La Matemática discreta es la parte de las Matemáticas que se dedica a estudiar las estructuras de datos formalizadas a partir de conjuntos discretos. Desde el punto de vista computacional, una estructura de datos es una colección de datos (en general de tipo simple, bits) que se caracteriza tanto por la forma en que dichos datos están organizados como por las operaciones que se pueden definir en ellos. Un ejemplo de estructura de datos es el array que es un conjunto de datos del mismo tipo almacenados en la memoria del ordenador en posiciones adyacentes, otro ejemplo es el de los **grafos** y árboles que son estructuras de datos no lineales formadas por elementos relacionados.

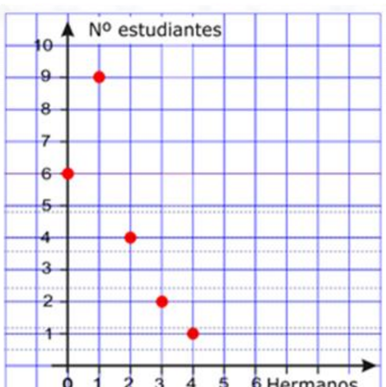
Los conjuntos discretos o contables se caracterizan por tener o bien un número finito de elementos o infinitos pero numerables. Los conjuntos finitos son aquellos que pueden ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto {1,2,...n}, para algún número natural n, y los conjuntos infinitos numerable son aquéllos que admiten una correspondencia biunívoca (uno a uno) entre los elementos del conjunto y los números naturales, esto significa que cada dos elementos no puede existir ningún otro elemento , p.ej., el conjunto de los enteros $Z = \{...-2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ es un conjunto infinito numerable porque sus elementos se pueden enumerar como $Z = \{ 0, 1, -1, 2, -2, ...\}$ y esto permite hacer la correspondencia con los números naturales tal como se indica en la siguiente tabla:

0	1
1	2
−1	3
2	4
−2	5
...	...

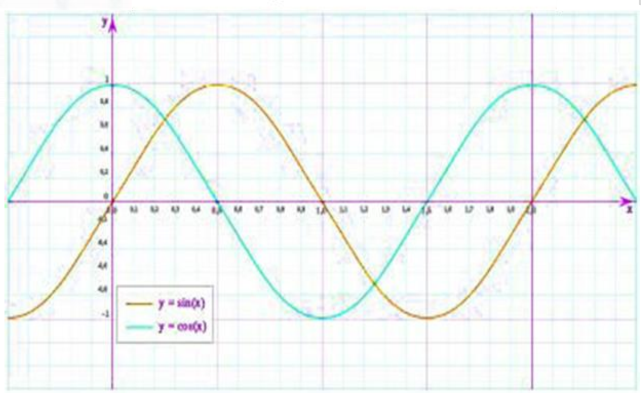
Las variables que aparecen en matemática discreta, variables discretas o digitales, se diferencian de las continuas o analógicas del cálculo infinitesimal, en que sólo pueden tomas valores enteros, nunca reales. La gráfica de la izquierda muestra resultados obtenidos con variables discretas y la de la derecha con variables continuas,

Actualmente el estudio de la matemática discreta se recomienda en los curricula de informática ya que en ciencia de la computación sólo son computables las funciones de conjuntos numerables.

Gráfica con variables **discretas / digitales**
Rango: números Enteros

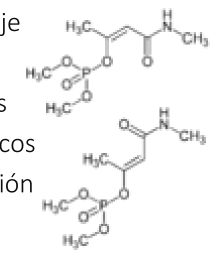


Gráfica con variables **continuas/analógicas**
Rango: números Reales



Dedicaremos esta parte de la asignatura al estudio de la **teoría de grafos** que nos proporcionará conocimiento sobre la nomenclatura y tipos de grafos, sus propiedades, características y representación, así como diversos algoritmos para recorrerlos.

El origen de la teoría de grafos se remonta al s. XVIII con el trabajo del matemático suizo Leonard Euler sobre el problema: *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* que resolvía el problema de los puentes de Königsberg que consistía en encontrar un camino que recorriera los siete puentes del río que atravesaba la ciudad de modo que al recorrerlos no se repitiera ninguno. La solución de este problema relativo a la geometría de la posición se consideró el primer resultado de la teoría de grafos.



En 1847, Gustav Kirchhoff utilizó la teoría de grafos para el análisis de redes eléctricas publicando las leyes de los circuitos para calcular el voltaje y la corriente en los circuitos eléctricos (leyes de Kirchhoff). Esta fue la primera aplicación de la teoría de grafos a un problema de ingeniería.
En 1852 Francis Guthrie planteó el problema de los cuatro colores que trata de colorear un mapa solamente con 4 colores de tal forma que dos países vecinos nunca tengan el mismo color. Este problema fue resuelto por Kenneth Appel y Wolfgang Haken en 1976 usando conceptos teóricos de grafos. En 1857, Arthur Cayley estudió y resolvió el problema de enumeración de los isómeros (compuestos químicos con idéntica composición pero diferente estructura molecular). Para ello representó cada compuesto mediante un grafo formado por átomos y enlaces químicos.

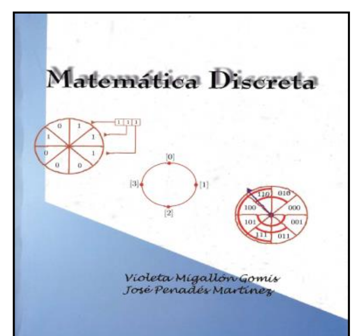
El término *«grafo»*, proviene de la expresión *«graphic notation»* usada por primera vez por Edward Frankland[3] y posteriormente adoptada por Alexander Crum Brown en 1884, para representar de forma gráfica los enlaces entre los átomos de una molécula. En matemáticas y ciencias de la computación los grafos son estructuras discretas que se utilizan para representar relaciones binarias entre los objetos de un conjunto como por ejemplo las redes informáticas para determinar si dos ordenadores están conectados y cuál es la conexión más eficiente entre ellos.

Otras aplicaciones: dibujo computacional, modelar líneas aéreas, de transporte para obtener caminos óptimos para el trayecto aplicando diversos algoritmos (Dijsktra, Floyd, los veremos)…, administración de proyectos a través de técnicas de revisión y evaluación de programa (PERT, lo veremos), desarrollo de ciencias sociales, control de producción, etc Los grafos son importantes y se usan hoy día en todos los ámbitos tanto científicos como sociales.

El primer libro sobre teoría de grafos fue escrito por Dénes Kőnig y publicado en 1936.

Bibliografía

>Migallón V., Penadés J., Matemática discreta, Puntero y Chip, Alicante.
>Grassman, W.K. and Tremblay, J.P., Matemática discreta y Lógica, Prentice Hall.
>Rosen K.H., Matemática discreta y aplicaciones, Editorial McGraw-Hill.
>Johnsonbaugh, R., Matemáticas discretas, Prentice Hall.
>Grimaldi, R.P., Matemáticas discretas y combinatoria, Prentice Hall



Problemas que abordaremos

1. Administración de proyectos basados en secuencias de actividades: Bellman-PERT
2. Obtención del camino más corto entre dos objetos relacionados por un coste: Dijsktra y Floyd-Wharsall

1. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRAFOS

1.1. FUNDAMENTOS DE GRAFOS

- Concepto de grafo dirigido y no dirigido.
- Propiedades topológicas de adyacencia, incidencia y de grado.
- Tipos de grafos: simples, completos y subrgrafos.
- Representación computacional : listas y matrices.
- Grafos isomorfos.
- Ejercicios resueltos

1.2. GRAFOS BIPARTIDOS

- Definición de grafo bipartido.
- Cómo comprobar que un grafo es bipartido.
- Grafos bipartidos completos y grafos $K_{m,n}$
- Condición necesaria y suficiente para que un grafo sea bipartido.
- Ejercicios resueltos.

1.3. GRAFOS CONEXOS

- Trayectorias en un grafo.
- Conexión en grafos no dirigidos..
- Vértices y aristas que cortan la conexión.
- Subgrafos conexos: componentes conexas.
- Conexión en grafos dirigidos.
- Ejercicios resueltos.

2: RECORRIDOS DE GRAFOS

2.1 EULER: recorrido por aristas.

- El problema de los puentes de Königsberg.
- Recorridos por un grafo. 3. Recorridos eulerianos.
- Concepto de grafo euleriano.
- Algoritmo de Fleury.
- Ejercicios resueltos.

2.2 HAMILTON: recorrido por vértices.

- Grafos hamiltonianos.
- Reglas básicas para construir caminos y ciclos hamiltonianos.
- Teorema de Dirac.
- Ejercicios resueltos.

3: CAMINOS MÁS CORTOS

3.1 BELLMAN-PERT.

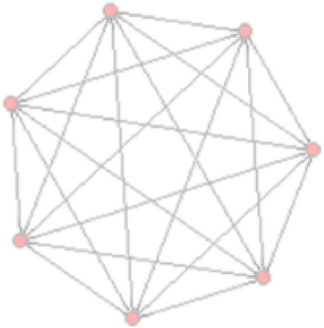
- Ecuaciones de Bellman.
- Proyectos PERT.
- Ejercicios resueltos.

3.2. DIJSKTRA.

- Algoritmo de Dijkstra.
- Ejercicios resueltos.

3.3. FLOYD-WARSHALL.

- Algoritmo de Floyd-Warshall.
- Ejercicios resueltos



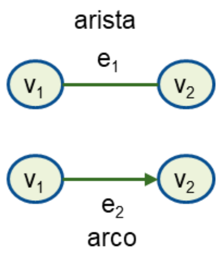
Concepto de grafo dirigido/no dirigido. Propiedades topológicas

>> Un **grafo** es un tipo abstracto de datos que consiste en un conjunto de vértices (nodos) y un conjunto de aristas que establecen relaciones entre los elementos de un conjunto.

→ Los vértices representan a los objetos que se relacionan y las aristas las relaciones entre cada par de vértices.

Def. Un **grafo G** con *n* vértices v_i (i = 1,…n) y *m* aristas e_i (i = 1,…m) se define como G = (V, E) donde V = $\{v_1, v_2,\ldots v_n\}$ debe ser finito o a lo sumo numerable, y no vacío, y $E \subset V \times V$, E = $\{e_i, e_2,\ldots e_m\}$

→ Según la relación entre los vértices las aristas pueden ser no dirigidas como p.ej., e_1, o dirigidas como p.ej., e_2.



→ A las aristas no dirigidas las llamaremos, simplemente, **aristas** y a las dirigidas, **arcos**.

→ Cada arista se representará:

- gráficamente, mediante una línea uniendo el par de vértices que relaciona.
- algebraicamente, mediante un par de vértices encerrados entre llaves, p.ej., $\{v_1, v_2\}$ o bien $e_1 = \{v_2, v_2\} = \{v_2, v_1\}$

→ Cada arco se representará:

- gráficamente, mediante una flecha uniendo el par de vértices que relaciona.
- algebraicamente, mediante un par de vértices encerrados entre paréntesis, p.ej., $e_2 = (v_1, v_2) \neq (v_2, v_1)$.

→ Cada arista/arco conecta o **incide** en dos vértices, v_i, v_j, que en el caso de que $v_i = v_j$ la arista/arco se llama **bucle.**

→ Dos vértices son **adyacentes** si están conectados por una arista/arco.

Dirección: determina la orientación del arco

→ Si todos los elementos del conjunto E son aristas el grafo se denomina, **grafo no dirigido** (GND).

Ej. G_1 es GND / con conjunto de vértices V = {x,y,z,t} y de aristas E = { e_1={x,z}, e_2={x,t}, e_3={z,z}, e_4={z,x}}.

→ Si todos los elementos de E son arcos el grafo se denomina, **grafo dirigido** (GD).

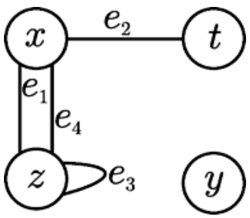
Ej. G_2 es un GD / con conjunto de vértices V = {x,y,z} y de arcos E = { e_1=(x,z), e_2=(y,z), e_3=(y,y), e_4=(z,x), e_5=(y,z) }

→ Si en E aparecen tanto arcos como aristas, el grafo es **mixto**.

Ej. G_3 es un grafo mixto / V = { x,y,z }, E = { e_1=(x,y), e_2=(x,z), e_3={z,y} }

→ Se permiten **múltiples aristas /arcos** entre pares de vértices, p.ej., en G_1 existen dos aristas uniendo los vértices *x, z*.

→ Se permiten **vértices asilados** p.ej., en G_1 el vértice *y* es aislado.

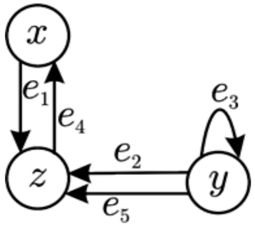


G_1

→ Todo GD tiene **asociado** uno no dirigido con el mismo conjunto de vértices pero donde los arcos pasan a ser aristas.

Ej. El grafo asociado al grafo G_2 es G_2'= (V', E') / V' = {x,y,z}, E' = { e_1 = {x,z}, e_2 = {z,y}, e_3 = {y,y}, e_4 = {x,z}, e_5 = {z,y}}

→ En un GD los arcos entre dos vértices pueden tener la misma dirección o la contraria, p.ej., en G_2 existen dos arcos e_1 y e_4 con distinta dirección relacionando los vértices *x* y *z*; los arcos e_2, e_5 tienen la misma dirección.



G_2

→ En un **GND**, sea v ∈ V y E el conjunto de aristas, los **vértices adyacentes** a *v* serán los elementos del conjunto

$$\Gamma(v) = \{ u \in V \,/\, \{u,v\} \in E \}.$$

Ej. En G_1 los vértices adyacentes a cada vértice son: $\Gamma(x) = \{z,t\}$, $\Gamma(y) = \{\ \}$, $\Gamma(z) = \{x,z\}$, $\Gamma(t) = \{x\}$.

→ En un **GD**, sea v ∈ V y E el conjunto de arcos, los **vértices adyacentes** a *v* serán los elementos de los conjuntos:

$$\Gamma(v) = \{ u \in V \,/\, (u,v) \in E \} \quad \text{y} \quad \Gamma^{-1}(v) = \{u \in V \,/\, (v,u) \in E\}$$

Ej. En G_2 los vértices adyacentes a cada vértice son:

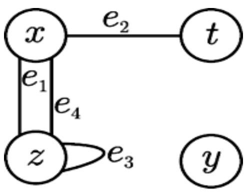
$\Gamma(x) = \{z\}$, $\Gamma(y) = \{y\}$, $\Gamma(z) = \{x,y\}$

$\Gamma^{-1}(x) = \{z\}$, $\Gamma^{-1}(y) = \{y,z\}$, $\Gamma^{-1}(z) = \{x\}$

Grado de un vértice $v \in V$ (d(v))

Def. En un GND el **grado de un vértice** (**d(v)**) es el número de aristas incidentes en él. El bucle cuenta 2.

Ej. En el grafo G_1 , d(x) = 3, d(y) = 0, d(z) = 4.



G_1

Def. En un GD, el **grado de un vértice** es el número de arcos incidentes en él.

Para ello se consideran los arcos que salen y los que entran en el vértice.

El bucle cuenta como arco que sale y que entra.

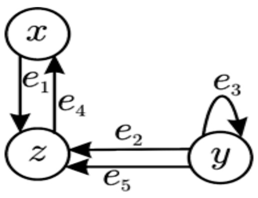
Grado de salida de *v*, ds(v) es el número de arcos que salen de *v*.

Grado de entrada de *v*, de(v) es el número de arcos que acaban en *v*.

Ej. En el grafo G_2, E = { e_1=(x,z), e_2=(y,z), e_3=(y,y), e_4=(z,x), e_5=(y,z) }

ds(x) = 1, de(x) = 1, luego d(x) = 2

ds(y) = 3, de(y) = 1, luego d(y) = 4



G_2

Relación entre el grado de un vértice v (d(v)) y el conjunto Γ(v)

Lo vemos con un ejemplo. Para el grafo G_1 se puede observar que para algunos vértices se cumple que su grado coincide con el cardinal del conjunto Γ(v), d(v) = card(Γ(v)), en concreto la igualdad se da para los vértices *y, t*. La diferencia entre estos vértices y los demás es que éstos no tienen bucles ni aristas múltiples.

G_1 vértice v	d(v)	Γ(v)
x	3	z, t
y	0	{ }
z	4	x, z
t	1	x

Resultados basados en el grado de un vértice

Número de aristas /arcos:

En grafos dirigidos: $|E| = VR_{n,2} = n^2$

En grafos NO dirigidos: $|E| = \binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2}$

Teorema 1.1.1. En un GD la suma de los grados de salida coincide con la de los grados de entrada y con el número de arcos del grafo.

Dem. Se tiene en cuenta la definición de grado de salida y de entrada de un vértice y del hecho de que cada arco es incidente con dos vértices, uno del que sale y otro al que entra, y por tanto cada arco implica una unidad adicional en el recuento de los grados de salida (por ser un arco saliente de un vértice) y una unidad adicional en el recuento de los grados de entrada (por ser un arco entrante en un vértice).

Teorema 1.1.2. La suma de los grados de todos los vértices es el doble del número de aristas / arcos del grafo.

Dem. Para el caso de GD la demostración se sigue de la definición de grado de un vértice y del Teorema 1.1. Si el grafo es GND el resultado se sigue de la definición de grado de un vértice y del hecho de que cada arista incide en dos vértices y por lo tanto cada arista implica dos unidades adicionales en el recuento de los grados.

Corolario 1.1.1 El número de vértices de grado impar siempre es par.

Dem. Sean $V_1 = \{ i \in V \,/\, d(i) \text{ es impar} \}$ y $V_2 = \{ i \in V \,/\, d(i) \text{ es par} \}$ con $V_1 \cap V_2 = \phi$, $V_1 \cup V_2 = V$, luego como $2|E|$ y la suma de los grados de los vértices de V_2 son pares ,entonces la suma de los grados de los vértices de V_1 también tiene que ser par para que se cumpla la igualdad anterior. Por lo tanto, como el grado de cada vértice de V_1 es impar y teniendo en cuenta que la única forma de que al sumar *k* números impares el resultado sea par es que tengamos un número par de sumandos, se concluye que el cardinal de V_1 debe ser par.

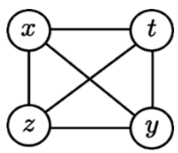
Para introducir distintos **tipos de grafos** se presentan diversos ejemplos.

1 **Se debe modelar una red informática con *n* ordenadores tal que cada dos ordenadores debe haber, como máximo, una conexión en ambas direcciones y además ningún ordenador se puede conectar consigo mismo.**

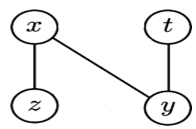
Sol: se crea un grafo no dirigido y simple donde los vértices son los ordenadores conectados con aristas

Def. Un GND **es simple** si no tiene bucles y no hay dos aristas uniendo el mismo par de vértices..

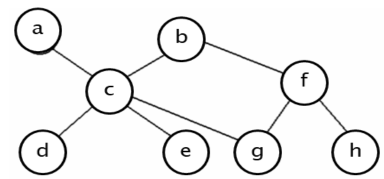
Ej. Los grafos G_5, G_6, G_8, G_{10} son GND simples. El grafo G_5 podría representar el modelo de red solicitada con 4 ordenadores.



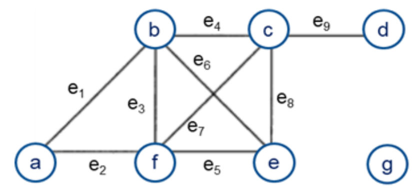
G_5



G_6



G_8



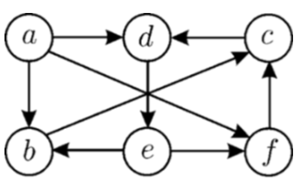
G_{10}

2 **Las conexiones entre los ordenadores no son bidireccionales, ahora la red determina exactamente la dirección entre ellos, p.ej., que el ordenador 1 se conecte al 2 pero no necesariamente a la inversa. Siguen prohibidas las conexiones de un ordenador a sí mismo y las conexiones múltiples entre ellos.**

Sol: esta situación se modela mediante un grafo dirigido y simple.

Def. Un GD es **simple** si no tiene bucles y no hay dos arcos con la misma dirección uniendo el mismo par de vértices.

Ej. El grafo G_9 es un GD y simple que podría modelar el problema planteado para una red de 6 ordenadores.



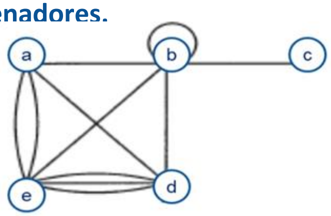
G_9

3 **En la red informática hay mucho tráfico de información por lo que pueden existir conexiones múltiples entre ordenadores.**

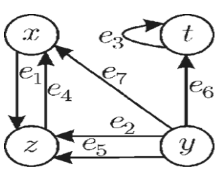
Sol: el problema se modela mediante un multigrafo

Def. Un **multigrafo** es un grafo que admite aristas múltiples o arcos con la misma dirección entre dos vértices.

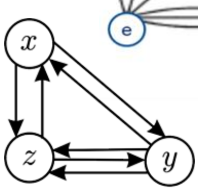
Ej. G_{11} es un ejemplo de multigrafo no dirigido y G_4 y G_7 son multigrafos dirigidos.



G_{11}



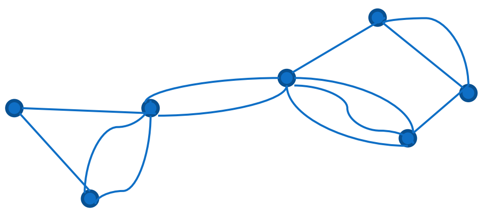
G_7



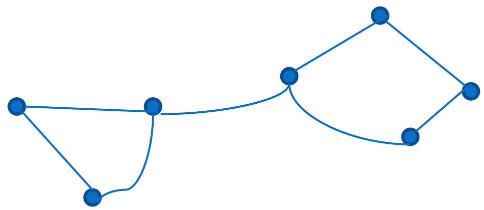
G_4

Tipos de grafos

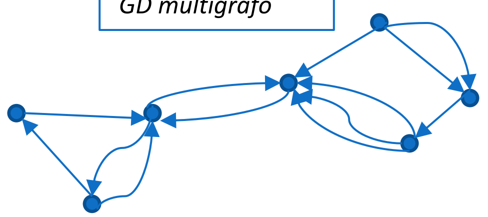
GND multigrafo



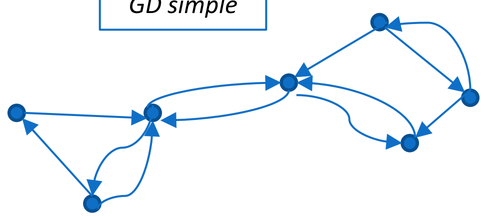
GND simple



GD multigrafo



GD simple

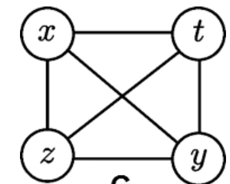


Los multigrafos se pueden usar para modelar conexiones de vuelos de una aerolínea mediante un GND donde cada nodo es una localidad y donde pares de aristas paralelas conectan las localidades según el vuelo sea, hacia, o desde una localidad a otra.

Tipos de grafos

En la red informática todos los ordenadores deben estar conectados (con o sin dirección) pero sin conexiones múltiples entre ellos. Un ordenador no se puede conectar consigo mismo.

Sol: modelar mediante un grafo completo

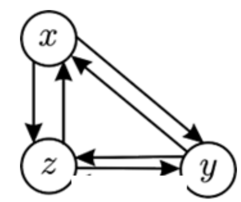


G_5

Def. Un GND simple es **completo**, o grafo K_n si existe una arista uniendo cada par de vértices distintos.

Ej. G_5 es K_4.

Def. Un GD simple **es completo** cuando existe sólo un arco uniendo cada par de vértices distintos (u, v) y (v, u).



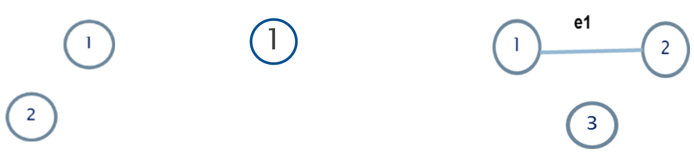
G_4'

Ej. G_4' es un grafo dirigido, simple y completo

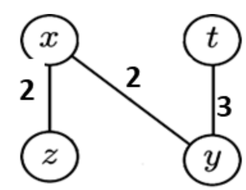
⇨ Casos particulares de grafos simples :

- Si G tiene **|E| = 0, |V|** > 1, el grafo es **vacío**. Todo grafo vacío es simple pero no completo.
- **Si** G tiene **|E| = 0, |V|** = 1, el grafo es **trivial.** Todo grafo trivial es simple y completo.

Ej. El 1º grafo es vacío, simple pero no completo; el 2º es trivial, simple y completo; el 3º grafo es simple pero no vacío ni trivial.



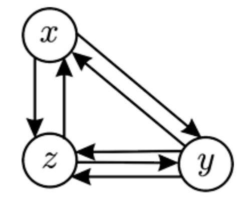
Def. Un grafo simple G está **ponderado** si cada arista / arco tiene un valor asociado w llamado peso.
Los pesos pueden representar coste, tiempos, etc., (los veremos en los problemas de caminos más cortos).



G_6'

Ej. G_6' es un grafo simple y ponderado

Tipos de grafos



G_4

Def. Un grafo **completo** pero no simple con n vértices es un grafo que en el caso de que sea no dirigido todos los vértices son adyacentes y pueden estar conectados por múltiples aristas pero no bucles, y en el caso de que sea dirigido además de que todos los vértices sean adyacentes puede tener múltiples arcos entre pares de vértices, también sin bucles.

- G_4 es un grafo dirigido y completo pero no es simple

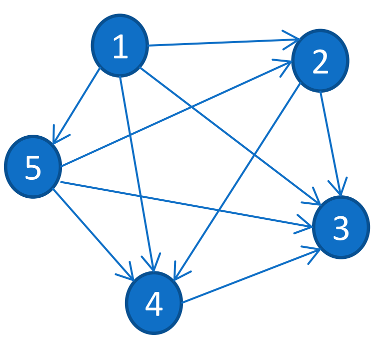
Cinco equipos de fútbol participan en un campeonato. Cada equipo se enfrenta exactamente una vez a los demás equipos con una relación que se establece sólo si un equipo vence al otro. Se conoce que el equipo 1 gana a todos los demás; el equipo 2 gana al 3 y al 4; el equipo 3 no gana a ninguno; el equipo 4 sólo gana al 3; el equipo 5 gana al 2, 3 y 4.

Se debe modelar la relación entre los equipos del campeonato mediante un grafo indicando el conjunto de vértices V y el de aristas/arcos E, según el tipo de grafo elegido y explicar la información sobre el campeonato que aporta el grado de cada vértice y cuáles serían los vértices adyacentes a cada uno.

Sol: se formará un grafo dirigido simple donde el conjunto de vértices representará a los equipos y los arcos la relación entre ellos de tal forma que el arco (x,y) indicará que el equipo que se encuentra en el vértice *x* gana al que se encuentra en el vértice *y*.

V = {1,2,3,4,5}

E = { e_1=(1,2), e_2=(1,3), e_3=(1,4), e_4=(1,5), e_5=(2,3), e_6=(2,4) , e_7=(4,3), e_8=(5,2), e_9=(5,3), e_5=(5,4)}



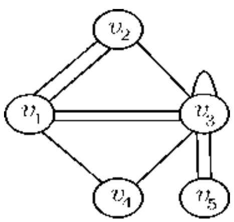
Tipos de grafos

Grafos definidos a partir de otros: Subgrafos.

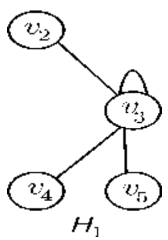
Hay ocasiones en que sólo estamos interesados en una parte de un grafo.

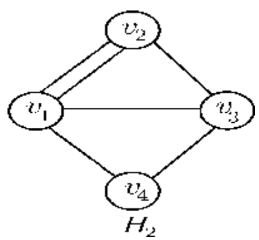
En una red de 5 ordenadores (p.ej., grafo G) sólo se necesitan 4 de ellos y no todas las conexiones iniciales (p.ej., grafo H_1 o grafo H_2) o bien tenemos todos los ordenadores pero con diferente conexiones (p.ej., grafo H_3).

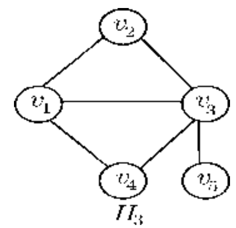
Def. Un **subgrafo** de un grafo G = (V, E) es un grafo H = (V',E') con $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$.



G







Def. Un subgrafo *H* de un grafo *G* es un **subgrafo generador** si sus conjuntos de vértices son iguales.

Ej. Los subgrafos generadores del grafo *G* serían H_3 y el propio grafo *G*.

Representación computacional

Existen diferentes formas de representar un grafo para almacenarlo en una computadora.

La estructura de datos usada dependerá de las características del grafo y del algoritmo usado para manipularlo.

Entre las estructuras más sencillas y utilizadas se encuentran las listas y las matrices.

Las listas son preferidas en grafos dispersos porque tienen un eficiente uso de la memoria y las matrices proveen acceso rápido pero pueden consumir grandes cantidades de memoria.

La naturaleza estática de las matrices puede hacer complejo el procedimiento de eliminación o adición de vértices y esto implicaría la eliminación o adición de una fila o columna en dichas matrices. Algo similar sucedería si tuviéramos que añadir o eliminar aristas/arcos.

1. **Listas de adyacencia.**
2. **Matriz de adyacencia A.**
3. **Matriz de incidencia M.**

Representación computacional

Listas de adyacencia

Una forma de representar grafos sin aristas múltiples es mediante las listas de adyacencia que especifican los vértices que son adyacentes a cada uno de los vértices del grafo.

Sea un grafo G = (V,E), con |V| = n, |E| = m.

En un computador podemos representar un grafo mediante una sucesión de listas en la que cada vértice es la cabeza de todos sus vértices adyacentes.

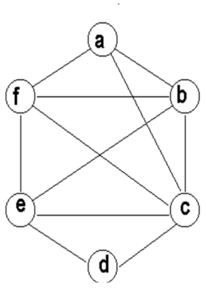


Tabla de adyacencia

a	b, c, f
b	a, c, e, f
c	a, b, d, e, f
d	c, e
e	b, c, d, f
f	a, b, c, e

Ejecutar algoritmos para grafos utilizando este tipo de representación mediante listas puede ser complicado si el grafo tiene muchas aristas.

Para simplificar los cálculos los grafos se representan mediante matrices.

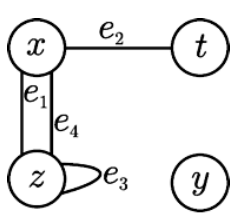
Representación computacional

Sea un grafo G = (V, E), con |V| = n.

Def. La **matriz de adyacencia** de *G* es una matriz de orden $n \times n$, que llamaremos **A = [a_{ij}]** / *aij* es igual al número de aristas/arcos del vértice v_i al v_j.
En GND el bucle cuenta 2. En GD el bucle cuenta 1.

- *En A se debe indicar a qué vértice corresponde cada fila.*
- *En GD la fila de A es el vértice origen del arco y la columna el vértice final.*
- *En GND A siempre es simétrica. En GD no siempre.*
- *Si A es no simétrica G es GD.*
- *Esta definición de A permite determinar los **grados** de los vértices.*
- *En GND la suma de los elementos de la fila i / columna i = d(vi).*
- *En GD la suma de los elementos de la fila i coincide con el grado de salida de vi, y la suma de los elementos de la columna i coincide con el grado de entrada de vi.*

Ej. En la matriz de adyacencia A del grafo G_1 se determinan los grados de los vértices.

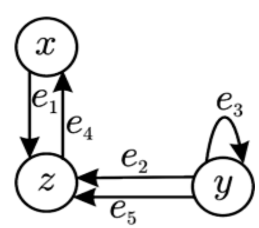


G_1

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} & \mathbf{t} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \\ \mathbf{t} \end{array} \end{array}$$

d(x) = 3 d(y) = 0
d(z) = 4 d(t) = 1

Ej. En la matriz de adyacencia A del grafo G_2 se determinan los grados de entrada/salida de cada nodo



G_2

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{array} \end{array}$$

ds(x) = 1 de(x) = 1
ds(y) = 3 de(y) = 1
ds(z) = 2 de(z) = 1

Representación computacional

Sea un grafo G = (V,E), con |V| = n, |E| = m.

Def. La **matriz de incidencia** de *G* es una matriz de orden $n \times m$, que llamaremos **M = [m_{ij}]** definida para **GND** como:

$$M = [m_{ij}] \,/\, m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } v_i \text{ no es incidente con } a_j \\ 1 & \text{si } v_i \text{ es incidente con } a_j \\ 2 & \text{si } a_j \text{ es un bucle en } v_i \end{cases}$$

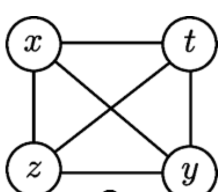
y para **GD** :

$$M = [m_{ij}] \,/\, m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } v_i \text{ no es incidente con } a_j \\ 1 & \text{si } v_i \text{ es vértice inicial de } a_j \\ -1 & \text{si } v_i \text{ es vértice final de } a_j \\ 2 & \text{si } a_j \text{ es un bucle en } v_i \end{cases}$$

- *En M las filas corresponden a los vértices y las columnas a las aristas.*
- *En un GND, la suma de los elementos de la fila i es igual al grado del vértice i y la suma de los elementos de cada columna es 2.*
- *En un GD sin bucles, la suma de los elementos de cada columna de M es 0.*

Ej. Matriz M de un GND

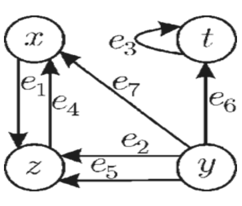
E = {e_1 = {x,y}, e_2 = {x,z}, e_3 = {x,t}, e_4 = {y,z}, e_5 = {y,t}, e_6 = {z,t}}



G_5

M	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
x	1	1	1	0	0	0
y	1	0	0	1	1	0
z	0	1	0	1	0	1
t	0	0	1	0	1	1

Ej. Matriz M de un GD:



G_7

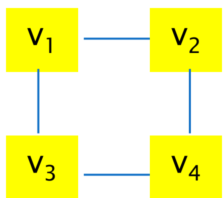
M	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
x	1	0	0	-1	0	0	-1
y	0	1	0	0	1	1	1
z	-1	-1	0	1	-1	0	0
t	0	0	2	0	0	-1	0

Grafos isomorfos

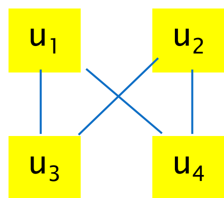
Los grafos se pueden representar de forma diferente pero preservando los vértices y aristas.

Def. Dos grafos simples $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son **isomorfos** ($G_1 \cong G_2$) si existe una función biyectiva f de V_1 en V_2 / para cada par de vértices u, $v \in V_i$, u y v son adyacentes en G_1 si y sólo si, f(u) y f(v) son adyacentes en G_2.

>> La función f preserva la relación de adyacencia., i.e., en grafos isomorfos cualquier par de vértices u y v de G son adyacentes si y solo si lo son sus imágenes, f(u) y f(v), en H.



$G = (V_1, E_1)$



$H = (V_2, E_2)$

Ej. Los grafos G y H son isomorfos ya que la función f : $f(v_1) = u_1$, $f(v_2) = u_4$, $f(v_3) = u_3$, $f(v_4) = u_2$ es biyectiva entre los dos grafos y los vértices preservan la adyacencia .

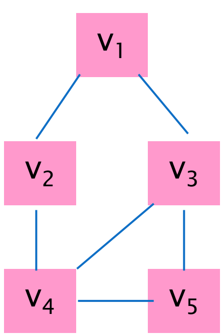
>> Si el número de vértices es grande, demostrar que los vértices de dos grafos preservan la adyacencia tiene un **coste de n!.**

>> Como el coste es alto, para demostrar el isomorfismo lo que se hace es comprobar que los grafos no son isomorfos demostrando que no comparten alguna de las propiedades que dos grafos isomorfos deben tener.

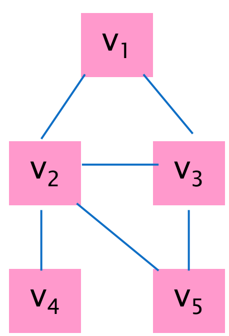
>> Propiedades necesarias para que dos grafos simples sean isomorfos:

- Los grafos isomorfos deben preservar el nº de vértices, de aristas y el grado de los vértices.

>> Si alguna de estas características falla en los grafos simples estos no serán isomorfos pero si las propiedades coinciden no significa que lo sean.



$T = (V_1, E_1)$

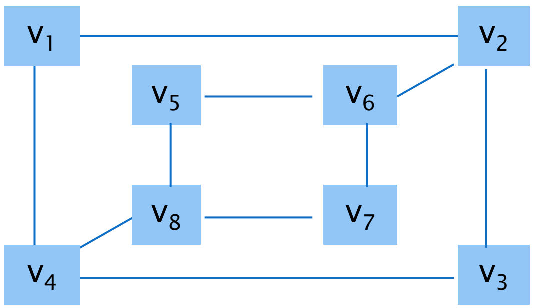


$U = (V_2, E_2)$

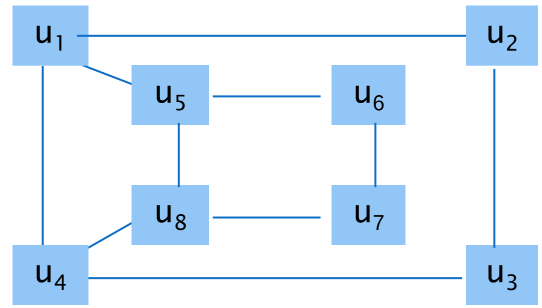
Ej. Comprobamos que los grafos T y U no son isomorfos ya que aunque ambos tienen 5 vértices y 6 aristas el grafo U tiene un vértice de grado uno, el vértice v_4, pero T no.

Grafos isomorfos

Ej. Con los siguientes grafos se demuestra que aunque preservan las propiedades de grados isomorfos, los grafos no lo son.



$G = (V_1, E_1)$

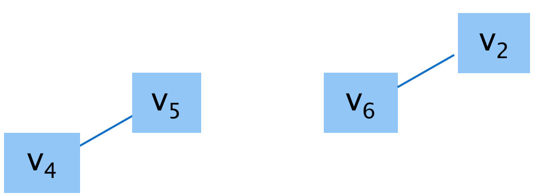


$H = (V_2, E_2)$

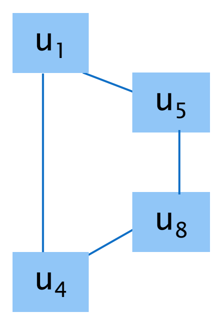
G y H tienen 8 vértices y 10 aristas. Ambos tienen 4 vértices de grado dos y 4 de grado 3. Con esto, supuestamente, G y H son isomorfos pero veremos que no lo son. En G, tenemos que $d((v_1) = 2$. El vértice v_1 se debe corresponder con alguno de los vértices de H de grado 2, éstos serían $u_{2,}$ $u_{3,}$ $u_{6,}$ $u_{7.}$ Sin embargo cada uno de estos vértices de H son adyacentes a otros vértices de grado 2 de H lo que no es cierto para v_1 en el grafo G. Luego **no son isomorfos**.

→ Otra forma de verlo es comprobar que los subgrafos formados por vértices de grado 3 y por las aristas que los conectan son isomorfos.

Ej. Los subgrafos de G y H respecticvamente demuestran que **no son isomorfos**.

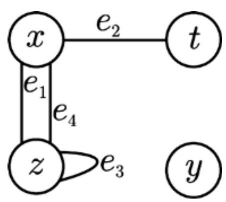


Subgrafo de G

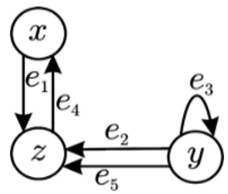


Subgrafo de H

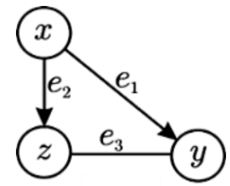
GRAFOS



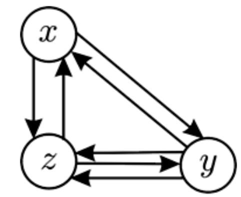
G_1



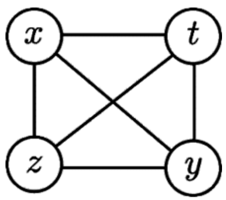
G_2



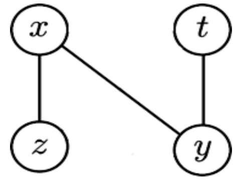
G_3



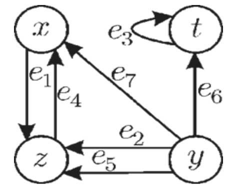
G_4



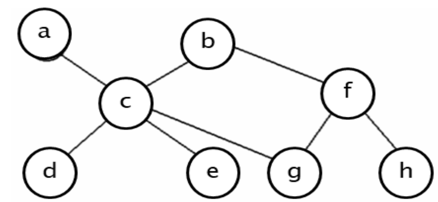
G_5



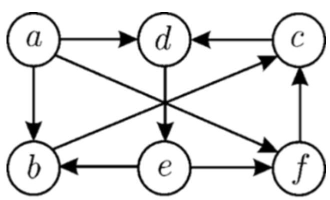
G_6



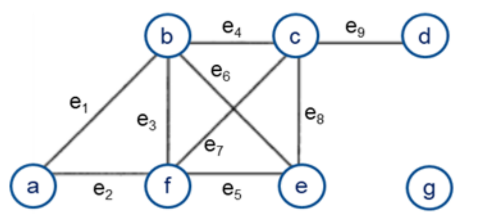
G_7



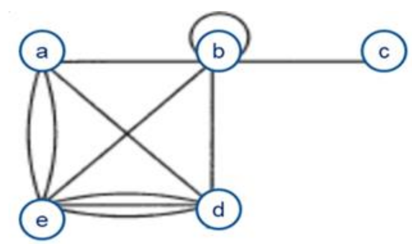
G_8



G_9



G_{10}



G_{11}

EJERCICIOS

Para los grafos G_8, G_9 y G_{10} se estudian los siguientes apartados:

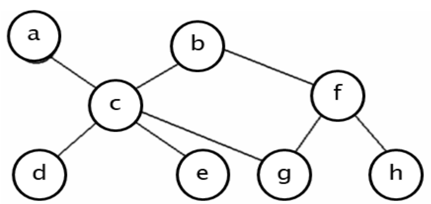
a) Clasifícalo como: GND, GD, mixto, simple, multigrafo, completo.

b) Indica los vértices cuyo grado sea mayor o igual que 3.

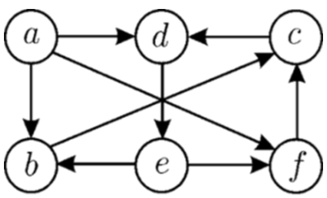
c) Según si el grafo es dirigido o no, comprueba que se cumplen, Teorema 1.1, Teorema 1.2 y el Corolario 1.1.

d) Calcula $\Gamma(v)$ y también para los grafos dirigidos calcula $\Gamma^{-1}(v)$.

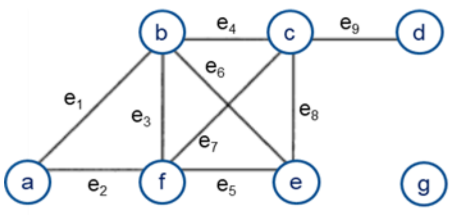
e) Escribe la matriz de adyacencia A y de incidencia M de cada grafo definiendo previamente los conjuntos de vértices y de aristas.



G_8



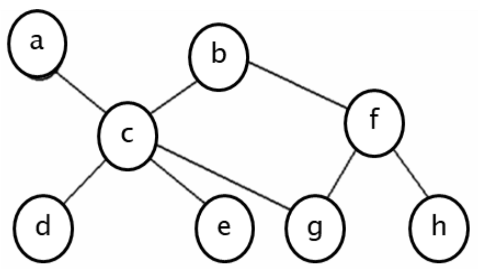
G_9



G_{10}

EJERCICIOS

EJERCICIO-1



G_8

a) El grafo G_8 es no dirigido, simple y no completo.

b) Vértices con grado ≥ 3, d(c) = 5; d(f) = 3;

c) Se comprueba Teorema1.2 y Corolario 1.1

Th1.2 : la suma de los grados de los vértices es el doble del nº de aristas:

E = 8. d(a) + d(b) + d(c) + d(d) + d(e) + d(f) + d(g) + d(h) = 16 = 2|E|.

Corolario 1.1 El número de vértices de grado impar es par.

Nº de vértices de grado impar = 6, vértices: a, c, d, e, f, h.

d) Cálculo de Γ(v).

	a	b	c	d	e	f	g	h
Γ(v)	c	c,f	a,b,d,e,g	c	c	b,g,h	c,f	f

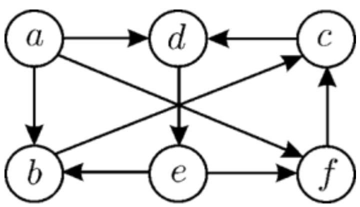
e) Matriz adyacencia A y de incidencia M. V = {a,b,c,d,e,f,g,h}. E = { e_1={a,c}, e_2={b,c}, e_3={b,f}, e_4={c,d}, e_5={c,e}, e_6={c,g}, e_7={f,g}, e_8={f,h} }.

A	a	b	c	d	e	f	g	h
a	0	0	1	0	0	0	0	0
b	0	0	1	0	0	1	0	0
c	1	1	0	1	1	0	1	0
d	0	0	1	0	0	0	0	0
e	0	0	1	0	0	0	0	0
f	0	1	0	0	0	0	1	1
g	0	0	1	0	0	1	0	0
h	0	0	0	0	0	1	0	0

M	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
a	1	0	0	0	0	0	0	0
b	0	1	1	0	0	0	0	0
c	1	1	0	1	1	1	0	0
d	0	0	0	1	0	0	0	0
e	0	0	0	0	1	0	0	0
f	0	0	1	0	0	0	1	1
g	0	0	0	0	0	1	1	0
h	0	0	0	0	0	0	0	1

EJERCICIOS

EJERCICIO-2



G_9

a) El grafo G_9 es GD, simple (no tiene bucles ni arcos múltiples), no completo (no existe arco (a,c), p.ej).

b) Vértices con d(v)>=3, son todos ya que la suma de los grados de entrada y de salida son:

	a	b	c	d	e	f
de(v)	0	2	2	2	1	2
ds(v)	3	1	1	1	2	1

c) Th1.1: La suma de los grados de salida /entrada coincide con el número de arcos.

$$d_e(a) + d_e(b) + d_e(c) + d_e(d) + d_e(e) + d_e(f) = 9 = |E|$$

$$d_s(a) + d_s(b) + d_s(c) + d_s(d) + d_s(e) + d_s(f) = 9 = |E|$$

Th1.2: La suma de los grados de los vértices es el doble del nº de arcos:

$$|E| = 9.\ d(a) + d(b) + d(c) + d(d) + d(e) + d(f) = 18 = 2|E|.$$

Corolario1.1: El número de vértices de grado impar es par.

Nº de vértices de grado impar todos, que son 6.

d) y e) Cálculo de $\Gamma(v)$ y de $\Gamma^{-1}(v)$.

	a	b	c	d	e	f
$\Gamma(v)$	b,d.f	c	d	e	b,f	c
$\Gamma^{-1}(v)$	---	a,e	b,f	a,c	d	a,e

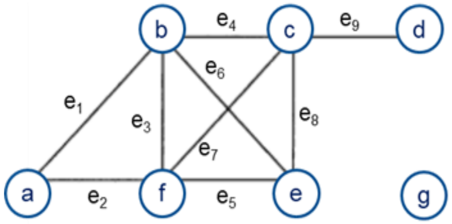
e) Matriz adyacencia A y de incidencia M. V = {a,b,c,d,e,f}, E = { e_1=(a,b), e_2=(a,d), e_3=(a,f), e_4=(b,c), e_5=(c,d), e_6=(d,e), e_7=(e,b), e_8=(e,f), e_9=(f,c)}

A	a	b	c	d	e	f
a	0	1	0	1	0	1
b	0	0	1	0	0	0
c	0	0	0	1	0	0
d	0	0	0	0	1	0
e	0	1	0	0	0	1
f	0	0	1	0	0	0

M	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
a	1	1	1	0	0	0	0	0	0
b	-1	0	0	1	0	0	-1	0	0
c	0	0	0	-1	1	0	0	0	-1
d	0	-1	0	0	-1	1	0	0	0
e	0	0	0	0	0	-1	1	1	0
f	0	0	-1	0	0	0	0	-1	1

EJERCICIOS

EJERCICIO-3



G_{10}

a) El grafo G_{10} es GND, simple (ni bucles ni aristas múltiples), no completo (no existe arista {a,d} p. ej.).

b) Vértices v con grado $d(v) \geq 3$, d(e)=3; d(b)=d(c)=d(f)=4.

c) Como el grafo es no dirigido se comprueba Teorema1,2 y Corolario 1.1

Th1.2: La suma de los grados de los vértices es el doble del nº de aristas:

$|E| = 9$; $d(a) + d(b) + d(c) + d(d) + d(e) + d(f) + d(g) = 18 = 2|E|$.

Corolario 1.1 El número de vértices de grado impar es par.

Nº de vértices de grado impar = 2, vértices: d y e.

d) Cálculo de $\Gamma(v)$.

	a	b	c	d	e	f	g
$\Gamma(v)$	b, f	a,c,e,f	b,d,e,f	c	b,c,f	a,b,c,e	--

e) Matriz adyacencia A y de incidencia M. V = {a,b,c,d,e,f,g},

E = {e_1={a,b}, e_2={a,f}, e_3={b,c}, e_4={b,e}, e_5={b,f}, e_6={c,d}, e_7={c,d}, e_8={c,e}, e_9={c,f}, e_{10}={e,f}}

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

EJERCICIO-4

¿Se puede dibujar un grafo G con tres vértices v_1 v_2 y v_3, donde,

a. grad (v_1) = 1, grad (v_2) = 2, grad (v_3) = 2

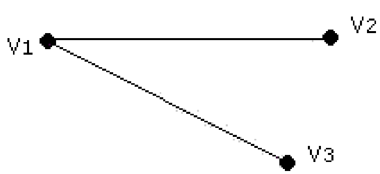
b. grad (v_1) = 2, grad (v_2) = 1, grad (v_3) = 1

c. grad (v_1) = 0, grad (v_2) = 0, grad (v_3) = 4

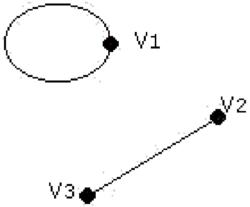
Solución

a. No es posible porque la suma de los grados de los vértices es 5 .

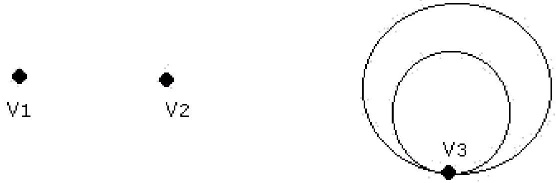
b. Sí, porque grad (v1) + grad (v2) + grad (v3) = 4; que es un número par. El número de aristas es 2. No existen otros grafos que cumplan estas condiciones.



Ó



c. Sí, porque grad (v1) + grad (v2) + grad (v3) = 4; que es un número par. El único grafo es:



EJERCICIO-5

¿Es posible tener un grafo con 10 aristas y en el que cada vértice tiene grado 4?

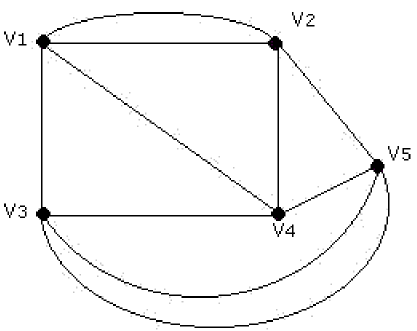
Solución

Por el Teorema 1.1 se tiene:

2A = 20 o sea que deben existir 10 aristas.

Por otra parte, como todos los vértices tienen grado 4, se debe cumplir que 20=4n, donde n es el número de vértices. Por tanto n = 5.

La figura siguiente muestra uno de eso grafos:



EJERCICIO-6

Responde a cada cuestión teniendo en cuenta que G es un grafo simple y completo con *n* vértices:

a) Si n = 1, el número de aristas de G es:
b) Si n = 2, el número de aristas de G es:
c) Si n = 6, el número de aristas de G es:

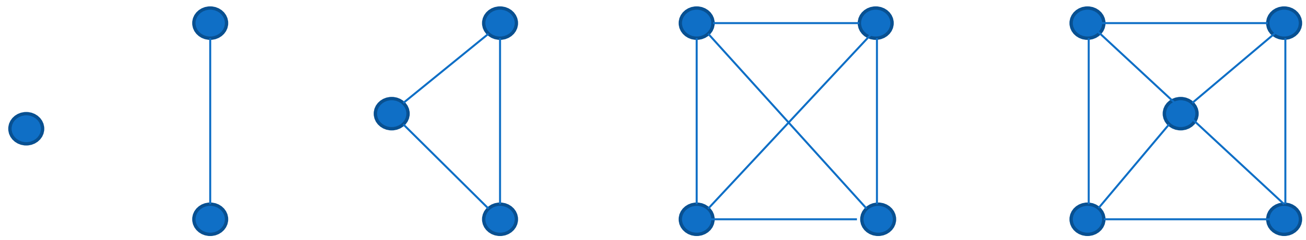
Solución

a) 0; b) 1; c) 5;

EJERCICIO8-7

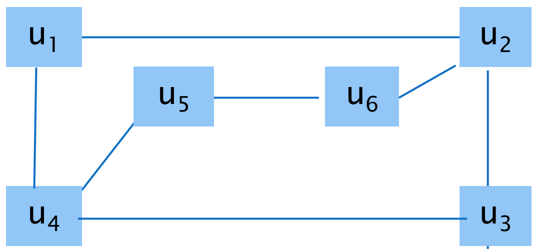
Dibuja los cinco primeros grafos completos teniendo en cuenta el número de vértices.

Solución.

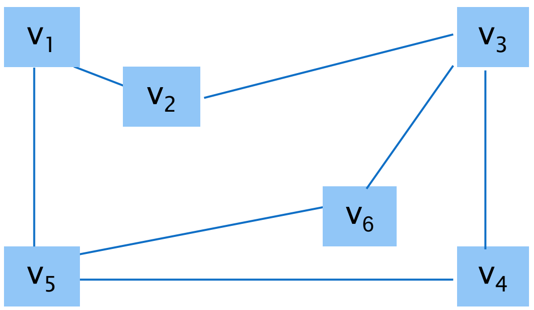


K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

EJERCICIO 8 Determina si los grafos $G = (V_1, E_1)$ y $H = (V_2, E_2)$ son isomorfos.



$G = (V_1, E_1)$



$H = (V_2, E_2)$

Solución

G y H coinciden en vértices y número de aristas.

Ambos tienen 4 vértices de grado 2 y 2 vértices de grado 3 y los subgrafos formados por los vértices de grado 2 y por las aristas que los conectan son isomorfos. Como G y H coinciden en estas propiedades tratamos de encontrar un isomorfismo.

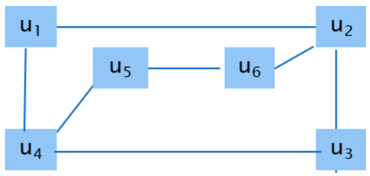
Definimos la función biyectiva f y determinamos si es un isomorfismo.

Como $d(u_1)=2$ y u_1 no es adyacente a ningún vértice de grado 2, la imagen de este vértice en H sólo puede ser o bien el vértice v_4 o v_6, ambos de grado 2 y que tampoco son adyacentes a ningún vértice de grado 2. Elegimos, p.ej., $f(u_1) = v_6$ (si con esta elección no se demuestra que los grafos son isomorfos asignamos a v_1 el otro vértice y se vuelve a comprobar).

Un vértice adyacente a u_1 es $u_{2.}$ Las posibles imágenes a u_2 son v_3 y $v_{5.}$ elegimos, p.ej., $f(u_2) = v_3$. De esta forma obtenemos la siguiente función biyectiva entre el conjunto de vértices G y H: $f(u_1) = v_6$, $f(u_2) = v_3$, $f(u_3) = v_{4,}$ $f(u_4) = v_{5,}$ $f(u_5) = v_{1,}$ $f(u_6) = v_2$.

Se comprueba obtienen las matrices de adyacencia teniendo en cuenta f y se comprueba si f preserva la adyacencia.

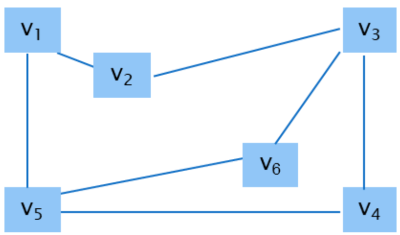
EJERCICIO 8 (+) Matrices de adyacencia de G y H..



$G = (V_1, E_1)$

Matriz de adyacencia A_G de G.

A_G	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
u_1	0	1	0	1	0	0
u_2	1	0	1	0	0	1
u_3	0	1	0	1	0	0
u_4	1	0	1	0	1	0
u_5	0	0	0	1	0	1
u_6	0	1	0	0	1	0



$H = (V_2, E_2)$

Matriz de adyacencia A_H de H / filas y columnas etiquetadas con las imágenes de los vértices de G:
$f(u_1) = v_6$, $f(u_2) = v_3$, $f(u_3) = v_4$,
$f(u_4) = v_5$, $f(u_5) = v_1$, $f(u_6) = v_2$

A_H	v_6	v_3	v_4	v_5	v_1	v_2
v_6	0	1	0	1	0	0
v_3	1	0	1	0	0	1
v_4	0	1	0	1	0	0
v_5	1	0	1	0	1	0
v_1	0	0	0	1	0	1
v_2	0	1	0	0	1	0

Como $A_G = A_H$ se sigue que f preserva la adyacencia, luego G y H son isomorfos.

>> Si la elección de vértices elegida hubiese llevado a que G y H no son isomorfos se elegiría otra relación entre los vértices de G y H y se comprobaría isomorfismo.

>> Complejidad para comprobar isomorfismo: exponencial sobre el nº de vértices (alto).

>> Existe un algoritmo que mejora el cálculo :NAUTY (excede los objetivos de este curso).