Serie de Fourier

Actividad #11

Sumario: Desarrollos en series de funciones no periódicas. Desarrollos de funciones definidas en intervalos de longitud menor que el período deseado.

Objetivos

1. Operar con la series de Fourier, a partir de las definiciones y teoremas estudiados.
2. Aproximar funciones mediante series de Fourier.

Bibliografía

- Series Tomo II pág. 324-348.

Introducción

Uno de los requerimientos para realizar el desarrollo de una función en series de Fourier es que la función sea periódica. Sin embargo en la práctica aparecen problemas donde es necesario hacer un desarrollo en series de Fourier para funciones no periódicas (Flujo del calor a lo largo de una barra o la vibración de un resorte). La actividad práctica la dedicaremos al estudio cómo determinar el desarrollo de Fourier de una función no periódica

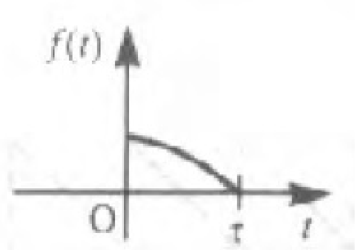
Desarrollo

Definición 0.1 *Sea $f(x)$ una función seccionalmente continua en el intervalo $]a, b[$. Llamaremos extensión periódica de $f(x)$ con período $T = (b - a)$ a la función, $f_p(x)$, definida por:*

$$f_p(x) = f(x) \quad para \quad a < x < b, \text{ y tal que}$$
$$f_p(x + KT) = f_p(x) \text{ para todo } x$$

donde K es un entero cualesquiera, positivo o negativo.

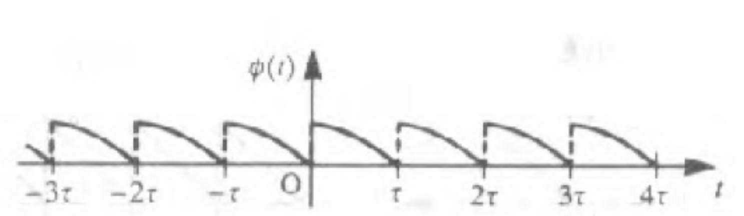
Consideremos la función $f(t)$ definidas sobre un intervalo finito $0 \leq t \leq \tau$



Una extensión periódica de $f(t)$ sera la función

$$\phi(t) = f(t) \qquad 0 < t < \tau$$
$$\phi(t) = \phi(t + \tau)$$

donde la representación grafica de la función sera



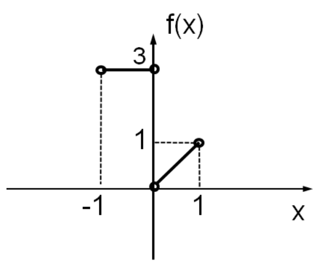
Suponiendo que $f(t)$ satisface las condiciones de Dirichelt en el intervalo $0 \leq t \leq \tau$ la nueva función $\phi(t)$ de periódo τ tendrá un desarrollo en serie de Fourier convergente y como dentro del período particular $0 < t < \tau$, $\phi(t) = f(t)$ tendremos que el desarrollo de $\phi(t+\tau)$ sera representativo de $f(t)$ dentro de ese intervalo.

Ejemplo 0.1 *Sea la función*

$$f(x) = \begin{cases} 3 & si \quad -1 < x < 0 \\ x & si \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

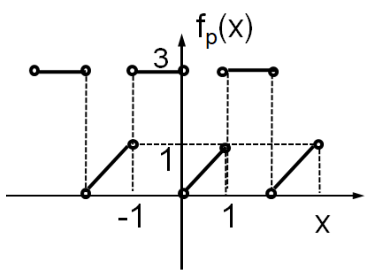
Determine el desarrollo trigonométrico de Fourier

Solución



$f_p(x) = f(x)$ en el intervalo de definición de la función

$f_p(x+KT) = f_p(x)$ para toda x



$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0} 3dx + \int_{0}^{1} xdx\right] = \frac{7}{4}$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)cosn\pi xdx = \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0} 3cosn\pi xdx + \int_{0}^{1} xcosn\pi xdx\right]$$
$$= \frac{1}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)senn\pi xdx = \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0} 3senn\pi xdx + \int_{0}^{1} xsenn\pi xdx\right] = \frac{1}{n\pi}\left(-3 + 2(-1)^n\right)$$

$$f_p(x) \sim \frac{7}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right) cos n\pi x + \frac{1}{n\pi}\left(-3 + 2(-1)^n\right) sen n\pi x$$

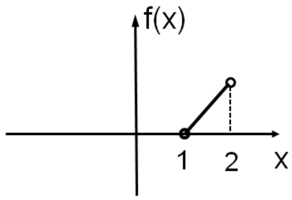
como la función f_p(x) verifica las condiciones de Dirichlet entonces tenemos que

$$f_p(x) = \frac{7}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right) cos n\pi x + \frac{1}{n\pi}\left(-3 + 2(-1)^n\right) sen n\pi x$$

y como $f\ (x) = f_p(x)$ en el intervalo de $(\ -1, 1)$ entonces la serie converge a la función en los puntos de continuidad del intervalo y fuera de este hacia la extensión periódica.

Ejemplo 0.2 *Dada la función $f(x) = x \quad para\, 1 < x < 2$. Obtener el desarrollo trigonométrico* de *Fourier con período $T = 2$*

Solución



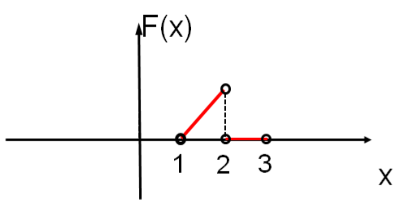
como podemos ver ahora con la extensión periódica no resolvemos el problema pues la longitud del intervalo es menor que el período. Por tanto se necesita la construcción de una nueva función que nos permita obtener el desarrollo.

Definición 0.2. Sean A y B dos conjuntos de números reales siendo A ⊂ B y sea f(x) una función real definida sobre A. Una función real F(x) definida sobre B se dice que es una prolongación de f(x) al conjunto B si para todo x, de A, se tiene que f(x) = F (x).

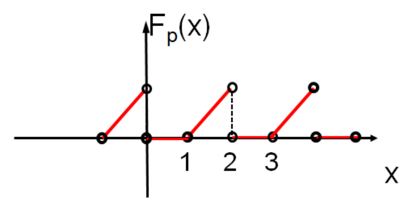
Retomando el ejemplo tenemos:

$$F(x) = \begin{cases} \text{x} & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 0 & \text{si} \quad 2 < x < 3 \end{cases} \qquad\qquad F_p(x) = \begin{cases} \text{x} & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 0 & \text{si} \quad 2 < x < 3 \end{cases}$$

con periódo $T = 2$



fíjense que hubo que prolongar la función pues el intervalo de definición de la función no garantizaba el período solicitado



y aquí la extensión periódica de la función

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\int_1^3 F(x)dx = \frac{1}{2}\left[\int_1^2 x dx + \int_2^3 0\ dx\right] = \frac{3}{4} \qquad\qquad w = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$a_n = \int_1^3 F(x) cos n\pi dx = \int_1^2 x cos n\pi dx + \int_2^3 0 cos n\pi dx = \frac{1}{n^2\pi^2}\left(1 - (-1)^n\right)$$

$$b_n = \int_1^3 F(x) sen n\pi dx = \int_1^2 x sen n\pi dx + \int_2^3 0 sen n\pi dx = \frac{1}{n^2\pi^2}\ (1 - (-1)^n) = \frac{1}{n\pi}\left(-2 + (-1)^n\right)$$

de donde

$$F_p(x) \sim \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2}\left(1 - (-1)^n\right) cos n\pi x + \frac{1}{n\pi}\left(-2 + (-1)^n\right) sen n\pi x$$

Analizar que este concepto nos permite entonces poder obtener desarrollos de las funciones de las siguientes maneras.

- en senos y cosenos
- en senos solamente
- en coseno solamente

Ejemplo 0.3 Para la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 < x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \\ \pi - x & si \quad \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

Obtenga los siguientes desarrollos trigonométricos de Fourier y dibuje el gráfico correspondiente:

1. *En coseno solamente con periódo $T = 2\pi$.*
2. *En senos solamente con periódo $T = 3\pi$.*

Conclusiones

- Serie de Fourier.
- Fómula para determinar los coeficientes incluyendo las funciones pares e impares.
- Condiciones de convergencia.
- Volver a insistir que en la *clase* se realizó un análisis general mientras que en texto se particulariza para funciones de período 2π y despúes se generaliza.

Trabajo Independiente

- Ejercicios del I al VI de la pág 444-445 LT
- Ejemplos resueltos del I al III pág.389-400 LT
- Ejercicios del 1 al 5 pág 304 matemática avanzada para ingenieros Glyn James
- Ejercicios 8,9,11,12 y 13 pág.308 matemática avanzada para ingenieros Glyn James