# Ecuaciones de Bellman (B1) para calcular el camino más corto (cmc) entre dos vértices

GDP
sin circuitos

$$u_1 = 0$$

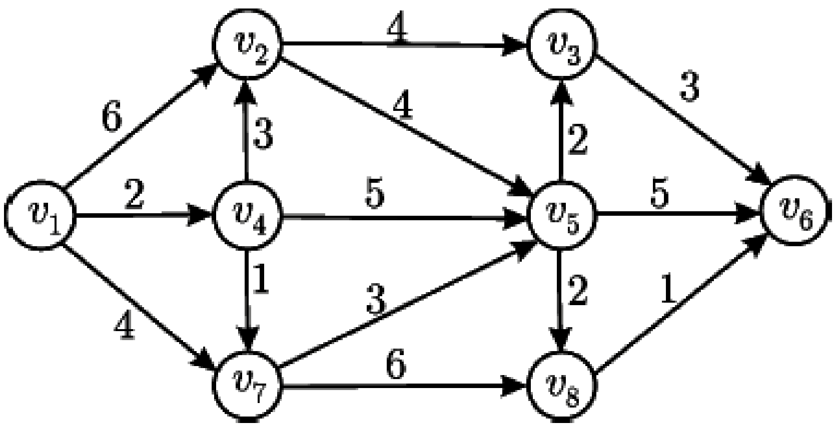
$$u_j = \min_{k<j,\ v_k \in \Gamma^{-1}(v_j)} \{u_k + \omega_{kj}\}, \quad j = 2, \ldots, n$$

- **Vértices** numerados de **1** a **n,** V = $\{v_1,\ldots v_n\}$.
- **Vértice origen** : vértice numerado **1**.
- $w_{ij}$ : **peso del arco (i, j) /** $w_{ij}$ **no negativo /** $\infty$ **si no** existe arco (i,j)**.**
- $u_j$ : **peso** del **cmc(1- j).**

>> Un GDP **no tiene circuitos** sii, existe una **numeración de los vértices** para la que se cumple que para todo arco **(i,j)** $\in$ **E entonces i < j**

**$\Gamma^{-1}$(v):** vértices que **alcanzan a v** con cadena de long 1

# EJEMPLO >> NUMERACIÓN d VÉRTICES




## ALGORITMO DE NUMERACIÓN

Etapa 1. Inicializar $i \leftarrow 1$, $V^{(1)} = V$

Etapa 2. Tomar $v \in V^{(i)}$ / $d_e(v) = 0$ en $G[V^{(i)}]$

Etapa 3. Numerar el vértice v como vértice i.

Hacer $V^{(i+1)} = V^{(i)} \sim \{v\}$

Hacer $i \leftarrow i + 1$

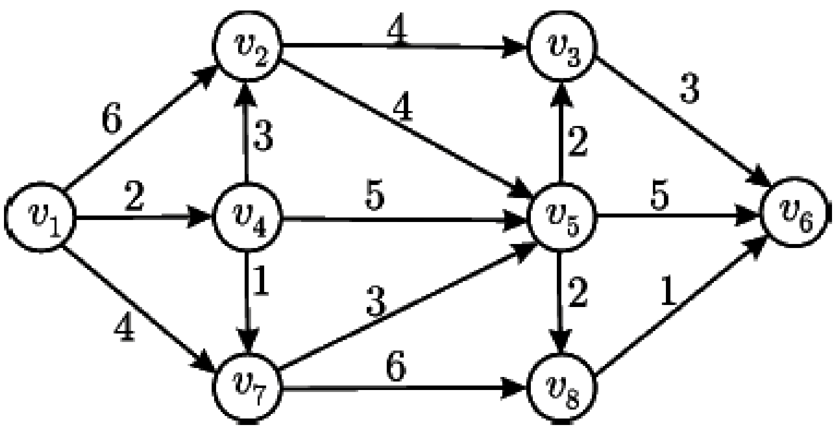
Etapa 4. Si $V^{(i)} = \{\ \}$ entonces PARAR

En otro caso, volver a la etapa 2.

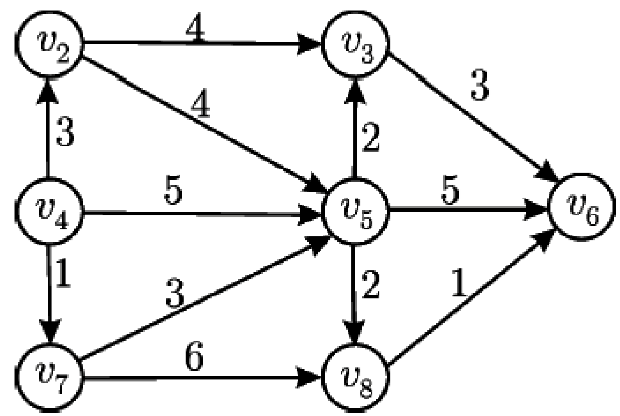
**EJEMPLO** >> NUMERACIÓN d VÉRTICES

$i = 1.$
$V^{(1)} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}.$
*Tomamos* $v_1 \in V^{(1)}$ / $d_e(v_1) = 0.$

| **Vértice:** | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $v_6$ | $v_7$ | $v_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Numer.:** | **1** | | | | | | | |




*Numeramos* $v_1$ *con* 1.
*Eliminamos* $v_1$ *de* $V^{(1)}$, *es decir*,
$V^{(2)} = V^{(1)} \sim \{v_1\}.$




**Si no se pueden RENUMERAR vértices**
**→ existe circuito**
**→No aplicar Bellman**

**ALGORITMO DE NUMERACIÓN**

Etapa 1. Inicializar i ← 1, $V^{(1)} = V$

Etapa 2. Tomar $v \in V^{(i)}$ / $d_e(v) = 0$ en $G[V^{(i)}]$

Etapa 3. Numerar el vértice v como vértice i.

Hacer $V^{(i+1)} = V^{(i)} \sim \{v\}$

Hacer i ← i + 1

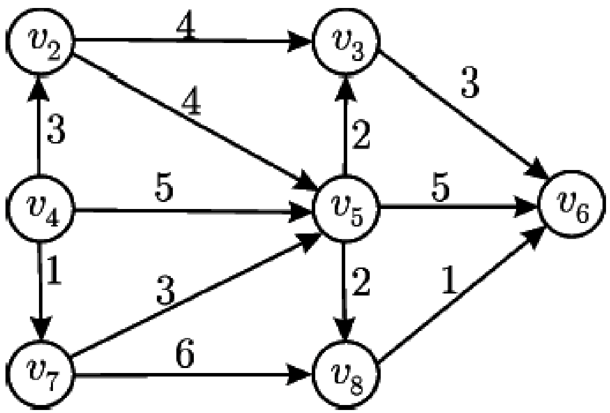
Etapa 4. Si $V^{(i)} = \{\ \}$ entonces PARAR

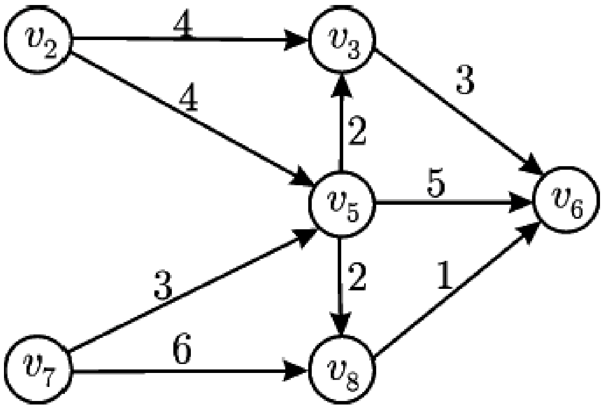
En otro caso, volver a la etapa 2.

## EJEMPLO (cont) >> NUMERACIÓN d VÉRTICES

$i = 2.$
$V^{(2)} = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}.$
*Tomamos* $v_4 \in V^{(2)} \;/\; d_e(v_4) = 0.$

| Vértice: | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $v_6$ | $v_7$ | $v_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numer.: | 1 | | | 2 | | | | |



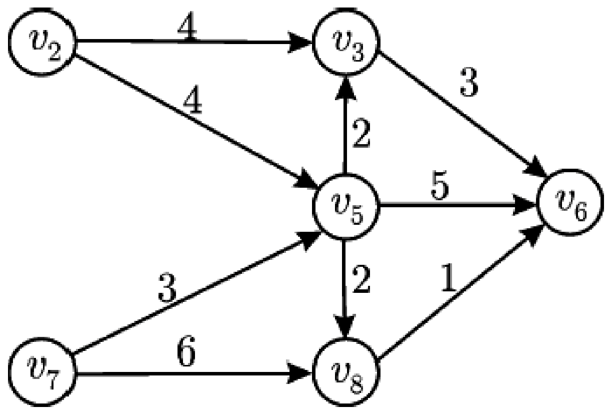



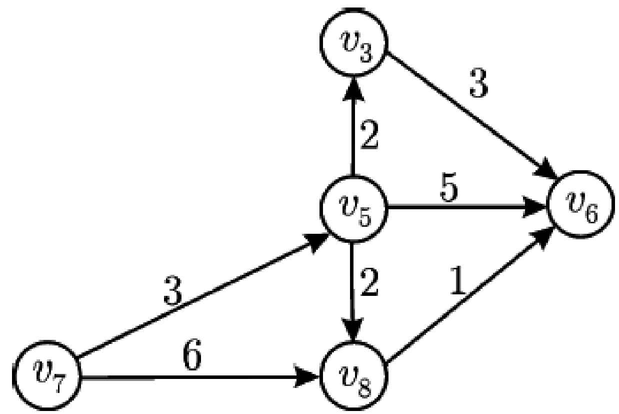

*Numeramos* $v_4$ *con* 2.
*Eliminamos* $v_4$ *de* $V^{(2)}$*, es decir,*
$V^{(3)} = V^{(2)} \sim \{v_4\}.$

## EJEMPLO (cont) >> NUMERACIÓN d VÉRTICES

| Vértice: | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $v_6$ | $v_7$ | $v_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numer.: | 1 | 3 | | 2 | | | | |

$i = 3.$
$V^{(3)} = \{v_2, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8\}.$
*Tomamos* $v_2 \in V^{(3)}$ / $d_e(v_2) = 0.$



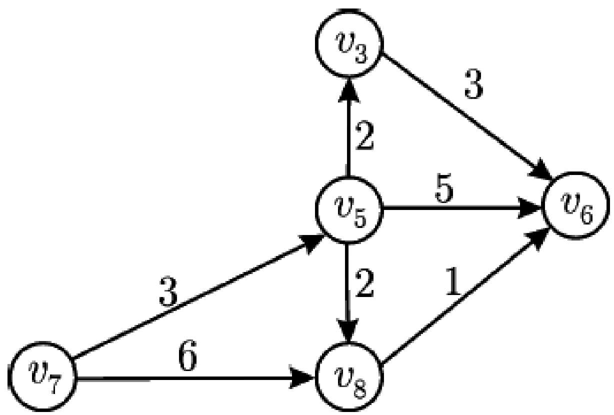



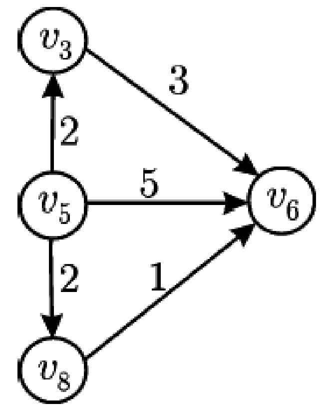

*Numeramos* $v_2$ *con* 3.
*Eliminamos* $v_2$ *de* $V^{(3)}$, *es decir,*
$V^{(4)} = V^{(3)} \sim \{v_2\}.$

## EJEMPLO (cont) >> NUMERACIÓN d VÉRTICES

| Vértice: | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $v_6$ | $v_7$ | $v_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numer.: | 1 | 3 | | 2 | | | 4 | |

$i = 4.$
$V^{(4)} = \{v_3, v_5, v_6, v_7, v_8\}.$
*Tomamos* $v_7 \in V^{(4)} \;/\; d_e(v_7) = 0.$



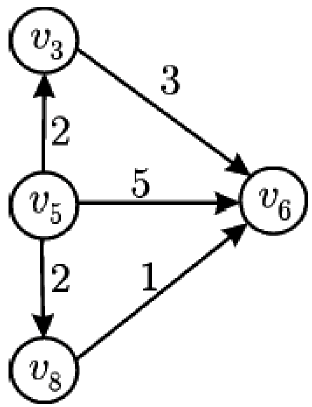



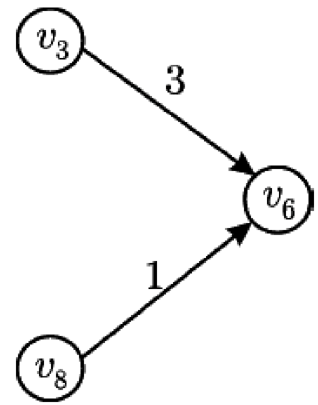

*Numeramos* $v_7$ *con* 4.
*Eliminamos* $v_7$ *de* $V^{(4)}$, *es decir,*
$V^{(5)} = V^{(4)} \sim \{v_7\}.$

## EJEMPLO (cont) >> NUMERACIÓN d VÉRTICES

$i = 5.$
$V^{(5)} = \{v_3, v_5, v_6, v_8\}.$
*Tomamos* $v_5 \in V^{(5)}$ / $d_e(v_5) = 0.$

| Vértice: | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $v_6$ | $v_7$ | $v_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numer.: | 1 | 3 | | 2 | 5 | | 4 | |



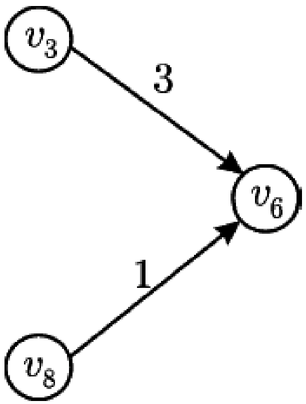



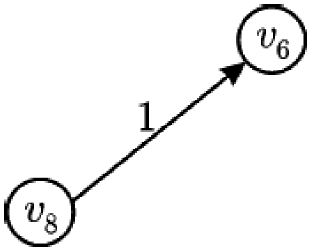

*Numeramos* $v_5$ *con* 5.
*Eliminamos* $v_5$ *de* $V^{(5)}$, *es decir,*
$V^{(6)} = V^{(5)} \sim \{v_5\}.$

# EJEMPLO (cont) >> NUMERACIÓN d VÉRTICES

$i = 6.$
$V^{(6)} = \{v_3, v_6, v_8\}.$
*Tomamos* $v_3 \in V^{(6)} \;/\; d_e(v_3) = 0.$

| Vértice: | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $v_6$ | $v_7$ | $v_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numer.: | 1 | 3 | 6 | 2 | 5 | | 4 | |



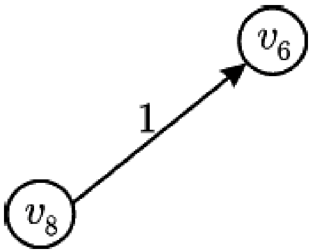




*Numeramos* $v_3$ *con* 6.
*Eliminamos* $v_3$ *de* $V^{(6)}$, *es decir,*
$V^{(7)} = V^{(6)} \sim \{v_3\}.$

## EJEMPLO (cont) >> NUMERACIÓN d VÉRTICES

$i = 7.$
$V^{(7)} = \{v_6, v_8\}.$
*Tomamos* $v_8 \in V^{(7)}$ / $d_e(v_8) = 0.$

| Vértice: | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $v_6$ | $v_7$ | $v_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numer.: | 1 | 3 | 6 | 2 | 5 | | 4 | 7 |



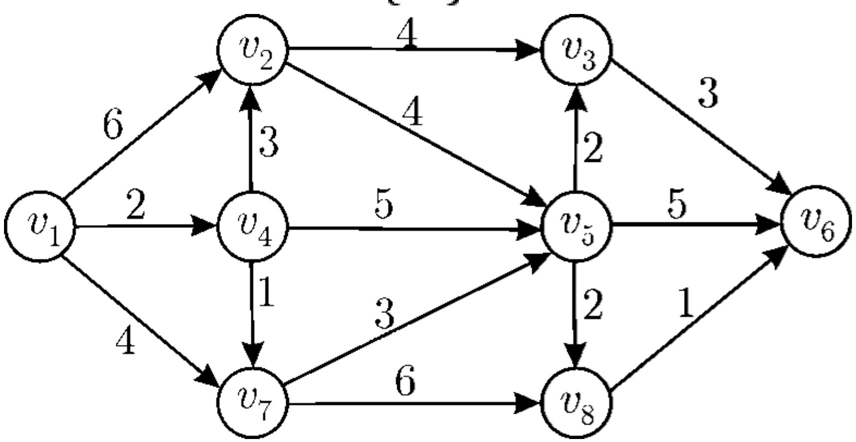


*Numeramos* $v_8$ *con* 7.
*Eliminamos* $v_8$ *de* $V^{(7)}$, *es decir,*
$V^{(8)} = V^{(7)} \sim \{v_8\}.$

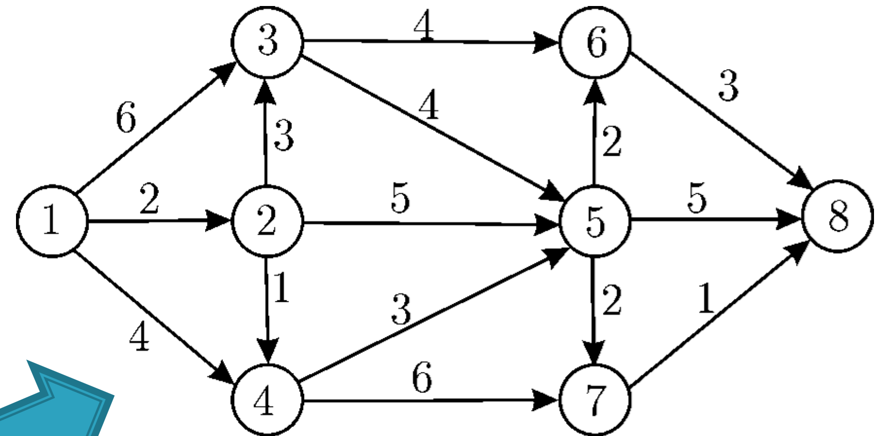
$i = 8.$
$V^{(8)} = \{v_6\}.$
$Tomamos\ v_6 \in V^{(8)}\ /\ d_e(v_6) = 0.$

$v_6$

*Numeramos* $v_6$ *con 8.*
*Eliminamos* $v_6$ *de* $V^{(8)}$, *es decir,*
$V^{(9)} = V^{(8)} \sim \{v_6\} = \emptyset.$

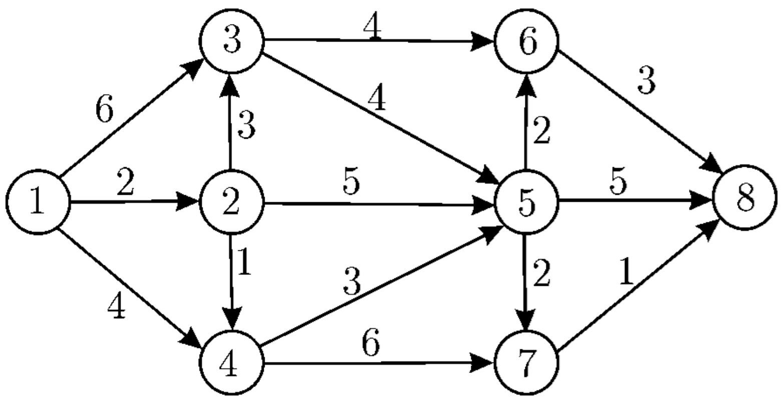


| Vértice: | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $v_6$ | $v_7$ | $v_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numer.: | 1 | 3 | 6 | 2 | 5 | 8 | 4 | 7 |



**Se cumple**
**$\forall$ (i, j) → i < j**
**→ Grafo sin circuitos**
**→ Aplicar Ec-Bellman**

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 0,\\
u_j &= \min_{k<j,\ v_k \in \Gamma^{-1}(v_j)} \{u_k + \omega_{kj}\}, \quad j = 2, \ldots, n
\end{aligned}
$$



**PESOS Y VÉRTICES**

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 0,\\
u_2 &= \min\{u_1 + \omega_{12}\} = 2,\\
u_3 &= \min\left\{u_1 + \omega_{13}, \underline{u_2 + \omega_{23}}\right\} = \min\{6, 2+3\} = 5,\\
u_4 &= \min\left\{u_1 + \omega_{14}, \underline{u_2 + \omega_{24}}\right\} = \min\{4, 2+1\} = 3,\\
u_5 &= \min\left\{u_2 + \omega_{25}, u_3 + \omega_{35}, \underline{u_4 + \omega_{45}}\right\} = \min\{2+5, 5+4, 3+3\} = 6,\\
u_6 &= \min\left\{u_3 + \omega_{36}, \underline{u_5 + \omega_{56}}\right\} = \min\{5+4, 6+2\} = 8,\\
u_7 &= \min\left\{u_4 + \omega_{47}, \underline{u_5 + \omega_{57}}\right\} = \min\{3+6, 6+2\} = 8,\\
u_8 &= \min\left\{u_5 + \omega_{58}, u_6 + \omega_{68}, \underline{u_7 + \omega_{78}}\right\} = \min\{6+5, 8+3, 8+1\} = 9.
\end{aligned}
$$

# CMC(1-J)

| V | v1 | v4 | v2 | v7 | v5 | v3 | v8 | v6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numer. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Peso $u_i$ i=1,…8 | 0 | 2 | 5 | 3 | 6 | 8 | 8 | 9 |
| Vértices cmc | -- | 1,2 | 1,2,3 | 1,2,4 | 1,2,4,5 | 1,2,4,5,6 | 1,2,4,5,7 | 1,2,4,5,7,8 |

# APLICACIÓN DE LAS ECUACIONES D BELLMAN

**Calcular el mínimo tiempo de la duración de un proyecto que incluye la realización de un gran nº de actividades relacionadas**

Para realizar una actividad es necesario que otras previas hayan finalizado.

## PERT

(Proyect Evaluation Research Task)

Técnicas de Evaluación y Revisión de Proyectos

## Visión de PERT:

Permite calcular la **duración de un proyecto** usando **grafos** en los que se representan las distintas **tareas** que forman el proyecto y los **plazos de cada una**.

El proyecto debe informar de las relaciones entre las distintas tareas y el orden en que se deben realizar.

PERT es una **herramienta valiosa para gestionar proyectos complejos a largo plazo en los que interactúen muchos actores**.

Ejercicio 4-H3

PROYECTO 1 :

**HACER TORTILLA DE PATATAS**

| actividad | a1 | a2 | a3 | a4 | a5 | a6 | a7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| tiempo | 6 | 3 | 2 | 15 | 6 | 10 | 7 |
| prerrequisito | - | - | - | a1<br>a3 | a2<br>a4 | a5 | a6 |

**¿ mínimo tiempo necesario para finalizarlo?**

| ORDEN ACTIVIDADES/TAREAS | TIEMPO DURACIÓN | PRERREQUISITOS |
|---|---|---|
| a1: Pelar patatas | a1: 6u | a1: -- |
| a2: Batir huevos | a2: 3u | a2: -- |
| a3: Pelar cebolla | a3: 2u | a3: -- |
| a4: Freir patatas y cebolla | a4: 15u | a4: a1, a3 |
| a5: Añadirlo a huevo | a5: 6u | a5: a2, a4 |
| a6: Cuajar tortilla | a6: 10u | a6: a5 |
| a7: Zampar tortilla | a7: 7u | a7: a6 |

# PERT

**>> Modela el proyecto en un grafo dirigido ponderado acíclico.**

**>> Calcula el camino más largo (CAMINO CRÍTICO)** entre dos vértices usando ecuaciones de Bellman (B2).

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 0, \\
u_j &= \max_{k<j,\ v_k \in \Gamma^{-1}(v_j)} \{u_k + \omega_{kj}\}, \quad j = 2, \ldots, n,
\end{aligned}
$$

**>> PESO** del camino crítico: **coste MÍNIMO** necesario para desarrollar el proyecto.

>> **Vértices** del camino crítico: **actividades** que han participado en el cálculo del coste: **actividades críticas**.

| actividad | a1 | a2 | a3 | a4 | a5 | a6 | a7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| tiempo | 6 | 3 | 2 | 15 | 6 | 10 | 7 |
| prerrequisito | - | - | - | a1<br>a3 | a2<br>a4 | a5 | a6 |

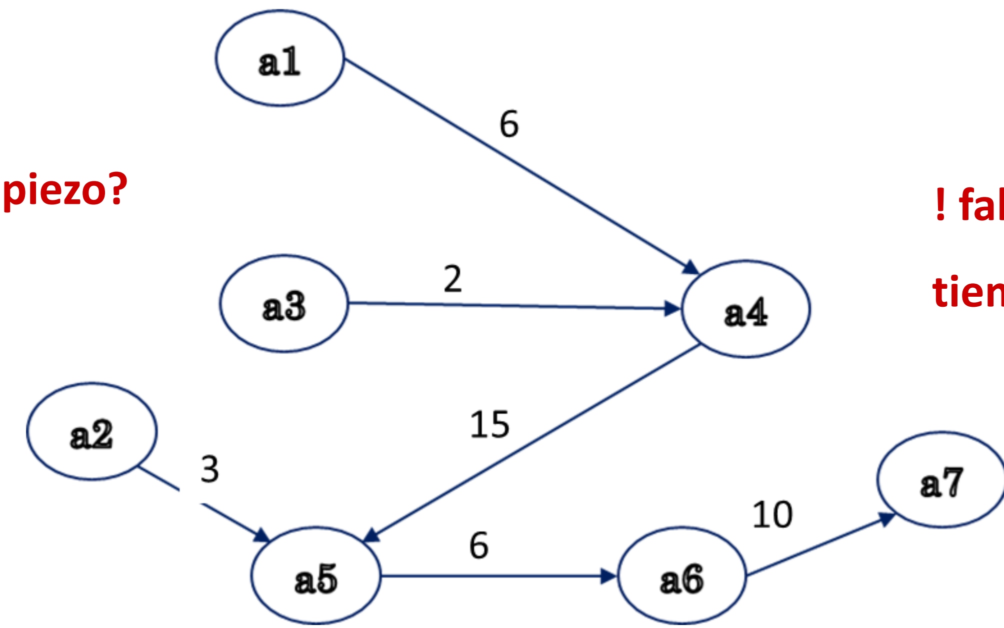
- **Construcción del GDP**

**Vértices**: **actividades**.

**Arcos:** ($a_i$,$a_j$) >> $a_i$ es prerrequisito de $a_j$

$w_{ij}$ : **tiempo** que debe transcurrir entre el **inicio** de $a_i$ y el **inicio** de $a_j$.

**¿por cuál empiezo?**




**! falta contar tiempo de a7 !**

## ➢ Construcción del GDP

**Inicio proyecto >>** vértice ficticio **s**

**Añadir** arco (s,ai) / **de(ai)=0**

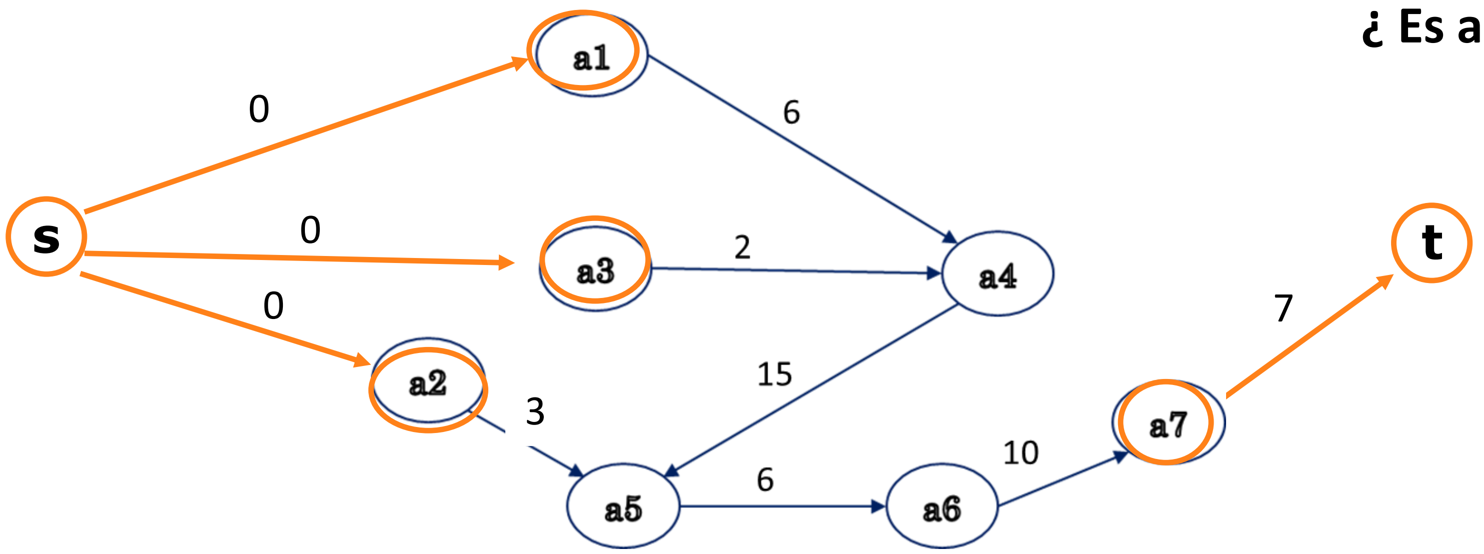
$\mathbf{w}_{sai} = 0$ (tiempo para empezar)

**Final proyecto >>** vértice ficticio **t**

**Añadir** arco (ai, t) / **ds(ai) = 0**

$(\mathbf{w}_{ait})$ = tiempo de ai

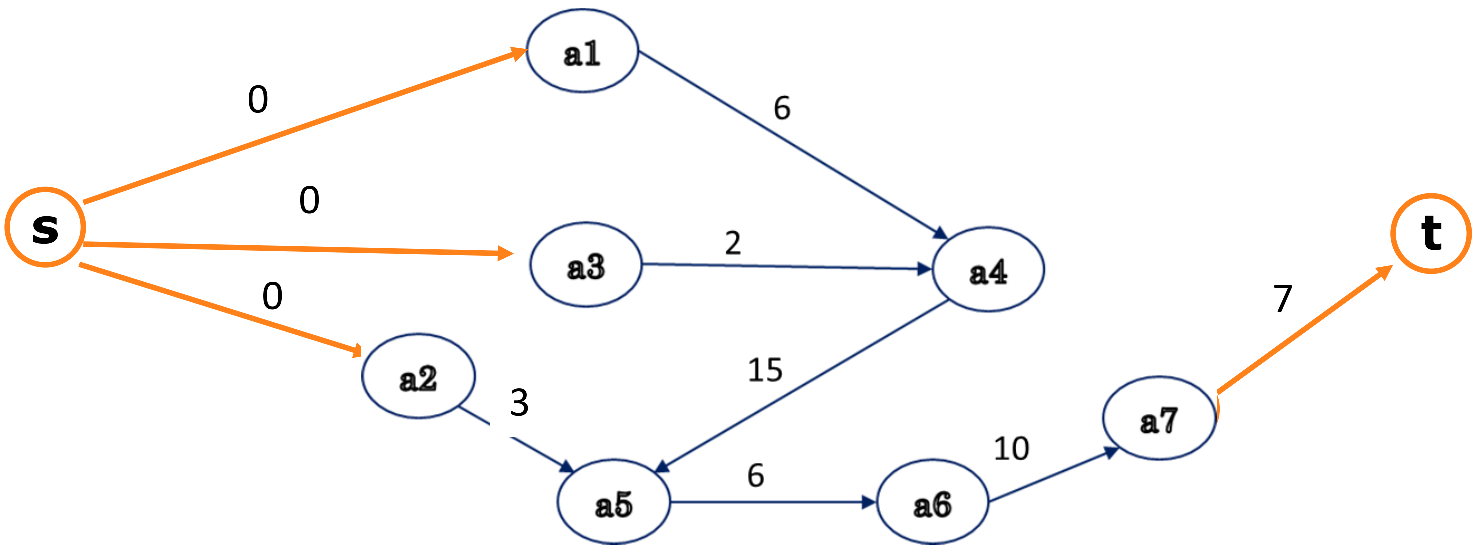
**¿ Es acíclico ?**



Proyecto tortilla

## ➢ Comprobar q el grafo es acíclico

**Renumerar** vértices >> repetir >> elegir vértice v / de(v) = 0




7

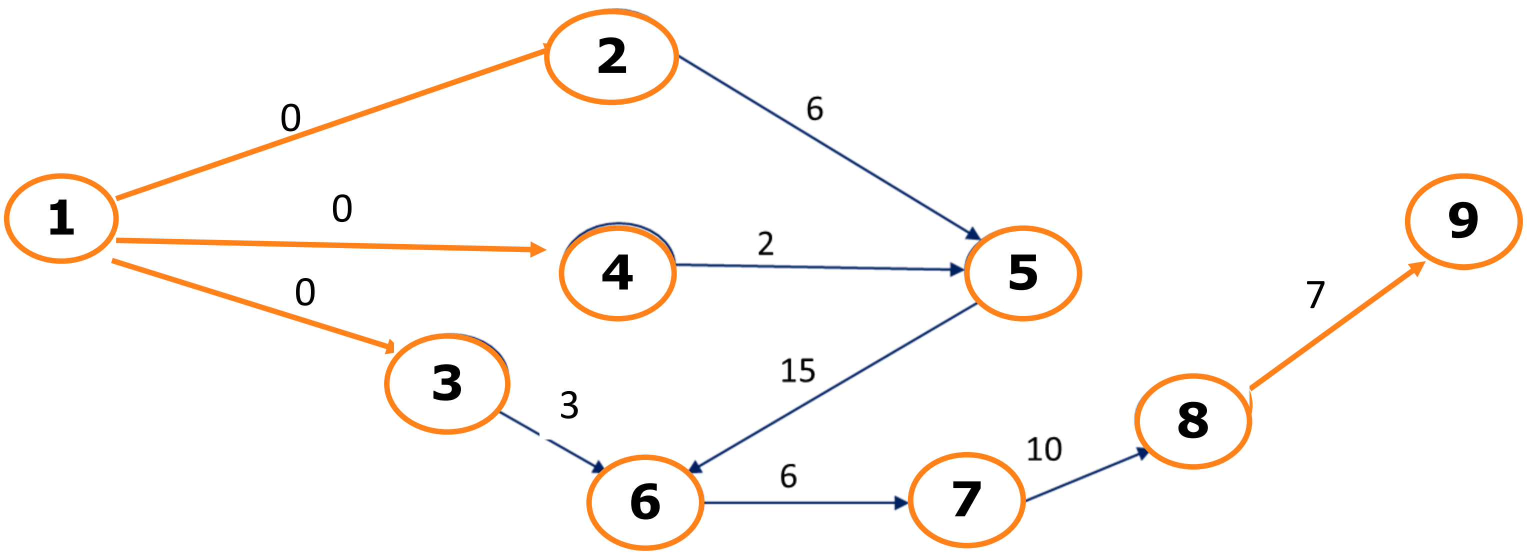
| VÉRTICE | s | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | t |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| NUMERACIÓN | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

Proyecto tortilla

- **Comprobar q el grafo es acíclico**

**¿ se cumple i < j para cada arco (i, j) ?**

OK




| VÉRTICE | s | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | t |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| NUMERACIÓN | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

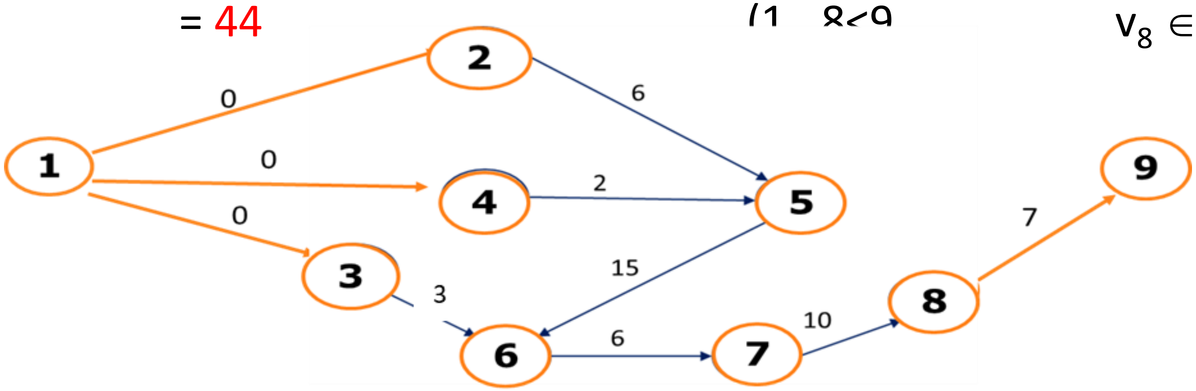
$$u_1 = 0, \qquad u_j = \max_{k<j,\ v_k \in \Gamma^{-1}(v_j)} \{u_k + \omega_{kj}\}, \quad j = 2, \ldots, n,$$

Proyecto tortilla

- **Calcular el camino crítico: PESOS**

$u_1 = 0$

| | | |
|---|---|---|
| $u_2 = \max\{u_1 + w_{12}\} = 0$ | (1<2, | $v_1 \in \Gamma^{-1}(v_2)$ |
| $u_3 = \max\{u_1 + w_{13}\} = 0$ | (1,2<3, | $v_1 \in \Gamma^{-1}(v_3)$ |
| $u_4 = \max\{u_1 + w_{14}\} = 0$ | (1,2,3<4, | $v_1 \in \Gamma^{-1}(v_4)$ |
| $u_5 = \max\{u_2 + w_{25}, u_4 + w_{45}\} = \max\{6, 2\} = 6$ | (1,..4<5, | $v_2, v_4 \in \Gamma^{-1}(v_5)$ |
| $u_6 = \max\{u_3 + w_{36}, u_5 + w_{56}\} = \max\{3, 21\} = 21$ | (1,..5<6, | $v_3, v_5 \in \Gamma^{-1}(v_6)$ |
| $u_7 = \max\{u_6 + w_{67}\} = 27$ | (1,..6<7, | $v_6 \in \Gamma^{-1}(v_7)$ |
| $u_8 = \max\{u_7 + w_{78}\} = 37$ | (1,..7<8, | $v_7 \in \Gamma^{-1}(v_8)$ |
| $u_9 = \max\{u_8 + w_{89}\} = 44$ | (1,..8<9 | $v_8 \in \Gamma^{-1}(v_9)$ |



Proyecto tortilla

- **Calcular el camino crítico: ACTIVIDADES CRÍTICAS**

**PESO CAMINO CRÍTICO** = **44 u**

Mínimo tiempo para hacer la tortilla

Vértices : 1 2 5 6 7 8 9

Se corresponden con las actividades CRÍTICAS:

$s \;\; a_1 \;\; a_4 \;\; a_5 \;\; a_6 \;\; a_7 \;\; t$

$u_1 = 0$

$u_2 = \max\{\mathbf{u_1 + w_{12}}\} = 0$

$u_3 = \max\{u_1 + w_{13}\} = 0$

$u_4 = \max\{u_1 + w_{14}\} = 0$

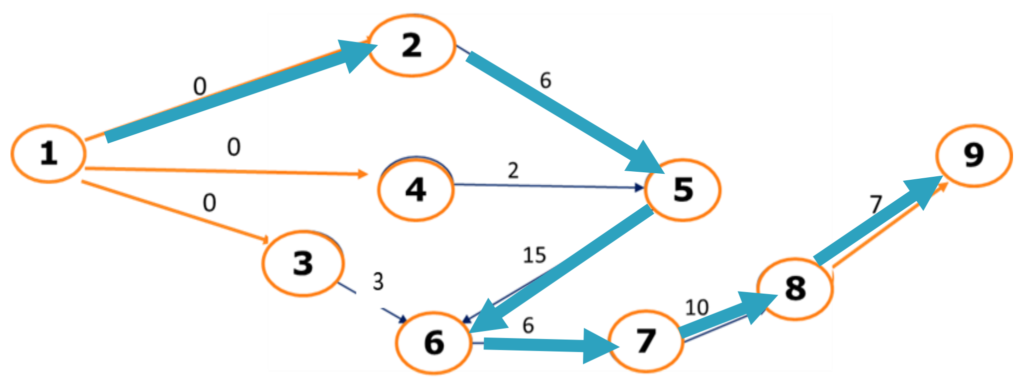
$u_5 = \max\{\mathbf{u_2 + w_{25}}, u_4 + w_{45}\} = 6$

$u_6 = \max\{u_3 + w_{36}, \mathbf{u_5 + w_{56}}\} = 21$

$u_7 = \max\{\mathbf{u_6 + w_{67}}\} = 27$

$u_8 = \max\{\mathbf{u_7 + w_{78}}\} = 37$

$u_9 = \max\{\mathbf{u_8 + w_{89}}\} = \mathbf{44}$



***Situación particular:***

***¿ qué sucede si alguna actividad se retrasa o pide más tiempo para finalizar?***

La única forma de **no retrasar** el proyecto es NO RETRASAR **ninguna actividad crítica**

**Si una Actividad es crítica y**

se **retrasa** u/unidades :

El proyecto se retrasa u/unidades

**Si una Actividad es NO crítica**

**su retraso** no debe retrasar

ninguna actividad crítica

**Ej**

$u_5 = \max\{\mathbf{u_2 + w_{25}}, u_4 + w_{45}\} = 6$

Si v2 se retrasa 2u >>> $u_5 = 8$

>> >> **PESO CAMINO**>> $u_9 = 46$

**Ej**

$u_5 = \max\{\mathbf{u_2 + w_{25}}, u_4 + w_{45}\} = \max\{6, 2\} = 6$

Si v4 se retrasa 2u >> $u_5 = 6$ no hay retraso

Si v4 se retrasa 10u >> $u_5 = 12$ > se retrasa proyecto…

# CÁLCULO DEL RETRASO MÁXIMO DE UNA ACTIVIDAD NO CRÍTICA PARA QUE NO SE RETRASE EL PROYECTO

Sea $P_{jk}$ el camino desde

la actividad **no** crítica $j$ a la actividad crítica **k.**

Sea **$W(P_{jk})$ el peso** del camino de $j$ a $k$

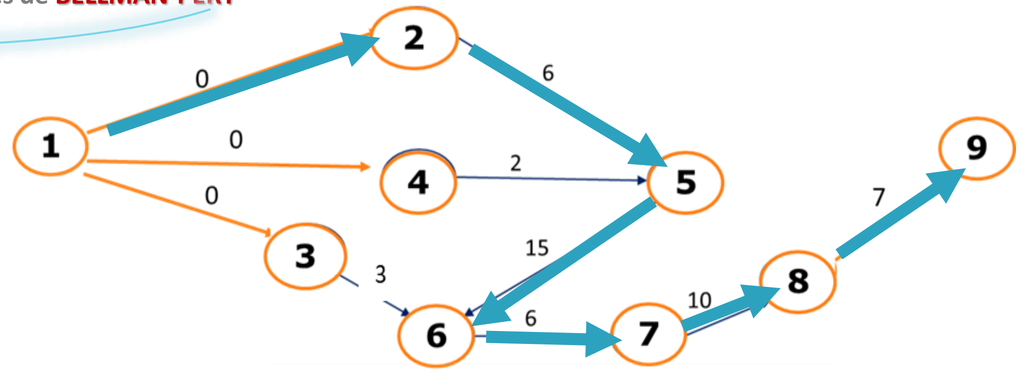
Si **j se retrasa en X** unidades

Para que **no haya retraso** en el proyecto debe verificarse

$$u_j + W(P_{jk}) + X \leq u_k$$

Proyecto tortilla






**>> $a_4$ (5) se retrasa 2u** ¿en cuánto tiempo se terminará el proyecto?

La actividad $a_4$ es un actividad crítica >> 45 + 2 = 47 u

**>> $a_3$ (4) pide tiempo "extra".**

$a_3$ (4) accede al c. crítico por la actividad crítica $a_4$ (5).

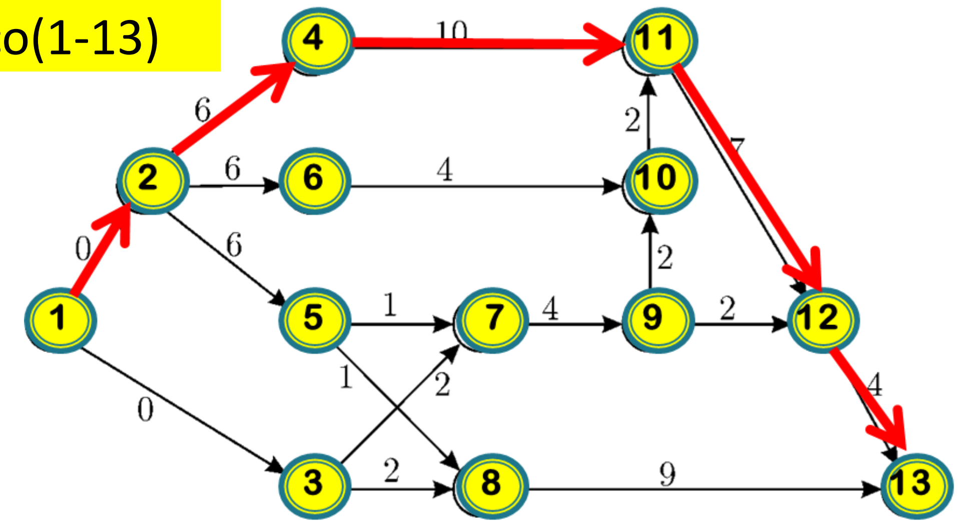
Camino: $P_{4,5}$, $w(P_{4,5}) = 2$

$$\mathbf{u_4 + w(P_{4,5}) + x \leq u_5 \;\rightarrow\; 0 + 2 + x \leq 6 \;\rightarrow\; x \leq 4}$$

Para que **no se retra**se el proyecto la actividad $a_3$ (4) **se puede retrasar como máximo 4u.**

# CÁLCULO DE RETRASO EN ACTIVIDADES

## **PESOS / VÉRTICES** del camino crítico(1-13)




$u1 = 0$

$u2 = \max\{\mathbf{u_1 + w_{12}}\} = 0$

$u3 = \max\{u_1 + w_{13}\} = 0$

$u4 = \max\{\mathbf{u_2 + w_{24}}\} = 6$

$u5 = \max\{u_2 + w_{25}\} = 6$

$u6 = \max\{u_2 + w_{26}\} = 6$

$u7 = \max\{u_3 + w_{37},\ u_5 + w_{57}\} = 7$

$u8 = \max\{u_3 + w_{38},\ u_5 + w_{58}\} = 7$

$u9 = \max\{u_7 + w_{79}\} = 11$

$u10 = \max\{u_6 + w_{610},\ u_9 + w_{910}\} = 13$

$u11 = \max\{\mathbf{u_4 + w_{411}},\ u_{10} + w_{1011}\} = 16$

$u12 = \max\{u_9 + w_{912},\ \mathbf{u_{11} + w_{1112}}\} = 23$

$u13 = \max\{u_8 + w_{813},\ \mathbf{u_{12} + w_{1213}}\} = \mathbf{27}$

¿Cuántos días se puede **retrasar** la actividad del vértice **9** sin que afecte a la duración total del proyecto**?**

**vértice 9 : actividad NO crítica.**

- **no puede retrasar** actividades **11** y **12**

El vértice **9** interviene en el cálculo de la actividad **11**

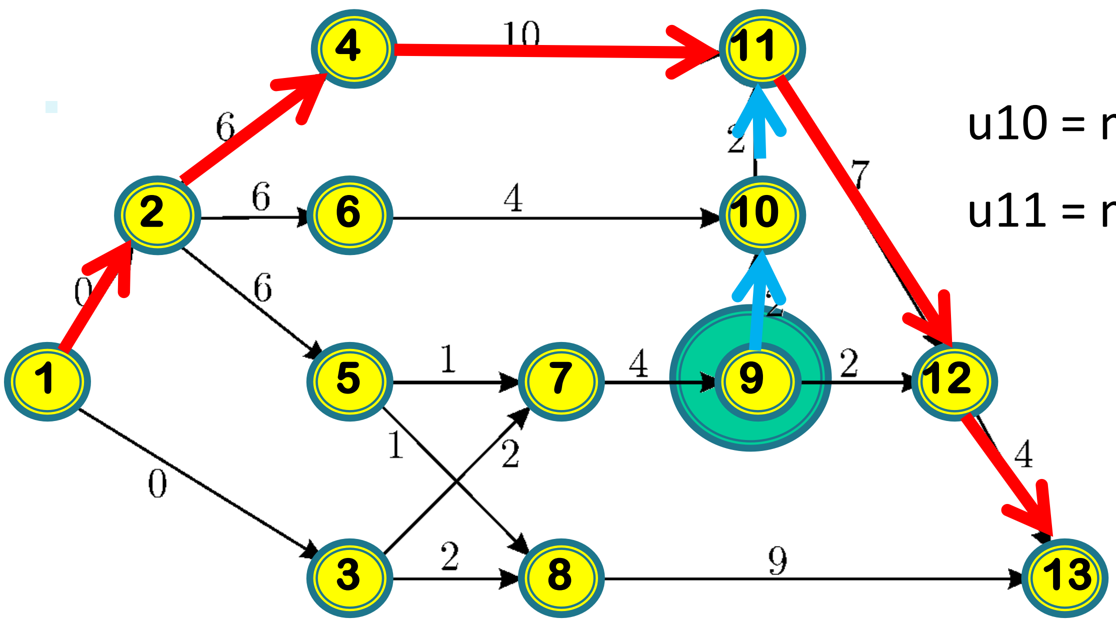
$u10 = \max\{u_6 + w_{610}, u_9 + w_{910}\} = \max\{10, 11+2\} = 13$

$u11 = \max\{\mathbf{u_4 + w_{411}}, u_{10} + w_{1011}\} = \max\{6+10, \underline{13+2}\} = 16$

Camino **$P_{9,11}$**: 9, 10, 11 >> $W(P_{9,11}) = 4$

$u9 + W(P_{9,11}) + x \leq u11 \rightarrow 11 + 4 + x \leq 16 \rightarrow \mathbf{x \leq 1}$

Máximo tiempo para 9: **x = 1**




$u10 = \max\{6+4, 14\} = 13$

$u11 = \max\{6+10, 14+2\} = 16$

**El tiempo se queda igual**

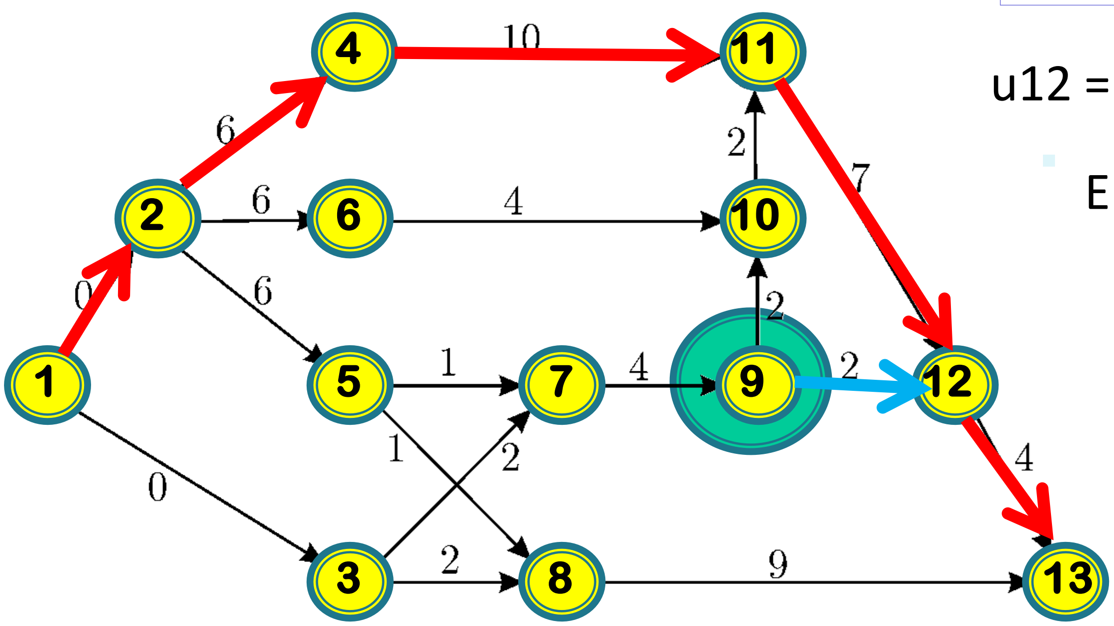
El vértice **9** interviene en el cálculo de la actividad **12**

$u12 = \max\{u_9 + w_{912}, u_{11} + w_{1112}\} = \max\{\underline{13}, 16+7\} = 23$

Camino $P_{9,12}$: 9, 12 >> **$W(P_{9,12}) = 2$**

$u9 + \omega(P_{9,12}) + x \leq u12 \rightarrow 11 + 2 + x \leq 23 \rightarrow$ **$x \leq 10$**

Máximo tiempo para 9: **x = 10**




$u12 = \max\{23, 16+7\} = 23$

El tiempo se queda igual

- Como **x ≤ 1, x ≤ 10** → la actividad 9 se puede **retrasar como máximo x =1u**
- para que **no se retrase el proyecto**