

Tema 1.- CONCEPTOS FÍSICOS Y MATEMÁTICOS BÁSICOS

• Magnitudes físicas y medidas

Magnitud física es todo aquello que se puede medir. La longitud, la masa, el tiempo, son magnitudes, ya que pueden medirse. Una magnitud física está correctamente expresada por un *número* y una *unidad*, aunque hay algunas magnitudes físicas (relativas) que no necesitan de unidades y representan cocientes de magnitudes de la misma especie. Cantidad de una magnitud física es el estado de la misma en un determinado fenómeno físico. La aceleración es una magnitud física y el valor de la aceleración de la gravedad en un punto en la superficie de la Tierra es una cantidad de esta magnitud.

Las magnitudes físicas se dividen en tres grupos:

(i) *Magnitudes básicas o fundamentales*: Aunque las leyes físicas relacionan entre sí cantidades de distintas magnitudes físicas, siempre es posible elegir un conjunto de magnitudes que no estén relacionados entre sí por ninguna ley física, es decir, que sean independientes.

(ii) *Magnitudes derivadas*: Se derivan de las magnitudes físicas básicas mediante fórmulas matemáticas. Las leyes físicas que permiten su obtención a partir de las magnitudes fundamentales reciben el nombre de ecuaciones de definición.

(iii) *Magnitudes suplementarias*: Son el ángulo plano (θ), que se expresa en radianes (rad) y el ángulo sólido (Ω) que se expresa en estereorradianes (sr). El ángulo sólido completo alrededor de un punto es 4π sr.

Medir es comparar dos magnitudes de la misma especie, una de las cuales se toma como patrón. Se trata de determinar la cantidad de una magnitud por comparación con otra que se toma como unidad. El resultado de una medida es un número que debe ir acompañado de la unidad empleada. Para que se pueda efectuar una medida es necesario disponer del sistema que se pretende medir y un instrumento de medida que lleve incorporado el patrón a utilizar. El proceso de medida siempre es imperfecto debido a deficiencias del experimentador y de los instrumentos de medida. El concepto de error surge como necesario para dar fiabilidad a las medidas efectuadas. Toda medida lleva consigo intrínsecamente una incertidumbre o error, de tal modo que no es posible conocer exactamente el número que la expresa. Por ello, cuando se realiza una medida en el laboratorio es importante conocer no sólo el valor de la magnitud física, sino también la exactitud con que ha sido determinada.

• Sistemas de Unidades. Sistema Internacional

Las unidades son los patrones que se eligen para poder efectuar medidas. Su elección es arbitraria por lo que es necesario un entendimiento entre todos los científicos. A un conjunto de unidades que representan las magnitudes físicas de interés se les llama *sistema de unidades*, y se utilizan como unidades para medir otras cantidades de las magnitudes correspondientes. Para definir un sistema de unidades es necesario establecer:

-La *base del sistema*, es decir, las magnitudes que se toman como fundamentales.

-La cantidad que se elige como *unidad* de cada magnitud fundamental.

-Las *ecuaciones de definición* de las magnitudes derivadas, los valores de las constantes de proporcionalidad de estas ecuaciones.

En Mecánica basta con elegir convenientemente tres magnitudes fundamentales y sus unidades para poder derivar todas las demás. Si se eligen longitud, masa y tiempo se tienen los llamados *sistemas absolutos*. Si las magnitudes fundamentales son longitud, fuerza y tiempo se tienen los *sistemas técnicos* muy usados en ingeniería.

En la XI Conferencia General de Pesas y Medidas celebrada en París en 1960 se aceptó como *Sistema Internacional de Unidades (S.I.)* el que había propuesto, a principio de este siglo, el italiano Giorgi. En España fue declarado legal por la ley de Pesas y Medidas de 1967.

(i) *Magnitudes y unidades fundamentales*:

longitud	metro (m)
masa	kilogramo (kg)
tiempo	segundo (s)
corriente eléctrica	amperio (A)
temperatura termodinámica	kelvin (K)
cantidad de sustancia	mol (mol)
intensidad luminosa	candela (cd)

(ii) *Magnitudes y unidades derivadas*: Se expresan mediante relaciones algebraicas de las unidades fundamentales y de las suplementarias, haciendo uso de símbolos matemáticos de multiplicar y dividir. Para establecer la unidad derivada se escribe una ecuación que relacione la magnitud correspondiente con las fundamentales. Se hace después que las magnitudes valgan 1 y tendremos la unidad de la magnitud derivada. Muchas de estas unidades han recibido nombre oficial y símbolo como newton (N), culombio (C), faradio (F), henrio (H), ohmio (Ω), tesla (T), voltio (V), etc.

(iii) *Unidades suplementarias*: El radián (rad) para el ángulo plano y el estereorradián (sr) como unidad de ángulo sólido.

(iv) *Prefijos del Sistema Internacional*: En ocasiones para medir ciertas cantidades resulta más cómodo utilizar múltiplos o submúltiplos de la unidad. Los múltiplos y submúltiplos de las unidades, tanto fundamentales como derivadas, se forman añadiendo un prefijo. Existen una serie de prefijos aceptados con sus símbolo y nombre particulares.

• Análisis dimensional. Ecuación de dimensiones

A las siete magnitudes fundamentales se les asocia unívocamente el concepto de *dimensión*. A cada magnitud fundamental le hacemos corresponder su símbolo, es decir: longitud (L), masa (M), tiempo (T), intensidad eléctrica (I), temperatura termodinámica (K), cantidad de sustancia (n) e intensidad luminosa (Ir).

Toda magnitud derivada se puede expresar por medio de un producto (*ecuación de dimensiones*) de las magnitudes fundamentales. Para ello, se sustituye cada magnitud fundamental de la ecuación de definición de la magnitud derivada, por su dimensión. Escribiremos:

$$[A] = \text{dimensiones de la magnitud A}$$

por ejemplo: $F = ma$ $[F] = [m] [a] = M [e/t^2] = M L T^{-2}$

Para que la fórmula representativa de una ley que relaciona diversas magnitudes físicas sea correcta, debe ser homogénea, es decir, las ecuaciones dimensionales de sus dos miembros deben ser idénticas. La *coherencia de las dimensiones* es una condición necesaria para que una ecuación física sea correcta pero no suficiente. Una ecuación puede tener las dimensiones correctas en cada miembro sin describir ninguna situación física. El conocimiento de las dimensiones de las magnitudes nos permite recordar una fórmula e incluso hacer suposiciones sobre la misma.

• BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

[TIPLER 5ª Edición, 2005] *Cap. 1: Sistemas de medida.*

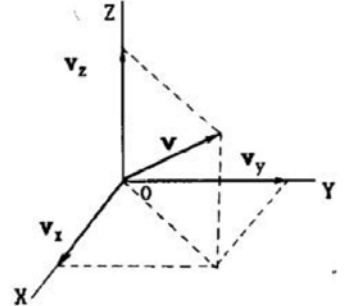
Tema 1.- CONCEPTOS FÍSICOS Y MATEMÁTICOS BÁSICOS. Vectores y Escalares.

• Vectores y Escalares

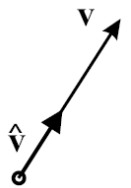
En la naturaleza existen magnitudes físicas que están completamente determinadas por su valor y sus unidades. De forma genérica puede decirse que estas magnitudes son **escalares**. Ejemplos de estas magnitudes son la masa, la distancia, la temperatura, etc. Por el contrario, existen otras magnitudes que además de su valor y unidades están “dotadas” de una propiedad adicional: su dirección. Este tipo de magnitudes se conocen con el nombre de magnitudes vectoriales e incluyen a magnitudes tales como la posición, la velocidad, la fuerza, el campo eléctrico, etc. Para expresar las magnitudes vectoriales se hace uso de los **vectores** y por tanto se hace imprescindible el álgebra de vectores.

(A) **Notación vectorial:** Las magnitudes vectoriales se expresan mediante letras minúsculas o mayúsculas en negrita, \mathbf{v} , \mathbf{V} o bien con una flecha/raja encima de dichas letras, \vec{v} , \vec{V} . Para especificar dichos vectores se usan frecuentemente varios tipos de notación.

- Mediante una terna de números que son las **componentes del vector** en los ejes cartesianos x, y, z , esto es, $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Geométricamente, las componentes del vector son las proyecciones de este vector en los ejes cartesianos.



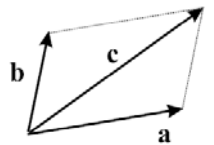
- El vector \vec{v} puede también expresarse en función de su módulo y de su vector unitario. El **módulo** del vector \vec{v} suele denotarse como v o bien $|\vec{v}|$ y viene dado según el teorema de Pitágoras por: $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$. El **vector unitario** asociado con el vector \vec{v} se define como aquel vector de módulo unidad que tiene la misma dirección y sentido que \vec{v} . Dicho vector se denotará de forma genérica como \hat{v} o \vec{u}_v , esto es, $\vec{u}_v = \vec{v}/|\vec{v}|$. Así, el vector \vec{v} puede escribirse como $\vec{v} = |\vec{v}| \vec{u}_v$.



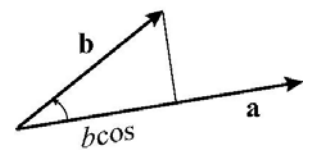
- Expresando el vector como suma de las componentes del vector por los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados. Los vectores unitarios a lo largo de los ejes x, y, z se denotarán como $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ respectivamente. Otras notaciones frecuentes para estos vectores unitarios son $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$. Así el vector \vec{v} se escribirá como $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$.

(B) Álgebra de vectores:

- La **suma de vectores** se realiza sumando sus componentes. De este modo si $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ y $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$, entonces: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k}$.

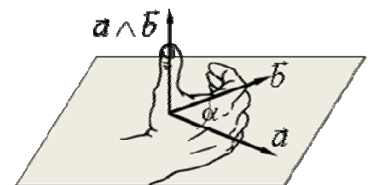


- El **producto escalar de dos vectores** \vec{a} y \vec{b} , indicado como $\vec{a} \cdot \vec{b}$ es un escalar resultado de la siguiente operación: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$ (dos maneras equivalentes de calcularlo), siendo α el ángulo formado por los dos vectores. El producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$ puede interpretarse geométricamente como la proyección de uno de los vectores sobre el otro (salvo factores numéricos). Este hecho se manifiesta claramente en el producto escalar de \vec{a} por uno de los vectores unitarios según los ejes coordenados, esto es, $\vec{a} \cdot \vec{i} = a_x$, donde se ve claramente que $\vec{a} \cdot \vec{i}$ es justamente la proyección de \vec{a} sobre el eje x . Algunas de las propiedades del producto escalar son:



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \text{ (conmutatividad)} ; \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \text{ (perpendiculares)}$$

- El **producto vectorial de dos vectores** \vec{a} y \vec{b} , indicado por $\vec{a} \times \vec{b}$ o también por $\vec{a} \wedge \vec{b}$ es un vector definido como $\vec{a} \wedge \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha \vec{u}_{a \wedge b}$, siendo α el ángulo más pequeño formado por los dos vectores y $\vec{u}_{a \wedge b}$ el vector unitario perpendicular al plano que contiene a los vectores \vec{a} y \vec{b} y que apunta en el sentido indicado por la regla de la mano derecha. Esta regla dice que usando la mano derecha y apuntando el dedo índice en la dirección de \vec{a} y el dedo corazón en la de \vec{b} , el dedo pulgar indicará la dirección y el sentido de $\vec{u}_{a \wedge b}$. Geométricamente, el módulo del producto vectorial, $|\vec{a} \wedge \vec{b}|$, es igual al área del paralelogramo generado por los vectores \vec{a} y \vec{b} . A partir de la definición



del producto vectorial pueden deducirse las siguientes propiedades:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a} \text{ (anticonmutatividad)} ; \vec{a} \wedge \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \text{ (paralelos)}$$

Por otro lado, se puede comprobar que el producto vectorial se puede obtener a partir del siguiente determinante:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Tema 1.- CONCEPTOS FÍSICOS Y MATEMÁTICOS BÁSICOS. Derivación e Integración

• Diferencial y derivada de funciones de una sola variable

Dada una función de una sola variable $f = f(x)$, se define la derivada de la función $f(x)$ con respecto a x como

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

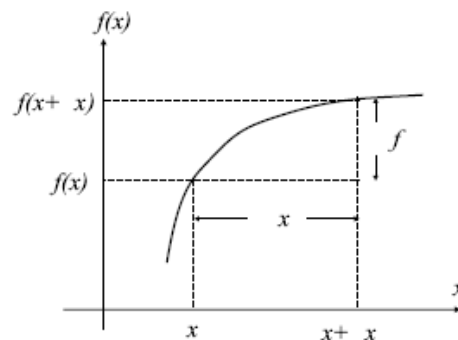
y expresa geoméricamente el valor de la pendiente de la tangente a la curva $f(x)$ en el punto x . El concepto de diferencial de $f(x)$, denotado genéricamente como df , expresa la variación infinitesimal de la función $f(x)$ entre x y $x+dx$, esto es,

$$df(x) = f(x + dx) - f(x)$$

Desde un punto de vista matemático, este diferencial viene dado por el siguiente producto:

$$df(x) = \left(\frac{df}{dx} \right) dx$$

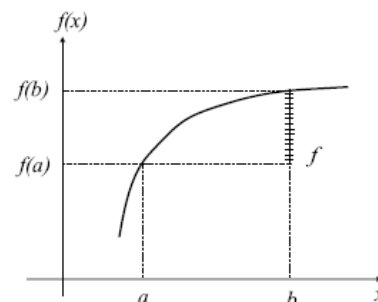
Debe notarse que df/dx no expresa un cociente entre df y dx sino que por el contrario debe entenderse como la acción del operador d/dx sobre la función $f(x)$. Este hecho se pone de manifiesto con otras notaciones que prefieren expresar la derivada de la función $f(x)$ con respecto a x como $D_x f(x)$, donde D_x es precisamente el operador derivada.



• Teorema fundamental del cálculo

El teorema fundamental del cálculo establece la siguiente relación entre las operaciones de integración y diferenciación de la función $f(x)$:

$$\int_a^b \left(\frac{df}{dx} \right) dx = f(b) - f(a)$$



• Diferencial y derivada de funciones de varias variables

Es muy frecuente que en la naturaleza las magnitudes dependan de más de una variable, así la temperatura de una habitación depende de la posición del punto donde se mide, esto es, de las tres coordenadas espaciales del punto. Este hecho se manifiesta matemáticamente diciendo que la temperatura es función de x, y, z y se expresa como $T = T(x, y, z)$.

Similarmente al concepto de derivada introducido para funciones de una sola variable, puede ahora definirse el concepto de derivada parcial. Esta derivada hace referencia a la variación de cierta función con respecto a una sola de las variables cuando las demás permanecen constantes. Así, se define la derivada parcial de la función $f(x, y, z)$ con respecto a x como

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

y análogamente para las restantes variables. A partir del concepto de derivada parcial, puede deducirse que una variación infinitesimal de la función $f(x, y, z)$ cuando dicha función varía entre los puntos x y $x+dx$ podrá expresarse como:

$$df|_x = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) dx$$

La variación infinitesimal de la función $f(x,y,z)$ cuando ésta varía entre los puntos (x,y,z) y $(x+dx, y+dy, z+dz)$ podría obtenerse, por tanto, sumando las variaciones parciales a lo largo de cada una de las coordenadas. De este modo, puede escribirse que

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) dz$$

• Introducción al cálculo integral. Integral indefinida

La integral de una función $f(x)$ se denota de la siguiente manera:

$$F(x) = \int f(s) ds$$

La función $F(x)$ se llama la primitiva de $f(x)$, y se define como aquella que verifica la propiedad siguiente:

$$f(x) = \frac{dF}{dx}$$

Por lo tanto, la integral es la inversa de la derivada, ya que si cojo una función arbitraria $f(x)$, la derivo y la integro vuelvo a obtener la misma función $f(x)$ (salvo una constante arbitraria).

$$f(x) \xrightarrow{d/dx} f'(x) = \frac{df}{dx} \xrightarrow{\int dx} F(x) = \int f(s) ds = f(x) + C$$

La constante C aparece debido a que la función primitiva F no es única. Si a cualquier función $F(x)$ que verifica que su derivada es igual a $f(x)$ le sumamos una constante, tendremos otra primitiva diferente, $G(x)=F(x)+C$ que también verifica que su derivada es $f(x)$.

• Integrales definidas. Interpretación física de la integral

Para interpretar físicamente lo que es una integral es necesario volver a recordar que $F(x)$ es la primitiva de $f(x)$ si y sólo si:

$$f(x) = \frac{dF}{dx}$$

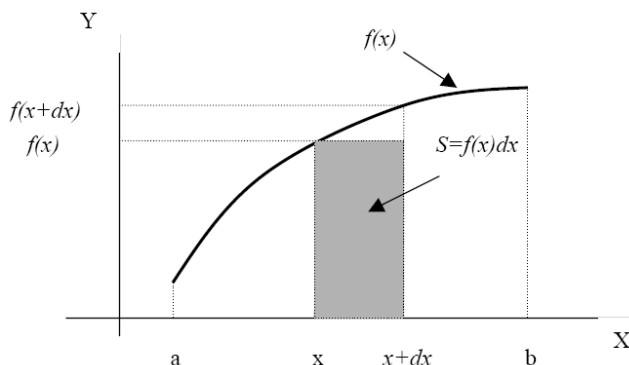
Si desarrollamos ahora el lado de la derecha haciendo uso de la definición de derivada:

$$f(x) = \frac{dF}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{F(x+dx) - F(x)}{dx}$$

Tenemos que, olvidando el límite que aparece en la ecuación:

$$F(x+dx) - F(x) = f(x)dx$$

Si dx es pequeño, entonces $f(x)dx$ es aproximadamente el área que queda encerrada entre la función y el eje de las X , bajo el intervalo que va desde x a $x+dx$. Supongamos ahora que escogemos un punto inicial $x=a$ (ver figura). El área encerrada entre la curva y el eje X , sobre el intervalo que va de a hasta $a+dx$ vendrá dada por $F(a+dx)-F(a)=f(a)dx$. Igualmente, el área encerrada entre la curva y el eje X , bajo el intervalo que va desde $a+dx$ hasta $a+2dx$ será $F(a+2dx)-F(a+dx)=f(a+dx)dx$. Y sumando ambas, puedo decir que el área encerrada entre la curva y el eje X , bajo un intervalo que va desde a hasta $a+2dx$ será:



$$f(a)dx + f(a+dx)dx = [F(a+dx) - F(a)] + [F(a+2dx) - F(a+dx)] = F(a+2dx) - F(a)$$

Por lo tanto, el área encerrada entre la curva y el eje X sobre un intervalo cualesquiera $[a,b]$ no es más que la diferencia $F(b)-F(a)$, como puede demostrarse sin más que iterando la fórmula anterior para tantos dx consecutivos como haga falta para llegar hasta el punto b .

A la diferencia $F(b)-F(a)$ se llama integral definida de la función $f(x)$ entre los puntos a y b , y se denota por:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Y como se ha dicho, representa el área encerrada entre la curva $f(x)$ y el eje X , bajo el intervalo que va de a hasta b .

Es interesante darse cuenta de que la indeterminación que existía antes respecto a la constante C que podía añadirse a la primitiva de $f(x)$ ya no existe. Puesto que las integrales definidas se obtienen como la diferencia del valor $F(x)$ en dos puntos, si añadimos una constante a $F(x)$, ésta desaparece al hacer dicha diferencia.

• Integrales más comunes

Usando el hecho de que la integral es la operación inversa a la derivada, es posible calcular muchas integrales. A continuación se enumeran las integrales inmediatas más comunes. En cualquier caso muchas integrales no son evidentes y es necesario recurrir a otros métodos para resolverlas, por ejemplo, aplicando cambio de variables.

$$\begin{aligned} \int_a^x c dx &= cx + C \\ \int_a^x x dx &= \frac{1}{2}x^2 + C \\ \int_a^x x^n dx &= \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \\ \int_a^x \frac{1}{x} dx &= \ln(x) + C \\ \int_a^x e^x dx &= e^x + C \\ \int_a^x \text{sen}(x) dx &= -\cos(x) + C \\ \int_a^x \cos(x) dx &= \text{sen}(x) + C \\ \int_a^x f'(x) [f(x)]^n dx &= \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C \\ \int_a^x \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \ln[f(x)] + C \\ \int_a^x f'(x) e^{f(x)} dx &= e^{f(x)} + C \\ \int_a^x f'(x) \text{sen}(f(x)) dx &= -\cos(f(x)) + C \\ \int_a^x f'(x) \cos(f(x)) dx &= \text{sen}(f(x)) + C \end{aligned}$$

Tema 1.- CONCEPTOS FÍSICOS Y MATEMÁTICOS BÁSICOS. Resolución de problemas.

• Metodología de resolución de problemas

Se propone la siguiente metodología para trabajar los problemas de física, entendiendo esta de una forma amplia. Debe tenerse en cuenta que la fenomenología es muy variada y que es difícil sintetizar todas las peculiaridades que pueden presentarse, aunque se ha tratado de recoger lo más significativo. La misma debe entenderse como una guía que sea útil tanto al profesor como al alumno y cuyo fin es esencialmente didáctico. Se trata de un punto de partida que cada profesor puede ir adecuando en función del progreso de sus alumnos. Evidentemente, cada alumno puede desarrollar, a partir de esta base y de sus propios avances, una metodología más acorde con sus características personales.

1. Identificar las magnitudes físicas que intervienen en el resultado final.

2. Dibujar, especialmente cuando intervienen magnitudes vectoriales, un diagrama de la situación.

Esto permite simplificar los cálculos y abordar una solución gráfica, mucho más intuitiva, antes de proceder a la resolución analítica del problema.

3. Identificar y analizar las magnitudes físicas que el problema aporta como datos iniciales.

4. Plasmar las leyes y conceptos físicos que relacionen las magnitudes físicas identificadas en los pasos 1 a 3.

En este paso pueden aparecer nuevas magnitudes: ampliar relaciones

5. Definir un camino lógico que partiendo de las magnitudes buscadas enlace con los datos iniciales

Establecer una estructura que permita reconstruir fácilmente el algoritmo de resolución y modificarlo posteriormente, si es necesario.

6. Una vez resuelto el problema:

- Analizar y discutir los resultados
- Replantearse el algoritmo de resolución buscando su minimización
- Generalizar el problema