



EESC - USP

USP Brasil

ANÁLISE NÃO LINEAR DE TRELIÇAS POR MEIO DO MEF-P

**SET5971 - O MEF Posicional Aplicado à Dinâmica Não Linear de
Trelças**

**Docente: Prof. Tit. PhD. Humberto Breves Coda
Discente: Diego Dias Veloso**



EESC · USP



CONTEUDO

01

INTRODUÇÃO

02

DESENVOLVIMENTO

02.a

FORMULAÇÃO TEÓRICA

02.b

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

03

RESULTADOS

04

CONCLUSÕES

05

REFERÊNCIAS

INTRODUÇÃO



Estacionariedade da Energia Mecânica



Posições nodais.



Equilíbrio na configuração deformada.

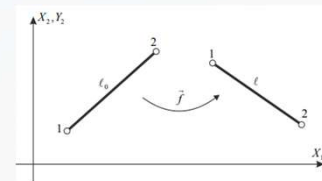
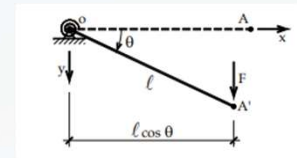
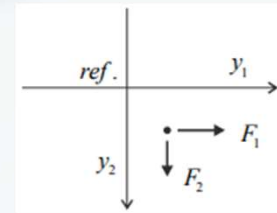
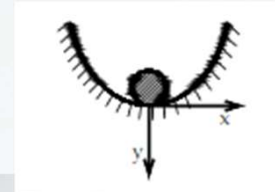


Obter posições nodais atuais



EESC - USP

USP Brasil





EESC · USP

USP
Brasil

DESENVOLVIMENTO

Energia mecânica total do sistema:

- Potencial das forças externas \mathbb{P}
- Energia de deformação dos elementos \mathbb{U}
- Energia Cinética \mathbb{K}



Forças conservativas:

- Independentes da trajetória
- $\mathbb{P} = -F_i^\alpha Y_i^\alpha$

DESENVOLVIMENTO

Equilíbrio Mecânico

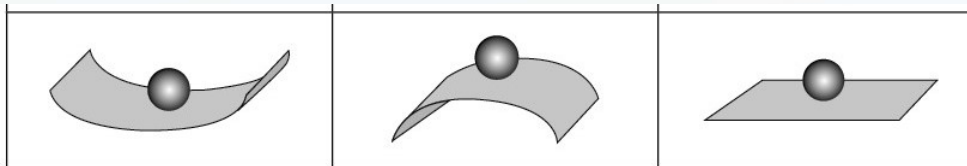
- Variação nula da energia mecânica total do sistema $\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial\vec{Y}} \cdot \delta\vec{Y} = \text{Grad}(\Pi) \cdot \delta\vec{Y} = 0 \quad \frac{\partial\Pi}{\partial Y_i} = 0_i$
- Para solução não trivial, $\delta\vec{Y}$ é qualquer.
- Hessiana: $\mathbf{H} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\vec{Y} \otimes \partial\vec{Y}} \Leftrightarrow H_{ij} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial Y_i \partial Y_j}$

Visão

$H > 0$

$H < 0$

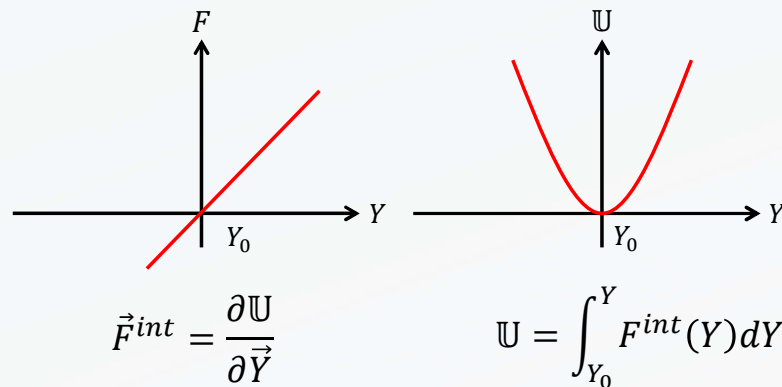
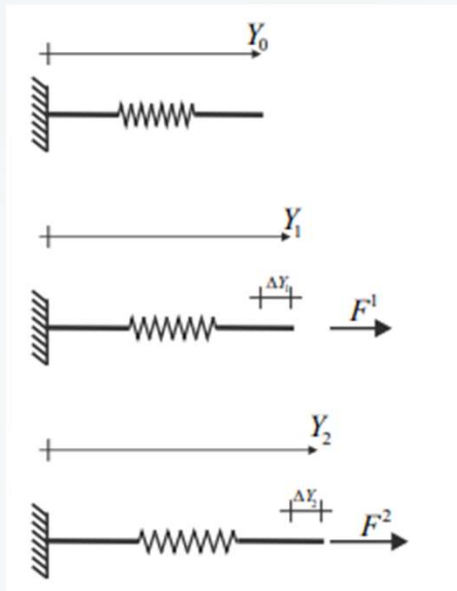
$H = 0$



DESENVOLVIMENTO

Energia de Deformação

- Força interna reativa crescente com o aumento da deformação



DESENVOLVIMENTO

Medidas de Deformação

- De engenharia

$$\varepsilon = \frac{dy - dx}{dx}$$

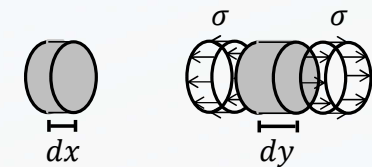
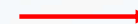
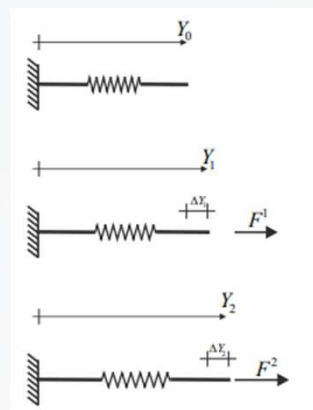
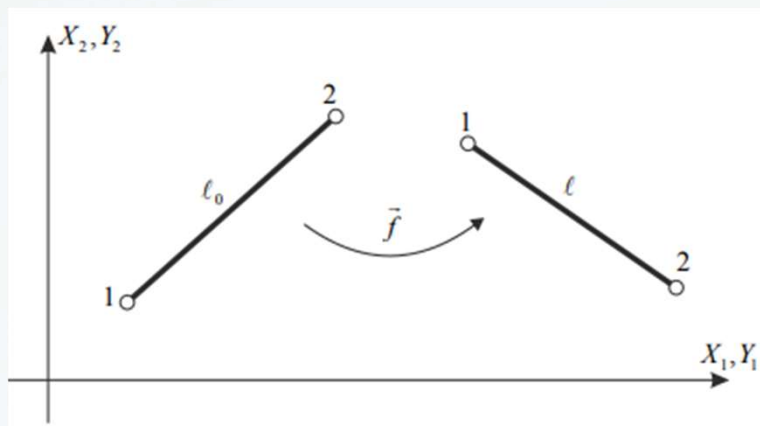
- Green-Lagrange

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} \frac{dy^2 - dx^2}{dx^2}$$

- Almansi

$$\mathbb{A} = \frac{1}{2} \frac{dy^2 - dx^2}{dx^2}$$

Euleriana



DESENVOLVIMENTO

Formulação Estática

$$\mathbb{K} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U}$$

- Forças internas: $F_i^{int(j)} = \frac{\partial U_e^j}{\partial Y_i} = A_0^{(j)} S \frac{(-1)^\beta}{l_0^{(j)}} (Y_k^2 - Y_k^1)$
- Estacionariedade energética: $\frac{\partial \Pi}{\partial Y_i} = F_i^{int}(\vec{Y}) - F_i^{ext} = 0_i \Leftrightarrow F_i^{int} - F_i = 0_i$
- Equilíbrio na configuração deformada: $F_i^{int}(\vec{Y})$
iterações $\rightarrow (\vec{Y}) \Leftrightarrow F_i^{int}$

DESENVOLVIMENTO

Formulação Estática

$$\mathbb{K} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U}$$

- Matriz Hessiana:

$$H_{ik} = \left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial Y_i \partial Y_k} \right|_{\vec{Y}^0}$$

$$\left(H_{mn}^{\alpha\beta} \right)^j = (-1)^\beta (-1)^\alpha \frac{A_0^j}{l_0^{(j)}} \left(K_t(\mathbb{E}) \frac{(Y_m^2 - Y_m^1)}{l_0^{(j)}} \frac{(Y_n^2 - Y_n^1)}{l_0^{(j)}} + S \delta_{mn} \right)$$

$$K_t^{SVK} = K \qquad K_t^{Hooke} = K \left(\frac{1}{\sqrt{2\mathbb{E} + 1}} \right) \qquad K_t^{Al} = K \left(\frac{1}{(2\mathbb{E} + 1)^2} \right)$$

DESENVOLVIMENTO

Newton-Raphson

- Vetor resíduo: $g_i = \frac{\partial \Pi}{\partial Y_i} = F_i^{int} - F_i = 0_i$
- Posição iterativa $g_i(\vec{Y}^0) \neq 0_i$
- Expandindo o resíduo nas vizinhanças do ponto: $g_i(\vec{Y}) \approx g_i(\vec{Y}^0) + \frac{\partial g_i}{\partial Y_k} \Big|_{\vec{Y}^0} \Delta Y_k \approx 0_i$

$$g_i(\vec{Y}) \approx g_i(\vec{Y}^0) + \frac{\partial g_i}{\partial Y_k} \Big|_{\vec{Y}^0} \Delta Y_k \approx 0_i$$

$$g_i(\vec{Y}^0) \neq 0_i$$

While $\Delta Y_k > \text{Tol}$

$$Y_k^0 = Y_k^0 + \Delta Y_k$$

$$\Delta Y_k = - \left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial Y_k \partial Y_i} \Big|_{\vec{Y}^0} \right)^{-1} g_i(\vec{Y}^0)$$

DESENVOLVIMENTO

Condições de Contorno

- Para o grau de liberdade restrito:
 - Zerar linhas e colunas da Hessina e adicionar 1 a diagonal
 - Zerar posição do vetor desbalanceamento mecânico

DESENVOLVIMENTO

Algoritmo Newton-Raphson

Primeira tentativa

$$Y_k^0 = X_k$$

1

Aplicação das condições de contorno e obtenção da correção da posição

$$\Delta Y_k$$

5

$$\frac{|\Delta Y_k|}{|X_k|} \leq tol$$

Passo de carga/posição

$$F_k = F_k + dF_k$$

$$Y_k = Y_k + dY_k$$

2

Cálculo do vetor desbalanceamento mecânico

$$g_i = F_i^{int} - F_i$$

4

Nova posição

$$Y_k = Y_k + \Delta Y_k$$

6

Cálculo do vetor força internas e Hessiana globais

$$F_i^{int} \quad H_{ik}$$

3

$$\frac{|\Delta Y_k|}{|X_k|} > tol$$



DESENVOLVIMENTO

Formulação Dinâmica

$$\Rightarrow \Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U} + \mathbb{K}$$

- Energia cinética:

$$\mathbb{K} = \sum_{\alpha=1}^{nnos} \mathbb{K}_{\alpha} = \frac{1}{2} M_{(\alpha)} \dot{Y}_k^{\alpha} \dot{Y}_k^{\alpha}$$

- Estacionariedade energética:

$$F_i^{int}(\vec{Y}) - F_i^{ext} + F_i^{iner} = 0_i$$

Sendo:

$$F_i^{iner} = M_{(\alpha)} \ddot{Y}_k^{\alpha}$$

DESENVOLVIMENTO

Newton-Raphson + Newmark

- Vetor resíduo:

$$\vec{g} = \frac{\partial \Pi}{\partial \vec{Y}} = \vec{F}_{s+1}^{int} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}}_{s+1} + \mathbf{C} \cdot \dot{\vec{Y}}_{s+1} - \vec{F}_{s+1}^{ext} = \vec{0}$$

- Discretização temporal

$$t_{s+1} = t_s + \Delta t$$

- Integrador temporal de Newmark:

$$\vec{Y}_{s+1} = \vec{Y}_s + \dot{\vec{Y}}_s \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\vec{Y}}_s + \beta \ddot{\vec{Y}}_{s+1} \right] \Delta t^2$$

$$\ddot{\vec{Y}}_{s+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \vec{Y}_{s+1} + \vec{R}_s - \gamma \Delta t \vec{Q}_s$$

$$\ddot{\vec{Y}}_{s+1} = \frac{\vec{Y}_{s+1}}{\beta \Delta t^2} - \vec{Q}_s$$

$$\beta = \frac{1}{4}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}$$

Constantes por
passo de tempo ←

$$\vec{Q}_s = \frac{\vec{Y}_s}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{\vec{Y}}_s}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\vec{Y}}_s$$

$$\vec{R}_s = \ddot{\vec{Y}}_s + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{\vec{Y}}_s$$

DESENVOLVIMENTO

Newton-Raphson + Newmark

- Resíduo:
$$\vec{g} = \frac{\partial \Pi}{\partial \vec{Y}} = \vec{F}_{s+1}^{int} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}}_{s+1} + \mathbf{C} \cdot \dot{\vec{Y}}_{s+1} - \vec{F}_{s+1}^{ext} = \vec{0}$$
- Hessiana dinâmica:
$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{estat} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t}$$
- Resolução do sistema linear:
$$\mathbf{H} \cdot \Delta \vec{Y} = -\vec{g}(\vec{Y}_{s+1}^0)$$
- Atualização da posição, velocidade e aceleração:
$$\vec{Y}_{s+1}^0 = \vec{Y}_{s+1}^0 + \Delta \vec{Y} \quad \ddot{\vec{Y}}_{s+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \dot{\vec{Y}}_{s+1} + \ddot{\vec{R}}_s - \gamma \Delta t \ddot{\vec{Q}}_s \quad \dot{\vec{Y}}_{s+1} = \frac{\vec{Y}_{s+1}^0}{\beta \Delta t^2} - \ddot{\vec{Q}}_s$$
- Primeiro passo de tempo:
$$\ddot{\vec{Y}}_0 = \mathbf{M}^{-1} \cdot (\vec{F}_0^{ext} - \vec{F}_0^{int} - \mathbf{C} \cdot \dot{\vec{Y}}_0)$$

DESENVOLVIMENTO

Algoritmo Newton-Raphson

Primeira tentativa

$$\begin{aligned} Y_k^0 &= X_k \\ \vec{Y}_{s+1} &= \vec{0} \\ \vec{Y}_{s+1} &= \vec{0} \end{aligned}$$

1

Aplicação das condições de contorno e obtenção da correção da posição ΔY_k

5

$$\frac{|\Delta Y_k|}{|X_k|} \leq tol$$

Passo de carga/posição
 $F_k = F_k + dF_k$
 $Y_k = Y_k + dY_k$
 \vec{Q}_s e \vec{R}_s

2

$$\frac{|\Delta Y_k|}{|X_k|} > tol$$

Nova posição

$$\begin{aligned} Y_k &= Y_k + \Delta Y_k \\ \vec{Y}_{s+1} &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \vec{Y}_{s+1} + \vec{R}_s - \gamma \Delta t \vec{Q}_s \\ \vec{Y}_{s+1} &= \frac{\vec{Y}_{s+1}}{\beta \Delta t^2} - \vec{Q}_s \end{aligned}$$

6

Cálculo do vetor desbalanceamento mecânico

$$\vec{g} = \vec{F}_{s+1}^{int} + \mathbf{M} \cdot \vec{Y}_{s+1} + \mathbf{C} \cdot \vec{Y}_{s+1} - \vec{F}_{s+1}^{ext}$$

4

Cálculo do vetor força internas (est+din) e Hessiana (est+din) globais

$$F_i^{int} \quad H_{ik}$$

3



DESENVOLVIMENTO

Newton-Raphson + Newmark

- Material Elasto-Plástico Perfeito:

- Relação tensão deformação:

$$d\sigma = E * d\varepsilon = E(d\varepsilon - d\varepsilon^P)$$

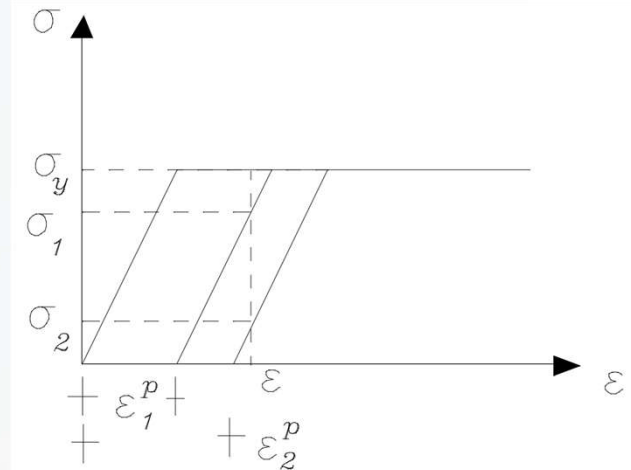
- Critério de plastificação:

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0$$

- Lei de plastificação

$$d\varepsilon^P = d\lambda * \text{sign}(\sigma)$$

- A unicidade de tensão para uma dada deformação é função da história de tensão do material



DESENVOLVIMENTO

Implementação Computacional

Leitura de arquivo de entrada .txt

Linguagem Python

Formulação 3D

Pós-Processamento AcadView

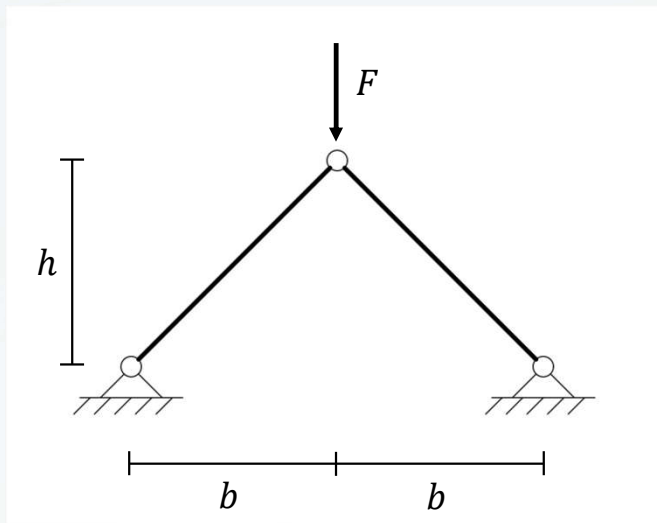
Dados de entrada:

- Coordenadas dos nós
- Incidência dos elementos
- Propriedades dos elementos
- Posições prescritas
- Forças aplicadas



RESULTADOS

2.3.6.b (CODA, 2018): Treliça de von Mises



Dados:

$$h = 1$$

$$b = 1$$

$$A = 1$$

$$K = 1000$$

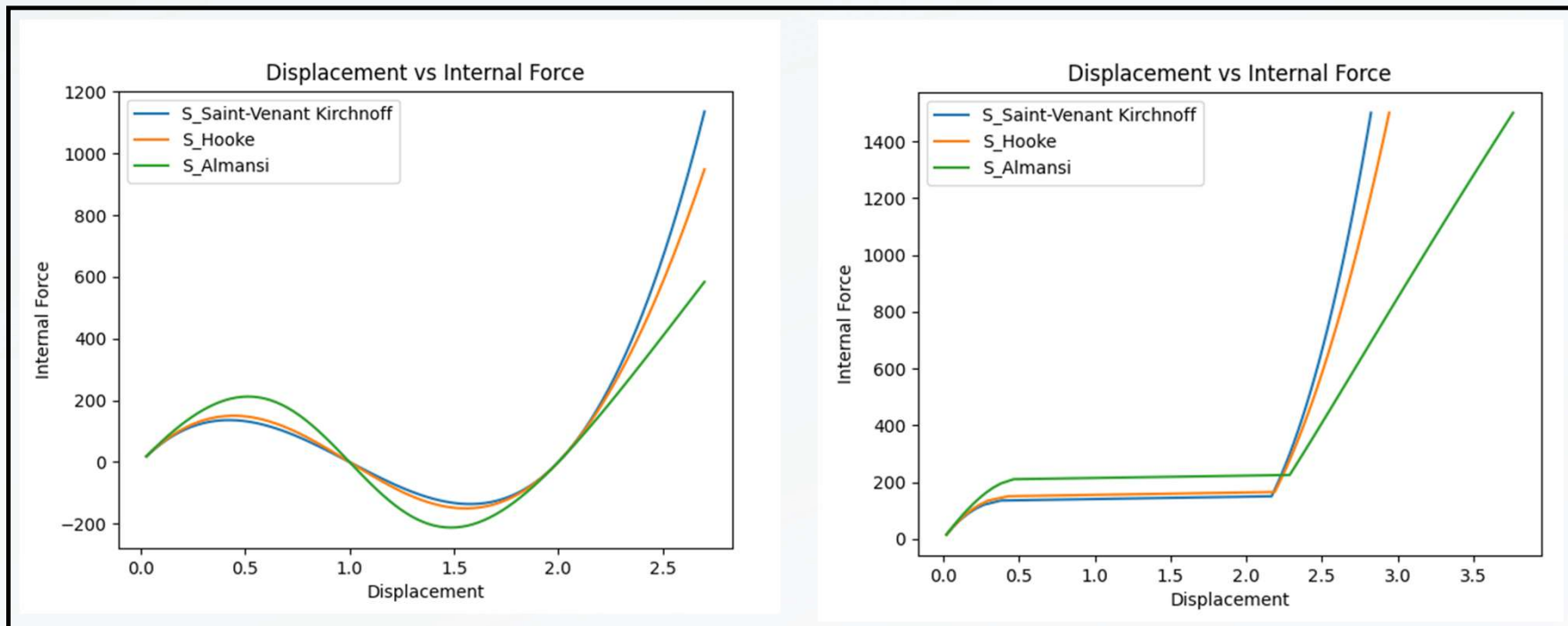
$$\Delta F = 20$$

$$\Delta Y = -0.05$$

$$tol = 10^{-6}$$

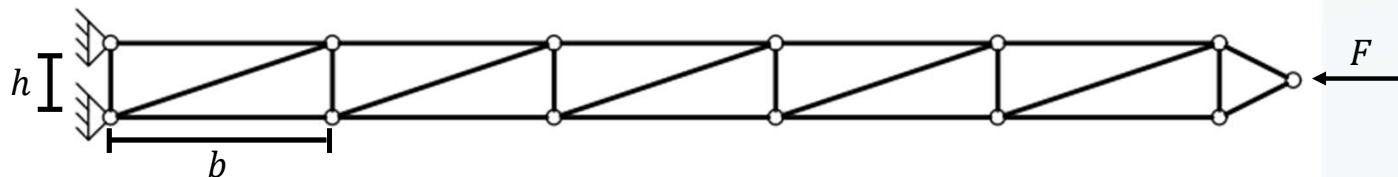
RESULTADOS

2.3.6.b (CODA, 2018): Treliza de von Mises



RESULTADOS

2.3.6.d (CODA, 2018): Torre engastada comprimida

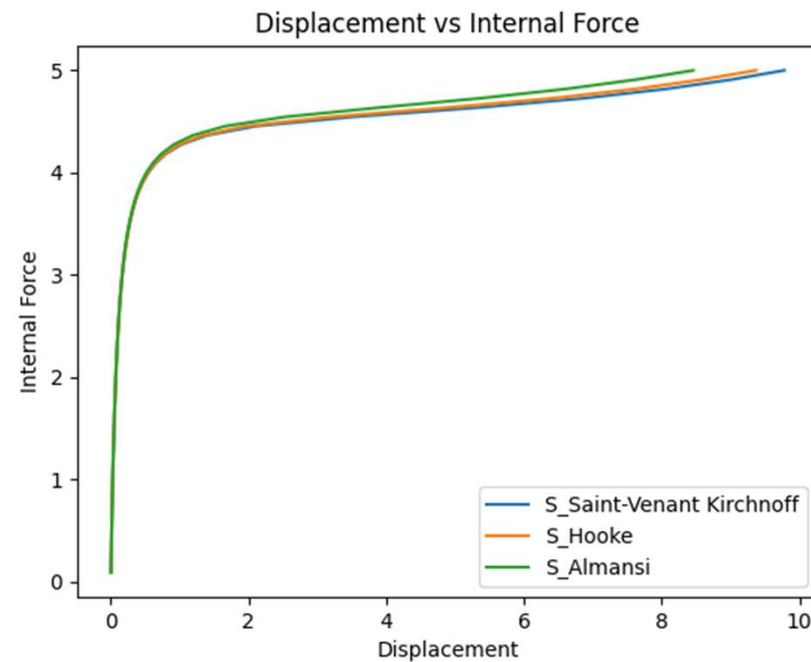


Problema estático
13 nós
23 elementos
SVK, Hooke e Almansi
Controle de força

$h = 1$
 $b = 3$
 $K = 10000$
 $A = 0,1$
 $\Delta F = 0,11$
 $tol = 10^{-6}$

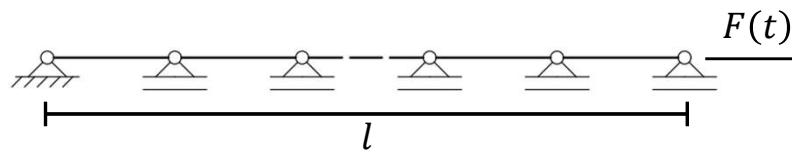
RESULTADOS

2.3.6.d (CODA, 2018): Torre engastada comprimida



RESULTADOS

2.4.4.a (CODA, 2018): Impacto longitudinal



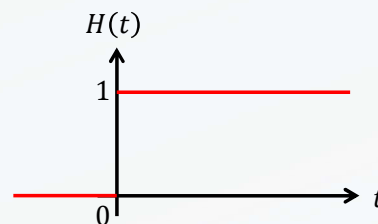
Problema dinâmico

11 nós / 101 nós

10 elementos / 100 elementos

Hooke

Carregamento súbito



$$\Delta t_{10elem} = 0,001$$

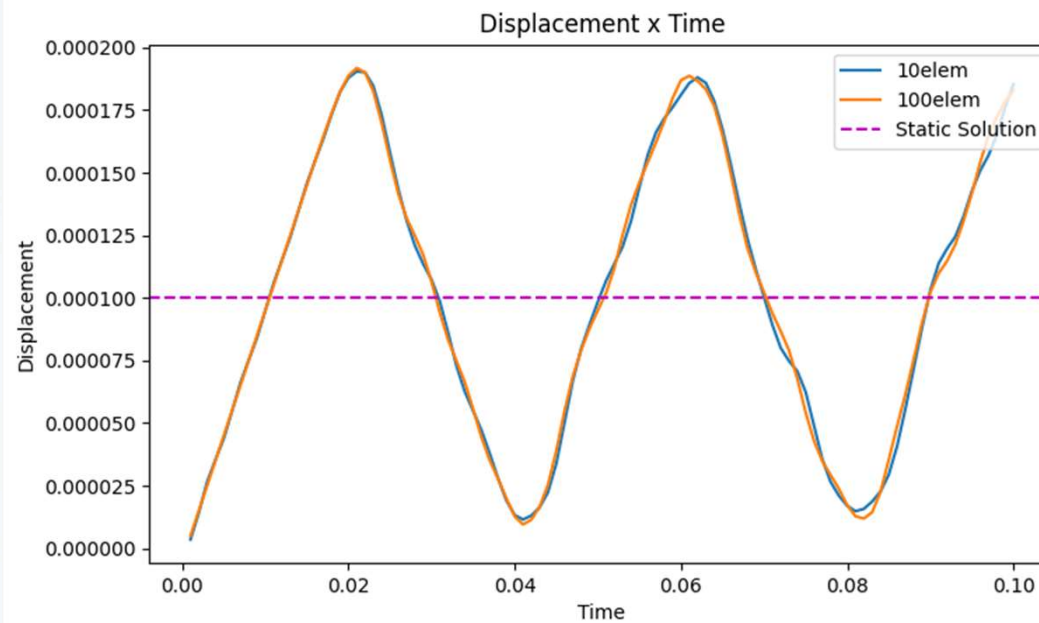
$$\Delta t_{100elem} = 0,0001$$

$$l = 1 \quad E = 10000$$

$$A = 1 \quad \rho = 1 \quad tol = 10^{-6}$$

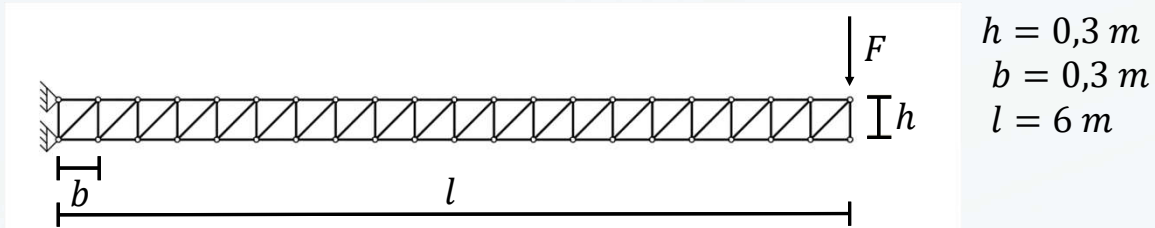
RESULTADOS

2.4.4.a (CODA, 2018): Impacto longitudinal



RESULTADOS

2.4.4.a (CODA, 2018): Torre engastada sujeita a carregamento súbito



42 nós
81 elementos
Hooke
Carregamento súbito

$$A_{\text{banzos}} = 0,005 \text{ m}^2 \quad A_{\text{mont/diag}} = 0,00812 \text{ m}^2$$

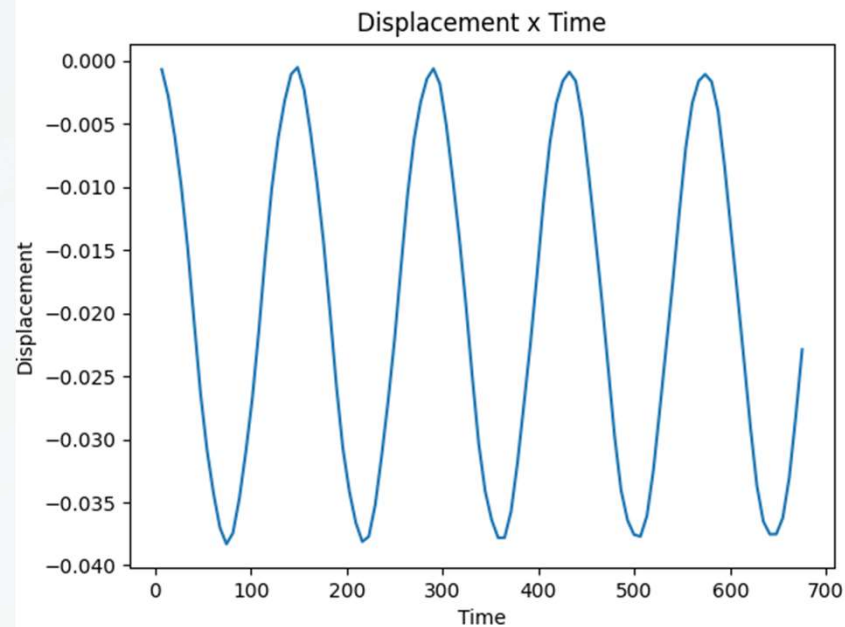
$$t_{\text{total}} = 675 \text{ ms}$$
$$\Delta t = 0,3377 \text{ ms}$$

$$E = 200 \text{ Mg/m.ms}^2 \quad \rho = 7 \text{ Mg/m}^3$$

$$F(t) = 12,5 \cdot 10^{-4} \text{ Mg.m/ms}^2 H(t) \quad \text{tol} = 10^{-7}$$

RESULTADOS

2.4.4.a (CODA, 2018): Torre engastada sujeita a carregamento súbito

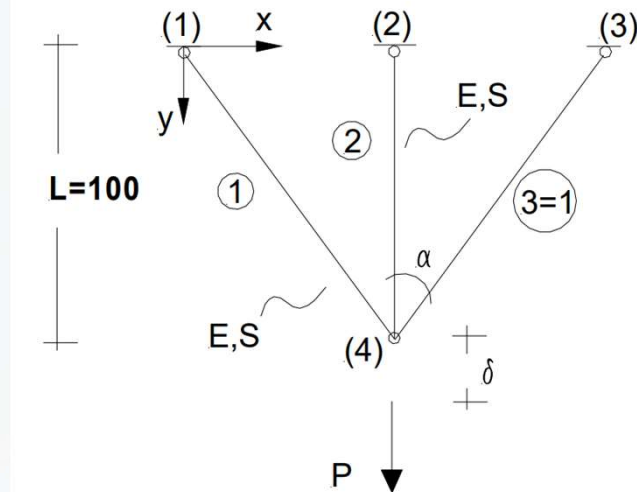


RESULTADOS

(PROENÇA, 2013): Treliza sujeita a tração

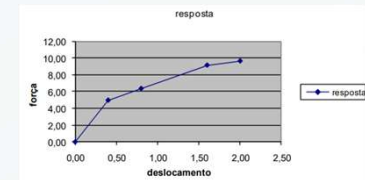
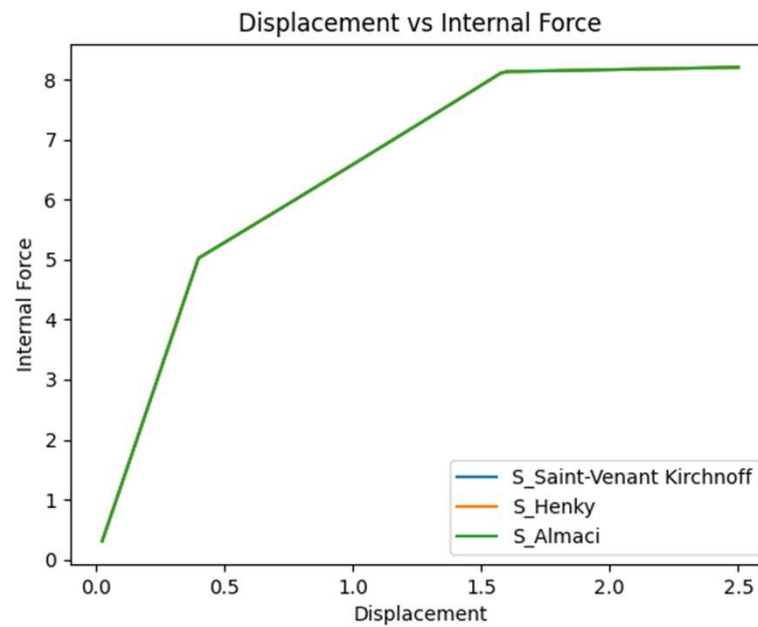
Problema estático
4 nós
3 elementos
SVK, Hooke e Almansi
Controle de posição
Sem encruamento

$L = 100$
 $\alpha = 60^\circ$
 $E = 1000$
 $A = 1$
 $\sigma_Y = 4$
 $tol = 10^{-6}$



RESULTADOS

(PROENÇA, 2013): Treliza sujeita a tração



RESULTADOS

(GRECO, 2006): CÚPULA ESTRELAR

Problema estático

13 nós

24 elementos

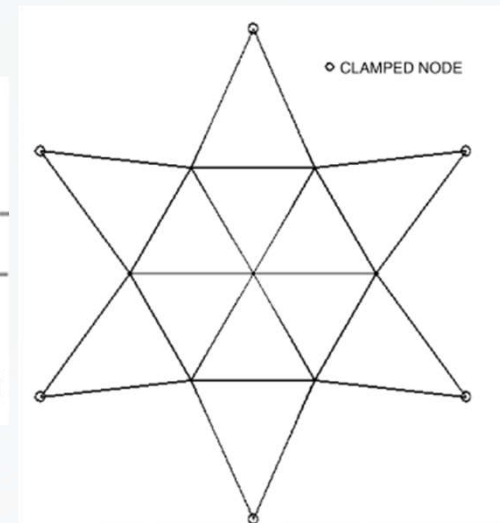
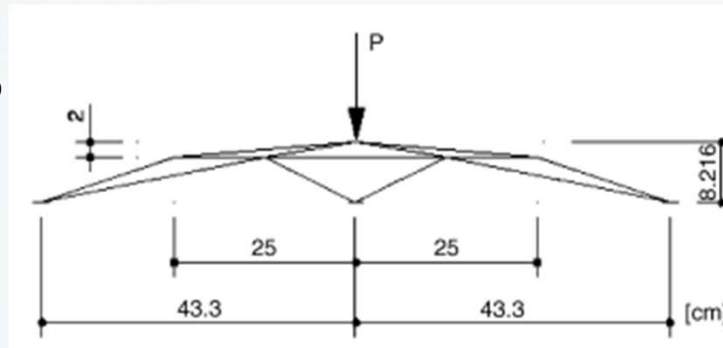
SVK, Hooke e Almansi

Controle de Força/Posição

$E = 30000$

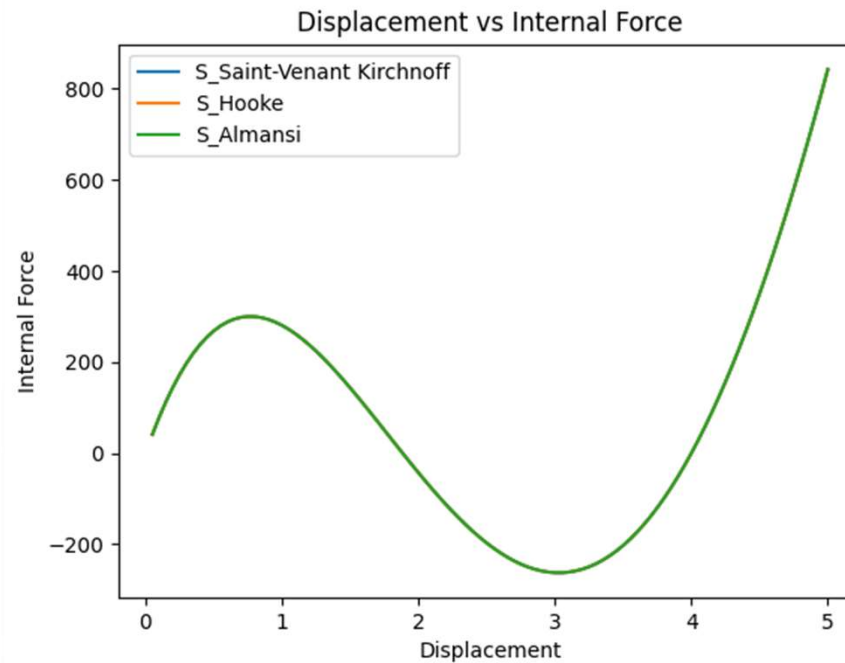
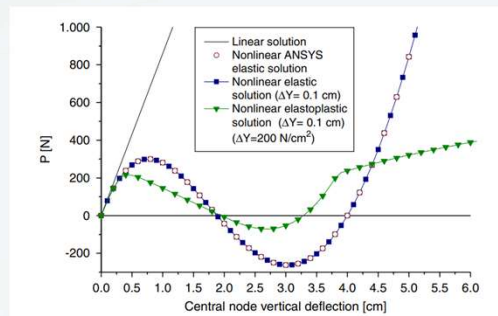
$A = 3.17$

$tol = 10^{-6}$



RESULTADOS

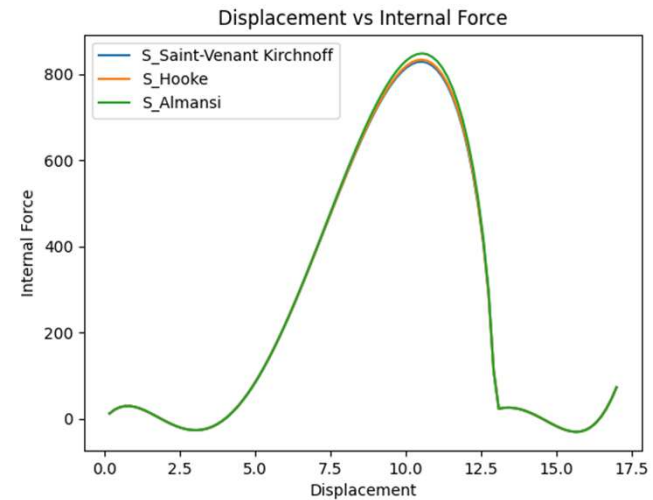
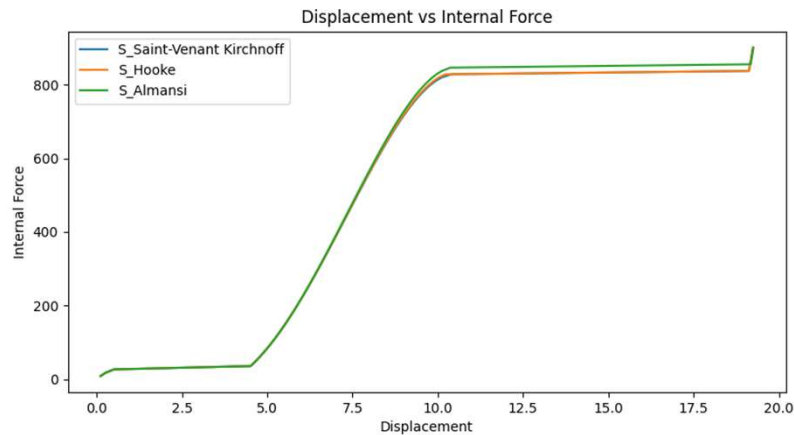
(GRECO, 2006): CÚPULA ESTRELAR



RESULTADOS

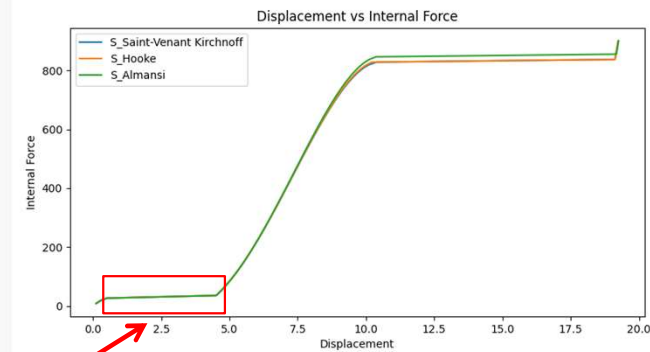
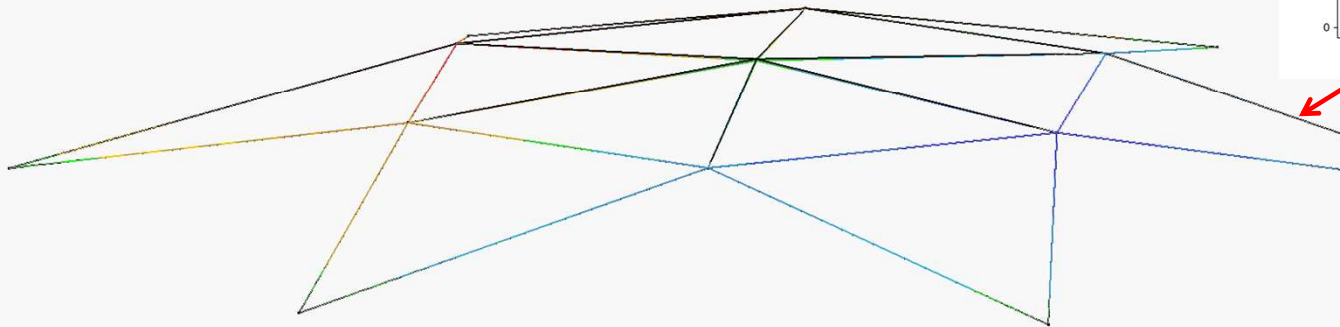
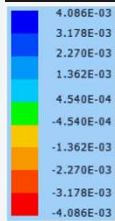
(GRECO, 2006): CÚPULA ESTRELAR

Avaliação do 2º Snap Through



RESULTADOS

(GRECO, 2006): CÚPULA ESTRELAR

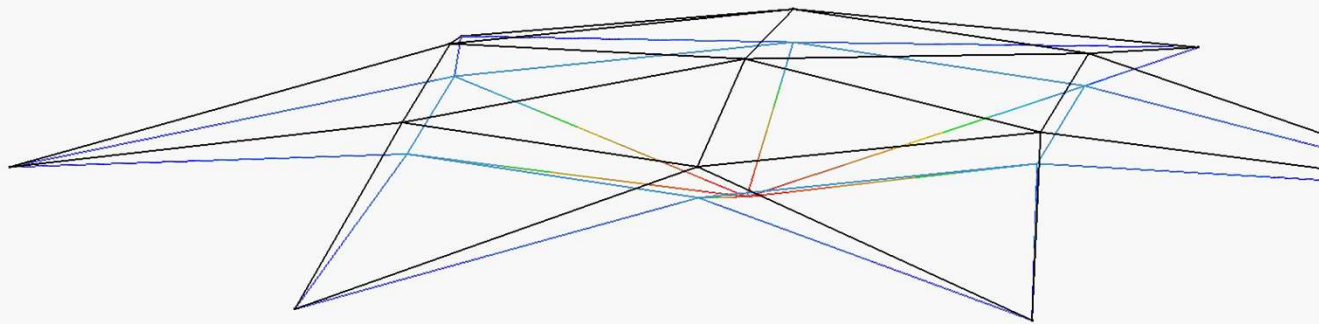
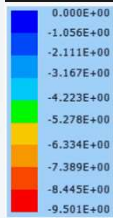


1º Snap



RESULTADOS

(GRECO, 2006): CÚPULA ESTRELAR



2º Snap

