

Diego Dias Veloso

# Fundamentos Matemáticos da Mecânica dos Sólidos e Estruturas

São Carlos

22 de junho de 2025

**Diego Dias Veloso**

**Fundamentos Matemáticos da Mecânica dos Sólidos e  
Estruturas**

Universidade de São Paulo

Orientador: PhD. Sérgio Persival Baronchinni Proença

São Carlos

22 de junho de 2025

# Sumário

1	Introdução . . . . .	3
1.1	Aspectos teóricos . . . . .	3
2	Resoluções dos exercícios propostos . . . . .	8
2.1	Exercício 1 . . . . .	8
2.1.1	Função aproximativa de 3. <sup>a</sup> ordem . . . . .	9
2.1.2	Função aproximativa de 5. <sup>a</sup> ordem . . . . .	12
2.2	Exercício 2 . . . . .	14
2.2.1	Função aproximativa de 3. <sup>a</sup> ordem . . . . .	16
2.2.2	Função aproximativa de 4. <sup>a</sup> ordem . . . . .	19
2.3	Exercício 3 . . . . .	22
2.3.1	Função aproximativa de 3. <sup>a</sup> ordem. . . . .	23
2.3.2	Função aproximativa de 4. <sup>a</sup> ordem. . . . .	26
3	Conclusão . . . . .	29
	Referências . . . . .	31

# 1 Introdução

A Mecânica dos Sólidos é um ramo da física a qual estuda o comportamento de sólidos deformáveis sob a ação diversa de forças externas. No contexto da Engenharia de Estruturas e da Mecânica Computacional, a Mecânica dos Sólidos é o campo que fornece todo o ferramental teórico necessário para o entendimento do comportamento das estruturas e dos materiais. Além disso, essa base permite ao pesquisador propor novos modelos e teorias que discreditem diferentes problemas.

No campo da Mecânica dos Sólidos, o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) representa o ponto de partida de grande parte das teorias. O PTV, devido a seu caráter de princípio, não possui uma prova a si associada.

Assim como os primeiros dois trabalhos, este visa aprofundar os conceitos de Mecânica dos Sólidos do pesquisador. Com esses conhecimentos, facilita-se a compreensão das teorias da Mecânica dos sólidos com seu rigor matemático, além de também fornecer ao pesquisador ferramentais para o desenvolvimento de novos modelos e teorias.

## 1.1 Aspectos teóricos

No presente tópico, serão apresentados conceitos fundamentais utilizados ao longo do texto. Almejando uma apresentação mais clara e objetiva ao longo do texto, provas e demonstrações de teoremas e propriedades não serão apresentadas. Portando, tais demonstrações mais relevantes serão aqui apresentadas. Maiores detalhes, no contexto da mecânica dos sólidos, podem ser encontrados em [Proença \(2024\)](#) , [Anand e Govindjee \(2020\)](#), [Spencer \(2004\)](#) e [Lanczos \(2012\)](#).

O PTV apesar de não ser uma lei conservativa ([SPENCER, 2004](#)), como as de conservação de massa, momento e energia, forma a base de diversas teorias variacionais no campo da mecânica do contínuo. O PTV define o trabalho realizado sobre o sistema deve ser equivalente ao trabalho interno do sistema, ou seja,

$$W_{int} = W_{ext} \quad (1.1)$$

para um campo de deslocamentos que seja compatível com as restrições do sistema. Aqui,

é interessante apresentar a interpretação geométrica dada por [Lanczos \(2012\)](#) ao princípio. Considerando-se um corpo rígido submetido a um  $n$  número forças,  $\mathbf{F}_n$ , para cada uma das quais os deslocamentos virtuais são  $\delta u_n$ , de forma que o PTV afirma que o corpo esteja em equilíbrio caso

$$W_{ext} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \delta \mathbf{u}_i = 0 \quad (1.2)$$

o que é equivalente a dizer que  $\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u} = 0$ . Desse modo, se tem que o corpo está em equilíbrio caso o vetor generalizado de forças  $\mathbf{F}$  seja perpendicular a qualquer deslocamento compatível ao sistema. Para isso, consideremos três distintas situações, um corpo sem nenhuma restrição, um restrito apenas em  $y$  e outro isostático, restrito em ambas direções  $x$  e  $y$ . Para a primeira situação, como o corpo pode sofrer um deslocamento qualquer, não há nenhum vetor de forças  $\mathbf{F}$  que seja perpendicular a, simultaneamente, todas as direções espaciais que o corpo pode se deslocar, de modo que  $\mathbf{F}$  deva ser nulo para o corpo estar em equilíbrio. Agora, para um corpo restrito em  $y$ , percebe-se que o corpo apenas pode se deslocar em  $x$ , de modo que, para que  $\mathbf{F}$  seja perpendicular a  $\delta \mathbf{u}$ , as forças resultantes devem ser verticais para que o corpo esteja em equilíbrio. Agora, para o último caso, como o corpo não pode se deslocar em nenhuma direção, o vetor  $\mathbf{F}$  pode ser qualquer que o corpo estará em equilíbrio. Cabe pontuar que aqui não se almejou apresentar a formulação formal apresentada em [Lanczos \(2012\)](#), dado que, como os vetores  $\mathbf{F}$  e  $\delta \mathbf{u}$  são vetores generalizados, estes pertencem a um espaço vetorial de dimensão  $n$ , o que torna a demonstração da perpendicularidade de  $\mathbf{F}$  e  $\delta \mathbf{u}$  no equilíbrio mais sutil.

[Lanczos \(2012\)](#) também demonstra que o PTV é equivalente ao Princípio da Estacionaridade da Energia Potencial para forças monogênicas, o qual afirma que o corpo está em equilíbrio quando a energia potencial do sistema é estacionária, ou seja,

$$\delta (W_{int} - W_{ext}) = 0 \quad (1.3)$$

que, definindo a energia potencial  $\Pi$  como a diferença entre o trabalho interno e o trabalho externo, se tem

$$\delta \Pi = 0 \quad . \quad (1.4)$$

Agora, busca-se desenvolver o PTV no contexto da Mecânica dos Sólidos, mais especificamente, no contexto da Hipótese de viga de Euler-Bernoulli. Para tal, inicialmente, deve-se

definir o trabalho interno e o trabalho externo. O trabalho interno é dado pela integração no domínio da densidade de energia  $\psi$

$$W_{int} = \int_{\Omega} \psi d\Omega \quad (1.5)$$

na qual a densidade de energia elástica em um sólido é dada por

$$\psi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}(u) \cdot \boldsymbol{\delta \varepsilon}(\delta u) \quad . \quad (1.6)$$

de modo que

$$W_{int} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}(u) \cdot \boldsymbol{\delta \varepsilon}(\delta u) d\Omega \quad (1.7)$$

Assumindo que a hipótese de compatibilidade seja válida, ou seja, o campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$  seja contínuo, ou seja, o corpo permanece íntegro após o processo de deformação a equação e que a relação constitutiva do material seja linear, se tem

$$\boldsymbol{\delta \varepsilon} = \nabla^s \delta u \quad \text{Compatibilidade} \quad (1.8a)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{Constitutiva} \quad . \quad (1.8b)$$

de modo que  $W_{int}$  se escreve

$$W_{int} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}(u) \cdot (\nabla \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \nabla \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T) d\Omega \quad (1.9)$$

que, devido à simetria de  $\boldsymbol{\sigma}$ , pode-se escrever como

$$W_{int} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(u) \cdot \nabla \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \quad (1.10)$$

(SPENCER, 2004).

Agora, restringe-se a análise do PTV para no contexto das hipóteses de vigas. Adotando-se a hipótese de Euler-Bernoulli, assume-se que as seções transversais da viga permanecem planas e perpendiculares ao eixo da viga após a deformação (Figura 1). Desse modo, o campo de deslocamentos da viga pode ser escrito como

$$\mathbf{u}(x) = -y \left( \frac{d}{dx} v(x) \right) \mathbf{e}_1 + v(x) \mathbf{e}_2 \quad (1.11)$$

e o campo virtual de deslocamentos se escreve

$$\delta \mathbf{u}(x) = -y \left( \frac{d}{dx} \delta v(x) \right) \mathbf{e}_1 + \delta v(x) \mathbf{e}_2 \quad (1.12)$$

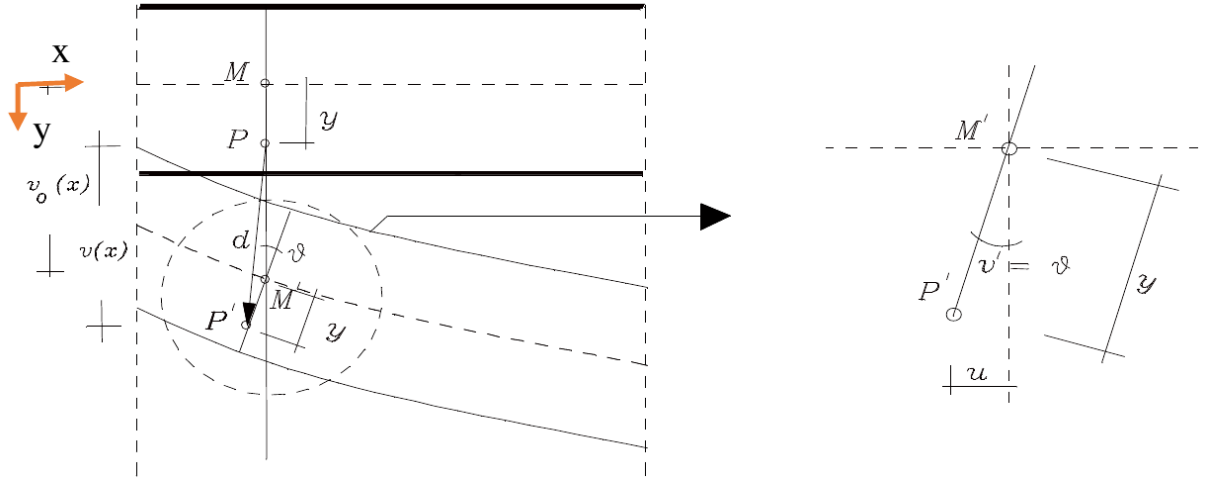


Figura 1 – Hipótese de viga de Euler-Bernoulli (PROENÇA, 2024).

assim, o campo de deformação virtual  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  é dado por

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_{11} & \delta \varepsilon_{12} & \delta \varepsilon_{13} \\ \delta \varepsilon_{21} & \delta \varepsilon_{22} & \delta \varepsilon_{23} \\ \delta \varepsilon_{31} & \delta \varepsilon_{32} & \delta \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left[ -y \left( \frac{d}{dx} \delta v(x) \right) \right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

de modo que a densidade de energia elástica do corpo mediante o campo virtual de deformações pode ser escrita como

$$\psi = \mathbf{T} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -y \left( \frac{d^2}{dx^2} \delta v(x) \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \sigma_x \left[ -y \left( \frac{d^2}{dx^2} \delta v(x) \right) \right] \quad (1.14)$$

e o trabalho interno virtual do corpo assume

$$\int_{\Omega} \sigma_x \left[ -y \left( \frac{d^2}{dx^2} \delta v(x) \right) \right] d\Omega \quad (1.15)$$

considerando-se que a viga é homogênea, ou seja, o módulo de elasticidade  $E$  é constante ao longo da viga, e que a relação constitutiva é linear, se tem que

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad \rightarrow \quad \sigma_x = E \varepsilon_x \quad \rightarrow \quad \sigma_x = -Ey \frac{d^2}{dx^2} v(x) \quad (1.16)$$

assim, se tem

$$\int_{\Omega} -Ey \frac{d^2}{dx^2} v(x) \left[ -y \left( \frac{d^2}{dx^2} \delta v(x) \right) \right] d\Omega \quad . \quad (1.17)$$

A equação acima pode, ainda, ser trabalhada com base em duas hipóteses: Primeiro, na hipótese de Euler-Bernoulli de que as seções transversais não se deformam no plano

transversal, ou seja,  $\frac{d}{dy}v(x) = \frac{d}{dz}v(x) = 0$  (hipótese já assumida ao se escrever  $v$  como função apenas de  $x$ ). Além disso, considera-se que o material não varia na seção transversal.

Portanto:

$$W_{int} = \int_x \left[ E \frac{d^2}{dx^2} v(x) \frac{d^2}{dx^2} \delta v(x) \int_A (y^2 dA) \right] dx = \int_x E v''(x) \delta v''(x) I dx \quad . \quad (1.18)$$

Embora o trabalho interno tenha sido completamente definido, ainda resta definir o trabalho externo com os esforços compatíveis. Para tal, identifica-se na 1.15 que

$$\int_A \sigma_x y dA = M_x \quad (1.19)$$

assim

$$\int_x -M_x \left[ \left( \frac{d^2}{dx^2} \delta v(x) \right) \right] dx \quad (1.20)$$

a qual, após ser integrada por partes duas vezes, obtém-se

$$- \int_x M_x'' \delta v(x) dx + M_x'(L) \delta v(L) - M_x'(0) \delta v(0) - M_x(0) \delta v'(0) + M_x(L) \delta v'(L) \quad . \quad (1.21)$$

A equação acima indica que os esforços compatíveis com as hipóteses de Euler-Bernoulli são uma força distribuída  $q(x)$  (visto que  $q(x) = M_x''(x)$ ), forças concentradas  $P$  (pois  $P = M_x'$ ) e momentos concentrados  $M$ . Desse modo, o trabalho externo é dado por

$$W_{ext} = \int_x q(x) \delta v(x) dx + P(L) \delta v(L) + P(0) \delta v(0) + M_0 \delta v'(0) + M_L \delta v'(L) \quad (1.22)$$

de modo que a igualdade  $W_{int} = W_{ext}$  é escrita como

$$\int_x E v''(x) \delta v''(x) I dx = \int_x q(x) \delta v(x) dx + P(L) \delta v(L) + P(0) \delta v(0) + M_0 \delta v'(0) + M_L \delta v'(L) \quad . \quad (1.23)$$

Percebe-se que a equação acima leva a uma busca aproximada por solução, através do uso de funções aproximativas. Considere-se, por exemplo, funções aproximativas polinomiais da forma

$$v(x) = \alpha_i \phi_i(x) \quad (1.24a)$$

$$\delta v(x) = \delta \alpha_j \phi_j(x) \quad (1.24b)$$

de modo que a Equação 1.23 se escreve

$$\delta \alpha_j \left[ \int_x E \phi_i'' \phi_j'' I dx \right] \alpha_i = \left[ \int_x q(x) \phi_j dx + P_L \phi_j(L) + P_0 \phi_j(0) + M_0 \phi_j'(0) + M_L \phi_j'(L) \right] \delta \alpha_j \quad (1.25)$$

que, removendo  $\delta\alpha_j$  da equação e observando que se tem um sistema linear de equações, se tem

$$\left[ \int_x E \phi_i'' \phi_j'' dx \right] \alpha_i = \int_x q(x) \phi_j dx + P_L \phi_j(L) + P_0 \phi_j(0) + M_0 \phi_j'(0) + M_L \phi_j'(L) \quad (1.26a)$$

$$K_{ij} \alpha_i = F_j \quad (1.26b)$$

## 2 Resoluções dos exercícios propostos

Neste tópico, serão apresentadas as resoluções dos exercícios propostos no terceiro trabalho, as quais seguirão a ordenação aqui descrita. Inicialmente, a equação do PTV será explicitada para o problema em questão, escrevendo a forma correspondente para  $W_{int}$  e  $W_{ext}$ . Cada parcela inclusa no trabalho das forças externas e internas será propriamente justificada, sempre se referindo às equações apresentadas anteriormente na Seção 1.1. A partir desta serão adotadas funções aproximativas para o campo real  $v(x)$  e virtual  $\delta v(x)$ , a partir da abordagem de Galerkin, a qual se resume em utilizar funções iguais para  $v(x)$  e  $\delta v(x)$ . As soluções funções aproximadoras serão consideradas na forma de polinômios, inicialmente de 3.<sup>a</sup> e então de 4.<sup>a</sup> ou 5.<sup>a</sup> ordem, para ser recuperada a solução analítica do problema para a aproximação de elevada ordem. Por fim, serão adotados valores numéricos para ambas ordens de aproximação de modo a se visualizar os resultados, os quais serão propriamente discutidos individualmente para cada caso.

### 2.1 Exercício 1

- **Obtenha duas soluções aproximadas para o deslocamento transversal da viga indicada na Figura 2. Para cada solução, apresente a relação para o cálculo do momento fletor e analise sua representatividade comparando com a solução exata.**

Inicia-se a análise do problema escrevendo-se as equações para os trabalhos virtuais internos e externos,  $W_{int}$  e  $W_{ext}$ . Em função da inexistência de molas no sistema, a única parcela que realizará trabalho interno na estrutura é a referente à flexão da barra. Com relação ao

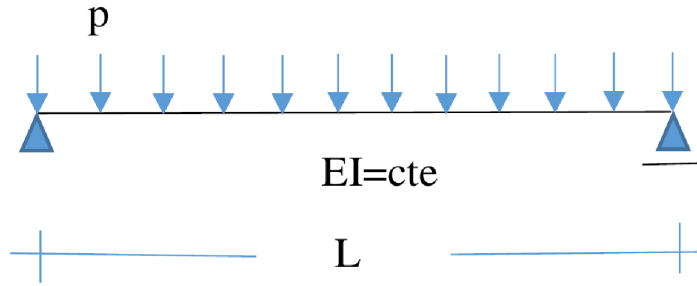


Figura 2 – Viga Bi-Apoiada sujeita a carregamento distribuído.

trabalho externo, o único esforço externo atuante na estrutura é o carregamento distribuído.

Assim, as parcelas  $W_{int}$  e  $W_{ext}$  são dadas por

$$W_{int} = \int_0^L \left( EI \frac{d^2}{dx^2} \delta v(x) \frac{d^2}{dx^2} v(x) \right) dx \quad (2.1)$$

e

$$W_{ext} = \int_0^L q \delta v(x) dx \quad (2.2)$$

Portando, a equação do PTV toma a seguinte forma

$$\int_0^L \left( EI \frac{d^2}{dx^2} \delta v(x) \frac{d^2}{dx^2} v(x) \right) dx = \int_0^L q \delta v(x) dx \quad . \quad (2.3)$$

Construída a equação do PTV, pode-se prosseguir para a adoção das funções aproximativas para se buscar a solução aproximada da forma fraca. Os valores numéricos indicados na Tabela 1 serão ao final adotados para se realizar a plotagem dos gráficos da função aproximativa  $v(x)$ , assim como do momento fletor  $M(x)$  para ambas ordens de aproximação.

Tabela 1 – Dados do exercício 1.

$L$ (m)	$E$ (Pa)	$I$ (m <sup>4</sup> )	$q$ (N/m)
1.0	$210.0 \times 10^9$	$1.0 \times 10^{-6}$	1000

### 2.1.1 Função aproximativa de 3.<sup>a</sup> ordem

Inicialmente, almejando-se encontrar a solução aproximada para a forma fraca do PTV indicada anteriormente, adota-se um polinômio de 3.<sup>a</sup> ordem como função aproximativa, de modo que o campo real e virtual se tornam, respectivamente,

$$v(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \quad (2.4)$$

e

$$\delta v(x) = \delta\alpha_0 + \delta\alpha_1 x + \delta\alpha_2 x^2 + \delta\alpha_3 x^3 \quad . \quad (2.5)$$

A seguir, deve-se impor as condições de contorno a  $v(x)$ , onde, visto que o campo virtual deve ser homogêneo em  $\Gamma_u$ ,  $\delta v(x)$  também deverá respeitar as mesmas restrições. Para a barra bi-apoiada, são impostas duas condições de contorno essenciais nos apoios. Inicialmente, os apoios restringem o movimento vertical dos apoios, de modo que  $v(0) = 0$  e  $v(L) = 0$ . Assim

$$v(0) = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_0 = 0 \quad (2.6a)$$

$$v(L) = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_1 = -(L^2\alpha_3 + L\alpha_2) \quad (2.6b)$$

de modo que, o polinômio  $v(x)$  com as condições essenciais de contorno se escreve como

$$v(x) = -L^2\alpha_3 x - L\alpha_2 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \quad (2.7)$$

E o PTV se escreve com as funções aproximativas como

$$W_{int} = \int_0^L \left( -EI \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} (-L^2\alpha_3 x - L\alpha_2 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3) \right) \right)^2 dx \quad (2.8)$$

$$W_{ext} = \int_0^L q (-L^2\alpha_3 x - L\alpha_2 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3) dx \quad (2.9)$$

Escrevendo a função aproximativa como uma combinação  $\alpha_i \phi_i$ , se tem

$$\phi_0(x) = 0 \quad (2.10a)$$

$$\phi_1(x) = 0 \quad (2.10b)$$

$$\phi_2(x) = x(-L + x) \quad (2.10c)$$

$$\phi_3(x) = x(-L^2 + x^2) \quad (2.10d)$$

Assim, fazendo-se o uso da Equação 1.26b, obtém-se a seguinte matriz dos coeficientes e o vetor de forças do problema

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4EIL & 6EIL^2 \\ 0 & 0 & 6EIL^2 & 12EIL^3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{L^3 q}{6} \\ -\frac{L^4 q}{4} \end{bmatrix} \quad . \quad (2.11)$$

A partir da matriz  $\mathbf{K}$  dos coeficientes  $\alpha_i$  e do vetor de forças  $\mathbf{F}$ , resolve-se o sistema linear de equações dado pela Equação 1.26b, na qual se obtém a solução

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{L^2 q}{24EI} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

a qual permite reescrever a função aproximativa  $v(x)$  como

$$v(x) = -\frac{L^2 q x (-L + x)}{24EI} \quad (2.13)$$

Adotando valores numéricos indicados na Tabela 1 obtém-se a solução do problema, indicada na Figura 3.

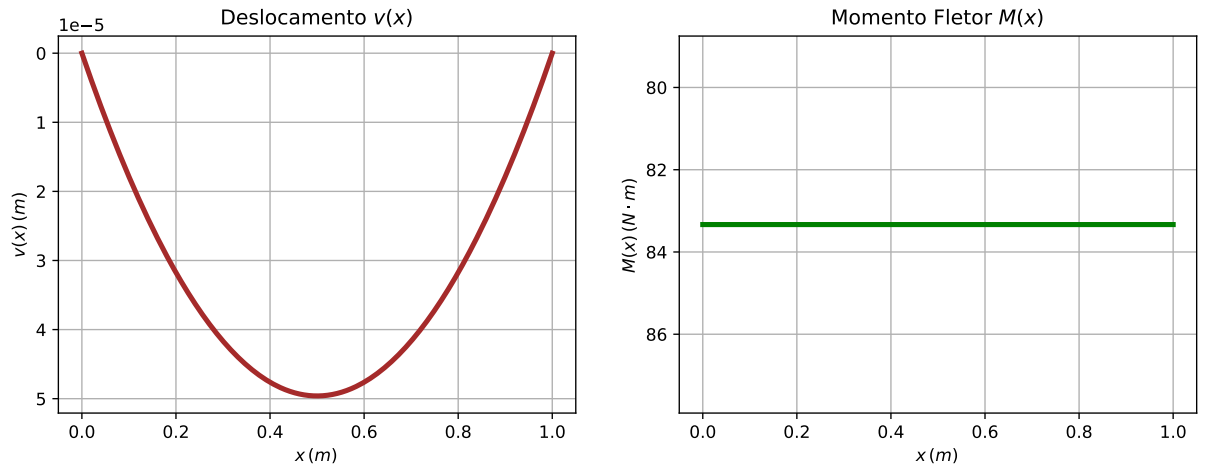


Figura 3 – Solução do exercício 1 - Função aproximativa de 3.<sup>a</sup> ordem.

Agora, analisa-se a representatividade da resposta obtida. Para tal, nota-se que as equações diferenciais que governam o problema são

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = q(x) \quad \rightarrow \quad -EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} = q(x) \quad (2.14)$$

as quais, para  $q(x)$  constante, indicam que, primeiramente, que a solução para o campo de deslocamentos  $v(x)$  recupera a solução exata para um polinômio com quarta derivada constante e, segundo, que a função que descreve  $M(x)$  deve ser de grau 2. Analisando a Figura 3 imediatamente se conclui que a solução não é satisfatória, visto que esta não

respeita as condições naturais de momentos nulos nos apoios. A equação para o momento fletor é dada por

$$M(x) = -EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \frac{qL^2}{12} \quad (2.15)$$

Sabe-se que a solução exata para o problema é  $M(x) = \frac{qx}{2} (L - x)$ , de modo que  $M(0) = 0kNm$ ,  $M(L) = 0kNm$  e  $M(0.5) = 125kNm$  e a solução constante obtida de  $83kNm$  representa a média da solução exata ao longo da barra.

### 2.1.2 Função aproximativa de 5ª ordem

Na questão anterior foi apresentada a equação diferencial governante do problema, a saber,  $-EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} = q(x)$ , de modo que a escolha de um polinômio aproximador de quarto grau consegue recuperar a solução exatada do problema. Porém, por um motivo que será observado ao final do problema, decidiu-se por utilizar um polinômio de grau superior, ou seja, de grau 5. Assim, as funções aproximativas são

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 \quad (2.16)$$

$$\delta \alpha_0 + \delta \alpha_1 x + \delta \alpha_2 x^2 + \delta \alpha_3 x^3 + \delta \alpha_4 x^4 + \delta \alpha_5 x^5 \quad (2.17)$$

que, aplicando as condições de contorno essenciais indicadas na seção anterior, a saber,  $v(0) = 0$  e  $v(L) = 0$  se tem

$$v(0) = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_0 = 0 \quad (2.18a)$$

$$v(L) = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_1 = -\left(L^4 \alpha_5 + L^3 \alpha_4 + L^2 \alpha_3 + L \alpha_2\right) \quad (2.18b)$$

de modo que, a função aproximativa  $v(x)$  toma a seguinte forma:

$$v(x) = -L^4 \alpha_5 x - L^3 \alpha_4 x - L^2 \alpha_3 x - L \alpha_2 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 \quad (2.19)$$

Assim, o PTV com as soluções aproximadas é dado por:

$$W_{int} = \int_0^L \left( EI \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} (-L^4 \alpha_5 x - L^3 \alpha_4 x - L^2 \alpha_3 x - L \alpha_2 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5) \right)^2 \right) dx \quad (2.20)$$

e

$$W_{ext} = \int_0^L q \left( -L^4 \alpha_5 x - L^3 \alpha_4 x - L^2 \alpha_3 x - L \alpha_2 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 \right) dx \quad (2.21)$$

Extraindo das funções aproximativas as funções na forma  $\alpha_i \phi_i$ , se tem

$$\phi_0(x) = 0 \quad (2.22a)$$

$$\phi_1(x) = 0 \quad (2.22b)$$

$$\phi_2(x) = x(-L + x) \quad (2.22c)$$

$$\phi_3(x) = x(-L^2 + x^2) \quad (2.22d)$$

$$\phi_4(x) = x(-L^3 + x^3) \quad (2.22e)$$

$$\phi_5(x) = x(-L^4 + x^4) \quad (2.22f)$$

e, recorrendo à Equação 1.26b, obtém-se a matriz  $\mathbf{K}$  dos coeficientes e o vetor de forças  $\mathbf{F}$  :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4EIL & 6EIL^2 & 8EIL^3 & 10EIL^4 \\ 0 & 0 & 6EIL^2 & 12EIL^3 & 18EIL^4 & 24EIL^5 \\ 0 & 0 & 8EIL^3 & 18EIL^4 & \frac{144EIL^5}{5} & 40EIL^6 \\ 0 & 0 & 10EIL^4 & 24EIL^5 & 40EIL^6 & \frac{400EIL^7}{7} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{L^3 q}{6} \\ -\frac{L^4 q}{4} \\ -\frac{3L^5 q}{10} \\ -\frac{L^6 q}{3} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

de modo que se obtém a solução para os coeficientes  $\alpha$  da solução aproximativa

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{Lq}{12EI} \\ \frac{q}{24EI} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

de modo que, pode-se reconstruir o polinômio adotado para a aproximação da seguinte forma

$$v(x) = -\frac{Lqx(-L^2 + x^2)}{12EI} + \frac{qx(-L^3 + x^3)}{24EI} \quad (2.25)$$

Agora, assim como realizado para a aproximação de ordem cúbica, adotam-se os valores numéricos indicados na Tabela 1, obtendo-se a solução indicada na Figura 4.

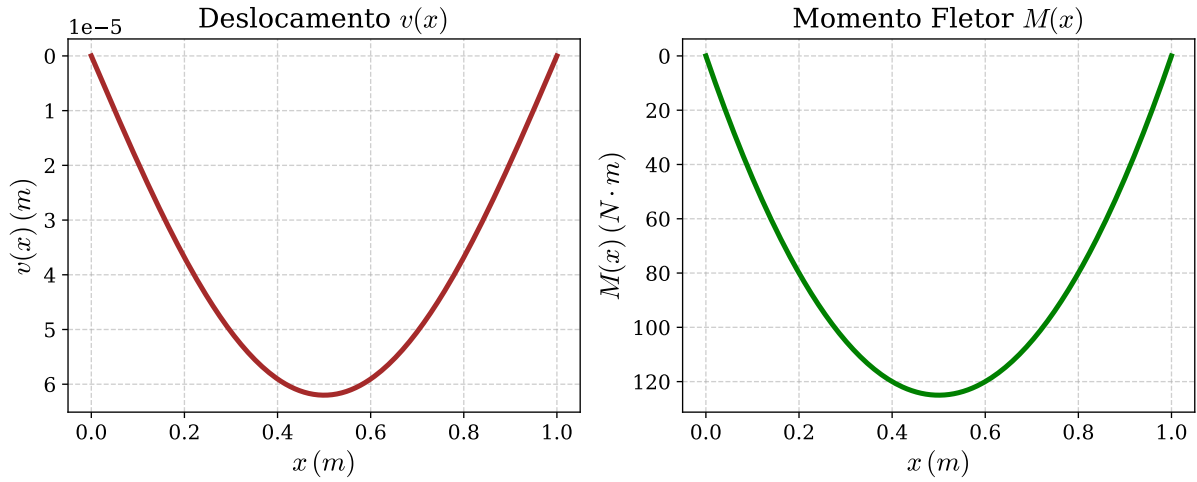


Figura 4 – Solução do exercício 1.

Aqui, assim como na última resolução, beneficia-se em avaliar a representatividade da solução para com a exata. A equação do momento fletor é dada por

$$M(x) = -EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \frac{q}{2} (xL - x^2) \quad (2.26)$$

Percebe-se que, para o polinômio aproximativo de ordem cúbica a solução aproximada recupera a solução exata de  $M(x)$ , a saber,  $M(0) = 0kNm$ ,  $M(L) = 0kNm$  e  $M(0.5) = 125kNm$ .

Finalmente, como comentado ao início da resolução do problema, a escolha de um polinômio aproximativo de ordem 4 bastaria para resgatar a solução exata. Porém, nota-se que, embora o polinômio escolhido tenha sido de grau 5, a última parcela do polinômio,  $\alpha_5 \phi_5$ , se torna desnecessária, e a própria solução do sistema leva a tal conclusão, onde se encontra  $\alpha_5 = 0$ .

## 2.2 Exercício 2

- Obtenha duas soluções aproximadas para o deslocamento transversal e para a distribuição de momento fletor da viga indicada na Figura 5. O vínculo à esquerda é um engaste fixo. Faça uma análise do efeito da mola, em particular recuperando os casos extremos de vinculação.

Inicia-se o problema em questão definindo-se as expressões para o trabalho interno

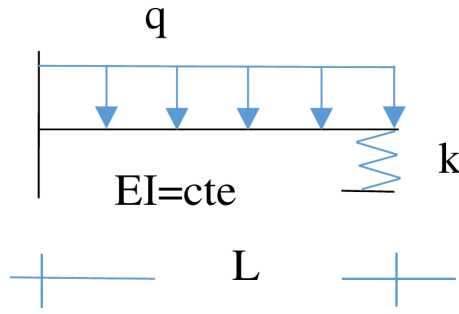


Figura 5 – Viga Engastada-Apoiada sob mola, sujeita a carregamento distribuído.

e para o externo. Diferentemente do problema anterior, onde a única parte da estrutura que contribui ao trabalho interno é a própria barra, no exemplo agora em questão há uma mola. Considerando-se a mola como parte constituinte da estrutura, tal parcela deve ser considerada na definição do trabalho virtual interno  $W_{int}$ . Assim, se tem

$$W_{int} = \int_0^L \left( EI \frac{d^2}{dx^2} \delta v(x) \frac{d^2}{dx^2} v(x) \right) dx + kv(L) \delta v(L) \quad (2.27)$$

e

$$W_{ext} = \int_0^L q \delta v(x) dx \quad (2.28)$$

Embora a contribuição da mola seja considerada na parcela  $W_{int}$ , esta poderia ser considerada parte externa à estrutura, de modo que seria tratada como uma força aplicada, portanto, contribuindo na parcela  $W_{ext}$ , porém com o sinal trocado em função de, neste caso, a força ser externa, e não interna, de modo que seu sentido é oposto. Assim, a igualdade do PTV se escreve como

$$\int_0^L \left( EI \frac{d^2}{dx^2} \delta v(x) \frac{d^2}{dx^2} v(x) \right) dx + kv(L) \delta v(L) = \int_0^L q \delta v(x) dx \quad (2.29)$$

Finalmente, assim como no exemplo anterior, são adotados valores numéricos ao final da resolução do problema de modo a serem plotados gráficos das respostas aproximadas para  $v(x)$  e  $M(x)$ , para ambas ordens aproximativas. Os valores numéricos indicados na Tabela 2 são os mesmos indicados na Tabela 1, apenas com a adição do valor da constante de mola  $k$ .

Aqui, diferentemente da questão anterior, serão adotadas as aproximações de 3ª e 4ª ordens, de modo a se simplificar a resolução, visto que esta se mostrou demasiadamente complexa para o caso de aproximação de 5ª ordem.

Tabela 2 – Dados do exercício 2.

$L$ (m)	$E$ (Pa)	$I$ (m <sup>4</sup> )	$q$ (N/m)	$k$ (N/m)
1.0	$210.0 \times 10^9$	$1.0 \times 10^{-6}$	1000	$5.0 \times 10^7$

### 2.2.1 Função aproximativa de 3ª ordem

Inicia-se a resolução do problema adotando-se funções polinômiais para a aproximação dos campos reais e virtuais,  $v(x)$  e  $\delta v(x)$ , respectivamente.

$$v(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \quad (2.30a)$$

$$\delta v(x) = \delta \alpha_0 + \delta \alpha_1 x + \delta \alpha_2 x^2 + \delta \alpha_3 x^3 \quad (2.30b)$$

Para o problema em questão, as condições de contorno essenciais a serem respeitadas são a condição de deslocamento vertical no engaste juntamente à imposição de que o giro seja zero, ou seja,  $v(0) = 0$  e  $v'(0) = 0$ . Como já indicado anteriormente no texto, a abordagem adotada é a de Galerkin, de modo que o campo virtual tem a mesma forma que o campo real (homogênea), de modo que:

$$v(0) = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_0 = 0 \quad (2.31a)$$

$$v'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 \quad (2.31b)$$

$$v'(0) = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_1 = 0 \quad (2.31c)$$

de modo que  $v(x)$  toma a seguinte forma:

$$v(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \quad (2.32)$$

Assim, a equação do PTV após inserção das funções aproximativas toma a seguinte forma

$$W_{int} = \int_0^L \left( -EI \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3) \right)^2 \right) dx + k \delta v(L) v(L) \quad (2.33)$$

$$W_{ext} = \int_0^L q (\alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3) dx \quad (2.34)$$

Escrevendo  $v(x)$  como uma combinação linear de forma  $\alpha_i \phi_i$ , se tem

$$\phi_0(x) = 0 \quad (2.35a)$$

$$\phi_1(x) = 0 \quad (2.35b)$$

$$\phi_2(x) = x^2 \quad (2.35c)$$

$$\phi_3(x) = x^3 \quad (2.35d)$$

Assim, a partir Equação 1.26b, obtém-se a matriz dos coeficientes  $\mathbf{K}$  e o vetor de forças como  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4EIL + L^4k & 6EIL^2 + L^5k \\ 0 & 0 & 6EIL^2 + L^5k & 12EIL^3 + L^6k \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{L^3q}{3} \\ \frac{L^4q}{4} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

que, resolvendo o sistema de equações lineares, se obtém

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{L^2q(30EI+L^3k)}{48EI(3EI+L^3k)} \\ \frac{Lq(-12EI-L^3k)}{48EI(3EI+L^3k)} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

E a função aproximativa  $v(x)$  fica dada por

$$v(x) = \frac{Lqx^2(L(30EI+L^3k) - x(12EI+L^3k))}{48EI(3EI+L^3k)} \quad (2.38)$$

Adotando os valores indicados na Tabela 2, são obtidos os gráficos de  $v(x)$  e  $M(x)$ , indicados na Figura 6.

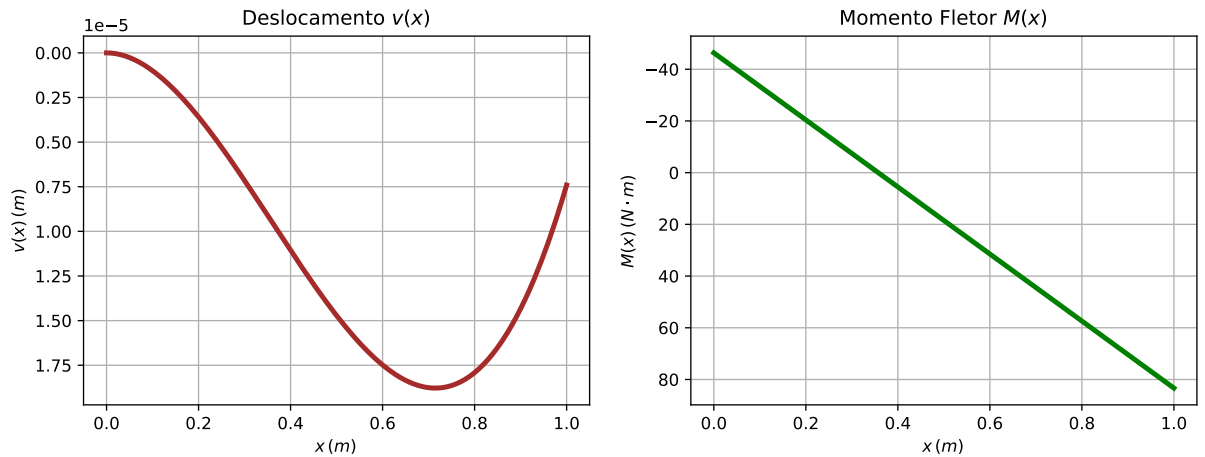


Figura 6 – Solução do exercício 2.

Finalmente, é de interesse avaliar a solução para casos limites da rigidez da mola, ou seja, uma rigidez nula ou muito elevada, casos ilustrados nas Figuras 7a e 7b. Para a mola com  $k \rightarrow 0$ , o problema converge para o caso de uma viga engastada e livre, enquanto para a mola com  $k \rightarrow \infty$ , o problema converge para a situação de uma viga engastada e apoiada. Ambas situações são corretamente capturadas pelos gráficos da solução  $v(x)$ , enquanto os gráficos de  $M(x)$ , pelo fato da solução exata exigir um polinômio de grau 4, capturarem apenas a média do momento fletor ao longo da viga. Aqui, compara-se a

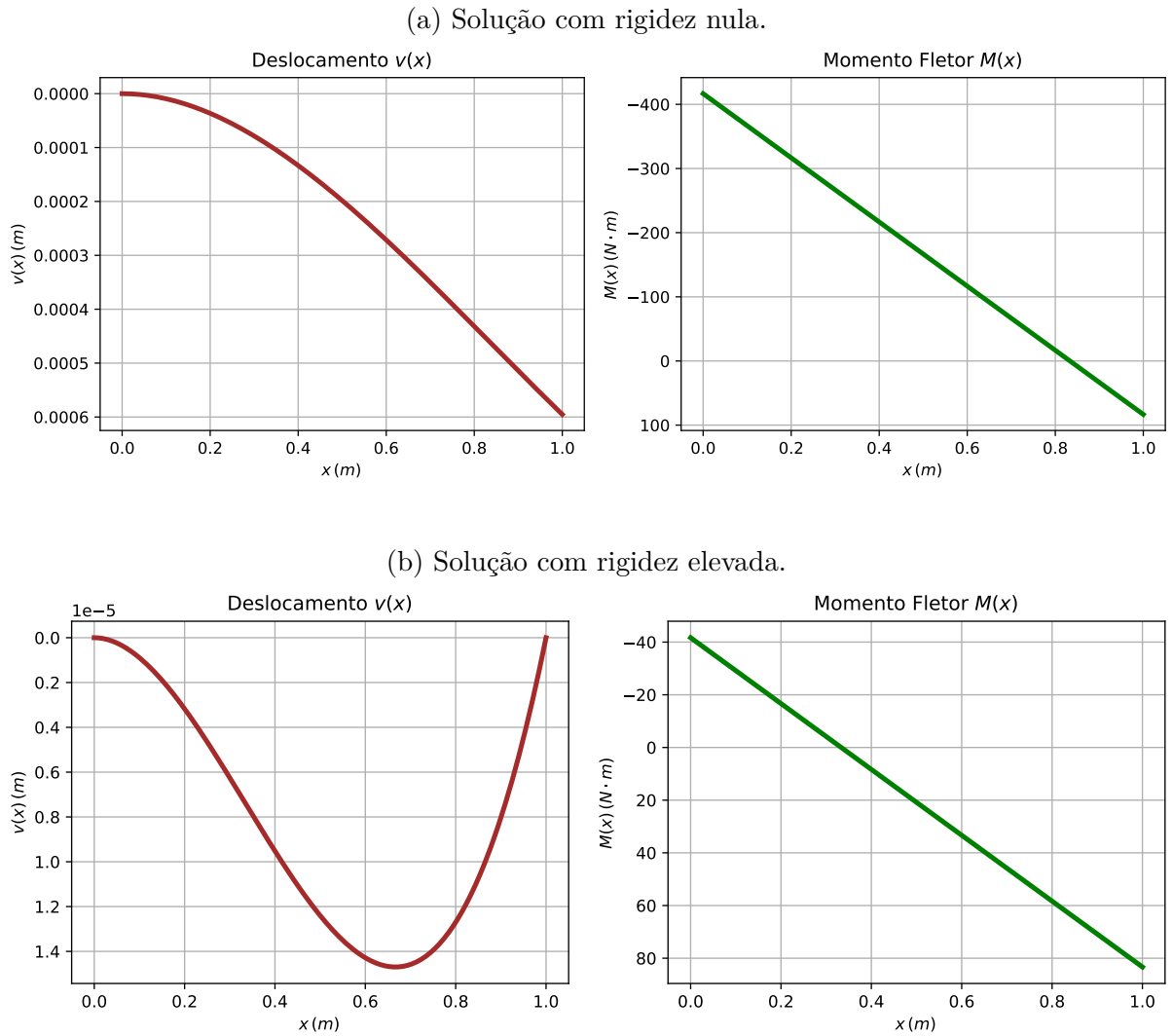


Figura 7 – Comparação entre diferentes valores de rigidez

solução obtida à solução analítica do problema, dada por

$$w(x) = +\frac{q_0 x^4}{24EI} - \frac{q_0 L x^3}{6EI} + \frac{q_0 L^2 x^2}{4EI} + \left(x^3 - 3Lx^2\right) \frac{q_0 L^4}{48EI} \left(\frac{EI}{k} + \frac{L^3}{3}\right)^{-1}. \quad (2.39)$$

na qual, para o valor de  $k$  apresentado na Tabela 2 com os valores limites de  $k = 0$  e  $k \rightarrow \infty$  são obtidos os valores representados na Tabela 3. Percebe-se, avaliando os resultados que, Tabela 3 – Comparação dos valores de deslocamento para diferentes rigidezes de mola.

Posição (m)	$k = 5.0 \times 10^7 \text{ N/m}$	$k \rightarrow \infty$	$k = 0$
$x = 0.0$	0.0	0.0	0.0
$x = 0.5$	$2.711 \times 10^{-5}$	$2.480 \times 10^{-5}$	$2.108 \times 10^{-4}$
$x = 1.0$	$7.407 \times 10^{-6}$	0.0	$5.953 \times 10^{-4}$

para o caso no qual a mola tem rigidez nula, ou seja, é inexistente, os resultados obtidos com a solução aproximada são iguais aos da solução analítica. Os resultados divergem, porém, ao considerar a mola no sistema, seja esta com rigidez finita ou infinita. Tal observação leva a uma melhor avaliação da Equação 2.39, que, sob consideração de  $k = 0$ , pode ser desenvolvida como

$$w(x) = \frac{q_0 x^2}{24EI} (6L^2 - 4Lx + x^2) \quad (2.40)$$

ou seja, na ausência da mola, a solução analítica é quadrática, motivo este o qual a solução aproximada de ordem cúbica consegue recuperar os resultados analíticos apenas para esse caso.

### 2.2.2 Função aproximativa de 4ª ordem

Agora, assim como no problema anterior, adotando um polinômio de ordem superior, se tem

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 \quad (2.41)$$

$$\delta\alpha_0 + \delta\alpha_1 x + \delta\alpha_2 x^2 + \delta\alpha_3 x^3 + \delta\alpha_4 x^4 + \delta\alpha_5 x^5 \quad (2.42)$$

Como indicado no item anterior, as condições de contorno essenciais a serem impostas às soluções aproximadas são

$$v(0) = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_0 = 0 \quad (2.43a)$$

$$v' = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + 4\alpha_4 x^3 + 5\alpha_5 x^4 \quad (2.43b)$$

$$v'(0) = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_1 = 0 \quad (2.43c)$$

de modo que, a solução aproximativa já com as condições de contorno toma a forma

$$v(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 \quad . \quad (2.44)$$

Assim, o PTV com as soluções aproximadas é dado por:

$$W_{int} = \int_0^L \left( EI \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4) \right)^2 \right) dx + k \delta v(L) v(L) \quad (2.45)$$

e

$$W_{ext} = \int_0^L q (\alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4) dx \quad (2.46)$$

Agora, extraindo as bases do polinômio aproximativo a partir na forma  $\alpha_i \phi_i$ , se tem

$$\phi_0(x) = 0 \quad (2.47a)$$

$$\phi_1(x) = 0 \quad (2.47b)$$

$$\phi_2(x) = x^2 \quad (2.47c)$$

$$\phi_3(x) = x^3 \quad (2.47d)$$

$$\phi_4(x) = x^4 \quad (2.47e)$$

Basta então calcular  $\phi_i''(x)$  e avaliar as integrais e o termo de mola em  $x = L$

$$K_{ij} = \int_0^L EI \phi_i''(x) \phi_j''(x) dx + k \phi_i(L) \phi_j(L) \quad (i, j = 2, 3, 4). \quad (2.48)$$

Que, fazendo o uso da Equação 1.26b, obtém-se a matriz dos coeficientes e o vetor de forças como:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4EIL + L^4 k & 6EIL^2 + L^5 k & 8EIL^3 + L^6 k \\ 0 & 0 & 6EIL^2 + L^5 k & 12EIL^3 + L^6 k & 18EIL^4 + L^7 k \\ 0 & 0 & 8EIL^3 + L^6 k & 18EIL^4 + L^7 k & \frac{144EIL^5}{5} + L^8 k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{L^3 q}{3} \\ \frac{L^4 q}{4} \\ \frac{L^5 q}{5} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

A solução do sistema linear apresentado na Equação 1.26b com a matriz  $\mathbf{K}$  e o vetor  $\mathbf{F}$  é dada por:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{L^2 q (12EI + L^3 k)}{16EI(3EI + L^3 k)} \\ \frac{Lq(-24EI - 5L^3 k)}{48EI(3EI + L^3 k)} \\ \frac{q}{24EI} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

de modo que, finalmente, se obtém a solução do problema como

$$v(x) = \frac{qx^2 (L(3L(12EI + L^3 k) - x(24EI + 5L^3 k)) + 2x^2(3EI + L^3 k))}{48EI(3EI + L^3 k)} \quad (2.51)$$

Agora, assim como nos exemplos anteriores, faz-se o uso de valores numéricos de forma a representar graficamente a solução obtida. Substituindo os valores numéricos indicados na Tabela 2, obtém-se a solução do problema, indicada na Figura 8. Aqui, novamente se

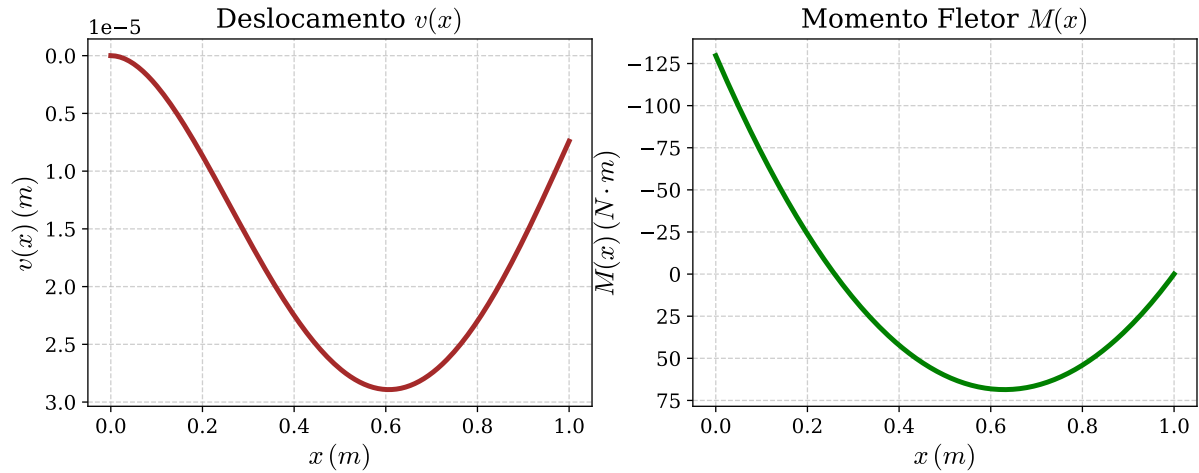


Figura 8 – Solução do exercício 1.

beneficia em se comparar a solução obtida com a solução analítica do problema. A solução analítica do problema é dada por

Considerando-se, assim como na solução anterior, valores limites de rigidez, ou seja, nula ou muito elevada, são obtidas as soluções ilustradas nas Figuras 9a e 9b. Aqui, uma vez construída a solução aproximada de 4ª ordem, vale comparar os resultados obtidos com esta com os resultados obtidos a partir da solução analítica, apresentados na Tabela 3. Pode-se observar que, como na presença da mola a solução do problema é de quarta ordem,

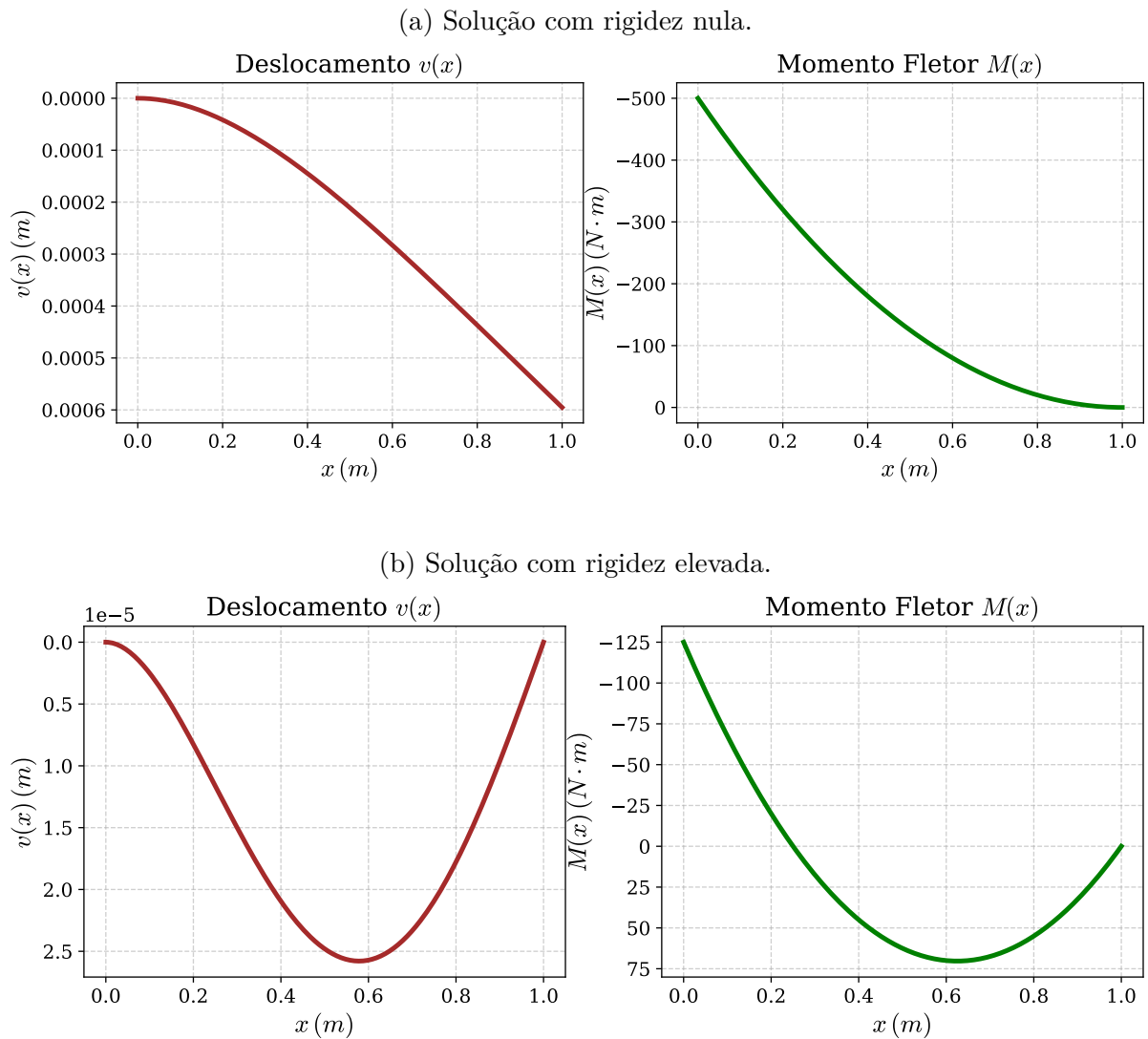


Figura 9 – Comparação entre diferentes valores de rigidez

como esperado, a solução aproximativa também de quarta ordem consegue recuperar a solução exata.

### 2.3 Exercício 3

- Obtenha duas soluções aproximadas para o deslocamento transversal da viga sob base elástica indicada na Figura 10. Mostre que o caso 1) está contido na solução para  $k = 0$ . Obs: a mola é distribuída por unidade de comprimento.

Novamente, inicia-se a análise do problema definindo as parcelas referentes ao

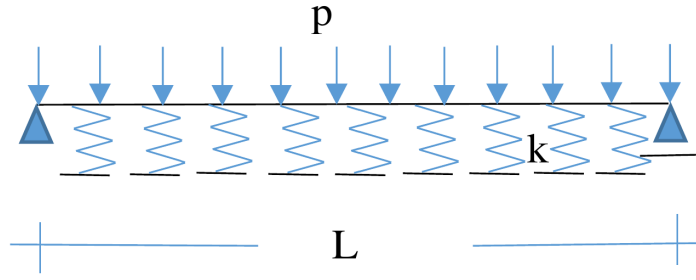


Figura 10 – Viga Bi-Apoiada sob mola distribuída, sujeita a carregamento distribuído.

trabalho interno e externos. Similarmente ao problema anterior, o trabalho interno terá uma parcela em decorrência da mola, porém em decorrência de uma mola distribuída. Assim, realizando a integral do trabalho interno da barra juntamente com o da mola distribuída, ao longo do comprimento da barra, se tem o trabalho interno dado por

$$W_{int} = \int_0^L \left( EI \frac{d^2}{dx^2} \delta v(x) \frac{d^2}{dx^2} v(x) \right) dx + \int_0^L (k_d \delta v(x) v(x)) dx \quad . \quad (2.52)$$

O trabalho externo será dado apenas pela integral da força distribuída ao longo do comprimento da barra, dado por

$$W_{ext} = \int_0^L q \delta v(x) dx \quad (2.53)$$

Aqui novamente se repete os valores numéricos da Tabela 1 na Tabela 4, apenas com a adição do valor da constante de mola distribuída  $k_d$ . Estes serão ao final adotados para se realizar a plotagem do gráfico da função aproximativa  $v(x)$ , assim como do momento fletor  $M(x)$  para ambas ordens aproximativas.

Tabela 4 – Dados do exercício 3.

$L$ (m)	$E$ (Pa)	$I$ (m <sup>4</sup> )	$q$ (N/m)	$k_d$ (N/m <sup>2</sup> )
1.0	$210.0 \times 10^9$	$1.0 \times 10^{-6}$	1000	$5.0 \times 10^7$

### 2.3.1 Função aproximativa de 3.<sup>a</sup> ordem.

Inicia-se a resolução do problema adotando-se funções polinômiais cúbicas para a aproximação dos campos reais e virtuais,  $v(x)$  e  $\delta v(x)$ , respectivamente.

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \quad (2.54a)$$

$$\delta \alpha_0 + \delta \alpha_1 x + \delta \alpha_2 x^2 + \delta \alpha_3 x^3 \quad (2.54b)$$

Para o problema em questão, as condições de contorno essenciais a serem respeitadas são as mesmas do problema 1,  $v(0) = 0$  e  $v(L) = 0$ . Como já indicado anteriormente no texto, a abordagem adotada é a de Galerkin, de modo que o campo virtual tem a mesma forma que o campo real (homogênea), de modo que:

$$v(0) = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_0 = 0 \quad (2.55a)$$

$$v(L) = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_1 = -L^2\alpha_3x - L\alpha_2x \quad (2.55b)$$

Assim, a função aproximativa  $v(x)$  se escreve

$$v(x) = -L^2\alpha_3x - L\alpha_2x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3 \quad (2.56)$$

e o PTV, com as funções aproximativas toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} W_{int} = & \int_0^L \left( -EI \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} (-L^2\alpha_3x - L\alpha_2x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3) \right)^2 \right) dx \\ & + \int_0^L \left( k_d (-L^2\alpha_3x - L\alpha_2x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3)^2 \right) dx \end{aligned} \quad (2.57)$$

e

$$W_{ext} = \int_0^L q (-L^2\alpha_3x - L\alpha_2x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3) dx \quad (2.58)$$

Extraindo dos polinômios aproximadores as funções base  $\phi_i$ , se tem

$$\phi_0(x) = 0 \quad (2.59a)$$

$$\phi_1(x) = 0 \quad (2.59b)$$

$$\phi_2(x) = x(-L + x) \quad (2.59c)$$

$$\phi_3(x) = x(-L^2 + x^2) \quad (2.59d)$$

de forma que, a partir da Equação 1.26b, se obtém a matriz  $\mathbf{K}$  e o vetor de forças  $\mathbf{F}$  como

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4EIL + \frac{L^5k_d}{30} & 6EIL^2 + \frac{L^6k_d}{20} \\ 0 & 0 & 6EIL^2 + \frac{L^6k_d}{20} & 12EIL^3 + \frac{8L^7k_d}{105} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{L^3q}{6} \\ -\frac{L^4q}{4} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

A qual resulta em um sistema linear de equações para os coeficientes  $\alpha_i$  do polinômio aproximador. Resolvendo o sistema de equações lineares, obtém-se o vetor solução

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{5L^2q}{120EI+L^4k_d} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

de modo que a função aproximativa pode ser escrita como

$$v(x) = -\frac{5L^2qx(-L+x)}{120EI + L^4k_d} \quad (2.62)$$

Finalmente, assim como nos exemplos anteriores, são adotados os valores numéricos indicados Tabela 4, para os quais a solução do problema é indicada na Figura 11. Aqui,

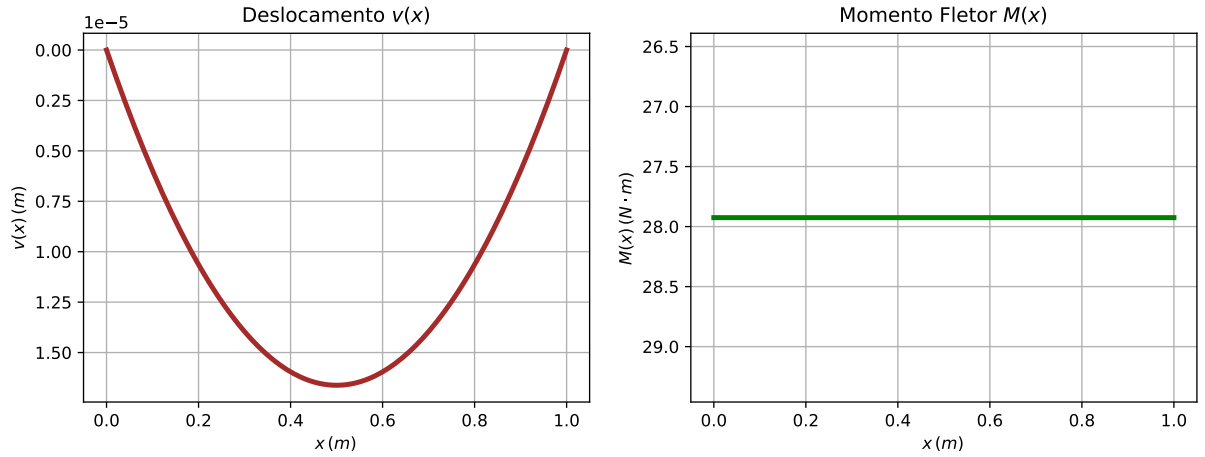


Figura 11 – Solução do exercício 3.

não se busca comparar a solução obtida com a solução analítica do problema, visto que esta possui um alto grau de dificuldade e não é correntemente apresentada na literatura. Porém, ainda pode-se avançar na exploração do problema ao considerar os casos limites, ou seja, uma rigidez nula ou muito elevada. Intuitivamente, espera-se que, para uma  $k_d = 0$ , o caso de uma viga bi-apoiada seja recuperado e, para  $k_d \rightarrow \infty$  a viga não possua esforços internos, visto que estes serão imediatamente transmitidos à base rígida. Ambos casos ilustrados nas Figuras 12a e 12b

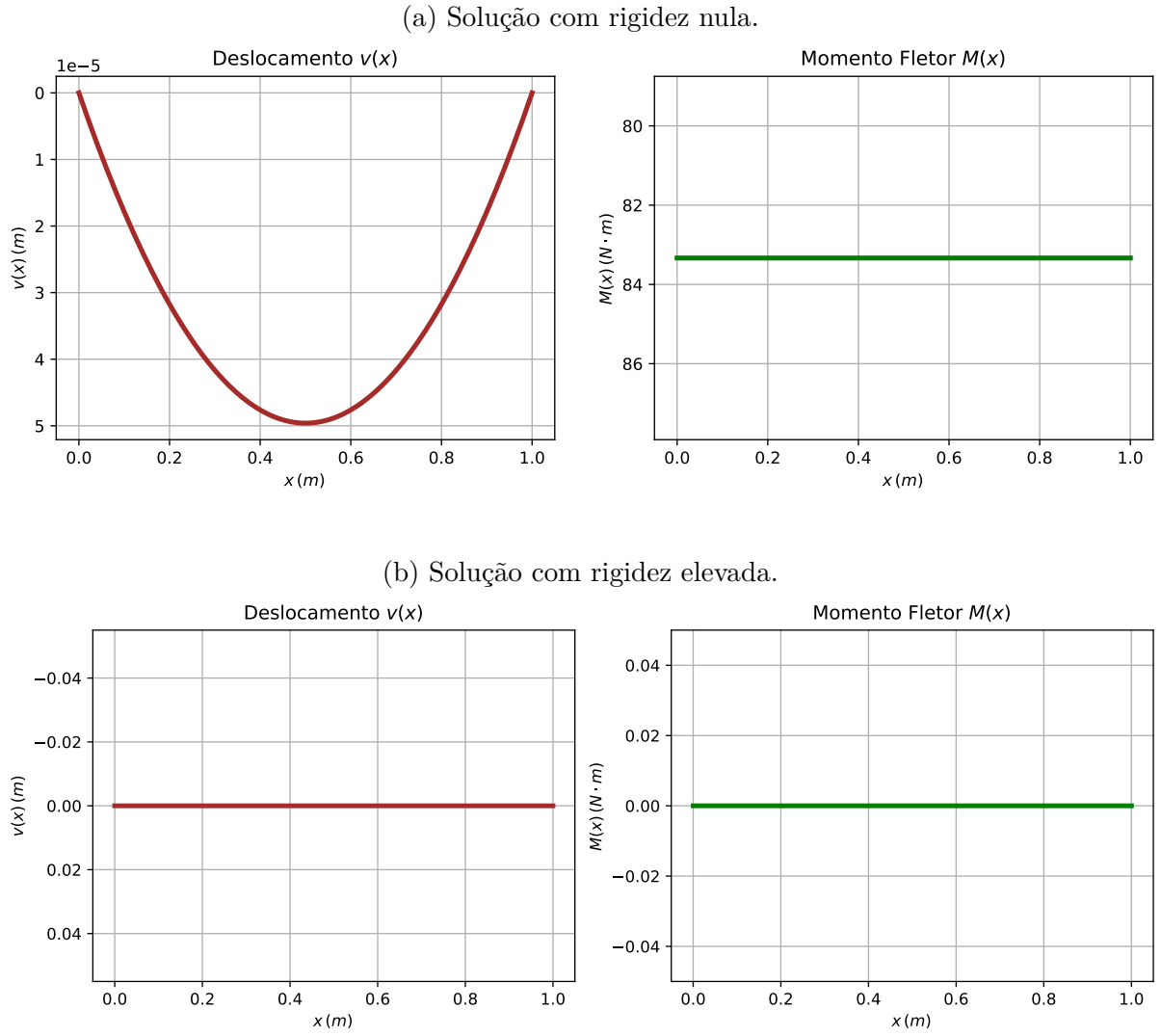


Figura 12 – Comparação entre diferentes valores de rigidez.

### 2.3.2 Função aproximativa de 4.<sup>a</sup> ordem.

Agora, são adotadas funções polinômiais de quarta ordem para a aproximação dos campos reais e virtuais,  $v(x)$  e  $\delta v(x)$ , respectivamente

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 \quad (2.63a)$$

$$\delta\alpha_0 + \delta\alpha_1 x + \delta\alpha_2 x^2 + \delta\alpha_3 x^3 + \delta\alpha_4 x^4 \quad (2.63b)$$

Como comentado na solução anterior, as condições de contorno essenciais consideradas são  $v(0) = 0$  e  $v(L) = 0$ . Como também já indicado anteriormente no texto, a abordagem adotada é a de Galerkin, de modo que o campo virtual tem a mesma forma que o campo

real (homogênea), de modo que:

$$v(0) = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_0 = 0 \quad (2.64a)$$

$$v(L) = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_1 = -L^3\alpha_4 - L^2\alpha_3 - L\alpha_2 \quad (2.64b)$$

De modo que, o polinômio aproximativo  $v(x)$  já com as condições de contorno de Dirichlet se escreve como

$$v(x) = -L^3\alpha_4x - L^2\alpha_3x - L\alpha_2x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3 + \alpha_4x^4 \quad , \quad (2.65)$$

assim, a relação do PTV se escreve, após a substituição como

$$\begin{aligned} W_{int} = & \int_0^L \left( -EI \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( -L^3\alpha_4x - L^2\alpha_3x - L\alpha_2x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3 + \alpha_4x^4 \right) \right)^2 \right) dx \\ & + \int_0^L \left( k_d \left( -L^3\alpha_4x - L^2\alpha_3x - L\alpha_2x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3 + \alpha_4x^4 \right)^2 \right) dx \end{aligned} \quad (2.66)$$

e

$$W_{ext} = \int_0^L q \left( -L^3\alpha_4x - L^2\alpha_3x - L\alpha_2x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3 + \alpha_4x^4 \right) dx \quad (2.67)$$

Dado que a função aproximativa  $v(x)$  é escrita como uma combinação  $\alpha_i\phi_i(x)$ , se tem que

$$\phi_0(x) = 0 \quad (2.68a)$$

$$\phi_1(x) = 0 \quad (2.68b)$$

$$\phi_2(x) = x(-L + x) \quad (2.68c)$$

$$\phi_3(x) = x(-L^2 + x^2) \quad (2.68d)$$

$$\phi_4(x) = x(-L^3 + x^3) \quad (2.68e)$$

Montando a matriz  $\mathbf{K}$  dos coeficientes  $\alpha_i$  e o vetor de forças  $\mathbf{F}$ , como apresentado na Equação 1.26b, se tem

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4EIL + \frac{L^5k_d}{30} & 6EIL^2 + \frac{L^6k_d}{20} & 8EIL^3 + \frac{5L^7k_d}{84} \\ 0 & 0 & 6EIL^2 + \frac{L^6k_d}{20} & 12EIL^3 + \frac{8L^7k_d}{105} & 18EIL^4 + \frac{11L^8k_d}{120} \\ 0 & 0 & 8EIL^3 + \frac{5L^7k_d}{84} & 18EIL^4 + \frac{11L^8k_d}{120} & \frac{144EIL^5}{5} + \frac{L^9k_d}{9} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{L^3q}{6} \\ -\frac{L^4q}{4} \\ -\frac{3L^5q}{10} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Resolvendo o sistema linear indicado pela Equação 1.26b, obtém-se a solução dada por

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{56L^6 k_d q}{1693440E^2 I^2 + 17472EIL^4 k_d + L^8 k_d^2} \\ \frac{84Lq(-1680EI + L^4 k_d)}{1693440E^2 I^2 + 17472EIL^4 k_d + L^8 k_d^2} \\ \frac{42q(1680EI - L^4 k_d)}{1693440E^2 I^2 + 17472EIL^4 k_d + L^8 k_d^2} \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

Finalmente, o polinômio aproximativo pode ser reconstruído, e  $v(x)$  é dada por

$$v(x) = \frac{14qx(4L^6 k_d(L-x) + 6L(L^2 - x^2)(1680EI - L^4 k_d) - 3(L^3 - x^3)(1680EI - L^4 k_d))}{1693440E^2 I^2 + 17472EIL^4 k_d + L^8 k_d^2} \quad (2.71)$$

Dada a solução aproximativa de quarta ordem, é interessante comparar esta com a solução da barra simplesmente bi-apoiada, ou seja, a barra para  $k_d = 0$ . A equação anteriormente obtida, realizando a substituição de  $k_d = 0$  toma a forma

$$v(x) = \frac{qx(L^3 - 2Lx^2 + x^3)}{24EI} \quad (2.72)$$

ou seja, percebe-se que, para  $k_d = 0$ , a solução da barra bi-apoiada é, de fato, recuperada.

Agora, adotando os valores indicados na Tabela 4, obtém-se o resultado ilustrado na Figura 13.

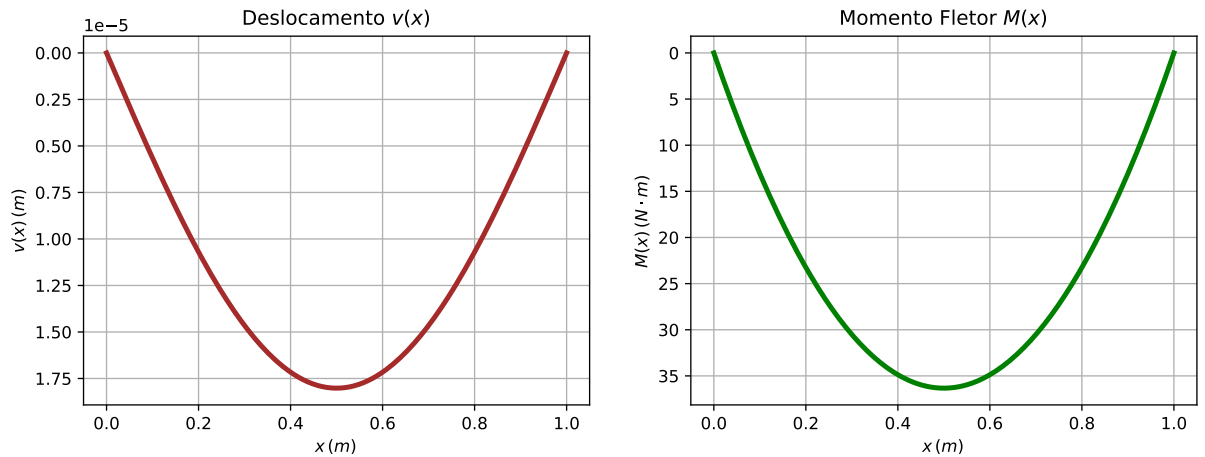


Figura 13 – Solução do exercício 3 para aproximação de quarta ordem.

Por fim, pode-se considerar casos limites, ou seja, uma rigidez nula ou muito elevada. Percebe-se que, para uma rigidez nula, a situação da Figura 2 deve ser recuperada,

enquanto, para  $k_d \rightarrow \infty$ , os esforços internos da viga devem ser nulos, visto que os carregamentos externos serão imediatamente transferidos à base rígida. Tais situações limites são ilustradas nas Figuras 14a e 14b, respectivamente. Percebe-se através dos

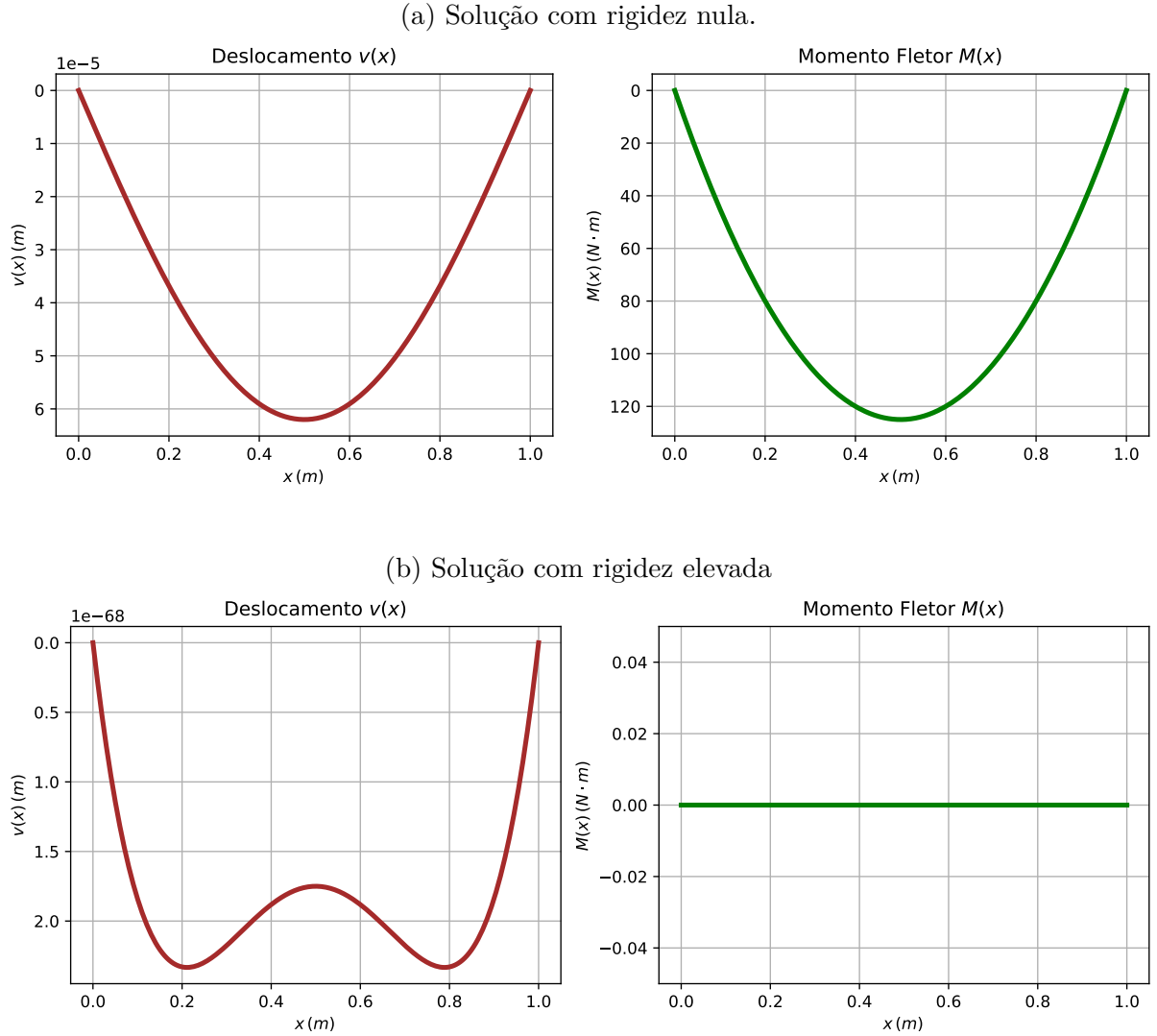


Figura 14 – Comparação entre diferentes valores de rigidez.

gráficos que o polinômio de quarta ordem consegue recuperar a resposta analítica da estrutura.

### 3 Conclusão

O presente trabalho teve como objetivo apresentar o formalismo matemático do Princípio dos Trabalhos Virtuais que define que um corpo está equilibrado se a igualdade

entre trabalhos externos e internos for verificada. Através do princípio, foi possível obter o problema diferencial em sua forma integral (ou forma fraca) e, a partir desta, naturalmente buscar soluções aproximadas para o problema.

Através da resolução dos exercícios propostos, foi possível observar a importância do formalismo matemático na representação de problemas de Mecânica dos Sólidos, bem como a importância do formalismo tensorial na representação de tensões e deformações em um corpo deformável. A familiarização com o formalismo matemático permite ao pesquisador melhor compreender as teorias e modelos que envolvem a Mecânica dos Sólidos ao longo de sua formação como pesquisador.

## Referências

- ANAND, Lallit; GOVINDJEE, Sanjay. **Continuum Mechanics of Solids**. 1. ed. [S.l.]: Oxford University PressOxford, jul. 2020. ISBN 978-0-19-886472-1 978-0-19-189676-7. DOI: [10.1093/oso/9780198864721.001.0001](https://doi.org/10.1093/oso/9780198864721.001.0001). Disponível em: <https://academic.oup.com/book/43650>>. Acesso em: 30 set. 2024.
- LANCZOS, Cornelius. **The Variational Principles of Mechanics**. [S.l.]: Dover Publications, 2012. OCLC: 969061058. ISBN 978-0-486-13470-3.
- PROENÇA, Sergio Persival Baroncini. **Fundamentos Matemáticos das Mecânicas dos Sólidos e Estruturas**. 1. ed. [S.l.]: USP, mar. 2024. Acesso em: 2024.
- SPENCER, A. J. M. **Continuum mechanics**. Dover ed. Mineola, N.Y: Dover Publ, 2004. ISBN 978-0-486-43594-7.