Capítulo 1

Problemas del Espacio Afín

1.1 Problemas resueltos

Problema 1.1: *Hállense las ecuaciones vectorial, paramétrica, continua e implícita de la recta r, a la que pertenecen los puntos $A(1,6,-3)$ y $B(0,1,9)$.*

SOLUCIÓN: La ecuación vectorial es

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB},$$

de donde

$$(x,y,z) = (1,6,-3) + \lambda(0-1, 1-6, 9+3).$$

De esta expresión obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$\begin{array}{ccccc} x & = & 1 & - & \lambda \\ y & = & 6 & - & 5\lambda \\ z & = & -3 & + & 12\lambda. \end{array}$$

Despejando λ de la ecuación anterior e igualando las tres expresiones

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-6}{-5} = \frac{z+3}{12}$$

obtenemos la ecuación continua de la recta r. Ahora igualando dos a dos las expresiones anteriores

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-6}{-5} \quad \longrightarrow \quad -5x + y - 1 = 0$$

$$\frac{y-6}{-5} = \frac{z+3}{12} \quad \longrightarrow \quad 12x + z - 9 = 0$$

□

llegamos a la ecuación implícita.

•••••••••••••••••••••••••••••••

Problema 1.2: *Hállense las coordenadas de los vértices de un paralelepípedo, sabiendo que uno de ellos es $A(6,3,-2)$ y que los lados son vectores que pertenecen a los vectores libres $\boldsymbol{a}(8,-1,6)$, $\boldsymbol{b}(7,-3,4)$ y $\boldsymbol{c}(1,0,2)$.*

Solución: La figura 1.8 nos muestra el planteamiento geométrico del problema, resultando de gran ayuda para su resolución.

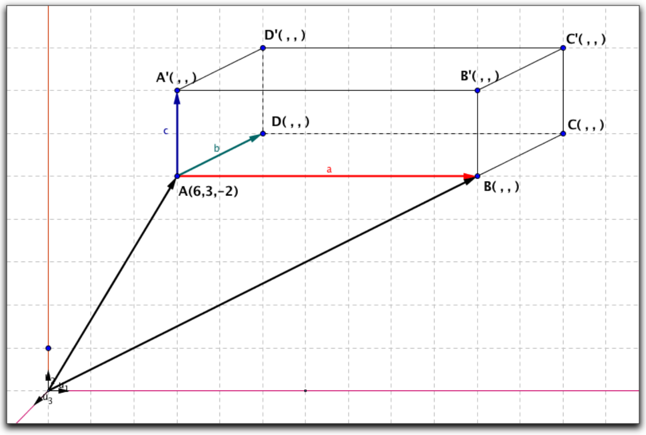


Figura 1.1: Visualización geométrica del problema.

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \boldsymbol{a},$$

$$\begin{aligned}
B &\longrightarrow \quad (x,y,z) = (6,3,-2) + (8,-1,6)\\
C &\longrightarrow \quad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \boldsymbol{b} = (21,-1,8)\\
D &\longrightarrow \quad \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \boldsymbol{b} = (13,0,2)\\
B' &\longrightarrow \quad \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB} + C = (15,2,6)\\
C' &\longrightarrow \quad \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OC} + \boldsymbol{c} = (22,-1,10)\\
A' &\longrightarrow \quad \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + \boldsymbol{c} = (7,3,0)\\
D' &\longrightarrow \quad \overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OD} + \boldsymbol{c} = (14,0,4)
\end{aligned}$$

□

●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●

Problema 1.3: *Se consideran, en el espacio afín tridimensional, los sistemas de referencia* $\mathcal{R} = \{\boldsymbol{O}, \boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3}\}$, *y* $\mathcal{R}' = \{\boldsymbol{O'}, \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ *tales que* $\boldsymbol{O'}(-1, 6, 2)$ *y* $\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{u_1} + 3\boldsymbol{u_2} + \boldsymbol{u_3}$, $\boldsymbol{v_1} = -\boldsymbol{u_1}$ *y* $\boldsymbol{v_3} = 2\boldsymbol{u_1} + 5\boldsymbol{u_2} + 7\boldsymbol{u_3}$. *Si un plano* α *tiene por ecuación*

$$2x - y + 3z - 5 = 0$$

con respecto a $\mathcal{R}$, *¿cuál es su ecuación con respecto a* $\mathcal{R}'$*?*

Solución: Obtenemos en primer lugar las ecuaciones del cambio de sistema de referencia.

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'X}$$

$$\begin{aligned} x\boldsymbol{u_1} + y\boldsymbol{u_2} + z\boldsymbol{u_3} &= -1\boldsymbol{u_1} + 6\boldsymbol{u_2} + 2\boldsymbol{u_3} + x'\boldsymbol{v_1} + y'\boldsymbol{v_2} + z'\boldsymbol{v_3} \\ &= -1\boldsymbol{u_1} + 6\boldsymbol{u_2} + 2\boldsymbol{u_3} + x'(\boldsymbol{u_1} + 3\boldsymbol{u_2} + \boldsymbol{u_3}) + \\ &+ y'(-\boldsymbol{u_1}) + z'(2\boldsymbol{u_1} + 5\boldsymbol{u_2} + 7\boldsymbol{u_3}) \end{aligned}$$

luego

$$\begin{array}{ccccccccc} x & = & -1 & + & x' & - & y' & + & 2z' \\ y & = & 6 & + & 3x' & & & + & 5z' \\ z & = & 2 & + & x' & & & + & 7z' \end{array}$$

que son las ecuaciones del cambio de sistema de referencia. Si el plano α tiene por ecuación

$$2x - y + 3z - 5 = 0$$

con respecto a $\mathcal{R}$, obtendremos su ecuación respecto de $\mathcal{R}'$ de una forma sencilla:

$$2(-1 + x' - y' + 2z') - (6 + 3x' + 5z') + 3(2 + x' + 7z') - 5 = 0,$$

es decir,

$$2x' - 2y' + 20z' - 7 = 0. \qquad \square$$

Problema 1.4: *Hállese la ecuación del plano que pasa por la recta*

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = z$$

y por el punto $P(-1, -2, 5)$.

SOLUCIÓN: El plano que buscamos, π, será uno de los infinitos planos que pasan por la recta r, recta que podemos escribir mediante sus ecuación implícita, es decir, expresamos r como la intersección de dos planos, α y β. En estas condiciones, el plano π será el plano del haz de planos que tiene de arista r que pasa por P.

Así, en primer lugar, obtenemos la ecuación implícita de r.

$$\frac{x-1}{3} = z \quad \longrightarrow \quad x - 3z - 1 = 0$$

$$\frac{y+2}{-1} = z \quad \longrightarrow \quad y + z + 2 = 0$$

Ahora hallamos el haz de planos de arista r, que viene dado por

$$(x - 3z - 1) + \lambda(y + z + 2) = 0.$$

El siguiente paso es hacer que el punto P verifique la ecuación del haz, con lo que

$$(-1 - 3 \cdot 5 - 1) + \lambda(-2 + 5 + 2) = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda = \frac{17}{5}.$$

En consecuencia, el plano que nos piden es

$$(x - 3z - 1) + \frac{17}{5}(y + z + 2) = 0.$$

$$5x + 17y + 2z + 29 = 0.$$

□

• •

Problema 1.5: *Hállese el plano π que pasa por la intersección de los planos*

$$\begin{array}{rccccccccc} \alpha \equiv & x & - & y & - & z & + & 3 & = & 0 \\ \beta \equiv & x & + & 2y & - & 3z & + & 5 & = & 0 \end{array}$$

y es paralelo a la recta

$$r \equiv \frac{x-5}{8} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{2}.$$

Solución: Consideremos s la recta intersección de los planos α y β. Para obtener el plano π que nos piden necesitamos un punto y dos vectores directores libres. El punto, por ejemplo, P puede ser cualquier punto de la recta intersección de los planos; un vector director puede ser el propio de la recta s y el otro vector director lo obtenemos de r, que es paralela al plano.

Las ecuaciones α y β pueden considerarse como las ecuaciones implícitas de la recta s, que vamos a escribir en paramétricas, puesto que así conoceremos su vector director $\boldsymbol{w}$ y uno de sus puntos P.

Resolvamos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & - & z & = & -3 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & -5 \end{array} \right.$$

Como

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} = 2 = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

el sistema es compatible indeterminado. Como

$$| \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} | \neq 0,$$

calculamos x e y en función de z:

$$\left. \begin{array}{ccccccc} x & - & y & = & -3 & + & z \\ x & + & 2y & = & -5 & + & 3z \end{array} \right\} \longrightarrow \left. \begin{array}{ccc} x & = & \dfrac{11-5z}{-3} \\ y & = & \dfrac{2-2z}{-3} \end{array} \right\}$$

Tomando $z = \lambda$, obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta s

$$\left.\begin{array}{lcccl} x & = & \dfrac{11}{-3} & + & \dfrac{5}{3}\lambda \\ y & = & \dfrac{-2}{3} & + & \dfrac{2}{3}\lambda \\ z & = & 0 & + & \lambda \end{array}\right\}$$

luego podemos tomar como punto P el punto de coordenadas $(-\frac{11}{3}, -\frac{2}{3}, 0)$ y como vector director de s el vector $(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 1)$, o bien, $\boldsymbol{w}(5, 2, 3)$.

Resumiendo, tenemos que calcular el plano que pasa por $P(-\frac{11}{3}, -\frac{2}{3}, 0)$ y tiene como vectores directores $\boldsymbol{w}(5, 2, 3)$ y $\boldsymbol{v}(8, -3, 2)$ (vector director de la recta r).

La ecuación vectorial del plano π es

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \boldsymbol{v} + \mu \boldsymbol{w}$$

$$(x, y, z) = (-\frac{11}{3}, -\frac{2}{3}, 0) + \lambda(8, -3, 2) + \mu(5, 2, 3),$$

luego

$$\left.\begin{array}{lcccccc} x & = & -\frac{11}{3} & + & 8\lambda & + & 5\mu \\ y & = & -\frac{2}{3} & - & 3\lambda & + & 2\mu \\ z & = & 0 & + & 2\lambda & + & 3\mu \end{array}\right\} \qquad \square$$

que son las ecuaciones paramétricas de π.

●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●

Problema 1.6: *Estúdiese la posición relativa de los planos*

$$\begin{array}{rcccccccccc} \alpha \equiv & 5x & - & y & - & 3z & + & 2 & = & 0 \\ \beta \equiv & 15x & - & 3y & - & 9z & + & 6 & = & 0. \end{array}$$

SOLUCIÓN: Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 5x & - & y & - & 3z & = & -2 \\ 15x & - & 3y & - & 9z & = & -6. \end{array} \right.$$

Como

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 15 & -3 & -9 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 5 & -1 & -3 & -2 \\ 15 & -3 & -9 & -6 \end{bmatrix} = 1 \qquad \square$$

el sistema es compatible indeterminado; ambas filas son proporcionales, por lo que ambos planos son coincidentes.

• •

Problema 1.7: *Se considera el plano*

$$\alpha \equiv \quad x \quad - \quad y \quad - \quad az \quad + \quad 5 \quad = \quad 0$$

y la recta

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z}{2}.$$

Calcúlese el valor de a para que el plano y la recta sean paralelos.

SOLUCIÓN: Escribamos la ecuación implícita de la recta r:

$$\left.\begin{array}{ccccc} \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{-5} & \longrightarrow & -5(x-2) = 3y & \longrightarrow & -5x - 3y + 10 = 0 \\ \dfrac{y}{-5} = \dfrac{z}{2} & \longrightarrow & 2y = -5z & \longrightarrow & 2y + 5z = 0 \end{array}\right\}$$

Consideremos el sistema

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & - & y & - & az & = & -5 \\ -5x & - & 3y & & & = & -10 \\ & & 2y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Para que el plano y la recta sean paralelos el sistema debe ser incompatible, luego se ha de verificar que

$$\text{rango}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -a \\ -5 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \neq \text{rango}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -a & -5 \\ -5 & -3 & 0 & -10 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} = 3.$$

Por tanto,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -a \\ -5 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

es decir,

$$-40 + 10a = 0 \quad \longrightarrow \quad -4 + a = 0,$$

$\square$

de donde $a = 4$.

• •

Problema 1.8: *Estúdiese la posición relativa de los planos*

$$\begin{array}{rcccccccccc} \alpha \equiv & x & + & y & - & z & + & 5 & = & 0 \\ \beta \equiv & 3x & - & 3y & + & 4z & - & 3 & = & 0 \\ \gamma \equiv & 2x & + & 2y & - & 2z & + & 9 & = & 0 \end{array}$$

Solución: Consideramos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & -5 \\ 3x & - & 3y & + & 4z & = & 3 \\ 2x & + & 2y & - & 2z & = & -9 \end{array} \right.$$

siendo

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad M^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -5 \\ 3 & -3 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & -9 \end{bmatrix}.$$

Se puede comprobar fácilmente que $|M| = 0$ y que $\text{rango}(M) = 2$. Para estudiar el rango de la matriz M^* calculamos los menores de orden tres.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & -9 \end{vmatrix} = -6 \neq 0, \quad \Rightarrow \quad \text{rango}(M^*) = 3.$$

luego el sistema es incompatible, es decir, que los tres planos no tienen ningún punto en común.

Ahora consideramos los planos dos a dos para estudiar su posición. Tomemos α y β.

$$\begin{array}{rcccccccccc} \alpha : & x & + & y & - & z & + & 5 & = & 0 \\ \beta : & 3x & - & 3y & + & 4z & - & 3 & = & 0 \end{array}$$

Puesto que

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -5 \\ 3 & -3 & 4 & 3 \end{bmatrix} = 2.$$

el sistema es compatible indeterminado y los planos se cortan de acuerdo con una recta.

Tomemos α y γ.

$$\begin{array}{rcccccccccc} \alpha: & x & + & y & - & z & + & 5 & = & 0 \\ \gamma: & 2x & + & 2y & - & 2z & + & 9 & = & 0 \end{array}$$

Puesto que

$$\operatorname{rango}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} = 1 \neq \operatorname{rango}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -5 \\ 2 & 2 & -2 & -9 \end{bmatrix} = 2,$$

el sistema es incompatible, luego ambos planos son paralelos.

Por último, tomamos β y γ.

$$\begin{array}{rcccccccccc} \beta: & 3x & - & 3y & + & 4z & - & 3 & = & 0 \\ \gamma: & 2x & + & 2y & - & 2z & + & 9 & = & 0 \end{array}$$

Puesto que

$$\operatorname{rango}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} = 2 = \operatorname{rango}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & -9 \end{bmatrix}, \qquad \square$$

el sistema es compatible indeterminado, luego ambos planos se cortan en una recta.

Resumiendo lo estudiado hasta ahora, se trata de dos planos paralelos, α y γ, cortados por un tercer plano, que es β.

• •

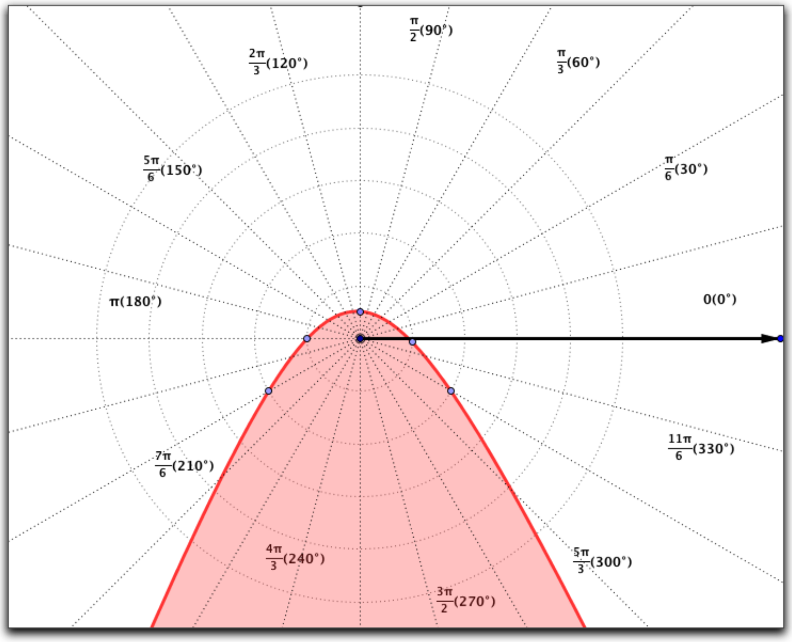
Problema 1.9: *Dibujar la gráfica de ecuación*

$$r = \frac{1}{1 + \operatorname{sen}\theta}.$$

Solución: Para representar gráficamente esta función asignamos ciertos valores para θ, variando desde 0 hasta π, y calculamos el valor de r. Con esto construimos una tabla con los valores de r y θ, (véase la tabla del cuadro **??**).

Cuadro 1.1: Valores de r y θ.

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
r	1	0,5	1	2,0	3,4	3,4	2



□

Figura 1.2: Gráfica en polares.

En la gráfica de esta función no se han utilizado valores entre π y 2π y el resultado se muestra en la figura 1.2. La gráfica que muestra la figura 1.2 es la de una parábola.

1.2 Problemas propuestos

Problema 1.10: *Dados los puntos $A(0,0,7)$, $B(2,3,5)$ y $C(4,-3,2)$, hállense las ecuaciones paramétricas del plano al que pertenecen dichos puntos. Tomando en dicho plano el sistema de referencia de origen A y la base vectorial formada por $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{AC}$, hállese en este sistema:*

(a) *Coordenadas de los puntos A, B, C, así como las coordenadas del cuarto vértice del paralelogramo $ABCD$.*

(b) *Ecuaciones vectorial y cartesiana de los lados del paralelogramo de vértices B y C y centro D.*

SOLUCIÓN: En primer lugar calculamos el plano que determinan estos tres puntos.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= B - A = (2,3,5) - (0,0,7) = (2,3,-2) \\ \overrightarrow{AC} &= C - A = (4,-3,2) - (0,0,7) = (4,-3,-5) \end{aligned}$$

Luego la ecuación del plano es

$$\overrightarrow{OX} = A + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC},$$

es decir,

$$(x,y,z) = (0,0,7) + \lambda(2,3,-2) + \mu(4,-3,-5).$$

Por consiguiente, las ecuaciones paramétricas son:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x &=& & & 2\lambda &+& 4\mu \\ y &=& & & 3\lambda &-& 3\mu \\ z &=& 7 &-& 2\lambda &-& 5\mu \end{array}\right\}$$

(a) Nos piden las coordenadas de los puntos A, B, C y las del punto D que forma un paralelogramo con los puntos anteriores.
Hemos construido el plano a partir de un punto A y dos vectores directores $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{AC}$. Además, el punto origen del nuevo sistema de referencia es A y los vectores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ forman una base de vectores del plano. Podemos visualizar geométricamente este problema por medio de la figura 1.3.
A la vista de la figura 1.3 podemos determinar fácilmente las coordenadas de los puntos en el nuevo sistema de referencia, ya que en el paralelogramo que formamos, las coordenadas del punto B coinciden con las del vector $\boldsymbol{u}$ y las del punto C con las del

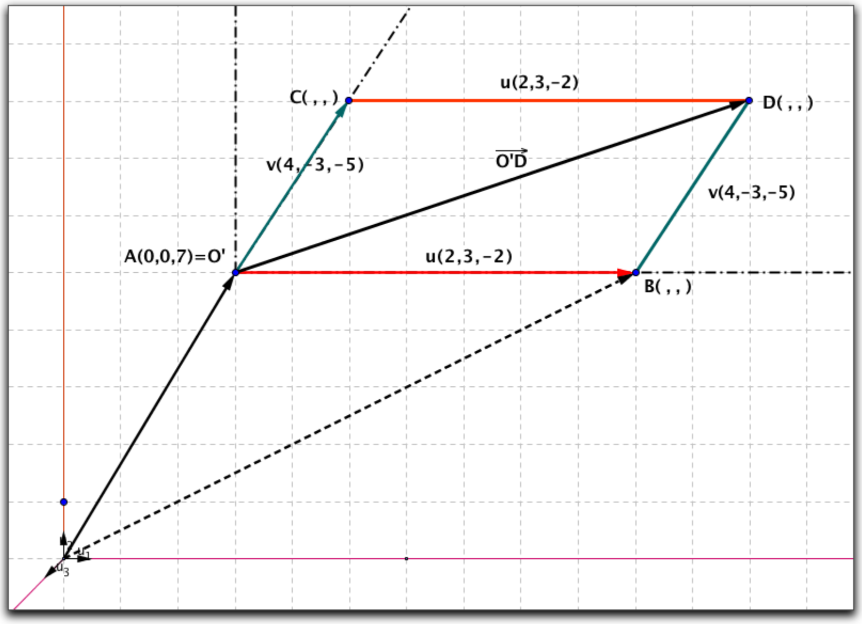


Figura 1.3: Paralelogramo

vector $\boldsymbol{v}$. Además, es fácil darse cuenta que la suma de los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ constituyen las coordenadas del punto D. Así

$$\begin{aligned}
\text{Coordenadas de}A &= (0,0,0)\\
\text{Coordenadas de}B &= (2,3,-2)\\
\text{Coordenadas de}C &= (4,-3,-5)\\
\text{Coordenadas de}D &= \overrightarrow{AD} = \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = (2,3,-2)+(4,-3,-5) = (6,0,-7)
\end{aligned}$$

(b) Ahora, para construir el paralelogramo que nos piden, volvemos a construir una figura geométrica representando el problema.
Observando con detenidmiento podemos darnos cuenta que los vértices B y C ya están determinados, por lo que únicamente nos queda por determinar explícitamente los vértices B' y C'. La forma de determinarlos es fijándonos en las relaciones que se desprenden de la figura, ya que se observa que si D es el centro, entonces el segmento DB' del paralelogramo coincide con el segmento CD, que no es más que el vector $\boldsymbol{u}$. Por otra parte, observando nuevamente la figura, se tiene que el segmento DC' del paralelogramo coincide con el segmento BD, que es el vector $\boldsymbol{v}$. En consecuencia, se

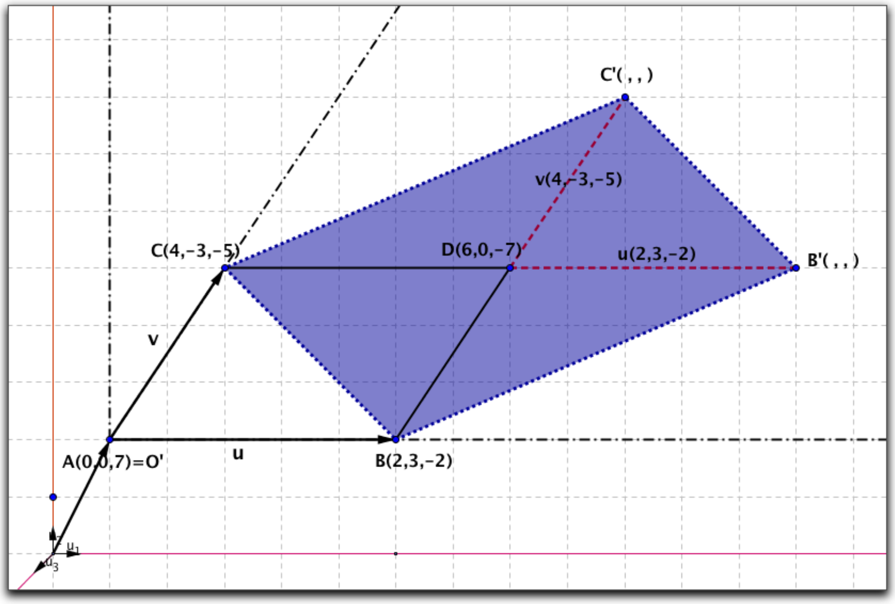


Figura 1.4: Paralelogramo de centro D.

puede escribir que:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O'B'} &= \overrightarrow{O'D} + \boldsymbol{u} = (8,3,-9) \\ \overrightarrow{O'C'} &= \overrightarrow{O'D} + \boldsymbol{v} = (10,-3,-12) \end{aligned} \qquad \square$$

Una vez calculados los puntos del paralelogramo es muy sencillo obtener las ecuaiones de las rectas que forman sus lados.

• •

Problema 1.11: *Se consideran los sistemas de referencia* $\mathcal{R} = \{\boldsymbol{O}, \boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3}\}$ *y* $\mathcal{R}' = \{\boldsymbol{O}, \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ *tales que* $O'(1, 3, -2)$ *y*

$$\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{u_2}, \qquad \boldsymbol{v_2} = 5\boldsymbol{u_1} + 6\boldsymbol{u_2} + 7\boldsymbol{u_3}, \qquad \boldsymbol{v_3} = -\boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{u_2} + 9\boldsymbol{u_3}.$$

Hállense las ecuaciones del cambio de sistema de referencia.

Solución: Tenemos el gráfico donde se muestra el cambio de sistema de referencia.

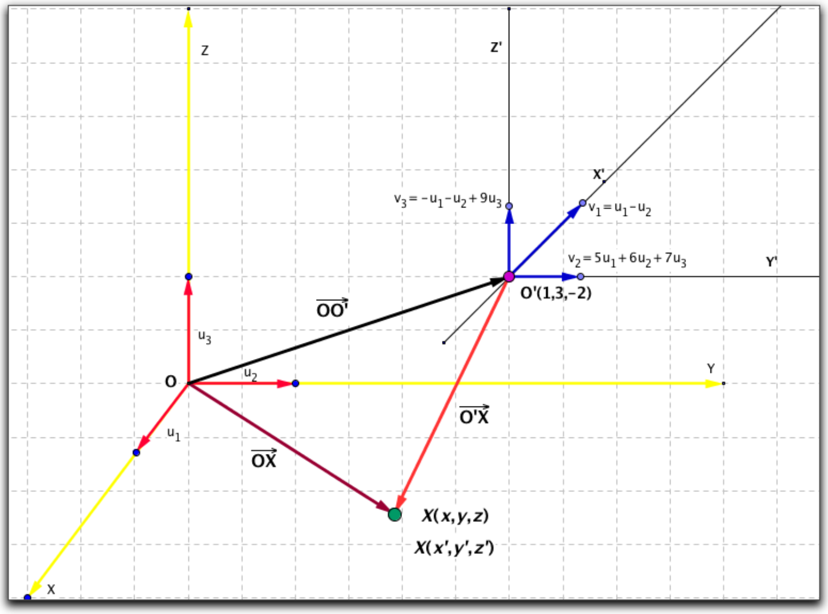


Figura 1.5: Cambio de sistema de referencia.

Por la relación de Chasles, se verifica que

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'X}.$$

Pero

$$\begin{aligned} \boldsymbol{OX} &= x\boldsymbol{u_1} + y\boldsymbol{u_2} + z\boldsymbol{u_3} \\ \boldsymbol{OO'} &= 1\boldsymbol{u_1} + 3\boldsymbol{u_2} - 2\boldsymbol{u_3} \\ \boldsymbol{O'X} &= x'\boldsymbol{v_1} + y'\boldsymbol{v_2} + z'\boldsymbol{v_3} \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} x\boldsymbol{u_1} + y\boldsymbol{u_2} + z\boldsymbol{u_3} &= 1\boldsymbol{u_1} + 3\boldsymbol{u_2} - 2\boldsymbol{u_3} + \\ &+ x'(\boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{u_2} + y'(5\boldsymbol{u_1} + 6\boldsymbol{u_2} + 7\boldsymbol{u_3}) + z'(-\boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{u_2} + 9\boldsymbol{u_3}) \\ &= (1 + x' + 5y' - z')\boldsymbol{u_1} + (3 - x' + 6y' - z')\boldsymbol{u_2} + (-2 + 7y' + 9z')\boldsymbol{u_3} \end{aligned}$$

Ahora igualando los coeficientes podemos escribir

$$\begin{aligned} x &= 1 + x' + 5y' - z' \\ y &= 3 - x' + 6y' - z' \\ z &= -2 \qquad + 7y' + 9z' \end{aligned}$$

que representan las ecuaciones del cambio de sistema de referencia. Pueden escribirse matricialmente de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x' & y' & z' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & 9 \end{bmatrix}.$$

□

••••••••••••••••••••••••••••••••

Problema 1.12: *Hállese la ecuación del plano que pasa por $P(2,1,-1)$ y $Q(-3,0,2)$ y es perpendicular al plano que proyecta ortogonalmente la recta PQ sobre el plano $z=0$.*

SOLUCIÓN: En primer lugar calculamos el plano que proyecta ortogonalmente la recta PQ sobre el plano $z=0$.

Este plano pasa por $P(2,1,-1)$ y tiene a $\overrightarrow{PQ}(-5,-1,3)$ y $\boldsymbol{u}(0,0,1)$ como vectores directores por lo que su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ -5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x+5y-3=0.$$

El plano que nos piden pasa por P, tiene a $\overrightarrow{PQ}$ como vector director y es perpendicular al plano calculado anteriormente, por lo que tenemos otro vector director del mismo, que es $\boldsymbol{v}(-1,5,0)$. Con estos datos, ya podemos calcularlo, como es

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ -5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 15x+3y+26z-7=0.$$

□

•••••••••••••••••••••••••••••••

Problema 1.13: *Determínese la posición relativa de los planos*

$$\begin{aligned} \alpha \equiv &\quad 3x - y - 2z = 1 \\ \beta \equiv &\quad x + 4y + z = b \\ \gamma \equiv &\quad 2x - 5y + az = -2 \end{aligned}$$

en función de los parámetros a y b.

SOLUCIÓN: Consideremos las matrices asociadas al sistema formado por las tres ecuaciones:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{bmatrix} \qquad M^* \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & b \\ 2 & -5 & a & -2 \end{bmatrix}$$

y hacemos un estudio de los rangos.

En primer lugar calculamos el rango de M.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{vmatrix} = 12a - 2 + 10 + 16 + 15 + a = 13a + 39$$

Entonces, podemos establecer que

$$\begin{cases} a = -3 & \text{rango de M } = 2, \\ a \neq -3 & \text{rango de M } = 3 \end{cases}$$

Ahora, supongamos que $rg(M) = 2$ y vamos a calcular el rango de M^*.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & b \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -24 - 2b - 5 - 81 + 15b - 2 = 13b - 39.$$

Entonces, podemos establecer que

$$\begin{cases} b = 3 & \text{rango de} M^* = 2, \\ b \neq 3 & \text{rango de } M^* = 3 \end{cases}$$

Por tanto, ya tenemos los siguientes casos:

(a) Si $a = -3$ y $b = 3$ entonces $rg(M) = rg(M^*) = 2$.
En este caso tenemos un sistema compatible indeterminado con un grado de indeterminación. Los tres planos se cortan en una recta ya que no hay dos planos que sean coincidentes. La recta la podemos obtener tomando las dos primeras ecuaciones (ecuación implícita de la recta).

(b) Si $a = -3$ y $b \neq 3$ entonces $rg(M) = 2 \neq rg(M^*) = 3$.
En este caso, el sistema es incompatible. Veamos lo que sucede con los planos analizando los tres sistemas de dos ecuaciones con tres incógnitas que se pueden extraer del inicial.

$$\left.\begin{array}{rcr} 3x - y + 2z & = & 1 \\ x + 4y + z & = & b \end{array}\right\}$$

Este sistema tiene rango 2, por lo que los planos se cortan en una recta.

$$\left.\begin{array}{rcr} 3x - y + 2z & = & 1 \\ 2x - 5y + z & = & -2 \end{array}\right\}$$

Este sistema tiene rango 2, por lo que los planos se cortan en una recta.

$$\left.\begin{array}{rcr} x + 4y + z & = & b \\ 2x - 5y + z & = & -2 \end{array}\right\}$$

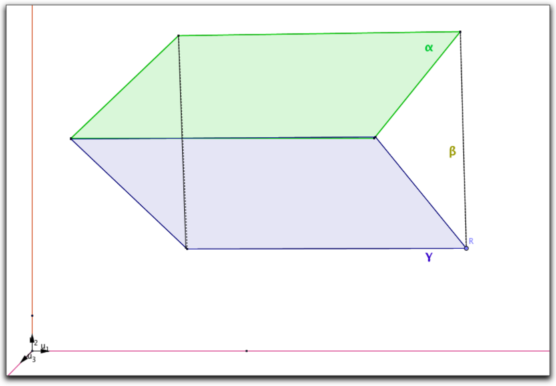


Figura 1.6: Paralelogramo de centro D.

Este sistema tiene rango 2, por lo que los planos se cortan en una recta. En este caso, los tres planos se cortan dos a dos en tres rectas paralelas formando una superficie prismática, como se aprecia en la figura 1.6.

(c) Si $a \neq -3$ entonces $rg(M) = rg(M^*) = 3$. Esto significa que el sistema es compatible determinado con una única solución, que es el punto de intersección de los tres planos. Ya sólo queda resolver el sistema por el método que queramos. Utilizando el método de Cramer,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ b & 4 & 1 \\ -2 & -5 & a \end{vmatrix} = 4a + 10b + ab + 23 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4a + 10b + ab + 23}{13a - 39}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & b & 1 \\ 2 & -2 & a \end{vmatrix} = -a - 4b + 3ab + 4 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-a - 4b + 3ab + 4}{13a - 39}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & b \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 13b - 39 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{13b - 39}{13a - 39}$$

□

●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●

Problema 1.14: *Dada la recta*

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x & = & & - & 3\lambda \\ y & = & 2 & + & 2\lambda \\ z & = & 1 & - & \lambda \end{array}\right\}$$

determínese la ecuación del haz de planos de arista r.

SOLUCIÓN: El primer paso en la resolución del problema es transformar la ecuación de la recta, que está en forma paramétrica, a la forma implícita.

Despejando λ de la ecuación paramétrica, se tiene que

$$\lambda = \frac{x}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

Ahora tomemos en la igualdad anterior las igualdades primera y segunda y primera y tercera, respectivamente.

$$\frac{x}{-3} = \frac{y-2}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x + 3y - 6 = 0$$

$$\frac{x}{-3} = \frac{z-1}{-1} \quad \Rightarrow \quad -x + 3z - 3 = 0$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta es

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x + 3y - 6 & = & 0 \\ -x + 3z - 3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Ahora podemos escribir la ecuación del haz pedido, que es

$$2x + 3y - 6 + \lambda(-x + 3z - 3) = 0.$$

□

●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●

Problema 1.15: *Determínese la posición relativa de las rectas r y r' respecto al plano π, siendo*

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z+3}{2}, \quad r \equiv \frac{x-7}{6} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1}{5},$$

$$\pi \equiv x + 2y + 4z - 13 = 0.$$

SOLUCIÓN: En primer lugar transformamos las ecuaciones de r y r' a la forma implícita (como en el ejercicio anterior), resultando

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} 5x + 2y + 5 & = & 0 \\ x - \quad z - 4 & = & 0 \end{array} \right\}, \quad r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x + 3y + 2 & = & 0 \\ 5x - 6z - 29 & = & 0 \end{array} \right\}$$

(a) En primer lugar estudiamos la posición relativa de r y π.
Para ese estudio basta con resolver el sistema formado por las ecuaciones

$$\left. \begin{array}{rcl} 5x + 2y & = & -5 \\ x - z & = & 4 \\ x + 2y + 4z & = & 13 \end{array} \right\}$$

Llamando

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad M^* \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 13 \end{bmatrix}$$

se puede demostrar que $rg(M) = 2 \neq rg(M^*) = 3$, por lo que la recta y el plano son paralelos.

(b) Estudiamos ahora la posición relativa de r' y π. Para ese estudio basta con resolver el sistema formado por las ecuaciones

$$\left. \begin{array}{rcl} x + 3y & = & -2 \\ 5x - 6z & = & 29 \\ x + 2y + 4z & = & 13 \end{array} \right\}$$

Llamando

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & -6 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad M^* \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & -6 & 29 \\ 1 & 2 & 4 & 13 \end{bmatrix}$$

se puede demostrar que $rg(M) = rg(M^*) = 3$, por lo que se cortan en un punto, que es la solución del sistema de ecuaciones. Esta solución es: $P\left(\frac{101}{11}, -\frac{41}{11}, \frac{31}{11}\right)$.

(c) Estudiamos la posición relativa de r y r'.
Finalmente estudiamos el sistema formado por las cuatro ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcl} 5x+2y &=& -5 \\ x-z &=& 4 \\ x+3y &=& -2 \\ 5x-6z &=& 29 \end{array}\right\}$$

Igual que en los casos anteriores, llamamos

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad M^* \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & -6 & 29 \end{bmatrix}$$ □

En este caso, calculando los rangos, se tiene que $rg(M) = 3 \neq rg(M^*) = 4$, luego las rectas se cruzan.

••••••••••••••••••••••••••••••

Problema 1.16: *Un segmento de recta AM de longitud constante se mueve, apoyándose sus extremos en los semiejes X e Y positivos. Hállese el lugar geométrico de la proyección del origen sobre este segmento.*

SOLUCIÓN: Podemos representar geométricamente lo que el problema nos propone por medio de la figura 1.7.

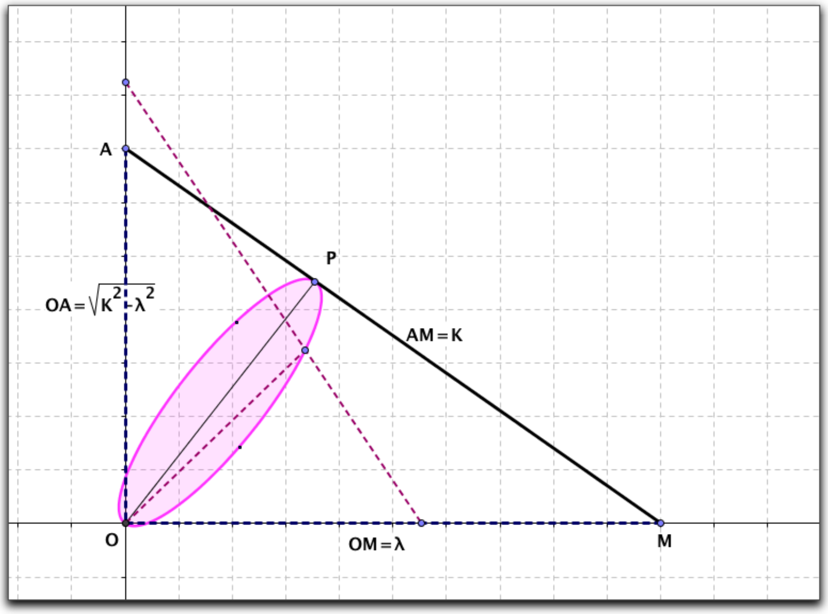


Figura 1.7: Segmento sobre los ejes X e Y.

Llamaremos, de acuerdo con el gráfico construido, $AM = K$ y $OM = \lambda$.

En primer lugar construimos la recta que pasa por A y M.

La recta viene dada por la ecuación

$$\frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\sqrt{K^2 - \lambda^2}} = 1.$$

La ecuación de la recta OP, perpendicular a AM es

$$y = \frac{\lambda}{\sqrt{K^2 - \lambda^2}} x.$$

El lugar geométrico viene dado por los puntos $P(x, y)$ intersección de las rectas AM y

OP, es decir

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\lambda} + \dfrac{y}{\sqrt{K^2-\lambda^2}} = 1 \\ y = \dfrac{\lambda}{\sqrt{K^2-\lambda^2}}x \end{cases}$$

Ahora vamos a manipular estas ecuaciones para determinar la ecuación que siguen los puntos $P(x, y)$ intersección de estas rectas. En primer lugar, despejamos λ de las escuaciones. Para ello hacemos

$$\frac{y}{\sqrt{K^2-\lambda^2}} = 1 - \frac{x}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{\sqrt{K^2-\lambda^2}} = \frac{\lambda - x}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\sqrt{K^2-\lambda^2}}{\lambda}(\lambda - x)$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{\sqrt{K^2-\lambda^2}}{\lambda}(\lambda - x) \\ y = \dfrac{\lambda}{\sqrt{K^2-\lambda^2}}x \end{cases}$$

Entonces

$$y^2 = \frac{\sqrt{K^2-\lambda^2}}{\lambda}(\lambda - x)\frac{\lambda}{\sqrt{K^2-\lambda^2}}x \Rightarrow y^2 = \lambda x - x^2.$$

Ahora despejamos λ como

$$\lambda = \frac{y^2 + x^2}{x}.$$

Ahora sustituimos λ en la ecuación de y:

$$y = \frac{\frac{y^2+x^2}{x}x}{\sqrt{k^2 - \left(\frac{y^2+x^2}{x}\right)^2}} = \frac{y^2+x^2}{\sqrt{k^2 - \left(\frac{y^2+x^2}{x}\right)^2}}.$$

Multiplicando

$$y\sqrt{k^2 - \left(\frac{y^2+x^2}{x}\right)^2} = y^2 + x^2$$

luego

$$y\sqrt{K^2x^2 - (y^2+x^2)^2} = x(y^2+x^2).$$

□

• •

Problema 1.17: *Estúdiese la posición relativa de los planos siguientes*

$$\alpha \equiv x - y + (p-q)z - 4 = 0$$

$$\beta \equiv x - 2y + (p-2q)z - 5 = 0$$

$$\gamma \equiv x + y + (p+q)z - 6 = 0$$

y especifica cuál es la figura geométrica formada por estos planos.

SOLUCIÓN: Para el estudio de la posición relativa de los planos anteriores, comenzamos construyendo las matrices M y M^*.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & p-q \\ 1 & -2 & p-2q \\ 1 & 1 & p+q \end{bmatrix} \qquad M^* \begin{bmatrix} 1 & -1 & p-q & 4 \\ 1 & -2 & p-2q & 5 \\ 1 & 1 & p+q & 6 \end{bmatrix}$$

Estudiamos en primer lugar el rango de la matriz M^*.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -12 + 4 - 5 + 8 - 5 + 6 = 4 \neq 0$$

por lo que $rg(M^*) = 3$.

Ahora estudiamos el rango de M en función de los parámetros p y q.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & p-q \\ 1 & -2 & p-2q \\ 1 & 1 & p+q \end{vmatrix} = -2(p+q) - (p-2q) + (p-q) + 2(p-q) - (p-2q) + (p+q) = 0$$

luego $rg(M) = 2$.

Tenemos $rg(M) = 2 \neq rg(M^*) = 3$. Entonces tenemos dos posibilidades:

- Los planos son secantes dos a dos.
- Dos planos son paralelos y son cortados por el otro.

Si tomamos, por ejemplo, $p = q = 1$, tenemos el sistema de planos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Observamos que de los tres planos, ninguno es paralelo al otro (los vectores directores de los mismos no son proporcionales), por lo que los tres planos se cortan dos a dos formando una figura geométrica que es un prisma.

También podríamos tomar las ecuaciones de los planos dos a dos y comprobar que el sistema formado por los dos planos es compatible indeterminado, por lo que se cortan en una recta. Tomaríamos los planos

$$\alpha \equiv x - y + (p - q)z - 4 = 0$$

$$\beta \equiv x - 2y + (p - 2q)z - 5 = 0$$

y comprobamos que el sistema es compatible indeterminado. El sistema formado por

$$\alpha \equiv x - y + (p - q)z - 4 = 0$$

$$\gamma \equiv x + y + (p + q)z - 6 = 0$$

es compatible indeterminado, por lo que α y γ son secantes. Finalmente,

$$\beta \equiv x - 2y + (p - 2q)z - 5 = 0$$

$$\gamma \equiv x + y + (p + q)z - 6 = 0$$

□

vuelven a ser secantes.

••••••••••••••••••••••••••••••••

Problema 1.18: *Hállense las coordenadas de los vértices de un paralelepípedo, sabiendo que uno de ellos es $A(6,3,-2)$ y que los lados son vectores que pertenecen a los vectores libres $\boldsymbol{a}(8,-1,6)$, $\boldsymbol{b}(7,-3,4)$ y $\boldsymbol{c}(1,0,2)$.*

SOLUCIÓN: La figura 1.8 nos muestra el planteamiento geométrico del problema, resultando de gran ayuda para su resolución.

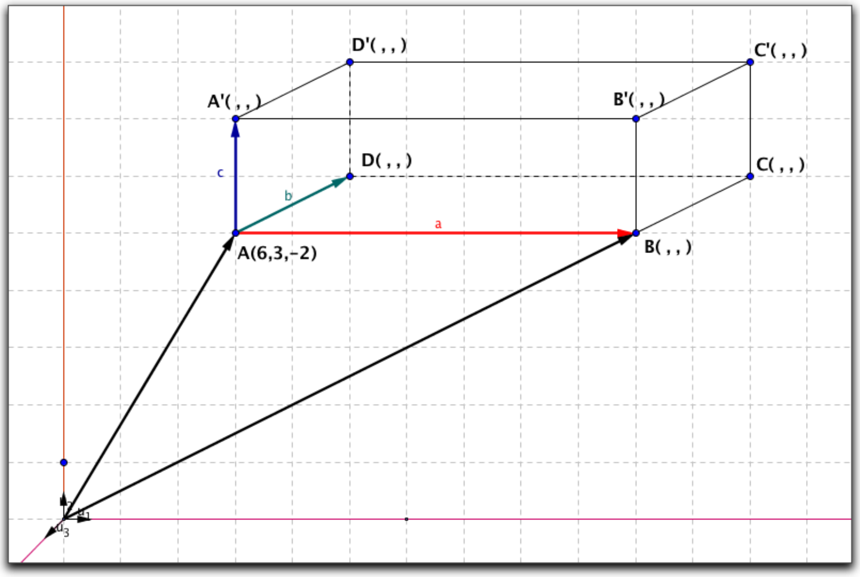


Figura 1.8: Visualización geométrica del problema.

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \boldsymbol{a},$$

$$\begin{array}{rcl}
B & \longrightarrow & (x,y,z) = (6,3,-2) + (8,-1,6) \\
C & \longrightarrow & \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \boldsymbol{b} = (21,-1,8) \\
D & \longrightarrow & \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \boldsymbol{b} = (13,0,2) \\
B' & \longrightarrow & \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB} + C = (15,2,6) \\
C' & \longrightarrow & \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OC} + \boldsymbol{c} = (22,-1,10)
\end{array}$$

$$A' \quad \longrightarrow \quad \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + \boldsymbol{c} = (7,3,0)$$

$$D' \quad \longrightarrow \quad \overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OD} + \boldsymbol{c} = (14,0,4) \qquad \square$$

••••••••••••••••••••••••••••••

Capítulo 2

Problemas del Espacio Vectorial Euclídeo

Problema 2.1: *Demostrar que si*

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2$$

entonces los vectores $\boldsymbol{a}$ *y* $\boldsymbol{b}$ *son ortogonales.*

SOLUCIÓN: Desarrollamos la expresión $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2$.

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 &= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \\ &= \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} \\ &= \|\boldsymbol{a}\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2+2\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}. \end{aligned}$$

Por hipótesis,

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2,$$

por lo que $2\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}=0$. Consecuentemente,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}. \qquad \square$$

Problema 2.2: *Hállese el valor de λ para que los vectores*

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u_1} + \lambda\boldsymbol{u_2} - 3\boldsymbol{u_3}, \boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{u_1} - 3\lambda\boldsymbol{u_2} + \boldsymbol{u_3}, \boldsymbol{c} = 4\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2} - \boldsymbol{u_3}$$

sean coplanarios.

SOLUCIÓN: Podemos plantear el problema desde diversos puntos de vista. Uno de ellos sería teniendo en cuenta la interpretación geométrica del producto mixto como el volumen del paralelepípedo que forman los tres vectores. Si los tres vectores se encuentran en el mismo plano, el volumen del paralelepípedo que forman es cero, por lo que el determinante formado por los tres vectores es nulo.

Otra interpretación se puede basar en el concepto de dependencia lineal. Si los tres vectores son coplanarios, entonces uno de ellos es linealmente del resto, por lo que el determinante formado por dichos vectores es nulo.

En cualquier caso,

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & -3 \\ 2 & -3\lambda & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

luego

$$3\lambda - 6 + 4\lambda - 36\lambda - 1 + 2\lambda = 0,$$

con lo que $\lambda = \dfrac{7}{29}$. □

●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●

Problema 2.3: *Demuéstrese que las diagonales de un rombo son perpendiculares.*

SOLUCIÓN: Construimos la figura siguiente a partir de la que realizamos las observaciones oportunas para resolver el problema.

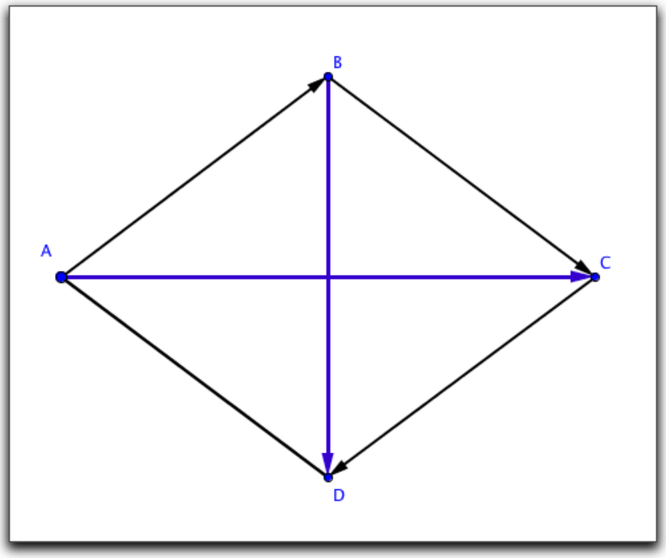


Figura 2.1: Rombo con sus diagonales.

Si observamos la figura 2.1, se observa que bastaría demostrar que $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$ son perpendiculares, es decir, que

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0.$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD}. \end{aligned}$$

Como $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ entonces

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= |\overrightarrow{BC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 = 0. \end{aligned}$$ □

• •

Problema 2.4: *Calcúlese el área del paralelogramo $ABCD$ si*

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2} + \boldsymbol{u_3}, \quad y \quad \overrightarrow{AD} = 2\boldsymbol{u_1} + 3\boldsymbol{u_2} + 4\boldsymbol{u_3}.$$

Solución: Construimos la figura siguiente para visualizar geométricamente las condiciones del problema.

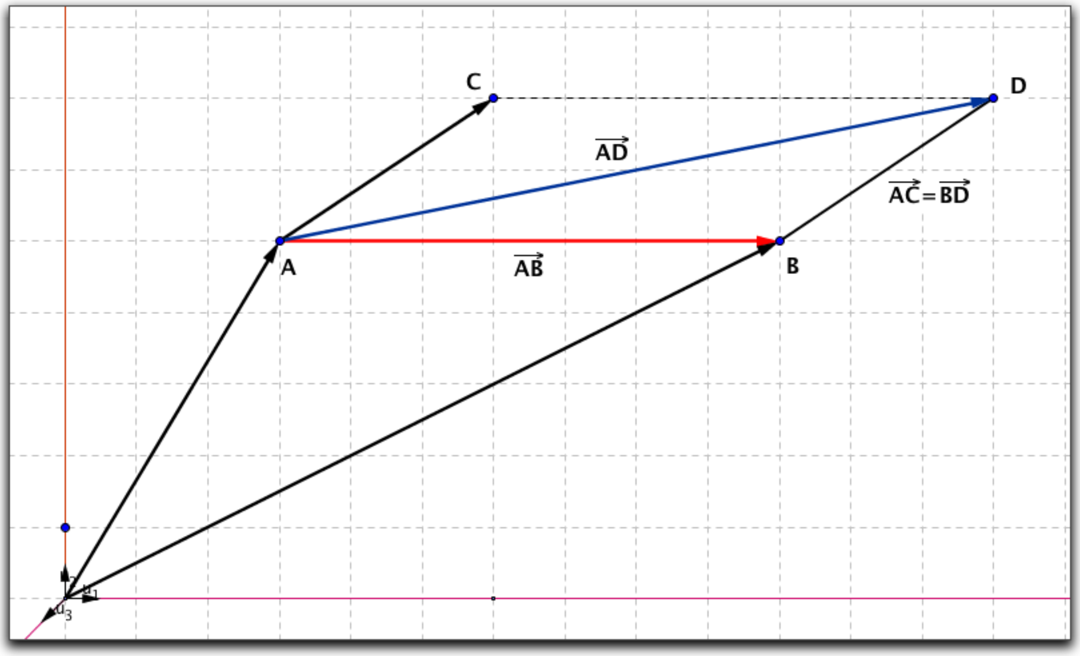


Figura 2.2: Paralelogramo $ABCD$.

Sabemos que

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2} + \boldsymbol{u_3}, \quad \text{y} \quad \overrightarrow{AD} = 2\boldsymbol{u_1} + 3\boldsymbol{u_2} + 4\boldsymbol{u_3}.$$

por lo que, observando la figura 2.2, podemos establecer que

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC},$$

por lo que

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = (1, 2, 3).$$

Sabemos que el área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, es decir,

$$area = |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|.$$

En consecuencia,

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u_1} & \boldsymbol{u_2} & \boldsymbol{u_3} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{u_1} - 2\boldsymbol{u_2} + \boldsymbol{u_3}.$$

Así

$$|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}| = \sqrt{6}.$$

□

●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●

Problema 2.5: *El eje OX representa la banda de una mesa de billar. Una bola situada en el punto $A(2,6)$ debe chocar con otra situada en $B(5,3)$ después de rebotar en la banda. Determínese:*

(a) *El punto exacto R en el que rebota la bola.*

(b) *La trayectoria que sigue tras rebotar en la banda.*

SOLUCIÓN: Construimos la figura siguiente para visualizar geométricamente las condiciones del problema.

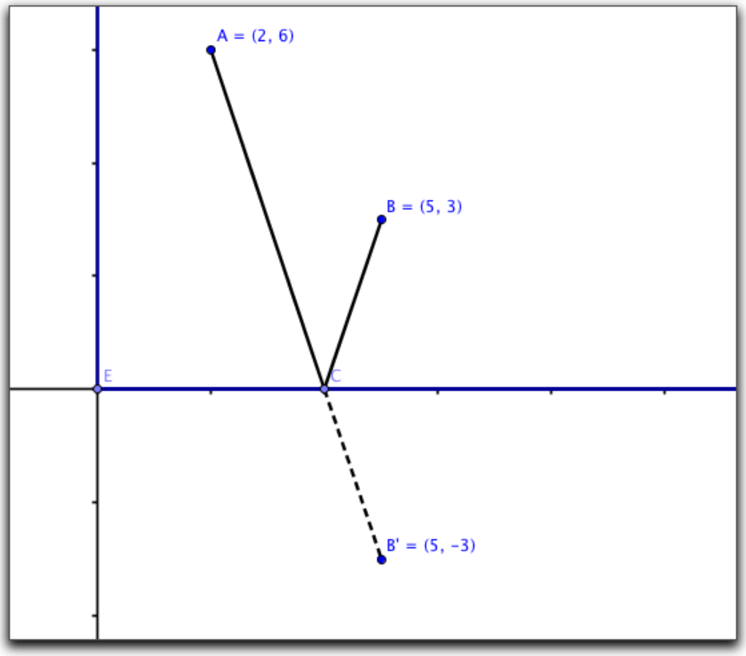


Figura 2.3: Trayectoria de la bola de billar.

(a) En la figura 2.3 hemos representado geométricamente el planteamiento del problema. El punto simétrico de B respecto el eje OX es el punto $B'(5,-3)$, representado en la figura.
Así, la trayectoria inicial de la bola ha de ser la recta que pasa por A y por B', es decir, la recta que viene dada por la ecuación

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2+3t \\ y & = & 6-9t \end{array} \right\}$$

El punto R de rebote es la intersección entre esta recta y el eje OX, es decir, $y = 0$. En consecuencia, sustituyendo en la ecuación anterior,

$$y = 6 - 9t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2}{3}$$

por lo que el punto es el que resulta al sustituir este valor de t, es decir,

$$R(4, 0).$$

(b) Ahora es fácil observar, a partir de la figura, que la trayectoria que sigue la bola es la recta que pasa por R y B', es decir, la recta de ecuación

$$r' \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 4 + t \\ y & = & 3t \end{array} \right\}.$$

$\square$

•••••••••••••••••••••••••••••••

Problema 2.6: *Demuéstrese que*

$$\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} \wedge (\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} \wedge (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = 0.$$

(Identidad de Jacobi).

SOLUCIÓN: La idea fundamental para demostrar la identidad de Jacobi consiste en demostrar previamente que

$$\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

Esto es justamente lo que tratamos de demostrar.

En primer lugar, sabemos, de acuerdo con la expresión analítica del producto vectorial, que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{u_1} & \boldsymbol{u_2} & \boldsymbol{u_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{u_1} + (a_3b_1 - a_1b_3)\boldsymbol{u_2} + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{u_3}. \end{aligned}$$

En consecuencia, tenemos que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{u_1} & \boldsymbol{u_2} & \boldsymbol{u_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2c_3 - b_3c_2 & b_3c_1 - b_1c_3 & b_1c_2 - b_2c_1 \end{vmatrix} \\ &= (a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3)\boldsymbol{u_1} - \\ &- (a_1b_1c_2 - a_1b_2c_1 - a_3b_2c_3 + a_3b_3c_2)\boldsymbol{u_2} + \\ &+ (a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2)\boldsymbol{u_3}. \end{aligned}$$

Ahora bien, calculamos el otro lado de la igualdad.

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} &= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)(b_1\boldsymbol{u_1} + b_2\boldsymbol{u_2} + b_3\boldsymbol{u_3}) \\ &= (a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3)\boldsymbol{u_1} + \\ &+ (a_1b_2c_1 + a_2b_2c_2 + a_3b_2c_3)\boldsymbol{u_2} + \\ &+ (a_1b_3c_1 + a_2b_3c_2 + a_3b_3c_3)\boldsymbol{u_3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} &= (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)(c_1\boldsymbol{u_1}+c_2\boldsymbol{u_2}+c_3\boldsymbol{u_3}) \\ &= (a_1b_1c_1+a_2b_2c_1+a_3b_3c_1)\boldsymbol{u_1}+ \\ &+ (a_1b_1c_2+a_2b_2c_2+a_3b_3c_2)\boldsymbol{u_2}+ \\ &+ (a_1b_1c_3+a_2b_2c_3+a_3b_3c_3)\boldsymbol{u_3}.\end{aligned}$$

Ahora, haciendo la operación

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

se puede comprobar fácilmente (igualando las expresiones) que

$$\boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

Así,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}) &= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}\wedge(\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{a}) &= (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c}\wedge(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}) &= (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

Es evidente que

$$\boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\wedge(\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\wedge(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})=0. \qquad \square$$

• •

Capítulo 3

Problemas de Espacio Euclídeo

Problema 3.1: *¿Son coplanarios los puntos* $A(0,-1,0)$ *,* $B(3,3,0)$*,* $C(1,1,1)$*,* $D(2,1,-1)$*?*

SOLUCIÓN: Para resolver este problema calculamos el plano que forman tres de estos puntos, por ejemplo, A, B, C y, posteriormente, comprobamos si el punto D pertenece al plano calculado.

(a) Plano generado por los puntos A, B, C.
Para calcular este plano podemos formar los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, de la forma

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3,4,0),$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (1,2,1).$$

Tomando $A(0,-1,0)$ como punto del plano y los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ como directores del mismo, la ecuación general del plano viene dada por

$$\begin{vmatrix} x & y+1 & z \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4x - 2y + 2z - 2 = 0$$

luego tenemos

$$\pi \equiv 4x - 2y + 2z - 2 = 0.$$

(b) Ahora comprobamos si $D \in \pi$.
Para ello basta sustituir las coordenadas de D en el plano π y comprobar si verifica la ecuación.

$$4 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 2(-1) - 2 = 0, \qquad \square$$

luego concluimos que D pertenece al plano π, por lo que los cuatro puntos son coplanarios.

• •

Problema 3.2: *Hállese la recta perpendicular común a*

$$r \equiv x = y = -z \quad y \quad s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{2}.$$

SOLUCIÓN: Recordemos la figura 3.1 en la que nos mostraba la forma de calcular la perpendicular a dos rectas construyendo dos planos.

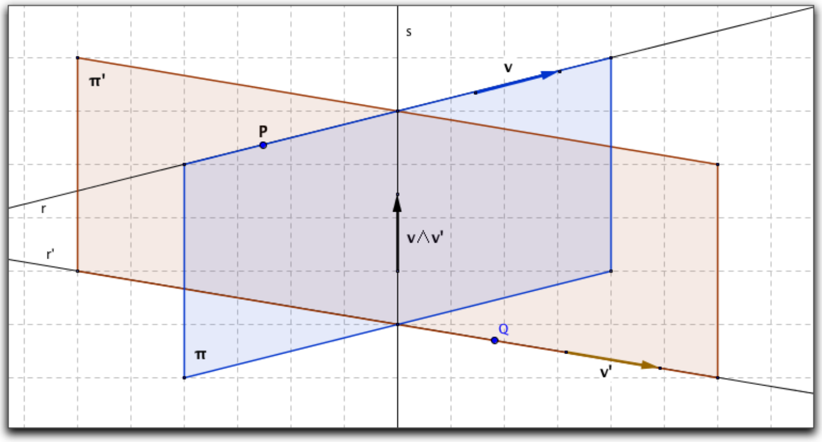


Figura 3.1: Perpendicular común a dos rectas que se cruzan.

La forma de resolver el problema es construyendo dos planos, π y π' con las siguientes características:

- El plano π contendrá a la recta r y su vector característico será perpendicular a $\boldsymbol{v}$ y a $\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{s}$.
- El plano π' contendrá a la recta s y su vector característico será perpendicular a $\boldsymbol{s}$ y a $\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{s}$.

En estas condiciones, la recta que nos piden es la formada por la intersección de los planos π y π'.

Un punto de la recta r es $P_r(0,0,0)$ y un vector director de esta recta es $\boldsymbol{v_r}(1,1,-1)$.

Un punto de la recta s es $P_s(1,0,1)$ y un vector director de esta recta es $\boldsymbol{v_s}(2,3,2)$.

Entonces

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{s} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{u_1} & \boldsymbol{u_2} & \boldsymbol{u_3} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \boldsymbol{u_1} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \boldsymbol{u_2} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \boldsymbol{u_3} \\
&= 5\boldsymbol{u_1} - 4\boldsymbol{u_2} + \boldsymbol{u_3}.
\end{aligned}$$

Comenzamos la construcción de estos planos.

- Plano π.
  Si (x, y, z) es un punto genérico del plano, entonces

$$\overrightarrow{P_r X} = X - P_r = (x, y, z).$$

  Ahora calculamos el vector característico del plano, que es $\boldsymbol{v} \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{s})$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{s}) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{u_1} & \boldsymbol{u_2} & \boldsymbol{u_3} \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \boldsymbol{u_1} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \boldsymbol{u_2} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \boldsymbol{u_3} \\
&= -3\boldsymbol{u_1} - 6\boldsymbol{u_2} - 9\boldsymbol{u_3}.
\end{aligned}$$

  Entonces se cumple que

$$\overrightarrow{P_r X} \cdot (\boldsymbol{v} \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{s}) = 0,$$

  lo que nos proporciona el plano π

$$(x, y, z)(-3, -6, -9) = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x - 6y - 9z = 0.$$

- Plano π'.
  Si (x, y, z) es un punto genérico del plano, entonces

$$\overrightarrow{P_s X} = X - P_s = (x - 1, y, z - 1).$$

Ahora calculamos el vector característico del plano, que es $\boldsymbol{s} \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{s})$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{s} \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{s}) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{u_1} & \boldsymbol{u_2} & \boldsymbol{u_3} \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \boldsymbol{u_1} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \boldsymbol{u_2} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \boldsymbol{u_3} \\
&= 11\boldsymbol{u_1} + 8\boldsymbol{u_2} - 23\boldsymbol{u_3}.
\end{aligned}$$

Entonces se cumple que

$$\overrightarrow{P_sX} \cdot (\boldsymbol{s} \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{s}) = 0,$$

lo que nos proporciona el plano π'

$$(x-1, y, z-1)(11, 8, -23) = 0 \quad \Rightarrow \quad 11x + 8y - 23z + 12 = 0. \qquad \square$$

••••••••••••••••••••••••••••••••

Problema 3.3: *Dados los puntos $P(1,2.-1)$, $Q(1,3,2)$ y la recta*

$$r \equiv \begin{cases} 2x+y-z-6 &= 0 \\ x-y+z-1 &= 0. \end{cases}$$

Se pide:

(a) *La proyección ortogonal de P sobre r.*

(b) *El punto situado en el plano perpendicular a r por P y a la menor distancia posible de Q.*

SOLUCIÓN: (a) La proyección ortogonal de P sobre r.

La figura 3.2 nos proporciona una idea geométrica de cómo abordar esta primera parte. El punto P' es la proyección que nos piden y es la intersección del plano π perpendicular a r que pasa por P y la propia recta r.

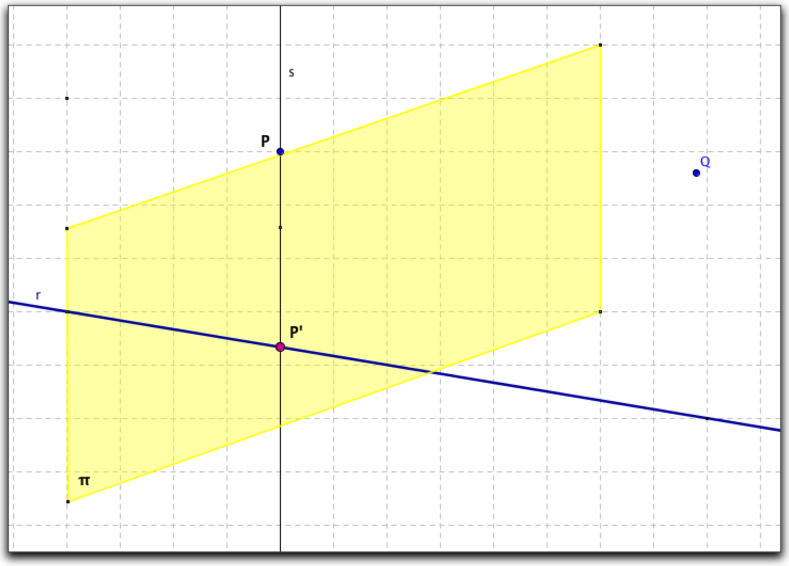


Figura 3.2: Proyección ortogonal de un punto sobre una recta.

Pasamos las ecuaciones implícitas de la recta a la forma paramétrica. La recta r en paramétricas es

$$r \equiv \begin{cases} x &= \frac{7}{3} \\ y &= \frac{4}{3}+\lambda \\ z &= \lambda. \end{cases}$$

Como el plano π es perpendicular a la recta, y un vector de la recta es $\boldsymbol{v}(0,1,1)$ tenemos que, siguiendo un razonamiento ya estudiado, el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{PX}$ y $\boldsymbol{v}(0,1,1)$ es cero, por lo que la ecuación del plano es

$$(x-1, y-2, z+1)(0,1,1) = 0 \quad \Rightarrow \quad y+z-1=0.$$

Ahora falta calcular la intersección de este plano con la recta r. Basta sustituir las ecuaciones paramétricas en la ecuación del plano, es decir,

$$\frac{4}{3} + \lambda + \lambda - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{-1}{6}.$$

En consecuencia,

$$P'\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{6}, \frac{-1}{6}\right).$$

(b) El punto pedido es el punto de intersección de la recta s perpendicular a π por el punto Q con dicho plano, como se aprecia en la figura 3.3.

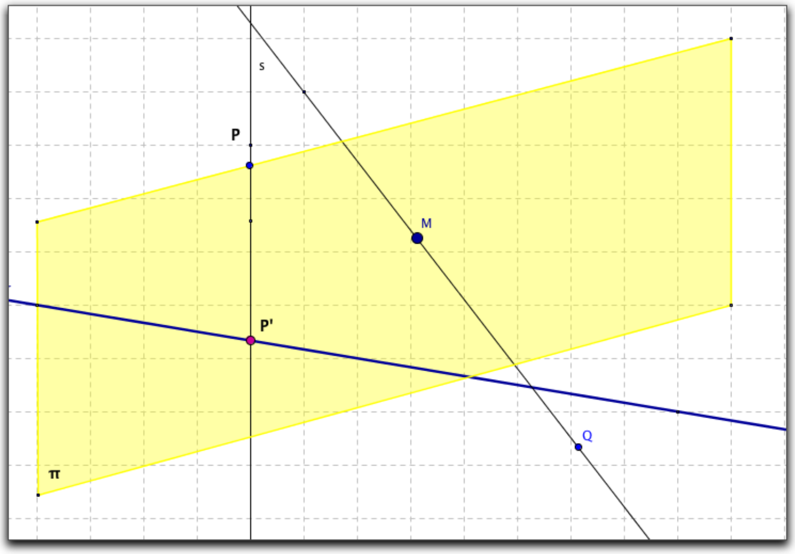


Figura 3.3: Punto más cercano a Q.

La ecuación de la recta s viene dada por

$$s \equiv \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 3+\mu \\ z &= 2+\mu. \end{cases}$$

Ahora calculamos la intersección del plano π con la recta s. Realizamos un razonamiento análogo al del caso anterior, sustituyendo las variables x, y, z en la ecuación del plano, obteniendo:

$$y + z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 + \mu + 2 + \mu - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = -2. \qquad \square$$

Luego el punto buscado es: $(1, 1, 0)$, sustituyendo en las ecuaciones paramétricas de s.

••••••••••••••••••••••••••••••••

Problema 3.4: *Calcúlese el área del triángulo cuyos vértices son las intersecciones del plano*

$$\pi \equiv x + 2y + 3z - 1 = 0$$

con los ejes de coordenadas.

SOLUCIÓN: La figura 3.4 resume geométricamente la idea del problema, en la que se ha representado en color verde el área del triángulo solución del problema.

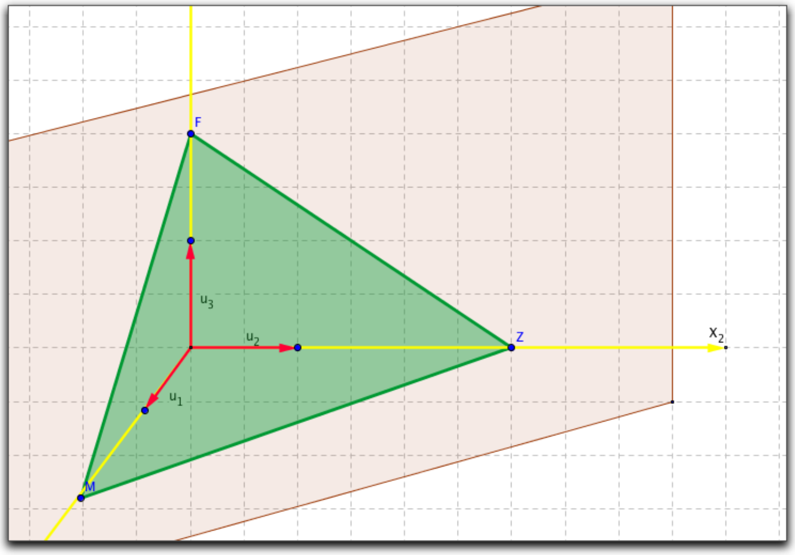


Figura 3.4: Punto más cercano a Q.

Debemos estudiar la intersección del plano con cada uno de los ejes coordenados.

- Intersección del plano con el eje X $(y = z = 0)$.

$$x + 2y + 3z = 1 \overset{y=z=0}{\longrightarrow} x = 1 \quad \Rightarrow \quad A(1, 0, 0).$$

- Intersección del plano con el eje Y $(x = z = 0)$.

$$x + 2y + 3z = 1 \overset{x=z=0}{\longrightarrow} y = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad B(0, \frac{1}{2}, 0).$$

- Intersección del plano con el eje Z $(x = y = 0)$.

$$x + 2y + 3z = 1 \overset{x=y=0}{\longrightarrow} z = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad C(0, 0, \frac{1}{3}).$$

Dados los tres vértices del triángulo es sencillo calcular su área, ya que sabemos que vendrá dada por la expresión

$$\text{Área} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|.$$

Entonces,

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \left(-1, \frac{1}{2}, 0\right), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = \left(-1, 0, \frac{1}{3}\right).$$

Además,

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u_1} & \boldsymbol{u_2} & \boldsymbol{u_3} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\boldsymbol{u_1} + \frac{1}{3}\boldsymbol{u_2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{u_3}.$$

Así,

$$|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}| = \sqrt{\frac{1+4+9}{36}} = \frac{\sqrt{14}}{6}$$

por lo que el área es

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}| = \frac{\sqrt{14}}{12}.$$

□

●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●

Problema 3.5: *El segmento*

$$\frac{x+2}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}=\lambda, \quad \lambda\in[0,1].$$

se proyecta ortogonalmente sobre el plano XY. La proyección es la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles, situado en dicho plano. Se pide:

(a) *Calcúlese el otro vértice de dicho triángulo, así como su área.*

(b) *Calcúlese la distancia del vértice obtenido en el apartado anterior a la recta*

$$r\equiv x+2=y-2=\frac{z}{9}.$$

Solución: (a) Buscamos por medio de la figura 3.5 una representación geométrica del problema planteado.

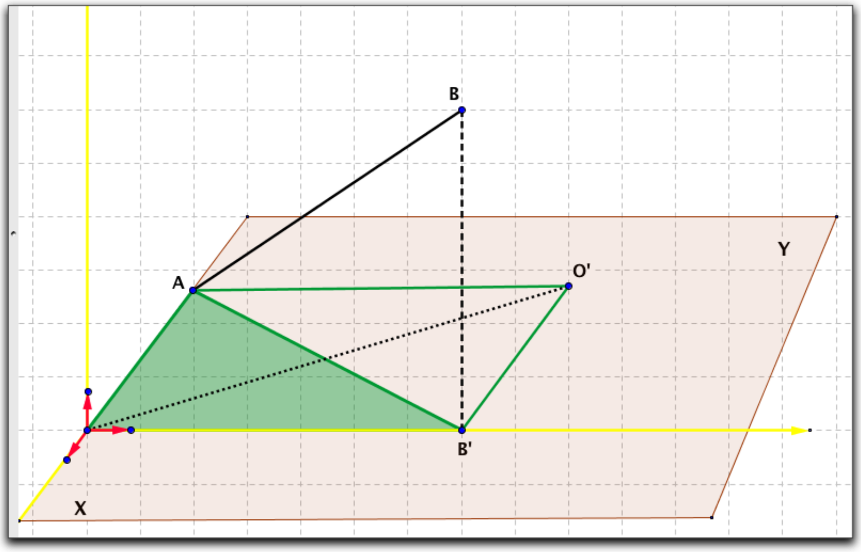


Figura 3.5: Segmento AB.

Inicialmente debemos calcular los extremos del segmento dado por

$$\frac{x+2}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}=\lambda, \quad \lambda\in[0,1].$$

- Para $\lambda = 0$, tenemos el origen,

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2, y = 0, z = 0 \quad \Rightarrow \quad A(-2,0,0).$$

- Para $\lambda = 1$, tenemos el origen,

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, y = 2, z = 1 \quad \Rightarrow \quad B(0,2,1).$$

Así, los extremos del segmento son $A(-2,0,0)$ y $B(0,2,1)$. Notemos, como se desprende de la figura, que el origen del segmento se encuentra sobre el eje X, mientras que el extremo tiene $x = 0$. Así, la proyección de A sobre el plano XY es el propio punto, puesto que ya se encuentra en ese plano. La proyección de B sobre el plano XY será el punto B' que aparece en el dibujo y es la intersección de la recta perpendicular por B al plano XY con dicho plano. Calculamos esa recta.
La recta es perpendicular al plano XY luego un vector de la misma es $\boldsymbol{v}(0,0,1)$; además pasa por $B(0,2,1)$. Luego la recta es

$$\begin{cases} x &= 0 \\ y &= 2 \\ z &= 1 + \mu. \end{cases}$$

Ahora, para calcular B' calculamos la intersección de esta recta con el plano XY ($z = 0$).

$$0 = 1 + \mu \quad \Rightarrow \quad \mu = -1 \quad \Rightarrow \quad B'(0,2,0).$$

Ahora, fijándonos en el gráfico, como $d(A,O) = 2 = d(B',O)$, se tiene que el triángulo que forman AOB' es isósceles; además, como A y B' están sobre los ejes coordenados, el triángulo es rectángulo también. Por tanto, el vértice que nos piden es $O(0,0,0)$. El otro vértice del paralelogramo que se forma es el que hemos llamado O', cuyas coordenadas, al ser simétrico de O respecto de la recta AB', son $(-2,2,0)$.
En cuanto al área de los triángulos, al ser los triángulos $\widehat{OAB'}$ y $\widehat{O'AB'}$ rectángulos e isósceles, es 2 unidades.

(b) La recta r, en ecuaciones paramétricas, es

$$r \equiv \begin{cases} x &= -2 + \lambda \\ y &= 2 + \lambda \\ z &= 9\lambda \end{cases}$$

Dos puntos de esta recta son $P(-2,2,0)$ y $Q(-1,3,9)$.

Para calcular la distancia de O a r aplicamos la expresión

$$d = \frac{|\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{PQ}|}.$$

Se tiene que

$$\overrightarrow{OP} = (-2, 2, 0), \quad \overrightarrow{PQ} = (1, 1, 9),$$

luego

$$\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{PQ} = (18, 18, -4).$$

Entonces

$$|\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{PQ}| = 2\sqrt{166}, \quad |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{83}.$$

Por tanto,

$$d = \frac{|\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{2\sqrt{166}}{\sqrt{83}} = 2\sqrt{2}.$$

□

••••••••••••••••••••••••••••••••

Problema 3.6: *Un tetraedro tiene tres vértices fijos en los puntos* $(0,0,0)$, $(2,0,1)$ *y* $(0,-1,3)$ *y el cuarto vértice* P*, variable sobre el plano* $x+y+z-1=0$*. Determínese el lugar geométrico de los puntos* P *para los que el volumen del tetraedro valga* 1*.*

Solución: Un punto P variable del plano $x+y+z-1=0$ será de la forma

$$y=\lambda, z=\mu \quad \Rightarrow \quad P(-\lambda-\mu+1,\lambda,\mu).$$

El volumen del tetraedro de vértices $A(0,0,0)$, $B(2,0,1)$, $C(0,-1,3)$ y $P(-\lambda-\mu+1,\lambda,\mu)$ será una sexta parte del área del paralelepípedo que forman los vectores de las aristas, es decir, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AP}$.

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(2,0,1), \quad \overrightarrow{AC}=C-A=(0,-1,3), \quad \overrightarrow{AP}=P-A=(-\lambda-\mu+1,\lambda,\mu).$$

Entonces calculamos el volumen del tetraedro imponiendo la condición de que sea 1 unidad.

$$\begin{aligned} Vol &= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -\lambda-\mu+1 & \lambda & \mu \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{6}(-6\lambda+1-\lambda+3\mu) \\ &= \frac{1}{6}(-7\lambda+3\mu+1). \end{aligned}$$

Haciendo que el volumen valga 1 tenemos

$$-7\lambda+3\mu+1=6 \quad \Rightarrow \quad \mu=\frac{-5-7\lambda}{3}$$

El lugar geométrico de los puntos pedidos es la recta

$$\left\{\begin{aligned} x &= \tfrac{4\lambda+8}{3} \\ y &= \lambda \\ z &= \tfrac{-5-7\lambda}{3}. \end{aligned}\right.$$

□

• •

Problema 3.7: *Se pide*

(a) *Obténgase el simétrico del punto* $(2,-1,4)$ *respecto del plano* $2x+y+z=2$.

(b) *Obténgase el simétrico del punto* $(1,1,1)$ *respecto de la recta*

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x-z & = & 0 \\ y-3z-1 & = & 0. \end{array} \right.$$

SOLUCIÓN: (a) La recta perpendicular al plano $2x+y+z=2$ que pasa por el punto $(2,-1,4)$ tiene como vector director a $(2,1,1)$, que es el vector director del plano (perpendicular a él). Podemos escribir esta recta en ecuaciones paramétricas como

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2+2\lambda \\ y & = & -1+\lambda \\ z & = & 4+\lambda \end{array} \right.$$

Ahora obtenemos la intersección entre esta recta y el plano, que será un punto que se encuentra a mitad de distancia del punto dado y del que nos piden.
Calculamos la intersección de la forma habitual, sustituyendo las ecuaciones paramétricas en la ecuación del plano, de manera que tenemos

$$4+4\lambda+\lambda-1+4+\lambda=2 \quad \Rightarrow \quad \lambda=-\frac{5}{6}.$$

Sustituyendo el valor de λ en la recta, se obtiene el punto

$$C\left(\frac{2}{6},-\frac{11}{6},\frac{19}{6}\right).$$

Este será el punto medio del segmento determinado por $(2,-1,4)$ y su simétrico (x,y,z). Por lo tanto

$$\begin{array}{rcl} \frac{2}{6}=\frac{x+2}{2} & \Longleftrightarrow & x=-\frac{4}{3} \\ -\frac{11}{6}=\frac{y-1}{2} & \Longleftrightarrow & y=-\frac{8}{3} \\ \frac{19}{6}=\frac{z+4}{2} & \Longleftrightarrow & z=-\frac{7}{3} \end{array}$$

(b) Escribimos la recta en ecuaciones paramétricas, es decir,

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \lambda \\ y & = & 1+3\lambda \\ z & = & \lambda \end{array}\right.$$

Un plano perpendicular a la misma y que pase por el punto $(1,1,1)$ tiene por ecuación

$$\overrightarrow{PX}\cdot(1,3,1)=0 \quad \Rightarrow \quad (x-1,y-1,z-1)(1,3,1)=0 \quad \Rightarrow \quad x+3y+z-5=0.$$

Introduciendo las ecuaciones de la recta en el plano, se obtiene

$$\lambda+9\lambda+3+\lambda-5=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=\frac{2}{11}.$$

Dicho valor de λ corresponde con el punto D, intersección de la recta y el plano, que es

$$D\left(\frac{2}{11},-\frac{17}{11},\frac{2}{11}\right).$$

Este será el punto medio del segmento determinado por $(1,1,1)$ y su simétrico (x,y,z). Por lo tanto

$$\begin{array}{lcl} \dfrac{2}{11}=\dfrac{x+1}{2} & \Longleftrightarrow & x=-\dfrac{7}{11} \\ \dfrac{17}{11}=\dfrac{y+1}{2} & \Longleftrightarrow & y=\dfrac{23}{11} \\ \dfrac{2}{11}=\dfrac{z+1}{2} & \Longleftrightarrow & z=-\dfrac{7}{11} \end{array}$$

□

● ●

Problema 3.8: *Calcúlese el área del cuadrilátero $ABCD$, siendo A y B los puntos de contacto de las rectas*

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}, \quad s \equiv \begin{cases} x &= 1+\lambda \\ y &= \lambda \\ z &= 0. \end{cases}$$

con la perpendicular común a ambas.
El punto C es la proyección del punto $P(1,1,1)$ sobre la recta

$$\begin{cases} x-y+z+1 &= 0 \\ z+1 &= 0. \end{cases}$$

y D es el simétrico de C respecto de la recta AB.

SOLUCIÓN: • En primer lugar calculamos A y B.

Escribimos la recta r en ecuaciones paramétricas, es decir:

$$\begin{cases} x &= \mu \\ y &= 0 \\ z &= -\mu. \end{cases}$$

A será un punto de la recta r, por lo que será de la forma $(\mu, 0, -\mu)$, mientras que B será un punto de la recta s, por lo que tendrá la forma $(1+\lambda, \lambda, 0)$.
Tanto A como B son los puntos de intersección con la recta perpendicular a r y a s, por lo que el vector $\overrightarrow{AB}$ debe ser ortogonal a los vectores directores de ambas rectas.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1+\lambda-\mu, \lambda, \mu).$$

De las ecuaciones de las rectas obtenemos que $\boldsymbol{v_r}(1,0,-1)$ y $\boldsymbol{v_s}(1,1,0)$, por lo que debe cumplirse la condición de perpendicularidad, es decir,

$$\overrightarrow{AB} \cdot (1,0,-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (1+\lambda-\mu, \lambda, \mu)(1,0,-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1+\lambda-2\mu = 0,$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot (1,1,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad (1+\lambda-\mu, \lambda, \mu)(1,1,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1+2\lambda-\mu = 0.$$

Resolviendo este sistema, llegamos a que $\lambda = -\frac{1}{3}$ y $\mu = \frac{1}{3}$.
Ahora ya podemos obtener los puntos sustituyendo en las respectivas ecuaciones de sus rectas, con lo que

$$A\left(\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right), \quad B\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right).$$

- Ahora calculamos C. Para ello, escribimos las ecuaciones paramétricas de t, que son

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \lambda \\ y & = & \lambda \\ z & = & -1. \end{array}\right.$$

La proyección de $P(1,1,1)$ sobre la recta t será el punto de intersección del plano perpendicular a t por P con t.
Utilizando el mismo razonamiento que se ha visto en otros problemas, el plano perpendicular a la recta t tiene como vector característico un vector proporcional al vector director de la recta, $(1,1,0)$ y pasa por el punto P, luego sue cuación será

$$x+y-2=0.$$

Ahora hallamos la intersección con t, que nos proporciona el valor $\lambda=1$, con lo que llegamos así a obtener el punto C, que es

$$C(1,1,-1).$$

- No es necesario obtener el punto D, ya que el área del cuadrilátero $ABCD$ será el doble del área del triángulo ABC.

$$S_{\widehat{ABC}}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}|.$$

Tenemos que

$$\overrightarrow{AB}\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right), \quad \overrightarrow{AB}\left(\frac{2}{3},1,-\frac{2}{3}\right).$$

Además,

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\frac{1}{9}(-1,4,5) \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}|=\frac{\sqrt{42}}{9}.$$

Por tanto,

$$S_{\widehat{ABC}}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}|=\frac{\sqrt{42}}{18}$$

y el área pedida es, por tanto,

$$S_{ABCD}=\frac{\sqrt{42}}{9}.$$ □

••••••••••••••••••••••••••••••••

Capítulo 4

Problemas de Cónicas

Problema 4.1: *El sistema LORAN (LOng distance RAdio Navigation) utiliza pulsos sincronizados que viajan a la velocidad de la luz, $c_0 = 300000$ kilómetros por segundo, emitidos por dos estaciones situadas a cierta distancia una de la otra. Supongamos que la distancia entre las dos estaciones en este caso es de 5 kilómetros. El piloto de un avión que sobrevuela la línea que une las estaciones a una altura de 3 kilómetros recibe dos pulsos emitidos simultáneamente por éstas con una diferencia de tiempos de 10 microsegundos. ¿En qué punto se encuentra el avión?*

SOLUCIÓN: La figura siguiente nos muestra una representación geométrica del problema, donde se muestra el sistema de coordenadas que vamos a utilizar para resolver el problema.

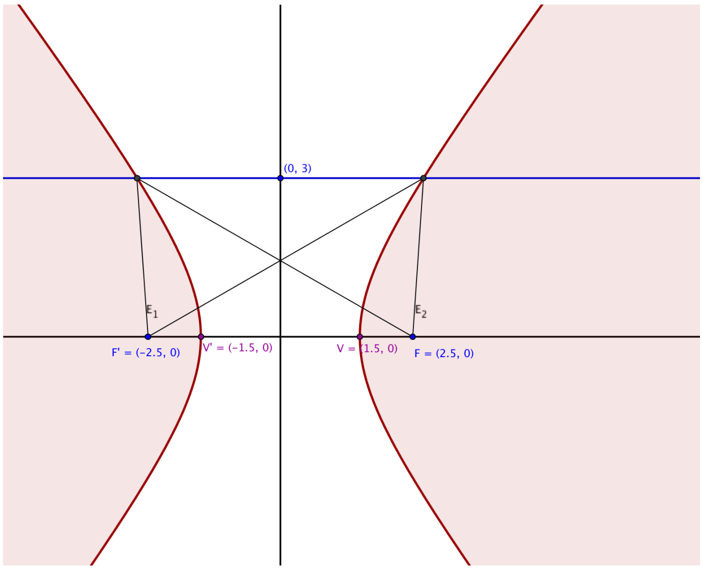


Figura 4.1: Representación de las estaciones y la ruta del avión.

La diferencia de distancias del avión a las estaciones es:

$$|d_1 - d_2| = c_0|t_1 - t_2| = (3 \cdot 10^5\,\mathrm{km/s})(10 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}) = 3\,\mathrm{km}.$$

Así, el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a las estaciones es igual a 3 es la hipérbola de focos $(-2,5)$ y $(2,5)$ y vértices $(-1{,}5, 0)$ y $(1{,}5, 0)$. El avión se encuantra en alguno de los puntos de intersección de esta hipérbola y la recta $y = 3$.

Para determinar la ecuación de la hipérbola, calculamos

$$b^2 = c^2 - a^2 = (2{,}5)^2 - (1{,}5)^2 = 4$$

por lo que $b = 2$ km.

Las coordenadas del avión son, por lo tanto, las soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{x^2}{2{,}25} - \frac{y^2}{4} & = & 1 \\ y & = & 3 \end{array}\right\} \qquad \square$$

Sustituyendo $y = 3$ en la primera ecuación y despejando x, resulta que $x = \pm 0{,}75\sqrt{13}$.

Luego el avión se encuentra en $(-0{,}75\sqrt{13}, 3)$ o en $(+0{,}75\sqrt{13}, 3)$.

●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●

Problema 4.2: *Se ha construido una cometa cuya parte curva es un arco de parábola. Las medidas de la cometa son: longitud $a = 1,50$ metros, envergadura $b = 1$ metro y flecha $c = 25$ centímetros. Tomando como ejes de coordenadas la línea que divide a la cometa en dos partes simétricas (véase la figura, calcúlese:*

(a) *La ecuación de la parábola de la cual forma parte el arco de la cometa.*

(b) *Las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz.*

Solución:

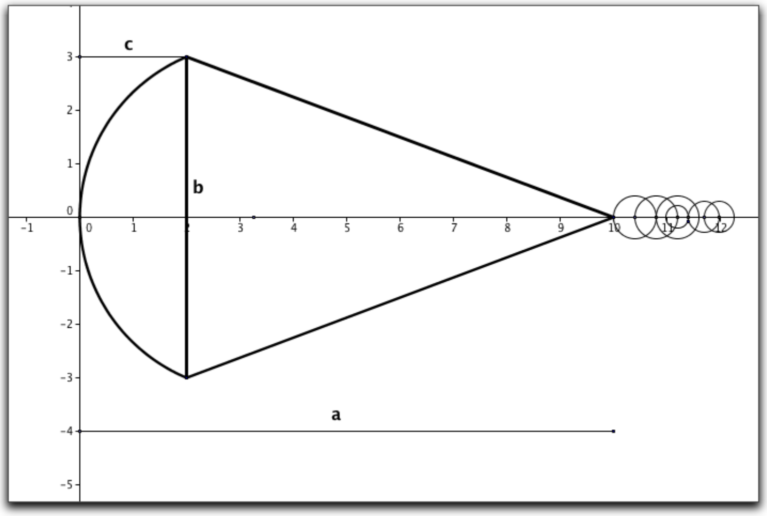


Figura 4.2: Cometa.

(a) A la vista de la construcción que aparece en la figura 4.2, podemos afirmar que se trata de una parábola de ecuación

$$y^2 = 4ax, \quad a > 0.$$

Podemos determinar de forma evidente a a partir de los datos de la figura teniendo en cuenta que el foco de la parábola está en $(25, 0)$, por lo que $a = 25$ y la ecuación de la parábola es, por tanto,

$$y^2 = 100x.$$

(b) Ya se ha comentado que el foco se encuentra en el punto $(25, 0)$, por lo que la directriz es la recta $x = -a$, es decir, $x = -25$. $\square$

Problema 4.3: *Hállese la posición relativa del punto $P(2,2)$ y la elipse*

$$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1.$$

SOLUCIÓN: Para calcular la posición relativa del punto y la elipse, calculamos la suma de distancias del punto a los focos; si esta distancia es menor que $2a$, el punto estará en el interior de la elipse. Si es mayor, será exterior y si coincide se trata de un punto de la propia elipse.

De la ecuación de la elipse, obtenemos que sus semiejes son $a = 5$ y $b = 4$, por lo que sabemos que

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3.$$

Se observa que la elipse es horizontal ($a > b$) y su centro es el punto $C(-2,-1)$. Podemos determinar sus focos $(h + c, k)$ y $(h - c, k)$.

$$F(-2 - c, -1) = (-5, -1) \qquad F(-2 + c, -1) = (1, -1).$$

Ahora ya podemos calcular la suma de las distancias del punto a los focos.

$$\begin{aligned} d(P,F') + d(P,F) &= \sqrt{(-5-2)^2 + (-1-2)^2} + \sqrt{(1-2)^2 + (-1-2)^2} \\ &= \sqrt{58} + \sqrt{10} \simeq 10{,}778 > 10 = 2a. \end{aligned}$$ □

Comprobamos así que el punto es exterior a la elipse.

• •

Problema 4.4: (a) *Demuéstrese que la recta tangente a una circunferencia en un punto P es perpendicular al radio vector de dicho punto.*

(b) *Utilizando esta propiedad, calcúlese la recta tangente a la circunferencia*

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$$

en el punto $P(0, 0)$.

SOLUCIÓN: (a) Sea C el centro de la circunferencia, r su radio y t la recta tangente en P. Lo representamos por medio de la figura 4.3.

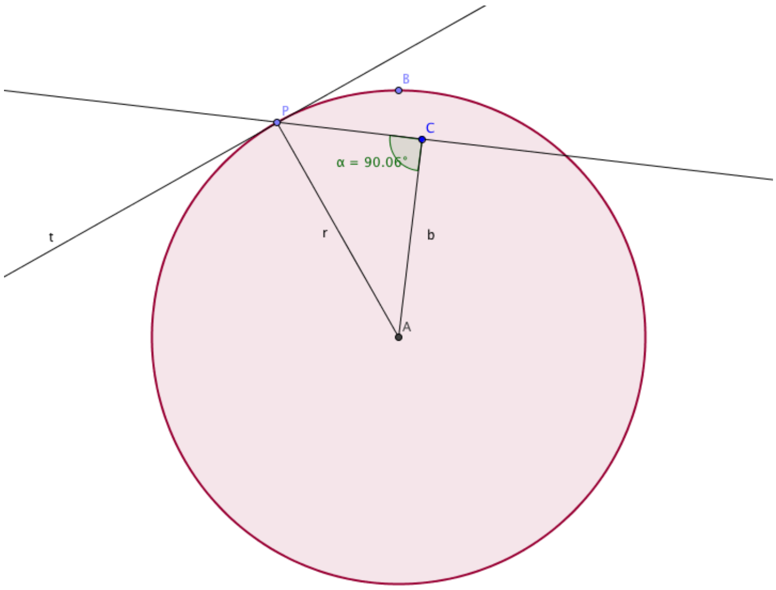


Figura 4.3: Circunferencia y tangente a la misma.

Si $\overrightarrow{CP}$ no fuera perpendicular a t, existiría un punto Q en t tal que

$$d(C, Q) = d(C, t) < d(C, P) = r$$

El punto Q sería entonces interior a la circunferencia y la recta t, que pasa por P y Q, sería necesariamente secante (véase la figura). En consecuencia, $\overrightarrow{CP}$ y t deben ser perpendiculares.

(b) El centro de la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$$

es el punto $C(2,1)$. El vector $\overrightarrow{PC}(2,1)$ es, según se ha visto en el apartado anterior, normal a la recta tangente en $P(0,0)$.
La ecuación de dicha recta es, por tanto, de la forma

$$2x + y + k = 0.$$

□

Como P pertenece a la recta, debe ser $k = 0$, de donde se deduce finalmente que la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en P es $2x + y = 0$.

• •

Problema 4.5: *Determínese la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a* $F\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *y* $F\left(-\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *es igual a* 4.

Solución: Si representamos gráficamente los focos en un sistema coordenado, nos damos cuenta que se trata de una elipse centrada en el origen, que es el punto medio de F y F', siendo $2a = 4$, lo que nos proporciona el semieje mayor, que es 2. Pero la línea de focos está inclinada respecto de los ejes de coordenadas.

Cada punto $P(x, y)$ de esa elipse satisface la condición

$$d(P, F) + d(P, F') = 4,$$

es decir,

$$\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 4-\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

Elevando al cuadrado y realizando las simplificaciones oportunas, nos queda

$$4\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 8+3x+\sqrt{3}y.$$

Elevando nuevamente al cuadrado y agrupando términos conseguimos llegar a la ecuación buscada:

$$\boxed{7x^2-6\sqrt{3}xy+13y^2-16=0.}$$

□

• •

Problema 4.6: *Calcula la longitud de la cuerda definida por la elipse $x^2 + 3y^2 = 28$ y la recta $5x + 3y = 14$.*

SOLUCIÓN: Calculamos en primer lugar los puntos de corte de la recta y la elipse, por lo que resolvemos el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 5x+3y & = & 14 \\ x^2+3y^2 & = & 28 \end{array}\right\}$$

Despejando la variable x dse la primera ecuación, tendremos que

$$x = \frac{14-3y}{5},$$

y sustituyendo en la otra ecuación

$$\left(\frac{14-3y}{5}\right)^2 + 3y^2 = 28 \;\Rightarrow\; \frac{196-84y+9y^2}{25} + 3y^2 = 28$$

$$196 - 84y + 9y^2 + 75y^2 = 700 \;\Rightarrow\; 84y^2 - 84y - 504 = 0$$

$$y^2 - y - 6 = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{1\sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \{3, -2\}$$

De esta forma, los puntos son:

$$P(1,3),\ Q(4,-2).$$

Finalmente, la longitud de la cuerda es la distancia entre P y Q, es decir,

$$|\overrightarrow{PQ}| = |(3,-5)| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34} = 5{,}83 \qquad \square$$

• •

Problema 4.7: *Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ tales que el producto de las pendientes de las rectas trazadas desde P a los puntos $A(-2, 1)$ y $B(2, -1)$ sea igual a 1. ¿Qué figura obtienes? Represéntala.*

Solución: En primer lugar calculamos las pendientes de las rectas que unen el punto P con los puntos A y B.

- La pendiente que une P con A es: $\frac{y-1}{x+2}$.
- La pendiente que une P con B es: $\frac{y+1}{x-2}$.

El producto de las pendientes debe ser igual a 1 por lo que

$$\left(\frac{y-1}{x+2}\right) \cdot \left(\frac{y+1}{x-2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{y^2-1}{x^2-4} = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 3.$$

Podemos escribir la ecuación de la forma

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$$

Observamos que se trata de la ecuación de una hipérbola en la que $a = b = \sqrt{3}$ y $c = \sqrt{6}$.

Los focos de la hipérbola son $F(\sqrt{6}, 0)$ y $F(-\sqrt{6}, 0)$.

Las asíntotas son las rectas $y = x$ e $y = -x$.

La excentricidad es $e = c/a = 1{,}41$. $\square$

●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●

Problema 4.8: *Halla la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo de lados:*

$$y = 0 \quad 3x - 4y = 0 \quad 4x + 3y - 50 = 0.$$

SOLUCIÓN: Construimos la figura 4.4 donde apreciamos las rectas que forman el triángulo y la circunferencia inscrita en el mismo.

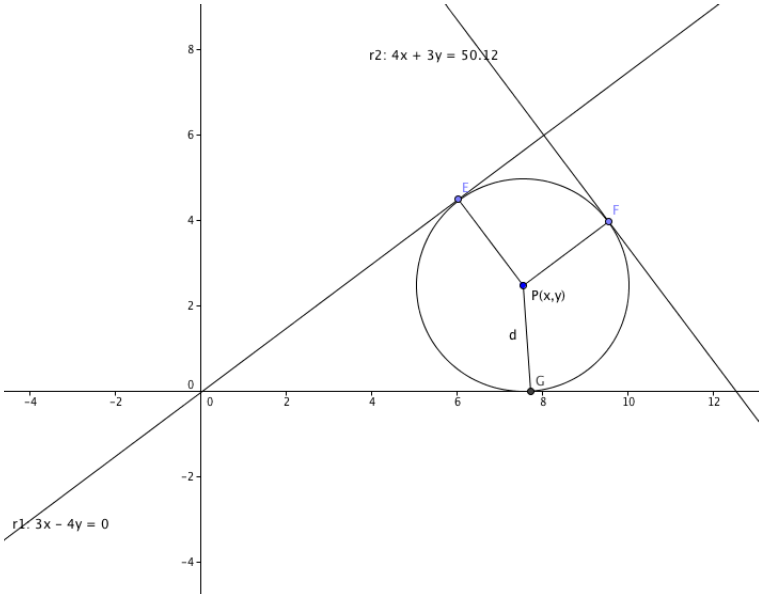


Figura 4.4: Triángulo y circunferencia inscrita.

Consideremos $P(x, y)$ el centro de la circunferencia inscrita y las rectas siguientes

$$r_1 \to 3x - 4y = 0, \quad r_2 \to 4x + 3y - 50 = 0, \quad r_3 \to y = 0.$$

Entonces se verifica que

- La distancia del punto P a la recta r_1 es igual a la distancia del P a la recta r_3, es decir
$$d(P, r_1) = d(P, r_3) \Rightarrow \frac{|3x - 4y|}{5} = |y| \Rightarrow 5|y| = |3x - 4y|$$
Entonces distinguimos las dos posibilidades siguientes:
(a) $5y = 3x - 4y \Rightarrow 9y = 3x \Rightarrow x = 3y$.
(b) $5y = -3x + 4y \Rightarrow y = -3x$. Esta bisectriz no nos vale.

- La distancia del punto P a la recta r_2 es igual a la distancia del P a la recta r_3, es decir

$$d(P,r_2)=d(P,r_3)\ \Rightarrow\ \frac{|4x+3y-50|}{5}=|y|\ \Rightarrow\ 5|y|=|4x+3y-50|$$

Entonces distinguimos las dos posibilidades siguientes:
(a) $5y=4x+3y-50\ \Rightarrow\ y=2x-25$. Esta bisectriz no nos sirve.
(b) $5y=-4x-3y+50\ \Rightarrow\ 2x+4y=25$.

El punto de corte de estas dos bisectrices es el incentro, es decir, el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo. Resolvemos el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & 3y \\ 2x+4y & = & 25 \end{array}\right\}$$

cuya solución, después de realizar las oportunas simplificaciones, es

$$x=\frac{15}{2},\ y=\frac{5}{2}.$$

De esta manera llegamos a obtener el centro de la circunferencia, que es, $P(15/2,5/2)$.

Nos falta calcular el radio de la circunferencia para poder escribir su ecuación, pero su radio es $d(P,r_3)=y=5/2$. En consecuencia, la ecuación de la circunferencia es

$$\left(x-\frac{15}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$

o, lo que es lo mismo después de realizar diversas simplificaciones,

$$4x^2+4y^2-60x-20y+225=0. \qquad \square$$

●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●●

Clasificación de Cónicas

Clasificación de Cuádricas

Clasificación de Cónicas

$\|A\|$	A_{00}	$A_{11}+A_{22}$	**Cuádrica**
$\neq 0$	$\neq 0, > 0$		*Elipse imaginaria*
			Signo $\|A\| =$ *Signo*$(a_{11}+a_{22})$
$\neq 0$	$\neq 0, > 0$		*Elipse real*
			Signo $\|A\| \neq$ *Signo*$(a_{11}+a_{22})$
$\neq 0$	$\neq 0, < 0$		*Hipérbola*
$\neq 0$	$= 0$		*Parábola*
$= 0$	$\neq 0, > 0$		*Par de rectas no paralelas imaginarias*
$= 0$	$\neq 0, < 0$		*Par de rectas no paralelas reales*
$= 0$	$= 0$	$\neq 0, > 0$	*Par de rectas paralelas imaginarias*
$= 0$	$= 0$	$\neq 0, < 0$	*Par de rectas paralelas reales*
$= 0$	$= 0$	$= 0$	*Par de rectas coincidentes*

Ecuaciones reducidas de las cónicas

- Cónicas irreducibles

Centro único	**Sin centro**
$r_{00}+r_{11}z_1^2+r_{22}z_2^2=0$	$2r_{02}z_2+r_{11}z_1^2=0$
Elipses e hipérbolas.	Parábolas.

- Cónicas reducibles

Par de rectas no paralelas	**Par de rectas paralelas**
$r_{11}z_1^2+r_{22}z_2^2=0.$	$r_{00}+r_{11}z_1^2=0.$

Cálculo de los coeficientes de las ecuaciones reducidas

- Cónicas irreducibles

Centro único	**Sin centro**
$r_{00}=\dfrac{\|A\|}{A_{00}}$	$r_{11}=a_{11}+a_{22}$
$r_{11}+r_{22}=a_{11}+a_{22}$	$r_{02}^2=\dfrac{-\|A\|}{a_{11}+a_{22}}$
$r_{11}r_{22}=A_{00}$	

- Cónicas reducibles

Par de rectas no paralelas	**Par de rectas paralelas**
$r_{11}r_{22}=A_{00}$	$r_{11}=a_{11}+a_{22}$
$r_{11}+r_{22}=a_{11}+a_{22}$	$r_{00}=\dfrac{A_{11}+A_{22}}{a_{11}+a_{22}}$

Clasificación de Cuádricas

CUÁDRICAS ORDINARIAS, $|A| \neq 0$

A_{00}	s	I_3	$\|A\|$	**Cuádrica**
$\neq 0$	3		> 0	*Elipsoide imaginario*
$\neq 0$	3		< 0	*Elipsoide real*
$\neq 0$	1		> 0	*Hiperboloide hiperbólico*
$\neq 0$	1		< 0	*Hiperboloide elíptico*
$= 0$		> 0		*Paraboloide elíptico*
$= 0$		< 0		*Paraboloide hiperbólico*

CUÁDRICAS DEGENERADAS, $|A| = 0$

A_{00}	s	I_3	I_4	J	K	$\|A\|$	**Cuádrica**
$\neq 0$	3						*Cono imaginario*
$\neq 0$	1						*Cono real*
$= 0$		$\neq 0, > 0$		$\neq 0$		> 0	*Cilindro imaginario* (Signo J = signo I_4)
$= 0$		$\neq 0, > 0$		$\neq 0$		< 0	*Cilindro real* (Signo$J \neq$ signo I_4)
$= 0$		$\neq 0, > 0$		$= 0$			2 *planos secantes imaginarios*
$= 0$		$\neq 0, < 0$		$\neq 0$			*Cilindro hiperbólico*
$= 0$		$\neq 0, < 0$		$= 0$			2 *planos secantes reales*
$= 0$		$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$			*Cilindro parabólico*
$= 0$		$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	> 0		*Planos paralelos imaginarios*
$= 0$		$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	< 0		*Planos paralelos reales*
$= 0$		$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$		*Planos coincidentes*
$= 0$		$= 0$	$= 0$				*Plano único*

Ecuación reducida de las Cuádricas

Cuádricas con centro único

Elipsoides, Hiperboloides y conos.

Cuádrica	Ecuación	Parámetros
Elipsoide imaginario	$\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}+\frac{z_3^2}{c^2}=-1$	$a^2=\frac{r_{00}}{r_{11}},\ b^2=\frac{r_{00}}{r_{22}},\ c^2=\frac{r_{00}}{r_{33}}$
Elipsoide real	$\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}+\frac{z_3^2}{c^2}=1$	$a^2=\frac{-r_{00}}{r_{11}},\ b^2=\frac{-r_{00}}{r_{22}},\ c^2=\frac{-r_{00}}{r_{33}}$
Hiperboloide elíptico	$\frac{z_1^2}{a^2}-\frac{z_2^2}{b^2}-\frac{z_3^2}{c^2}=1$	$a^2=\frac{-r_{00}}{r_{11}},\ b^2=\frac{r_{00}}{r_{22}},\ c^2=\frac{r_{00}}{r_{33}}$
Hiperboloide hiperbólico	$\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}-\frac{z_3^2}{c^2}=1$	$a^2=\frac{-r_{00}}{r_{11}},\ b^2=\frac{-r_{00}}{r_{22}},\ c^2=\frac{r_{00}}{r_{33}}$
Cono imaginario	$\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}+\frac{z_3^2}{c^2}=0$	$a^2=\frac{1}{r_{11}},\ b^2=\frac{1}{r_{22}},\ c^2=\frac{1}{r_{33}}$
Cono real	$\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}-\frac{z_3^2}{c^2}=0$	$a^2=\frac{1}{r_{11}},\ b^2=\frac{1}{r_{22}},\ c^2=\frac{-1}{r_{33}}$

Paraboloides.

Cuádrica	Ecuación	Parámetros
Paraboloide elíptico	$z_3=\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}$	$a^2=\frac{-2r_{03}}{r_{11}},\ b^2=\frac{-2r_{03}}{r_{22}}$
Paraboloide hiperbólico	$z_3=\frac{z_1^2}{a^2}-\frac{z_2^2}{b^2}$	$a^2=\frac{-2r_{03}}{r_{11}},\ b^2=\frac{2r_{03}}{r_{22}}$

Cilindros no parabólicos.

Cuádrica	Ecuación	Parámetros
Cilindro imaginario	$\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}=-1$	$a^2=\frac{r_{00}}{r_{11}},\ b^2=\frac{r_{00}}{r_{22}}$
Cilindro elíptico real	$\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}=1$	$a^2=\frac{-r_{00}}{r_{11}},\ b^2=\frac{-r_{00}}{r_{22}}$
Cilindro hiperbólico	$\frac{z_1^2}{a^2}-\frac{z_2^2}{b^2}=1$	$a^2=\frac{-r_{00}}{r_{11}},\ b^2=\frac{r_{00}}{r_{22}}$

Pares de planos secantes.

Cuádrica	Ecuación	Parámetros
Planos secantes imaginarios	$\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}=0$	$a^2=\frac{1}{r_{11}},\ b^2=\frac{1}{r_{22}}$
Planos secantes reales	$\frac{z_1^2}{a^2}-\frac{z_2^2}{b^2}=0$	$a^2=\frac{1}{r_{11}},\ b^2=\frac{-1}{r_{22}}$

Cuádrica	Ecuación	Parámetros
Cilindro parabólico	$z_1^2 = 2pz_2$	$p = \frac{-r_{02}}{r_{11}}$

CilindrosParabólicos.

Pares de planos paralelos.

Cuádrica	Ecuación	Parámetros
Planos paralelos reales	$z_1^2 = a^2$	$a^2 = \frac{-r_{00}}{r_{11}}$
Planos paralelos imaginarios	$z_1^2 = -a^2$	$a^2 = \frac{r_{00}}{r_{11}}$
Planos paralelos coincidentes.	$z_1^2 = 0$	

Plano único.

Cuádrica	Ecuación
Plano único	$r_{00} + 2r_{01}z_1 + 2r_{02}z_2 + 2r_{03}z_3 = 0$

Coeficientes de las ecuaciones reducidas

Cuádricas con centro único.

- r_{11}, r_{22} y r_{33} son las raíces de la ecuación secular $-\lambda^3 + I_4\lambda^2 - I_3\lambda + I_2 = 0$.
- $r_{00} = \frac{I_1}{I_2}$.

Paraboloides.

- r_{11} y r_{22} son las raíces de la ecuación secular $\lambda^2 - I_4\lambda + I_3 = 0$.
- $r_{03}^2 = \frac{-I_1}{I_3}$.

Cilindros no parabólicos. Pares de planos secantes

- r_{11} y r_{22} son las raíces de la ecuación secular $\lambda^2 - I_4\lambda + I_3 = 0$.
- $r_{00} = \frac{J}{I_3}$.

Cilindros parabólicos.

- $r_{11} = I_4$, $r_{02} = \sqrt{\frac{J}{I_4}}$.

Pares de planos paralelos.

- $r_{00} = \frac{K}{I_4}$, $r_{11} = I_4$.

Problema 4.9: *Halla el valor de m para que los puntos $A(m,0,1)$, $B(0,1,2)$, $C(1,2,3)$ y $D(7,2,1)$ estén en un mismo plano. ¿Cuál es la ecuación de ese plano?*

SOLUCIÓN: Hallamos la ecuación del plano que contiene a los puntos B, C y D, para luego imponer que el punto A se encuentre sobre el plano.

El plano que buscamos contiene a los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CD}$. Pero

$$\overrightarrow{BC}(1,1,1), \quad \overrightarrow{CD}(6,0,-2),$$

por lo que el plano ha de ser paralelo a los vectores $(1,1,1)$ y $(3,0,-1)$.

Un vector normal a este plano es el producto vectorial de ambos, que es

$$(1,1,1) \wedge (3,0,-1) = (-1,4,-3).$$

Así, la ecuación del plano viene dada por

$$1(x-0) - 4(y-1) + 3(z-2) = 0, \quad \Rightarrow \quad x - 4y + 3z - 2 = 0.$$

Ahora, para que A pertenezca al plano, debe verificar su ecuación, es decir,

$$m - 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad m = -1.$$

□

Problema 4.10: *Demuéstrese que si los vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$, distintos del vector nulo, son ortogonales dos a dos, entonces son linealmente independientes.*

SOLUCIÓN: Supongamos que los vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son linealmente dependientes. Esto implica que podemos encontrar escalares α, β y γ, no nulos, tales que

$$\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b} + \gamma \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}.$$

Si en la ecuación anterior multiplicamos escalarmente por $\boldsymbol{a}$ tenemos que

$$\alpha(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}) + \beta(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}) + \gamma(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0} \cdot \boldsymbol{a} \Rightarrow \alpha|\boldsymbol{a}|^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0.$$

Si en la misma ecuación ahora multiplicamos por $\boldsymbol{b}$ tenemos que

$$\alpha(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) + \beta(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}) + \gamma(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0} \cdot \boldsymbol{b} \Rightarrow \beta|\boldsymbol{b}|^2 = 0 \Rightarrow \beta = 0.$$

Si multiplicamos por $\boldsymbol{c}$ tenemos que

$$\alpha(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) + \beta(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) + \gamma(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{0} \cdot \boldsymbol{c} \Rightarrow \gamma|\boldsymbol{c}|^2 = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \qquad \square$$

lo que nos lleva a la conclusión, por contradicción, de que los vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son linealmente independientes.

Problema 4.11: *Discútase la existencia de valores de a para que la recta r esté contenida en el plano $x+y+z=1$.*

$$r \equiv \begin{cases} 3x+ay+z &= 1 \\ 2x+6y-2z &= 6. \end{cases}$$

SOLUCIÓN: Consideramos

$$\begin{cases} 3x+z &= 1-ay \\ 2x-2z &= 6-6y. \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 3x+z &= 1-ay \\ x-z &= 3-3y. \end{cases}$$

Sumando, podemos despejar x, de la forma

$$x = 1 - \frac{a+3}{4}y$$

Ahora obtenemos z, como

$$z = x-3+3y = 1-\frac{a+3}{4}y-3+3y = -2+\frac{9-a}{4}y$$

En consecuencia, escribimos la recta r en función de a (en forma paramétrica, como

$$\begin{cases} x &= 1-(a+3)\lambda \\ y &= \lambda \\ z &= -2+(9-a)\lambda \end{cases}$$

Ahora para que la recta esté contenida en el plano debe verificar sus ecuaciones:

$$1-(a+3)\lambda+4\lambda-2+(9-a)\lambda = 1$$

$$(10-2a)\lambda = 2 \quad \rightarrow \quad 10-2a=0 \quad \rightarrow a=5. \qquad \square$$

Si $a=5$, la recta y el plano son paralelos.

Si $a \neq 5$ entonces $\lambda = 2/(10-2a)$ y se cortan en un punto.

Luego, no existe valores de a para los que la recta esté contenida en el plano.

Problema 4.12: *Hállese el lugar geométrico de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas*

$$\begin{cases} r_1 & \equiv & 5x + y + 3 = 0 \\ r_1 & \equiv & x - 2y + 16 = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN: El lugar geométrico que nos piden son las rectas en las que cada punto se encuentra a la misma distancia de las rectas dadas. Así, si (x, y) es un punto de esas rectas bisectrices, entonces

$$d(X, r_1) = d(X, r_2).$$

o, lo que es lo mismo

$$\frac{|5x + y + 3|}{\sqrt{26}} = \frac{|x - 2y + 16|}{\sqrt{5}}$$

por lo que tenemos dos casos:

$$\sqrt{5}(5x + y + 3) = \sqrt{26}(x - 2y + 16)$$

$$\sqrt{5}(5x + y + 3) = -\sqrt{26}(x - 2y + 16)$$

tratándose de las rectas dadas por:

$$b_1 : (5\sqrt{5} - \sqrt{26})x + (\sqrt{5} + 2\sqrt{26})y + 3\sqrt{5} - 16\sqrt{26} = 0$$

$$b_2 : (5\sqrt{5} + \sqrt{26})x + (\sqrt{5} - 2\sqrt{26})y + 3\sqrt{5} + 16\sqrt{26} = 0$$

Las pendientes de estas rectas son:

$$m_1 : \quad \frac{-(5\sqrt{5} - \sqrt{26})}{\sqrt{5} + 2\sqrt{26}}$$

$$m_2 : \quad \frac{-(5\sqrt{5} + \sqrt{26})}{\sqrt{5} - 2\sqrt{26}}$$

por lo que

$$m_1 \cdot m_2 = -1, \qquad \square$$

por lo que son ortogonales, y $b_1 \perp b_2$.

El punto de corte de las rectas se obtiene resolviendo el sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas formado por r_1 y r_2, cuya solución es el punto $(-2, 7)$.

Por último habría que comprobar que este es el punto donde se cortan b_1 y b_2.

Problema 4.13: *Hállese el punto simétrico de* $P(1,2,3)$ *respecto de la recta*

$$x = y = \frac{z+5}{3}$$

SOLUCIÓN: a) Primero calculamos el plano que contiene al punto P y que es perpendicular a r.

$$PX \perp v_\pi \quad \Rightarrow \quad PX \cdot v_\pi = 0$$

por lo que

$$(x-1, y-2, z-3) \cdot (1,1,3) = 0$$

por lo que el plano es

$$\pi \equiv x + y + 3z - 12 = 0$$

b) Obtenemos el punto $R = r \bigcap \pi$.

Escribiendo la recta r en coordenadas cartesianas y sustituyendo en la ecuación del plano para obtener λ, se llega a que el punto R es $R(27/11, 27, 11, 26/11)$.

c) Si llamamos $Q(a,b,c)$ al punto que nos piden, sabemos que el punto R que acabamos de calcular es el punto medio del segmentoPQ, por lo que calculamos fácilmente $Q(a,b,c)$ como

$$\begin{aligned} \frac{1+a}{2} = \frac{27}{11} \quad &\rightarrow \quad a = \frac{43}{11} \\ \frac{2+b}{2} = \frac{27}{11} \quad &\rightarrow \quad a = \frac{32}{11} \\ \frac{3+c}{2} = \frac{27}{11} \quad &\rightarrow \quad a = \frac{19}{11} \end{aligned}$$

□

Problema 4.14: *Un código de devolución interna establece que un contribuyente que cambia de trabajo puede deducir los gastos por desplazamiento a una nueva residencia si la situación geográfica del nuevo trabajo ha supuesto añadir* 35 *millas a la distancia desde la antigua residencia al nuevo lugar de trabajo.*
Una compañía con una factoría en un punto geográfico F está abriendo una nueva factoría en un nuevo punto F', a 61 *millas de distancia. Encuéntrese la región R en la que los empleados residentes, si son desplazados, podrán realizar la deducción por desplazamientos. (Resuélvase analítica y geométricamente).*

SOLUCIÓN: La cónica que describe las condiciones del problema es la hipérbola, en la que la diferencia de distancias a dos puntos (focos) es una constante.

Para representar gráficamente la hipérbola del problema localizamos las factorías sobre el eje X, separadas una distancia de 61 millas. El centro es el vértice $(0,0)$.

Tenemos así dos puntos notables de la hipérbola,

$$F(c,0) = (30{,}5,0) \qquad F'(-c,0) = (-30{,}5,0)$$

Además, si (x,y) es un punto de la frontera de la región R, la distancia del punto a $(-c,0)$ menos la distancia del punto a $(c,0)$ es igual a 35. Esto nos lleva a que

$$2c = 61, \qquad 2a = 35,$$

por lo que $b^2 = 624$.

Entonces, la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{306{,}25} - \frac{y^2}{624} = 1.$$

□

Falta representar gráficamente.