WELCOME MSS .
DISCRETE MATH

Las Matemáticas
de la informática

Estudia las
estructuras de datos
que provienen de
conjuntos discretos

Estructura de datos: Colección de datos “organizados” para ser usados en una computadora

Ej: arrays, matrices, vectores, grafos, árboles..

Conjuntos **discretos**

Nº finito de elementos

Existe correspondencia biunívoca entre los elementos del conjunto y N

A= {a, b, c}, Cardinalidad(A)=3

Nº infinito de elementos pero numerable

El conjunto **B = { 2, 4, 6, ...}** permite correspondencia uno a uno con N:

$$\begin{array}{ccc} \{ & & \{ \\ 1, & \longrightarrow & 2, \\ 2, & \longrightarrow & 4, \\ 3, & \longrightarrow & 6, \\ \ldots & & \ldots \\ \} & & \} \end{array}$$

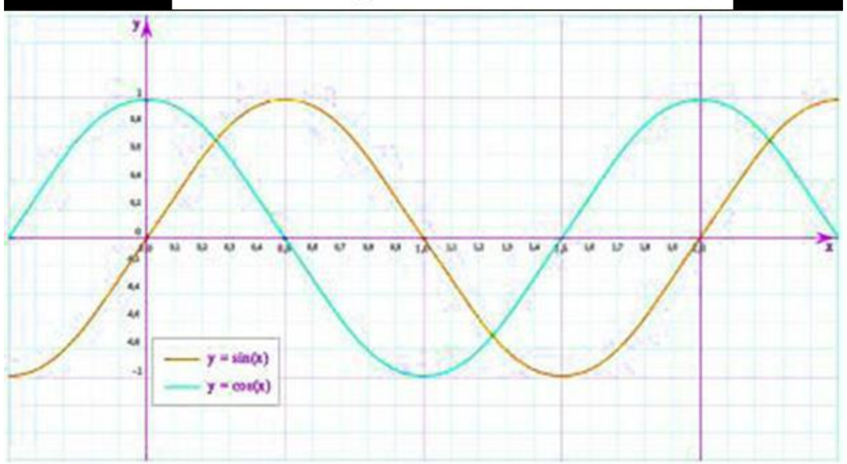
No hay un elemento entre dos elementos del conjunto

PALABRA CLAVE: DISCRETE MATH

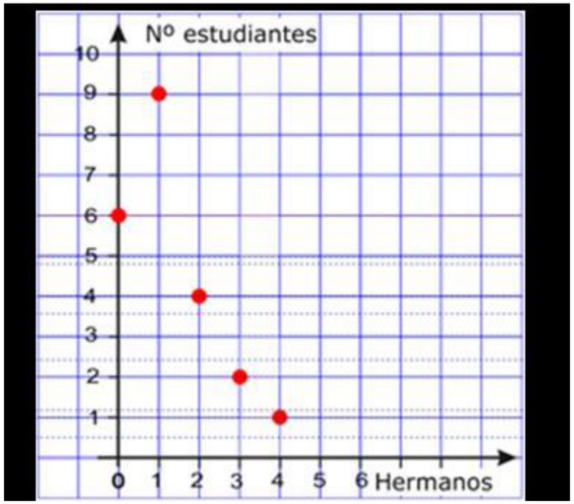
continuo

discreto

Gráfica con variables **continuas/analógicas**
Rango: números Reales



Gráfica con variables **discretas / digitales**
Rango: números Enteros



Estructuras de datos

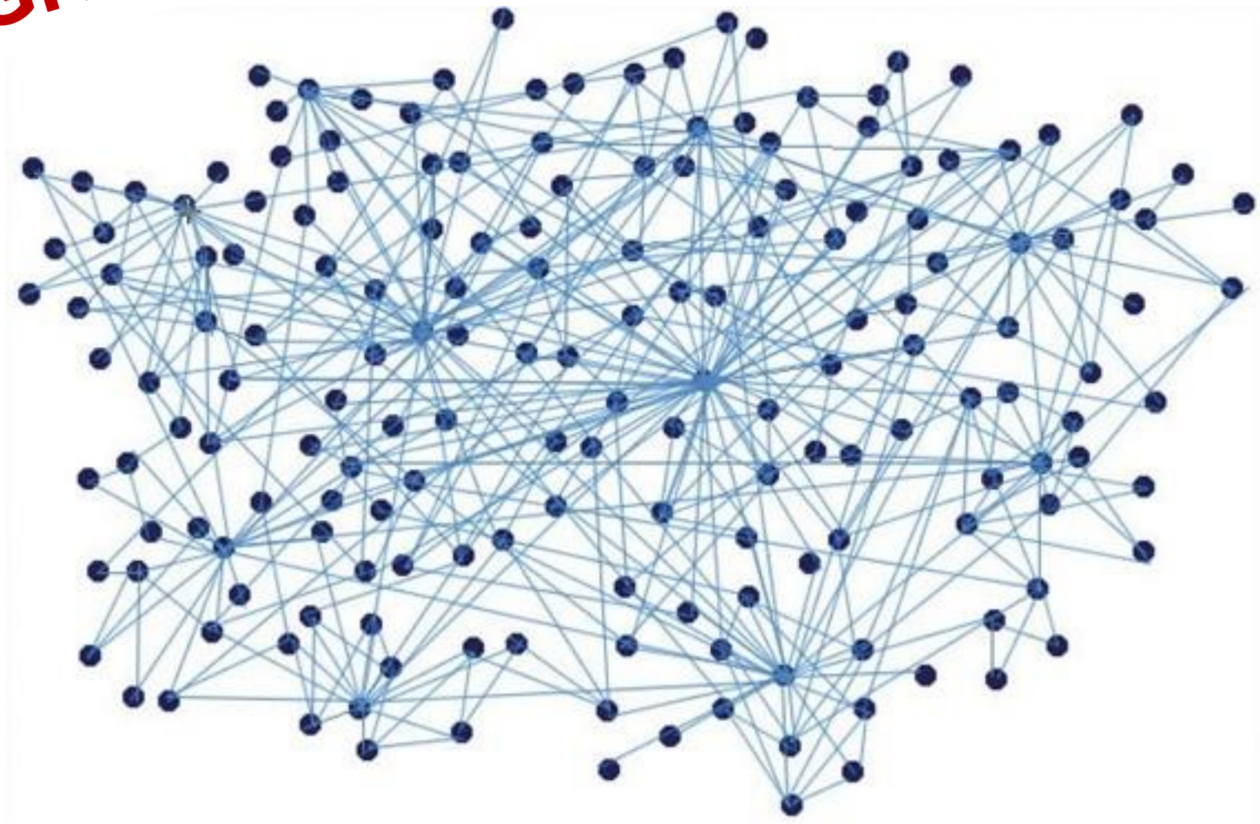
que provienen de

conjuntos discretos

Conjuntos,
Matrices, vectores
GRAFOS
Árboles…
y
máquinas de estados finitos

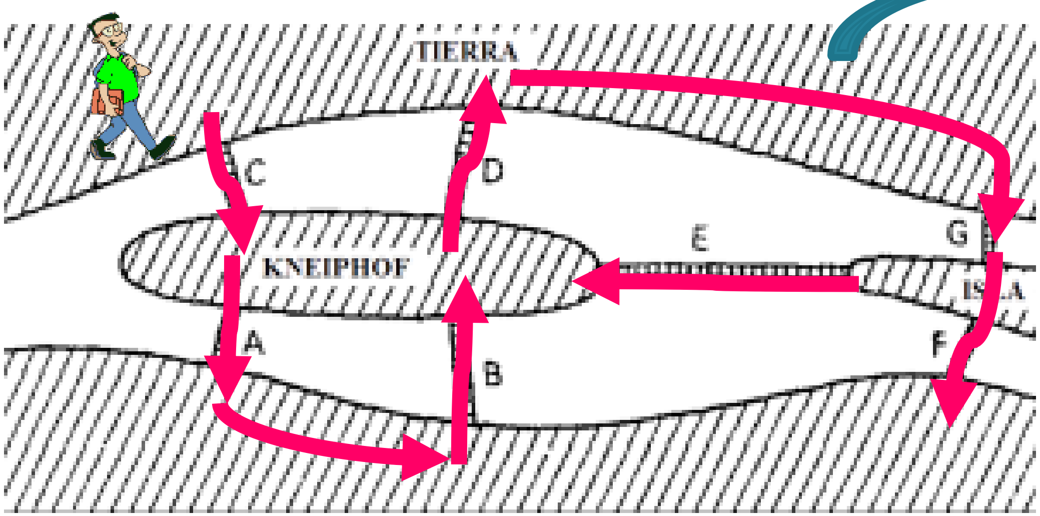
WELCOME MR. GRAPH

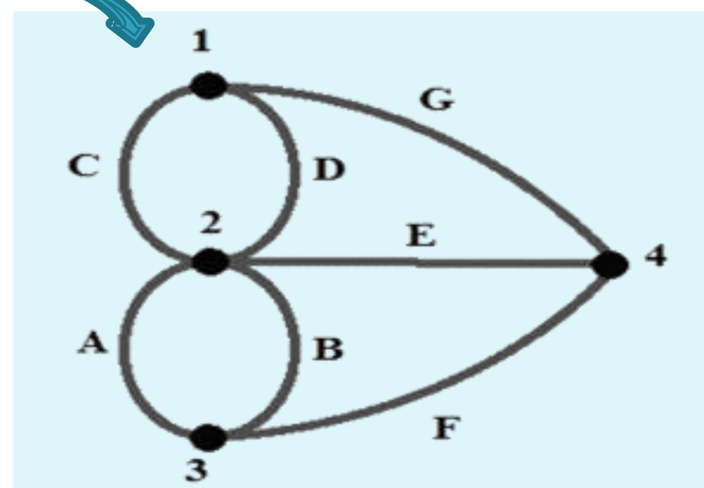
¿Estructura actual ?...



EULER (XVIII)

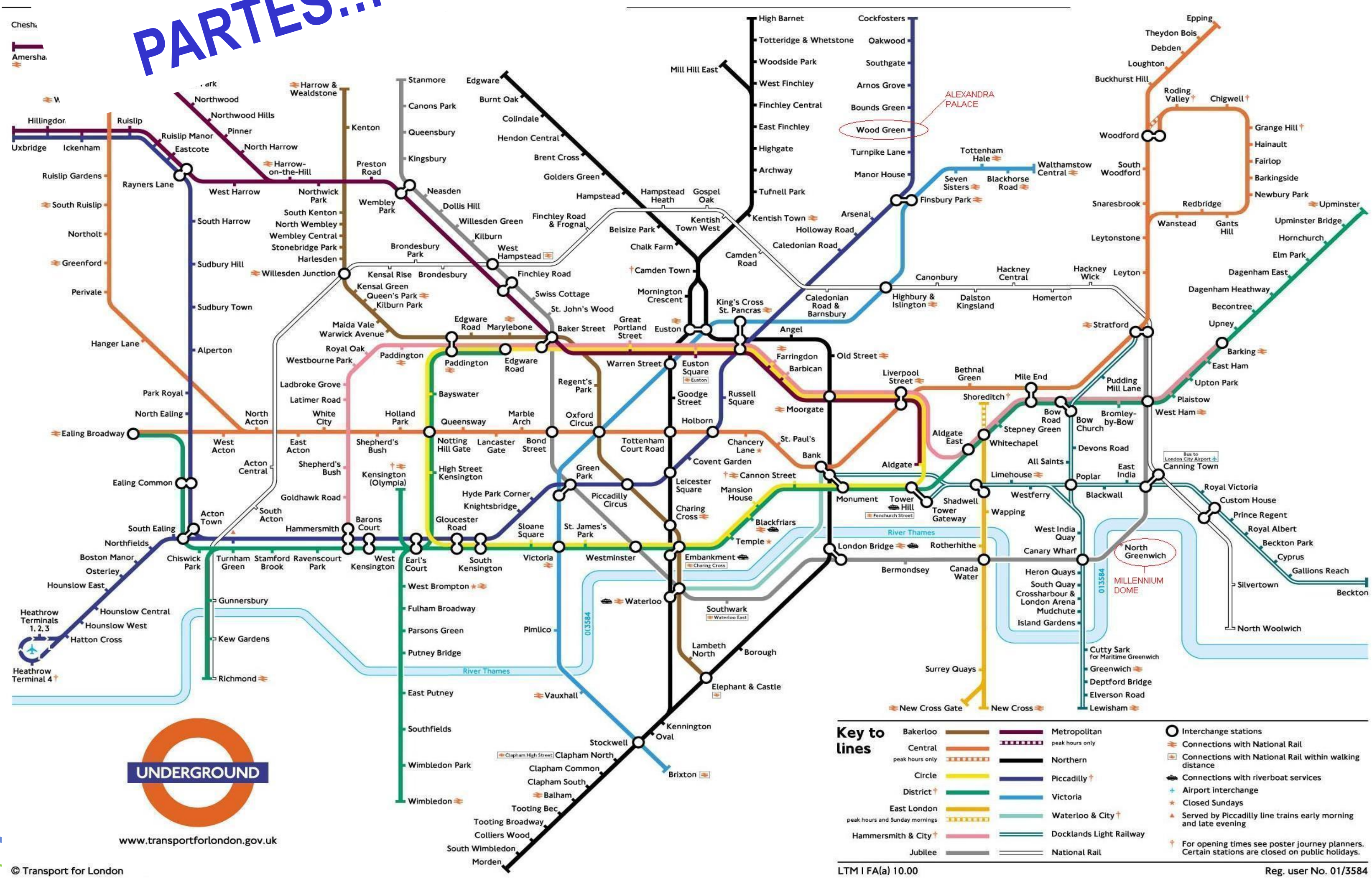
Impulsa la
teoría de grafos





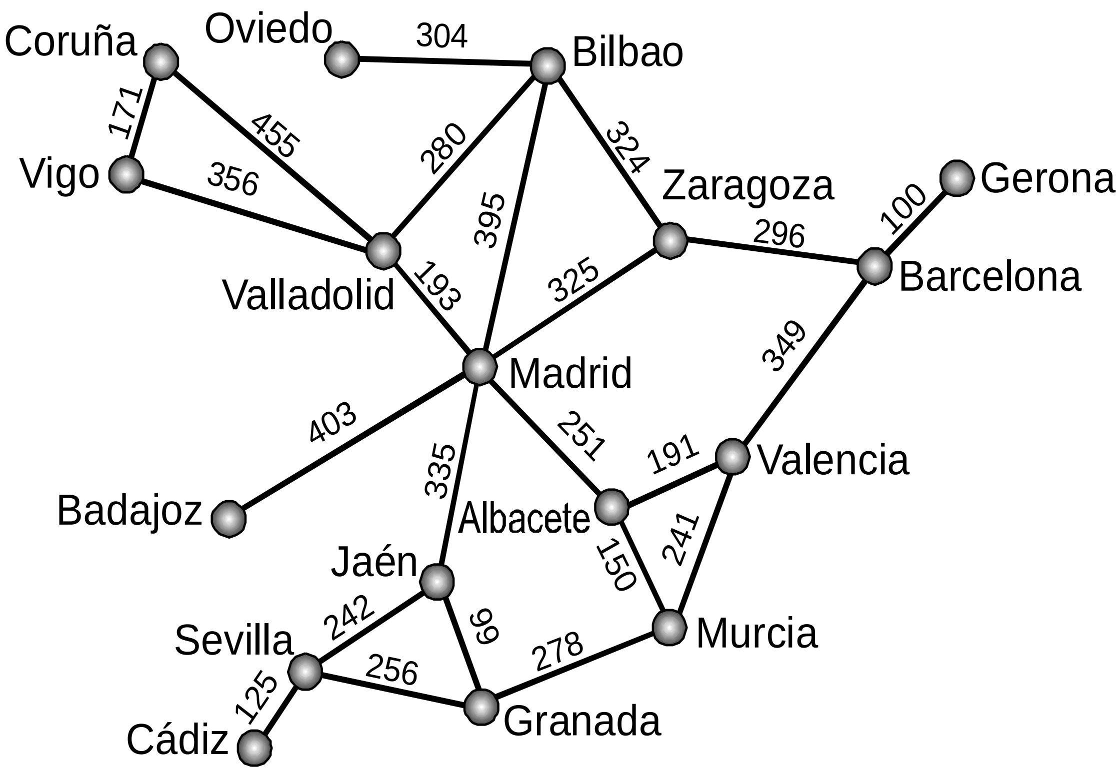
veremos cómo demuestra que es imposible…

GRAFOS POR TODAS PARTES…



GRAFOS POR TODAS PARTES…

❖ **mapas de carreteras**



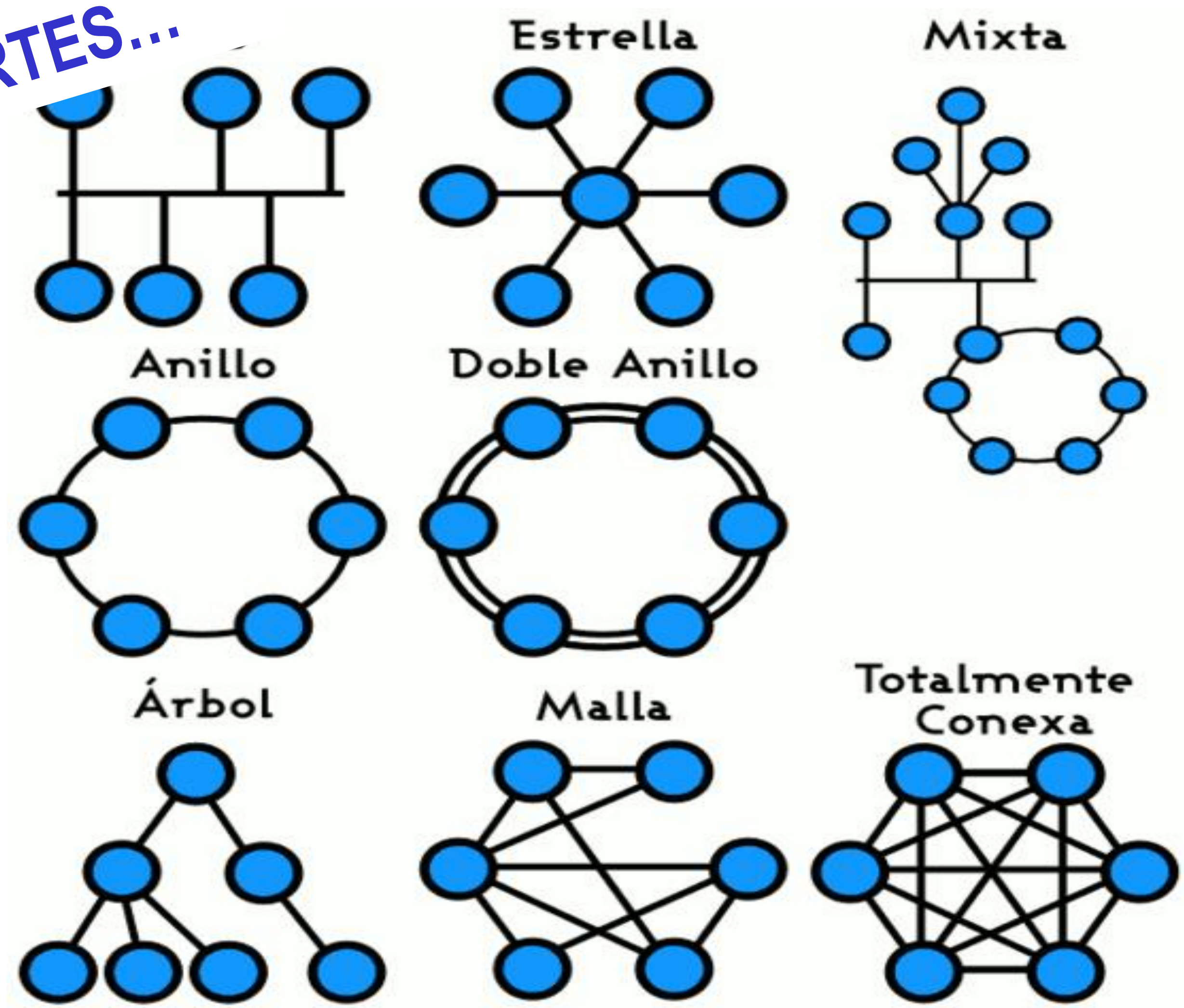
Problema:

¿Cuál es el camino más corto desde Madrid a Granada?

- Caminos más cortos entre todas las ciudades
- …

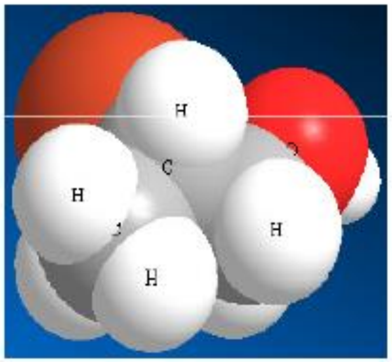
GRAFOS POR TODAS PARTES…

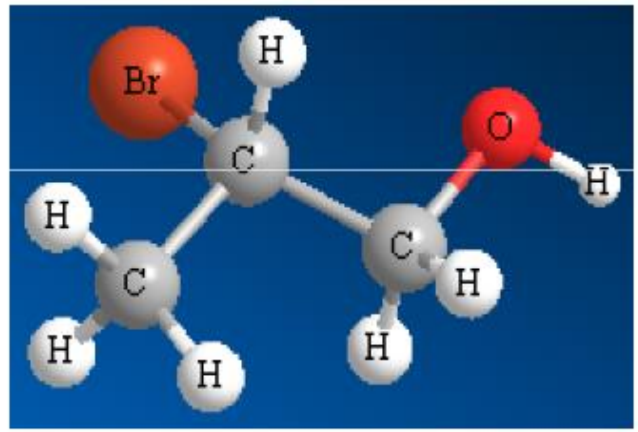
❖ **redes de computadores.**



GRAFOS POR TODAS PARTES…

QUÍMICA: estudio de moléculas





GRAFOS POR TODAS PARTES…

Ultra High-Speed Internet

http://ae-lane-report.s3.amazonaws.com/wp-content/uploads/2012/08/ultrahighspeedinternet.jpg

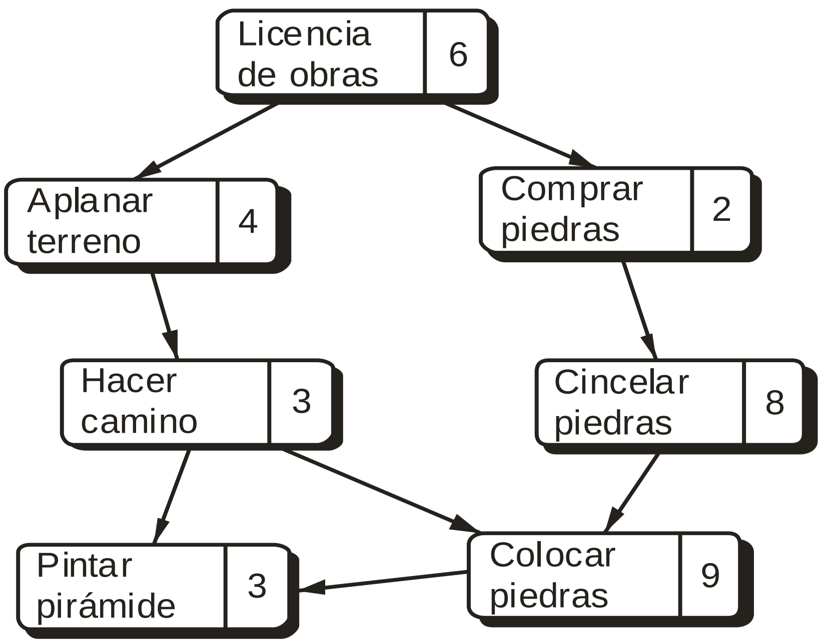
¿ QUÉ VAMOS A ESTUDIAR ?

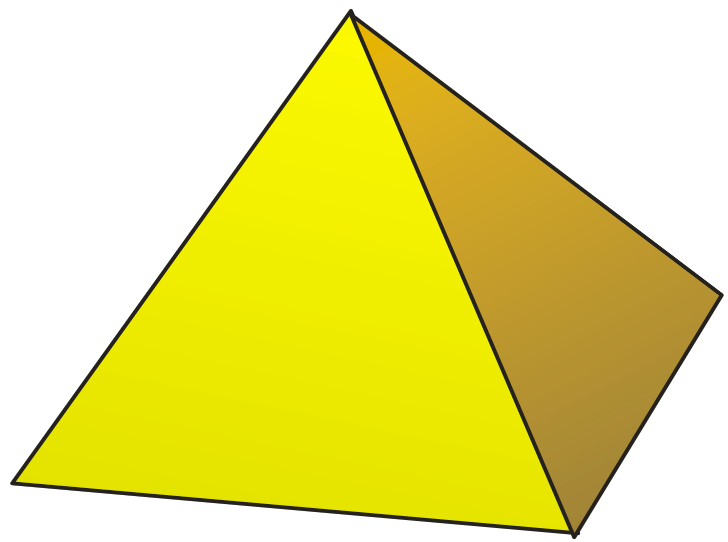
Qué es un grafo.
Tipos.
Representación.
Algoritmos para recorrerlos

Algoritmos para evaluar
Proyectos de secuencia de actividades

¿ Tiempo mínimo para construir la pirámide ?

¿Qué tareas no pueden sufrir retrasos?

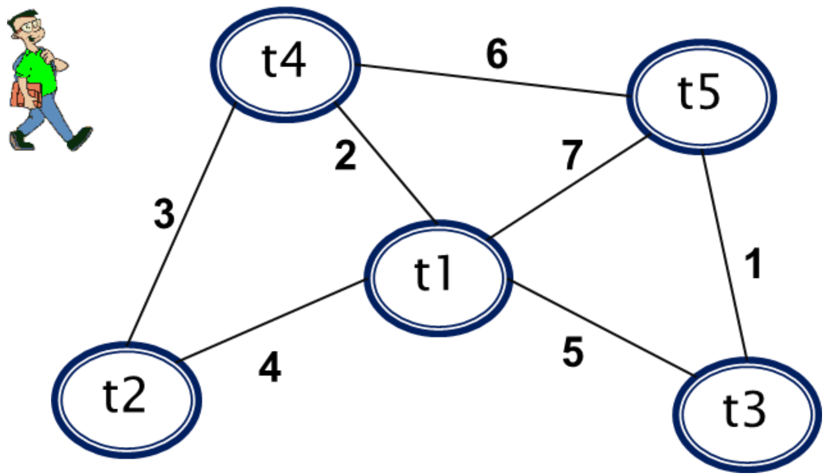




Búsqueda de los caminos más cortos

Friqui quiere recorrer la mínima distancia desde t4 a t3 …

Cuál es al camino más corto…?



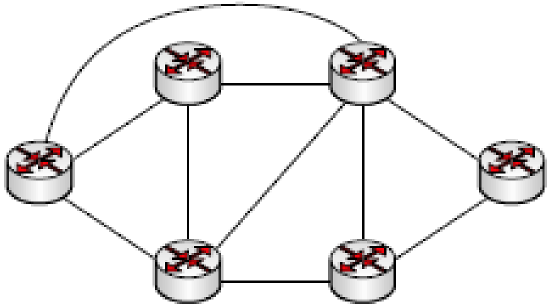
GRAFOS

FORMALIZACIÓN DE CONCEPTOS

❖ *Estructura discreta formada por un conjunto, no vacío, de elementos llamados **vértices** conectados por **líneas** que expresan las relaciones binarias entre ellos.*

Ejemplo Problema de encaminamiento (envía información)

- Vértices >> los routers de la red (6 VÉRTICES).
- Líneas >> relaciones físicas entre ellos.



GRAFOS

NOMENCLATURA

$$G = (V, E)$$

Nombre del grafo, p.ej.: G

Conjunto de vértices: $V = \{ v_1, v_2, \ldots v_n \}$ (no vacío)

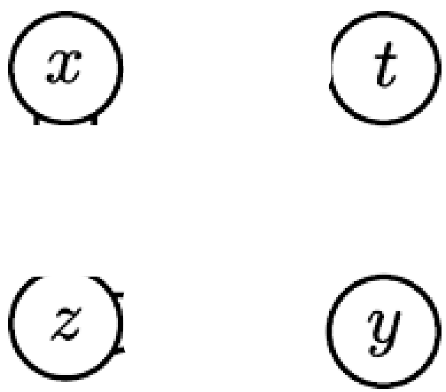
Elije vi: a,b,c…; x, y, z…; A, B, C…;

Conjunto de pares de elementos de V (líneas):

$$E = \{ e_1, e_2, \ldots e_n \},\ e_i \in V \times V$$

GRAFOS

Representación GEOMÉTRICA



G_1

Representamos un grafo

>> Llamaremos $\mathbf{G_1}$:

>> 4 vértices: **V = { x, y, z, t }**

RELACIÓN ENTRE VÉRTICES:

BIDIRECCIONAL

x R t

x R z

z R z

z R x

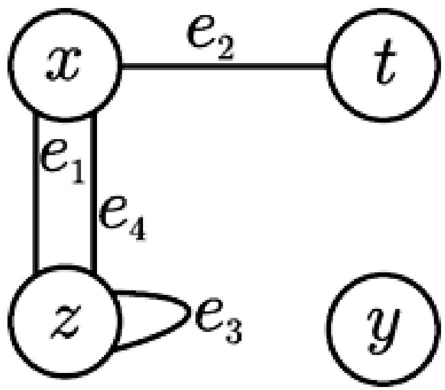
y no tiene relación con vértices

GRAFOS

Representación GEOMÉTRICA

$G_1 = (V, E)$

GRAFO NO DIRIGIDO



G_1

Relación **bidireccional** entre vértices :

>> x R z >> $e_1 = \{x,z\} = \{z,x\}$

>> x R t >> $e_2 = \{x,t\} = \{t,x\}$

>> z R z >> $e_3 = \{z,z\}$

>> z R x >> $e_4 = \{z,x\} = \{x,z\}$

>> vértice y no relacionado

ARISTAS

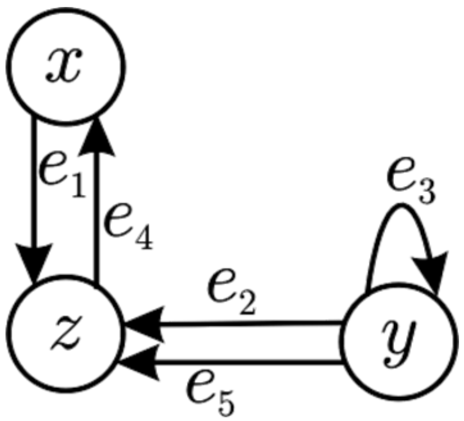
$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

GRAFOS

Representación GEOMÉTRICA

G_2 = (V, E)

GRAFO DIRIGIDO



G_2

Relación **"dirigida"** entre vértices :

$e_1 = (x,z) \neq (z,x)$

$e_2 = (y,z) \neq (z,y)$

$e_3 = (y,y)$ BUCLE

$e_4 = (z,x)$

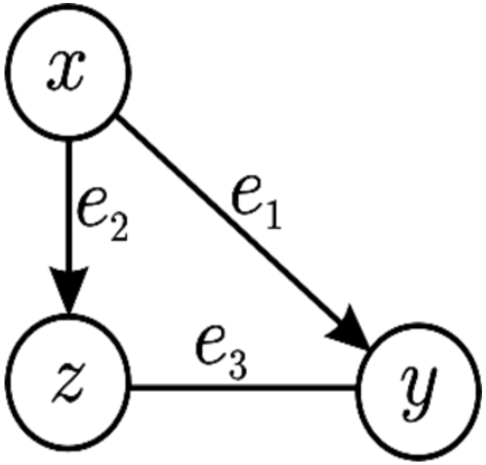
$e_5 = (y,z)$

ARCOS

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

GRAFO MIXTO

❖ *Los vértices se relacionan mediante* ***aristas y arcos***



G_3

$G_3 = (V, E)$

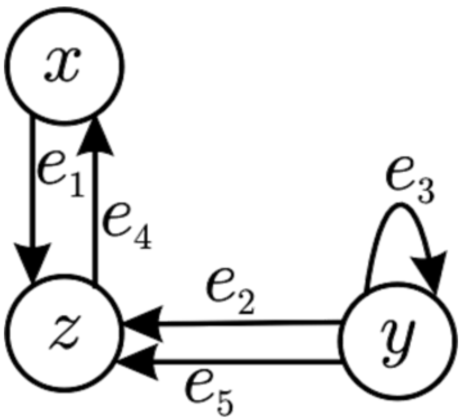
$V = \{ x, y, z \}$

$E = \{ e_1 = (x,y),$

$e_2 = (x,z),$

$e_3 = \{z,y\} \}$

Escribe los elementos de E de ambos grafos



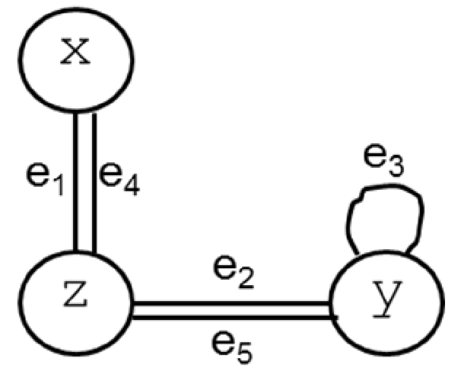
e_1 = (x,z) ⟹ e_1 = { x,z },

e_2 = (y,z), ⟹ e_2 = { y,z },

e_3 = (y,y), ⟹ e_3 = { y,y },

e_4 = (z,x) ⟹ e_4 = { z,x }

e_5 = (y,z) ⟹ e_5 = { y,z }



$\mathbf{G_2}$

$\mathbf{G_2'}$

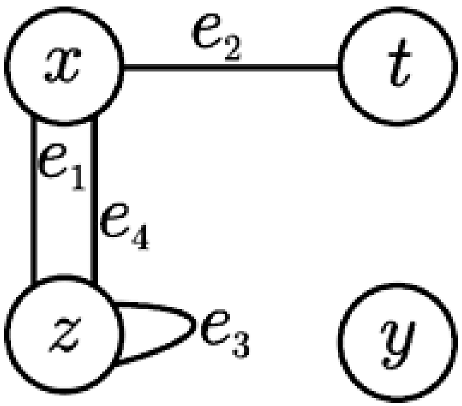
PROPIEDADES TOPOLOGICAS DE LOS GRAFOS

ADYACENCIA

❖ Vértices **ADYACENTES**

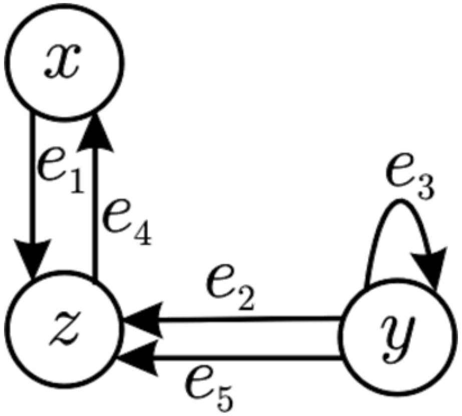
conectados por

ARISTA /ARCO



G1

ADYACENCIA	
vértice	vértice
x	z, t
y	---
z	x, z
t	x



G2

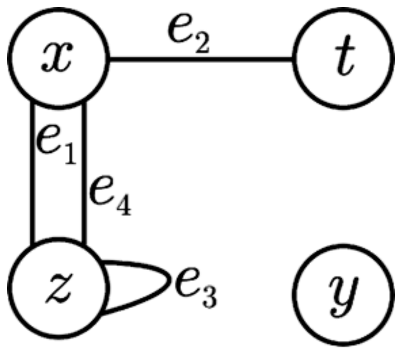
ADYACENCIA	
vértice	vértice
x	z
y	z, y
z	x, y

CONJUNTO DE VÉRTICES ADYACENTES

GND, v ∈ V

"GUARDAMOS" LOS VÉRTICES ADYACENTES A CADA UNO

$$\Gamma(v) = \{ u \in V \,/\, \{u,v\} \in E \}$$



G_1

Vértice	**Γ(v)**
x	z, t
y	∅
z	x, z
t	x

CONJUNTO DE VÉRTICES ADYACENTES

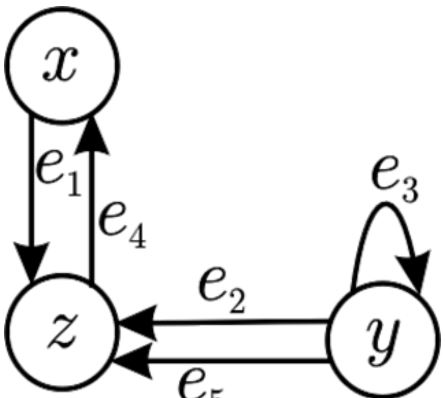
GD, v ∈ V

Γ(v) : vértices a los que **llega** ***v*** con un arco

$$\Gamma(v) = \{u \in V \ / \ (v,u) \in E\}$$

Γ⁻¹(v) : vértices que **llegan a** ***v*** con un arco

$$\Gamma^{-1}(v) = \{u \in V \ / \ (u,v) \in E\}$$



G_2

Vértice	Γ(v)	Γ^{-1}(v)
x	z	z
y	z, y	y
z	x	x, y

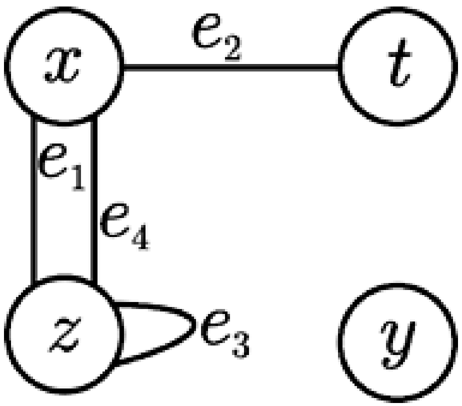
PROPIEDADES TOPOLOGICAS DE LOS GRAFOS

INCIDENCIA

Cada **ARISTA /ARCO**

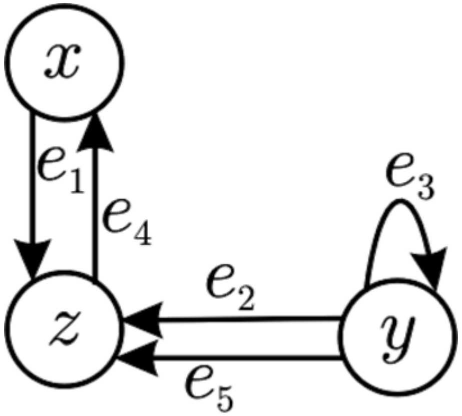
Incide en uno/dos

vértices



G_1

INCIDENCIA	
vértice	arista
x	e_1, e_2, e_4
y	---
z	e_1, e_3, e_4
t	e_2



G_2

INCIDENCIA	
vértice	arco
x	e_1, e_4
y	e_2, e_3, e_5
z	e_1, e_2, e_4, e_5

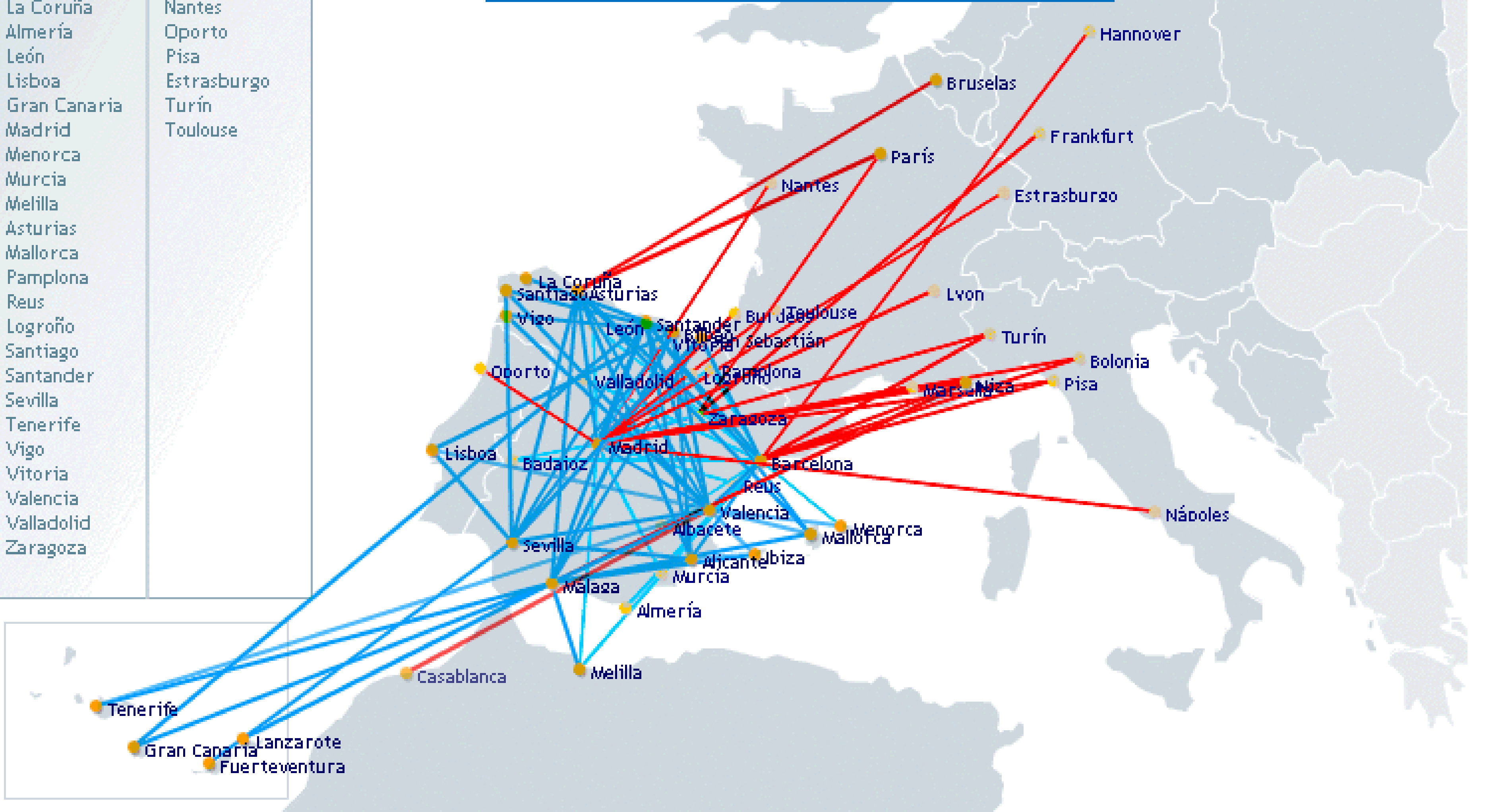
Nos interesa saber cuántas aristas/arcos inciden en un vértice

IBERIA regional
operado por AIR NOSTRUM

NACIONAL	INTERNACIONAL
Albacete	Bolonia
Lanzarote	Burdeos
Málaga	Bruselas
Alicante	París
Barcelona	Casablanca
Bilbao	Frankfurt
Badajoz	Hannover
San Sebastián	Lyon
Fuerteventura	Marsella
Granada	Nápoles
Ibiza	Niza
La Coruña	Nantes
Almería	Oporto
León	Pisa
Lisboa	Estrasburgo
Gran Canaria	Turín
Madrid	Toulouse
Menorca	
Murcia	
Melilla	
Asturias	
Mallorca	
Pamplona	
Reus	
Logroño	
Santiago	
Santander	
Sevilla	
Tenerife	
Vigo	
Vitoria	
Valencia	
Valladolid	
Zaragoza	

¿…Cuántas líneas aéreas "llegan" a París… ?

¿Hay vuelo directo Madrid- París?



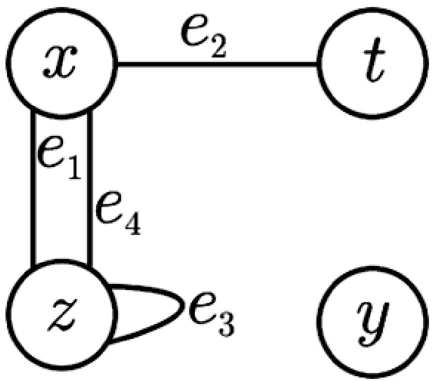
GRADO DE UN VÉRTICE

GND, G = (V, E), v ∈ V

❖ Es el **número de aristas incidentes** en el vértice.

❖ **$d_G(v)$ = d(v)** el grado del vértice v.

❖ El **bucle** cuenta **2**



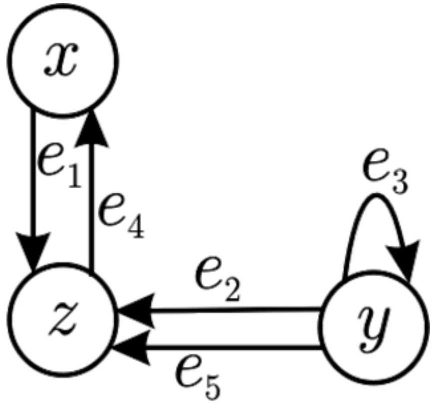
G_1

Vértice	d(v)
x	3
y	0
z	4
t	1

GRADO DE UN VÉRTICE

GD, G = (V, E), v ∈ V

- **Grado de salida de v ∈ V :** número de arcos que **salen** del vértice. **ds(v)**
- **Grado de entrada de v ∈ V**: número de arcos que **entran** en el vértice. **de(v)**
- **Grado de v:** . **d(v) = ds(v) + de(v)**
- **Bucle:** cuenta en el grado de salida y en el de entrada.



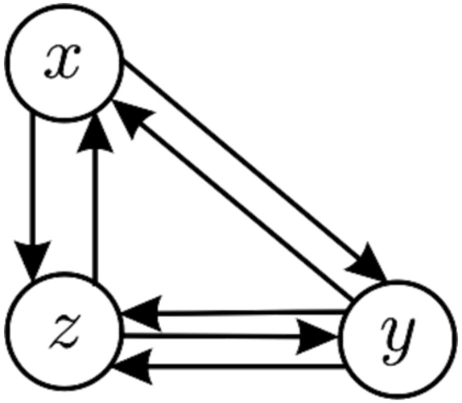
G_2

Vértice	ds(v)	de(v)	d(v)
x	1	1	2
y	3	1	4
z	1	3	4

Completa ...

$$\Gamma(v) = \{u \in V \,/\, (v,u) \in E\}$$

$$\Gamma^{-1}(v) = \{u \in V \,/\, (u,v) \in E\}$$



G_4

Vértice	de(v)	ds(v)	Γ(v)	Γ⁻¹(v)
x	2	2	z, y	y, z
y	2	3	x, z	x, z
z	3	2	x, y	y, x

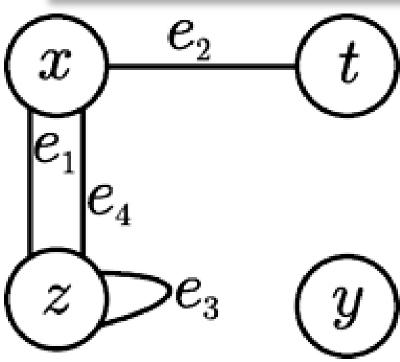
Para cualquier grafo se cumple…

COMPRÚEBALO CON TUS GRAFOS

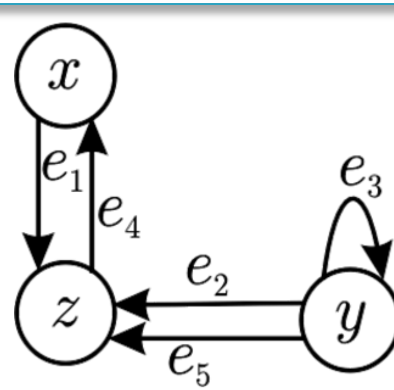
1º.- La **suma** de los **grados** de todos los vértices es el doble del número de aristas / arcos.

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2card\,(\boldsymbol{E})$$

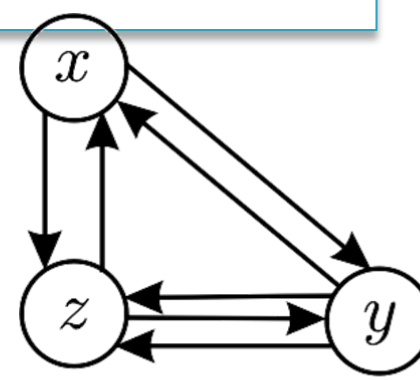
2º El número de vértices de grado impar siempre es par (Lema de Handshake).



G_1



G_2



G_4

Afirmación del **Lema de Handshake**

" En una fiesta, el número de personas que estrecha la mano a un número **impar** de personas, es siempre un número **par**"

RETO 1

¿ Se puede construir un grafo con 10 aristas en el que cada vértice tenga grado 4?

Si es posible, indica los vértices que tendría el grafo y represéntalo

TIPOS ESPECIALES DE GRAFOS

Se debe modelar una red informática con *n* (ej. n=4) ordenadores tal que cada dos ordenadores debe haber, como máximo, una conexión bidireccional.

Ningún ordenador se puede conectar consigo mismo.

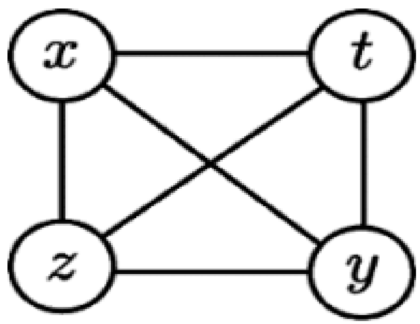
?

GND SIMPLE

SIN bucles

SIN aristas múltiples entre **2** vértices

n = 4



G_5

Las conexiones entre los ordenadores no son bidireccionales, ahora la red determina exactamente la dirección entre ellos, p.ej., el ordenador 1 se conecte al 2 pero no necesariamente a la inversa. Siguen prohibidas las conexiones de un ordenador a sí mismo y las conexiones múltiples entre ellos.

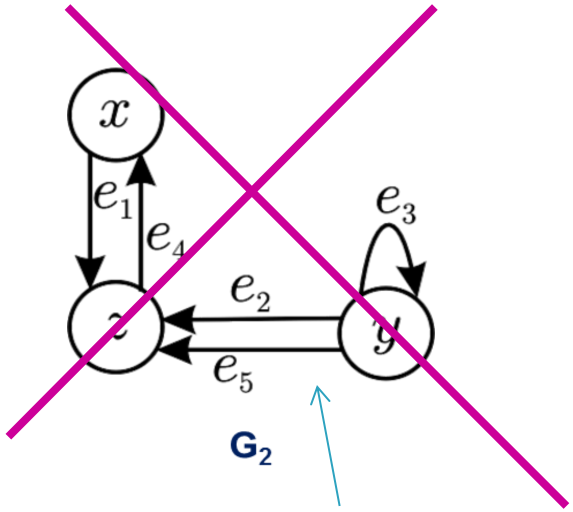
p.ej., $n = 6$

?

GD SIMPLE

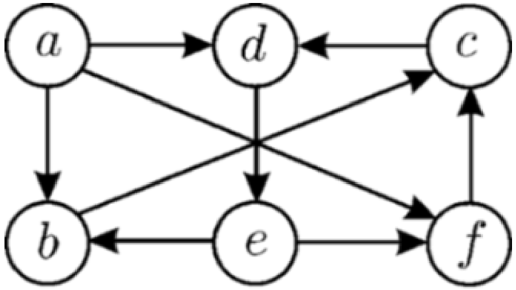
SIN bucles

NO existen dos arcos en el **mismo sentido** uniendo el mismo par de vértices



G₂

Conexión múltiple



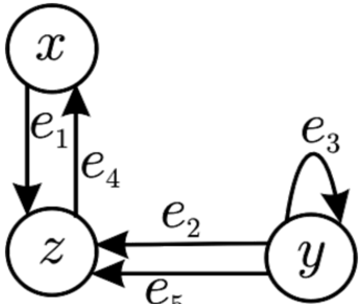
$\mathbf{G_9}$

En la red informática hay mucho tráfico de información por lo que pueden existir
conexiones múltiples
entre ordenadores

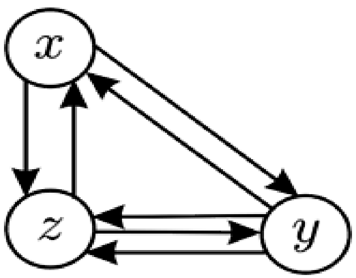
?

MULTIGRAFO

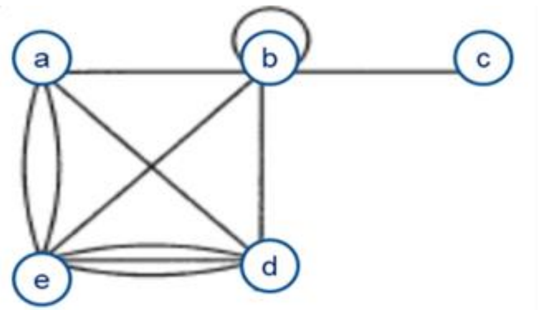
Un **multigrafo** es un grafo que admite aristas múltiples o arcos con la misma dirección entre dos vértices.



G_2



G_4



G_{11}

En la red informática todos los ordenadores deben estar conectados (con o sin dirección) pero sin conexiones múltiples entre ellos.

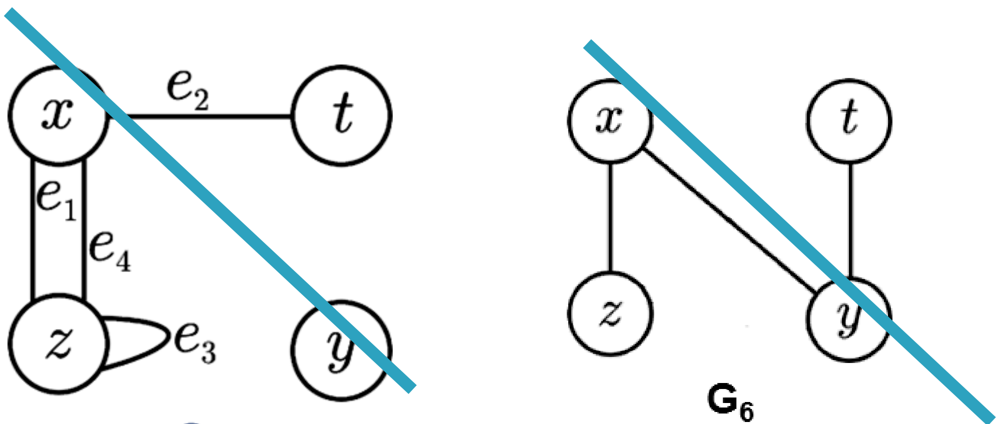
Un ordenador no se puede conectar consigo mismo.

p.ej., n = 4 ?

SIN bucles.

Existe al menos una **arista** uniendo **cada** par de vértices **distintos**.

- Todo **GND completo y simple** es un grafo K_n / n = card(V).



G$_1$ G$_6$ G$_5$

K$_4$

REPRESENTAR GRAFOS K_n

K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

Diseñar un grafo completo pero no simple

Diseñar un grafo simple que no sea K_n

Sea **G es un grafo simple y completo** con *n* vértices:

a) Si **n = 1**, el número de aristas de G es:

b) Si **n = 2**, el número de aristas de G es:

c) Si **n = 6**, el número de aristas de G es:

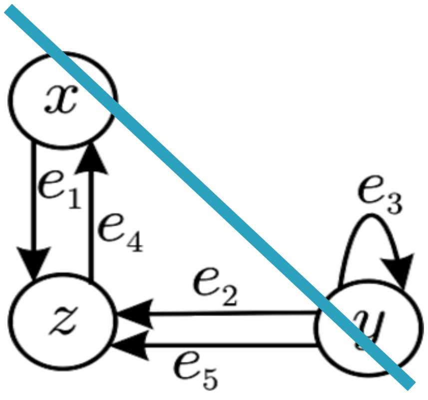
Solución

a) 0 b) 1 c) 5

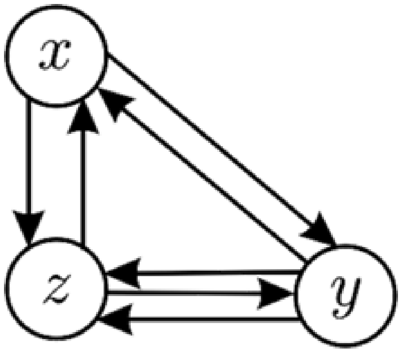
GD COMPLETO

SIN bucles

Existe al menos un **arco** uniendo **cada** par de vértices **distintos**.



G_2



G_4

GRAFOS "MINI"

GRAFO TRIVIAL
G = (V, E), |E| = 0, |V| = 1

¿ ES SIMPLE?

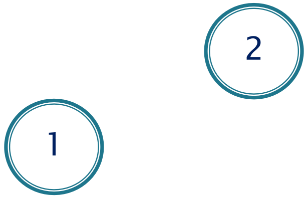
¿ ES COMPLETO?

Todo grafo trivial es simple y completo.

GRAFO VACÍO:
G = (V, E), |E| = 0, |V|>1

¿ ES SIMPLE?

¿ ES COMPLETO?



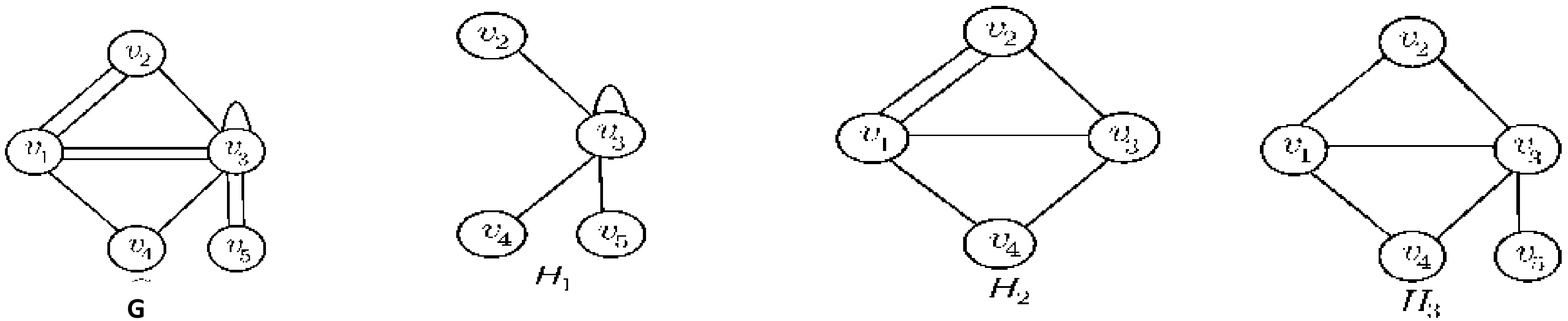
Todo grafo vacío es simple pero no completo.

SUBGRAFOS

Grafos definidos a partir de otros

En una red de 5 ordenadores (ej: grafo G) sólo se necesitan 4 de ellos y no todas las conexiones iniciales (grafo H_1 o grafo H_2) o bien tenemos todos los ordenadores pero con diferente conexiones (grafo H_3).

Def. Un **subgrafo** de un grafo G = (V, E) es un grafo H = (V',E') con **V'** $\subseteq$ **V** y **E'** $\subseteq$ **E**.



Def. Un subgrafo *H* de un grafo *G* es un **subgrafo generador** si sus conjuntos de vértices son iguales.

Ej. Los subgrafos generadores del grafo *G* serían H_3 y el propio grafo *G*.

REPRESENTACIÓN COMPUTACIONAL

Para representar un grafo en una computadora hay que tener en cuenta sus características y el algoritmo usado para manipularlo.

Matrices y Listas

Matriz de adyacencia
Matriz de incidencia

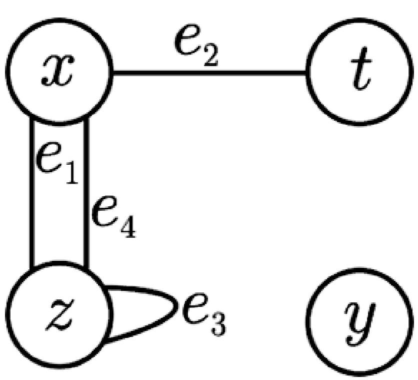
Lista de adyacencia

MATRIZ DE ADYACENCIA $A = [a_{ij}]$

$G = (V, E)$, $V = \{ v_1, \dots v_n \}$

a_{ij} : **Número de aristas / arcos** del vértice v_i **al** v_j.

En **GND** → El bucle cuenta **2** → A **simétrica**

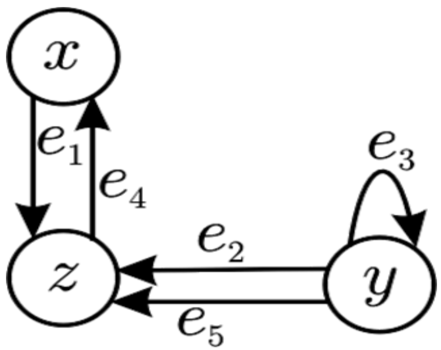


G_1

A	x	y	z	t
x	0	0	2	1
y	0	0	0	0
z	2	0	2	0
t	1	0	0	0

OjO: *se debe indicar a <u>qué vértice</u> corresponde cada fila*

MATRIZ DE ADYACENCIA $A = [a_{ij}]$



G_2

A	x	y	z
x	0	0	1
y	0	1	2
z	1	0	0

En **GD** → Fila i: vértice **origen** del arco (i, j) → Columna j: vértice **destino** del arco (i, j)

Bucle cuenta 1 → A no siempre simétrica

Estudio de los grados de los vértices en la matriz A

GND

d($\mathbf{v_i}$) >> suma de **fila i**

A/G_1	x	y	z	t
x	0	0	2	1
y	0	0	0	0
z	2	0	2	0
t	1	0	0	0

$d(\mathbf{x}) = 3$

$d(\mathbf{y}) = 0$

$d(\mathbf{z}) = 4$

$d(\mathbf{t}) = 1$

COMPRÚEBALO CON TUS GRAFOS

Estudio de los grados de los vértices en la matriz A

GD

ds($\mathbf{v_i}$) **>>** suma de **fila i**

de($\mathbf{v_i}$) **>>** suma de **columna j**

A/G_2	x	y	z
x	0	0	1
y	0	1	2
z	1	0	0

ds(**x**) = **1**

ds(**y**) = 3

ds(**z**) = 1

de(**x**) = **1**

de(**y**) = 1

de(**z**) = 3

COMPRÚEBALO CON TUS GRAFOS

MATRIZ DE INCIDENCIA $M = [m_{ij}]$

❖ Matriz que informa sobre la **incidencia** de aristas / arcos en los vértices

❖ Filas >> vértices (**n**)

❖ Columnas >> aristas /arcos (**m**)

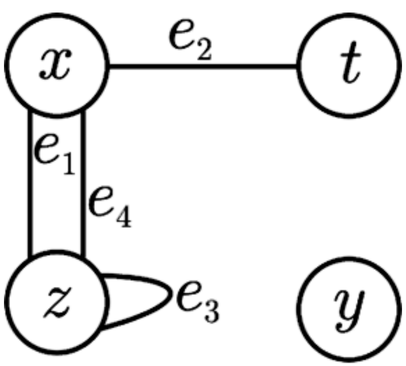
❖ Orden >> **n x m**

MATRIZ DE INCIDENCIA $M = [m_{ij}]$

GND

$$M = [m_{ij}] \ / \ m_{ij} = \begin{cases} 0 & v_i \text{ no es extremo de } e_j \\ 1 & v_i \text{ es extremo de } e_j \\ 2 & e_j \text{ es un bucle} \end{cases}$$

>> suma** la fila **i
¿Qué dato obtienes del vértice i ?



G_1

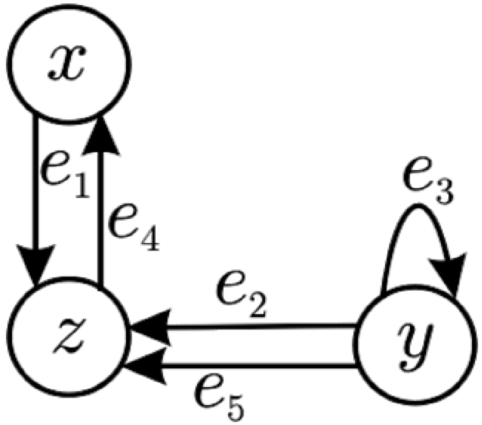
(4x4)

M	e_1	e_2	e_3	e_4
x	1	1	0	1
y	0	0	0	0
z	1	0	2	1
t	0	1	0	0

MATRIZ DE INCIDENCIA M = $[m_{ij}]$

GD

$$M = [m_{ij}] \; / \; m_{ij} = \begin{cases} 0 & v_i \text{ no es extremo de } e_j \\ 1 & v_i \text{ es vértice inicial de } e_j \\ -1 & v_i \text{ es vértice final de } e_j \\ 2 & e_j \text{ es un bucle} \end{cases}$$



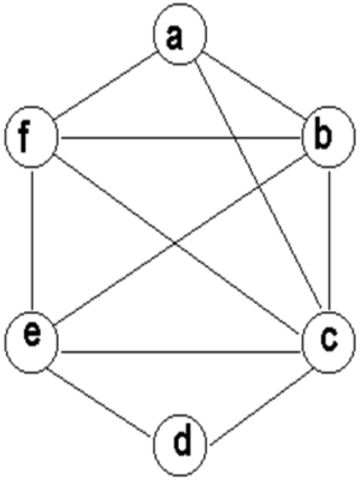
G_2

M	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
x	1	0	0	−1	0
y	0	1	2	0	1
z	−1	−1	0	1	−1

(3x4)

LISTAS DE ADYACENCIA

En un computador podemos representar un grafo mediante una sucesión de listas en la que cada vértice es la cabeza de todos sus vértices adyacentes.



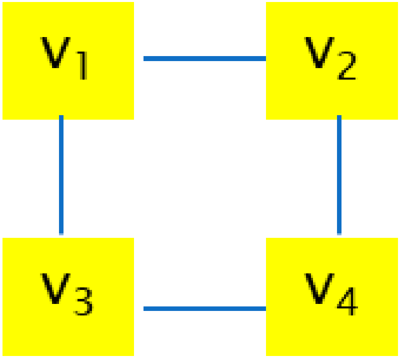
G_7

Tabla de adyacencia

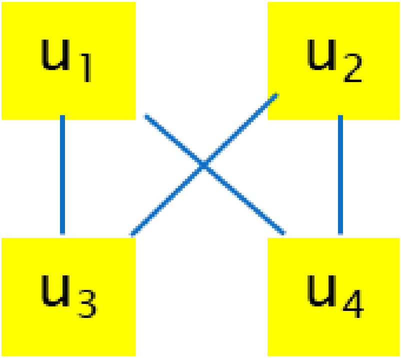
a	b, c, f
b	a, c, e, f
c	a, b, d, e, f
d	c, e
e	b, c, d, f
f	a, b, c, e

GRAFOS ISOMORFOS

Representan la misma relación entre vértices ?



$G = (V_1, E_1)$



$H = (V_2, E_2)$

GRAFOS ISOMORFOS

Los grafos se pueden representar de forma diferente pero preservando relación entres vértices y aristas.

Def. Dos **grafos simples** $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son **isomorfos** ($G_1 \cong G_2$) si existe una función biyectiva $f : V_1 \to V_2$ / para cada par de vértices $u, v \in V_i$ **u y v son adyacentes en G_1 si y sólo si, f(u) y f(v) son adyacentes en G_2**.

>> La función **f** preserva la relación de adyacencia

$$uv \in E_1 \leftrightarrow f(u)f(v) \in E_2, \ \forall u, v \in V_1$$

GRAFOS ISOMORFOS

Los grafos **G** y **H** son isomorfos ya que la función f

$\mathbf{f(v_1) = u_{1,}}$

$\mathbf{f(v_2) = u_{4,}}$

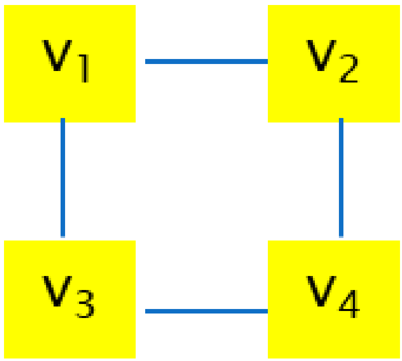
$\mathbf{f(v_3) = u_{3,}}$

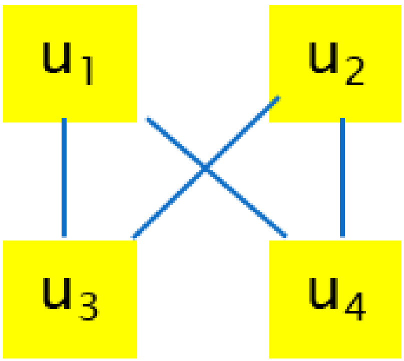
$\mathbf{f(v_4) = u_2}$ es **biyectiva** entre los dos grafos

además

los vértices **preservan** la

adyacencia .





v_1 adyacente a: $v_{2,}$ v_3

$f(v_1) = u_1$ adyacente a: $f(v_2) = u_4$

$f(v_3) = u_3$

$G = (V_1, E_1)$

$H = (V_2, E_2)$

GRAFOS ISOMORFOS

>> Si el número de vértices es grande >> **coste muy alto >> n!**

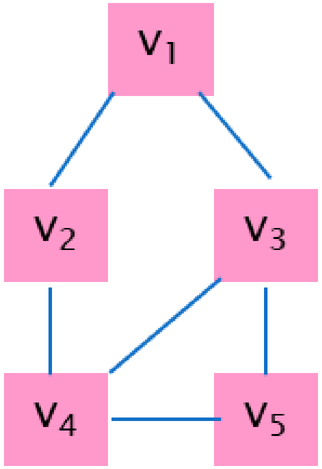
>> Se demuestra que los grafos no son isomorfos.

>> Propiedades necesarias para que dos grafos simples sean isomorfos:

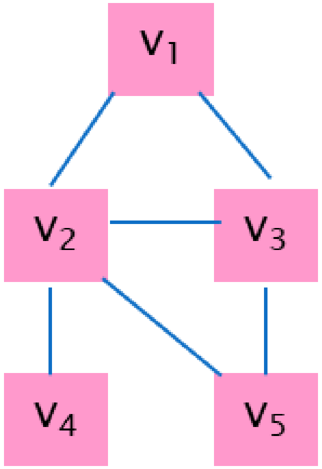
- Los grafos deben preservar
  - Nº de vértices,
  - Nº de aristas y
  - Grado de los vértices.

OJO: son propiedades necesarias…repaso lógica.

GRAFOS ISOMORFOS



$T = (V_1, E_1)$



$U = (V_2, E_2)$

1º nº vértices: 5

2º nº aristas: 6

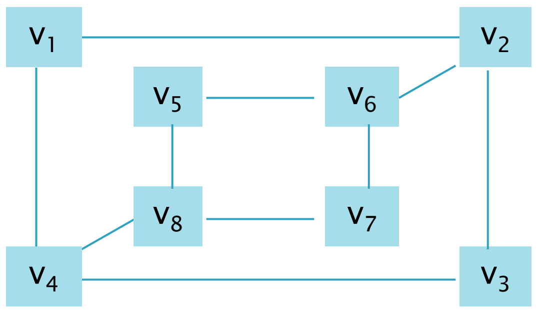
3º Grado????

grafo U >> $d(v_4) = 1$

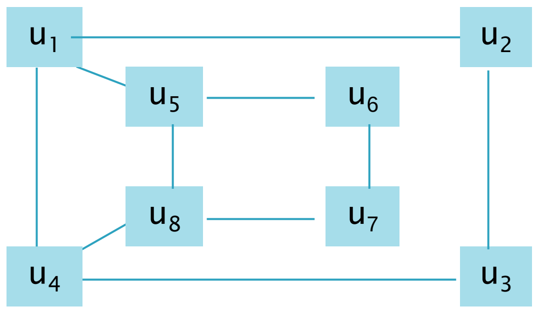
grafo T no existe vértice de grado 1.

GRAFOS ISOMORFOS

Ej. Con los siguientes grafos se demuestra que aunque preservan las propiedades de grados isomorfos, los grafos no lo son.



$G = (V_1, E_1)$



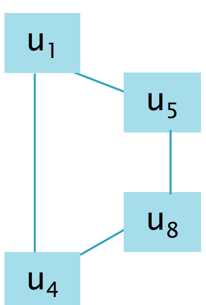
$H = (V_2, E_2)$

G y H tienen 8 vértices y 10 aristas. Ambos tienen 4 vértices de grado dos y 4 de grado 3. Con esto, supuestamente, G y H son isomorfos pero veremos que no lo son. En G, tenemos que $d((v_1) = 2$. El vértice v_1 se debe corresponder con alguno de los vértices de H de grado 2, éstos serían $u_{2,}$ $u_{3,}$ $u_{6,}$ $u_{7.}$ Sin embargo cada uno de estos vértices de H son adyacentes a otros vértices de grado 2 de H lo que no es cierto para v_1 en el grafo G. Luego **no son isomorfos**.

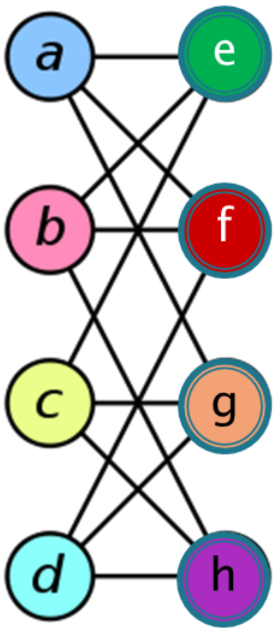
→ Otra forma de verlo es comprobar que los subgrafos formados por vértices de grado 3 y por las aristas que los conectan son isomorfos.

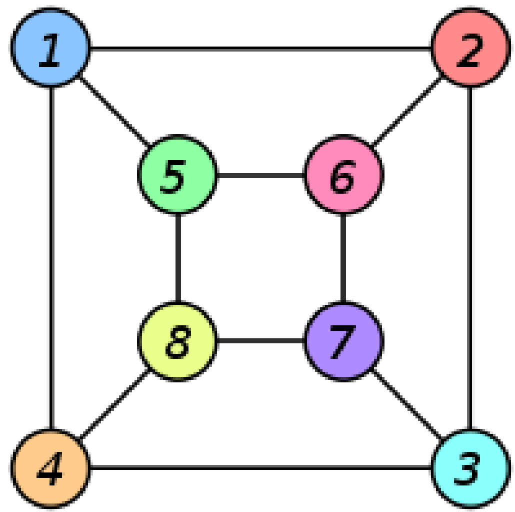
Ej. Los subgrafos de G y H respecticvamente demuestran que **no son isomorfos**.

Subgrafo de G



Subgrafo de H





Un isomorfismo
f(a) = 1
f(b) = 6
f(c) = 8
f(d) = 3
f(e) = 5
f(f) = 2
f(g) = 4
f(h) = 7