Diego Dias Veloso

Fundamentos Matemáticos da Mecânica dos Sólidos e Estruturas

São Carlos

25 de abril de 2025

Diego Dias Veloso

Fundamentos Matemáticos da Mecânica dos Sólidos e Estruturas

Universidade de São Paulo

Orientador: PhD. Sérgio Persional Baronchinni Proença

São Carlos
25 de abril de 2025

Sumário

1 Introdução

A Mecânica dos Sólidos é um ramo da física a qual estuda o comportamento de sólidos deformáveis sob a ação diversa de forças externas. No contexto da Engenharia de Estruturas e da Mecânica Computacional, a Mecânica dos Sólidos é o campo que fornece todo o ferramental teórico necessário para o entendimento do comportamento das estruturas e dos materiais. Além disso, essa base permite ao pesquisador propor novos modelos e teorias que discrevam diferentes problemas.

No campo da Mecânica dos Sólidos, em sua grande parte seus fundamentos teóricos são descritos a partir de conceitos da algebra linear, como por exemplo, espaços vetoriais e operações entre tensores. Nesse sentido, o primeiro trabalho entregue almejou fornecer ao pesquisador tal ferramental. Agora, o presente trabalho tem como objetivo apresentar os conceitos fundamentais da análise tensorial, ou seja, tópicos como o gradiente e divergente de tensores. Ambas operações são fundamentais para o entendimento do comportamento de sólidos deformáveis.

Desse modo, dando continuidade ao primeiro trabalho, o presente trabalho tem como objetivo aprofundar os conceitos de análise tensorial do pesquisador. Com esses conhecimentos, facilita-se a compreensão das teorias da Mecânica dos sólidos com seu rigor matemático, além de também fornecer ao pesquisador ferramentais para o desenvolvimento de novos modelos e teorias.

1.1 Aspectos teóricos

No presente tópico, serão apresentados conceitos fundamentais que serão utilizados ao longo do texto. Objetivando uma apresentação mais clara e objetiva ao longo do texto, provas e demonstrações de teoremas e propriedades não serão apresentadas. Portando, tais demonstrações mais relevantes serão aqui apresentadas. Maiores detalhes, no contexto da mecânica dos sólidos, podem ser encontrados em (PROENÇA, 2024) e (ANAND; GOVINDJEE, 2020).

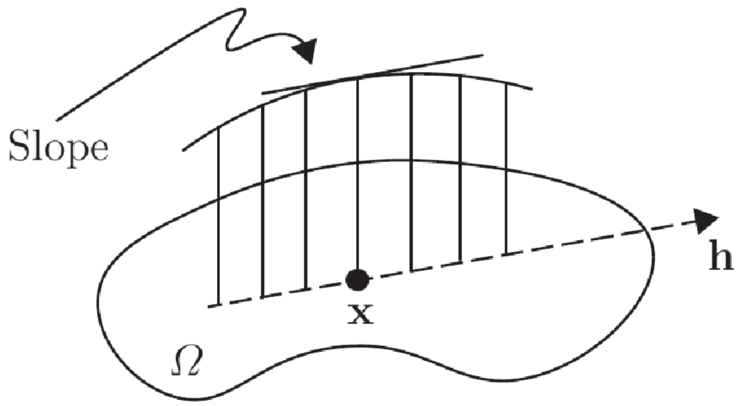

Figura 1 – Derivada direcional de uma função $g\left(x\right)$ em um ponto x.

1.1.1 Derivada direcional

Dada uma função $g\left(x\right)$ definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, sua derivada é definida como:

$$g'\left(x\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g\left(x + \Delta x\right) - g\left(x\right)}{\Delta x}. \tag{1.1}$$

Com a definição acima, pode-se escrever $g\left(x + \Delta x\right)$ como:

$$g\left(x + \Delta x\right) = g\left(x\right) + g'\left(x\right)\, \Delta x + \mathcal{O}\left(\Delta x^2\right). \tag{1.2}$$

A definição acima pode ser estendida para funções vetoriais $f\left(\boldsymbol{x}\right)$ definidas em um espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Dessa forma, a derivada direcional de uma função vetorial $f\left(\boldsymbol{x}\right)$ em um ponto $\boldsymbol{x}$ na direção do vetor unitário $\boldsymbol{e}_i$ é dada por:

$$\nabla f\left(\boldsymbol{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(\boldsymbol{x} + \Delta x\, \boldsymbol{e}_i\right) - f\left(\boldsymbol{x}\right)}{\Delta x}. \tag{1.3}$$

Além disso, busca-se agora definir o termo $\mathcal{O}\left(\Delta x^2\right)$ que aparece na equação acima. Para isso, considere a função $f\left(\boldsymbol{x}\right)$ definida em um espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Seja $\boldsymbol{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ e $\boldsymbol{e}_i = \left(0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0\right)$ o vetor unitário na direção i. Assim, a função $f\left(\boldsymbol{x}\right)$ pode ser escrita como:

$$f\left(\boldsymbol{x}\right) = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right). \tag{1.4}$$

A partir disso, o termo $\mathcal{O}\left(\Delta x^2\right)$ é definido como um termo de ordem superior[1] em relação a Δx. Defini-se um termo de ordem superior se este:

$$\lim_{\left\|\vec{\Delta x}\to 0\right\|} \frac{\left\|\mathcal{O}\left(\vec{\Delta x}^2\right)\right\|}{\left\|\vec{\Delta x}\right\|} = 0. \tag{1.5}$$

Portando, para um pequeno incremento α, se tem:

$$f\left(\boldsymbol{x} + \alpha\, \boldsymbol{e}_i\right) = f\left(\boldsymbol{x}\right) + \left.\frac{d\left[f\left(\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{e}_i\right)\right]}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}. \tag{1.6}$$

Ou seja, o valor da função $f\left(\boldsymbol{x} + \alpha\, \boldsymbol{e}_i\right)$ é dado pela soma do valor da função $f\left(\boldsymbol{x}\right)$ e o incremento na direção do vetor unitário $\boldsymbol{e}_i$. Tal incremento é entendido como a parte linear do incremento total, visto que a parcela $\mathcal{O}\left(\Delta x^2\right)$ é desprezada.

1.1.2 Gradiente

Serão aqui apresentadas as formas do gradiente para campos escalares, vetoriais e tensoriais.

1.1.2.1 Campo escalar

Um campo escalar $f\left(\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{e}_i\right)$ é dado por:

$$\phi\left(\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{e}_i\right) = \phi\left(\boldsymbol{x}\right) + \alpha \underbrace{D\phi\left(\boldsymbol{x}\right)}_{\nabla\phi(\boldsymbol{x})} \cdot \boldsymbol{e}_i, \tag{1.7}$$

no qual a operação $\cdot$ é justificada para a consistência dimensional. Além disso, o termo $D\phi\left(\boldsymbol{x}\right) \cdot \boldsymbol{e}_i$ representa a derivada direcional do campo escalar $f\left(\boldsymbol{x}\right)$ na direção do vetor unitário $\boldsymbol{e}_i$, ou seja :

$$D\phi\left(\boldsymbol{x}\right) \cdot \boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}. \tag{1.8}$$

1.1.2.2 Campo vetorial

Um campo vetorial $\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{e}_j\right)$ é dado por:

$$\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{e}_j\right) = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right) + \alpha \underbrace{D\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right)}_{\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{e}_j. \tag{1.9}$$

[1] O termo $\mathcal{O}\left(\Delta x^2\right)$ é um termo de ordem superior, ou seja, é um termo que tende a zero mais rapidamente do que Δx quando Δx tende a zero.

O termo $D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}_j$ representa a derivada direcional do campo vetorial $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ na direção do versor $\boldsymbol{e}_j$, ou seja :

$$D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}_j = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}, \frac{\partial f_2}{\partial x_j}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i \tag{1.10}$$

1.1.2.3 Campo tensorial

Um campo tensorial $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{e}_k)$ é dado por:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) + \alpha\,\underbrace{D\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})}_{\nabla\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})}\,\boldsymbol{e}_k, \tag{1.11}$$

onde o termo $D\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}_k$ representa a derivada direcional do campo tensorial $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ na direção do versor $\boldsymbol{e}_k$, ou seja :

$$D\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}_k = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial T_{11}}{\partial x_k}, \frac{\partial T_{12}}{\partial x_k}, \ldots, \frac{\partial T_{nn}}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \tag{1.12}$$

1.1.3 Divergente

1.1.3.1 Campo vetorial

O divergente de um campo vetorial $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ é dado por:

$$\mathrm{Div}(\boldsymbol{f}) = \mathrm{Tr}(\nabla\boldsymbol{v}). \tag{1.13}$$

Escrevendo $\boldsymbol{v}$ em função de seus componentes e utilizando a definição do operador traço, $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$, tem-se:

$$\mathrm{Div}(\boldsymbol{f}) = \mathrm{Tr}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)\right) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\delta_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \tag{1.14}$$

1.1.3.2 Campo tensorial

O divergente de um campo tensorial $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ é dado por:

$$\mathrm{Div}(\boldsymbol{T}) = \nabla\boldsymbol{T}\boldsymbol{I}. \tag{1.15}$$

Escrevendo $\boldsymbol{T}$ em função de seus componentes, tem-se:

$$\mathrm{Div}(\boldsymbol{T}) = \nabla(T_{ij}\,\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)(\delta_{mn}(\boldsymbol{e}_m \otimes \boldsymbol{e}_n)) = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k)\,\delta_{mn}(\boldsymbol{e}_m \otimes \boldsymbol{e}_n) \tag{1.16}$$

a qual pode ser trabalhada como:

$$\mathrm{Div}(\boldsymbol{T}) = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}\,\boldsymbol{e}_i \tag{1.17}$$

1.1.4 Generalização do operador gradiente

(ANAND; GOVINDJEE, 2020) define o operador $\nabla(\cdot)$ como:

$$\nabla(\cdot) = \partial_k \, \boldsymbol{e}_k \tag{1.18}$$

Tal definição é bastante conveniente e válida para campos escalares, vetoriais e tensoriais. Assim, se tem:

$$\nabla(\phi) = \partial_k \, \boldsymbol{e}_k \, (\phi) = \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \, \boldsymbol{e}_k \tag{1.19}$$

$$\nabla(\boldsymbol{v}) = \partial_k \, \boldsymbol{e}_k \, (\boldsymbol{v}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \, \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_k \tag{1.20}$$

$$\nabla(\boldsymbol{S}) = \partial_k \, \boldsymbol{e}_k \, (\boldsymbol{S}) = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} \, \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k \tag{1.21}$$

As expressões acima serão utilizadas ao longo do texto.

1.1.5 Contração dupla

A contração dupla é uma operação que contrai dois indices ao se operar sobre dois tensores. Porém, esta não diz qual diz quais dois indices devem ser contraídos. Desse modo, deve-se definir qual é a operação de contração dupla. Usualmente, no contexto da mecânica dos sólidos, a contração dupla é definida como:

$$(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k) \, (\boldsymbol{e}_l \otimes \boldsymbol{e}_m) = \boldsymbol{e}_i \, (\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_l) \, (\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_m) = \boldsymbol{e}_i \, \delta_{jl} \, \delta_{km}. \tag{1.22}$$

Portanto, a contração dupla é dada por:

$$(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k) \, : \, (\boldsymbol{e}_l \otimes \boldsymbol{e}_m) := \boldsymbol{e}_i \, \delta_{jl} \, \delta_{km}. \tag{1.23}$$

Cabe-se destacar a necessidade de se definir qual é a operação de contração dupla, ao, por exemplo, alguns livros definirem a seguinte operação:

$$(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k) \, \cdot\cdot \, (\boldsymbol{e}_l \otimes \boldsymbol{e}_m) := \boldsymbol{e}_i \, \delta_{jm} \, \delta_{kl}. \tag{1.24}$$

Ou seja, a contração dupla acima resulta no transposto do resultado da contração dupla definida anteriormente. No caso de tensores simétricos, como o tensor de deformação, a operação de contração dupla não altera o resultado. Porém, no caso de tensores assimétricos a operação de contração dupla altera o resultado.

2 Resoluções

A seguir são apresentadas as resoluções dos problemas propostos na segunda lista de exercícios da disciplina de Fundamentos da Mecânica dos Sólidos e Estruturas.

2.1 Exercício 1

Considere a relação geral para o desenvolvimento emm primeira ordem de um campo f na vizinhando de um ponto segundo a direção do versor $\boldsymbol{e}_i$:

$$f(\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{e}_i) = f(\boldsymbol{x}) + \alpha \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{e}_i, \quad \text{com} \quad \nabla f(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

e suas particularizações para os campos escalar, vetorial e tensorial de tensor ordem, respectivamente, $\phi, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{S}$. Escreva as expressões indiciais para as componentes de $\nabla \phi, \nabla \boldsymbol{v}$ e $\nabla \boldsymbol{S}$

- **Resolução** :

A relação geral para o desenvolvimento em primeira ordem de um campo ϕ na vizinhança de um ponto segundo a direção do versor $\boldsymbol{e}_i$ é dada por:

$$\phi(\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{e}_i) = \phi(\boldsymbol{x}) + \alpha \overbrace{\underbrace{\nabla \phi(\boldsymbol{x})}_{\text{Ordem 1}} \cdot \boldsymbol{e}_i}^{\text{Ordem 0}} \tag{2.1}$$

Da definição de $\nabla \phi(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \phi}{\partial x_k}$, tem-se que a expressão $\nabla \phi \cdot \boldsymbol{e}_i$ é entendida como a derivada direcional do campo escalar ϕ na direção do vetor unitário $\boldsymbol{e}_i$, ou seja:

$$\nabla \phi \cdot \boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}. \tag{2.2}$$

Ou seja, a expressão $\nabla \phi$ tem suas componentes e é escrita em função destas como:

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i \quad \text{e} \quad (\nabla \phi)_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}. \tag{2.3}$$

Para o campo vetorial $\boldsymbol{v}$, a relação geral para o desenvolvimento em primeira ordem de um campo $\boldsymbol{v}$ na vizinhança de um ponto segundo a direção do versor $\boldsymbol{e}_i$ é dada por:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) + \alpha \overbrace{\underbrace{\nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})}_{\text{Ordem 2}} \cdot \boldsymbol{e}_i}^{\text{Ordem 1}} \tag{2.4}$$

A análise dimensional da expressão acima indica que a expressão $\nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ é um tensor de segunda ordem. Dessa forma, $\nabla \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ pode ter suas componentes determinadas como:

$$(\nabla \boldsymbol{v})_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \underbrace{\nabla \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{e}_j}_{\substack{\text{Derivada}\\ \text{direcional}}} = \boldsymbol{e}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_j} \tag{2.5}$$

Escrevendo $\boldsymbol{v}$ em função de seus componentes, tem-se:

$$(\nabla \boldsymbol{v})_{ij} = \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k = \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \delta_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \tag{2.6}$$

Ou seja, a expressão $\nabla \boldsymbol{v}$ tem suas componentes e é escrita em função destas como:

$$\nabla \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \quad \text{e} \quad (\nabla \boldsymbol{v})_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \tag{2.7}$$

Para o campo tensorial $\boldsymbol{S}$, a relação geral para o desenvolvimento em primeira ordem de um campo $\boldsymbol{S}$ na vizinhança de um ponto segundo a direção do versor $\boldsymbol{e}_i$ é dada por:

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) + \alpha\, \overbrace{\underbrace{\nabla \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})}_{\text{Ordem 3}} \cdot \boldsymbol{e}_i}^{\text{Ordem 2}} \tag{2.8}$$

A análise dimensional da expressão acima indica que a expressão $\nabla \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})$ é um tensor de terceira ordem. Dessa forma, $\nabla \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})$ pode ter suas componentes determinadas como:

$$(\nabla \boldsymbol{S})_{ijk} = \boldsymbol{e}_i \cdot \underbrace{\nabla \boldsymbol{S}\, \boldsymbol{e}_j}_{\substack{\text{Derivada}\\ \text{direcional}}} = \boldsymbol{e}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial x_j}. \tag{2.9}$$

Escrevendo $\boldsymbol{S}$ em função de seus componentes, tem-se:

$$(\nabla \boldsymbol{S})_{ijk} = \frac{\partial S_{lm}}{\partial x_j} \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_l \otimes \boldsymbol{e}_m = \frac{\partial S_{lm}}{\partial x_j} \delta_{il} \otimes \boldsymbol{e}_m = \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_j} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k}. \tag{2.10}$$

Ou seja, a expressão $\nabla \boldsymbol{S}$ tem suas componentes e é escrita em função destas como:

$$\nabla \boldsymbol{S} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k \quad \text{e} \quad (\nabla \boldsymbol{S})_{ijk} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k}. \tag{2.11}$$

2.2 Exercício 2

Com as definições:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{v}) = \nabla \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{I}, \quad \operatorname{div}(\boldsymbol{S}) = \nabla \boldsymbol{S}\, \boldsymbol{I}$$

Obtenha as expressões indiciais para o cálculo de div($\boldsymbol{v}$) e das componentes de div($\boldsymbol{S}$).

- **Resolução** :

Escrevendo $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{I}$ em função de seus componentes, tem-se:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{v}) = \nabla \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{I} = \nabla\left(v_i \boldsymbol{e}_i\right) \cdot \left(\delta_{kl} \boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l\right) \tag{2.12}$$

Lembrando que a operação $\nabla(\cdot) = \partial_k \boldsymbol{e}_k$ se tem:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{v}) = \partial_j \left(v_i \boldsymbol{e}_i\right) \otimes \boldsymbol{e}_j \cdot \left(\delta_{kl} \boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l\right) \tag{2.13}$$

e

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{v}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta_{kl} \left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\right) \cdot \left(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l\right). \tag{2.14}$$

Lembrando da relação $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \operatorname{Tr}\left(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{B}\right)$, se tem:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{v}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta_{kl} \operatorname{Tr}\left[\left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\right)\left(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l\right)\right] \tag{2.15}$$

Novamente, recordando da relação $\left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\right)\left(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l\right) = \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k \left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_l\right)$, se tem:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{v}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta_{kl} \operatorname{Tr}\left[\left(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k\right)\left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_l\right)\right] = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta_{kl} \delta_{jk} \delta_{il} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \tag{2.16}$$

Assim, se tem:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{v}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}. \tag{2.17}$$

Para o campo tensorial $\boldsymbol{S}$, o seu divergente é dado por:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{S}) = \nabla \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{I} \tag{2.18}$$

Escrevendo $\boldsymbol{S}$ e $\boldsymbol{I}$ em função de suas componentes, tem-se:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{S}) = \nabla\left(S_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\right) \cdot \left(\delta_{kl} \boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l\right) \tag{2.19}$$

Lembrando que a operação $\nabla(\cdot) = \partial_k \boldsymbol{e}_k$ se tem:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{S}) = \partial_m \left(S_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\right) \otimes \boldsymbol{e}_m \cdot \left(\delta_{kl} \boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l\right). \tag{2.20}$$

Desenvolvendo a expressão acima, tem-se:

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{S}) = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_m}\delta_{kl}\underbrace{\left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_m\right)\left(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l\right)}_{\text{Contração Dupla}}. \tag{2.21}$$

Dada a operação de contração dupla na equação acima e de sua definição apresentada em 1.1.5, se tem:

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{S}) = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_m}\delta_{kl}\delta_{jk}\delta_{ml}\boldsymbol{e}_i \tag{2.22}$$

assim, se tem:

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{S}) = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i \tag{2.23}$$

Ou seja, a expressão $\mathrm{div}(\boldsymbol{S})$ tem suas componentes e é escrita em função destas como:

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{S}) = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i \quad \text{e} \quad \left(\mathrm{div}(\boldsymbol{S})\right)_i = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}. \tag{2.24}$$

2.3 Exercício 3

Sendo $f = \phi\boldsymbol{S}$, obtenha expressões indiciais para $\nabla(\phi\boldsymbol{S})$ e $\mathrm{div}(\phi\boldsymbol{S})$.

- **Resolução** :

Realizando o desenvolvimento para $\nabla f = \nabla\left(\phi\boldsymbol{S}\right)$, inicia-se aplicando a regra do produto:

$$\nabla\left(\phi\boldsymbol{S}\right) = \nabla\left(\phi\right)\boldsymbol{S} + \phi\nabla\left(\boldsymbol{S}\right) \tag{2.25}$$

Assim, escrevendo ϕ e $\boldsymbol{S}$ em função de suas componentes, tem-se:

$$\nabla\left(\phi\boldsymbol{S}\right) = \nabla\left(\phi\right)S_{ij}\left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\right) + \phi\nabla\left(S_{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\right) \tag{2.26}$$

Lembrando que a operação $\nabla\left(\cdot\right) = \partial_k\boldsymbol{e}_k$ se tem:

$$\nabla\left(\phi\boldsymbol{S}\right) = \partial_k\left(\phi S_{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\right) \otimes \boldsymbol{e}_k + \phi\partial_k\left(S_{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\right) \otimes \boldsymbol{e}_k \tag{2.27}$$

Desenvolvendo a expressão acima, tem-se:

$$\nabla\left(\phi\boldsymbol{S}\right) = \left[\frac{\partial\phi}{\partial x_k}S_{ij} + \phi\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k}\right]\left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k\right) \tag{2.28}$$

Agora, realizando o desenvolvimento para div $(\phi\, \boldsymbol{S})$, inicialmente observa-se que $\phi\, \boldsymbol{S}$ trata-se de um campo tensorial de segunda ordem. Assim, o divergente de $\phi\, \boldsymbol{S}$ é dado por:

$$\text{div}\,(\phi\, \boldsymbol{S}) = \nabla\,(\phi\, \boldsymbol{S})\, \boldsymbol{I}, \tag{2.29}$$

que, aplicando a regra do produto, resulta em:

$$\text{div}\,(\phi\, \boldsymbol{S}) = [\nabla\,(\phi)\, \boldsymbol{S} + \phi\nabla\,(\boldsymbol{S})]\, \boldsymbol{I}. \tag{2.30}$$

Escrevendo ϕ e $\boldsymbol{S}$ em função de suas componentes, tem-se:

$$\text{div}\,(\phi\, \boldsymbol{S}) = [\nabla\,(\phi)\, S_{ij}\,(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) + \phi\nabla\,(S_{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)]\,(\delta_{kl}\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l) \tag{2.31}$$

Lembrando que a operação $\nabla\,(\cdot) = \partial_k \boldsymbol{e}_k$ se tem:

$$\text{div}\,(\phi\, \boldsymbol{S}) = [\partial_m\,(\phi)\, \boldsymbol{e}_m S_{ij}\,(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) + \phi\partial_m\,(S_{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \otimes \boldsymbol{e}_m]\,(\delta_{kl}\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l) \tag{2.32}$$

Rearranjando os termos, tem-se:

$$\text{div}\,(\phi\, \boldsymbol{S}) = \delta_{kl}\left[\frac{\partial\phi}{\partial x_m}S_{ij} + \phi\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_m}\right]\underbrace{(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_m)\,(\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l)}_{\text{Contração Dupla}}. \tag{2.33}$$

Dada a operação de contração dupla na equação acima e de sua definição apresentada em 1.1.5, se tem:

$$\text{div}\,(\phi\, \boldsymbol{S}) = \delta_{kl}\left[\frac{\partial\phi}{\partial x_m}S_{ij} + \phi\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_m}\right]\delta_{jk}\delta_{ml}\boldsymbol{e}_i \tag{2.34}$$

Realizando as permutações necessárias, tem-se:

$$\text{div}\,(\phi\, \boldsymbol{S}) = \left[\frac{\partial\phi}{\partial x_j}S_{ij} + \phi\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}\right]\boldsymbol{e}_i \tag{2.35}$$

Cabe apontar a consistência dimensional da expressão acima, uma vez que a operação de divergente diminui a ordem do tensor em uma unidade. Desse modo, a operação de divergente aplicada a um tensor de segunda ordem resulta em um tensor de primeira ordem e, de fato, o resultado obtido é um vetor

2.4 Exercício 4

Sejam ϕ e $\boldsymbol{v}$, respectivamente, campos escalar e vetorial. Verifique a consistência dimensional da seguinte relação e determine a sua forma em componentes:

$$\nabla(\phi\boldsymbol{v}) = \phi\nabla\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \otimes \nabla\phi$$

- **Resolução** :

Almejando verificar a consistência dimensional da relação proposta, inicia-se analisando as dimensões de cada um dos termos da relação. O termo da esquerda da relação, $\nabla(\phi\boldsymbol{v})$, deve resultar em um tensor de segunda ordem, uma vez que o operador ∇ aumenta a ordem do tensor em uma unidade. Já do lado direito, o primeiro termo $\phi\nabla\boldsymbol{v}$ resulta em um tensor de segunda ordem, uma vez que o operador ∇ está aplicado a um vetor, resultando em um tensor de segunda ordem. O segundo termo $\boldsymbol{v} \otimes \nabla\phi$ também resulta em um tensor de segunda ordem, uma vez que o operador ∇ está aplicado a um escalar, resultando em um vetor e este é realizado o produto tensorial com um vetor, resultando em um tensor de segunda ordem. Assim, a relação proposta é dimensionalmente consistente.

Agora, para determinar a forma em componentes da relação proposta, inicia-se escrevendo ϕ e $\boldsymbol{v}$ em função de suas componentes:

$$\nabla(\phi\boldsymbol{v}) = \nabla\left(\phi v_i \boldsymbol{e}_i\right) = \phi\, \partial_j \left(v_i \boldsymbol{e}_i\right) \otimes \boldsymbol{e}_j + v_i \boldsymbol{e}_i \otimes \partial_j \left(\phi\right) \boldsymbol{e}_j \tag{2.36}$$

Lembrando que a operação $\nabla\left(\cdot\right) = \partial_k \boldsymbol{e}_k$ se tem:

$$\nabla(\phi\boldsymbol{v}) = \left[\phi \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right] \left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\right) \tag{2.37}$$

2.5 Exercício 5

Comente sobre o seu significado na Mecânica dos Sólidos e escreva as seguintes relações em forma indicial:

a) $\mathrm{div}(\mathbb{D}\nabla^s \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{b} = 0$

b) $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \boldsymbol{u}$

c) $\boldsymbol{T} = \mathbb{D}\nabla^s \boldsymbol{u}$

- **Resolução** :

a) $\operatorname{div}(\mathbb{D}\nabla^s \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{b} = 0$:

Considerando que o tensor $\mathbb{D}$ seja o tensor constitutivo, $\boldsymbol{u}$ o vetor deslocamento, $\boldsymbol{b}$ as forças de corpo, e ∇^s seja o operador gradiente simétrico, se tem:

$$\mathbb{D}\nabla^s \boldsymbol{u} = \mathbb{D}\, \underbrace{\frac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^T \boldsymbol{u}\right)}_{\varepsilon}, \tag{2.38}$$

onde ε é o tensor de deformação infinitesimal. Portando, a relação acima pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{2.39}$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões.

Através do tetraedro de Cauchy, ilustrado na 2 é possível se obter a lei de Cauchy, a saber:

$$\boldsymbol{t}\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\sigma}\,(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{n}, \tag{2.40}$$

Com a lei de Cauchy, é possível se escrever a equação de equilíbrio de um corpo da seguinte forma:

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{\sigma n}\, dS + \int_V \boldsymbol{b}\, dV = 0, \tag{2.41}$$

que, com o uso do teorema de Gauss (ou divergência), pode ser escrita como:

$$\int_V \left[\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{b}\right]\, dV = 0. \tag{2.42}$$

Assim, como o equilíbrio deve ser válido para qualquer volume V, se tem a equação do equilíbrio em sua forma local, também denominada de forma forte do equilíbrio:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{b} = 0. \tag{2.43}$$

Assim, conclui-se que a relação proposta é a equação de equilíbrio em sua forma local.

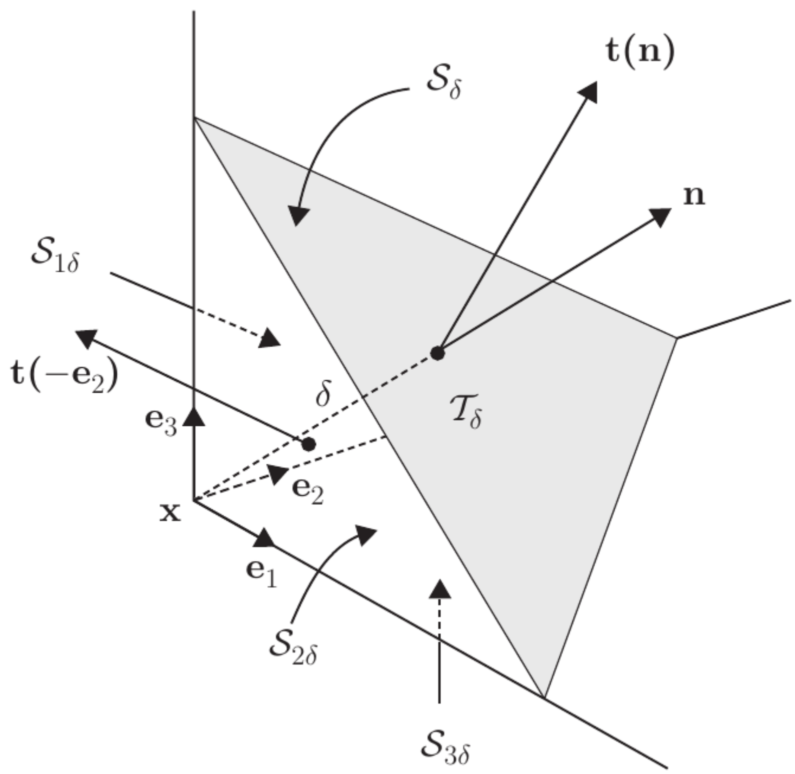

Figura 2 – Tetraedro de Cauchy.

Agora, almejando escrever a relação proposta em forma indicial, inicia-se escrevendo $\boldsymbol{u}$ e $\mathbb{D}$ em função de suas componentes:

$$\operatorname{div} \underbrace{\left[D_{ijkl}\varepsilon_{mn}\left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l\right)\left(\boldsymbol{e}_m \otimes \boldsymbol{e}_n\right)\right]}_{\text{Contração Dupla}} + b_i \boldsymbol{e}_i \tag{2.44}$$

Lembrando da definição da operação de contração dupla apresentada em 1.1.5, se tem:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{b} = \operatorname{div}\left[D_{ijkl}\varepsilon_{mn}\delta_{km}\delta_{ln}\left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\right)\right] + b_i\boldsymbol{e}_i \tag{2.45}$$

Realizando as permutações necessárias , se tem:

$$\operatorname{div}\left[D_{ijmn}\varepsilon_{mn}\left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\right)\right] + b_i\boldsymbol{e}_i. \tag{2.46}$$

Recordando a relação $\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \nabla \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{I}$, reecreve-se a expressão acima como:

$$\left[\frac{\partial D_{ijmn}}{\partial x_k}\varepsilon_{mn} + D_{ijmn}\frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial x_k}\right]\left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k\right)\delta_{op}\left(\boldsymbol{e}_o \otimes \boldsymbol{e}_p\right) + b_i\boldsymbol{e}_i. \tag{2.47}$$

Observando-se a ocorrência de uma contração dupla em $\left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k\right)\left(\boldsymbol{e}_o \otimes \boldsymbol{e}_p\right)$, se tem:

$$\left[\frac{\partial D_{ijmn}}{\partial x_k}\varepsilon_{mn} + D_{ijmn}\,\frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial x_k}\right]\delta_{op}\delta_{jo}\delta_{kp}\boldsymbol{e}_i + b_i\boldsymbol{e}_i. \tag{2.48}$$

Assim, realizando as permutações necessárias, obtem-se a expressão geral do equilíbrio pontual em forma indicial:

$$\left[\frac{\partial D_{ijmn}}{\partial x_k}\varepsilon_{mn} + D_{ijmn}\,\frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial x_k}\right]\boldsymbol{e}_i + b_i\boldsymbol{e}_i. \tag{2.49}$$

Na relação acima, pode-se realizar uma simplificação assumindo que o tensor constitutivo $\mathbb{D}$ seja constante, ou seja, não dependa da posição x. Assim, a relação acima pode ser simplificada para:

$$\left[D_{ijmn}\,\frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial x_k}\right]\boldsymbol{e}_i + b_i\boldsymbol{e}_i. \tag{2.50}$$

Agora, almejando-se escrever a relação proposta em função do vetor deslocamento $\boldsymbol{u}$, inicia-se pela definição do tensor de deformação infinitesimal:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{2.51}$$

Assim, a relação proposta pode ser escrita como:

$$D_{ijmn}\,\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m}\right)\right]\boldsymbol{e}_i + b_i\boldsymbol{e}_i. \tag{2.52}$$

b) $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s\boldsymbol{u}$:

Inicialmente, deve-se interpretar a expressão indicada. Para tanto, considera-se o exemplo de uma barra unidimensional submetida a um carregamento.

Considerando-se dois pontos A e B da barra, com deslocamentos $\boldsymbol{u}_A$ e $\boldsymbol{u}_B$, respectivamente. Fazendo ambos os pontos serem infinitesimalmente próximos, tem-se que, caso $\boldsymbol{u}_A = \boldsymbol{u}_B$, tal parcela da barra sofreu um deslocamento de corpo rígido, ou seja, não houve deformação. Caso contrário, a barra sofreu deformação. Assim, a deformação infinitesimal ε é dada por:

$$\varepsilon = \frac{\varDelta L}{L} = \frac{u_B - u_A}{L} = \frac{u_B - u_A}{x_B - x_A}. \tag{2.53}$$

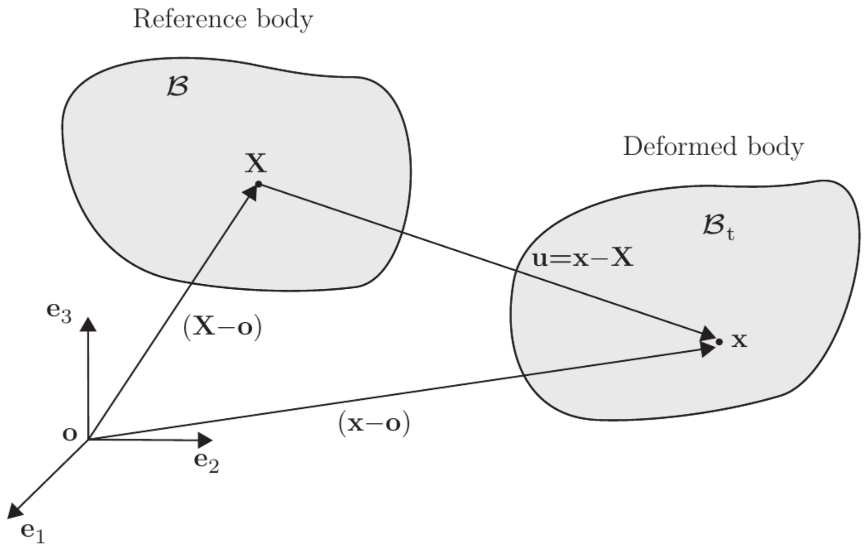

Figura 3 – Deformação de um corpo no espaço.

Realizando a passagem do limite, tem-se:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta L}{L} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u_B - u_A}{x_B - x_A} = \frac{du}{dx}. \tag{2.54}$$

Generalizando-se a expressão acima para um corpo tridimensional, tem-se:

$$\varepsilon = \nabla^S \boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T\right). \tag{2.55}$$

Na qual, ∇^S é o operador gradiente simétrico, que tem o intuito de representar a deformação infinitesimal como um tensor simétrico, visto que apenas $\nabla \boldsymbol{u}$ não é simétrico.

Assim, escrevendo $\boldsymbol{u}$ em função de suas componentes, tem-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\left[\nabla\left(u_i\, \boldsymbol{e}_i\right) + \nabla\left(u_i\, \boldsymbol{e}_i\right)^T\right] \tag{2.56}$$

Lembrando que a operação $\nabla(\cdot) = \partial_k \boldsymbol{e}_k$ se tem:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left[(\partial_j u_i) + (\partial_j u_i)^T\right](\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \tag{2.57}$$

que, desenvolvendo:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right](\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \tag{2.58}$$

c) $\boldsymbol{T} = \mathbb{D}\nabla^s \boldsymbol{u}$:

Considerando que o tensor $\mathbb{D}$ seja o tensor constitutivo, $\boldsymbol{u}$ o vetor deslocamento, se tem:

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}\nabla^s \boldsymbol{u}. \tag{2.59}$$

A equação acima é a relação constitutiva, que relaciona o tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ com o tensor de deformação infinitesimal $\boldsymbol{\varepsilon}$ através do tensor constitutivo $\mathbb{D}$.

Assim, escrevendo $\boldsymbol{u}$ e $\mathbb{D}$ em função de suas componentes, tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}\nabla^s \boldsymbol{u} = D_{ijkl}\varepsilon_{mn} \underbrace{(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l)\ (\boldsymbol{e}_m \otimes \boldsymbol{e}_n)}_{\text{Contração Dupla}} \tag{2.60}$$

Lembrando da definição da operação de contração dupla apresentada em 1.1.5, se tem:

$$\boldsymbol{\sigma} = D_{ijkl}\varepsilon_{mn}\delta_{km}\delta_{ln}\,(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \tag{2.61}$$

Realizando as permutações necessárias , se tem:

$$\boldsymbol{\sigma} = D_{ijmn}\varepsilon_{mn}\,(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) \tag{2.62}$$

3 Conclusão

O presente trabalho teve como objetivo apresentar o formalismo matemático da da análise tensorial, no contexto da Mecânica dos Sólidos. Através do formalismo tensorial, é possível se representar as relações constitutivas de um material, bem como as equações de equilíbrio e compatibilidade.

Por meio da resolução dos exercícios propostos, foi possível se observar a importância do formalismo tensorial na representação de tensões e deformações em um corpo deformável. Diante disso, a familiarização com o formalismo matemático permite ao pesquisador melhor compreender as teorias e modelos que envolvem a Mecânica dos Sólidos ao longo de sua formação como pesquisador.

Referências

ANAND, Lallit; GOVINDJEE, Sanjay. **Continuum Mechanics of Solids**. 1. ed. [S.l.]: Oxford University PressOxford, jul. 2020. ISBN 978-0-19-886472-1 978-0-19-189676-7. DOI: 10.1093/oso/9780198864721.001.0001. Disponível em: <https://academic.oup.com/book/43650>. Acesso em: 30 set. 2024.

PROENÇA, Sergio Persival Baroncini. **Fundamentos Matemáticos das Mecânicas dos Sólidos e Estruturas**. 1. ed. [S.l.]: USP, mar. 2024. Acesso em: 2024.