Diego Dias Veloso

Fundamentos da Mecânica dos Sólidos e Estruturas

31 de março de 2025

Diegо Dias Veloso

Fundamentos da Mecânica dos Sólidos e Estruturas

Universidade de São Paulo

Orientador: PhD. Sérgio Persional Baronchinni Proença

31 de março de 2025

Sumário

1 Introdução

A Mecânica dos Sólidos é um ramo da física a qual estuda o comportamento de sólidos deformáveis sob a ação diversa de forças externas. No contexto da Engenharia de Estruturas e da Mecânica Computacional, a Mecânica dos Sólidos é o campo que fornece todo o ferramental teórico necessário para o entendimento do comportamento das estruturas e dos materiais. Além disso, essa base permite que ao pesquisador propor novos modelos e teorias que discrevam diferentes problemas.

No campo da Mecânica dos Sólidos, em sua grande parte seus fundamentos teóricos são descritos a partir de conceitos da algebra linear, como por exemplo, espaços vetoriais e operações entre tensores. Nesse sentido, o presente trabalho tem como objetivo apresentar os conceitos fundamentais da algebra linear, com foco em operações entre tensores, de modo a permitir ao pesquisador um entendimento mais profundo dos conceitos fundamentais da Mecânica dos Sólidos e da Mecânica Computacional e, consequentemente, a possibilidade de propor novos modelos e teorias.

1.1 Aspectos teóricos

No presente tópico, serão apresentados conceitos fundamentais que serão utilizados ao longo do texto. Objetivando uma apresentação mais clara e objetiva ao longo do texto, provas e demonstrações de teoremas e propriedades não serão apresentadas. Portando, tais demonstrações mais relevantes serão aqui apresentadas.

1.1.1 Sistema de coordenadas Cartesiano

Um sistema de coordenadas Cartesiano para o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ é definido por três vetores unitários ortogonais, tais que obedeçam as seguintes relações (ANAND; GOVINDJEE, 2020):

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad \text{com } i, j = 1, 2, 3, \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) = \epsilon_{ijk} \tag{1}$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker e ϵ_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita, definidos por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases} \tag{2}$$

e

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se } (i,j,k) = (1,2,3), (2,3,1) \text{ou} (3,1,2) \\ -1, & \text{se } (i,j,k) = (2,1,3), (1,3,2) \text{ou} (3,2,1), \\ 0, & \text{se um índice se repete.} \end{cases} \tag{3}$$

1.1.2 Convenção de Einstein

A convenção de Einstein é uma notação utilizada para simplificar a escrita de expressões matemáticas envolvendo somas. Essa convenção estabelece que, quando um índice aparece duas vezes em uma expressão, deve-se realizar a soma sobre esse índice. Por exemplo, a expressão $A_{ij}B_{jk}$ implica que deve-se somar sobre o índice j, resultando em $A_{ij}B_{jk} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{jk}$.

1.1.3 Tensores

Um tensor é uma operação matemática que mapeia linearmente um vetor em outro vetor, ou seja:

$$\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \tag{4}$$

onde, para que o tensor respeite a condição de linearidade, deve-se ter que:

$$\mathbf{T}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{T}(\mathbf{u}) + \beta\mathbf{T}(\mathbf{v}) \tag{5}$$

1.1.4 Produto tensorial

Um tensor pode ser obtido a partir do produto tensorial de dois vetores, ou seja:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a_i\, b_j\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \tag{6}$$

Nesse sentido, ainda é interessante notar a seguinte propriedade do produto tensorial:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\, \mathbf{c} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\, \mathbf{a} \quad , \tag{7}$$

ou seja, o tensor $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ mapeia o vetor $\mathbf{c}$ em um multiplo do vetor $\mathbf{a}$, onde o multiplo é dado pela projeção do vetor $\mathbf{c}$ sobre o vetor $\mathbf{b}$.

1.1.5 Produto interno

O produto interno entre dois vetores é o resultado escalar da projeção de um vetor $\mathbf{a}$ sobre um vetor $\mathbf{b}$, sendo dado por:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i\, b_i \quad \text{ou} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i. \tag{8}$$

1.1.6 Transposição de tensores

O transposto de um tensor é um tensor tal que a seguinte propriedade seja satisfeita:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}^T \mathbf{u} \tag{9}$$

As componentes de $\mathbf{S}^T$ são dadas por:

$$\mathbf{S}^T = \left(S_{ij}\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\right)^T = S_{ji}\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \tag{10}$$

1.1.7 Componentes de tensores

As componentes de um tensor são dadas por:

$$T_{ij} \coloneqq \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\, \mathbf{e}_j. \tag{11}$$

Já o tensor $\mathbf{T}$ pode ser escrito em termos de suas componentes como:

$$\mathbf{T} = T_{ij}\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \tag{12}$$

1.1.8 Operador Traço

Operador traço é definido como uma operação linear, tal que satisfaça:

$$\operatorname{tr}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \tag{13}$$

o qual, para satisfazer a propriedade de linearidade, este deve ser tal que:

$$\operatorname{tr}(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + \beta \operatorname{tr}(\mathbf{B}). \tag{14}$$

1.1.9 Algumas Propriedades

A seguir são apresentadas algumas propriedades de tensores que serão utilizadas ao longo do texto e que são mais desenvolvidas em (PROENÇA, 2024) e (ANAND; GOVINDJEE, 2020):

- **Propriedade 1:**

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})^T = \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} \tag{15}$$

- **Propriedade 2 :**

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\,\mathbf{w} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{u})\,\mathbf{d} \tag{16}$$

- **Propriedade 3 :**

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\,(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{c})\,(\mathbf{u} \otimes \mathbf{d}) \tag{17}$$

2 Resoluções

A seguir são apresentadas as resoluções dos problemas propostos na primeira lista de exercícios da disciplina de Fundamentos da Mecânica dos Sólidos e Estruturas,

2.1 Exercício 1

Mostre que:

a) $(\mathbf{S}\,\mathbf{T})_{ij} = S_{ik}\,T_{kj}$

b) $\delta_{ij}\,\delta_{ij} = \delta_{ii}$.

c) $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i\,b_j$.

d) $\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = S_{ij}\,T_{ij}$ (Obs.: $\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = \mathrm{tr}(\mathbf{S}^T\,\mathbf{T})$).

- **a)** $(\mathbf{S}\,\mathbf{T})_{ij} = S_{ik}\,T_{kj}$:

Dado um tensor $\mathbf{A}$, suas componentes A_{ij} são dadas por:

$$A_{ij} \coloneqq \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}\,\mathbf{e}_j. \tag{18}$$

O tensor $\mathbf{A}$ pode ser escrito como o produto de outros dois tensores, $\mathbf{S}$ e $\mathbf{T}$, de modo que:

$$\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{S}\,\mathbf{T})\,\mathbf{e}_j. \tag{19}$$

Agora, escrevendo os tensores $\mathbf{S}$ e $\mathbf{T}$ em termos de suas componentes, tem-se que:

$$\mathbf{S} = S_{kl}\,\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad \text{e} \quad \mathbf{T} = T_{mn}\,\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n \quad , \tag{20}$$

de modo que a equação $\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{S}\,\mathbf{T})\ \mathbf{e}_j$ pode ser reescrita como:

$$\mathbf{e}_i \cdot (S_{kl}\,\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l\,T_{mn}\,\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n)\ \mathbf{e}_j. \tag{21}$$

Pela propriedade do produto de dois tensores, $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\,(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{c})\,(\mathbf{u} \otimes \mathbf{d})$, a equação acima pode ser reescrita como:

$$\mathbf{e}_i \cdot (S_{kl}\,T_{mn}\ (\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_m)\,(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_n))\ \mathbf{e}_j. \tag{22}$$

Pela propriedade de ortogonalidade dos vetores base, $\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_m = \delta_{lm}$, a equação acima pode ser reescrita como:

$$\mathbf{e}_i \cdot (S_{kl}\,T_{mn}\,\delta_{lm}\,(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_n))\ \mathbf{e}_j. \tag{23}$$

Pela propriedade de permutação dos indices do delta de Kronecker, $\delta_{ij}\,S_{jk} = S_{ik}$ e também já aplicando a propriedade $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\ \mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\ \mathbf{u}$, a equação é reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{e}_i \cdot (S_{kl}\,T_{ln}\ (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_j))\ \mathbf{e}_k. \tag{24}$$

Aplicando novamente a propriedade $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ e permutando os índices, se tem :

$$\mathbf{e}_i \cdot (S_{kl}\,T_{lj})\ \mathbf{e}_k. \tag{25}$$

Mais uma vez aplicando a propriedade $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ e já permutando os índices, se tem :

$$S_{il}\,T_{lj} \tag{26}$$

Podendo-se livremente cambiar o índice l por k, conclui-se que $(\mathbf{S}\,\mathbf{T})_{ij} = S_{ik}\,T_{kj}$

- **b)** $\delta_{ij}\,\delta_{ij} = \delta_{ii}$:

O tensor δ_{ij}, denominado por delta de Kronecker, é definido por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \tag{27}$$

Como os indices i e j são mudos, ou seja, estão repetidos, há uma soma implícita sobre eles. Assim, a expressão $\delta_{ij}\,\delta_{ij}$ é equivalente a

$$\delta_{ij}\,\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}\,\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + \ldots + \delta_{nn} = n. \tag{28}$$

A equação acima, em notação de Einstein, pode ser resumida em δ_{ii}, ou seja, $\delta_{ij}\,\delta_{ij} = \delta_{ii}$.

- **c)** $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i\,b_j$.

Pode-se escrever o produto tensorial $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ como sendo equivalente a um tensor $\mathbf{T}$ de componentes T_{ij} dadas por:

$$T_{ij} \coloneqq \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\,\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\;\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot (a_k\,b_l\,\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)\;\mathbf{e}_j. \tag{29}$$

Portanto, se tem que:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (a_k\,b_l\,\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)\;\mathbf{e}_j \tag{30}$$

Pela definição de produto tensorial, tem-se que:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\,\mathbf{c} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{a}. \tag{31}$$

Desse modo, a equação (30) pode ser reescrita como:

$$a_k\,b_l\,\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_l\;\cdot \mathbf{e}_j)\;\mathbf{e}_k \tag{32}$$

Pela propriedade de ortogonalidade dos vetores base, tem-se que:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}. \tag{33}$$

Portanto, a equação (32) pode ser reescrita, ja rearranjando os termos, como:

$$a_k\, b_l \delta_{lj}\, \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = a_k\, b_l\, \delta_{lj}\, \delta_{ik} \tag{34}$$

Pela propriedade de permutação dos indices do delta de Kronecker, tem-se que:

$$\delta_{ik}\, S_{kj} = S_{ij}. \tag{35}$$

Portanto, a equação (34) pode ser reescrita como:

$$a_i\, b_j. \tag{36}$$

Assim, conclui-se que $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i\, b_j$.

- **d)** $\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = S_{ij}\, T_{ij}$:

O produto interno entre dois tensores **S** e **T** é dado por:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = \mathrm{tr}(\mathbf{S}^T\, \mathbf{T}) \tag{37}$$

Escreevendo os tensores **S** e **T** em termos de suas componentes, tem-se que:

$$\mathbf{S} = S_{ij}\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad \text{e} \quad \mathbf{T} = T_{kl}\, \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l. \tag{38}$$

Substituindo as expressões acima na equação (37), tem-se que:

$$(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}) = \mathrm{tr}\left((S_{ij})^T\ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j T_{kl}\, \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \right). \tag{39}$$

Pela propriedade de transposição de tensores, tem-se que:

$$(S_{ij}\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)^T = S_{ji}\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \tag{40}$$

Portanto, a equação (39) pode ser reescrita como:

$$\mathrm{tr}\left(S_{ji}\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\, T_{kl}\, \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \right). \tag{41}$$

Pela propriedade do produto de dois tensores, tem-se que:

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{u} \otimes \mathbf{d}). \tag{42}$$

Portanto, a equação (41) pode ser reescrita como:

$$\operatorname{tr}\left(S_{ji}\, T_{kl}\, \underbrace{(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k)}_{\delta_{jk}}\, (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l) \right) \tag{43}$$

na qual foi usada a propriedade de ortogonalidade dos vetores base,, ou seja, $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk}$. Todos os valores escalares presentes dentro do operador traço podem ser retirados, de modo que a equação (43) pode ser reescrita como:

$$S_{ji}\, T_{kl}\, \delta_{jk}\, \operatorname{tr}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l) \tag{44}$$

operador traço é definido como uma operação linear, tal que satisfaça:

$$\operatorname{tr}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \tag{45}$$

Para satisfazer a propriedade de linearidade, este deve ser tal que:

$$\operatorname{tr}(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + \beta \operatorname{tr}(\mathbf{B}). \tag{46}$$

Portanto, a equação (44) pode ser reescrita como:

$$S_{ji}\, T_{kl}\, \delta_{jk}\, \delta_{il}. \tag{47}$$

A partir dos operadores δ_{jk} e δ_{il}, se tem que o indice k e l podem ser substituidos por, respectivamente, j e i, de modo que:

$$\operatorname{tr}(\mathbf{S}^T\, \mathbf{T}) = S_{ji}\, T_{ji}. \tag{48}$$

Assim, como os indices i e j são mudos, ou seja, estão repetidos, há uma soma implícita sobre eles. Portanto, estes podem ser livremente permutados sem que a soma sobre eles seja alterada. Assim, a equação acima pode ser reescrita como:

$$\operatorname{tr}(\mathbf{S}^T\, \mathbf{T}) = S_{ij}\, T_{ij}. \tag{49}$$

Portanto, conclui-se que $\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = S_{ij}\, T_{ij}$.

2.2 Exercício 2

Desenvolva indicialmente as seguintes relações:

a) $(\mathbf{S}\,\mathbf{a}) \otimes \mathbf{b}$

b) $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{S}$.

c) $\mathbf{a} \otimes (\mathbf{S}^T\mathbf{b})$.

d) $\mathbf{v} = \mathbf{S}\,\mathbf{u}$.

- **a)** $(\mathbf{S}\,\mathbf{a}) \otimes \mathbf{b}$:

Inicialmente, pode-se realizar uma análise dimensional do problema. Inicialmente, verifica-se que a transformação aplicada por $\mathbf{S}$ ao vetor $\mathbf{a}$ resulta em um vetor, que por sua ver é realizado o produto tensorial com o vetor $\mathbf{b}$. Portanto, a relação $(\mathbf{S}\,\mathbf{a}) \otimes \mathbf{b}$ resulta em um tensor.

Escrevendo os tensores $\mathbf{S}$, $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ em termos de suas componentes, tem-se que:

$$\mathbf{S} = S_{ij}\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{a} = a_k\,\mathbf{e}_k \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = b_l\,\mathbf{e}_l, \tag{50}$$

de modo que, a relação $(\mathbf{S}\,\mathbf{a}) \otimes \mathbf{b}$ pode ser escrita como:

$$[S_{ij}\;(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\;a_k\,\mathbf{e}_k] \otimes b_l\,\mathbf{e}_l. \tag{51}$$

Rearranjando os escalares da relação e utilizando a definição de produto tensorial, a saber, $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\,\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\,\mathbf{u}$, tem-se que:

$$S_{ij}\,a_k\,b_l\;[(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k)\,\mathbf{e}_i] \otimes \mathbf{e}_l. \tag{52}$$

Pela propriedade de ortogonalidade dos vetores base, tem-se que $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk}$, de modo que a relação acima pode ser reescrita como:

$$S_{ij}\,a_k\,b_l\,\delta_{jk}\;(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l)\,. \tag{53}$$

Pela propriedade do tensor de Kronecker, tem-se que o índice k pode ser substituído por j, de modo que:

$$S_{ij}\, a_j\, b_l\, \left(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l\right). \tag{54}$$

Portanto, conclui-se que $(\mathbf{S}\,\mathbf{a}) \otimes \mathbf{b} = S_{ij}\, a_j\, b_l\, \left(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l\right)$.

- **b)** $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{S}$:

Similarmente ao problema anterior, pode-se iniciar a resolução do problema a partir de uma análise dimensional, de modo a ser verificada a consistencia dimensional ao final. Inicialmente, verifica-se que o produto tensorial entre os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ resulta em um tensor, que por sua vez é multiplicado pelo tensor $\mathbf{S}$. Portanto, a relação $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{S}$ resulta em um tensor.

Escrevendo os tensores $\mathbf{S}$, $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ em termos de suas componentes, tem-se que:

$$\mathbf{a} = a_i\, \mathbf{e}_i \quad , \quad \mathbf{b} = b_j\, \mathbf{e}_j \quad \text{e} \quad \mathbf{S} = S_{kl}\, \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \tag{55}$$

de modo que, a relação $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{S}$ pode ser escrita como:

$$\left[a_i\, \mathbf{e}_i \otimes b_j\, \mathbf{e}_j\right]\, S_{kl}\, \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l. \tag{56}$$

Reaaranjando os termos da equação e já utilizando a relação $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\,(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{c})\,(\mathbf{u} \otimes \mathbf{d})$, tem-se que:

$$a_i\, b_j\, S_{kl}\, \left[(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k)\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l\right]. \tag{57}$$

Aplicando a relação $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk}$ e já substituindo o índice k por j, tem-se que:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\,\mathbf{S} = a_i\, b_j\, S_{jl}\, \left(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l\right). \tag{58}$$

- **c)** $\mathbf{a} \otimes (\mathbf{S}^T\mathbf{b})$:

Novamente, se parte de uma análise dimensional do problema. Inicialmente, verifica-se que a transformação aplicada por $\mathbf{S}^T$ ao vetor $\mathbf{b}$ resulta em um vetor, que por sua vez é realizado o produto tensorial com o vetor $\mathbf{a}$. Portanto, a relação $\mathbf{a} \otimes (\mathbf{S}^T\mathbf{b})$ resulta em um tensor.

Escrevendo os tensores $\mathbf{S}$, $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ em termos de suas componentes, tem-se que:

$$\mathbf{a} = a_i\,\mathbf{e}_i \quad , \quad \mathbf{S} = S_{jk}\,\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = b_l\,\mathbf{e}_l, \tag{59}$$

de modo que, a relação $\mathbf{a} \otimes (\mathbf{S}^T\mathbf{b})$ pode ser escrita como:

$$a_i\,\mathbf{e}_i \otimes \left[(S_{jk}\,\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)^T\ b_l\,\mathbf{e}_l\right]. \tag{60}$$

Da propriedade de transposição de tensores, tem-se que $(S_{jk}\,\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)^T = S_{kj}\,\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$. Além disso, já aplicando a propriedade de produto tensorial, $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\,\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\,\mathbf{u}$, tem-se que:

$$a_i\,\mathbf{e}_i \otimes \left[S_{kj}\,b_l\,(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l)\ \mathbf{e}_j\right]. \tag{61}$$

Notando que $\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = \delta_{kl}$ e rearranjando os termos da equação, tem-se que:

$$a_i\,S_{kj}\,b_l\,\delta_{kl}\ (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j). \tag{62}$$

Pela propriedade do delta de Kronecker, tem-se que o índice l pode ser substituído por k, de modo que:

$$\mathbf{a} \otimes (\mathbf{S}^T\mathbf{b}) = a_i\,S_{kj}\,b_k\ (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j). \tag{63}$$

- **d)** $\mathbf{v} = \mathbf{S}\,\mathbf{u}$:

Desenvolvendo o lado direito da equação, inicia-se escrevendo os tensores $\mathbf{S}$ e $\mathbf{u}$ em termos de suas componentes, de modo que:

$$\mathbf{S} = S_{ij}\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad \text{e} \quad \mathbf{u} = u_k\,\mathbf{e}_k. \tag{64}$$

Portanto, a relação $\mathbf{v} = \mathbf{S}\,\mathbf{u}$ pode ser escrita como:

$$\mathbf{v} = S_{ij}\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\,u_k\,\mathbf{e}_k. \tag{65}$$

Reaaranjando os termos da equação e já utilizando a relação $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\,\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\,\mathbf{u}$, tem-se que:

$$\mathbf{v} = S_{ij}\,u_k\ \left[(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k)\ \mathbf{e}_i\right]. \tag{66}$$

Aplicando a relação $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk}$ e já substituindo o índice k por j, tem-se que:

$$\mathbf{v} = S_{ij}\,u_j\,\mathbf{e}_i. \tag{67}$$

2.3 Exercício 3

Para $i, j = 1, 2, 3$ desenvolva as seguintes relações indiciais:

a) $v_i = T_{ij}\, u_j$.

b) $u_i\, v_j\, \delta_{ij}$.

- **a)** $v_i = T_{ij}\, u_j$:

Seguindo a notação de Einstein, a relação $v_i = T_{ij}\, u_j$ indica que os indices i e j estão sendo somados, de modo que:

$$v_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} T_{ij}\, u_j. \tag{68}$$

Desenvolvendo as somas acima, tem-se que:

$$\begin{aligned}
v_1 &= T_{11}\, u_1 + T_{12}\, u_2 + T_{13}\, u_3 + \ldots + T_{1n}\, u_n, \\
v_2 &= T_{21}\, u_1 + T_{22}\, u_2 + T_{23}\, u_3 + \ldots + T_{2n}\, u_n, \\
v_3 &= T_{31}\, u_1 + T_{32}\, u_2 + T_{33}\, u_3 + \ldots + T_{3n}\, u_n, \\
&\vdots \\
v_m &= T_{m1}\, u_1 + T_{m2}\, u_2 + T_{m3}\, u_3 + \ldots + T_{mn}\, u_n.
\end{aligned} \tag{69}$$

Adotando os indices i e j como variando de 1 a 3, tem-se que a relação $v_i = T_{ij}\, u_j$ pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
v_1 &= T_{11}\, u_1 + T_{12}\, u_2 + T_{13}\, u_3, \\
v_2 &= T_{21}\, u_1 + T_{22}\, u_2 + T_{23}\, u_3, \\
v_3 &= T_{31}\, u_1 + T_{32}\, u_2 + T_{33}\, u_3.
\end{aligned} \tag{70}$$

- **b)** $u_i\, v_j\, \delta_{ij}$:

Seguindo a notação de Einstein, a relação $u_i\, v_j\, \delta_{ij}$ indica que os indices i e j estão sendo somados, de modo que:

$$u_i\, v_j\, \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} u_i\, v_j\, \delta_{ij}. \tag{71}$$

Desenvolvendo as somas acima, tem-se que:

$$\begin{aligned} & u_1\,v_1\,\delta_{11} + u_1\,v_2\,\delta_{12} + u_1\,v_3\,\delta_{13} + \ldots + u_1\,v_n\,\delta_{1n} \\ & + u_2\,v_1\,\delta_{21} + u_2\,v_2\,\delta_{22} + u_2\,v_3\,\delta_{23} + \ldots + u_2\,v_n\,\delta_{2n} \\ & + u_3\,v_1\,\delta_{31} + u_3\,v_2\,\delta_{32} + u_3\,v_3\,\delta_{33} + \ldots + u_3\,v_n\,\delta_{3n} \\ & \vdots \\ & + u_m\,v_1\,\delta_{m1} + u_m\,v_2\,\delta_{m2} + u_m\,v_3\,\delta_{m3} + \ldots + u_m\,v_n\,\delta_{mn}. \end{aligned} \tag{72}$$

Adotando os indices i e j como variando de 1 a 3, tem-se que a relação $u_i\,v_j\,\delta_{ij}$ pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} & u_1\,v_1\,\delta_{11} + u_1\,v_2\,\delta_{12} + u_1\,v_3\,\delta_{13} \\ & + u_2\,v_1\,\delta_{21} + u_2\,v_2\,\delta_{22} + u_2\,v_3\,\delta_{23} \\ & + u_3\,v_1\,\delta_{31} + u_3\,v_2\,\delta_{32} + u_3\,v_3\,\delta_{33}. \end{aligned} \tag{73}$$

Percebendo que, pela propriedade do delta de Kronecker, $\delta_{ij} = 1$ para $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$, tem-se que:

$$u_1\,v_1 + u_2\,v_2 + u_3\,v_3, \tag{74}$$

percebendo-se que, o mesmo resultado teria sido obtido se, utilizando a propriedade de subtituição indicial do tensor δ, a relação fosse escrita como $u_i\,v_i$. Nesta situação, a relação $u_i\,v_j$ resulta na soma:

$$u_i\,v_i = \sum_{i=1}^{m} u_i\,v_i. \tag{75}$$

2.4 Exercício 4

Verifique as seguintes igualdades explorando notações matricial e indicial para as grandezas envolvidas:

a) $\mathbf{S}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{S}\,\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$.

b) $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{S} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{S}^T\mathbf{b}$.

c) $\mathbf{S}\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{S}^T\mathbf{b}$.

d) $(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\otimes\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})$.

- **a)** $\mathbf{S}(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}) = \mathbf{S}\,\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$:

Inicialmente, pode-se realizar uma análise dimensional do problema. Inicialmente, do lado esquerdo da equação, verifica-se que o tensor $\mathbf{S}$ é multiplicado pelo tensor $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$, resultando em um tensor. Por outro lado, do lado direito da equação, verifica-se que a transformação aplicada por $\mathbf{S}$ ao vetor $\mathbf{a}$ resulta em um vetor, que por sua vez é realizado o produto tensorial com o vetor $\mathbf{b}$, resultando em um tensor.

Escrevendo os tensores $\mathbf{S}$, $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ em termos de suas componentes, tem-se que:

$$\mathbf{S} = S_{ij}\,\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j, \quad \mathbf{a} = a_k\,\mathbf{e}_k \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = b_l\,\mathbf{e}_l, \tag{76}$$

Assim, primeiro desenvolvendo o lado esquerdo da equação, tem-se que:

$$\mathbf{S}(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}) = S_{ij}\,\left(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\right)\,\left(a_k\,\mathbf{e}_k\otimes b_l\,\mathbf{e}_l\right). \tag{77}$$

Usando a relação da multiplicação de tensores, $(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\,(\mathbf{c}\otimes\mathbf{d}) = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{c})\,(\mathbf{u}\otimes\mathbf{d})$ e rearranjando os termos, se tem que:

$$S_{ij}\,a_k\,b_l\,\left(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_k\right)\left(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_l\right). \tag{78}$$

Utilizando a relação $\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_k = \delta_{jk}$, substituindo o índice k por j e rearranjando os termos da equação, tem-se que:

$$S_{ij}\,a_j\,b_l\,\left(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_l\right). \tag{79}$$

Agora, desenvolvendo o lado direito da equação, tem-se que:

$$\mathbf{S}\,\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} = \left(S_{ij}\,\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j a_k\,\mathbf{e}_k\right)\,\otimes b_l\,\mathbf{e}_l. \tag{80}$$

Usando a definição do produto tensorial, $(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\,\mathbf{w} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\,\mathbf{u}$,

$$S_{ij}\,a_k\,b_l\,\left(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_k\right)\left(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_l\right). \tag{81}$$

Utilizando a relação $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk}$, substituindo o índice k por j e rearranjando os termos da equação, tem-se que:

$$S_{ij}\, a_j\, b_l\, \left(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l\right). \tag{82}$$

Portanto, operando indicialmente, conclui-se que $\mathbf{S}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{S}\,\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$. Agora, realizando a operação matricialmente, intenta-se verificar a igualdade obtida indicialmente de forma matricial. Para tal, por conveniência, os tensores $\mathbf{S}$, $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ serão representados por suas respectivas matrizes, de modo que:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{83}$$

Desenvolvendo o lado esquerdo da equação, tem-se que:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = [\mathbf{a}]\,[\mathbf{b}]^T = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix} \tag{84}$$

Operando agora a multiplicação $\mathbf{S}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})$, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} b_1\left(S_{11}a_1 + S_{12}a_2 + S_{13}a_3\right) & b_2\left(S_{11}a_1 + S_{12}a_2 + S_{13}a_3\right) & b_3\left(S_{11}a_1 + S_{12}a_2 + S_{13}a_3\right) \\ b_1\left(S_{21}a_1 + S_{22}a_2 + S_{23}a_3\right) & b_2\left(S_{21}a_1 + S_{22}a_2 + S_{23}a_3\right) & b_3\left(S_{21}a_1 + S_{22}a_2 + S_{23}a_3\right) \\ b_1\left(S_{31}a_1 + S_{32}a_2 + S_{33}a_3\right) & b_2\left(S_{31}a_1 + S_{32}a_2 + S_{33}a_3\right) & b_3\left(S_{31}a_1 + S_{32}a_2 + S_{33}a_3\right) \end{bmatrix} \tag{85}$$

Desenvolvendo o lado direito da equação, tem-se que:

$$= \begin{bmatrix} S_{11}a_1 + S_{12}a_2 + S_{13}a_3 \\ S_{21}a_1 + S_{22}a_2 + S_{23}a_3 \\ S_{31}a_1 + S_{32}a_2 + S_{33}a_3 \end{bmatrix} \tag{86}$$

Operando agora o produto tensorial $\mathbf{S}\,\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} b_1\left(S_{11}a_1 + S_{12}a_2 + S_{13}a_3\right) & b_2\left(S_{11}a_1 + S_{12}a_2 + S_{13}a_3\right) & b_3\left(S_{11}a_1 + S_{12}a_2 + S_{13}a_3\right) \\ b_1\left(S_{21}a_1 + S_{22}a_2 + S_{23}a_3\right) & b_2\left(S_{21}a_1 + S_{22}a_2 + S_{23}a_3\right) & b_3\left(S_{21}a_1 + S_{22}a_2 + S_{23}a_3\right) \\ b_1\left(S_{31}a_1 + S_{32}a_2 + S_{33}a_3\right) & b_2\left(S_{31}a_1 + S_{32}a_2 + S_{33}a_3\right) & b_3\left(S_{31}a_1 + S_{32}a_2 + S_{33}a_3\right) \end{bmatrix} \tag{87}$$

Portanto, conclui-se que $\mathbf{S}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{S}\,\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$.

- **b)** $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{S} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{S}^T\mathbf{b}$:

Inicialmente, pode-se realizar uma análise dimensional do problema. Inicialmente, do lado esquerdo da equação, verifica-se que o produto tensorial entre os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ resulta em um tensor, que por sua vez é multiplicado pelo tensor $\mathbf{S}\,\mathbf{a}$, resultando em um tensor. Por outro lado, do lado direito da equação, verifica-se que o vetor $\mathbf{b}$ é transformado pelo tensor $\mathbf{S}^T$, resultando em um vetor, que por sua vez é realizado o produto tensorial com o vetor $\mathbf{a}$, resultando em um tensor.

Com o intuito de se demonstrar a igualdade, inicialmente se desenvolve esta de forma indicial e, a seguir, de forma matrícial. Então, compara-se os resultados para se observar a equivalencia entre ambos. Assim, inicialmente se escreve os tensores em função de suas componentes, de modo que:

$$\mathbf{a} = a_i\,\mathbf{e}_i \quad , \quad \mathbf{b} = b_j\,\mathbf{e}_j \quad \text{e} \quad \mathbf{S} = S_{kl}\,\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \tag{88}$$

de modo que, a relação $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{S}$ pode ser escrita como:

$$[a_i\,\mathbf{e}_i \otimes b_j\,\mathbf{e}_j]\; S_{kl}\,\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l. \tag{89}$$

Reaaranjando os termos da equação e já utilizando a relação $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\,(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{c})\,(\mathbf{u} \otimes \mathbf{d})$, tem-se que:

$$a_i\,b_j\,S_{kl}\;[(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k)\;(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l)]\,. \tag{90}$$

Aplicando a relação $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk}$ e já substituindo o índice k por j, tem-se que:

$$a_i\,b_j\,S_{jl}\;(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l)\,. \tag{91}$$

Desenvolvendo o lado direito da equação, tem-se que:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{S}^T\mathbf{b} = a_i\,\mathbf{e}_i \otimes \left[(S_{kl}\,\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)^T\; b_j\,\mathbf{e}_j\right]. \tag{92}$$

Da propriedade de transposição de tensores, tem-se que $(S_{kl}\,\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)^T = S_{lk}\,\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$. Também se aproveita para fazer uso da propriedade de produto tensorial, $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\,\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\,\mathbf{u}$, de modo que:

$$a_i\,\mathbf{e}_i \otimes [S_{lk}\,b_j\;(\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_j)\;\mathbf{e}_k]\,. \tag{93}$$

Notando que $\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{lj}$, substituindo o índice j por l e rearranjando os termos da equação, tem-se que:

$$a_i \, b_l \, S_{lk} \, \left(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k\right). \tag{94}$$

Finalmente, percebe-se que, podendo-se livremente substituir os índices l e k por j e l, respectivamente, tem-se que:

$$a_i \, b_j \, S_{jl} \, \left(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l\right). \tag{95}$$

De forma que a igualdade $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{S} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{S}^T\mathbf{b}$ é verificada.

Agora, realizando os mesmos desenvolvimentos anteriores, porém de forma matricial, inicia-se escrevendo os tensores $\mathbf{S}$, $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ em termos de suas componentes, de modo que:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{96}$$

Desenvolvendo o lado esquerdo da equação, tem-se que:

$$(\mathbf{a} \, \otimes \, \mathbf{b}) = [\mathbf{a}] \, [\mathbf{b}]^T \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \tag{97}$$

Operando agora a multiplicação $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{S}$, tem-se que:

$$\left\{[\mathbf{a}] \, [\mathbf{b}]^T\right\} \mathbf{S} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \tag{98}$$

$$\left\{[\mathbf{a}] \, [\mathbf{b}]^T\right\} \mathbf{S} = \begin{bmatrix} a_1 \left(S_{11} b_1 + S_{21} b_2 + S_{31} b_3\right) & a_1 \left(S_{12} b_1 + S_{22} b_2 + S_{32} b_3\right) & a_1 \left(S_{13} b_1 + S_{23} b_2 + S_{33} b_3\right) \\ a_2 \left(S_{11} b_1 + S_{21} b_2 + S_{31} b_3\right) & a_2 \left(S_{12} b_1 + S_{22} b_2 + S_{32} b_3\right) & a_2 \left(S_{13} b_1 + S_{23} b_2 + S_{33} b_3\right) \\ a_3 \left(S_{11} b_1 + S_{21} b_2 + S_{31} b_3\right) & a_3 \left(S_{12} b_1 + S_{22} b_2 + S_{32} b_3\right) & a_3 \left(S_{13} b_1 + S_{23} b_2 + S_{33} b_3\right) \end{bmatrix} \tag{99}$$

Operando agora sobre o lado direito da equação, tem-se que:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{S}^T \mathbf{b} = [\mathbf{a}] \left\{[\mathbf{S}]^T \, [\mathbf{b}]\right\}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} \\ S_{12} & S_{22} & S_{32} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{100}$$

$$[\mathbf{S}]^T\,[\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} S_{11}b_1 + S_{21}b_2 + S_{31}b_3 \\ S_{12}b_1 + S_{22}b_2 + S_{32}b_3 \\ S_{13}b_1 + S_{23}b_2 + S_{33}b_3 \end{bmatrix} \tag{101}$$

Finalmente, operando o produto tensorial $\mathbf{a} \otimes \mathbf{S}^T\mathbf{b}$, tem-se que:

$$[\mathbf{a}]\left\{[\mathbf{S}]^T\,[\mathbf{b}]\right\}^T = \begin{bmatrix} a_1\left(S_{11}b_1 + S_{21}b_2 + S_{31}b_3\right) & a_1\left(S_{12}b_1 + S_{22}b_2 + S_{32}b_3\right) & a_1\left(S_{13}b_1 + S_{23}b_2 + S_{33}b_3\right) \\ a_2\left(S_{11}b_1 + S_{21}b_2 + S_{31}b_3\right) & a_2\left(S_{12}b_1 + S_{22}b_2 + S_{32}b_3\right) & a_2\left(S_{13}b_1 + S_{23}b_2 + S_{33}b_3\right) \\ a_3\left(S_{11}b_1 + S_{21}b_2 + S_{31}b_3\right) & a_3\left(S_{12}b_1 + S_{22}b_2 + S_{32}b_3\right) & a_3\left(S_{13}b_1 + S_{23}b_2 + S_{33}b_3\right) \end{bmatrix} \tag{102}$$

Assim, a igualdade $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{S} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{S}^T\mathbf{b}$ é verificada de ambas as formas, indicial e matricialmente.

- **c)** $\mathbf{S}\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{S}^T\mathbf{b}$:

Inicialmente, de modo a verificar a consistência dimensional da solução a ser obtida, realiza-se uma análise dimensional do problema. Do lado esquerdo da equação pode ser verificada que a transformação do tensor **S** sobre **a** resulta em um vetor ou um tensor de ordem 1, que por sua vez é operado seu produto interno com o vetor **b**, resultando em um escalar. Por outro lado, do lado direito da equação, verifica-se que o vetor **b** é transformado pelo tensor $\mathbf{S}^T$, resultando em um vetor, que por sua vez é operado seu produto interno com o vetor **a**, resultando em um escalar.

Desenvolvendo a equação a ser verificada, inicialmente de forma indicial, escreve-se os tensores **S**, **a** e **b** em termos de suas componentes, de modo que:

$$\mathbf{S} = S_{ij}\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{a} = a_k\,\mathbf{e}_k \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = b_l\,\mathbf{e}_l, \tag{103}$$

de modo que, a relação $\mathbf{S}\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ pode ser escrita como:

$$\mathbf{S}\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = S_{ij}\,\left(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\right)\,a_k\,\mathbf{e}_k \cdot b_l\,\mathbf{e}_l. \tag{104}$$

Utilizando a definição do produto tensorial, $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\,\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\,\mathbf{u}$, se tem:

$$\left[S_{ij}\,a_k\,b_l\,\left(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k\right)\mathbf{e}_i\right] b_l\mathbf{e}_l, \tag{105}$$

onde, utilizando a relação $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk}$, substituindo o índice k por j e rearranjando os termos da equação, tem-se que:

$$S_{ij}\, a_j\, b_l\, \left(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_l\right). \tag{106}$$

Fazendo uso da novamente da propriedade $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_l = \delta_{il}$, substituindo o índice l por i e rearranjando os termos da equação, tem-se que:

$$S_{il}\, a_l\, b_i. \tag{107}$$

Desenvolvendo agora o lado direito da equação, tem-se que:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{S}^T \mathbf{b} = a_k\, \mathbf{e}_k \cdot \left[\left(S_{ij}\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\right)^T\, b_l\, \mathbf{e}_l\right], \tag{108}$$

na qual, se utiliza da propriedade de transposição de tensores, $\left(S_{ij}\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\right)^T = S_{ji}\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$. Também se aproveita para fazer uso da propriedade de produto tensorial, $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\, \mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\, \mathbf{u}$, de modo que:

$$a_k\, \mathbf{e}_k \cdot \left[S_{ji}\, b_l\, \left(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_l\right)\, \mathbf{e}_i\right]. \tag{109}$$

Notando que $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_l = \delta_{jl}$, substituindo o índice l por j e rearranjando os termos da equação, tem-se que:

$$a_k\, b_j\, S_{ji}\, \left(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i\right). \tag{110}$$

Fazendo uso da propriedade $\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i = \delta_{ki}$, substituindo o índice i por k e rearranjando os termos da equação, tem-se que:

$$S_{ik}\, a_k\, b_i\,. \tag{111}$$

Observando que, podendo-se livremente substituir o índice k por j, tem-se que:

$$S_{ij}\, a_j\, b_i\,. \tag{112}$$

Portanto, a igualdade $\mathbf{S}\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{S}^T \mathbf{b}$ é verificada.

Agora, realizando os mesmos desenvolvimentos anteriores, porém de forma matricial, inicia-se escrevendo os tensores $\mathbf{S}$, $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ em termos de suas componentes, de modo que:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}\,. \tag{113}$$

Desenvolvendo o lado esquerdo da equação, tem-se que:

$$\mathbf{S}\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \{[\mathbf{S}]\,[\mathbf{a}]\}\cdot[\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{114}$$

Operando a transformação do tensor $\mathbf{T}$ sobre o vetor $\mathbf{a}$, tem-se que:

$$[\mathbf{T}]\,[\mathbf{a}] = \begin{bmatrix} S_{11}a_1 + S_{12}a_2 + S_{13}a_3 \\ S_{21}a_1 + S_{22}a_2 + S_{23}a_3 \\ S_{31}a_1 + S_{32}a_2 + S_{33}a_3 \end{bmatrix} \quad , \tag{115}$$

que, operando seu produto interno com o vetor $\mathbf{b}$, tem-se que:

$$b_1\left(S_{11}a_1 + S_{12}a_2 + S_{13}a_3\right) + b_2\left(S_{21}a_1 + S_{22}a_2 + S_{23}a_3\right) + b_3\left(S_{31}a_1 + S_{32}a_2 + S_{33}a_3\right) \tag{116}$$

Agora, desenvolvendo o lado direito da equação, tem-se que:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{S}^T\mathbf{b} = [\mathbf{a}]\cdot\left\{[\mathbf{S}]^T\,[\mathbf{b}]\right\} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} \\ S_{12} & S_{22} & S_{32} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{117}$$

Operando a transformação do tensor $\mathbf{S}^T$ sobre o vetor $\mathbf{b}$, tem-se que:

$$[\mathbf{S}]^T\,[\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} S_{11}b_1 + S_{21}b_2 + S_{31}b_3 \\ S_{12}b_1 + S_{22}b_2 + S_{32}b_3 \\ S_{13}b_1 + S_{23}b_2 + S_{33}b_3 \end{bmatrix} \quad , \tag{118}$$

e operando seu produto interno com o vetor $\mathbf{a}$, tem-se que:

$$a_1\left(S_{11}b_1 + S_{21}b_2 + S_{31}b_3\right) + a_2\left(S_{12}b_1 + S_{22}b_2 + S_{32}b_3\right) + a_3\left(S_{13}b_1 + S_{23}b_2 + S_{33}b_3\right) \tag{119}$$

Portando, conclui-se que $\mathbf{T}\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{T}^T\mathbf{b}$.

- **d)** $(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\otimes\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})$:

Inicialmente, de modo a verificar a consistência dimensional da solução a ser obtida, realiza-se uma análise dimensional do problema. Do lado esquerdo da equação pode ser verificado que o produto tensorial entre os vetores **a** e **b** resulta em um tensor, que por sua vez é operado seu produto interno com o tensor resultante do produto tensorial entre os vetores **c** e **d**, resultando em um escalar. Por outro lado, do lado direito da equação, verifica-se que o vetor **c** é operado seu produto interno com o vetor **a**, resultando em um escalar, que por sua vez é multiplicado pelo resultado do produto interno entre os vetores **b** e **d**, resultando em um escalar.

Desenvolvendo a equação a ser verificada, inicialmente de forma indicial, escreve-se os tensores **a**, **b**, **c** e **d** em termos de suas componentes, de modo que:

$$\mathbf{a} = a_i\,\mathbf{e}_i \quad , \quad \mathbf{b} = b_j\,\mathbf{e}_j \quad , \quad \mathbf{c} = c_k\,\mathbf{e}_k \quad , \quad \text{e} \quad \mathbf{d} = d_l\,\mathbf{e}_l, \tag{120}$$

Operando inicialmente o lado esquerdo da equação, tem-se que:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = [a_i\,b_j\,c_k\,d_l\,(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)] \tag{121}$$

Utilizando a propriedade $\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = \mathrm{tr}\left(\mathbf{S}^T\mathbf{T}\right)$, se tem:

$$a_i\,b_j\,c_k\,d_l\,\mathrm{tr}\left((\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)^T\,(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)\right) \quad , \tag{122}$$

onde, utilizando a relação $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)^T = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ juntamente com a relação $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\,(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{c})\,(\mathbf{u} \otimes \mathbf{d})$, tem-se que:

$$a_i\,b_j\,c_k\,d_l\,\mathrm{tr}\left((\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k)\,(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l)\right) \quad , \tag{123}$$

onde, utilizando a relação $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk}$, percebendo que este pode sair do operador traço e substituindo o índice k por j, tem-se que:

$$a_i\,b_j\,c_j\,d_l\,\mathrm{tr}\left((\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l)\right) \quad , \tag{124}$$

onde, notando que $\mathrm{tr}\left((\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l)\right) = \delta_{il}$, substituindo o índice l por i e rearranjando os termos da equação, tem-se que:

$$a_i\,b_j\,c_j\,d_i \quad . \tag{125}$$

Desenvolvendo agora o lado direito da equação, tem-se que:

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) = [a_i\,c_k\;(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k)]\,[b_j\,d_l\;(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_l)] \tag{126}$$

onde, utilizando a relação $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, se tem:

$$a_i\, c_k\, b_j\, d_l\, \left(\delta_{ik}\delta_{jl}\right) \quad , \tag{127}$$

onde, substituindo o índice k por i e o índice l por j, tem-se que:

$$a_i\, c_i\, b_j\, d_j \quad . \tag{128}$$

Assim, a igualdade $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})$ é verificada.

Agora, realizando os mesmos desenvolvimentos anteriores, porém de forma matricial, inicia-se escrevendo os tensores **a**, **b**, **c** e **d** em termos de suas componentes, de modo que:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \tag{129}$$

Inicialmente trabalhando sobre lado esquedo da equação, se tem:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = [\mathbf{a}]\,[\mathbf{b}]^T \quad \text{e} \quad (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = [\mathbf{c}]\,[\mathbf{d}]^T \quad , \tag{130}$$

portanto:

$$[\mathbf{a}]\,[\mathbf{b}]^T = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathbf{c}]\,[\mathbf{d}]^T = \begin{bmatrix} c_1d_1 & c_1d_2 & c_1d_3 \\ c_2d_1 & c_2d_2 & c_2d_3 \\ c_3d_1 & c_3d_2 & c_3d_3 \end{bmatrix} \quad , \tag{131}$$

e realizando o produto interno entre ambos tensores, se tem o escalar:

$$\left(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3\right)\left(b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3\right) \tag{132}$$

Agora, operando sobre o lado direito da equação, tem-se que:

$$[\mathbf{a}]\cdot[\mathbf{c}] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 \quad \text{e} \quad [\mathbf{b}]\cdot[\mathbf{d}] = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3 \tag{133}$$

resultando no escalar:

$$\left(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3\right)\left(b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3\right) \quad , \tag{134}$$

de modo que a igualdade $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})$ é verificada.

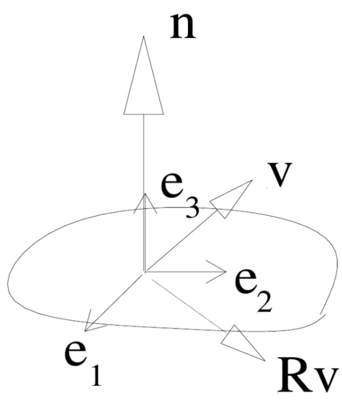

Figura 1 – Reflexão de um vetor em relação a um plano.

2.5 Exercício 5

Sendo $\mathbf{R} = \mathbf{I} - 2\,\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ e operando com as representações indiciais dos vetores envolvidos, mostre que $\mathbf{R}$ realiza uma reflexão de um vetor $\mathbf{v}$ em relação a um plano, conforme indica a figura seguinte. Observe que $\mathbf{I}$ é o tensor identidade e o versor $\mathbf{n}$ está alinhado com o versor $\mathbf{e_3}$.

Inicialmente, escreve-se os tensores $\mathbf{R}$ e $\mathbf{n}$ em termos de suas componentes, de modo que:

$$\mathbf{R} = R_{ij}\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad , \quad \mathbf{n} = n_i\,\mathbf{e}_i \quad , \quad \mathbf{n} = n_j\,\mathbf{e}_j \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = v_k\,\mathbf{e}_k \tag{135}$$

Assim, o tensor $\mathbf{R}$ pode ser escrito como:

$$\mathbf{R} = (I_{ij} - 2\,n_i n_j)\;\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \tag{136}$$

Realizando a transformação do vetor $\mathbf{v}$ pelo tensor $\mathbf{R}$, tem-se que:

$$\mathbf{R}\,\mathbf{v} = (I_{ij} - 2\,n_i n_j)\;\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\,v_k\,\mathbf{e}_k. \tag{137}$$

Usando a definição do produto tensorial, $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\,\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\,\mathbf{u}$, rearranjando os termos, se tem que:

$$(I_{ij} - 2\,n_i n_j)\;v_k\;(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k)\,(\mathbf{e}_i)\,. \tag{138}$$

Utilizando a relação $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk}$, substituindo o índice k por j e rearranjando os termos da equação, tem-se que:

$$(I_{ij} - 2\,n_i n_j)\;v_j\;(\mathbf{e}_i)\,. \tag{139}$$

Expandindo a equação, tem-se que:

$$\mathbf{R}\,\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{3} \left(I_{ij} - 2\,n_i n_j\right)\, v_j\, \left(\mathbf{e}_i\right). \tag{140}$$

Assim, as componentes o vetor $\mathbf{R}\,\mathbf{v}$ pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{Rv})_1 &= v_1 - 2\,n_1\,(n_1\,v_1 + n_2\,v_2 + n_3\,v_3),\\
(\mathbf{Rv})_2 &= v_2 - 2\,n_2\,(n_1\,v_1 + n_2\,v_2 + n_3\,v_3),\\
(\mathbf{Rv})_3 &= v_3 - 2\,n_3\,(n_1\,v_1 + n_2\,v_2 + n_3\,v_3).
\end{aligned} \tag{141}$$

Como o vetor $\mathbf{n}$ está alinhado com o versor $\mathbf{e_3}$, tem-se que $n_1 = n_2 = 0$ e $n_3 = 1$. Assim, as componentes do vetor $\mathbf{R}\,\mathbf{v}$ podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{Rv})_1 &= v_1 - 2 \times 0\,(0\,v_1 + 0\,v_2 + 1\,v_3) = v_1,\\
(\mathbf{Rv})_2 &= v_2 - 2 \times 0\,(0\,v_1 + 0\,v_2 + 1\,v_3) = v_2,\\
(\mathbf{Rv})_3 &= v_3 - 2 \times 1\,(0\,v_1 + 0\,v_2 + 1\,v_3) = -v_3.
\end{aligned} \tag{142}$$

Ou seja, nota-se que a transformação do vetor $\mathbf{v}$ pelo tensor $\mathbf{R}$ resulta em um vetor $\mathbf{R}\,\mathbf{v}$ que possui as mesmas componentes x e y do vetor $\mathbf{v}$, enquanto a componente z do vetor $\mathbf{R}\,\mathbf{v}$ é o oposto da componente z do vetor $\mathbf{v}$. Tal comportamento é resultado da reflexão do vetor $\mathbf{v}$ em relação ao plano ortogonal ao vetor $\mathbf{n}$, conforme indicado na figura 1.

Cabe também apresentar o mesmo desenvolvimento anterior, mas agora utilizando a notação dyadica. Assim, o tensor $\mathbf{R}$ pode ser escrito como:

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} - 2\,\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \tag{143}$$

Realizando a transformação do vetor $\mathbf{v}$ pelo tensor $\mathbf{R}$, tem-se que:

$$\mathbf{R}\,\mathbf{v} = \left(\mathbf{I} - 2\,\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}\right)\,\mathbf{v}. \tag{144}$$

Usando a definição do produto tensorial, $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\,\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\,\mathbf{u}$, rearranjando os termos, se tem que:

$$\mathbf{I}\,\mathbf{v} - 2\,\left(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}\right)\,\mathbf{n}. \tag{145}$$

Interpretando o resultado anterior, observa-se que a transformação do vetor $\mathbf{v}$ pelo tensor $\mathbf{R}$ resulta em um vetor $\mathbf{R}\,\mathbf{v}$ igual ao vetor $\mathbf{v}$ menos o dobro da projeção do vetor $\mathbf{v}$ sobre o vetor $\mathbf{n}$. Tal operação culmina na reflexão do vetor $\mathbf{v}$ em relação ao plano ortogonal ao vetor $\mathbf{n}$, conforme indicado na figura 1.

Também é pertinente apontar que, similarmente ao tensor $\mathbf{R}$, existe o tensor $\mathbf{P}$, que é conhecido como tensor de projeção, visto que ele realiza a projeção de um vetor $\mathbf{v}$ sobre o plano ortogonal ao vetor $\mathbf{n}$. O tensor $\mathbf{P}$ é dado por:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \tag{146}$$

2.6 Exercício 6

Considere o tensor de tensão $\mathbf{T}$ num ponto no interior de um corpo definido pelas seguintes componentes:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2.0 & \qquad \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \sqrt{3} \\ \sigma_y &= 2\sqrt{3} & \qquad \tau_{xz} &= \tau_{zx} = 0.0 \\ \sigma_z &= -2.0 & \qquad \tau_{yz} &= \tau_{zy} = 0.0 \end{aligned}$$

A partir deste estado de tensão e considerando que o vetor de tensão associado a um plano caracterizado pelo seu versor normal $\mathbf{n}$ pode ser obtido por

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{T}\,\mathbf{n},$$

determine:

a) O valor da tensão normal ao plano caracterizado por um versor normal contido no plano xy e que faz trinta graus com o eixo x.

b) O valor da tensão de cisalhamento no mesmo plano.

- **a)**:

Escrevendo os tensores $\mathbf{T}$ e $\mathbf{n}$ em termos de suas componentes, tem-se que:

$$\mathbf{T} = T_{ij}\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad \text{e} \quad \mathbf{n} = n_k\,\mathbf{e}_k \tag{147}$$

Desse modo, o vetor de tensão $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ pode ser escrito como:

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = T_{ij}\ (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\ (n_k\, \mathbf{e}_k)\,. \tag{148}$$

Usando a definição do produto tensorial, $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\, \mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\, \mathbf{u}$, rearranjando os termos, se tem que:

$$T_{ij}\, n_k\ (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k)\, (\mathbf{e}_i)\,. \tag{149}$$

Utilizando a relação $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk}$, substituindo o índice k por j e rearranjando os termos da equação, tem-se que:

$$\mathbf{t} = T_{ij}\, n_j\ (\mathbf{e}_i)\,. \tag{150}$$

Para a determinação do valor da tensão normal ao plano no qual o vetor $\mathbf{t}$ atua, realiza-se o produto escalar entre os vetores $\mathbf{t}$ e $\mathbf{n}$:

$$\sigma_{xx} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = T_{ij}\, n_j\, \mathbf{e}_i \cdot n_k\, \mathbf{e}_k \tag{151}$$

Utilizando a relação $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik}$, substituindo o índice k por i e rearranjando os termos da equação, tem-se que:

$$\sigma_{xx} = T_{ij}\, n_j\, n_i. \tag{152}$$

Expandindo a equação, tem-se que:

$$\sigma_{xx} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} T_{ij}\, n_j\, n_i. \tag{153}$$

Restando, para a definição numérica da tensão normal, a determinação do vetor $\mathbf{n}$, visto que o tensor de tensão $\mathbf{T}$ já é conhecido. De acordo com o enunciado da questão, o vetor normal pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(30) \\ \sin(30) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{154}$$

Substituindo os valores do tensor de tensão $\mathbf{T}$ e do vetor normal $\mathbf{n}$, tem-se que:

$$\sigma_{xx} = 3.87 \tag{155}$$

O mesmo pode ser feito de forma matricial:

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}\,\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}n_1 + \tau_{xy}n_2 + \tau_{xz}n_3 \\ \sigma_{yy}n_2 + \tau_{xy}n_1 + \tau_{yz}n_3 \\ \sigma_{zz}n_3 + \tau_{xz}n_1 + \tau_{yz}n_2 \end{bmatrix} \tag{156}$$

Realizando a projeção do vetor **t** no vetor **n**, tem-se que:

$$\sigma_{xx} = \mathbf{t}\cdot\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}n_1 + \tau_{xy}n_2 + \tau_{xz}n_3 \\ \sigma_{yy}n_2 + \tau_{xy}n_1 + \tau_{yz}n_3 \\ \sigma_{zz}n_3 + \tau_{xz}n_1 + \tau_{yz}n_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \tag{157}$$

Resultando em:

$$\sigma_{xx} = n_1\left(\sigma_{xx}n_1 + \tau_{xy}n_2 + \tau_{xz}n_3\right) + n_2\left(\sigma_{yy}n_2 + \tau_{xy}n_1 + \tau_{yz}n_3\right) + n_3\left(\sigma_{zz}n_3 + \tau_{xz}n_1 + \tau_{yz}n_2\right) \tag{158}$$

Que, substituindo os valores do vetor normal **n** e do tensor de tensão **T**, resulta em:

$$\sigma_{xx} = 3.87 \tag{159}$$

- **b)**:

Para a determinação do valor da tensão de cisalhamento ao plano no qual o vetor **t** atua, utiliza-se o tensor de projeção, apresentado na (146) e aqui reproduzido:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{n}\otimes\mathbf{n} \tag{160}$$

Escrevendo os tensores **I** e **n** em termos de suas componentes, tem-se que:

$$\mathbf{I} = I_{kl}\,\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_l, \quad \text{e} \quad \mathbf{n} = n_k\,\mathbf{e}_k \quad \text{e} \quad \mathbf{n} = n_l\,\mathbf{e}_l \tag{161}$$

Assim, o tensor de projeção **P** pode ser escrito como:

$$\mathbf{P} = I_{kl}\,\left(\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_l\right) - n_k\,n_l\,\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_l \tag{162}$$

Utilizando esse tensor para operar o vetor de tensão **t**, tem-se que:

$$\tau = \mathbf{P}\,\mathbf{t} = \left(I_{kl}\, - n_k\,n_l\right)\left(\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_l\right)\,\left(T_{ij}\,n_j\,\left(\mathbf{e}_i\right)\right) \tag{163}$$

Usando a definição do produto tensorial, $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\,\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\,\mathbf{u}$, rearranjando os termos, se tem que:

$$\tau = T_{ij}\, n_j\, \left(I_{kl} - n_k\, n_l\right)\, \left(\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_i\right)\, \mathbf{e}_k \tag{164}$$

Utilizando a relação $\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_i = \delta_{li}$, substituindo o índice l por i e rearranjando os termos da equação, tem-se que:

$$\tau = T_{ij}\, n_j\, \left(I_{ki} - n_k\, n_i\right)\, \mathbf{e}_k \tag{165}$$

Expandindo a equação, tem-se que:

$$\tau = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} T_{ij}\, n_j\, \left(I_{ki} - n_k\, n_i\right)\, \mathbf{e}_k \tag{166}$$

Realizando as somas, tem-se que:

$$\tau = \begin{bmatrix} -0.75 \\ 1.30 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{167}$$

O mesmo pode ser feito de forma matricial:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\frac{n_1^2}{|n_1|^2+|n_2|^2+|n_3|^2} + 1 & -\frac{n_1 n_2}{|n_1|^2+|n_2|^2+|n_3|^2} & -\frac{n_1 n_3}{|n_1|^2+|n_2|^2+|n_3|^2} \\ -\frac{n_1 n_2}{|n_1|^2+|n_2|^2+|n_3|^2} & -\frac{n_2^2}{|n_1|^2+|n_2|^2+|n_3|^2} + 1 & -\frac{n_2 n_3}{|n_1|^2+|n_2|^2+|n_3|^2} \\ -\frac{n_1 n_3}{|n_1|^2+|n_2|^2+|n_3|^2} & -\frac{n_2 n_3}{|n_1|^2+|n_2|^2+|n_3|^2} & -\frac{n_3^2}{|n_1|^2+|n_2|^2+|n_3|^2} + 1 \end{bmatrix}, \tag{168}$$

que, substituindo os valores do vetor normal $\mathbf{n}$, resulta em:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.250 & -0.433 & 0 \\ -0.433 & 0.749 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{169}$$

O qual, operando sobre o vetor de tensão $\mathbf{t}$, resulta em:

$$\tau = \mathbf{P}\,\mathbf{t} = \begin{bmatrix} -0.75 \\ 1.30 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{170}$$

O valor da tensão de cisalhamento é dado pela norma do vetor τ:

$$\|\tau\| = \sqrt{(-0.75)^2 + (1.30)^2 + 0^2} = 1.50 \tag{171}$$

2.7 Exercício 7

Considere a seguinte representação matricial do tensor de tensão:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

a) Determine o vetor de tensão $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ segundo um plano cuja normal é caracterizada pelo vetor

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{e_1} + 4\mathbf{e_2} + 5\mathbf{e_3}.$$

b) Determine o valor da componente de $t(n)$ normal ao plano.

- **a)**:

Escrevendo os tensores $\mathbf{T}$ e $\mathbf{n}$ em termos de suas componentes, tem-se que:

$$\mathbf{T} = T_{ij}\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad \text{e} \quad \mathbf{n} = n_k\,\mathbf{e}_k \tag{172}$$

Desse modo, o vetor de tensão $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ pode ser escrito como:

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = T_{ij}\,\left(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\right)\,\left(n_k\,\mathbf{e}_k\right). \tag{173}$$

Usando a definição do produto tensorial, $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\,\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\,\mathbf{u}$, rearranjando os termos, se tem que:

$$T_{ij}\,n_k\,\left(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k\right)\left(\mathbf{e}_i\right). \tag{174}$$

Utilizando a relação $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk}$, substituindo o índice k por j e rearranjando os termos da equação, tem-se que:

$$\mathbf{t} = T_{ij}\,n_j\,\left(\mathbf{e}_i\right). \tag{175}$$

Expandindo a equação, tem-se que:

$$t_i = \sum_{j=1}^{3} T_{ij}\,n_j = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}n_1 + \tau_{xy}n_2 + \tau_{xz}n_3 \\ \sigma_{yy}n_2 + \tau_{xy}n_1 + \tau_{yz}n_3 \\ \sigma_{zz}n_3 + \tau_{xz}n_1 + \tau_{yz}n_2 \end{bmatrix} \tag{176}$$

Normalizando o vetor $\mathbf{v}$, para se obter o versor $\mathbf{n}$, tem-se que:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{50}} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{177}$$

Substituindo os valores do vetor normal $\mathbf{n}$ e do tensor de tensão $\mathbf{T}$, tem-se que:

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{50}} \\ \frac{4}{\sqrt{50}} \\ \frac{5}{\sqrt{50}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5\sqrt{2}} \\ \frac{20}{5\sqrt{2}} \\ \frac{29}{5\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{178}$$

- **b)**:

Para a determinação do valor da tensão normal ao plano no qual o vetor $\mathbf{t}$ atua, realiza-se o produto escalar entre os vetores $\mathbf{t}$ e $\mathbf{n}$:

$$\sigma_{xx} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = T_{ij}\, n_j\, \mathbf{e}_i \cdot n_k\, \mathbf{e}_k \tag{179}$$

Utilizando a relação $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik}$, substituindo o índice k por i e rearranjando os termos da equação, tem-se que:

$$\sigma_{xx} = T_{ij}\, n_j\, n_i. \tag{180}$$

Expandindo a equação, tem-se que:

$$\sigma_{xx} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} T_{ij}\, n_j\, n_i. \tag{181}$$

Que, expandindo, resulta em:

$$n_1\,(T_{11}\,n_1 + T_{12}\,n_2 + T_{13}\,n_3) + n_2\,(T_{21}\,n_1 + T_{22}\,n_2 + T_{23}\,n_3) + n_3\,(T_{31}\,n_1 + T_{32}\,n_2 + T_{33}\,n_3) \tag{182}$$

Que, substituindo os valores do vetor normal $\mathbf{n}$ e do tensor de tensão $\mathbf{T}$, resulta em:

$$\sigma_{xx} = 4.62 \tag{183}$$

O mesmo pode ser obtido matricialmente. Substituindo os valores do vetor normal $\mathbf{n}$ e do tensor de tensão $\mathbf{T}$, tem-se que:

$$\sigma_{xx} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{50}} \\ \frac{4}{\sqrt{50}} \\ \frac{5}{\sqrt{50}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{50}} \\ \frac{4}{\sqrt{50}} \\ \frac{5}{\sqrt{50}} \end{bmatrix} \tag{184}$$

Resultando em:

$$\sigma_{xx} = 4.62 \tag{185}$$

3 Aplicações

Na presente seção almeja-se apresentar algumas aplicações dos fundamentos matemáticos trablhados ao longo do presente relatório.

3.1 Decomposição Volumétrica-Desviadora do tensor constitutivo

Um tensor isotrópico de quarta ordem qualquer $\mathbb{G}$, pode ser decomposto da seguinte forma(ANAND; GOVINDJEE, 2020):

$$\mathbb{G}\,\mathbf{A} = 2\mu\,\mathbf{A} + \lambda\,(\mathrm{tr}\,\mathbf{A})\,\mathbf{I}. \tag{186}$$

Portanto, se um material é isotrópico, a transformação que mapeia o tensor de deformação $\boldsymbol{\epsilon}$ ao tensor de tensão $\boldsymbol{\sigma}$ é dada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}\,\boldsymbol{\epsilon} = 2\mu\,\boldsymbol{\epsilon} + \lambda\,(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\epsilon})\,\mathbf{I} \quad . \tag{187}$$

Pode ser mostrado que o tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ pode ser reescrito em função da deformação volumétrica $\boldsymbol{\epsilon}^v$, da deformação desviadora $\boldsymbol{\epsilon}^d$ e do parametro $\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ como
:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\,\boldsymbol{\epsilon}^{\boldsymbol{d}} + \kappa\,(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\epsilon}^v)\,\mathbf{I} \tag{188}$$

Agora, almeja-se obter os tensores que extraem a parte volumétrica e a parte desviadora do tensor de deformação, de modo que a equação (188) possa ser escrita em função apenas de $\boldsymbol{\epsilon}$. Para tanto, definem-se os tensores de quarta ordem $\mathbb{I}^{vol}$ e $\mathbb{I}^{symdev}$ como:

$$\mathbb{I}^{vol} := \frac{1}{3}\,\mathbf{I}\otimes\mathbf{I} \quad / \quad \mathbb{I}^{vol}\,\mathbf{A} = \mathbf{A} \quad \forall\,\mathbf{A} \quad \text{com} \quad \mathbf{A}' = 0 \tag{189}$$

e

$$\mathbb{I}^{symdev} := \mathbb{I}^{sym} - \mathbb{I}^{vol} \quad / \quad \mathbb{I}^{symdev}\,\mathbf{B} = \mathbf{B} \quad \forall\,\mathbf{B} \quad \text{com} \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{B} = 0 \tag{190}$$

Desse modo, pode-se escrever o tensor constitutivo $\mathbb{C}$ como:

$$\mathbb{C} = 2\,\mu\mathbb{I}^{symdev} + 3\,\kappa\,\mathbb{I}^{vol} \tag{191}$$

Visando agora explicitar a forma matricial dos tensores $\mathbb{I}^{vol}$ e $\mathbb{I}^{symdev}$, tem-se que, para um tensor de quarta ordem $\mathbb{A}$: qualquer, sua forma de Voigt é dada por:

$$\mathbb{D}_{\text{Voigt}} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & \sqrt{2}\,D_{1123} & \sqrt{2}\,D_{1113} & \sqrt{2}\,D_{1112} \\ D_{1122} & D_{2222} & D_{2233} & \sqrt{2}\,D_{2223} & \sqrt{2}\,D_{2213} & \sqrt{2}\,D_{2212} \\ D_{1133} & D_{2233} & D_{3333} & \sqrt{2}\,D_{3323} & \sqrt{2}\,D_{3313} & \sqrt{2}\,D_{3312} \\ \sqrt{2}\,D_{1123} & \sqrt{2}\,D_{2223} & \sqrt{2}\,D_{3323} & 2\,D_{2323} & 2\,D_{2313} & 2\,D_{2312} \\ \sqrt{2}\,D_{1113} & \sqrt{2}\,D_{2213} & \sqrt{2}\,D_{3313} & 2\,D_{2313} & 2\,D_{1313} & 2\,D_{1312} \\ \sqrt{2}\,D_{1112} & \sqrt{2}\,D_{2212} & \sqrt{2}\,D_{3312} & 2\,D_{2312} & 2\,D_{1312} & 2\,D_{1212} \end{bmatrix} \tag{192}$$

Agora, almejando escrever $\mathbb{I}$ em termos de sua forma de Voigt, inicialmente percebe-se que este pode ser escrito em termos de suas componentes como $\mathbb{I} = \delta_{ij}\,\delta_{kl}\,\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_l$. Assim, percebe-se que este tensor será não nulo apenas quando $i = k$ e $j = l$. Portanto, a forma de Voigt do tensor identidade é dada por:

$$\mathbb{I}_{\text{Voigt}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{193}$$

De forma a simplificar a escrita, consideremos os índices indo de 1 a 2. Portanto, a forma de Voigt do tensor $\mathbb{I}^{vol}$ é dada da seguinte forma:

$$\mathbb{I}^{vol} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{194}$$

Já o tensor $\mathbb{I}^{sym}$ é dado por:

$$\mathbb{I}^{sym} = \frac{1}{2}\left[\mathbb{I} + \mathbb{I}^{T}\right]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{195}$$

e, portanto, $\mathbb{I}^{symdev}$ pode ser escrito como:

$$\mathbb{I}^{symdev} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{196}$$

Assim, finalmente, a forma de Voigt do tensor $\mathbb{I}^{symdev}$ é dada por:

$$\mathbb{I}^{symdev} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{197}$$

Portanto, o tensor constitutivo $\mathbb{C}$ pode ser escrito por, já considerando a simetria do tensor de deformações:

$$2\,\mu \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \kappa \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{198}$$

Cabe aqui também ressaltar que, caso o tensor de deformação $\boldsymbol{\epsilon}$ seja escrito em sua forma de Voigt de forma compatível tensorialmente, ou seja:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} \tag{199}$$

então a equação (198) é válida. Já caso o tensor de deformação $\boldsymbol{\epsilon}$ seja escrito da forma:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad , \tag{200}$$

então a equação (198) deve ser escrita como:

$$2\,\mu \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \kappa \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{201}$$

Referências

ANAND, Lallit; GOVINDJEE, Sanjay. **Continuum Mechanics of Solids**. 1. ed. [S.l.]: Oxford University PressOxford, jul. 2020. ISBN 978-0-19-886472-1 978-0-19-189676-7. DOI: 10.1093/oso/9780198864721.001.0001. Disponível em: <https://academic.oup.com/book/43650>. Acesso em: 30 set. 2024.

PROENÇA, Sergio Persival Baroncini. **Fundamentos Matemáticos das Mecânicas dos Sólidos e Estruturas**. 1. ed. [S.l.]: USP, mar. 2024. Acesso em: 2024.