1. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE GRAFOS

1.2. GRAFOS BIPARTIDOS

- Definición de grafo bipartido.
- Cómo comprobar que un grafo es bipartido.
- Grafos bipartidos completos y grafos $K_{m,n}$
- Condición necesaria y suficiente para que un grafo sea bipartido.
- Ejercicios resueltos.

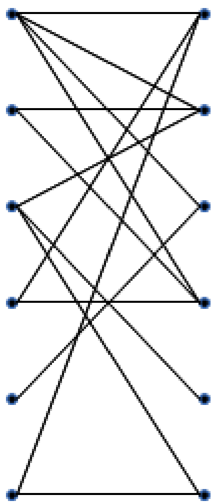
Hay ocasiones en que un grafo tiene la propiedad de que su conjunto de vértices se puede dividir en dos subconjuntos disjuntos tales que cada arista conecte un vértice de uno de esos subconjuntos con otro vértice del otro subconjunto.
P.ej., la relación de parejas de novios se podría representar mediante un grafo G = (V, E) donde los vértices sean las personas y las aristas la relación de una persona con su pareja. La persona A que sea pareja de la persona B podría pertenecer al conjunto de vértices V_1 y la persone B en otro conjunto de vértices, V_2 de tal forma que $V_1 \cup V_2 = V$.

Estudiaremos en qué condiciones un grafo se puede expresar de forma bipartida.

Concepto de grafo bipartido

Problema de las parejas: queremos formar parejas de alumnos/alumnas para los grupos de prácticas. Cada alumno conoce a cierto número de alumnas y cada alumna conoce a cierto número de alumnos. Suponemos que la relación "conocer" es mutua, bidireccional. En las parejas cada uno se empareja con alguien conocido.

Solución: se modela el problema mediante un grafo G = (V, E) no dirigido en el cual $V = V_1 \cup V_2$ / V_1 = {alumnos} y V_2 = {alumnas} de tal forma que en el conjunto E = { n-aristas que representan la relación "conocer"} se unen vértices entre ambos conjuntos. Hay que tener en cuenta que es irrelevante saber si los alumnos/alumnas se conocen entre si, sólo interesa la relación entre ellos.
A un grafo así se le llama un **grafo bipartido.**



Def. Un grafo G = (V,E), GND, es **bipartido** si existe una partición de V, en dos conjuntos disjuntos V_1, V_2 tal que

$V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $\forall \{v_i, v_j\} \in E$, $v_i \in V_1$, $v_j \in V_2$.

- *Es necesario que toda arista tenga un extremo en V_1 y otro en V_2.*
- *No pueden existir aristas entre vértices de V_1 ni entre vértices de V_2*

Un grafo dirigido es bipartido si lo es su grafo no dirigido asociado.

Los grafos bipartitos se utilizan para modelar relaciones entre dos diferentes clases de objetos por eso se suelen representar gráficamente con dos columnas (o filas) de vértices y con aristas uniendo los vértices de columnas (o filas) que son diferentes.

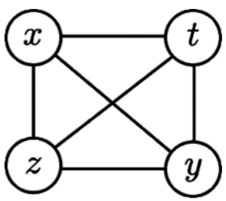
Otras aplicaciones de los grafos bipartidos son el coloreado de mapas y el análisis de redes sociales[1]

1 Stanley., Wasserman, (1994). Social network analysis : methods and applications. Cambridge University Press. ISBN 9780521387071

Cómo comprobar que un grafo es bipartido

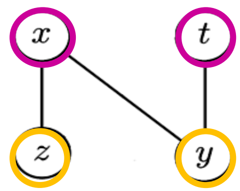
- Para comprobar si un grafo es bipartido se consideran dos etiquetas o colores, p. ej., 1 y 2. Se elige un vértice cualquiera al que se le asigna un color, p. ej., el 1 y a todos sus vértices adyacentes el 2. Se sigue el proceso hasta etiquetar todos los vértices. El grafo será bipartito si no existe ninguna arista que conecte dos vértices adyacentes del mismo color.

>> En un grafo bipartido no se pueden colorear los vértices adyacentes con el mismo color.



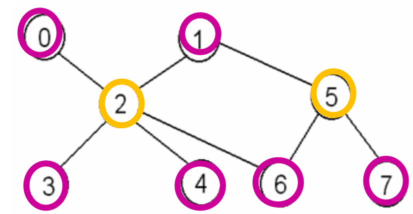
G_5

Grafo NO bipartido.



G_6

Grafo bipartido $V_1 = \{x,y\}_1\ V_2 = \{z,t\}$.

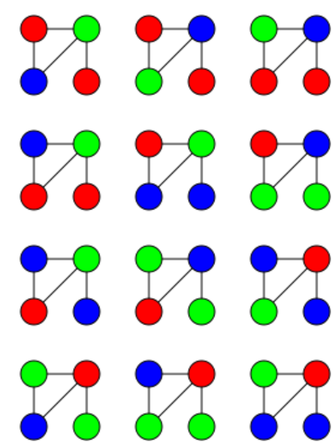


G_8

Grafo bipartido $V_1 = \{0,1,3,4,6,7\}_1\ V_2 = \{2,5\}$.

*>> La terminología de usar colores para etiquetar vértices proviene del problema de **colorear mapas**. Esto fue generalizado a la coloración de caras de grafos inmersos en el plano. En representaciones matemáticas y computacionales los colores están representados por los enteros {1, 2, 3, …}. La naturaleza del problema de coloración depende del número de colores pero no sobre cuales son.*
La coloración de vértices es la asignación de los vértices de un grafo con colores tal que dos vértices que compartan la misma arista tengan colores diferentes. Un grafo con bucles no puede ser coloreado, y solo se consideran grafos simples. Figura 1

*El número total en que puede ser coloreado un mapa con n-colores se resuelve con el **polinomio cromático.** P. ej., usando 3 colores, el grafo de la figura 1 puede ser coloreado de 12 formas distintas. Dicho grafo no es bipartido ya que no puede colorearse con 2 colores. Con 4 colores, puede ser coloreado de 24+4*12 maneras distintas: usando los cuatro colores juntos, hay 4!= 24 coloraciones válidas*



Grafo coloreado con 3 colores de 12 formas diferentes.

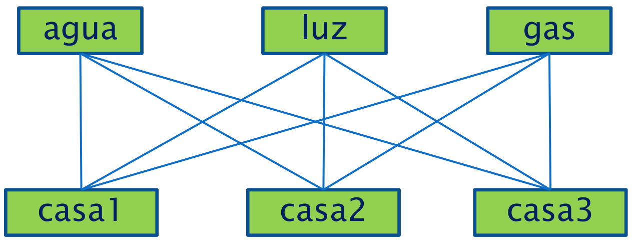
Figura 1: De Life of Riley - Trabajo propio, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=17185642

Grafos bipartidos completos $K_{m,n}$

Sea G un grafo no dirigido bipartido con $\{V_1,V_2\}$ partición de V:

Def. G será un grafo **bipartido completo** si cada vértice de V_1 está relacionado con cada vértice de V_2 y viceversa

1 En una urbanización tenemos dos conjuntos de elementos, las casas y los servicios. Contamos con 3 casas y 3 servicios, agua, luz y gas. Si cada casa utiliza cada uno de los servicios, el grafo que lo representa será:



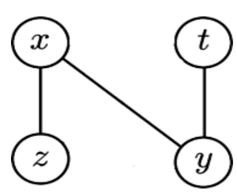
La partición V_1 = { casa1, casa2, casa3 }, V_2 = { luz, gas, agua } demuestra que el grafo es bipartido completo ya que todos los vértices de V_1 están conectados con todos los vértices de V_2

Def. Un grafo no dirigido y simple es un **grafo $K_{m,n}$** si es bipartido completo / $|V_1| = n$ y $|V_2| = m$.

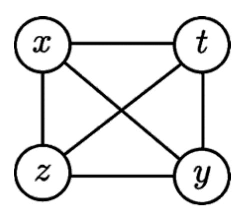
Ej. El grafo G_6 es bipartido pero no es bipartido completo ya que, p.ej., el vértice $t \in V_1$ no está relacionado con el vértice $z \in V_2$.

El grafo G_5 no puede ser bipartido completo ya que no es bipartido.

Sin embargo, el grafo definido como G = (V, E), V = {a,b,c,d}, E = {{a,b}, {a,c}, {a,d} } sí que es bipartido completo ya que si V_1 = {a}, V_2 = {b,c,d} se cumple que todo vértice de V_1 está relacionado con cada vértice de V_2.



G_6



G_5

Condición necesaria y suficiente para que un grafo sea bipartido

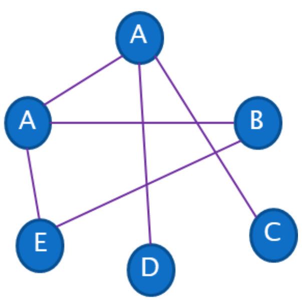
Teorema 1.2.1 (Para grafos no dirigidos)

- Un grafo es bipartido si y sólo si no contiene ningún ciclo impar.

• Un grafo es bipartido **si y sólo si** es imposible comenzar en un vértice y regresar a él después de recorrer un número impar de aristas distintas.

• Los grafos cíclicos con un número par de vértices son bipartitos.

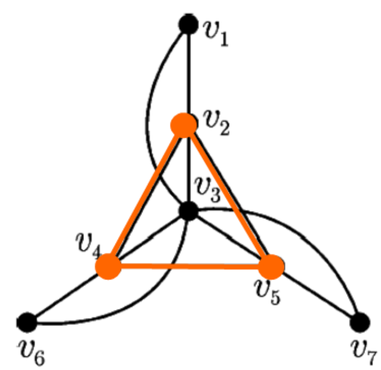
2 Los siguientes grafos **no** son bipartidos ya que ambos tienen, al menos, un ciclo de longitud impar



V = { A, B, C, D, E, F}.

E = { {A,C}, {A,D}, {A,F}, {B,E}, {B,F}, {E,F} }

Ciclo de longitud 3: A B E A



V = { v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7}.

E = {{v_1,v_2}, {v_1,v_3}, {v_2,v_3}, {v_2,v_4}, {v_2,v_5}, {v_3,v_4}, {v_3,v_5}, {v_3,v_6}, {v_3,v_7}, {v_4,v_5}, {v_4,v_6}, {v_5,v_7},

Ciclo de longitud 3: $v_2\, v_4\, v_5\, v_2$

EJERCICIOS

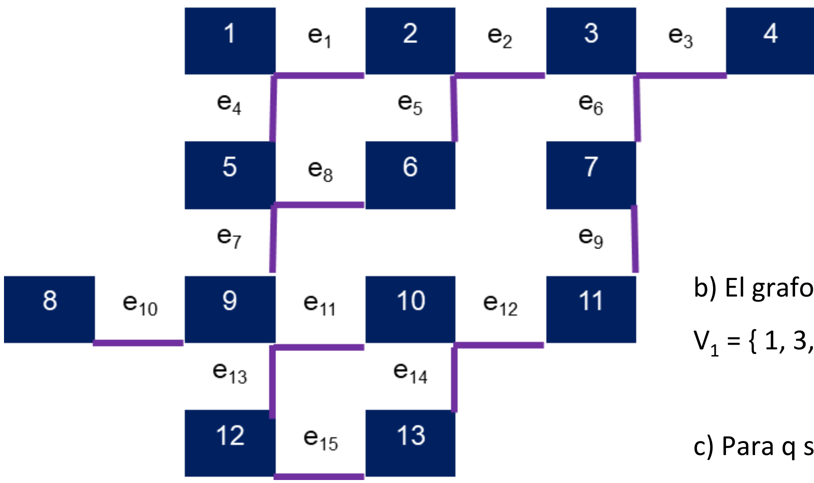
Para cada uno de los grafos propuestos en los siguientes ejercicios:

a) Describe para cada grafo G = (V, E), su conjunto de vértices V y el de aristas /arcos E.

b) Estudia si es bipartido y en caso de que lo sea escribe la partición del conjunto de vértices.

c) Explica si es un grafo $K_{m,n}$ o porqué no lo es.

EJERCICIO-1



a) V = { 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13}

E = { e_1={1,2}, e_2={2,3}, e_3={3,4}, e_4={1,5}, e_5={2,6}, e_6={3,7}, e_7={5,9}, e_8={5,6}, e_9={7,11}, e_{10}={8,9}, e_{11}={9,10}, e_{12}={10,11}, e_{13}={9,12}, e_{14}={10,13}, e_{15}={12,13} }

b) El grafo es bipartido ya que podemos obtener dos conjuntos de vértices disjuntos:

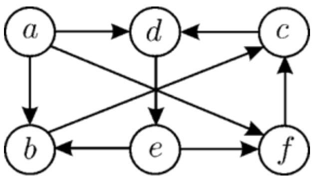
V_1 = { 1, 3, 6, 9, 11, 13}; V_2 = {2, 4, 5, 7, 8, 10, 12}.

c) Para q sea $K_{m,n}$ debe ser bipartido completo, simple y no dirigido.

No es bipartido completo porque no todos los vértices de V_1 están relacionados con todos los vértices de V_2, luego no es $K_{m,n}$

EJERCICIOS

EJERCICIO-2



G_9

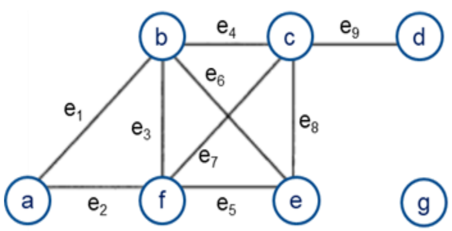
Solución

a) G_9 = (V,E), V = {a,b,c,d,e,f}, E = {(a,b), (a,d), (a,f), (b,c), (c,d), (d,e), (e,b), (e,f), (f,c)}

b) Es bipartido ya que existe una bipartición de V, V_1 = {a,c,e}, V_2 = {b,d,f}.

c) El grafo es bipartido y simple pero no bipartido completo pq no todos los arcos tienen un vértice en V_1 y otro en V_2 luego no es $K_{m,n}$

EJERCICIO-3



G_{10}

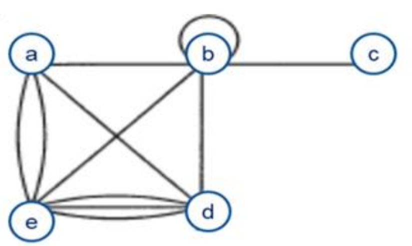
Solución

a) G_{10} = (V,E), V = {a,b,c,d,e,f,g}, E = {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9}

b) El grafo no es bipartido ya que no se pueden etiquetar dos vértices adyacentes con dos ítems diferentes.

b) No es $K_{m,n}$ ya que aunque es no dirigido no es bipartido, luego tampoco es bipartido completo.

EJERCICIO-4



G_{11}

Solución

a) G_{11} = (V,E), V = {a,b,c,d,e}, E = {e_1={a,b}, e_2={a,e}, e_3={a,e}, e_4={a,d}, e_5={b,b}, e_6={b,c}, e_7={b,d}, e_8={b,d}, e_9={d,e}, e_{10}={d,e}, e_{11}={d,e} }

b) El grafo no es bipartido ya que no se pueden etiquetar vértices adyacentes con dos ítems diferentes (p.ej., vértice b).

b) No es $K_{m,n}$ ya que aunque es no dirigido no es bipartido, luego tampoco es bipartido completo.

EJERCICIOS

EJERCICIO-5

Razona si el grafo K_3 puede ser bipartido.

Solución

K_3 no es bipartido ya que K_3 es un grafo no dirigido, simple y completo. Al ser completo todos los vértices son adyacentes luego no podemos dividir el conjunto de vértices en dos subconjuntos disjuntos ya que en cada subconjunto sus elementos serían también adyacentes entre sí y eso se contradice con la definición de grafo bipartido.

EJERCICIO-6

Razona si son ciertas o falsas estas afirmaciones sobre un grafo G = (V, E):

a) Si G es no dirigido y bipartido con $V = (V_1,V_2)$ entonces todas las aristas de G tienen un extremo en V_1 y otro en V_2

b) Si G es K_{32} entonces G tiene 5 vértices de los cuales 1 de ellos tiene un bucle.

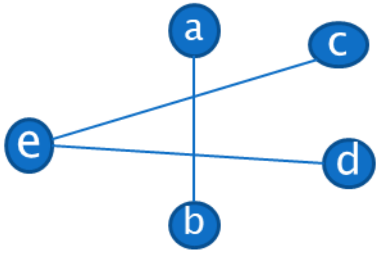
Solución

a) Cierto. Por definición de grafo bipartido.

b) Falso, ya que si el grafo es K_{32} es simple, y un grafo simple no puede tener bucles.

EJERCICIO-7

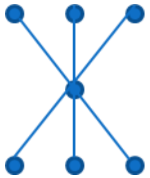
Estudia e indica porqué el siguiente grafo es bipartido. .



Solución. Es bipartido ya que existen dos conjuntos de vértices V_1, V_2 disjuntos $V_1 = \{a, e\}$, $V_2 = \{b, c, d\}$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

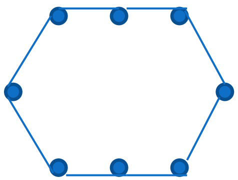
Cómo usar un grafo bipartido para modelar una red de área local.



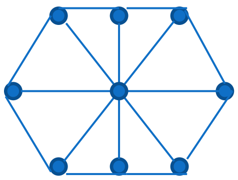
Se pueden conectar ordenadores y periféricos de un edificio mediante una red de área local.

1º Se modela una red local de 7 dispositivos con una topología de estrella donde cada dispositivo está conectado a un dispositivo central que controla toda el área. Para modelar la red se usa un grafo bipartido completo $K_{1,n}$.

2º Se modela una red local con una topología de anillo en la que cada dispositivo se conecta exactamente con otros dos. Los mensajes se envían de máquina a máquina siguiendo el ciclo hasta que se alcanza el dispositivo que debe recibir el mensaje.



3º Se modela una red local mediante un híbrido de las topologías anteriores. Los mensajes se pueden enviar o bien a través de un dispositivo central o a lo largo del anillo. Esta redundancia hace que la red sea más fiable.



Comprueba que cada modelo de red se corresponde con un grafo bipartido y/o bipartido completo. Numera los vértices para escribir los diferentes conjuntos de vértices de la partición. .

ANEXO

Bibliografía

Kenneth, H.R., *Matemática discreta y sus aplicaciones*, Ed. McGraw-Hill. (Grafos bipartidos: ver pag 514 y sig.)

Migallón V., Penadés J., *Matemática discreta*, Ed. Puntero y Chip, Alicante.

Aplicación de grafos bipartidos:

Problema de emparejamientos: Emparejamiento máximo en un grafo bipartido a partir de una red de emparejamiento

https://riunet.upv.es/handle/10251/5099. http://hdl.handle.net/10251/5099

En esta web se explica cómo perfeccionar un emparejamiento en la teoría de grafos

http://www.upv.es/visorv/media/ccc13459-6908-1e4a-b2bf-917c890570f2/c