Unidad 5: vectores y valores propios

1. Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, demuestre que si X es una matriz cuadrada no singular entonces A y $X^{-1}AX$ tienen el mismo polinomio característico.

   Demostración. Usaremos que la función $B \mapsto \det(B)$ es multiplicativa. Sean p_1, p_2 los polinomios característicos de A y $X^{-1}AX$, respectivamente. Entonces

$$
\begin{aligned}
p_2(t) &= \det(X^{-1}AX - tI) && (1)\\
&= \det(X^{-1}(AX - tX)) && (2)\\
&= \det(X^{-1}(A - tI)X) && (3)\\
&= \det(X^{-1})\det(A - tI)\det(X) && (4)\\
&= \frac{1}{\det(X)}\det(A - tI)\det(X) && (5)\\
&= \det(A - tI) && (6)\\
&= p_1(t). && (7)
\end{aligned}
$$

   Por lo tanto, A y $X^{-1}AX$ tienen el mismo polinomio característico. $\square$

2. Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y sus respectivos valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, demuestre que

$$\det(A) = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j. \tag{8}$$

   Demostración. Recordemos que A es diagonalizable sobre el campo de los complejos, por lo que existe una matriz invertible N con coeficientes complejos tal que

$$N^{-1}AN = D, \tag{9}$$

   donde

$$D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n). \tag{10}$$

Usaremos que la función $B \mapsto \det(B)$ es multiplicativa:

$$\begin{aligned}
\det(D) &= \det(N^{-1})\det(A)\det(N) && (11)\\
&= \frac{1}{\det(N)}\det(A)\det(N) && (12)\\
&= \det(A). && (13)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det(D) && (14)\\
&= \prod_{j=1}^{n} \lambda_j, && (15)
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se da porque el determinante de una matriz diagonal es igual al producto de las entradas de su diagonal. □

3.

4.

5. Muestre que los valores propios de una matriz simétrica con coeficientes reales de 2×2 son reales. ¿Cómo quedaría el resultado en general para una matriz simétrica con coeficientes en los reales de $n \times n$?

Demostración. Demostraré directamente que el resultado es cierto para matrices simétricas de $n \times n$ con coeficientes reales. Esta demostración se basa en el hecho de que una matriz simétrica con coeficientes reales es autoadjunta. Probaré este hecho:

Consideremos el siguiente producto hermitiano en $\mathbb{C}^n$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}. \tag{16}$$

Entonces

$$\langle Ax, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} (Ax)_j \overline{y_j} \tag{17}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (A_j \cdot x) \overline{y_j} \tag{18}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{jk} x_k \right) \overline{y_j} \tag{19}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{A_{jk} y_j} \quad \text{aquí se usa que } A \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{20}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{A_{kj} y_j} \quad \text{aquí se usa que A es simétrica} \tag{21}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_k \overline{A_{kj} y_j} \tag{22}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{j=1}^{n} \overline{A_{kj} y_j} \tag{23}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{(Ay)_k} \tag{24}$$
$$= \langle x, Ay\rangle \tag{25}$$

Por lo tanto, A es autoadjunta. De esta manera, consideremos un valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$ de A con un vector propio asociado $w \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Entonces

$$\lambda |w|^2 = \lambda \langle w, w\rangle \tag{26}$$
$$= \langle \lambda w, w\rangle \tag{27}$$
$$= \langle Aw, w\rangle \tag{28}$$
$$= \langle w, Aw\rangle \tag{29}$$
$$= \langle w, \lambda w\rangle \tag{30}$$
$$= \overline{\lambda} \langle w, w\rangle \tag{31}$$
$$= \overline{\lambda} |w|^2. \tag{32}$$

Como $w \neq 0$, se sigue que $\lambda = \overline{\lambda}$. Por lo tanto, $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

6. Calcule la descomposición de Schur de la matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{33}$$

Solución: Primero calculamos el polinomio característico de A:

$$\begin{aligned} p(t) &= t^2 - trAt + \det A \quad (34) \\ &= t^2 - 4t - 1 \quad (35) \\ &= \left(t - \left(2 + \sqrt{5}\right)\right)\left(t - \left(2 - \sqrt{5}\right)\right) \quad (36) \end{aligned}$$

Para encontrar un valor propio asociado a $\lambda_1 = 2 + \sqrt{5}$, resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} 0 &= (A - \lambda_1 I)v \quad (37) \\ &= \begin{pmatrix} -1-\sqrt{5} & 2 \\ 2 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (38) \\ &= \begin{pmatrix} -(1+\sqrt{5})x + 2y \\ 2x + (1-\sqrt{5})y \end{pmatrix}. \quad (39) \end{aligned}$$

Las dos ecuaciones de este sistema son equivalentes, por lo que nos podemos deshacer de la segunda y obtenemos

$$y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x. \tag{40}$$

Haciendo $x = 2$, obtenemos el vector propio

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \tag{41}$$

Para obtener un vector propio asociado a $\lambda_2 = 2 - \sqrt{5}$ basta conjugar v respecto a $\sqrt{5}$, obteniendo

$$w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \tag{42}$$

Notemos que (afortunadamente), v y w ya son ortogonales, por lo que para obtener una base ortonormal para $\mathbb{R}^2$ compuesta por vectores propios de A basta normalizar a v y w. Definimos

$$u_1 = \frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} \tag{43}$$

$$u_2 = \frac{w}{\|w\|} = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \tag{44}$$

De esta forma, si consideramos

$$Q = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \end{pmatrix} \tag{45}$$

y

$$D = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{5} \end{pmatrix} \tag{46}$$

entonces

$$A = QDQ^T, \tag{47}$$

esta es la factorización de Schur de A.

7.