

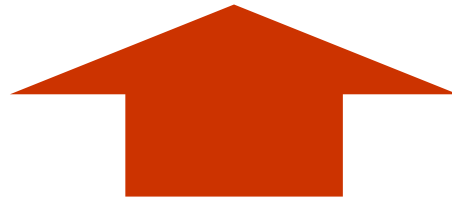
Estructura de las prácticas

- *Carácter obligatorio*
- *Semanas impares*
 - 1 sesión Tª de errores*
 - 6 prácticas (1 práctica/sesión)*
- *En grupos de 3 alumnos*
- *Se entrega una memoria por práctica (por grupo) al final de cada sesión*

TEORÍA DE ERRORES

- Medidas experimentales
- Tipos de errores
- Expresión de resultados y errores
- Presentación de resultados
(Tablas – Gráficas)
- Interpolación
- Método de mínimos cuadrados

Medidas experimentales



Objetivo de la Física:

Hallar relaciones entre magnitudes físicas

¿ Qué tipos de errores hay?

¿ Cómo afectan al resultado?

¿ Cómo se expresa el resultado?

Ejemplo:

¿cómo interpretar los datos?

TABLA 1		TABLA 2	
T (°C)	d (g/cm ³)	T (°C)	d (g/cm ³)
40	0,8015	40	0,80
30	0,8017	30	0,80
20	0,8019	20	0,80
10	0,8021	10	0,80

Tipos de errores

- *Errores sistemáticos*

Aparato de medida / Observador

SE PUEDEN ELIMINAR

(aunque son difíciles de detectar)

- *Errores accidentales*

Condiciones experimentales / Objeto medido

SE PUEDEN REDUCIR

PERO *NUNCA ELIMINAR*

(se pueden estimar con métodos estadísticos)

Error absoluto (Ea):

estimación del error de la medida “V”

(V: valor “verdadero” de la magnitud física)

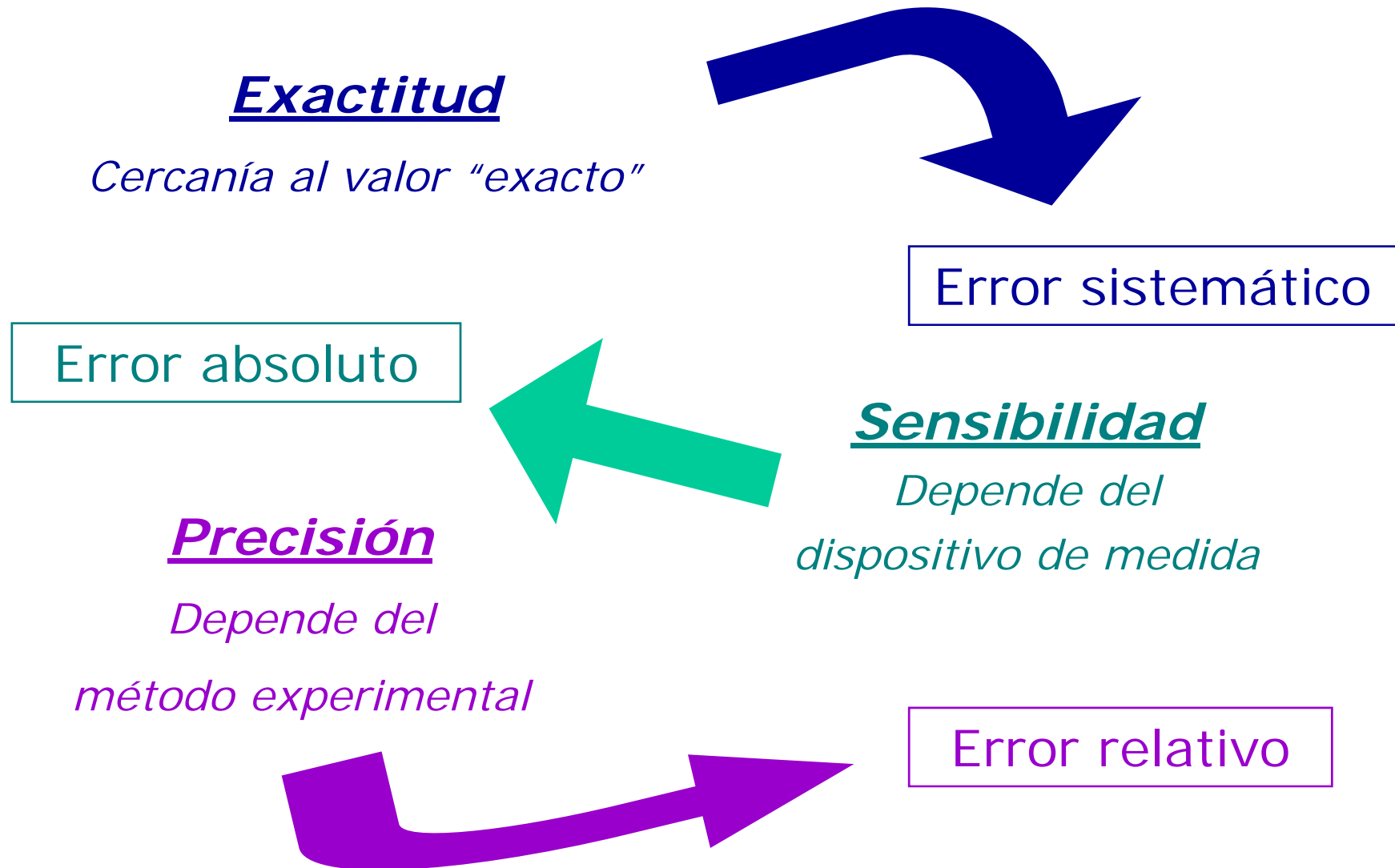
$$\mathbf{V \pm Ea}$$

Error relativo (Er):

$$\mathbf{E_r = \frac{E_a}{V}}$$

$$\mathbf{E_r (\%) = 100 \frac{E_a}{V}}$$

Características de las medidas



¿ Cómo reducir los errores?

¿ Cuántas medidas?

1. Tomar **3 medidas**: M_1, M_2, M_3

2. Calcular **dispersión absoluta**: $D = M_{\max} - M_{\min}$

3. Calcular **valor medio**: $\bar{V} = \frac{M_1 + M_2 + M_3}{3}$

4. Calcular **desviación relativa**: $\Delta V = \frac{D}{\bar{V}} \times 100$

5. Si ΔV $\left\{ \begin{array}{l} < 2\% \Rightarrow 3 \\ 2\% < \Delta V < 8\% \Rightarrow 6 \\ 8\% < \Delta V < 15\% \Rightarrow 15 \\ \Delta V > 15\% \Rightarrow 50 \end{array} \right.$

MEDIA ARITMÉTICA

$$\bar{V} = \sum_{i=1}^n \frac{V_i}{n}$$

DESVIACIÓN MEDIA

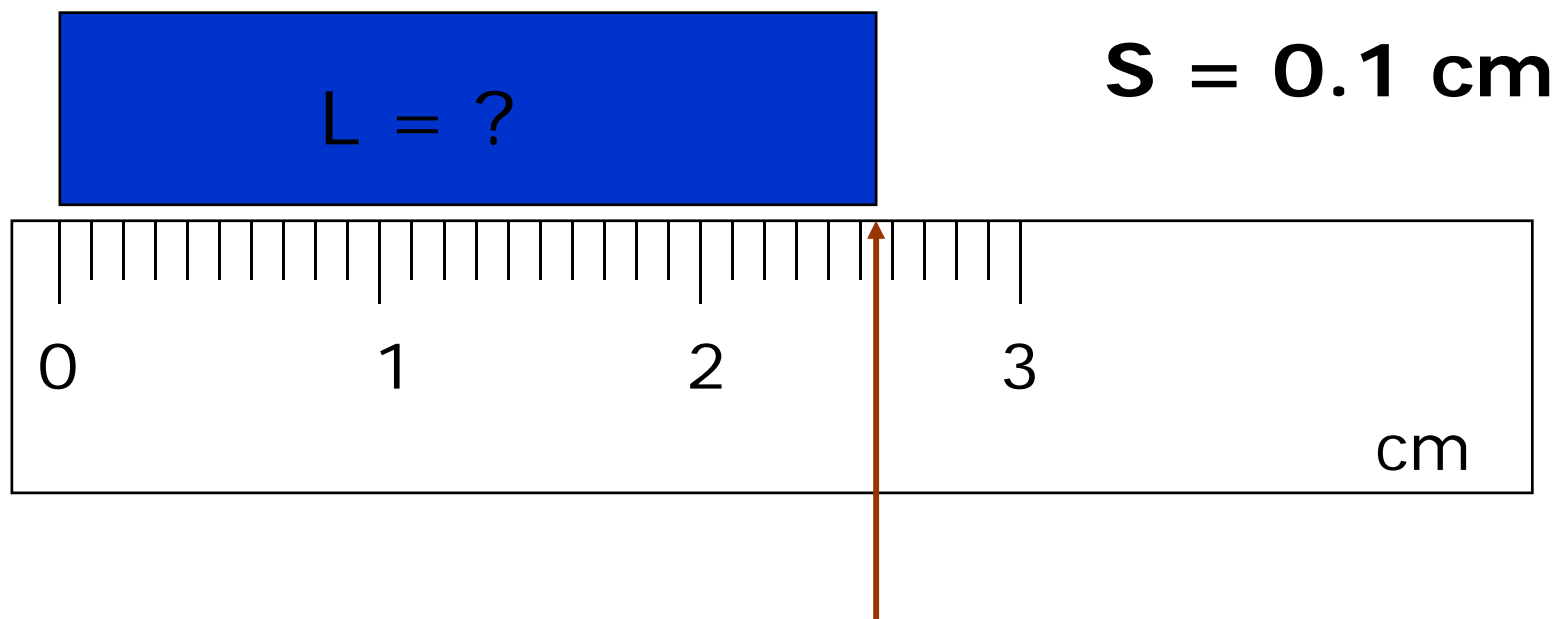
$$\delta = \sum_{i=1}^n \frac{|V_i - \bar{V}|}{n}$$

ERROR ABSOLUTO

$$E_a = \text{máx}[S, \delta]$$

Resultado final = magnitud \pm error *unidades*

$$V = \bar{V} \pm E_a \text{ } *unidades*$$



Entre 2.5 y 2.6: $L = 2.5 \pm 0.1 \text{ cm}$

UNIDADES DEL SISTEMA INTERNACIONAL

Longitud	El <i>metro</i> (m) es la distancia recorrida por la luz en el vacío en $1/299\,792\,458$ s
Tiempo	El <i>segundo</i> (s) es la duración 9 192 631 770 períodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo ^{133}Cs
Masa	El <i>kilogramo</i> (kg) es la masa del cuerpo considerado como patrón internacional que se conserva en Sèvres, Francia
Corriente eléctrica	El <i>amperio</i> (A) es la corriente que al circular por dos conductores rectilíneos muy largos y paralelos separados 1 m entre sí da origen a una fuerza magnética por unidad de longitud de 2×10^{-7} N/m
Temperatura	El <i>kelvin</i> (K) es $1/273,16$ de la temperatura termodinámica del punto triple del agua
Intensidad luminosa	La <i>candela</i> (cd) es la intensidad luminosa, en la dirección perpendicular, de una superficie de $1/600\,000$ m ² de un cuerpo negro a la temperatura de congelación del platino a la presión de 1 atm

Tabla A.2 Unidades derivadas.

Fuerza	newton (N)	$1\text{ N} = 1\text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$
Trabajo, energía	julio o joule (J)	$1\text{ J} = 1\text{ N} \cdot \text{m}$
Potencia	vatio (W)	$1\text{ W} = 1\text{ J/s}$
Frecuencia	hertz (Hz)	$1\text{ Hz} = \text{s}^{-1}$
Carga	culombio (C)	$1\text{ C} = 1\text{ A} \cdot \text{s}$
Potencial	voltio (V)	$1\text{ V} = 1\text{ J/C}$
Resistencia	ohmio (Ω)	$1\Omega = 1\text{ V/A}$
Capacidad	faradio (F)	$1\text{ F} = 1\text{ C/V}$
Campo magnético	tesla (T)	$1\text{ T} = 1\text{ N/A} \cdot \text{m}$
Flujo magnético	weber (Wb)	$1\text{ Wb} = \text{T} \cdot \text{m}^2$
Inductancia	henry (H)	$1\text{ H} = 1\text{ J/A}^2$

Siempre utilizar la notación científica y los prefijos oportunos

Múltiplo	Prefijo	Abreviatura
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	kilo	k
10^2	hecto*	h
10^1	deca*	da
10^{-1}	deci*	d
10^{-2}	centi*	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

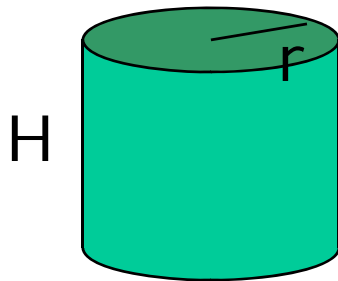
Medidas directas y medidas indirectas

- *Medida directa:*

*Directamente del aparato experimental
(metro, balanza, cronómetro, osciloscopio,
amperímetro, voltímetro, teslámetro, etc.)*

$$E_a = \text{máx}[S, \delta]$$

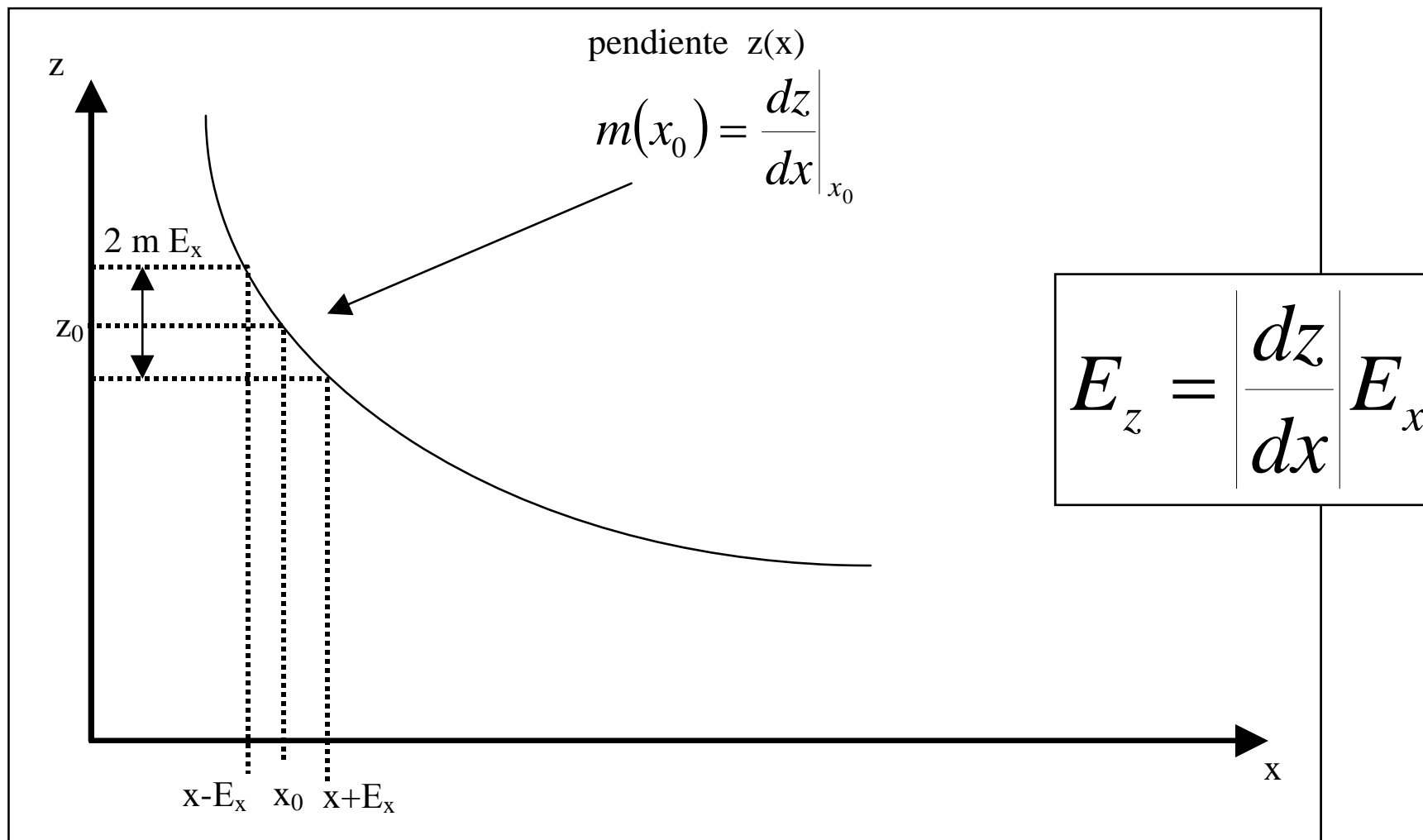
- *Medida indirecta:*



Ejemplo: Volumen cilindro

$$V = \pi r^2 h ; E_V = ?$$

Errores en medidas indirectas



Errores en medidas indirectas

Regla general:

$$z = f(a, b, c, \dots)$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial a} \cdot da + \frac{\partial f}{\partial b} \cdot db + \frac{\partial f}{\partial c} \cdot dc + \dots$$

$$E_z = \left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| \cdot E_a + \left| \frac{\partial f}{\partial b} \right| \cdot E_b + \left| \frac{\partial f}{\partial c} \right| \cdot E_c + \dots$$

$$\frac{E_z}{z} = \left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| \cdot \frac{E_a}{z} + \left| \frac{\partial f}{\partial b} \right| \cdot \frac{E_b}{z} + \left| \frac{\partial f}{\partial c} \right| \cdot \frac{E_c}{z} + \dots$$

Ejemplo: $V = \pi r^2 h$; $E_v = \left| \frac{\partial V}{\partial r} \right| E_r + \left| \frac{\partial V}{\partial h} \right| E_h$

Errores en medidas indirectas

Reglas para las 4 operaciones aritméticas:

$$A \pm E_A; B \pm E_B$$

$$E_{A \pm B} = E_A + E_B$$

$$E_{A \cdot B} = B \cdot E_A + A \cdot E_B$$

$$E_{A / B} = \frac{B \cdot E_A + A \cdot E_B}{B^2}$$

Errores en medidas indirectas

Regla práctica:

$$a \pm E_a; b \pm E_b; c \pm E_c;$$

$$G = a^m b^n c^p \dots$$

Error absoluto:

$$V = \pi r^2 H$$

$$E_V = 2\pi H r E_r + \pi r^2 E_H$$

$$\frac{E_V}{V} = 2 \frac{E_r}{r} + \frac{E_H}{H}$$

$$E_G = |m a^{m-1} b^n c^p| E_a + |n a^m b^{n-1} c^p| E_b + |p a^m b^n c^{p-1}| E_c + \dots$$

Error relativo:

$$\frac{E_G}{G} = |m| \frac{E_a}{a} + |n| \frac{E_b}{b} + |p| \frac{E_c}{c} + \dots$$

Cómo expresar los resultados: CIFRAS SIGNIFICATIVAS

- Cifra **MÁS significativa**:
la más a la IZQUIERDA que **NO SEA "0"**
- Cifra **MENOS significativa**:
 - la más a la DERECHA que **NO SEA "0"**
(si NO HAY COMA decimal)
 - la más a la DERECHA (aunque sea "0")
(si HAY COMA decimal)

Ejemplos:

3215 3215.4 3200 0.032 3200.0 18.00 0.180

+ - + - + - + - + - + - + -

¿ Cuántas cifras significativas?

En los errores:

Convenio para la expresión de los errores

- General \Rightarrow una única cifra
- Particular \Rightarrow dos cifras si:
 - la primera de ellas es un "1"
 - la primera es un "2" y la siguiente es < 5

Redondeos

- *Si la fracción truncada es > 0.5 : $+1$*
 $=$: $+1$
- *Si la fracción truncada es < 0.5 : $=$*

¿ Cuántas cifras significativas?

En los resultados:

Hasta la 1ª cifra afectada por el error

Valores incorrectos:

~~2.183~~ ± ~~0.221~~

~~5.412~~ ± ~~0.078~~

~~46.348~~ ± ~~1.142~~

~~248.163~~ ± ~~0.39~~

1540 ± 30

572.35 ± 0.045

Valores correctos:

2.18 ± 0.22

5.41 ± 0.08

46.3 ± 1.1

248.2 ± 0.3

1540 ± 30

572.35 ± 0.05

TEORÍA DE ERRORES

- Medidas experimentales
- Tipos de errores
- Expresión de los errores
- Presentación de resultados
(Tablas – Gráficas)
- Interpolación
- Método de mínimos cuadrados

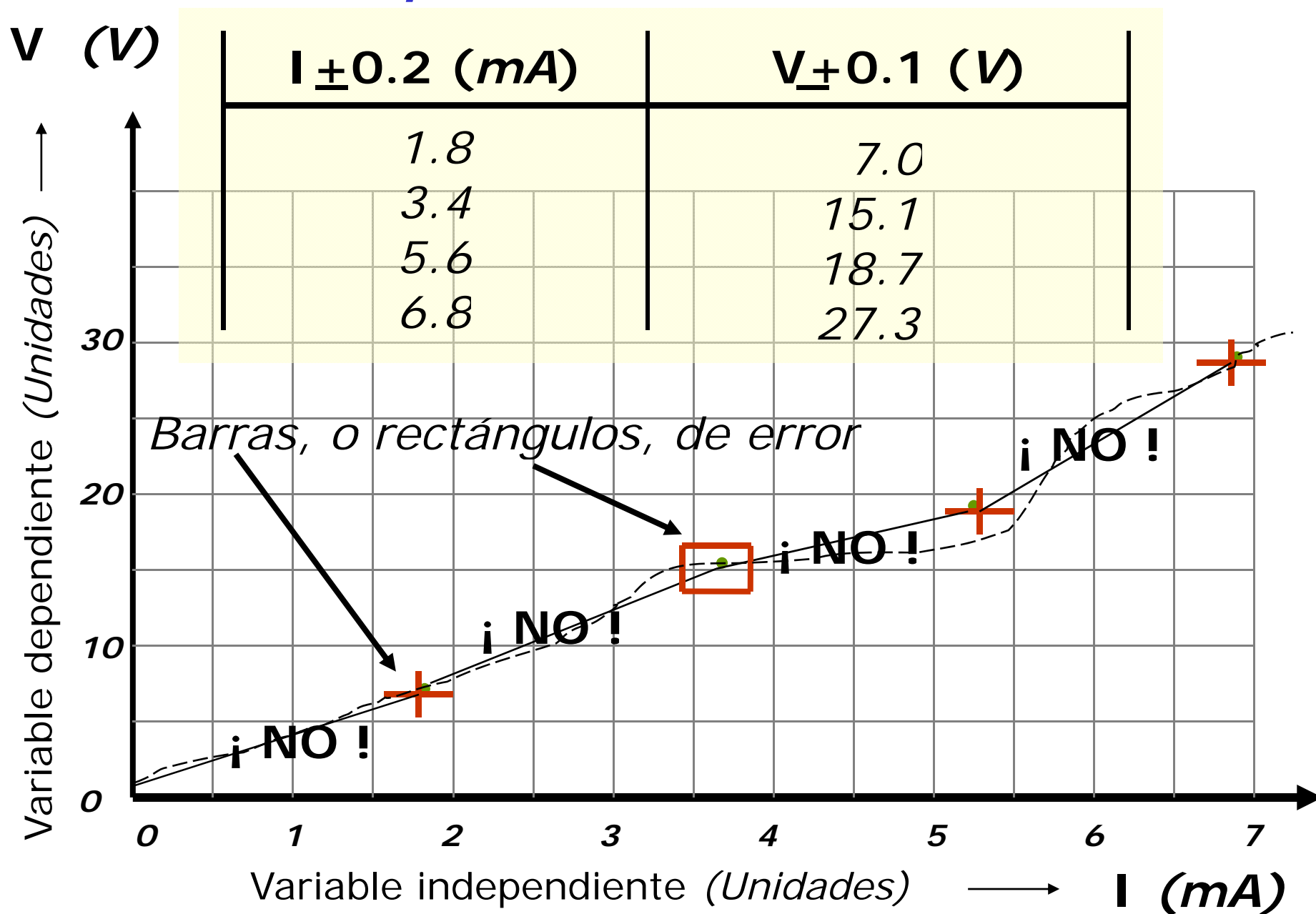
Presentación de los resultados

- *Los resultados se agrupan en TABLAS*
- *Magnitud física + Error absoluto (UNIDADES)*

$I \pm 0.2 \text{ (mA)}$	$V \pm 0.1 \text{ (V)}$
1.8	7.0
3.4	15.1
5.6	18.7
6.8	27.3

Comentario (si necesario)

Representación GRÁFICA

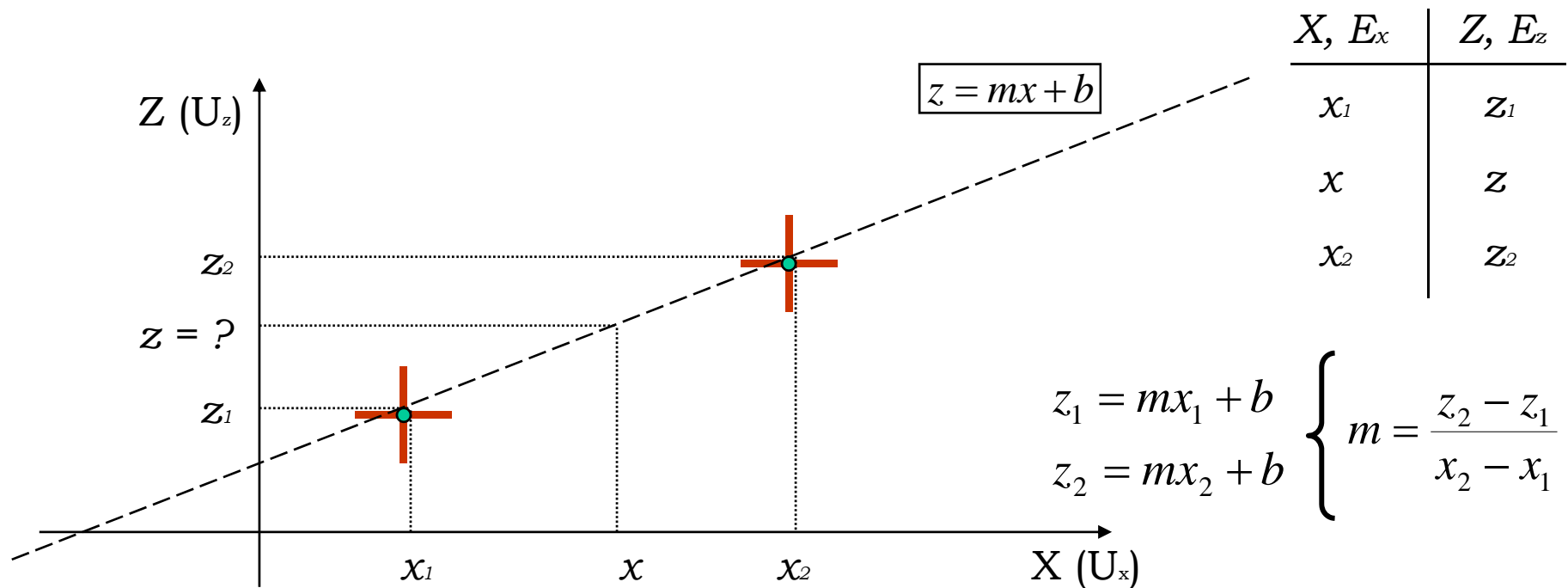


Resumiendo..., en las gráficas:

- *Papel milimetrado (no es necesario hacer las gráficas por ordenador)*
- *Magnitud física independiente + unidades:*
eje abscisas
- *Magnitud física dependiente + unidades :*
eje ordenadas
- *Elegir la escala adecuada/valores de referencia*
- *Datos experimentales + barras/rectángulos de error*
- *NO valores de datos en los ejes*
- *NO se unen puntos en la gráfica*

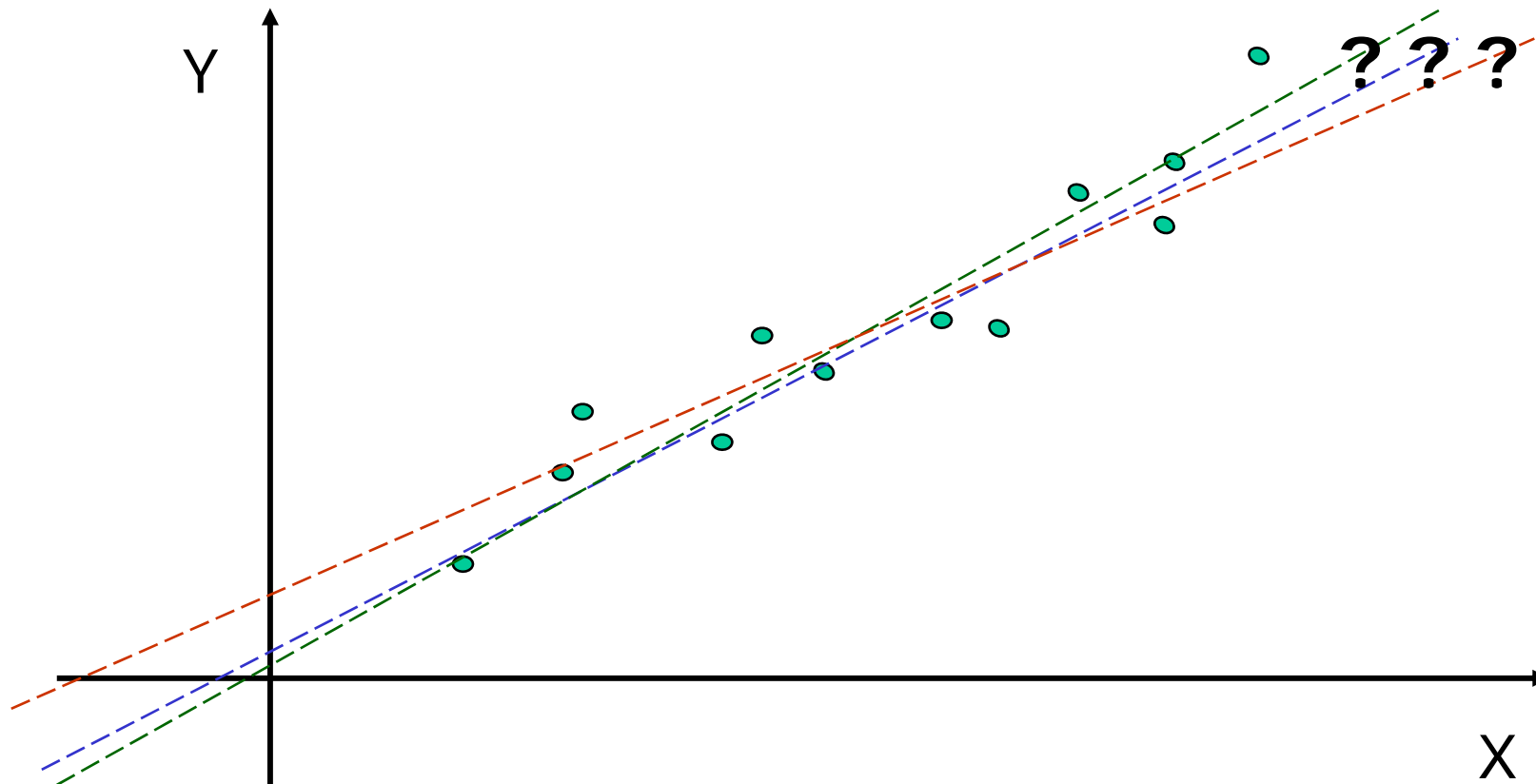
Interpolación lineal

Estimación del valor de una magnitud física "z" dependiente de "x", a partir de datos experimentales



$$z = z_1 + \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad E_z = \left(\frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} \right) E_x$$

Método de mínimos cuadrados

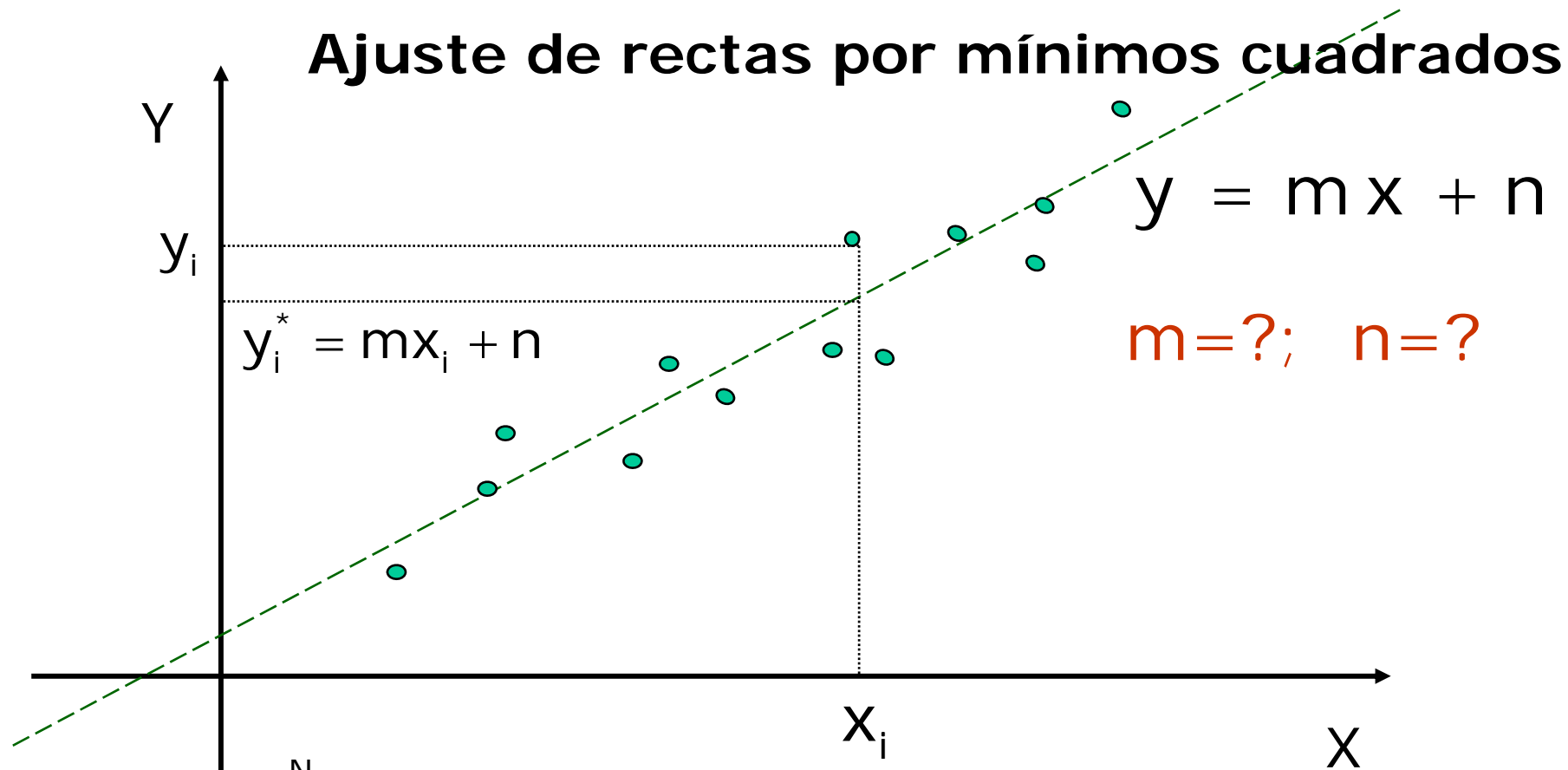


¿ Qué relación hay entre las magnitudes físicas "x" e "y" ?

Ajuste de rectas a los datos experimentales

$$y=mx+n$$

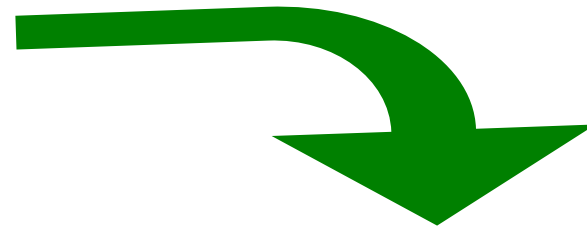
Ajuste de rectas por mínimos cuadrados



$$\sum_{i=1}^N (y_i - y_i^*)^2 \quad \text{ha de ser mínima:}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dm} \left(\sum_{i=1}^N (y_i - mx_i - n)^2 \right) &= 0 \\ \frac{d}{dn} \left(\sum_{i=1}^N (y_i - mx_i - n)^2 \right) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dm} \left(\sum_{i=1}^N (y_i - mx_i - n)^2 \right) &= 0 \\ \frac{d}{dn} \left(\sum_{i=1}^N (y_i - mx_i - n)^2 \right) &= 0 \end{aligned} \right\}$$



N medidas:

X	Y
x_1, E_{x1}	y_1, E_{y1}
\dots	\dots
x_i, E_{xi}	y_i, E_{yi}
\dots	\dots
x_N, E_{xN}	y_N, E_{yN}

$$A = \sum_{i=1}^N x_i$$

$$B = \sum_{i=1}^N y_i$$

$$C = \sum_{i=1}^N x_i^2$$

$$D = \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

$$m = \frac{ND - AB}{NC - A^2}$$

$$y = mx + n$$

$$n = \frac{CB - AD}{CN - A^2}$$

Cálculo de errores sobre “m” y “n”:

$$E_m = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C} |y'_i - 2mx_i| E_{x_i} + \sum_{i=1}^N \frac{|x_i|}{C} E_{y_i}$$

$$C = \sum_{i=1}^N x_i^2$$

$$E_n = |m| \frac{\sum_{i=1}^N E_{x_i}}{N} + \frac{\sum_{i=1}^N E_{y_i}}{N} + |\bar{x}| E_m$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N}$$

$$E_n = |m| \bar{E}_x + \bar{E}_y + |\bar{x}| E_m$$

$$\bar{E}_x = \frac{\sum_{i=1}^N E_{x_i}}{N} \quad \bar{E}_y = \frac{\sum_{i=1}^N E_{y_i}}{N}$$

Si $n \sim 0$:

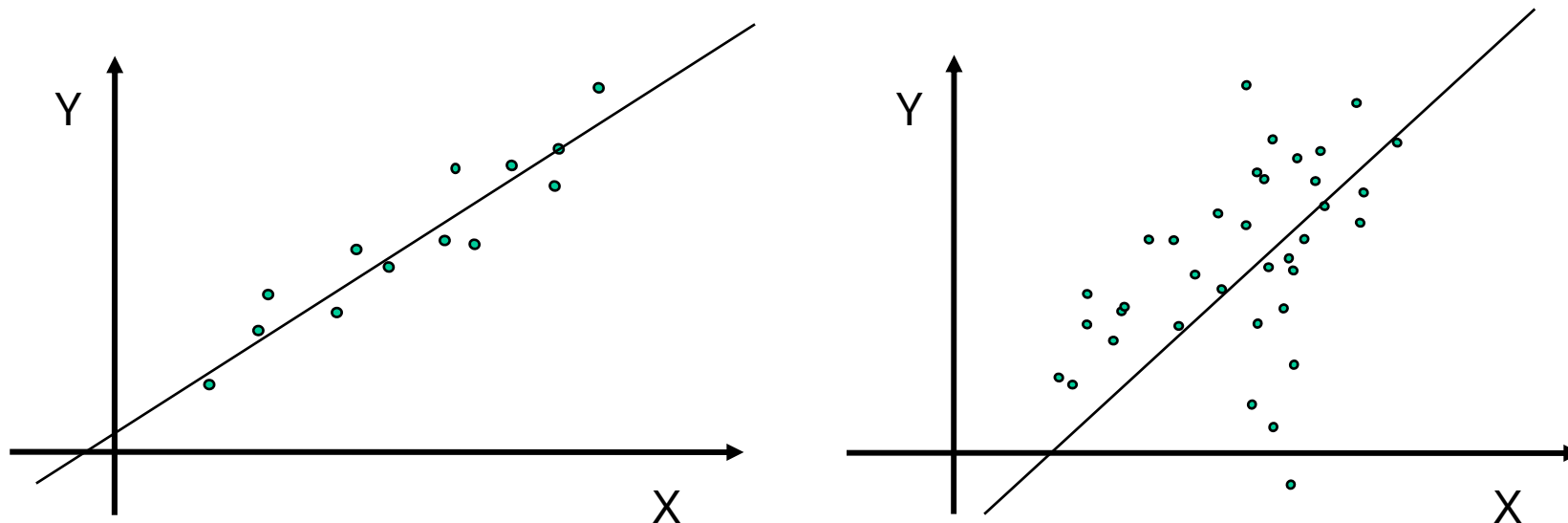
$$m = \frac{D}{C}$$

$$E_m = \frac{A}{C} (|m| \bar{E}_x + \bar{E}_y)$$

$$A = \sum_{i=1}^N x_i$$

$$D = \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

Errores iguales: $\bar{E}_x = E_x; \bar{E}_y = E_y$



¿ Como valorar la bondad de un ajuste lineal?

$$r = |m| \sqrt{\frac{NC - A^2}{NF - B^2}}$$

$$0 \leq r \leq 1$$

Coeficiente de correlación

$$A = \sum_{i=1}^N x_i$$

$$C = \sum_{i=1}^N x_i^2$$

$$B = \sum_{i=1}^N y_i$$

$$F = \sum_{i=1}^N y_i^2$$

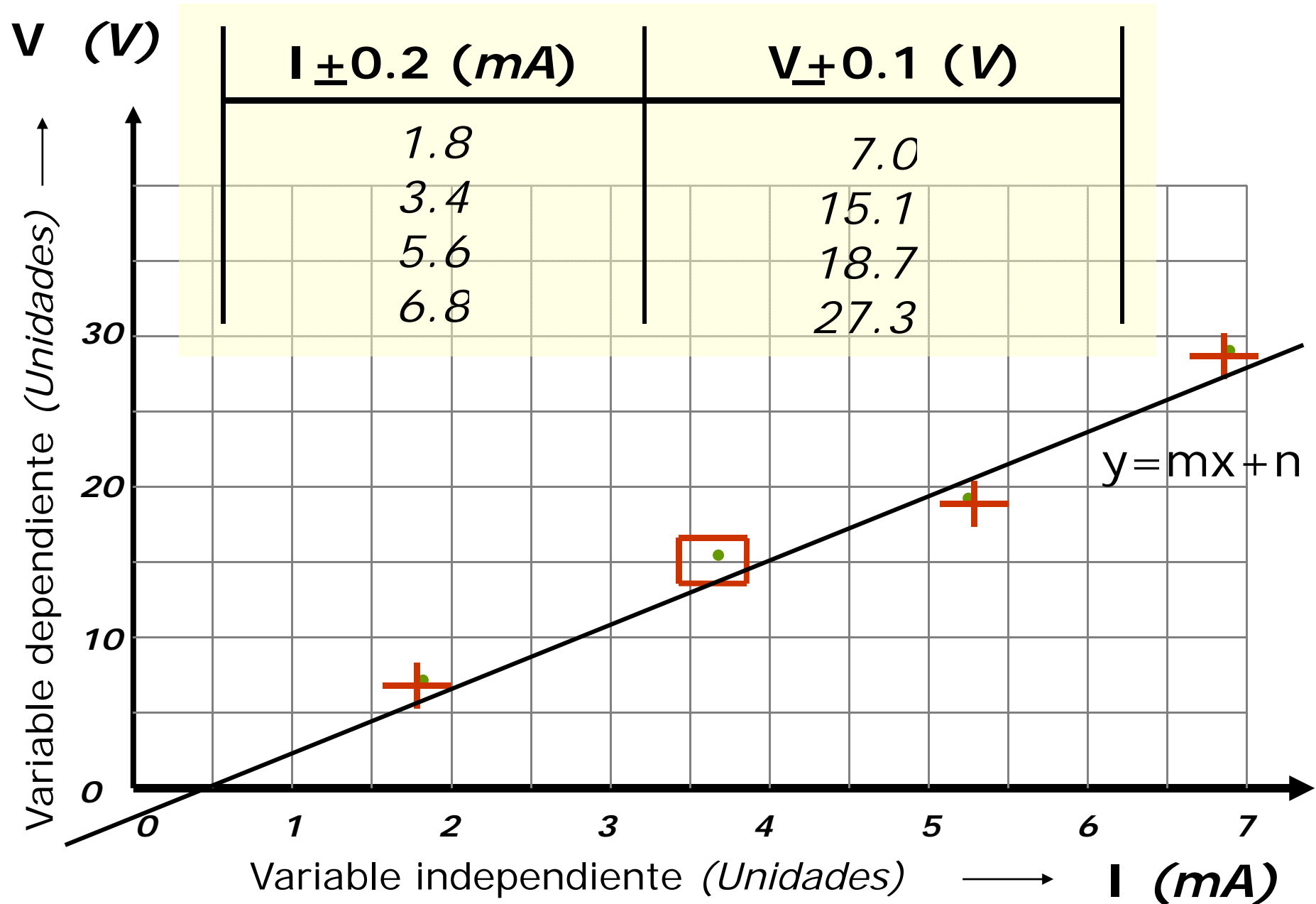
$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i^* - \bar{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y}_i)^2}$$

$$0 \leq R^2 \leq 1$$

Coeficiente de determinación

$$r = \sqrt{R^2}$$

Representación GRÁFICA



$I \pm 0,1(\text{mA})$	$V \pm 0,1(\text{V})$
1,7	5,0
3,5	10,0
5,2	15,0
6,9	20,0
8,6	25,0

N=5	$x_i=I_i$	$y_i=V_i$	$x_i^2=I_i^2$	$y_i^2=V_i^2$	$x_i y_i=I_i V_i$
	1,7	5,0	2,89	25	8,5
	3,5	10,0	12,25	100	35
	5,2	15,0	27,04	225	78
	6,9	20,0	47,61	400	138
	8,6	25,0	73,96	625	215
	A=25,9	B=75	C=163,8	F=1375	D=474,5

$$A = \sum_{i=1}^N x_i \quad B = \sum_{i=1}^N y_i \quad C = \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad F = \sum_{i=1}^N y_i^2 \quad D = \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N}$$

$$m = \frac{\sum_{i=1}^N y_i x_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2} = \frac{D}{C}$$

$$E_m = \frac{A}{C} (m |\bar{E}_x + \bar{E}_y)$$

$$V = RI \quad (y = mx; n \sim 0)$$

$$m = R = (2.9 \pm 0.2) \text{ k}\Omega$$

$$V = 2.9 I$$

$$r = |m| \sqrt{\frac{NC - A^2}{NF - B^2}}$$

$$r = 0.99993$$

Buen ajuste

Memorias de las prácticas

IDEA BÁSICA:

**UN EXPERIMENTO DEBE PODERSE REPRODUCIR
A PARTIR DE LA DESCRIPCIÓN QUE SE HAGA DEL MISMO**

1. **Encabezamiento:** *Apellidos y nombre, Nombre de la práctica, Fecha, Grupo (día y hora)*
2. **Objetivo:** *Qué se desea verificar con la práctica*
3. **Instrumentación:** *Descripción*
4. **Montaje experimental:** *Descripción*
5. **Procedimiento:** *Comentarios sobre cómo se hizo la práctica, problemas encontrados, etc.*
6. **Datos:** *En tablas, con las unidades y errores*
7. **Gráficos:** *Según las instrucciones dadas*
8. **Cálculos:** *Operaciones realizadas*
9. **Resultados y respuestas:** *Teóricos – experimentales*
10. **Conclusiones (y sugerencias)**