1. TEORÍA DE GRAFOS

DEEP REVIEW

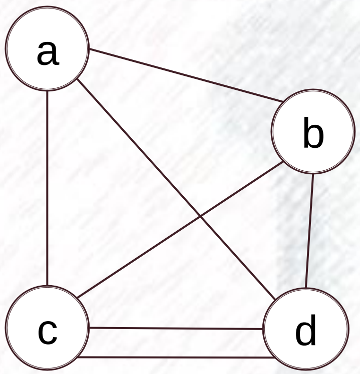
GRAFO
G =(V,E) **estructura discreta formada por nodos y aristas / arcos**

Tipos:

Vacío simple

GND, Simple, pero no vacío

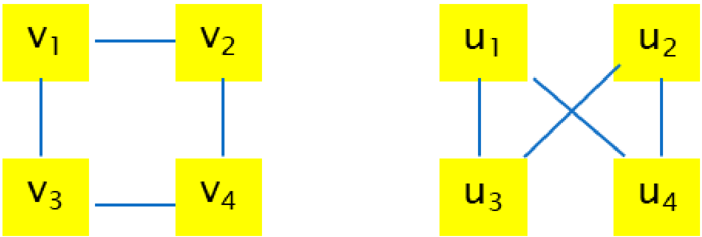
GND, Completo y simple
>> K_n



Completo, pero no simple

Subgrafo
H =(V’,E’)
V’ = {a,b,d} $\subseteq$ V,
E’ = { {a,b}, {b,d} } $\subseteq$ E

Ejercicio1: Calcula Matriz adyacencia: A



$G = (V_1, E_1)$ $H = (V_2, E_2)$

A/G	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	1	1	0
v_2	1	0	0	1
v_3	1	0	0	1
v_4	0	1	1	0

A/H	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	0	0	1	1
u_2	0	0	1	1
u_3	1	1	0	0
u_4	1	1	0	0

¿Cómo calculas el grado del vértice de la fila 3 en cada matriz ?

REPRESENTACIÓN MATRICIAL

>> Matriz de adyacencia $A = [a_{ij}]$:

Número de aristas / arcos del vértice **v_i al v_j**.

GND

d(**v_i**) >> suma de **fila i**

El bucle cuenta 2

A simétrica

GD

Fila i: vértice **origen** del arco (i, j)

Columna j: vértice **destino** del arco (i, j)

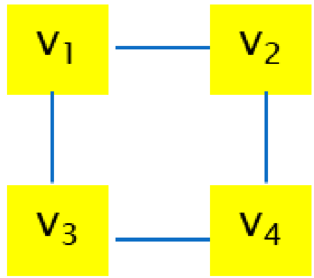
ds(**v_i**) **>>** suma de **fila i**

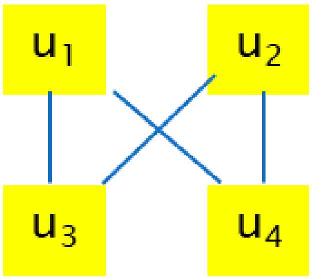
de(**v_i**) **>>** suma de **columna j**

El bucle cuenta 1

A **no** siempre simétrica

Ejercicio1.b: Calcula Matriz Incidencia: M





$G = (V_1, E_1)$ $H = (V_2, E_2)$

M/G	v_1v_2	v_1v_3	v_2v_4	v_3v_4
v_1	1	1	0	0
v_2	1	0	1	0
v_3	0	1	0	1
v_4	0	0	1	1

M/H	u_1u_3	u_1u_4	u_2u_3	u_2u_4
u_1	1	1	0	0
u_2	0	0	1	1
u_3	1	0	1	0
u_4	0	1	0	1

REPRESENTACIÓN MATRICIAL

>> Matriz de incidencia $M = [m_{ij}]$:

aristas / arcos (columnas) que inciden en el vértice v_i (fila).

GND	GD
$d(\mathbf{v_i})$ >> suma de **fila i**	Suma elementos **columna j = 0**

$$M = [m_{ij}] \ / \ m_{ij} = \begin{cases} 0 & v_i \text{ no es extremo de } e_j \\ 1 & v_i \text{ es extremo de } e_j \\ 2 & e_j \text{ es un bucle} \end{cases}$$

$$M = [m_{ij}] \ / \ m_{ij} = \begin{cases} 0 & v_i \text{ no es extremo de } e_j \\ 1 & v_i \text{ es vértice inicial de } e_j \\ -1 & v_i \text{ es vértice final de } e_j \\ 2 & e_j \text{ es un bucle} \end{cases}$$

Ejercicio2: M representa la matriz de incidencia de un grafo ¿dirigido o no dirigido? ¿Simple?

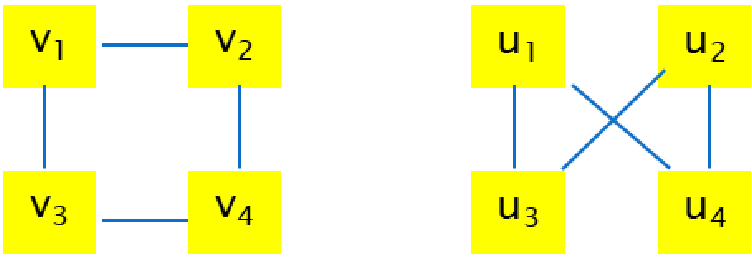
M	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
x	1	0	0	−1	0
y	0	1	2	0	1
z	−1	−1	0	1	−1

¿Existe algún bucle en el grafo? ¿en qué vértice ?

¿Por qué la suma de las columnas da como resultado cero?

Ejercicio3: **Define grafos isom**
tener los grafos para que lo se
Comprueba si los grafos **a) G y**

Una arista/arco $\mathbf{e_i} \in \mathbf{E_1}$ une los vértices $\mathbf{u, v} \in \mathbf{V_1}$ **si y sólo si,** la arista/arco correspondiente $\mathbf{e_1'} \in \mathbf{E_2}$ une los vértices $\mathbf{f(u), f(v)} \in \mathbf{V_2}$



$G = (V_1, E_1)$ $H = (V_2, E_2)$

Elegimos imágenes de vértices de G

$\mathbf{f(v_1) = u_1,}$

$\mathbf{f(v_2) = u_4,}$

$\mathbf{f(v_3) = u_3}$

$\mathbf{f(v_4) = u_2}$

es biyectiva entre $V_{1,}$ V_2

Vemos que f preserva la adyacencia:

$E_1 = \{ \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}\}$

$E_2 = \{ \{u_1, u_3\}, \{u_1, u_4\}, \{u_2, u_3\}, \{u_2, u_4\}\}$

$\mathbf{\{v_1, v_2\} \in E_1 \rightarrow \{u_1\ u_4\} \in E_2}$

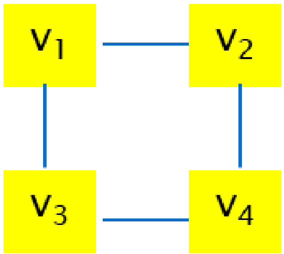
$\mathbf{\{v_1, v_3\} \in E_1 \rightarrow \{u_1\ u_3\} \in E_2}$

$\mathbf{\{v_2, v_4\} \in E_1 \rightarrow \{u_2\ u_4\} \in E_2}$

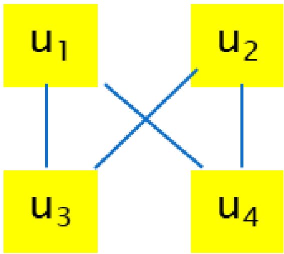
$\mathbf{\{v_3, v_4\} \in E_1 \rightarrow \{u_2\ u_3\} \in E_2}$

Ejercicio3: …isomorfos

No es fácil determinar la correspondencia entre vértices que **preserven** la adyacencia



$G = (V_1, E_1)$



$H = (V_2, E_2)$

2ª elección de vértices:

$f(v_1) = u_4$

$f(v_2) = u_2$

$f(v_3) = u_3$

$f(v_4) = u_1$

Vemos que ahora **NO** se preserva adyacencia:

$E_1 = \{ \{v_1,v_2\}, \{v_1,v_3\}, \{v_2,v_4\}, \{v_3,v_4\}\}$

$E_2 = \{ \{u_1,u_3\}, \{u_1,u_4\}, \{u_2,u_3\}, \{u_2,u_4\}\}$

$\{v_1,v_2\} \in E_1 \rightarrow \{u_2\ u_4\} \in E_2$

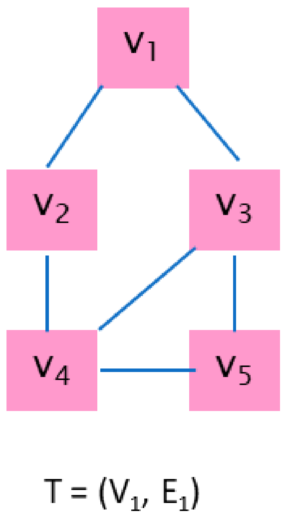
$\{v_1,v_3\} \in E_1 \rightarrow \{u_3\ u_4\} \notin E_2$

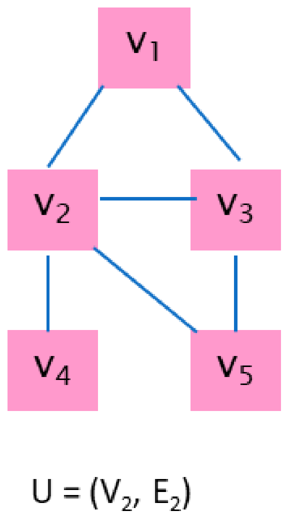
$\{v_2,v_4\} \in E_1 \rightarrow \{u_1\ u_2\} \notin E_2$

$\{v_3,v_4\} \in E_1 \rightarrow \{u_1\ u_3\} \in E_2$

Ejercicio3: …isomorfos

Comprobar si no cumplen alguna de las propiedades necesarias para ser isomorfos





1º nº vértices: 5

2º nº aristas: 6

3º Grado de vértices ?

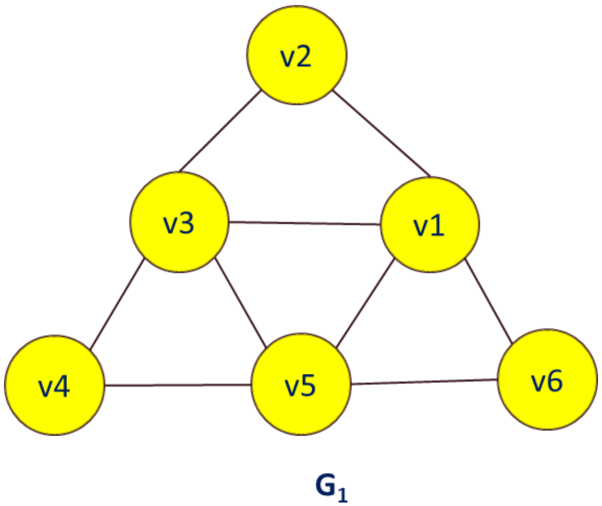
En U >> un vértice v_4 / $d(v_4) = 1$

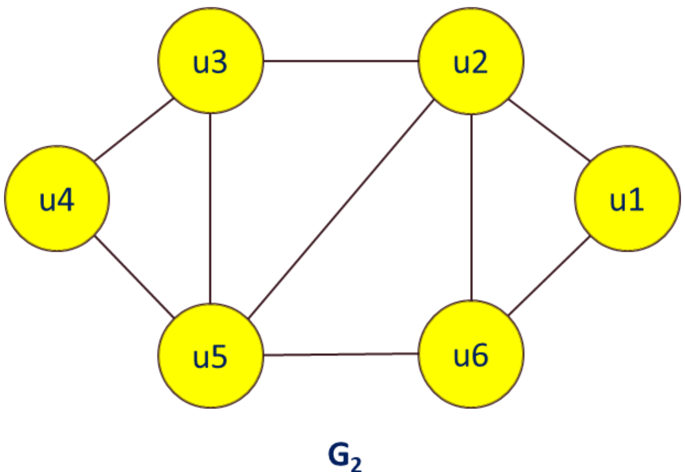
En T >> **no** existe v_i / $d(v_i) = 1$

T y U no son isomorfos

Ejercicio3: ...isomorfos

Comprobar si no cumplen alguna de las propiedades necesarias para ser isomorfos





nº vértices: 6

nº aristas: 10

$d(v_1) = 4$
$d(v_2) = 2$
$d(v_3) = 4$
$d(v_4) = 2$
$d(v_5) = 4$
$d(v_6) = 2$

$d(u_1) = 2$
$d(u_2) = 4$
$d(u_3) = 3$
$d(u_4) = 2$
$d(u_5) = 4$
$d(u_6) = 3$

No son isomorfos ya que en **G_1** hay 3 vértices de grado 2 y en **G_2 hay 2**

Chuleta G. ISOMORFOS

Def. Dos **grafos simples** $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son **isomorfos** ($G_1 \cong G_2$) si existe una función biyectiva $f : V_1 \rightarrow V_2$ / $u, v \in V_i$

u y v son adyacentes en G_1 si y sólo si, f(u) y f(v) son adyacentes en G_2.

>> Una arista/arco $\mathbf{e_1 \in E_1}$ une los vértices **u, v** $\mathbf{\in V_1}$ **si y sólo si,** la arista/arco correspondiente $\mathbf{e_1' \in E_2}$ une los vértices **f(u), f(v)** $\mathbf{\in V_2}$

>> La función **f** preserva la relación de adyacencia

Propiedades necesarias para que dos grafos simples sean isomorfos:

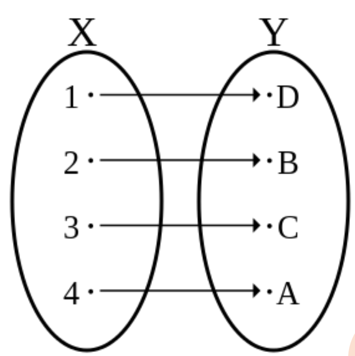
- Los grafos deben preservar
  - Nº de vértices,
  - Nº de aristas y
  - Mismo nº de vértices con igual grado.

$f: X \rightarrow Y$

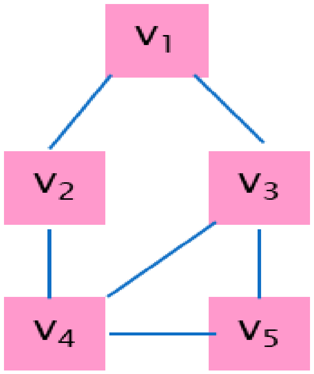
$x \rightarrow y = f(x)$

Short REVIEW

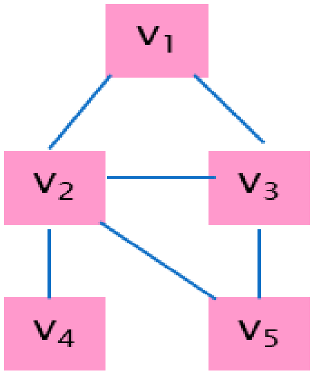
Función **biyectiva** entre conjuntos X, Y:
inyectiva (1) + sobreyectiva (2)
(1): todos los elementos de X tienen una única imagen en Y.
(2) Idem de Y a X.
X, Y igual nº de elementos



Ejercicio4: Comprueba si los grafos T y U son bipartidos y K_{mn}



$T = (V_1, E_1)$



$U = (V_2, E_2)$

Chuleta G. BIPARTIDOS

Def. G = (V,E), GND, es **bipartido** si existe una **partición** de V /

1º $V_1 \cup V_2 = V$

2º $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

3º $\forall \{v_i, v_j\} \in E, \quad v_i \in V_1, \quad v_j \in V_2$

Toda arista debe tener un extremo en V_1 y otro en V_2

¿Cómo obtener la partición de V?

Elegir **2** etiquetas.

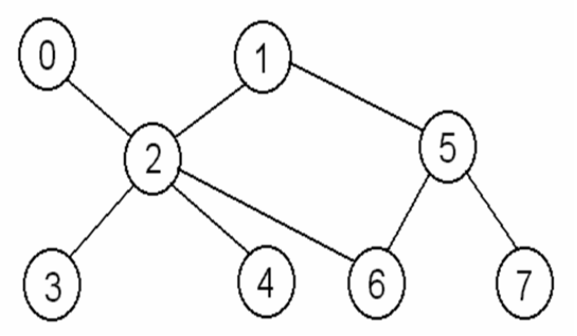
Marcar cada vértice con ellas / **no** haya vértices adyacentes con la misma etiqueta.

Grafo bipartido completo: Si cada vértice de V_1 está relacionado con cada vértice de V_2

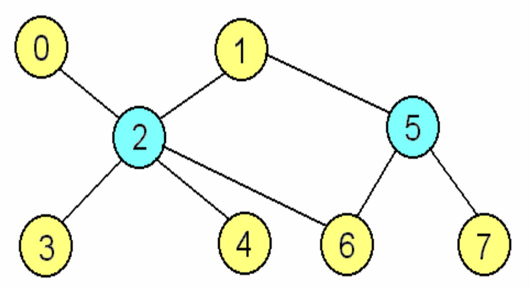
GRAFO $K_{m,n}$: es GND, bipartido completo y simple / $|V_1| = n$, $|V_2| = m$.

Un **GD** es bipartido si lo es su **GND asociado.**

Ejemplos de Grafos bipartidos



G_8



$V_1 = \{2,5\}$,
$V_2 = \{0,1,3,4,6,7\}$

G = (V,E) /

V_1 = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 }

E = { {1,3},
{2,3}, {2,4},
{3,5}, {3,6}, {3,7},
{4,7}, {4,8} }

$V = V_1 \cup V_2$

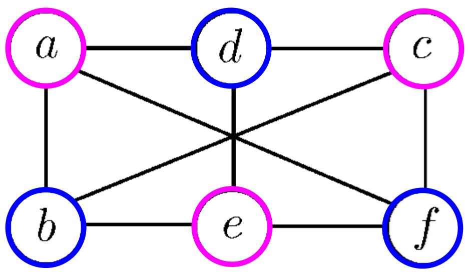
V_1 = { 1, 2, 5, 6, 7, 8 }

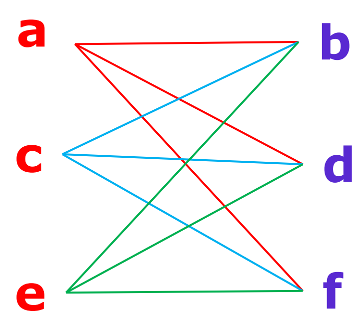
V_2 = { 3, 4 }

$V_1 \cap V_2 = Ø$

Ejemplo de Grafo Bipartido Completo

<u>Cada</u> vértice de V_1 está **relacionado** con cada vértice de V_2



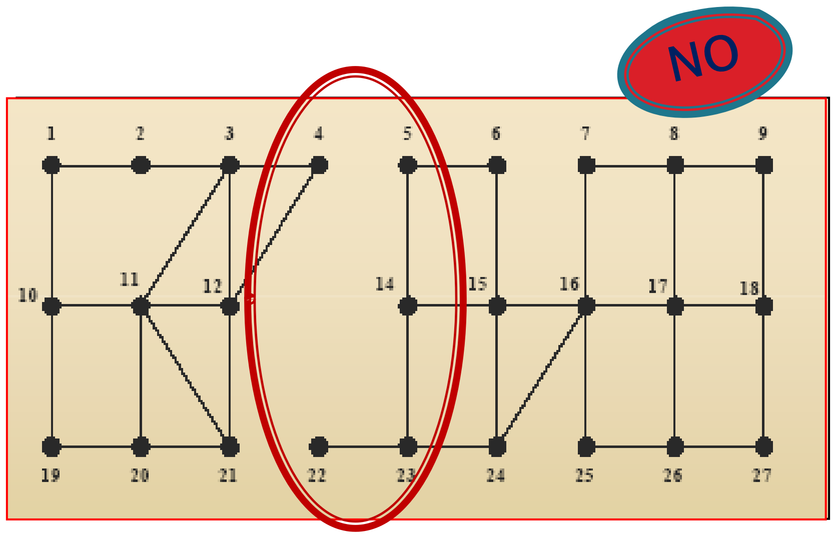


$V_1=\{a,c,e\}$

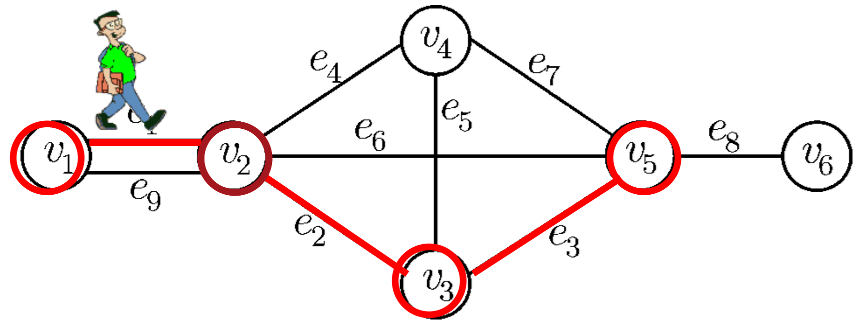
$V_2=\{b,d,f\}$

Grafos CONEXOS

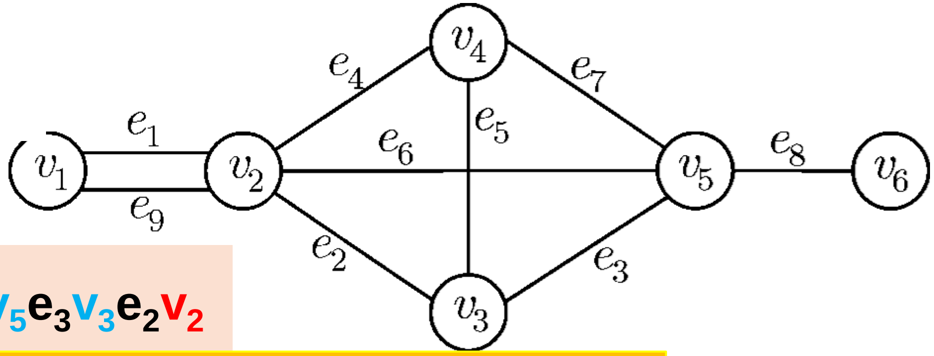
Todos los nodos están conectados ? …



¿ Hasta dónde puede llegar …



Ejercicio5: Considera el grafo



Qué recorrido es la cadena **C =** $v_2 e_4 v_4 e_7 v_5 e_3 v_3 e_2 v_2$

CICLO : cadena simple cerrada con **vértices internos distintos**.

a) Escribe una cadena simple que no sea camino

b) Escribe un camino que no sea cadena simple

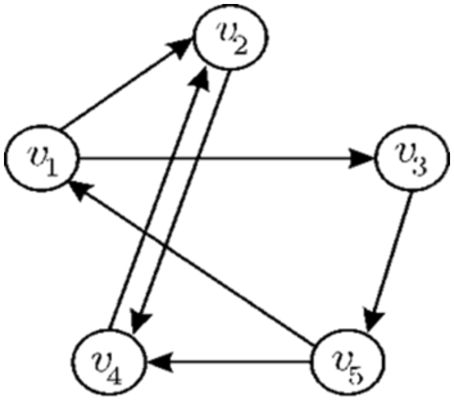
c) Toda cadena simple es un camino ? **NO** C = $v_1 e_1 v_2 e_9 v_1$ **NO** C = $v_1 e_1 v_2$ **SI**

d) Todo camino es una cadena simple? **SI** C = $v_1 e_1 v_2$

e) Una cadena cerrada puede ser un camino ? **NO** C = $v_1 e_1 v_2 e_9 v_1$

f) Un camino puede ser una cadena cerrada ? **NO**

Ejercicio5: Considera el grafo



Z

Escribe un circuito

g) Toda cadena cerrada es un circuito?

h) Todo ciclo es una cadena cerrada ?

Chuleta recorridos

CADENA : sucesión finita de vértices y aristas

$\mathbf{W = v_0 e_1 v_1 \ldots e_k v_k,}$ $\forall i, 1 \leq i \leq k$

CADENA SIMPLE: cadena con todas sus **aristas distintas**.

CAMINO: cadena con todos sus **vértices distintos**.

CADENA CERRADA: cadena de longitud no nula / vértice inicial coincide con el final

CICLO: cadena simple cerrada con **vértices internos distintos.**

k - ciclo → Ciclo de **longitud k**

>> En GD los ciclos se llaman c**ircuitos**

Longitud de una cadena : nº de aristas / arcos