Conferencia No 1

Título: Sucesiones y series numéricas.

Sumario:

- Definición de sucesión numérica. Notaciones.
- Sucesiones monótonas y sucesiones acotadas.
- Límite de una sucesión. Teoremas.
- Condición de convergencia de Cauchy.
- Series numéricas.
- Series geométricas.

Objetivos:

1. Caracterizar el concepto de sucesión y el de serie numérica.
2. Identificar las diferentes notaciones de una sucesión.
3. Clasificar las sucesiones atendiendo a su monotonía a su acotamiento.
4. Calcular límites de sucesiones.
5. Identificar las diferentes notaciones de series numéricas.
6. Caracterizar cuando una serie numérica es convergente o divergente.

Bibliografía:

Del Castillo, A., R. Rivero, C. Fernández y C. Carbó. Series, Tomo 1. Epígrafe 1.1 al 1.3, p 1-38.

Desarrollo

Si a cada número natural n ($n\geq 1$) está asociado un número real a_n. mediante una regla determinada, entonces el sistema de números ordenados $a_{1,}a_{2,}a_{3,}a_{4,}\ldots,a_{n,}\ldots$ constituye una sucesión infinita de números reales o sucesión numérica.

Cada uno de los números que forman la sucesión se llama término

a_1: Primer término

a_2: Segundo término

a_k: k-ésimo término

a_n: n-ésimo término

Definición 1.

Se denomina sucesión de números reales o abreviadamente sucesión, a una función n, f(n) cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y cuyas imágenes son números reales o complejos.

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$n \rightarrow a_n$$

Las imágenes f(n) constituyen los términos de la sucesión, f(n)= a_n

Notación:

$a_1 , a_2 , a_3 , \ldots$

$a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_n , \ldots$

$\{a_n\}$

Ejemplos:

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$$

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$$

$$\{2n + 1\} = 3, 5, 7, 9, \ldots$$

Formas de construir una sucesión.

1. Mediante el término n-ésimo

$\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ Sucesión armónica

2. Mediante un algoritmo

   $\{P_n\}$ P_n: n-ésimo número natural que no es divisible más que por 1 y por sí mismo

3. Mediante una ecuación recursiva

   $\{f_n\} = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots \qquad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$

   $f_0 = 1 \quad f_1 = 1 \qquad n = 0, 1, \ldots$

Observación:

Una misma sucesión puede expresarse con diferentes términos enésimos, comenzando en distintos valores de n.

Ejemplo:

$\{a_n\} = 1, 2, 4, 8, \ldots = \{2^{n-1}\} \quad n \geq 1$

$\{a_n\} = 1, 2, 4, 8, \ldots = \{2^{n}\} \quad n \geq 0$

Sucesiones monótonas.

Definición:

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es:

1. Estrictamente creciente si $a_n < a_{n+1}$ para todo n
2. Creciente si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n
3. Estrictamente decreciente si $a_n > a_{n+1}$ para todo n
4. Decreciente si $a_n \geq a_{n+1}$ para todo n

Si cumple cualquiera de estas cuatro propiedades se dice que la sucesión es monótona.

Ejemplo:

Analicemos la monotonía de las siguientes sucesiones.

a. $\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ estrictamente decreciente

b. $\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ estrictamente creciente

c. $\{2n+1\} = 3, 5, 7, 9, \ldots$ estrictamente creciente

¿Cómo probarlo?

b. $a_n - a_{n+1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{n(n+2)-(n+1)(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$

$a_n - a_{n+1} < 0 \quad \Longrightarrow \quad a_n < a_{n+1}$

También puede probarse utilizando el criterio de la primera derivada. Si $f' < 0$
Entonces la función es decreciente.

Sucesiones acotadas.

Definición:
Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ es acotada superiormente, si existe un número real M, tal que $\{a_n\} \leq M$ para todo n. Al número M se le llama cota superior de la sucesión y a la menor de las cotas superiores, extremo superior o supremo.
Similarmente, se dice que una sucesión $\{a_n\}$ está acotada inferiormente, si existe un número real m, tal que $m \leq \{a_n\}$ para todo n. Al número m se le llama cota inferior de la sucesión y a la mayor de las cotas inferiores, extremo inferior o ínfimo.
Una sucesión se denomina acotada, si lo está superior e inferiormente.

En los ejemplos anteriores:

a. $\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ acotada: inferiormente m=0 y superiormente M=1

b. $\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ acotada: inferiormente m=1/2 y superiormente M=1

c. $\{2n+1\} = 3, 5, 7, 9, \ldots$ no acotada, solo inferiormente m=3

Límite de una sucesión.

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ Si el límite existe y es finito se dice que $\{a_n\}$ es convergente

Si el límite no existe o es infinito se dice que $\{a_n\}$ es divergente

En los ejemplos anteriores:

a. $\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ la $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ $es\ convergente$

b. $\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$ $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ la $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ $es\ convergente$

c. $\{2n+1\} = 3, 5, 7, 9, \dots$ $\lim_{n\to\infty} (2n+1) = \infty$ la $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ $es\ divergente$

Teorema:

Una sucesión creciente y acotada posee límite finito.

Observación:

Debe revisar la sección del cálculo de límites de una sucesión.

Series numéricas.

Definición:

Sea la sucesión $\{a_n\} = a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

Se define la serie de las a_n como:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n$$

Se define la sucesión de sumas parciales como $\{S_n\} = s_1, s_2, s_3, \dots$ donde

$$S_2 = \sum_{n=1}^{2} a_n = a_1 + a_2$$

$$S_{10} = \sum_{n=1}^{10} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$$

Si la sucesión $\{S_n\}$ es convergente, es decir, existe un número real S tal que $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ existe y es finito (S), se dice que la serie es convergente y que su suma es S.

Escribiéndose: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$

Serie geométrica.

Sea $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n + \ldots$

(1) Sea $S_k = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{k-1} + \ldots$ Si multiplicamos por r la expresión anterior

$rS_k = ra + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^k + \ldots$ sumando ambas expresiones

$$S_k - rS_k = \mathrm{a} - \mathrm{ar}^k$$

$$(1 - r)S_k = \mathrm{a} - \mathrm{ar}^k$$

$$S_k = \frac{\mathrm{a} - \mathrm{ar}^k}{1 - r}$$

De (1) se tiene que si r=1 entonces $S_k = ka$

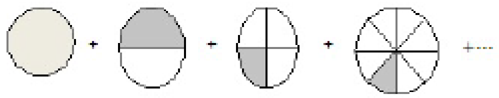
$$\lim_{k\to\infty} S_k = \infty$$

Si $r \neq 1$

$$|r| < 1 \qquad \lim_{k\to\infty} S_k = \frac{a}{1 - r} \qquad \textit{existe y es finito} \quad \textit{por tanto} \quad \sum_{n=1}^{\infty} ar^n \quad \textit{converge}$$

$$|r| \geq 1 \qquad \lim_{k\to\infty} S_k \to \infty \qquad \textit{por tanto} \sum_{n=1}^{\infty} ar^n \quad \textit{diverge}$$

Ejemplo:
Hallar la suma de las áreas:



$$\pi r^2 + \frac{1}{2}\pi r^2 + \frac{1}{4}\pi r^2 + \cdots + \frac{1}{2^n}\pi r^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\pi r^2 = \pi r^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Como se observa se ha obtenido una serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$.

De la demostración anterior se obtuvo que $si\ |r| < 1 \quad entonces \quad \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$

Por lo que $\pi r^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \pi r^2$

Ejemplos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots$$

$$a = \frac{1}{3} \quad r = \frac{1}{3} \quad |r| < 1 \quad \textit{por tanto} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \quad \textit{converge y tiene por suma } S = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^n} + \cdots$$

$$a = \frac{2}{3} \quad r = \frac{1}{3} \quad |r| < 1 \quad \textit{por tanto} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \quad \textit{converge y tiene por suma } S = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1$$

Propiedades generales de las series.

1. Las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ tienen el mismo carácter

2. Si $\alpha \neq 0$, las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ tienen el mismo carácter

3. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ y α y β son constantes entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha A + \beta B$$

4. <u>Si</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverge