Apellidos, Nombre: ______________________________

P1. (1 p)
Consideremos la matriz M dada por

$$A = \begin{bmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{bmatrix}.$$

Sabemos que es ortogonal si su traspuesta coincide con su inversa. Demuestra que es ortogonal sin calcular su inversa.

Solución.
Se puede comprobar fácilmente que $\det(A) \neq 0$.
Además, se verifica que

$$A^T A = I$$

por lo que podemos afirmar que es ortogonal, ya que $A^T = A^{-1}$.

P2. (1 p)
Una inmobiliaria ha vendido un total de 65 plazas de garaje en tres urbanizaciones diferentes. Las ganancias obtenidas por la venta de una plaza de garaje en la urbanización A son de 2000 , 4000 por una en la urbanización B y 6000 por una en la urbanización C. Se sabe que se han vendido un $50\,\%$ más de plazas en la urbanización A que en la urbanización C. Calcula el número de plazas de garaje vendidas en cada urbanización sabiendo que el beneficio obtenido por las vendidas en la urbanización C es igual a la suma de los beneficios obtenidos por las vendidas en las urbanizaciones A y B.

Solución.
Llamamos
x, número de plazas de garaje de la urbanización A.
y, número de plazas de garaje de la urbanización B.
z, número de plazas de garaje de la urbanización C.
La primera ecuación se plantea diciendo que

$$x + y + z = 65,$$

que es el número total de plazas vendidas. La segunda ecuación es

$$x = 1{,}5y$$

o, lo que es lo mismo, $2x = 3z$, ya que en A se venden un $50\,\%$ más que en C.
La terecra sale de las ganancias, que es

$$6000z = 2000x + 4000y.$$

Formamos el sistema, cuya solución nos da $x = 30, y = 15, z = 20$, que son las plazas vendidas en A, B y C.

P3. (1 p)
Calcula el área del triángulo que tiene por vértices los puntos de intersección del plano $\pi : x+y+2z-2 = 0$ con los ejes de coordenadas.

Solución.
Los puntos de intersección con los ejes son: $A(2,0,0), B(0,2,0)$ y $C(0,0,1)$.
El área del triángulo viene dada por

$$S = \frac{1}{2}\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$$

donde los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ vienen dados por $\vec{AB} = (-2,2,0)$ y $\vec{AC} = (-2,0,1)$.
Entonces

$$S = \frac{1}{2}\|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \sqrt{6}.$$

P4. (1 p)
Diagonaliza, si es posible, la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solución.
Valores propios son. 1 simple y 2 doble.
El vector propio asociado a $\lambda = 1$ es $[1, 0, 1]^T$.
El vector propio asociado es $[1, 1/2, 1]^T$.
Solo tenemos dos vectores propios linealmente independientes.

P5. (1 p)
Consideremos el punto $P(2, 0, 1)$ y la recta r

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y & = & 6 \\ z & = & 2 \end{array} \right\}$$

1. Halla la ecuación del plano que contiene a P y a r.
2. Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r.

Solución.
a) El plano que nos piden es

$$x + 2y - 4z + 2 = 0.$$

b) El punto es: $P' = (18/5, 16/5, 3)$.