

Diego Dias Veloso

Fundamentos Matemáticos da Mecânica dos Sólidos e Estruturas

São Carlos

22 de junho de 2025

Diego Dias Veloso

**Fundamentos Matemáticos da Mecânica dos Sólidos e
Estruturas**

Universidade de São Paulo

Orientador: PhD. Sérgio Persinal Baronchinni Proença

São Carlos
22 de junho de 2025

Sumário

1	Introdução	3
1.1	Aspectos teóricos	3
2	Resoluções dos exercícios propostos	8
2.1	Exercício 1	8
2.1.1	Função aproximativa de 3.^a ordem	9
2.1.2	Função aproximativa de 5^a ordem	12
2.2	Exercício 2	14
2.2.1	Função aproximativa de 3^a ordem	16
2.2.2	Função aproximativa de 4^a ordem	19
2.3	Exercício 3	22
2.3.1	Função aproximativa de 3.^a ordem.	23
2.3.2	Função aproximativa de 4.^a ordem.	26
3	Conclusão	29
	Referências	31

1 Introdução

A Mecânica dos Sólidos é um ramo da física a qual estuda o comportamento de sólidos deformáveis sob a ação diversa de forças externas. No contexto da Engenharia de Estruturas e da Mecânica Computacional, a Mecânica dos Sólidos é o campo que fornece todo o ferramental teórico necessário para o entendimento do comportamento das estruturas e dos materiais. Além disso, essa base permite ao pesquisador propor novos modelos e teorias que discrivam diferentes problemas.

No campo da Mecânica dos Sólidos, o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) representa o ponto de partida de grande parte das teorias. O PTV, devido a seu caráter de princípio, não possui uma prova a sí associada.

Assim como os primeiros dois trabalhos, este visa aprofundar os conceitos de Mecânica dos Sólidos do pesquisador. Com esses conhecimentos, facilita-se a compreensão das teorias da Mecânica dos sólidos com seu rigor matemático, além de também fornecer ao pesquisador ferramentais para o desenvolvimento de novos modelos e teorias.

1.1 Aspectos teóricos

No presente tópico, serão apresentados conceitos fundamentais utilizados ao longo do texto. Almejando uma apresentação mais clara e objetiva ao longo do texto, provas e demonstrações de teoremas e propriedades não serão apresentadas. Portanto, tais demonstrações mais relevantes serão aqui apresentadas. Maiores detalhes, no contexto da mecânica dos sólidos, podem ser encontrados em [Proença \(2024\)](#), [Anand e Govindjee \(2020\)](#), [Spencer \(2004\)](#) e [Lanczos \(2012\)](#).

O PTV apesar de não ser uma lei conservativa ([SPENCER, 2004](#)), como as de conservação de massa, momento e energia, forma a base de diversas teorias variacionais no campo da mecânica do contínuo. O PTV define o trabalho realizado sobre o sistema deve ser equivalente ao trabalho interno do sistema, ou seja,

$$W_{int} = W_{ext} \quad (1.1)$$

para um campo de deslocamentos que seja compatível com as restrições do sistema. Aqui,

é interessante apresentar a interpretação geométrica dada por [Lanczos \(2012\)](#) ao princípio. Considerando-se um corpo rígido submetido a um n número forças, \mathbf{F}_n , para cada uma das quais os deslocamentos virtuais são δu_n , de forma que o PTV afirma que o corpo esteja em equilíbrio caso

$$W_{ext} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \boldsymbol{\delta} \mathbf{u}_i = 0 \quad (1.2)$$

o que é equivalente a dizer que $\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} = 0$. Desse modo, se tem que o corpo está em equilíbrio caso o vetor generalizado de forças \mathbf{F} seja perpendicular a qualquer deslocamento compatível ao sistema. Para isso, consideremos três distintas situações, um corpo sem nenhuma restrição, um restrito apenas em y e outro isostático, restrito em ambas direções x e y . Para a primeira situação, como o corpo pode sofrer um deslocamento qualquer, não há nenhum vetor de forças \mathbf{F} que seja perpendicular a, simultaneamente, todas as direções espaciais que o corpo pode se deslocar, de modo que \mathbf{F} deva ser nulo para o corpo estar em equilíbrio. Agora, para um corpo restrito em y , percebe-se que o corpo apenas pode se deslocar em x , de modo que, para que \mathbf{F} seja perpendicular a $\boldsymbol{\delta} \mathbf{u}$, as forças resultantes devem ser verticais para que o corpo esteja em equilíbrio. Agora, para o último caso, como o corpo não pode se deslocar em nenhuma direção, o vetor \mathbf{F} pode ser qualquer que o corpo estará em equilíbrio. Cabe pontuar que aqui não se almejou apresentar a formulação formal apresentada em [Lanczos \(2012\)](#), dado que, como os vetores \mathbf{F} e $\boldsymbol{\delta} \mathbf{u}$ são vetores generalizados, estes pertencem a um espaço vetorial de dimensão n , o que torna a demonstração da perpendicularidade de \mathbf{F} e $\boldsymbol{\delta} \mathbf{u}$ no equilíbrio mais sutil.

[Lanczos \(2012\)](#) também demonstra que o PTV é equivalente ao Princípio da Estacionariedade da Energia Potencial para forças monogênicas, o qual afirma que o corpo está em equilíbrio quando a energia potencial do sistema é estacionária, ou seja,

$$\delta (W_{int} - W_{ext}) = 0 \quad (1.3)$$

que, definindo a energia potencial Π como a diferença entre o trabalho interno e o trabalho externo, se tem

$$\delta \Pi = 0 \quad . \quad (1.4)$$

Agora, busca-se desenvolver o PTV no contexto da Mecânica dos Sólidos, mais especificamente, no contexto da Hipótese de viga de Euler-Bernoulli. Para tal, inicialmente, deve-se

definir o trabalho interno e o trabalho externo. O trabalho interno é dado pela integração no domínio da densidade de energia ψ

$$W_{int} = \int_{\Omega} \psi d\Omega \quad (1.5)$$

na qual a densidade de energia elástica em um sólido é dada por

$$\psi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}(u) \cdot \boldsymbol{\delta\varepsilon}(\delta u) \quad . \quad (1.6)$$

de modo que

$$W_{int} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}(u) \cdot \boldsymbol{\delta\varepsilon}(\delta u) d\Omega \quad (1.7)$$

Assumindo que a hipótese de compatibilidade seja válida, ou seja, o campo de deslocamentos \mathbf{u} seja contínuo, ou seja, o corpo permanece íntegro após o processo de deformação a equação e que a relação constitutiva do material seja linear, se tem

$$\boldsymbol{\delta\varepsilon} = \nabla^s \delta u \quad \text{Compatibilidade} \quad (1.8a)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{Constitutiva} \quad . \quad (1.8b)$$

de modo que W_{int} se escreve

$$W_{int} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}(u) \cdot (\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\delta\varepsilon} + \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\delta\varepsilon}^T) d\Omega \quad (1.9)$$

que, devido à simetria de $\boldsymbol{\sigma}$, pode-se escrever como

$$W_{int} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(u) \cdot \nabla \delta \varepsilon d\Omega \quad (1.10)$$

(SPENCER, 2004).

Agora, restringe-se a análise do PTV para no contexto das hipóteses de vigas. Adotando-se a hipótese de Euler-Bernoulli, assume-se que as seções transversais da viga permanecem planas e perpendiculares ao eixo da viga após a deformação (Figura 1). Desse modo, o campo de deslocamentos da viga pode ser escrito como

$$\mathbf{u}(x) = -y \left(\frac{d}{dx} v(x) \right) \mathbf{e}_1 + v(x) \mathbf{e}_2 \quad (1.11)$$

e o campo virtual de deslocamentos se escreve

$$\delta \mathbf{u}(x) = -y \left(\frac{d}{dx} \delta v(x) \right) \mathbf{e}_1 + \delta v(x) \mathbf{e}_2 \quad (1.12)$$

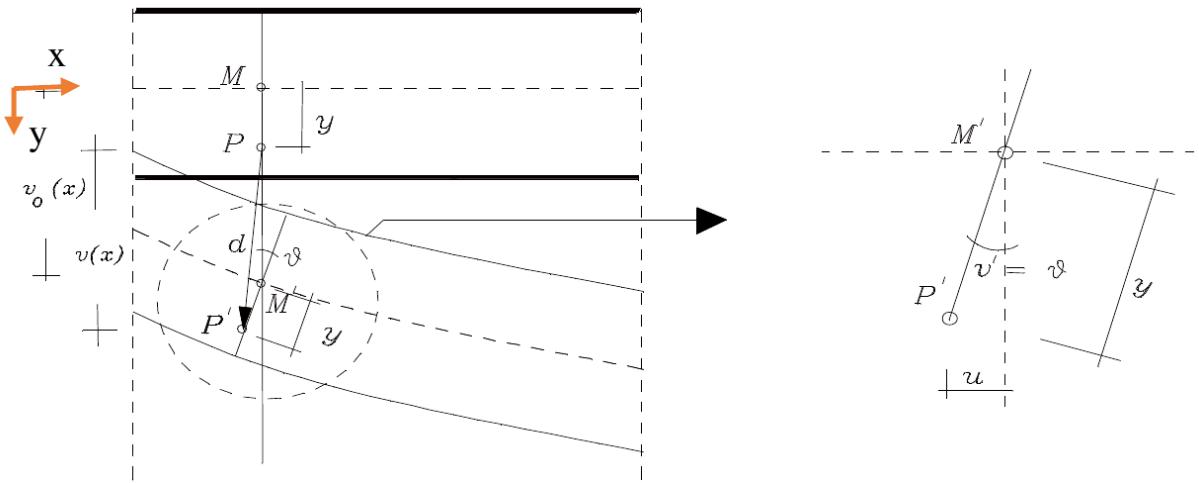


Figura 1 – Hipótese de viga de Euler-Bernoulli (PROENÇA, 2024).

assim, o campo de deformação virtual $\delta\varepsilon$ é dado por

$$\delta\varepsilon = \begin{bmatrix} \delta\varepsilon_{11} & \delta\varepsilon_{12} & \delta\varepsilon_{13} \\ \delta\varepsilon_{21} & \delta\varepsilon_{22} & \delta\varepsilon_{23} \\ \delta\varepsilon_{31} & \delta\varepsilon_{32} & \delta\varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left[-y \left(\frac{d}{dx} \delta v(x) \right) \right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

de modo que a densidade de energia elástica do corpo mediante o campo virtual de deformações pode ser escrita como

$$\psi = \mathbf{T} \cdot \delta\varepsilon = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -y \left(\frac{d^2}{dx^2} \delta v(x) \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \sigma_x \left[-y \left(\frac{d^2}{dx^2} \delta v(x) \right) \right] \quad (1.14)$$

e o trabalho interno virtual do corpo assume

$$\int_{\Omega} \sigma_x \left[-y \left(\frac{d^2}{dx^2} \delta v(x) \right) \right] d\Omega \quad (1.15)$$

considerando-se que a viga é homogênea, ou seja, o módulo de elasticidade E é constante ao longo da viga, e que a relação constitutiva é linear, se tem que

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad \rightarrow \quad \sigma_x = E\varepsilon_x \quad \rightarrow \quad \sigma_x = -Ey \frac{d^2}{dx^2} v(x) \quad (1.16)$$

assim, se tem

$$\int_{\Omega} -Ey \frac{d^2}{dx^2} v(x) \left[-y \left(\frac{d^2}{dx^2} \delta v(x) \right) \right] d\Omega \quad . \quad (1.17)$$

A equação acima pode, ainda, ser trabalhada com base em duas hipóteses: Primeiro, na hipótese de Euler-Bernoulli de que as seções transversais não se deformam no plano

transversal, ou seja, $\frac{d}{dy}v(x) = \frac{d}{dz}v(x) = 0$ (hipótese já assumida ao se escrever v como função apenas de x). Além disso, considera-se que o material não varia na seção transversal.

Portanto:

$$W_{int} = \int_x \left[E \frac{d^2}{dx^2} v(x) \frac{d^2}{dx^2} \delta v(x) \int_A (y^2 dA) \right] dx = \int_x E v''(x) \delta v''(x) I dx . \quad (1.18)$$

Embora o trabalho interno tenha sido completamente definido, ainda resta definir o trabalho externo com os esforços compatíveis. Para tal, identifica-se na 1.15 que

$$\int_A \sigma_x y dA = M_x \quad (1.19)$$

assim

$$\int_x -M_x \left[\left(\frac{d^2}{dx^2} \delta v(x) \right) \right] dx \quad (1.20)$$

a qual, após ser integrada por partes duas vezes, obtém-se

$$- \int_x M_x'' \delta v(x) dx + M_x'(L) \delta v(L) - M_x'(0) \delta v(0) - M_x(0) \delta v'(0) + M_x(L) \delta v'(L) . \quad (1.21)$$

A equação acima indica que os esforços compatíveis com as hipóteses de Euler-Bernoulli são uma força distribuída $q(x)$ (visto que $q(x) = M_x''(x)$), forças concentradas P (pois $P = M_x'$) e momentos concentrados M . Desse modo, o trabalho externo é dado por

$$W_{ext} = \int_x q(x) \delta v(x) dx + P(L) \delta v(L) + P(0) \delta v(0) + M_0 \delta v'(0) + M_L \delta v'(L) \quad (1.22)$$

de modo que a igualdade $W_{int} = W_{ext}$ é escrita como

$$\int_x E v''(x) \delta v''(x) I dx = \int_x q(x) \delta v(x) dx + P(L) \delta v(L) + P(0) \delta v(0) + M_0 \delta v'(0) + M_L \delta v'(L) . \quad (1.23)$$

Percebe-se que a equação acima leva a uma busca aproximada por solução, através do uso de funções approximativas. Considere-se, por exemplo, funções approximativas polinomiais da forma

$$v(x) = \alpha_i \phi_i(x) \quad (1.24a)$$

$$\delta v(x) = \delta \alpha_j \phi_j(x) \quad (1.24b)$$

de modo que a Equação 1.23 se escreve

$$\delta \alpha_j \left[\int_x E \phi_i'' \phi_j'' I dx \right] \alpha_i = \left[\int_x q(x) \phi_j dx + P_L \phi_j(L) + P_0 \phi_j(0) + M_0 \phi_j'(0) + M_L \phi_j'(L) \right] \delta \alpha_j \quad (1.25)$$

que, removendo $\delta\alpha_j$ da equação e observando que se tem um sistema linear de equações, se tem

$$\left[\int_x E\phi_i''\phi_j'' I dx \right] \alpha_i = \int_x q(x)\phi_j dx + P_L\phi_j(L) + P_0\phi_j(0) + M_0\phi_j'(0) + M_L\phi_j'(L) \quad (1.26a)$$

$$\mathbf{K}_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{F}_j \quad (1.26b)$$

2 Resoluções dos exercícios propostos

Neste tópico, serão apresentadas as resoluções dos exercícios propostos no terceiro trabalho, as quais seguirão a ordenação aqui descrita. Inicialmente, a equação do PTV será explicitada para o problema em questão, escrevendo a forma correspondente para W_{int} e W_{ext} . Cada parcela inclusa no trabalho das forças externas e internas será propriamente justificada, sempre se referindo às equações apresentadas anteriormente na Seção 1.1. A partir desta serão adotadas funções aproximativas para o campo real $v(x)$ e virtual $\delta v(x)$, a partir da abordagem de Galerkin, a qual se resume em utilizar funções iguais para $v(x)$ e $\delta v(x)$. As soluções funções aproximadoras serão consideradas na forma de polinômios, inicialmente de 3.^a e então de 4.^a ou 5.^a ordem, para ser recuperada a solução analítica do problema para a aproximação de elevada ordem. Por fim, serão adotados valores numéricos para ambas ordens de aproximação de modo a se visualizar os resultados, os quais serão propriamente discutidos individualmente para cada caso.

2.1 Exercício 1

- Obtenha duas soluções aproximadas para o deslocamento transversal da viga indicada na Figura 2. Para cada solução, apresente a relação para o cálculo do momento fletor e analise sua representatividade comparando com a solução exata.**

Inicia-se a análise do problema escrevendo-se as equações para os trabalhos virtuais internos e externos, W_{int} e W_{ext} . Em função da inexistência de molas no sistema, a única parcela que realizará trabalho interno na estrutura é a referente à flexão da barra. Com relação ao

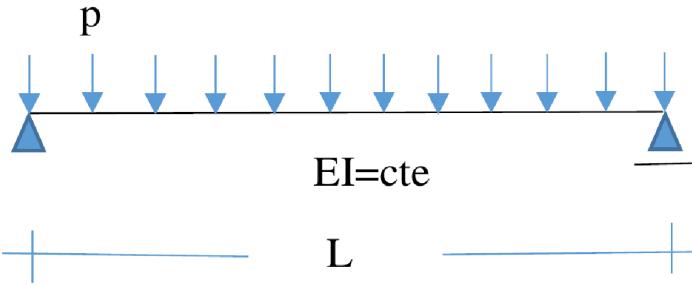


Figura 2 – Viga Bi-Apoiada sujeita a carregamento distribuído.

trabalho externo, o único esforço externo atuante na estrutura é o carregamento distribuído.

Assim, as parcelas W_{int} e W_{ext} são dadas por

$$W_{int} = \int_0^L \left(EI \frac{d^2}{dx^2} \delta v(x) \frac{d^2}{dx^2} v(x) \right) dx \quad (2.1)$$

e

$$W_{ext} = \int_0^L q \delta v(x) dx \quad (2.2)$$

Portando, a equação do PTV toma a seguinte forma

$$\int_0^L \left(EI \frac{d^2}{dx^2} \delta v(x) \frac{d^2}{dx^2} v(x) \right) dx = \int_0^L q \delta v(x) dx \quad . \quad (2.3)$$

Construída a equação do PTV, pode-se prosseguir para a adoção das funções aproximativas para se buscar a solução aproximada da forma fraca. Os valores numéricos indicados na Tabela 1 serão ao final adotados para se realizar a plotagem dos gráficos da função aproximativa $v(x)$, assim como do momento fletor $M(x)$ para ambas ordens de aproximação.

Tabela 1 – Dados do exercício 1.

L (m)	E (Pa)	I (m^4)	q (N/m)
1.0	210.0×10^9	1.0×10^{-6}	1000

2.1.1 Função aproximativa de 3.^a ordem

Inicialmente, almejando-se encontrar a solução aproximada para a forma fraca do PTV indicada anteriormente, adota-se um polinômio de 3.^a ordem como função aproximativa, de modo que o campo real e virtual se tornam, respectivamente,

$$v(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \quad (2.4)$$

e

$$\delta v(x) = \delta\alpha_0 + \delta\alpha_1 x + \delta\alpha_2 x^2 + \delta\alpha_3 x^3 . \quad (2.5)$$

A seguir, deve-se impor as condições de contorno a $v(x)$, onde, visto que o campo virtual deve ser homogêneo em Γ_u , $\delta v(x)$ também deverá respeitar as mesmas restrições. Para a barra bi-apoiada, são impostas duas condições de contorno essenciais nos apoios. Inicialmente, os apoios restringem o movimento vertical dos apoios, de modo que $v(0) = 0$ e $v(L) = 0$.

Assim

$$v(0) = 0 \rightarrow \alpha_0 = 0 \quad (2.6a)$$

$$v(L) = 0 \rightarrow \alpha_1 = -\left(L^2\alpha_3 + L\alpha_2\right) \quad (2.6b)$$

de modo que, o polinômio $v(x)$ com as condições essenciais de contorno se escreve como

$$v(x) = -L^2\alpha_3x - L\alpha_2x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3 \quad (2.7)$$

E o PTV se escreve com as funções aproximativas como

$$W_{int} = \int_0^L \left(-EI \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} (-L^2\alpha_3x - L\alpha_2x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3) \right)^2 \right) dx \quad (2.8)$$

$$W_{ext} = \int_0^L q (-L^2\alpha_3x - L\alpha_2x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3) dx \quad (2.9)$$

Escrevendo a função approximativa como uma combinação $\alpha_i\phi_i$, se tem

$$\phi_0(x) = 0 \quad (2.10a)$$

$$\phi_1(x) = 0 \quad (2.10b)$$

$$\phi_2(x) = x(-L + x) \quad (2.10c)$$

$$\phi_3(x) = x(-L^2 + x^2) \quad (2.10d)$$

Assim, fazendo-se o uso da Equação 1.26b, obtém-se a seguinte matriz dos coeficientes e o vetor de forças do problema

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4EIL & 6EIL^2 \\ 0 & 0 & 6EIL^2 & 12EIL^3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{L^3q}{6} \\ -\frac{L^4q}{4} \end{bmatrix} . \quad (2.11)$$

A partir da matriz \mathbf{K} dos coeficientes α_i e do vetor de forças \mathbf{F} , resolve-se o sistema linear de equações dado pela Equação 1.26b, na qual se obtém a solução

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{L^2 q}{24 EI} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

a qual permite reescrever a função aproximativa $v(x)$ como

$$v(x) = -\frac{L^2 q x (-L + x)}{24 EI}. \quad (2.13)$$

Adotando valores numéricos indicados na Tabela 1 obtém-se a solução do problema, indicada na Figura 3.

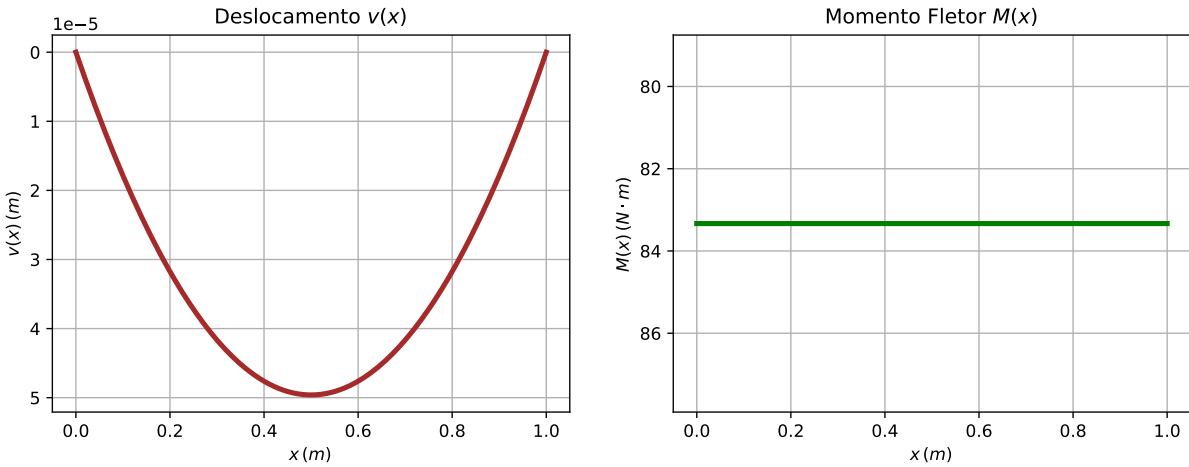


Figura 3 – Solução do exercício 1 - Função approximativa de 3.^a ordem.

Agora, analiza-se a representatividade da resposta obtida. Para tal, nota-se que as equações diferenciais que governam o problema são

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = q(x) \rightarrow -EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} = q(x) \quad (2.14)$$

as quais, para $q(x)$ constante, indicam que, primeiramente, que a solução para o campo de deslocamentos $v(x)$ recupera a solução exata para um polinômio com quarta derivada constante e, segundo, que a função que descreve $M(x)$ deve ser de grau 2. Analisando a Figura 3 imediatamente se conclui que a solução não é satisfatória, visto que esta não

respeita as condições naturais de momentos nulos nos apoios. A equação para o momento fletor é dada por

$$M(x) = -EI \frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{qL^2}{12} . \quad (2.15)$$

Sabe-se que a solução exata para o problema é $M(x) = \frac{qx}{2}(L-x)$, de modo que $M(0) = 0kNm$, $M(L) = 0kNm$ e $M(0.5) = 125kNm$ e a solução constante obtida de $83kNm$ representa a média da solução exata ao longo da barra.

2.1.2 Função aproximativa de 5^a ordem

Na questão anterior foi apresentada a equação diferencial governante do problema, a saber, $-EI \frac{d^4v(x)}{dx^4} = q(x)$, de modo que a escolha de um polinômio aproximador de quarto grau consegue recuperar a solução exatada do problema. Porém, por um motivo que será observado ao final do problema, decidiu-se por utilizar um polinômio de grau superior, ou seja, de grau 5. Assim, as funções aproximativas são

$$\alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3 + \alpha_4x^4 + \alpha_5x^5 \quad (2.16)$$

$$\delta\alpha_0 + \delta\alpha_1x + \delta\alpha_2x^2 + \delta\alpha_3x^3 + \delta\alpha_4x^4 + \delta\alpha_5x^5 \quad (2.17)$$

que, aplicando as condições de contorno essenciais indicadas na seção anterior, a saber, $v(0) = 0$ e $v(L) = 0$ se tem

$$v(0) = 0 \rightarrow \alpha_0 = 0 \quad (2.18a)$$

$$v(L) = 0 \rightarrow \alpha_1 = -\left(L^4\alpha_5 + L^3\alpha_4 + L^2\alpha_3 + L\alpha_2\right) \quad (2.18b)$$

de modo que, a função aproximativa $v(x)$ toma a seguinte forma:

$$v(x) = -L^4\alpha_5x - L^3\alpha_4x - L^2\alpha_3x - L\alpha_2x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3 + \alpha_4x^4 + \alpha_5x^5 \quad (2.19)$$

Assim, o PTV com as soluções aproximadas é dado por:

$$W_{int} = \int_0^L \left(EI \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} (-L^4\alpha_5x - L^3\alpha_4x - L^2\alpha_3x - L\alpha_2x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3 + \alpha_4x^4 + \alpha_5x^5) \right)^2 \right) dx \quad (2.20)$$

e

$$W_{ext} = \int_0^L q \left(-L^4\alpha_5x - L^3\alpha_4x - L^2\alpha_3x - L\alpha_2x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3 + \alpha_4x^4 + \alpha_5x^5 \right) dx \quad (2.21)$$

Extraindo das funções aproximativas as funções na forma $\alpha_i\phi_i$, se tem

$$\phi_0(x) = 0 \quad (2.22a)$$

$$\phi_1(x) = 0 \quad (2.22b)$$

$$\phi_2(x) = x(-L + x) \quad (2.22c)$$

$$\phi_3(x) = x(-L^2 + x^2) \quad (2.22d)$$

$$\phi_4(x) = x(-L^3 + x^3) \quad (2.22e)$$

$$\phi_5(x) = x(-L^4 + x^4) \quad (2.22f)$$

e, recorrendo à Equação 1.26b, obtém-se a matriz \mathbf{K} dos coeficientes e o vetor de forças \mathbf{F} :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4EI & 6EI & 8EI & 10EI \\ 0 & 0 & 6EI & 12EI & 18EI & 24EI \\ 0 & 0 & 8EI & 18EI & \frac{144EI}{5} & 40EI \\ 0 & 0 & 10EI & 24EI & 40EI & \frac{400EI}{7} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{L^3q}{6} \\ -\frac{L^4q}{4} \\ -\frac{3L^5q}{10} \\ -\frac{L^6q}{3} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

de modo que se obtém a solução para os coeficientes α da solução aproximativa

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{Lq}{12EI} \\ \frac{q}{24EI} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

de modo que, pode-se reconstruir o polinômio adotado para a aproximação da seguinte forma

$$v(x) = -\frac{Lqx(-L^2 + x^2)}{12EI} + \frac{qx(-L^3 + x^3)}{24EI} \quad . \quad (2.25)$$

Agora, assim como realizado para a aproximação de ordem cúbica, adotam-se os valores numéricos indicados na Tabela 1, obtendo-se a solução indicada na Figura 4.

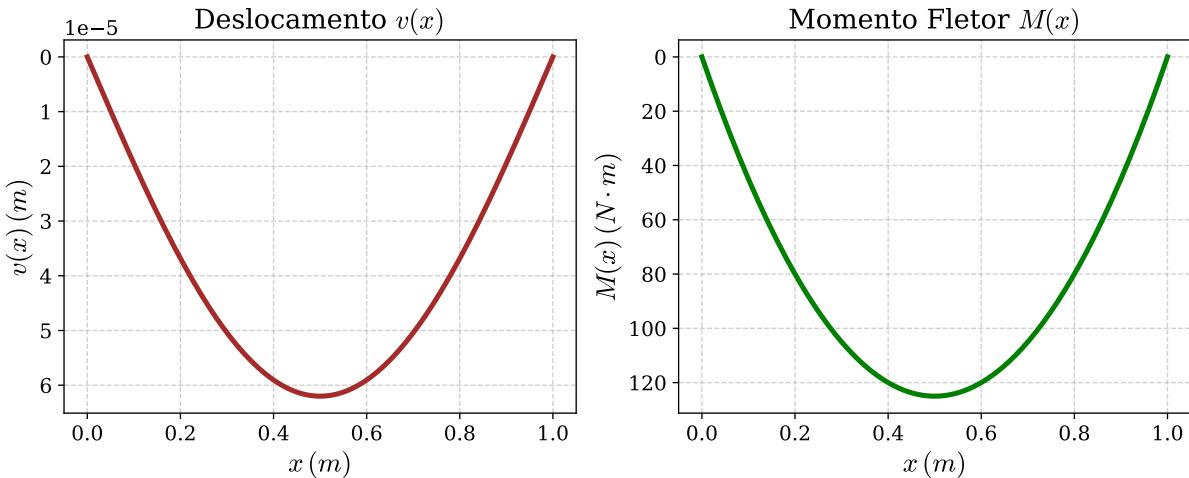


Figura 4 – Solução do exercício 1.

Aqui, assim como na última resolução, beneficia-se em avaliar a representatividade da solução para com a exata. A equação do momento fletor é dada por

$$M(x) = -EI \frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{q}{2} (xL - x^2) \quad (2.26)$$

Percebe-se que, para o polinômio aproximativo de ordem cônica a solução aproximada recupera a solução exata de $M(x)$, a saber, $M(0) = 0kNm$, $M(L) = 0kNm$ e $M(0.5) = 125kNm$.

Finalmente, como comentado ao início da resolução do problema, a escolha de um polinômio aproximativo de ordem 4 bastaria para resgatar a solução exata. Porém, nota-se que, embora o polinômio escolhido tenha sido de grau 5, a última parcela do polinômio, $\alpha_5\phi_5$, se torna desnecessária, e a própria solução do sistema leva a tal conclusão, onde se encontra $\alpha_5 = 0$.

2.2 Exercício 2

- Obtenha duas soluções aproximadas para o deslocamento transversal e para a distribuição de momento fletor da viga indicada na Figura 5. O vínculo à esquerda é um engaste fixo. Faça uma análise do efeito da mola, em particular recuperando os casos extremos de vinculação.

Inicia-se o problema em questão definindo-se as expressões para o trabalho interno

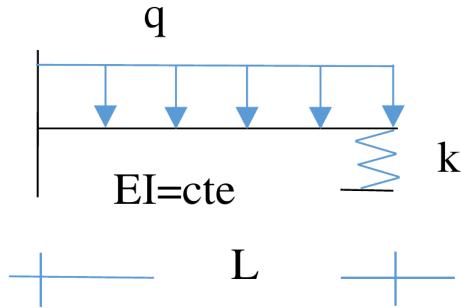


Figura 5 – Viga Engastada-Apoiada sob mola, sujeita a carregamento distribuído.

e para o externo. Diferentemente do problema anterior, onde a única parte da estrutura que contribui ao trabalho interno é a própria barra, no exemplo agora em questão há uma mola. Considerando-se a mola como parte constituinte da estrutura, tal parcela deve ser considerada na definição do trabalho virtual interno W_{int} . Assim, se tem

$$W_{int} = \int_0^L \left(EI \frac{d^2}{dx^2} \delta v(x) \frac{d^2}{dx^2} v(x) \right) dx + kv(L)\delta v(L) \quad (2.27)$$

e

$$W_{ext} = \int_0^L q\delta v(x) dx \quad (2.28)$$

Embora a contribuição da mola seja considerada na parcela W_{int} , esta poderia ser considerada parte externa à estrutura, de modo que seria tratada como uma força aplicada, portanto, contribuindo na parcela W_{ext} , porém com o sinal trocado em função de, neste caso, a força ser externa, e não interna, de modo que seu sentido é oposto. Assim, a igualdade do PTV se escreve como

$$\int_0^L \left(EI \frac{d^2}{dx^2} \delta v(x) \frac{d^2}{dx^2} v(x) \right) dx + kv(L)\delta v(L) = \int_0^L q\delta v(x) dx \quad (2.29)$$

Finalmente, assim como no exemplo anterior, são adotados valores numéricos ao final da resolução do problema de modo a serem plotados gráficos das respostas aproximadas para $v(x)$ e $M(x)$, para ambas ordens approximativas. Os valores numéricos indicados na Tabela 2 são os mesmos indicados na Tabela 1, apenas com a adição do valor da constante de mola k .

Aqui, diferentemente da questão anterior, serão adotadas as aproximações de 3^a e 4^a ordens, de modo a se simplificar a resolução, visto que esta se mostrou demasiadamente complexa para o caso de aproximação de 5^a ordem.

Tabela 2 – Dados do exercício 2.

L (m)	E (Pa)	I (m^4)	q (N/m)	k (N/m)
1.0	210.0×10^9	1.0×10^{-6}	1000	5.0×10^7

2.2.1 Função approximativa de 3^a ordem

Inicia-se a resolução do problema adotando-se funções polinômias para a aproximação dos campos reais e virtuais, $v(x)$ e $\delta v(x)$, respectivamente.

$$v(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \quad (2.30\text{a})$$

$$\delta v(x) = \delta \alpha_0 + \delta \alpha_1 x + \delta \alpha_2 x^2 + \delta \alpha_3 x^3 \quad (2.30\text{b})$$

Para o problema em questão, as condições de contorno essenciais a serem respeitadas são a condição de deslocamento vertical no engaste juntamente à imposição de que o giro seja zero, ou seja, $v(0) = 0$ e $v'(0) = 0$. Como já indicado anteriormente no texto, a abordagem adotada é a de Galerkin, de modo que o campo virtual tem a mesma forma que o campo real (homogênea), de modo que:

$$v(0) = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_0 = 0 \quad (2.31\text{a})$$

$$v'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 \quad (2.31\text{b})$$

$$v'(0) = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_1 = 0 \quad (2.31\text{c})$$

de modo que $v(x)$ toma a seguinte forma:

$$v(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \quad (2.32)$$

Assim, a equação do PTV após inserção das funções approximativas toma a seguinte forma

$$W_{int} = \int_0^L \left(-EI \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3) \right)^2 \right) dx + k\delta v(L)v(L) \quad (2.33)$$

$$W_{ext} = \int_0^L q (\alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3) dx \quad (2.34)$$

Escrevendo $v(x)$ como uma combinação linear de forma $\alpha_i \phi_i$, se tem

$$\phi_0(x) = 0 \quad (2.35\text{a})$$

$$\phi_1(x) = 0 \quad (2.35b)$$

$$\phi_2(x) = x^2 \quad (2.35c)$$

$$\phi_3(x) = x^3 \quad (2.35d)$$

Assim, a partir Equação 1.26b, obtém-se a matriz dos coeficientes \mathbf{K} e o vetor de forças como \mathbf{F} :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4EI + L^4k & 6EIL^2 + L^5k \\ 0 & 0 & 6EIL^2 + L^5k & 12EIL^3 + L^6k \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{L^3q}{3} \\ \frac{L^4q}{4} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

que, resolvendo o sistema de equações lineares, se obtém

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{L^2q(30EI + L^3k)}{48EI(3EI + L^3k)} \\ \frac{Lq(-12EI - L^3k)}{48EI(3EI + L^3k)} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

E a função approximativa $v(x)$ fica dada por

$$v(x) = \frac{Lqx^2(L(30EI + L^3k) - x(12EI + L^3k))}{48EI(3EI + L^3k)} \quad (2.38)$$

Adotando os valores indicados na Tabela 2, são obtidos os gráficos de $v(x)$ e $M(x)$, indicados na Figura 6.

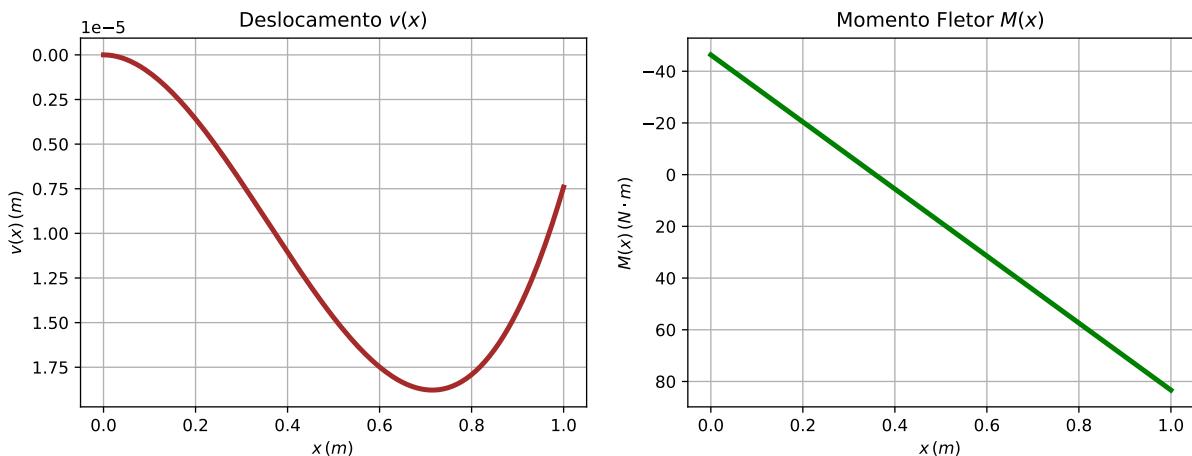


Figura 6 – Solução do exercício 2.

Finalmente, é de interesse avaliar a solução para casos limites da rigidez da mola, ou seja, uma rigidez nula ou muito elevada, casos ilustrados nas Figuras 7a e 7b. Para a mola com $k \rightarrow 0$, o problema converge para o caso de uma viga engastada e livre, enquanto para a mola com $k \rightarrow \infty$, o problema converge para a situação de uma viga engastada e apoiada. Ambas situações são corretamente capturadas pelos gráficos da solução $v(x)$, enquanto os gráficos de $M(x)$, pelo fato da solução exata exigir um polinômio de grau 4, capturarem apenas a média do momento fletor ao longo da viga. Aqui, compara-se a

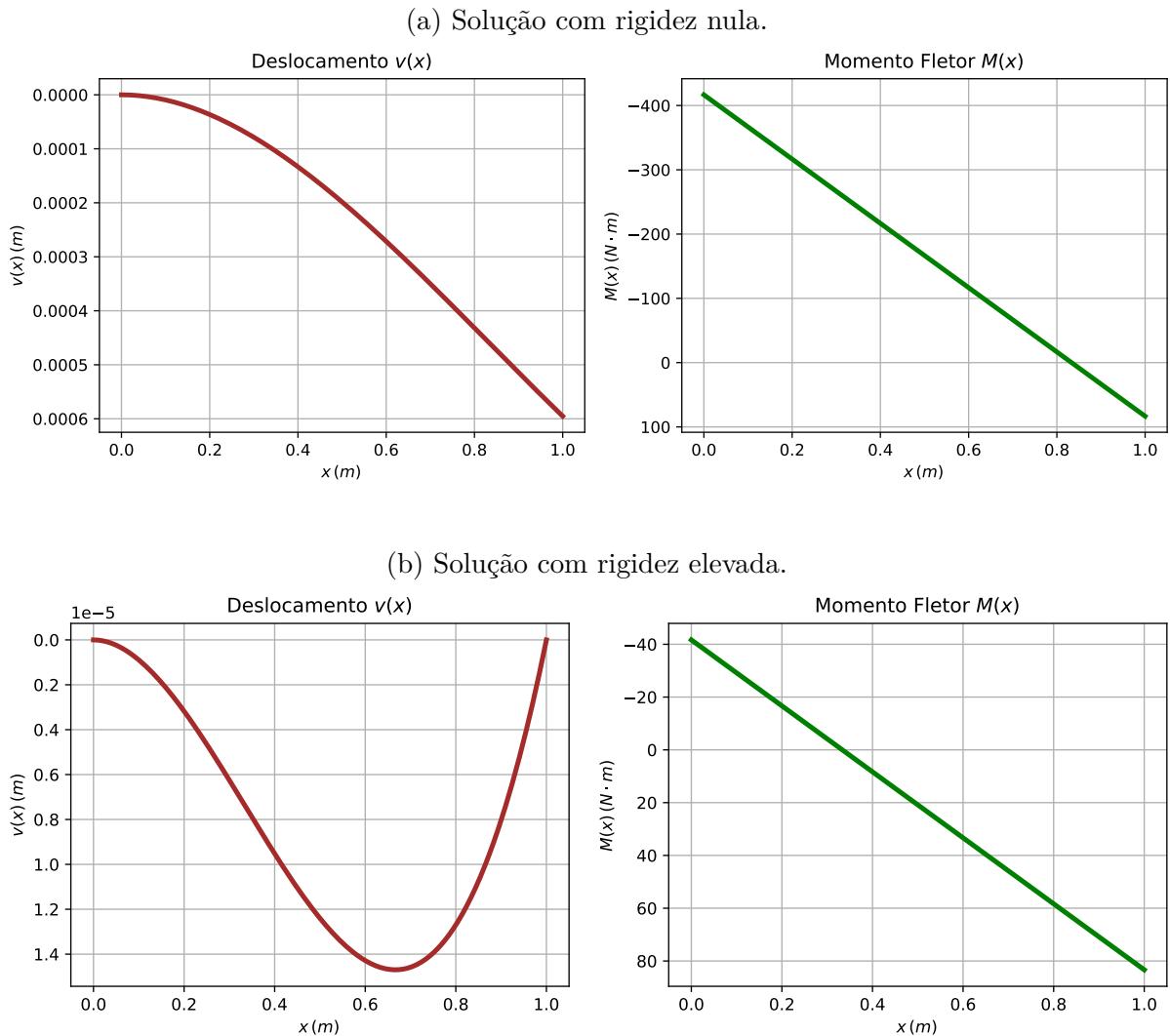


Figura 7 – Comparaçāo entre diferentes valores de rigidez

solução obtida à solução analítica do problema, dada por

$$w(x) = +\frac{q_0 x^4}{24EI} - \frac{q_0 L x^3}{6EI} + \frac{q_0 L^2 x^2}{4EI} + (x^3 - 3Lx^2) \frac{q_0 L^4}{48EI} \left(\frac{EI}{k} + \frac{L^3}{3} \right)^{-1} . \quad (2.39)$$

na qual, para o valor de k apresentado na Tabela 2 com os valores limites de $k = 0$ e $k \rightarrow \infty$ são obtidos os valores representados na Tabela 3. Percebe-se, avaliando os resultados que,

Tabela 3 – Comparaçāo dos valores de deslocamento para diferentes rigidezes de mola.

Posição (m)	$k = 5.0 \times 10^7 \text{ N/m}$	$k \rightarrow \infty$	$k = 0$
$x = 0.0$	0.0	0.0	0.0
$x = 0.5$	2.711×10^{-5}	2.480×10^{-5}	2.108×10^{-4}
$x = 1.0$	7.407×10^{-6}	0.0	5.953×10^{-4}

para o caso no qual a mola tem rigidez nula, ou seja, é inexistente, os resultados obtidos com a solução aproximada são iguais aos da solução analítica. Os resultados divergem, porém, ao considerar a mola no sistema, seja esta com rigidez finita ou infinita. Tal observação leva a uma melhor avaliação da Equação 2.39, que, sob consideração de $k = 0$, pode ser desenvolvida como

$$w(x) = \frac{q_0 x^2}{24EI} (6L^2 - 4Lx + x^2) \quad (2.40)$$

ou seja, na ausência da mola, a solução analítica é quadrática, motivo este o qual a solução aproximada de ordem cúbica consegue recuperar os resultados analíticos apenas para esse caso.

2.2.2 Função approximativa de 4^a ordem

Agora, assim como no problema anterior, adotando um polinômio de ordem superior, se tem

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 \quad (2.41)$$

$$\delta\alpha_0 + \delta\alpha_1 x + \delta\alpha_2 x^2 + \delta\alpha_3 x^3 + \delta\alpha_4 x^4 + \delta\alpha_5 x^5 \quad (2.42)$$

Como indicado no item anterior, as condições de contorno essênciais a serem impostas às soluções aproximadas são

$$v(0) = 0 \rightarrow \alpha_0 = 0 \quad (2.43a)$$

$$v' = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + 4\alpha_4 x^3 + 5\alpha_5 x^4 \quad (2.43b)$$

$$v'(0) = 0 \rightarrow \alpha_1 = 0 \quad (2.43c)$$

de modo que, a solução aproximativa já com as condições de contorno toma a forma

$$v(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 . \quad (2.44)$$

Assim, o PTV com as soluções aproximadas é dado por:

$$W_{int} = \int_0^L \left(EI \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4) \right)^2 \right) dx k \delta v(L) v(L) \quad (2.45)$$

e

$$W_{ext} = \int_0^L q (\alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4) dx \quad (2.46)$$

Agora, extraindo as bases do polinômio approximativo a partir na forma $\alpha_i \phi_i$, se tem

$$\phi_0(x) = 0 \quad (2.47a)$$

$$\phi_1(x) = 0 \quad (2.47b)$$

$$\phi_2(x) = x^2 \quad (2.47c)$$

$$\phi_3(x) = x^3 \quad (2.47d)$$

$$\phi_4(x) = x^4 \quad (2.47e)$$

Basta então calcular $\phi_i''(x)$ e avaliar as integrais e o termo de mola em $x = L$

$$K_{ij} = \int_0^L EI \phi_i''(x) \phi_j''(x) dx + k \phi_i(L) \phi_j(L) \quad (i, j = 2, 3, 4). \quad (2.48)$$

Que, fazendo o uso da Equação 1.26b, obtém-se a matriz dos coeficientes e o vetor de forças como:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4EIL + L^4k & 6EIL^2 + L^5k & 8EIL^3 + L^6k \\ 0 & 0 & 6EIL^2 + L^5k & 12EIL^3 + L^6k & 18EIL^4 + L^7k \\ 0 & 0 & 8EIL^3 + L^6k & 18EIL^4 + L^7k & \frac{144EIL^5}{5} + L^8k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{L^3q}{3} \\ \frac{L^4q}{4} \\ \frac{L^5q}{5} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

A solução do sistema linear apresentado na Equação 1.26b com a matriz \mathbf{K} e o vetor \mathbf{F} é dada por:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{L^2 q (12EI + L^3 k)}{16EI(3EI + L^3 k)} \\ \frac{Lq(-24EI - 5L^3 k)}{48EI(3EI + L^3 k)} \\ \frac{q}{24EI} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

de modo que, finalmente, se obtém a solução do problema como

$$v(x) = \frac{qx^2 (L(3L(12EI + L^3 k) - x(24EI + 5L^3 k)) + 2x^2(3EI + L^3 k))}{48EI(3EI + L^3 k)} \quad (2.51)$$

Agora, assim como nos exemplos anteriores, faz-se o uso de valores numéricos de forma a representar graficamente a solução obtida. Substituindo os valores numéricos indicados na Tabela 2, obtém-se a solução do problema, indicada na Figura 8. Aqui, novamente se

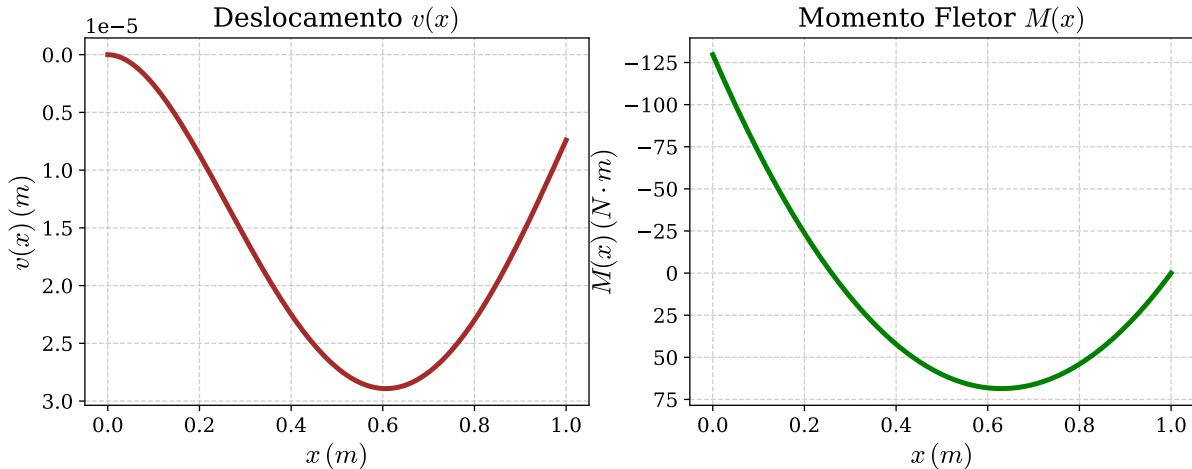


Figura 8 – Solução do exercício 1.

beneficia em se comparar a solução obtida com a solução analítica do problema. A solução analítica do problema é dada por

Considerando-se, assim como na solução anterior, valores limites de rigidez, ou seja, nula ou muito elevada, são obtidas as soluções ilustradas nas Figuras 9a e 9b. Aqui, uma vez construída a solução aproximada de 4ª ordem, vale comparar os resultados obtidos com esta com os resultados obtidos a partir da solução analítica, apresentados na Tabela 3. Pode-se observar que, como na presença da mola a solução do problema é de quarta ordem,

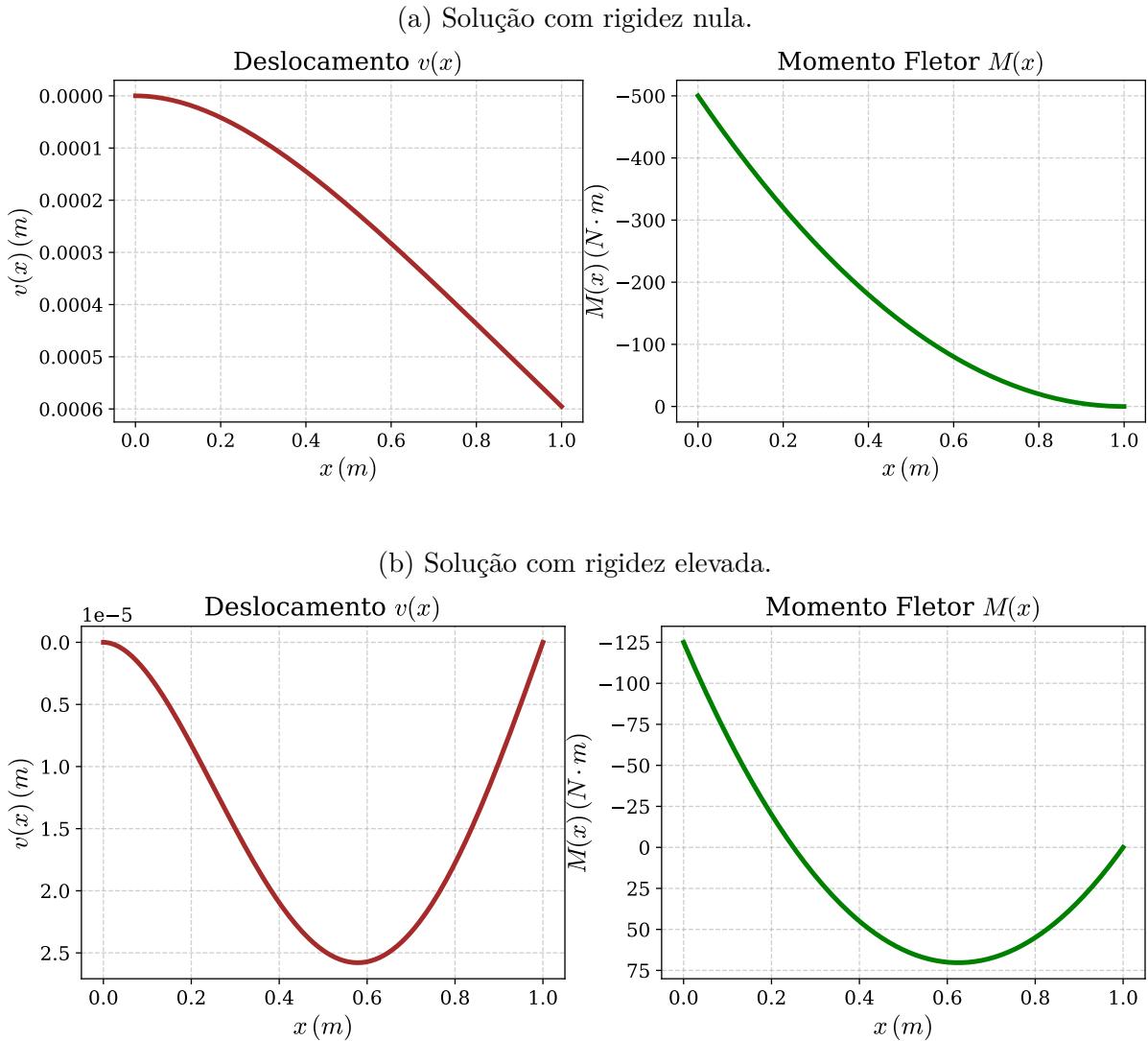


Figura 9 – Comparação entre diferentes valores de rigidez

como esperado, a solução aproximativa também de quarta ordem consegue recuperar a solução exata.

2.3 Exercício 3

- Obtenha duas soluções aproximadas para o deslocamento transversal da viga sob base elástica indicada na Figura 10. Mostre que o caso 1) está contido na solução para $k = 0$. Obs: a mola é distribuída por unidade de comprimento.

Novamente, inicia-se a análise do problema definindo as parcelas referentes ao

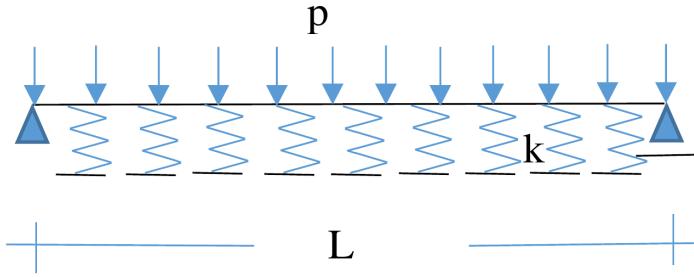


Figura 10 – Viga Bi-Apoiada sob mola distribuída, sujeita a carregamento distribuído.

trabalho interno e externos. Similarmente ao problema anterior, o trabalho interno terá uma parcela em decorrência da mola, porém em decorrência de uma mola distribuída. Assim, realizando a integral do trabalho interno da barra juntamente com o da mola distribuída, ao longo do comprimento da barra, se tem o trabalho interno dado por

$$W_{int} = \int_0^L \left(EI \frac{d^2}{dx^2} \delta v(x) \frac{d^2}{dx^2} v(x) \right) dx + \int_0^L (k_d \delta v(x) v(x)) dx . \quad (2.52)$$

O trabalho externo será dado apenas pela integral da força distribuída ao longo do comprimento da barra, dado por

$$W_{ext} = \int_0^L q \delta v(x) dx \quad (2.53)$$

Aqui novamente se repete os valores numéricicos da Tabela 1 na Tabela 4, apenas com a adição do valor da constante de mola distribuída k_d . Estes serão ao final adotados para se realizar a plotagem do gráfico da função approximativa $v(x)$, assim como do momento fletor $M(x)$ para ambas ordens approximativas.

Tabela 4 – Dados do exercício 3.

L (m)	E (Pa)	I (m^4)	q (N/m)	k_d (N/ m^2)
1.0	210.0×10^9	1.0×10^{-6}	1000	5.0×10^7

2.3.1 Função approximativa de 3.^a ordem.

Inicia-se a resolução do problema adotando-se funções polinômias cúbicas para a aproximação dos campos reais e virtuais, $v(x)$ e $\delta v(x)$, respectivamente.

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \quad (2.54a)$$

$$\delta\alpha_0 + \delta\alpha_1 x + \delta\alpha_2 x^2 + \delta\alpha_3 x^3 \quad (2.54b)$$

Para o problema em questão, as condições de contorno essênciais a serem respeitadas são as mesmas do problema 1, $v(0) = 0$ e $v(L) = 0$. Como já indicado anteriormente no texto, a abordagem adotada é a de Galerkin, de modo que o campo virtual tem a mesma forma que o campo real (homogênea), de modo que:

$$v(0) = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_0 = 0 \quad (2.55a)$$

$$v(L) = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_1 = -L^2\alpha_3x - L\alpha_2x \quad (2.55b)$$

Assim, a função aproximativa $v(x)$ se escreve

$$v(x) = -L^2\alpha_3x - L\alpha_2x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3 \quad (2.56)$$

e o PTV, com as funções approximativas toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} W_{int} &= \int_0^L \left(-EI \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} (-L^2\alpha_3x - L\alpha_2x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3) \right)^2 \right) dx \\ &\quad + \int_0^L \left(k_d (-L^2\alpha_3x - L\alpha_2x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3)^2 \right) dx \end{aligned} \quad (2.57)$$

e

$$W_{ext} = \int_0^L q (-L^2\alpha_3x - L\alpha_2x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3) dx \quad (2.58)$$

Extraindo dos polinômios aproximadores as funções base ϕ_i , se tem

$$\phi_0(x) = 0 \quad (2.59a)$$

$$\phi_1(x) = 0 \quad (2.59b)$$

$$\phi_2(x) = x(-L + x) \quad (2.59c)$$

$$\phi_3(x) = x(-L^2 + x^2) \quad (2.59d)$$

de forma que, a partir da Equação 1.26b, se obtém a matriz \mathbf{K} e o vetor de forças \mathbf{F} como

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4EIL + \frac{L^5k_d}{30} & 6EIL^2 + \frac{L^6k_d}{20} \\ 0 & 0 & 6EIL^2 + \frac{L^6k_d}{20} & 12EIL^3 + \frac{8L^7k_d}{105} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{L^3q}{6} \\ -\frac{L^4q}{4} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

A qual resulta em um sistema linear de equações para os coeficientes α_i do polinômio approximador. Resolvendo o sistema de equações lineares, obtém-se o vetor solução

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{5L^2q}{120EI+L^4k_d} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

de modo que a função approximativa pode ser escrita como

$$v(x) = -\frac{5L^2qx(-L+x)}{120EI+L^4k_d} \quad (2.62)$$

Finalmente, assim como nos exemplos anteriores, são adotados os valores numéricos indicados Tabela 4, para os quais a solução do problema é indicada na Figura 11. Aqui,

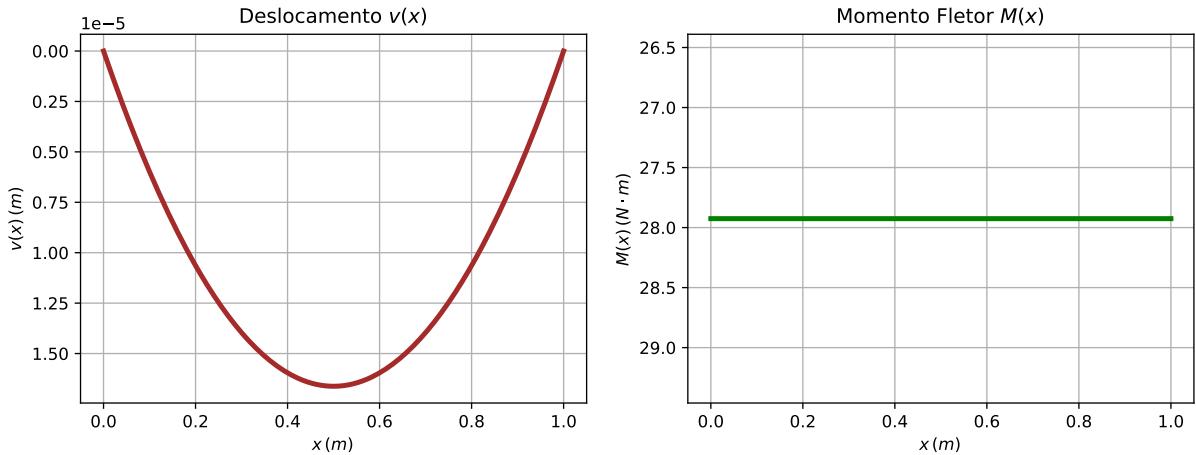


Figura 11 – Solução do exercício 3.

não se busca comparar a solução obtida com a solução analítica do problema, visto que esta possui um alto grau de dificuldade e não é correntemente apresentada na literatura. Porém, ainda pode-se avançar na exploração do problema ao considerar os casos limites, ou seja, uma rigidez nula ou muito elevada. Intuitivamente, espera-se que, para uma $k_d = 0$, o caso de uma viga bi-apoiada seja recuperado e, para $k_d \rightarrow \infty$ a viga não possua esforços internos, visto que estes serão imediatamente transmitidos à base rígida. Ambo casos ilustrados nas Figuras 12a e 12b

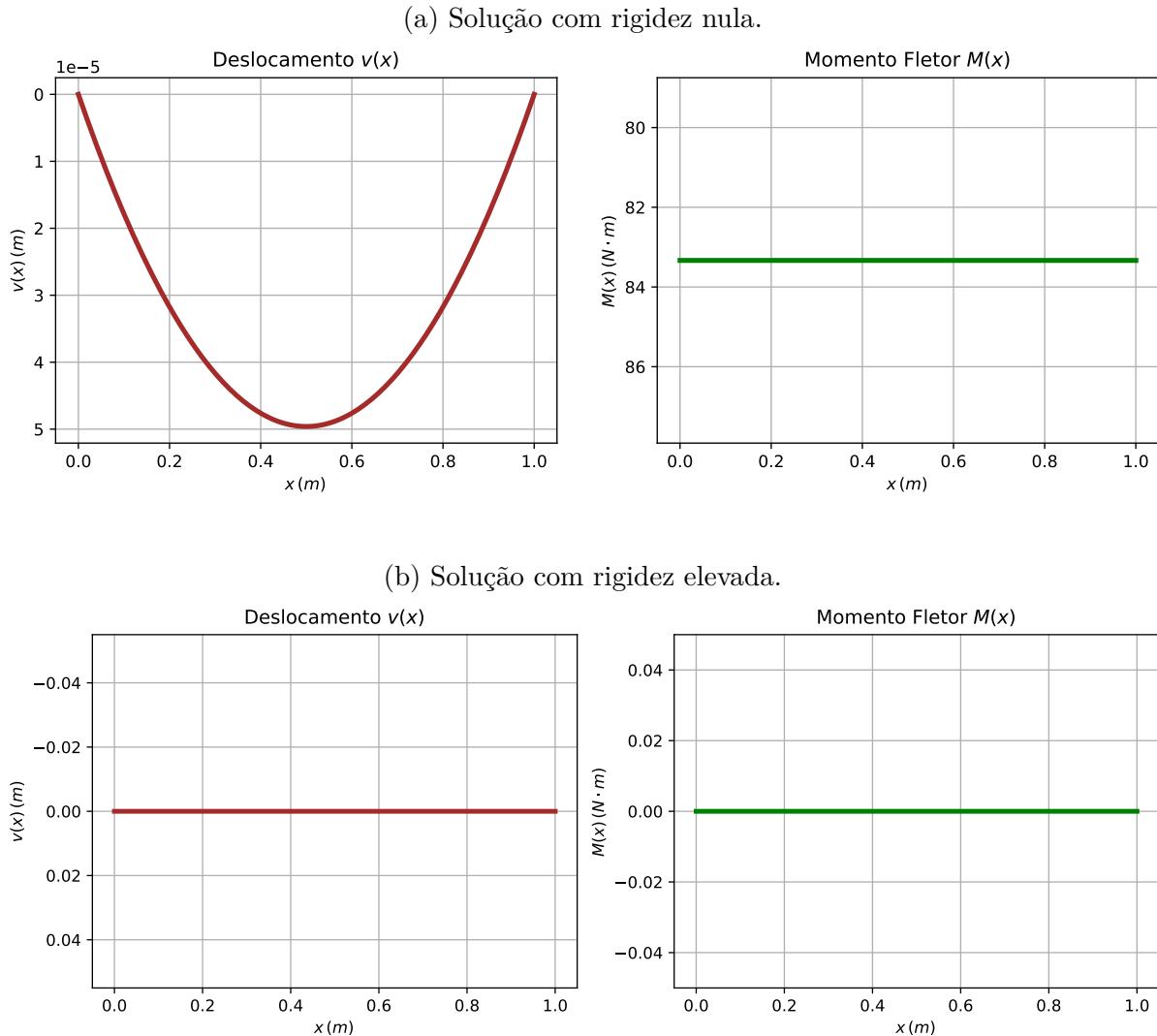


Figura 12 – Comparaçāo entre diferentes valores de rigidez.

2.3.2 Função approximativa de 4.^a ordem.

Agora, são adotadas funções polinômias de quarta ordem para a aproximação dos campos reais e virtuais, $v(x)$ e $\delta v(x)$, respectivamente

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 \quad (2.63a)$$

$$\delta\alpha_0 + \delta\alpha_1 x + \delta\alpha_2 x^2 + \delta\alpha_3 x^3 + \delta\alpha_4 x^4 \quad (2.63b)$$

Como comentado na solução anterior, as condições de contorno essênciais consideradas são $v(0) = 0$ e $v(L) = 0$. Como também já indicado anteriormente no texto, a abordagem adotada é a de Galerkin, de modo que o campo virtual tem a mesma forma que o campo

real (homogênea), de modo que:

$$v(0) = 0 \rightarrow \alpha_0 = 0 \quad (2.64a)$$

$$v(L) = 0 \rightarrow \alpha_1 = -L^3\alpha_4 - L^2\alpha_3 - L\alpha_2 \quad (2.64b)$$

De modo que, o polinômio aproximativo $v(x)$ já com as condições de contorno de Dirichlet se escreve como

$$v(x) = -L^3\alpha_4x - L^2\alpha_3x - L\alpha_2x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3 + \alpha_4x^4 , \quad (2.65)$$

assim, a relação do PTV se escreve, após a substituição como

$$\begin{aligned} W_{int} &= \int_0^L \left(-EI \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} (-L^3\alpha_4x - L^2\alpha_3x - L\alpha_2x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3 + \alpha_4x^4) \right)^2 \right) dx \\ &+ \int_0^L \left(k_d (-L^3\alpha_4x - L^2\alpha_3x - L\alpha_2x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3 + \alpha_4x^4)^2 \right) dx \end{aligned} \quad (2.66)$$

e

$$W_{ext} = \int_0^L q (-L^3\alpha_4x - L^2\alpha_3x - L\alpha_2x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3 + \alpha_4x^4) dx \quad (2.67)$$

Dado que a função aproximativa $v(x)$ é escrita como uma combinação $\alpha_i\phi_i(x)$, se tem que

$$\phi_0(x) = 0 \quad (2.68a)$$

$$\phi_1(x) = 0 \quad (2.68b)$$

$$\phi_2(x) = x(-L + x) \quad (2.68c)$$

$$\phi_3(x) = x(-L^2 + x^2) \quad (2.68d)$$

$$\phi_4(x) = x(-L^3 + x^3) \quad (2.68e)$$

Montando a matriz \mathbf{K} dos coeficientes α_i e o vetor de forças \mathbf{F} , como apresentado na Equação 1.26b, se tem

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4EIL + \frac{L^5k_d}{30} & 6EIL^2 + \frac{L^6k_d}{20} & 8EIL^3 + \frac{5L^7k_d}{84} \\ 0 & 0 & 6EIL^2 + \frac{L^6k_d}{20} & 12EIL^3 + \frac{8L^7k_d}{105} & 18EIL^4 + \frac{11L^8k_d}{120} \\ 0 & 0 & 8EIL^3 + \frac{5L^7k_d}{84} & 18EIL^4 + \frac{11L^8k_d}{120} & \frac{144EIL^5}{5} + \frac{L^9k_d}{9} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{L^3q}{6} \\ -\frac{L^4q}{4} \\ -\frac{3L^5q}{10} \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Resolvendo o sistema linear indicado pela Equação 1.26b, obtém-se a solução dada por

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{56L^6k_dq}{1693440E^2I^2+17472EIL^4k_d+L^8k_d^2} \\ \frac{84Lq(-1680EI+L^4k_d)}{1693440E^2I^2+17472EIL^4k_d+L^8k_d^2} \\ \frac{42q(1680EI-L^4k_d)}{1693440E^2I^2+17472EIL^4k_d+L^8k_d^2} \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

Finalmente, o polinômio aproximativo pode ser reconstruído, e $v(x)$ é dada por

$$v(x) = \frac{14qx(4L^6k_d(L-x)+6L(L^2-x^2)(1680EI-L^4k_d)-3(L^3-x^3)(1680EI-L^4k_d))}{1693440E^2I^2+17472EIL^4k_d+L^8k_d^2} \quad (2.71)$$

Dada a solução aproximativa de quarta ordem, é interessante comparar esta com a solução da barra simplesmente bi-apoiada, ou seja, a barra para $k_d = 0$. A equação anteriormente obtida, realizando a substituição de $k_d = 0$ toma a forma

$$v(x) = \frac{qx(L^3 - 2Lx^2 + x^3)}{24EI} \quad (2.72)$$

ou seja, percebe-se que, para $k_d = 0$, a solução da barra bi-apoiada é, de fato, recuperada.

Agora, adotando os valores indicados na Tabela 4, obtém-se o resultado ilustrado na Figura 13.

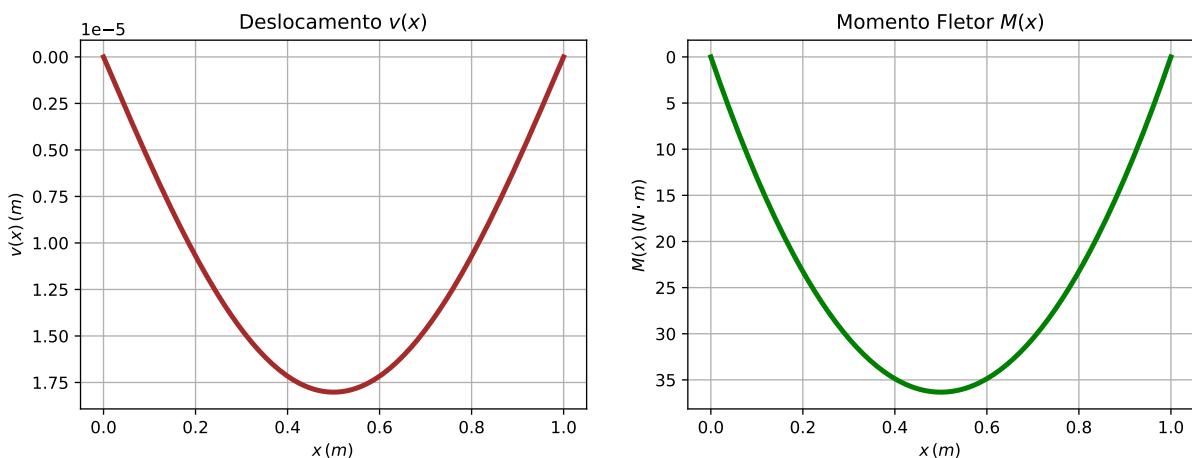


Figura 13 – Solução do exercício 3 para aproximação de quarta ordem.

Por fim, pode-se considerar casos limites, ou seja, uma rigidez nula ou muito elevada. Percebe-se que, para uma rigidez nula, a situação da Figura 2 deve ser recuperada,

enquanto, para $k_d \rightarrow \infty$, os esforços internos da viga devem ser nulos, visto que os carregamentos externos serão imediatamente transferidos à base rígida. Tais situações limites são ilustradas nas Figuras 14a e 14b, respectivamente. Percebe-se através dos

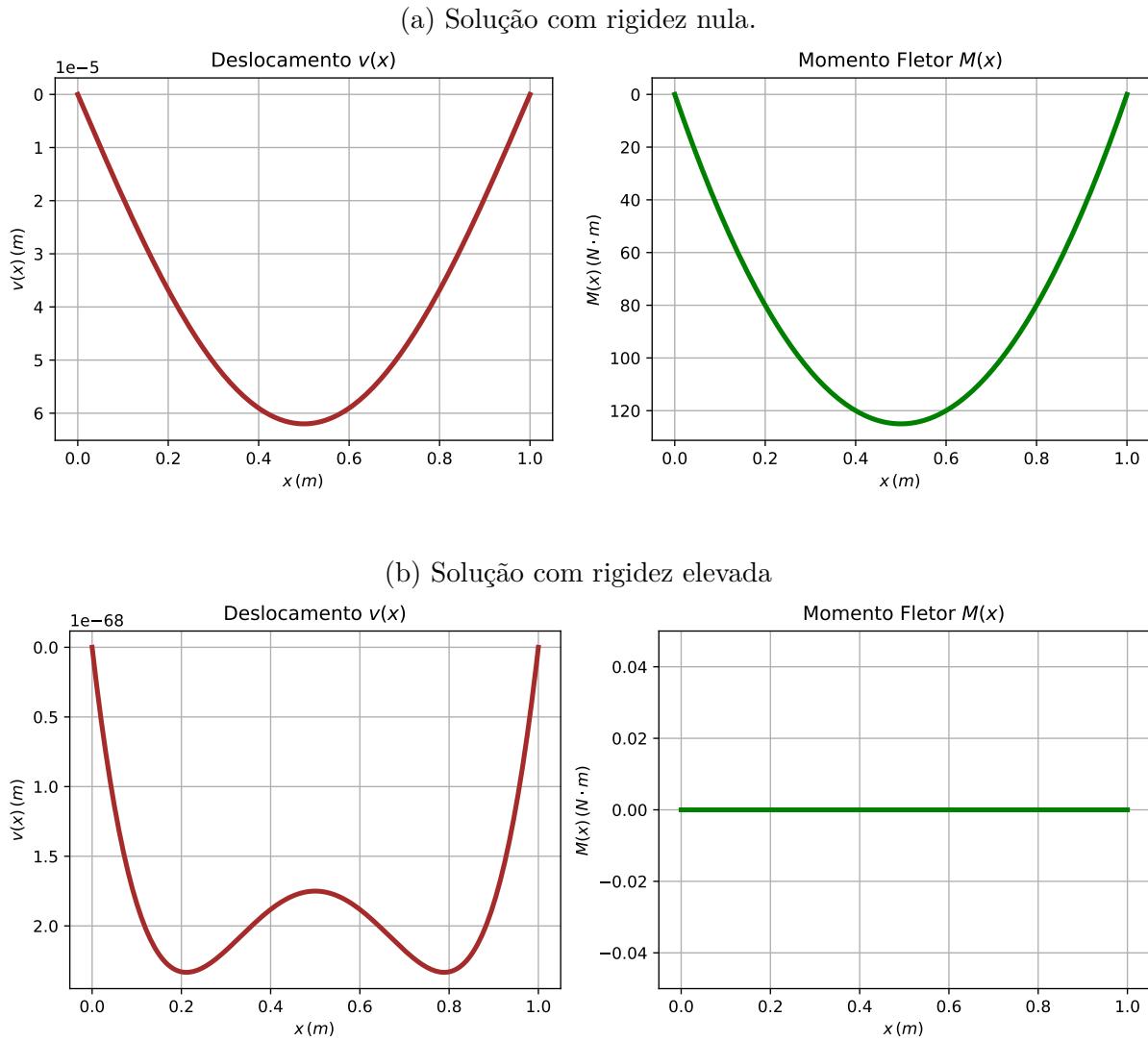


Figura 14 – Comparaçāo entre diferentes valores de rigidez.

gráficos que o polinômio de quarta ordem consegue recuperar a resposta analítica da estrutura.

3 Conclusão

O presente trabalho teve como objetivo apresentar o formalismo matemático do Princípio dos Trabalhos Virtuais que define que um corpo está equilibrado se a igualdade

entre trabalhos externos e internos for verificada. Através do princípio, foi possível obter o problema diferencial em sua forma integral (ou forma fraca) e, a partir desta, naturalmente buscar soluções aproximadas para o problema.

Através da resolução dos exercícios propostos, foi possível observar a importância do formalismo matemático na representação de problemas de Mecânica dos Sólidos, bem como a importância do formalismo tensorial na representação de tensões e deformações em um corpo deformável. A familiarização com o formalismo matemático permite ao pesquisador melhor compreender as teorias e modelos que envolvem a Mecânica dos Sólidos ao longo de sua formação como pesquisador.

Referências

- ANAND, Lallit; GOVINDJEE, Sanjay. **Continuum Mechanics of Solids**. 1. ed. [S.l.]: Oxford University PressOxford, jul. 2020. ISBN 978-0-19-886472-1 978-0-19-189676-7.
DOI: [10.1093/oso/9780198864721.001.0001](https://doi.org/10.1093/oso/9780198864721.001.0001). Disponível em:
<<https://academic.oup.com/book/43650>>. Acesso em: 30 set. 2024.
- LANCZOS, Cornelius. **The Variational Principles of Mechanics**. [S.l.]: Dover Publications, 2012. OCLC: 969061058. ISBN 978-0-486-13470-3.
- PROENÇA, Sergio Persival Baroncini. **Fundamentos Matemáticos das Mecânicas dos Sólidos e Estruturas**. 1. ed. [S.l.]: USP, mar. 2024. Acesso em: 2024.
- SPENCER, A. J. M. **Continuum mechanics**. Dover ed. Mineola, N.Y: Dover Publ, 2004. ISBN 978-0-486-43594-7.