



ANÁLISE NÃO LINEAR DE TRELIÇAS POR MEIO DO MEF-P

**SET5971 - O MEF Posicional Aplicado à Dinâmica Não Linear de
Trelíças**

Docente: Prof. Tit. PhD. Humberto Breves Coda
Discente: Diego Dias Veloso



CONTEUDO

- 01** INTRODUÇÃO
- 02** DESENVOLVIMENTO
- 02.a** FORMULAÇÃO TEÓRICA
- 02.b** IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL
- 03** RESULTADOS
- 04** CONCLUSÕES
- 05** REFERÊNCIAS

INTRODUÇÃO



Estacionariedade da Energia Mecânica



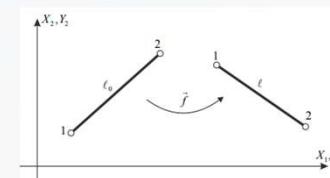
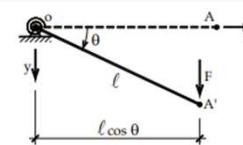
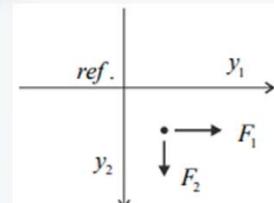
Posições nodais.



Equilíbrio na configuração deformada.



Obter posições nodais atuais



|||||||

DESENVOLVIMENTO

**Energia mecânica
total do sistema:**

- Potencial das forças externas \mathbb{P}
- Energia de deformação dos elementos \mathbb{U}
- Energia Cinética \mathbb{K}

**Forças
conservativas:**

- Independentes da trajetória
- $\mathbb{P} = -F_i^\alpha Y_i^\alpha$



DESENVOLVIMENTO

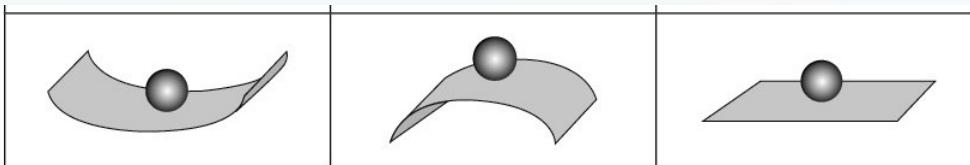
Equilíbrio Mecânico

- Variação nula da energia mecânica total do sistema $\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial\vec{Y}} \cdot \delta\vec{Y} = \text{Grad}(\Pi) \cdot \delta\vec{Y} = 0 \quad \frac{\partial\Pi}{\partial Y_i} = 0_i$
- Para solução não trivial, $\delta\vec{Y}$ é qualquer.
- Hessiana: $\mathbf{H} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\vec{Y}\otimes\partial\vec{Y}} \Leftrightarrow H_{ij} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial Y_i \partial Y_j}$

$$\mathbf{H} > 0$$

$$\mathbf{H} < 0$$

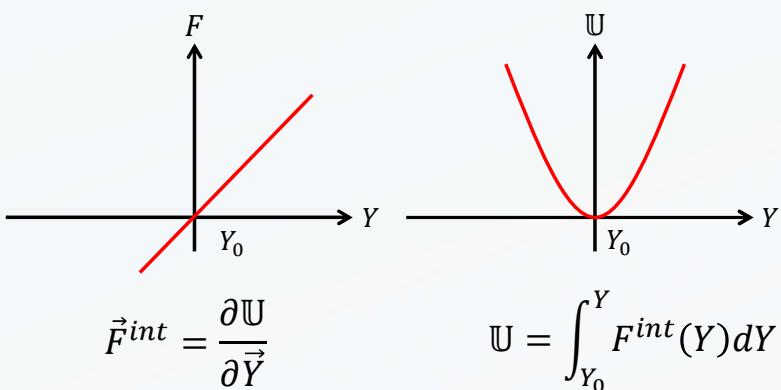
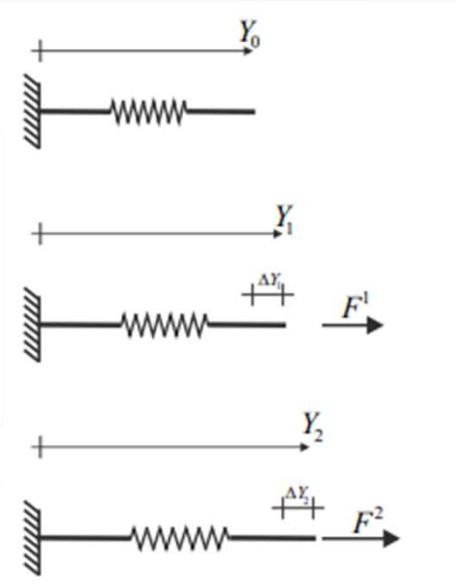
$$\mathbf{H} = 0$$



DESENVOLVIMENTO

Energia de Deformação

- Força interna reativa crescente com o aumento da deformação



DESENVOLVIMENTO

Medidas de Deformação

- De engenharia

$$\varepsilon = \frac{dy - dx}{dx}$$

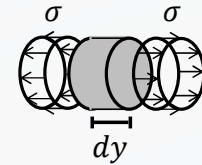
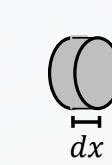
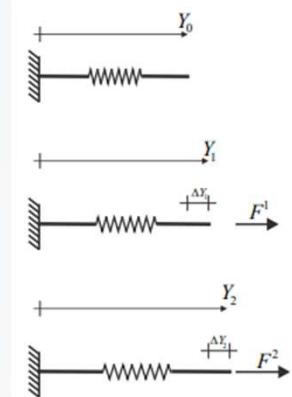
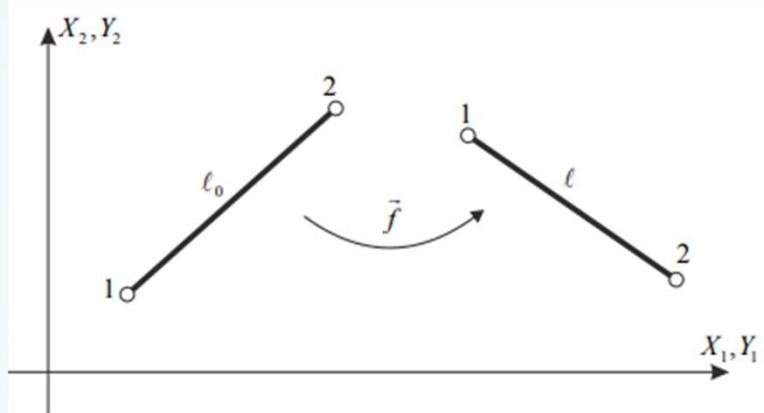
- Green-Lagrange

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} \frac{dy^2 - dx^2}{dx^2}$$

- Almansi

$$\mathbb{A} = \frac{1}{2} \frac{dy^2 - dx^2}{dy^2}$$

Euleriana



DESENVOLVIMENTO

Formulação Estática

$$\mathbb{K} = 0 \Rightarrow \Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U}$$

- Forças internas:

$$F_i^{int(j)} = \frac{\partial U_e^j}{\partial Y_i} = A_0^{(j)} S \frac{(-1)^\beta}{l_0^{(j)}} (Y_k^2 - Y_k^1)$$

- Estacionariedade energética:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y_i} = F_i^{int}(\vec{Y}) - F_i^{ext} = 0_i \Leftrightarrow F_i^{int} - F_i = 0_i$$

- Equilíbrio na configuração deformada: $F_i^{int}(\vec{Y})$

iterações $\rightarrow (\vec{Y}) \Leftrightarrow F_i^{int}$

DESENVOLVIMENTO

Formulação Estática

$$\mathbb{K} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U}$$

- Matriz Hessiana:

$$H_{ik} = \left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial Y_i \partial Y_k} \right|_{\vec{Y}^0}$$

$$(H_{mn}^{\alpha\beta})^j = (-1)^\beta (-1)^\alpha \frac{A_0^j}{l_0^{(j)}} \left(K_t(\mathbb{E}) \frac{(Y_m^2 - Y_m^1)}{l_0^{(j)}} \frac{(Y_n^2 - Y_n^1)}{l_0^{(j)}} + S \delta_{mn} \right)$$

$$K_t^{SVK} = K$$

$$K_t^{Hooke} = K \left(\frac{1}{\sqrt{2\mathbb{E} + 1}} \right)$$

$$K_t^{Al} = K \left(\frac{1}{(2\mathbb{E} + 1)^2} \right)$$

DESENVOLVIMENTO

Newton-Raphson

- Vetor resíduo:

$$g_i = \frac{\partial \Pi}{\partial Y_i} = F_i^{int} - F_i = 0_i$$

- Posição iterativa

$$g_i(\vec{Y}^0) \neq 0_i$$

- Expandindo o resíduo nas vizinhanças do ponto: $g_i(\vec{Y}) \approx g_i(\vec{Y}^0) + \left. \frac{\partial g_i}{\partial Y_k} \right|_{\vec{Y}^0} \Delta Y_k \approx 0_i$

$$g_i(\vec{Y}^0) \neq 0_i$$

$$g_i(\vec{Y}) \approx g_i(\vec{Y}^0) + \left. \frac{\partial g_i}{\partial Y_k} \right|_{\vec{Y}^0} \Delta Y_k \approx 0_i$$

While $\Delta Y_k > Tol$

$$Y_k^0 = Y_k^0 + \Delta Y_k$$

$$\Delta Y_k = - \left(\left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial Y_k \partial Y_i} \right|_{\vec{Y}^0} \right)^{-1} g_i(\vec{Y}^0)$$

DESENVOLVIMENTO

Condições de Contorno

- Para o grau de liberdade restrito:
 - Zerar linhas e colunas da Hessina e adicionar 1 a diagonal
 - Zerar posição do vetor desbalanceamento mecânico



EESC · USP

USP
Brasil

DESENVOLVIMENTO

Algoritmo Newton-Raphson

Primeira tentativa

$$Y_k^0 = X_k$$

1

Aplicação das condições de contorno e obtenção da correção da posição

$$\Delta Y_k$$

5

$$\frac{|\Delta Y_k|}{|X_k|} \leq tol$$

Passo de carga/posição

$$F_k = F_k + dF_k$$

$$Y_k = Y_k + dY_k$$

2

Cálculo do vetor desbalanceamento mecânico

$$g_i = F_i^{int} - F_i$$

4

Cálculo do vetor força internas e Hessiana globais

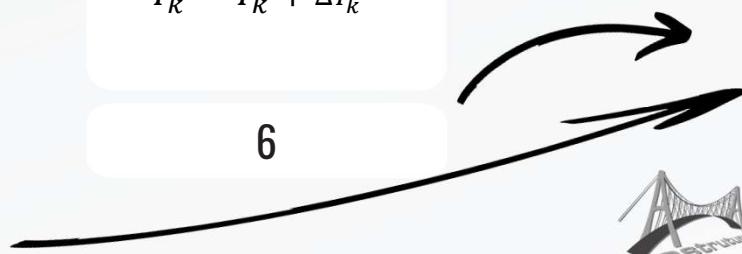
$$F_i^{int} \quad H_{ik}$$

3

Nova posição

$$Y_k = Y_k + \Delta Y_k$$

6



DESENVOLVIMENTO

Formulação Dinâmica

$$\Rightarrow \Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U} + \mathbb{K}$$

- Energia cinética:

$$\mathbb{K} = \sum_{\alpha=1}^{n\text{nos}} \mathbb{K}_\alpha = \frac{1}{2} M_{(\alpha)} \dot{Y}_k^\alpha \dot{Y}_k^\alpha$$

- Estacionariedade energética:

$$F_i^{int}(\vec{Y}) - F_i^{ext} + F_i^{iner} = 0_i$$

Sendo:

$$F_i^{iner} = M_{(\alpha)} \ddot{Y}_k^\alpha$$

DESENVOLVIMENTO

Newton-Raphson + Newmark

- Vetor resíduo:

$$\vec{g} = \frac{\partial \Pi}{\partial \vec{Y}} = \vec{F}_{s+1}^{int} + \mathbf{M} \cdot \vec{\ddot{Y}}_{s+1} + \mathbf{C} \cdot \vec{\dot{Y}}_{s+1} - \vec{F}_{s+1}^{ext} = \vec{0}$$

- Discretização temporal

$$t_{s+1} = t_s + \Delta t$$

- Integrador temporal de Newmark:

$$\vec{Y}_{s+1} = \vec{Y}_s + \vec{\dot{Y}}_s \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \vec{\dot{Y}}_s + \beta \vec{\ddot{Y}}_{s+1} \right] \Delta t^2$$

$$\vec{\dot{Y}}_{s+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \vec{Y}_{s+1} + \vec{R}_s - \gamma \Delta t \vec{Q}_s \quad \vec{\ddot{Y}}_{s+1} = \frac{\vec{Y}_{s+1}}{\beta \Delta t^2} - \vec{Q}_s$$

$$\beta = \frac{1}{4}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}$$

Constantes por
passo de tempo \leftarrow

$$\vec{Q}_s = \frac{\vec{Y}_s}{\beta \Delta t^2} + \frac{\vec{\dot{Y}}_s}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \vec{\ddot{Y}}_s \quad \vec{R}_s = \vec{\dot{Y}}_s + \Delta t (1 - \gamma) \vec{\ddot{Y}}_s$$

DESENVOLVIMENTO

Newton-Raphson + Newmark

- Resíduo:

$$\vec{g} = \frac{\partial \Pi}{\partial \vec{Y}} = \vec{F}_{s+1}^{int} + \mathbf{M} \cdot \vec{\dot{Y}}_{s+1} + \mathbf{C} \cdot \vec{\ddot{Y}}_{s+1} - \vec{F}_{s+1}^{ext} = \vec{0}$$

- Hessiana dinâmica:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{estat} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t}$$

- Resolução do sistema linear:

$$\mathbf{H} \cdot \Delta \vec{Y} = -\vec{g}(\vec{Y}_{s+1}^0)$$

- Atualização da posição, velocidade e aceleração:

$$\vec{Y}_{s+1}^0 = \vec{Y}_{s+1}^0 + \Delta \vec{Y} \quad \vec{\dot{Y}}_{s+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \vec{Y}_{s+1} + \vec{R}_s - \gamma \Delta t \vec{Q}_s \quad \vec{\ddot{Y}}_{s+1} = \frac{\vec{Y}_{s+1}}{\beta \Delta t^2} - \vec{Q}_s$$

- Primeiro passo de tempo:

$$\vec{Y}_0 = \mathbf{M}^{-1} \cdot (\vec{F}_0^{ext} - \vec{F}_0^{int} - \mathbf{C} \cdot \vec{\dot{Y}}_0)$$

DESENVOLVIMENTO

Algoritmo Newton-Raphson

Primeira tentativa
 $Y_k^0 = X_k$
 $\vec{Y}_{s+1} = \vec{0}$
 $\vec{\dot{Y}}_{s+1} = \vec{0}$

1

Aplicação das condições de contorno e obtenção da correção da posição

$$\Delta Y_k$$

5

$$\frac{|\Delta Y_k|}{|X_k|} \leq tol$$

Passo de carga/posição
 $F_k = F_k + dF_k$
 $Y_k = Y_k + dY_k$
 \vec{Q}_s e \vec{R}_s

2

Cálculo do vetor desbalanceamento mecânico

$$\vec{g} = \vec{F}_{s+1}^{int} + \mathbf{M} \cdot \vec{\dot{Y}}_{s+1} + \mathbf{C} \cdot \vec{Y}_{s+1} - \vec{F}_{s+1}^{ext}$$

4

Cálculo do vetor força internas (est+din) e Hessiana (est+din) globais

$$F_i^{int} \quad H_{ik}$$

3

Nova posição
 $Y_k = Y_k + \Delta Y_k$

$$\vec{Y}_{s+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \vec{Y}_{s+1} + \vec{R}_s - \gamma \Delta t \vec{Q}_s$$

$$\vec{\dot{Y}}_{s+1} = \frac{\vec{Y}_{s+1}}{\beta \Delta t^2} - \vec{Q}_s$$

6



EESC • USP

USP Brasil

DESENVOLVIMENTO

Newton-Raphson + Newmark

- Material Elasto-Plástico Perfeito:

- Relação tensão deformação:

$$d\sigma = E * d\varepsilon = E(d\varepsilon - d\varepsilon^P)$$

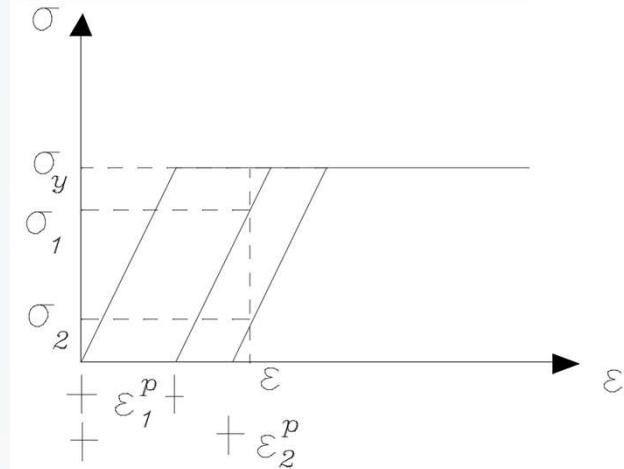
- Critério de plastificação:

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0$$

- Lei de plastificação

$$d\varepsilon^P = d\lambda * sign(\sigma)$$

- A unicidade de tensão para uma dada deformação é função da história de tensão do material



DESENVOLVIMENTO

Implementação Computacional

Leitura de arquivo de entrada .txt

Linguagem Python

Formulação 3D

Pós-Processamento AcadView

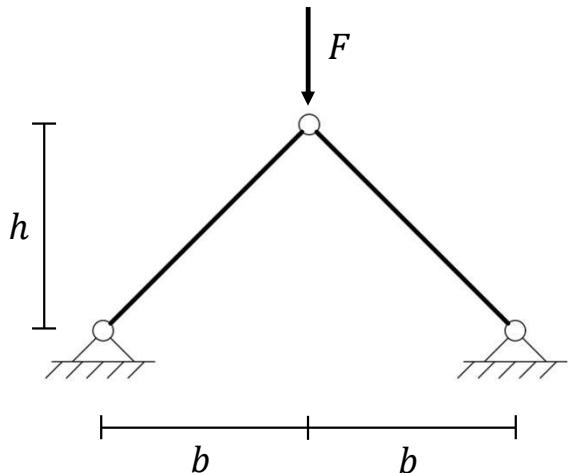
Dados de entrada:

- Coordenadas dos nós
- Incidencia dos elementos
- Propriedades dos elementos
- Posições prescritas
- Forças aplicadas



RESULTADOS

2.3.6.b (CODA, 2018): Treliça de von Mises

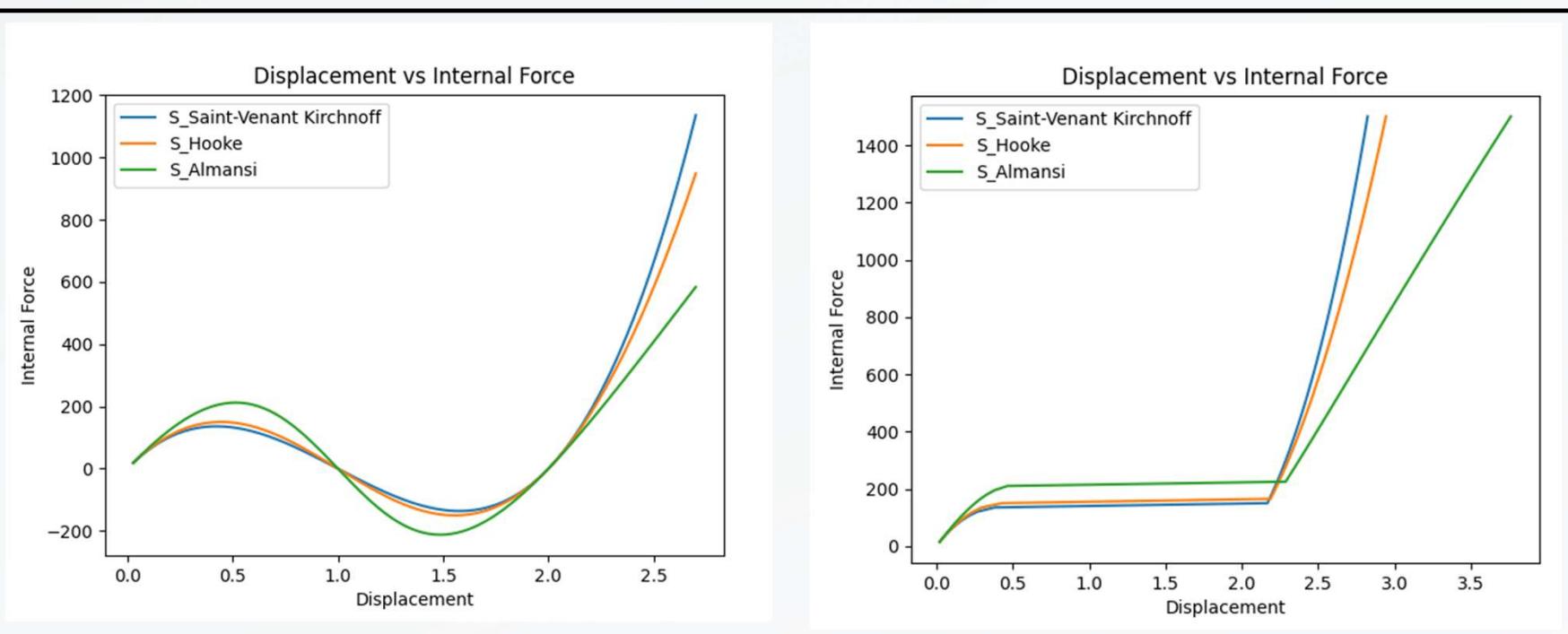


Dados:

$$\begin{array}{ll} h = 1 & K = 1000 \\ b = 1 & \Delta F = 20 \\ A = 1 & \Delta Y = -0.05 \\ & tol = 10^{-6} \end{array}$$

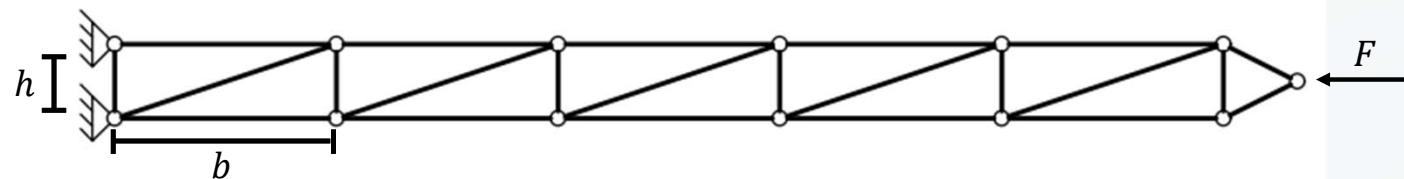
RESULTADOS

2.3.6.b (CODA, 2018): Treliça de von Mises



RESULTADOS

2.3.6.d (CODA, 2018): Torre engastada comprimida

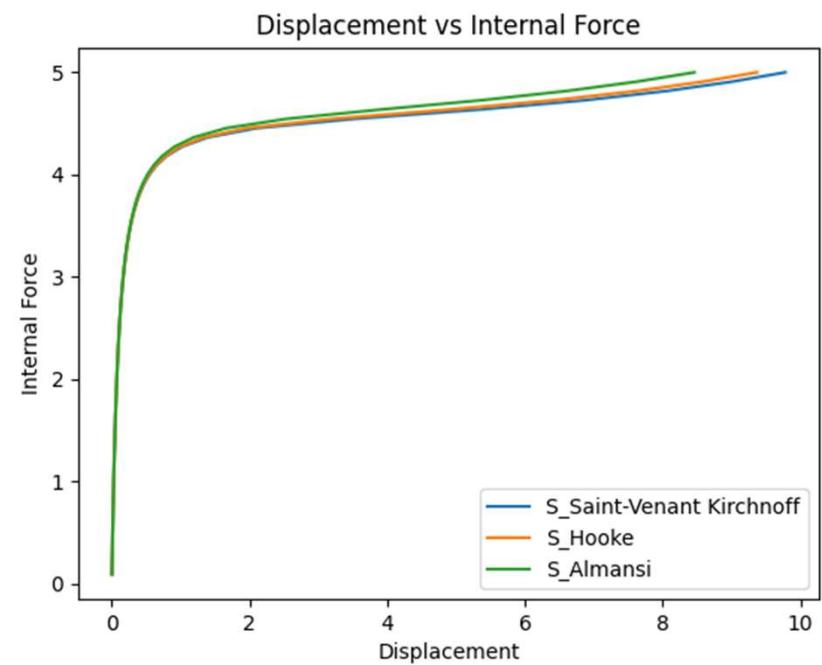


Problema estático
13 nós
23 elementos
SVK, Hooke e Almansi
Controle de força

$h = 1$
 $b = 3$
 $K = 10000$
 $A = 0,1$
 $\Delta F = 0,11$
 $tol = 10^{-6}$

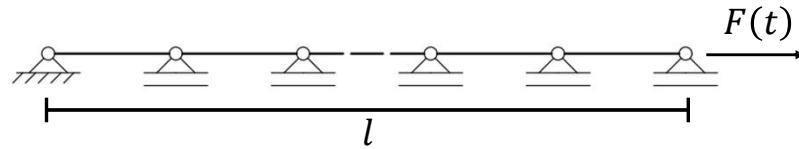
RESULTADOS

2.3.6.d (CODA, 2018): Torre engastada comprimida



RESULTADOS

2.4.4.a (CODA, 2018): Impacto longitudinal



Problema dinâmico

11 nós / 101 nós

10 elementos / 100 elementos

Hooke

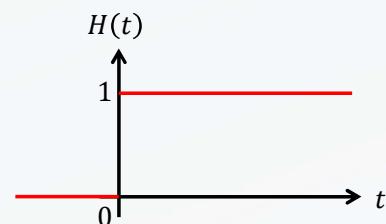
Carregamento súbito

$$\Delta t_{10\text{elem}} = 0,001$$

$$\Delta t_{100\text{elem}} = 0,0001$$

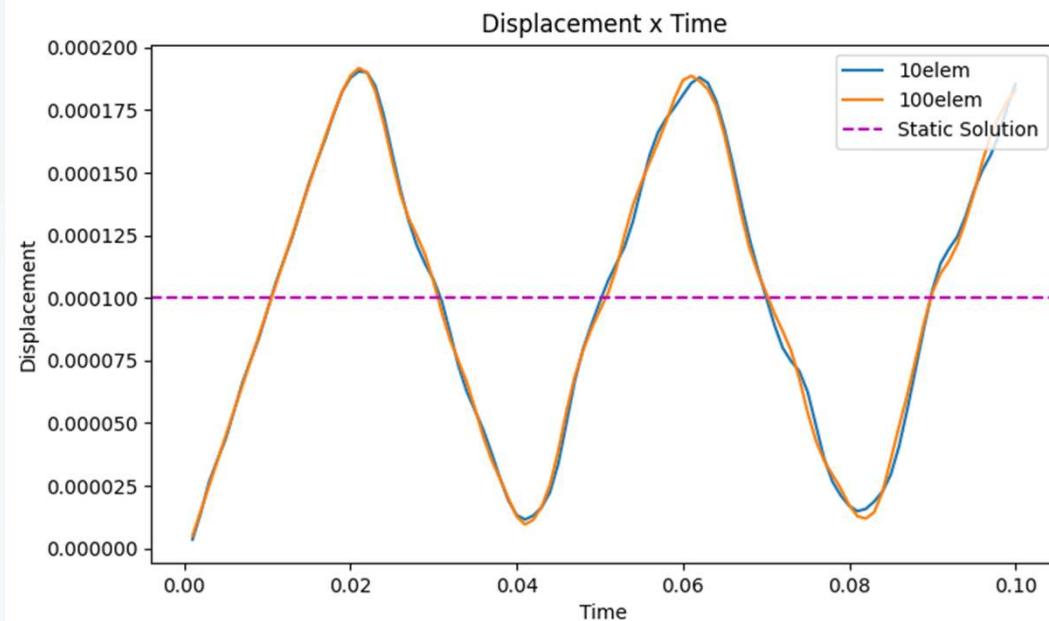
$$l = 1 \quad E = 10000$$

$$A = 1 \quad \rho = 1 \quad tol = 10^{-6}$$



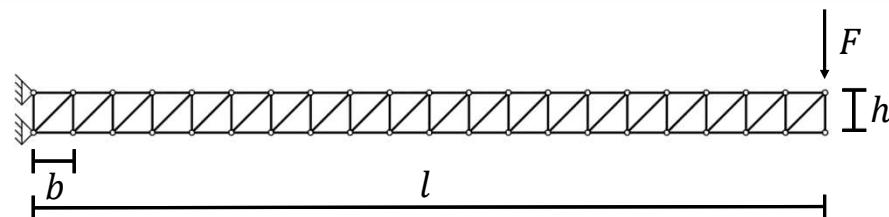
RESULTADOS

2.4.4.a (CODA, 2018): Impacto longitudinal



RESULTADOS

2.4.4.a (CODA, 2018): Torre engastada sujeita a carregamento súbito



$$\begin{aligned} h &= 0,3 \text{ m} \\ b &= 0,3 \text{ m} \\ l &= 6 \text{ m} \end{aligned}$$

42 nós
81 elementos
Hooke
Carregamento súbito

$$t_{total} = 675 \text{ ms}$$

$$\Delta t = 0,3377 \text{ ms}$$

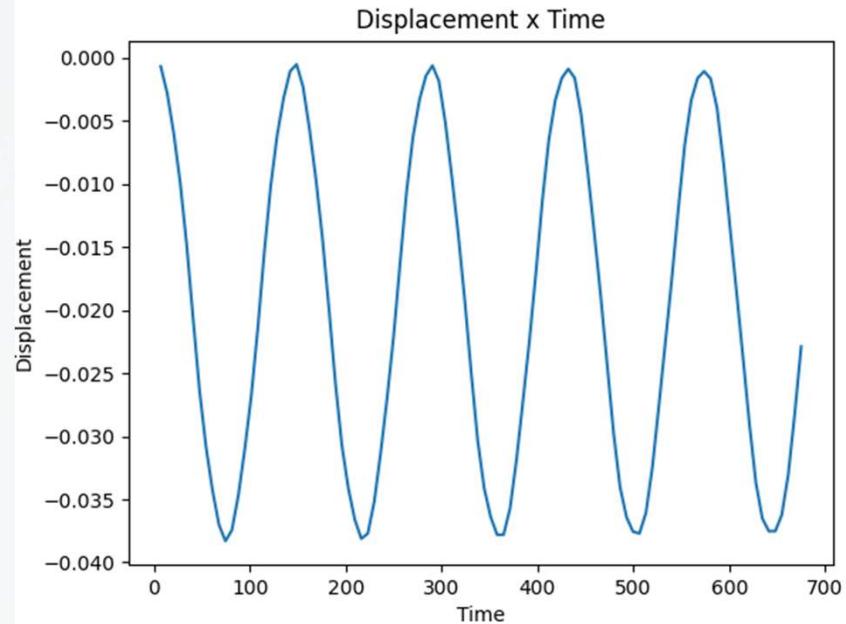
$$A_{banzos} = 0,005 \text{ m}^2 \quad A_{mont/diag} = 0,00812 \text{ m}^2$$

$$E = 200 \text{ Mg/m.ms}^2 \quad \rho = 7 \text{ Mg/m}^3$$

$$F(t) = 12,5 \cdot 10^{-4} \text{ Mg.m/ms}^2 H(t) \quad tol = 10^{-7}$$

RESULTADOS

2.4.4.a (CODA, 2018): Torre engastada sujeita a carregamento súbito

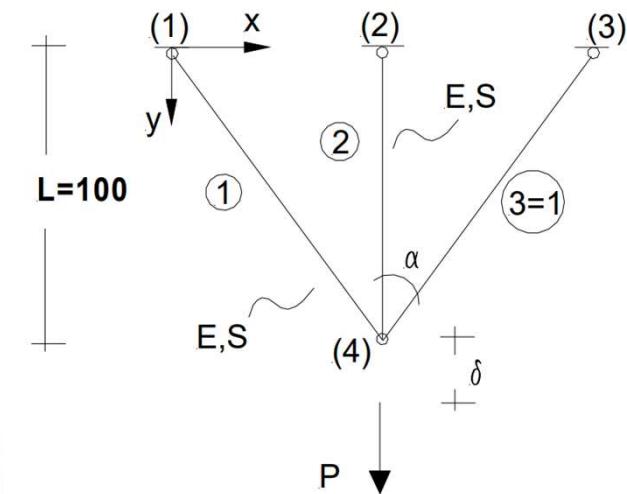


RESULTADOS

(PROENÇA, 2013): Treliça sujeita a tração

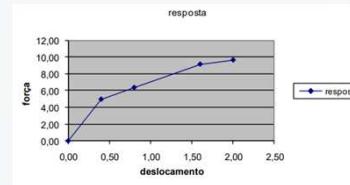
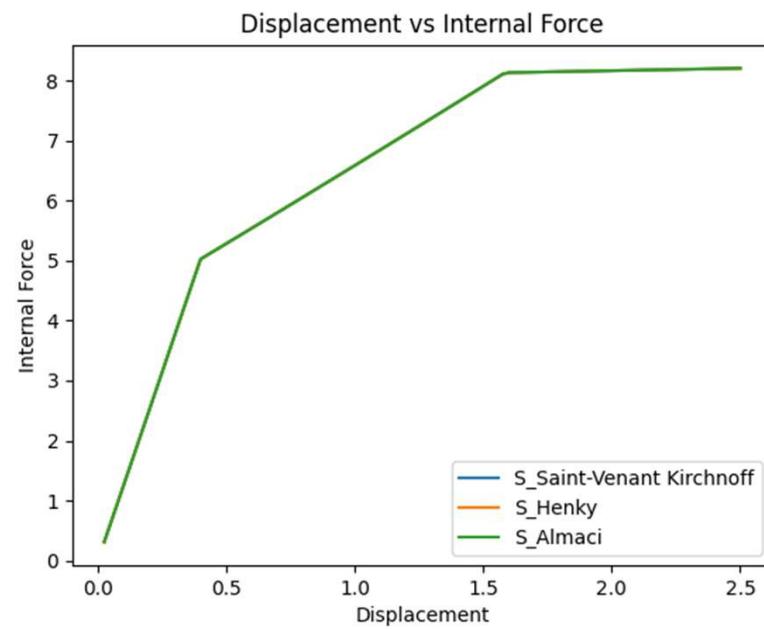
Problema estático
4 nós
3 elementos
SVK, Hooke e Almansi
Controle de posição
Sem encruamento

$$\begin{aligned}L &= 100 \\ \alpha &= 60^\circ \\ E &= 1000 \\ A &= 1 \\ \sigma_Y &= 4 \\ tol &= 10^{-6}\end{aligned}$$



RESULTADOS

(PROENÇA, 2013): Treliça sujeita a tração



RESULTADOS

(GRECO, 2006): CÚPULA ESTRELAR

Problema estático

13 nós

24 elementos

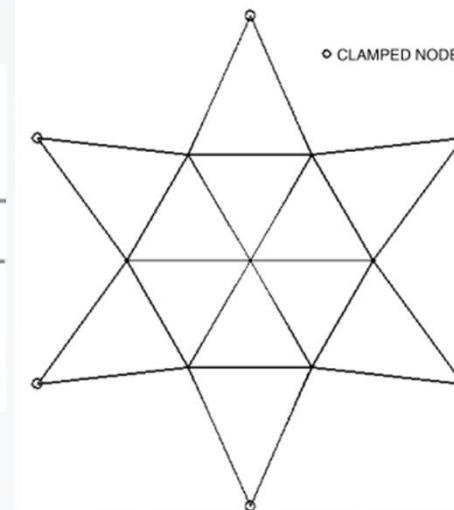
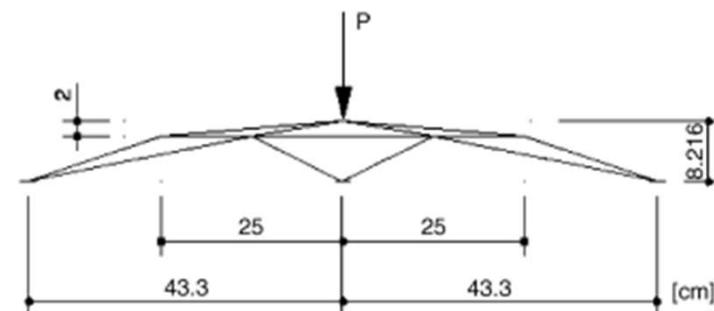
SVK, Hooke e Almansi

Controle de Força/Posição

$E = 30000$

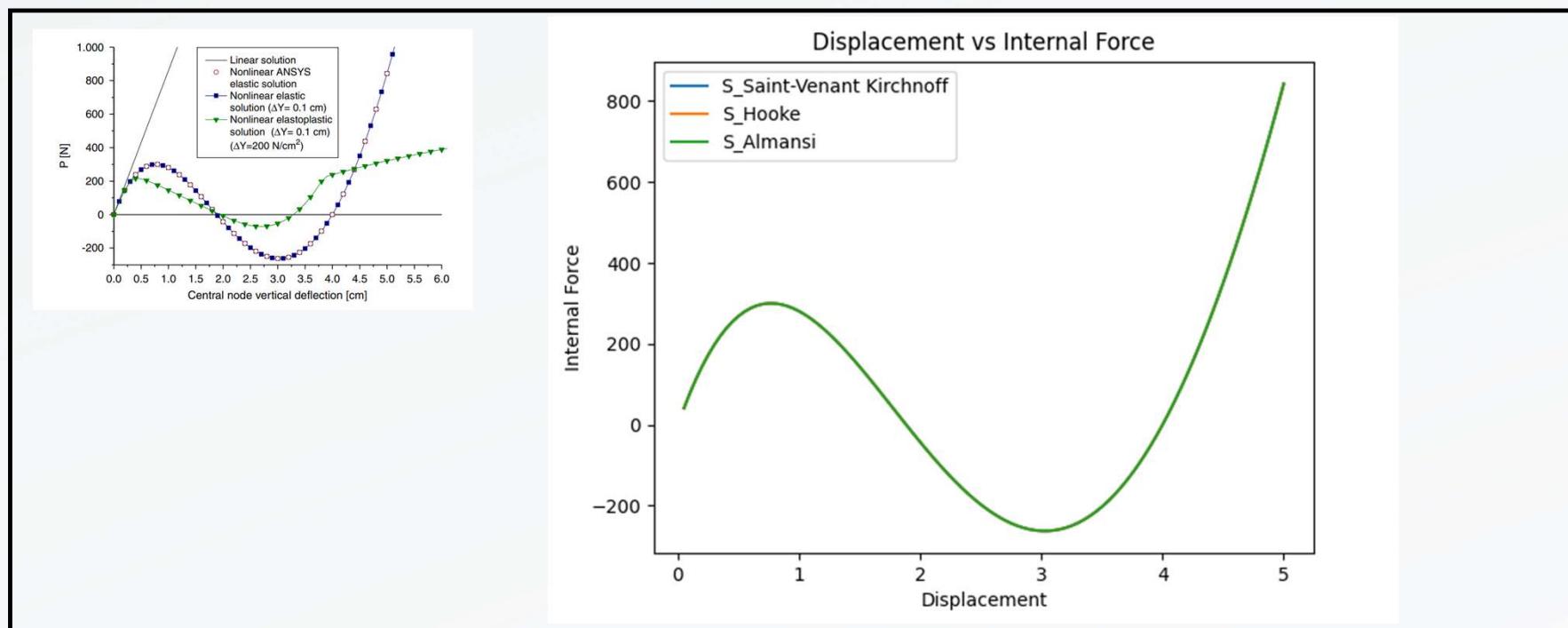
$A = 3.17$

$tol = 10^{-6}$



RESULTADOS

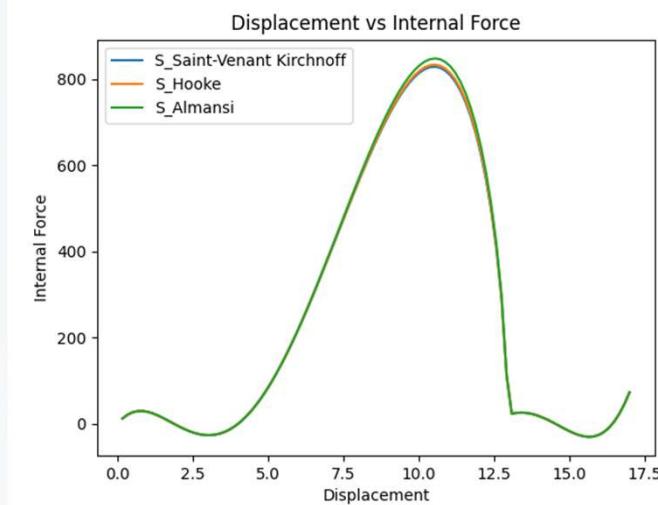
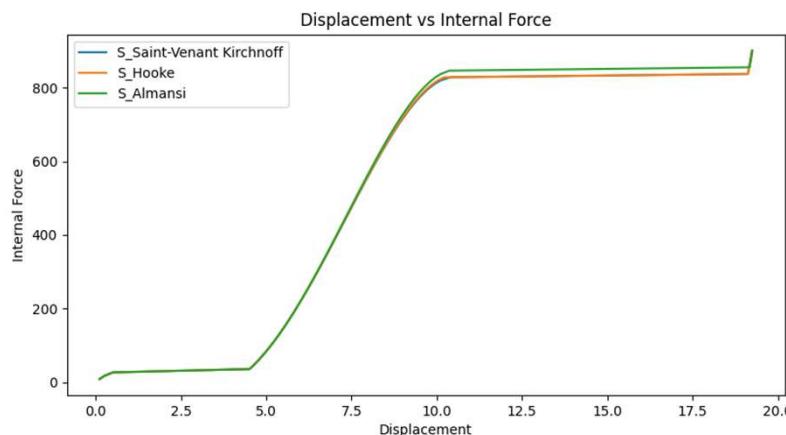
(GRECO, 2006): CÚPULA ESTRELAR



RESULTADOS

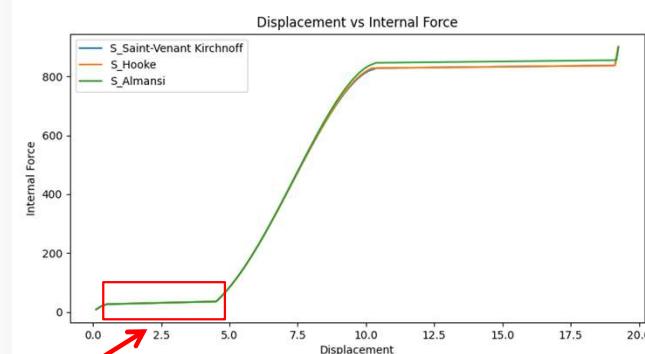
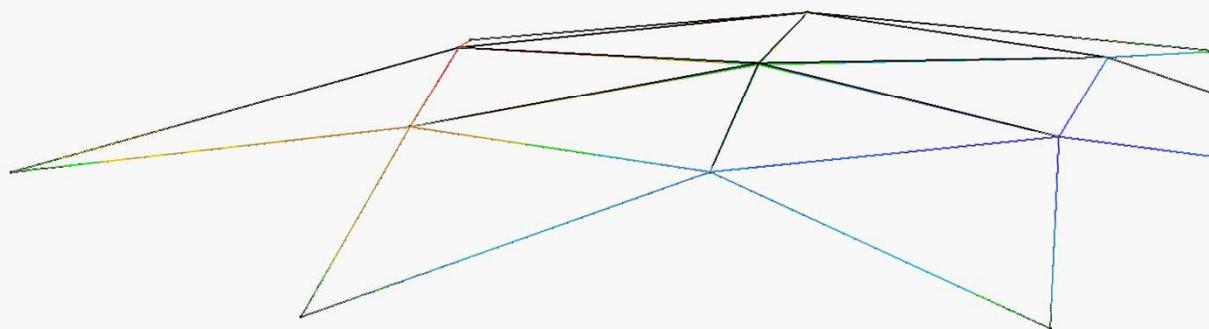
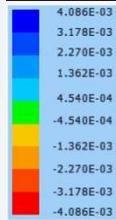
(GRECO, 2006): CÚPULA ESTRELAR

Avaliação do 2º Snap Through



RESULTADOS

(GRECO, 2006): CÚPULA ESTRELAR

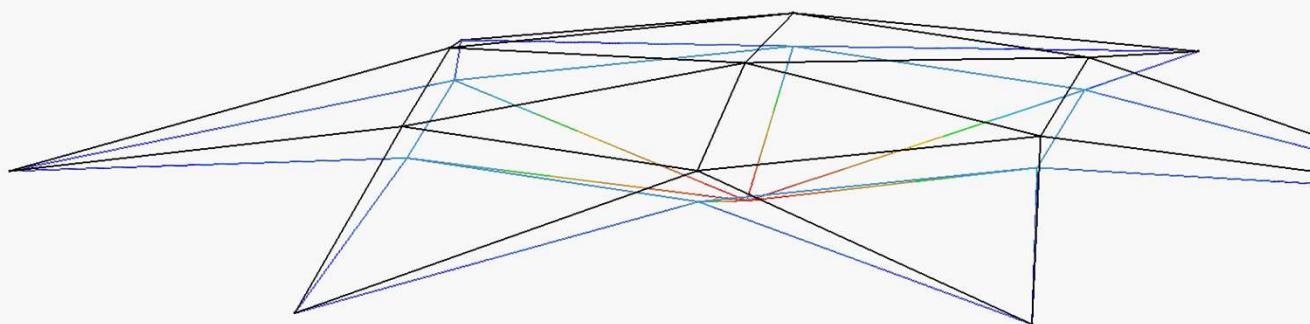
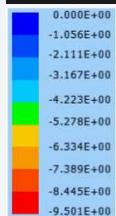


1º Snap



RESULTADOS

(GRECO, 2006): CÚPULA ESTRELAR



2º Snap

