDADES

PERT (Project Evaluation Research Task: Técnicas de Evaluación y Control de Proyectos (creado por Bernad Roy (1960). Proyecto Polaris)

Una aplicación de las Ec. Bellman la encontramos en el campo de la secuenciación de actividades. Existen proyectos de gran envergadura que incluyen la realización de un gran número de actividades relacionadas de diversas formas de tal forma que para realizar una actividad es necesario que otras hayan finalizado. La ejecución de este tipo de proyectos hace necesaria una planificación racional del orden en que deben ser realizadas las actividades para que el proyecto se ejecute con el mínimo tiempo posible. La gestión de proyectos y la planificación de la producción se puede controlar mediante diferentes métodos. En este tema veremos el método PERT basado en la construcción de redes. PERT está diseñado para realizar la planificación y programación de las actividades que determinan proyectos de este tipo y supone que el tiempo para realizar cada una de las actividades es una variable aleatoria descrita por una distribución de probabilidad. Este método se usa en construcción de casas, distribución de tiempos en salas de operaciones, por ej. planificación de itinerarios,…

Presentación del problema: Dado un conjunto de actividades secuenciadas que definen un proyecto se debe calcular el mínimo tiempo necesario para completar dicho proyecto de tal forma que todas las actividades se hayan realizado. Esto se corresponde en teoría de grafos con el cálculo del camino crítico (camino más largo) entre dos vértices en un grafo dirigido ponderado acíclico.

PASOS PARA CALCULAR EL MÍNIMO TIEMPO NECESARIO PARA COMPLETAR UN PROYECTO DE SECUENCIA DE ACTIVIDADES USANDO MÉTODO PERT

1 Modelar el proyecto mediante un GD Ponderado.

2 Renumerar vértices V = {1,…n} y comprobar que el grafo es acíclico.

3 Calcular el camino crítico desde el vértice 1 al vértice n.

4 Identificar los vértices (actividades) que forman parte del camino crítico que se denominarán: actividades críticas .

Aunque se debe calcular el mínimo tiempo en que se completa el proyecto, en las ecuaciones (B1) se debe sustituir “min” por “max”. El cambio es evidente porque cuando se alcanza una actividad del camino todas las anteriores en la secuencia deben haber terminado, ed., si tenemos que la actividad 1 tarda 2u y la actividad 2 tarda 4u, si elegimos el mínimo que sería 2u la actividad que tarda 4u no se completaría.

EXPLICACIÓN DE LOS PASOS:

1 Modelar el proyecto mediante un grafo G = (V,E), GDP

- G debe ser un grafo ponderado y acíclico (sin circuitos, ya que si existiera al menos uno el proyecto sería irrealizable).
- Vértices de V : actividades del proyecto.
- Arcos de E: se incluye un arco (v_i,v_j) si para realizar la actividad v_j es necesario haber realizado justo antes la actividad v_i.
- Peso del arco w_{ij} : tiempo necesario que debe transcurrir entre el inicio de la act. v_i y el inicio de la act. v_j.
- Se añaden dos vértices ficticios *s* y *t* que representan el comienzo y fin del proyecto.
- Se añade el arco (s,vi) / de(vi)=0 con peso $w_{si} = 0$ (tiempo para empezar).
- Se añade el arco (vi,t) / ds(vi) = 0 con peso w_{jt} que es el tiempo que tarda en terminar cada una de las actividades que tiene un arco a t.

2 Renumerar vértices y comprobar que el grafo es acíclico: Los vértices se renumeran aplicando el Algoritmo de numeración y después se comprueba que $\forall(i,j) \in E$, $i < j$ (Th-4.1B)

3 Cálculo del camino crítico: La duración mínima del proyecto se corresponde con el peso del camino crítico desde el vértice numerado con 1 hasta el n. Se calcula dicho peso aplicando

$$\mathbf{u_1 = 0}$$

$$\mathbf{u_j = \max\{u_k + w_{kj} \ / \ k < j, (k, j) \in E\}, j = 2,\ldots n} \qquad \textbf{(B2)}$$

Los vértices del camino serán todas las actividades que determinan la duración total del proyecto >> **actividades críticas.**

4 Identificar las actividades críticas : Los vértices o actividades que forman parte del camino crítico se obtienen identificando en cada paso de los cálculos de los pesos los vértices en los que se han alcanzado los máximos valores. Se empieza desde el vértice **n** y se termina en el **1**.

Los proyectos de secuencia de actividades que generen grafos con ciclos son irresolubles

RETRASO EN LAS ACTIVIDADES

En este tipo de proyectos algunas actividades pueden sufrir un retraso o pueden pedir un tiempo de "holgura" para finalizar.

Si esto sucede se debe determinar el **tiempo máximo** que se les puede asignar para que **no** se retrase el proyecto.

Se consideran varios casos:

-- Si la actividad que sufre el retraso es crítica el proyecto se retrasará las mismas unidades que las que se retrase dicha actividad.

Ej. Si un proyecto tarda Xu en realizarse y una actividad crítica se retrasa Yu el proyecto tardará (X + Y)u.

-- Si la actividad **no es crítica** se debe calcular el retraso máximo que puede sufrir para que no afecte a la duración total del proyecto.

Cualquier actividad no crítica ha intervenido en el cálculo del peso de una o varias actividades críticas. Para calcular el tiempo máximo que se puede retrasar sin modificar la duración del proyecto se considera lo siguiente:

Sea *j* una actividad no crítica.

Sea P_{jk} el camino desde la actividad ***j*** a una actividad crítica *k* y $w(P_{jk})$ el peso de dicho camino.

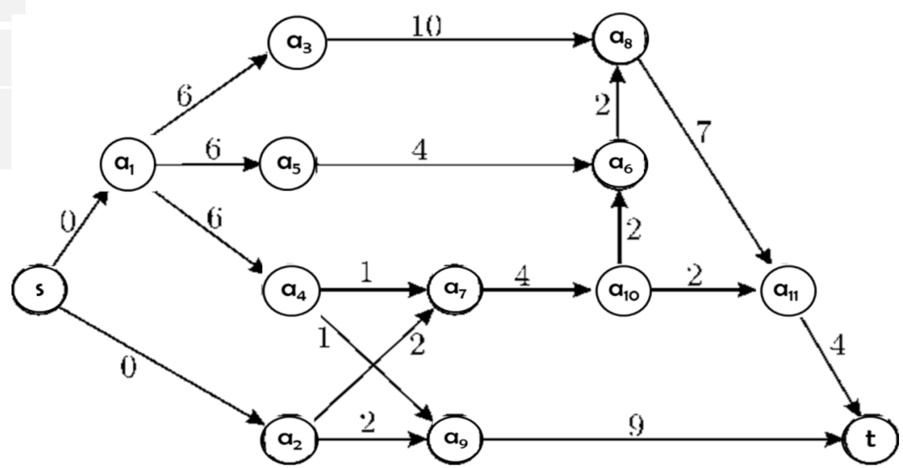
La actividad *j* se puede retrasar, como máximo, en *x* unidades siempre que:

$$u_j + w(P_{jk}) + x \leq u_k$$

- Si se cumple esta condición, el proyecto no se retrasa.
- Tenemos que comprobar la inecuación anterior para <u>todos</u> los casos en que exista un camino desde *j* a una actividad crítica.

Ejemplo 4.1.2. Se presenta un proyecto de secuencia de actividades determinado por una lista de actividades $a_{1,\dots}$ a_{11}. Para cada una se indica el tiempo en minutos necesario para realizarla y, para algunas, las actividades que deben completarse antes de poder iniciarse. a) Se debe calcular el mínimo tiempo en que se puede completar el proyecto identificando su camino crítico . Para ello se deben indicar los pasos a seguir y escribir las ecuaciones de Bellman . b) Si la actividad a_{10} se retrasa 2u ¿en cuánto tiempo se terminará el proyecto? c) La actividad a_7 pide algo más de tiempo para terminar ¿Cuánto tiempo máximo le podemos asignar para que no se retrase el proyecto?

Actividad	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
Tiempo/u	6	2	10	1	4	2	4	7	9	2	4
Prerrequisitos	-	-	a_1	a_1	a_1	a_5 a_{10}	a_2 a_4	a_3 a_6	a_2 a_4	a_7	a_8 a_{10}



Sol a) Cálculo del camino crítico:

Paso 1: Diseño del GDP

Vértices : actividades.

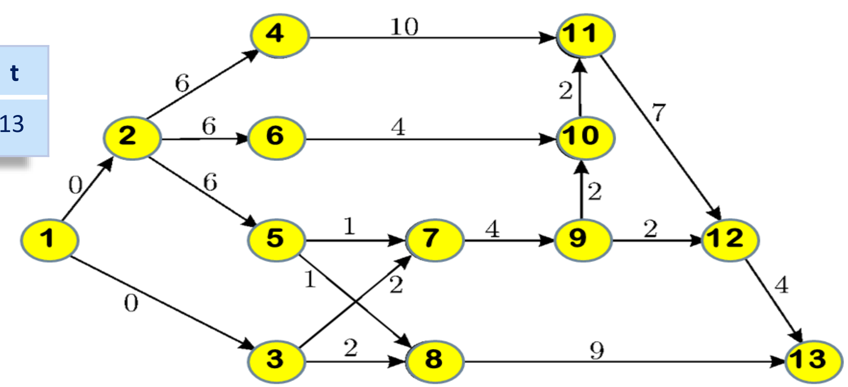
Arco (v_i,v_j): tiempo que tarda v_j antes de que comience v_j

Añadir vértices s, t.

Paso 2: ¿Grafo acíclico?

Se renumeran los vértices aplicando alg.numeración y se comprueba Th-4.1

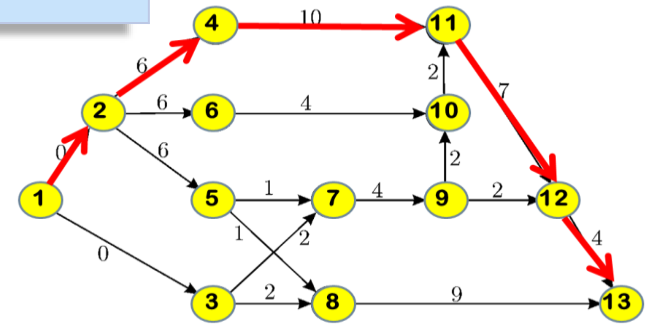
VÉRTICE	s	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	t
NUMERAC.	1	2	3	4	5	6	10	7	11	8	9	12	13



Se comprueba que $\forall(i,j) \in E$, $i < j \rightarrow$ OK

VÉRTICE	s	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	t
NUMERAC.	1	2	3	4	5	6	10	7	11	8	9	12	13

Sigue Ej.4.1.2



Paso 3: Cálculo del camino crítico aplicando Ec. Bellman (B2).

$$\mathbf{u_1 = 0}$$

$$\mathbf{u_j = \max\{u_k + w_{kj}\ /\ k < j, (k, j) \in E\}, j = 2,\dots n} \qquad \textbf{(B2)}$$

$u_1 = 0$

$u_2 = \max\{\underline{u_1 + w_{12}}\} = 0$ (1<2, (1,2) ∈ E)

$u_3 = \max\{u_1 + w_{13}\} = 0$ (1,2<3, (1,3) ∈ E)

$u_4 = \max\{\underline{u_2 + w_{24}}\} = 6$ (1,2,3<4, (2,4) ∈ E)

$u_5 = \max\{u_2 + w_{25}\} = 6$ (1,..4<5, (2,5) ∈ E)

$u_6 = \max\{u_2 + w_{26}\} = 6$ (1,..5<6, (2,6) ∈ E)

$u_7 = \max\{u_3 + w_{37}, u_5 + w_{57}\} = \max\{0 + 2, 6 + 1\} = 7$ (1,..6<7, (3,7), (5,7) ∈ E)

$u_8 = \max\{u_3 + w_{38}, u_5 + w_{58}\} = \max\{0 + 2, 6 + 1\} = 7$ (1,..7<8, (3,8), (5,8) ∈ E)

$u_9 = \max\{u_7 + w_{79}\} = 7 + 4 = 11$ (1,..8<9, (7,9) ∈ E)

$u_{10} = \max\{u_6 + w_{610}, u_9 + w_{910}\} = \max\{6 + 4, 11 + 2\} = 13$ (1,..9<10, (6,10), (9,10) ∈ E)

$u_{11} = \max\{u_4 + w_{411}, u_{10} + w_{1011}\} = \max\{6 + 10, \underline{13 + 2}\} = 15$ (1,..10<11, (4,11), (10,11) ∈ E)

$u_{12} = \max\{u_9 + w_{912}, u_{11} + w_{1112}\} = \max\{11 + 2, \underline{15 + 7}\} = 23$ (1,..11<12,, (9,12), (11,12) ∈ E)

$u_{13} = \max\{u_8 + w_{813}, u_{12} + w_{1213}\} = \max\{7 + 9, \underline{23 + 4}\} = 27$ (1,..12<13, (8,13), (12,13) ∈ E)

PESO del CAMINO CRÍTICO = 27 u
Mínimo tiempo para completar el proyecto

Paso 4: Vértices del camino crítico:

1 2 4 11 12 13

Se corresponden con las actividades:

s a_1 a_3 a_8 a_{11} t: actividades críticas

actividades NO críticas: a_2 a_5 a_6 a_7 a_9 a_{10}

b) La actividad a_{10} (vértice 9) se retrasa 2u ¿en cuánto tiempo se terminará el proyecto?

Como el vértice 9 corresponde a una actividad no crítica calculamos si su retraso afecta a la duración total del proyecto. $u_j + w(P_{jk}) + x \leq u_k$

- Camino $P_{9,11}$: 9, 10, 11; $w(P_{9,11}) = 2 + 2 = 4$; $u_9 + w(P_{9,11}) + x \leq u_{11};\ 11 + 4 + x \leq 16;\ x \leq 1$
- Camino $P_{9,12}$: 9, 12; $w(P_{9,12}) = 2$; $u_9 + w(P_{9,12}) + x \leq u_{12};\ 11 + 2 + x \leq 16;\ x \leq 3$,
- Si **$x \leq 1$, el proyecto no se retrasa pero si $x>1$ si.**
- <u>Explicación</u>**:** la actividad a_{10} (9) interviene en el cálculo de las actividades críticas cuyos vértices son 11 y 12. Si a_{10} (9) en lugar de tardar 2u tardara 4u (se retrasara 2u) entonces $u_{12} = \max\{u_9 + w_{912}, u_{11} + w_{1112}\} = \max\{11 + \mathbf{4}, \underline{16 + 7}\} = 23$ por este camino se mantendría el tiempo, pero por el otro camino $u_{11} = \max\{u_4 + w_{411}, u_{10} + w_{1011}\} = \max\{6 + 10, \underline{13 + \mathbf{4}}\} = \mathbf{17}$ se modifica, luego el camino crítico se vería modificado en tiempo y recorrido.
- Comprobar que ahora el peso c. crítico sería 28u y los vértices : 1 2 5 7 9 10 11 12 13