3: CAMINOS MÁS CORTOS

3.1 BELLMAN-PERT.

- Ecuaciones de Bellman.
- Proyectos PERT.
- Ejercicios resueltos.

3.2. DIJKSTRA.

- Algoritmo de Dijkstra.
- Ejercicios resueltos.

3.3. FLOYD-WARSHALL.

- Algoritmo de Floyd-Warshall.
- Ejercicios resueltos

EDSGER W. DIJKSTRA: Físico + programador

Dijkstra propone un algoritmo que obtiene los caminos más cortos y sus pesos desde un vértice cualquiera a los restantes que son accesibles desde él en un grafo ponderado con pesos no negativos. El algoritmo se basa en poner etiquetas a los vértices del grafo que indicarán si el peso del camino más corto desde el vértice inicial a dicho vértice es definitivo o puede variar.

3.2. Algoritmo de DIJKSTRA

Suponemos:

>> GD ponderado.

>> Vértices : numerados de **1** a **n.** $V = \{v_1,\ldots v_n\}$

>> Vértice origen del camino: v_i

>> $w_{ij} \geq 0$: peso del arco (v_i,v_j) (no negativos).

>> u_j : peso del cmc ($v_i - v_j$)

>> **P** : conjunto de vértices v_j que tienen peso u_j, fijo

>> **T** : conjunto de vértices v_j cuyo peso u_j, puede cambiar

Proceso:

- Se elige el vértice inicial de los cmc, e.g., v_1 y se añade a P, el resto de vértices en T.
- El algoritmo realiza una serie de iteraciones $I = 1,\ldots,n$,
- Iteración: cada vez que se aplica el paso 2.
- En cada iteración se añade un vértice a P y se elimina de T.
- Todo vértice v_j de P tiene ya determinado su peso u_j del cmc(v_i - v_j)
- El algoritmo consigue que todos los vértices estén en P.
- Para **pasar** un vértice de T a P se aplica el Paso 2 en el que se exploran los vértices en los que inciden arcos con origen en un vértice de P y el vértice más cercano al origen será el que se incorpore.
- En el proceso, los vértices de P **no** pueden aparecer en T.

Algoritmo de Dijkstra

$V = \{1,2,\ldots n\}$, vértice inicial : 1.

Paso 1: Inicio $P = \{1\}$, $T = \{2,\ldots n\}$

$u_1 = 0$

$u_j = w_{1j}$, $j \in \Gamma(1)$, $(1,j) \in E$

$u_j = \infty$, $j \notin \Gamma(1)$, $(1,j) \notin E$

Paso 2: Se determina el vértice de T que debe pasar a P

Elegir $k \in T$ / $u_k = \min\{u_j\}$, $j \in T$

Hacer $T := T \sim \{k\}$, $P := P \cup \{k\}$

Si $T = \varnothing \rightarrow$ STOP

u_j es el peso del cmc de 1 a j, $j = 2,3,\ldots n$

Paso 3: Actualizar pesos:

$\forall j \in \Gamma(k) \cap T$ (i.e., para todo arco (k,j) / $j \in T$)

Hacer : $u_j := \min\{u_j, u_k + w_{kj}\}$

Ir al Paso 2

VÉRTICES DEL CMC :

- **Localizar** la iteración donde el vértice v_k obtiene peso fijo.
- Si $u_k = u_i + w_{ik} \rightarrow (v_i,v_k)$ es el último arco recorrido por el cmc(v_1- v_k) $\rightarrow$ El vértice anterior a k será el j.

$\Gamma(v) = \{u \in V / (v,u) \in E\}$

OBSERVACIONES

- En el algoritmo se ha elegido como vértice origen de los caminos el vértice v_1 pero se podría haber elegido cualquier otro vértice.
- Para los vértices v_j que no sean accesibles desde el vértice inicial Dijkstra asigna un valor de infinito a las variables u_j.
- El razonamiento realizado es válido para GNDP ya que toda arista $\{v_i, v_j\}$ con peso w_{ij} puede ser reemplazado por dos arcos (v_i, v_j), (v_j, v_i) y con el mismo peso $w_{ji} = w_{ij}$
- Puede presentar problemas con costes negativos en arcos/aristas.

Th-1D. Sea $G = (V,E)$, $|V| = n$. Si $v_j \in P$ entonces u_j es el peso del cmc(v_1 - v_j), $j = 1,\ldots n$.

Dem. Por inducción sobre nº iteraciones I. Si I = 1, $P = \{v_1\}$, obvio que $u_1 = 0$ es el cmc(v_1 - v_1)

Sup. cierto para I = j, $0 \le j < n$. Si v_k es el vértice que pasa a tener etiqueta fija en I = j + 1, será suficiente demostrar, por hip. inducción, que el valor u_k representa el peso del cmc(v_1-v_k). Sup. que el valor de u_k se ha calculado como $u_k = \min\{u_k, v_j \in T\} = u_i + w_{ik}$ (1) i.e., el arco $e = (v_i, v_k)$ es el último arco en el camino que queremos demostrar que es el más corto del vértice v_1 al vértice v_k; llamemos a este camino $Q_{1k}^{(1)}$ y sea $Q_{1k}^{(2)}$ otro camino de v_1 a v_k. Demostramos que $w(Q_{1k}^{(2)}) \ge w(Q_{1k}^{(1)})$. Sea $f = (v_s, v_t)$ el 1º arco del camino $Q_{1k}^{(2)}$ que verifica que su extremo final, v_t no está en P y llamemos Q_{tk} a la sección del camino $Q_{1k}^{(2)}$ que une los vértices v_t y v_k. Ver figura:

Por construcción de los caminos $Q_{1k}^{(1)}$, $Q_{1k}^{(2)}$ y Q_{tk} sabemos que:

$w(Q_{1k}^{(1)}) = u_i + w_{ik}$

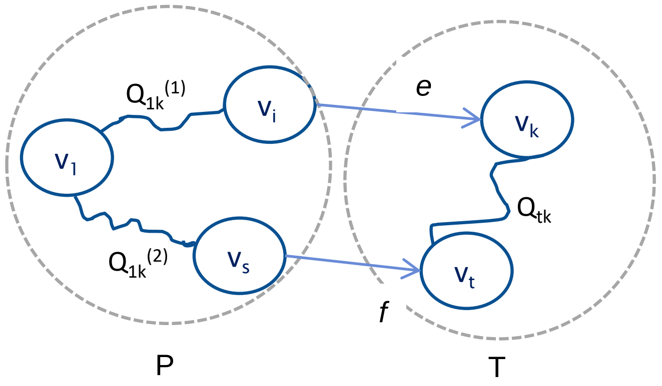
$w(Q_{1k}^{(2)}) = u_s + w_{st} + w(Q_{tk})$ por igualdad (1) como $v_k, v_t \in T$ se tiene que: $u_k \le u_t$

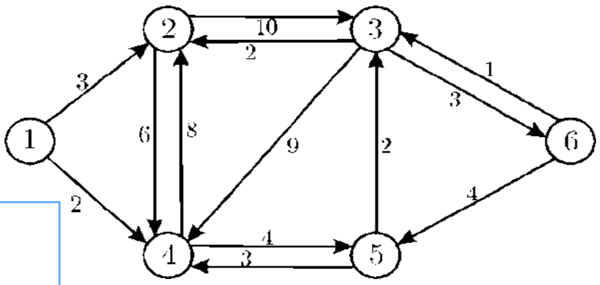
y como $u_k = u_i + w_{ik}$ y $u_t \le u_s + w_{st}$, obtenemos $u_k = u_i + w_{ik} \le u_t \le u_s + w_{st}$.

Por tanto

$w(Q_{1k}^{(2)}) = u_s + w_{st} + w(Q_{tk}) \ge u_i + w_{ik} + w(Q_{tk}) \ge u_i + w_{ik} = w(Q_{1k}^{(1)})$

donde la última desigualdad se tiene debido a que los pesos son no negativos.





Ejemplo. Se calculan los **cmc** desde el **vértice 1** al resto aplicando el Alg. Dijkstra

Iteraciones para calcular los pesos

Iteración-1

P = {1}, T = {2,3,4,5,6}

$u_1 = 0$

$u_2 = w_{12} = 3$

$u_3 = w_{13} = \infty$

$\mathbf{u_4} = w_{14} = \mathbf{2}$

$u_5 = w_{15} = \infty$

$u_6 = w_{16} = \infty$

$\text{Min}\{u_j\} = \mathbf{u_4}$

$\{4\} \cup P \Rightarrow P = \{1,4\}$

$T \sim \{4\} \Rightarrow T = \{2,3,5,6\}$

Iteración-2

P = {1,4}, T = {2,3,5,6}

$\Gamma(4) = \{2,5\}$

$\Gamma(4) \cap T = \{2,5\}$

Actualizar u_2, u_5

$\mathbf{u_2} = \min\{\mathbf{u_2}, u_4 + w_{42}\} = \min\{3, 2+8\} = \mathbf{3}$

$u_3 = \infty$

$u_5 = \min\{u_5, u_4 + w_{45}\} = \min\{\infty, 2+4\} = 6$

$u_6 = \infty$

$\text{Min}\{u_j\} = \mathbf{u_2}$

$\{2\} \cup P \Rightarrow P = \{1,4,2\}$

$T \sim \{2\} \Rightarrow T = \{3,5,6\}$

Iteración-3

P = {1,4,2}, T = {3,5,6}

$\Gamma(2) = \{3,4\}$

$\Gamma(2) \cap T = \{3\}$

Actualizar u_3

$u_3 = \min\{u_3, \mathbf{u_2 + w_{23}}\} =$
$\min\{\infty, 3+10\} = 13$

$\mathbf{u_5 = 6}$

$u_6 = \infty$

$\text{Min}\{u_j\} = \mathbf{u_5}$

$\{5\} \cup P \Rightarrow P = \{1,4,2,5\}$

$T \sim \{5\} \Rightarrow T = \{3,6\}$

Iteración-4

P = {1,4,2,5}, T = {3,6}

$\Gamma(5) = \{3,4\}$

$\Gamma(2) \cap T = \{3\}$

Actualizamos u_3

$\mathbf{u_3} = \min\{u_3, \mathbf{u_5 + w_{53}}\} =$
$\min\{13, 6+2\} = \mathbf{8}$

$u_6 = \infty$

$\text{Min}\{u_j\} = \mathbf{u_3}$

$\{3\} \cup P \Rightarrow P = \{1,4,2,5,3\}$

$T \sim \{3\} \Rightarrow T = \{6\}$

Iteración-5

P = {1,4,2,5,3}, T = {6}

$\Gamma(3) = \{2,6\}$

$\Gamma(3) \cap T = \{6\}$

Actualizar u_6

$\mathbf{u_6} = \min\{u_6, \mathbf{u_3 + w_{36}}\} =$
$\min\{\infty, 8+3\} = \mathbf{11}$

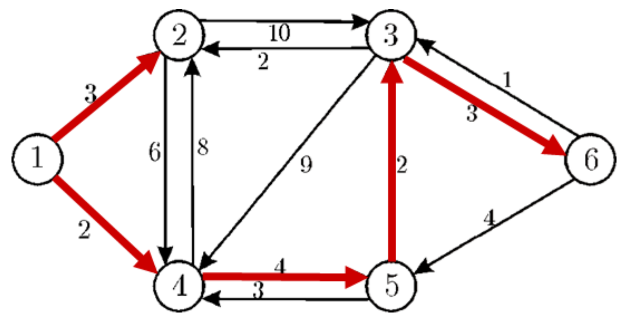
$\text{Min}\{u_j\} = \mathbf{u_6}$

$\{6\} \cup P \Rightarrow P = \{1,4,2,5,3,6\}$

$T \sim \{6\} \Rightarrow T = \{\ \}$

Iteración-6

T={ }, P={1,4,2,5,3,6} → **PARAR**



Iteraciones para calcular los vértices

Vértice anterior a 2 en cmc(1-2)

Se busca iteración / v_2 pasa a P (min uj).
Iter-2 → u_2 =min(uj)
Iter-1 → $u_2 = \mathbf{w_{12}} = 3$ → **Arco (1,2)**
Vértice anterior a 2 → 1

Vértice anterior a 3 en cmc(1-3)

Iteración donde v_3 pasa a P:
Iter-4 → $u_3 = \min\{u_3, u_5 + \mathbf{w_{53}}\} = 8$ → **Arco (5,3)**
Vértice anterior a 3 → 5

Vértice anterior a 4 en cmc(1-4)

Iteración donde v_4 pasa a P:
Iter-1 → $u_4 = \mathbf{w_{14}} = 2$ → **Arco(1,4)**
Vértice anterior a 4 → 1

Vértice anterior a 5 en cmc(1-5)

Iteración donde v_5 pasa a P:
Iter-3 → u_5 = min(uj)
Iter-2 → $u_5 = \min\{u_5, u_4 + \mathbf{w_{45}}\} = 6$ → **Arco (4,5)**
Vértice anterior a 5 → 4

Vértice anterior a 6 en cmc(1-6)

Iteración donde v_6 pasa a P es:
Iter-5 → $u_6 = \min\{u_6, u_3 + \mathbf{w_{36}}\} = 11$ → **Arco (3,6)**
Vértice anterior a 6 → 3

Vértices del cmc (1, final)				Peso
Origen	Anterior al final	Final	Vértices cmc	ui
	1	2	1,2	3
	5	3	1,4,5,3	8
1	1	4	1,4	2
	4	5	1,4,5	6
	3	6	1,4,5,3,6	11

El cmc (1-v_k) se obtiene a partir del único camino entre los respectivos vértices en el árbol enraizado (raíz 1) construido