Conferencia 3

Título: Series Numéricas y Criterios de Convergencia de Series Numéricas.

Sumario:

- Criterio del cociente o de D' Alembert.
- Criterio de la raíz o de Cauchy.

Bibliografía: Del Castillo, A., R. Rivero, C. Fernández y C. Carbó: Series, Tomo 1, pp. 38-66. Epígrafes: 1.3 hasta 1.5

Cálculo con trascendentes tempranas. Parte 3. pp. 693-703, 704-726

Objetivos:

- Aplicar los criterios de el cociente y la raíz para conocer el carácter de una serie de términos positivos.
- Determinar el carácter de una serie de términos negativos

Introducción:

Analizar la dificultad que encierra el saber si una serie converge, haciendo uso de la definición, pues tanto obtener la sucesión de sumas parciales, como analizar su convergencia no siempre resulta un problema fácil de abordar y es por ello en la clase de hoy estudiaremos algunos resultados que nos permitirán analizar si una serie converge o diverge.

Desarrollo:

Teorema. Criterio del cociente o D'Alembert.

Sea la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con $a_n > 0$ y supongamos que existe $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ entonces:

Si L<1 la serie converge

Si L>1 la serie diverge

Si L=1 no decide

Ejemplo:

Analizar la convergencia de:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$

Aplicando el criterio del cociente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{n^3}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3 3} = \frac{1}{3}$$ como L<1 entonces la $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$ es convergente

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{(n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n)!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0$$ L< 1 entonces la serie es convergente

Teorema. Criterio de la raíz o Cauchy

Sea la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con $a_n > 0$ supongamos que existe el $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = R$ entonces:

Si R<1 la serie converge

Si R>1 la serie diverge

Si R=1 no decide

Ejemplo:

Analizar la convergencia de:

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+3}{2n+2}\right)^{n}$

$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{3n+3}{2n+2}\right)^{n}\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+3}{2n+2} = \frac{3}{2}$ como R>1 entonces la serie es divergente

b. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}}{(n+1)^{n}}$

Aplicando el criterio de la raíz

$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2}{(n+1)}\right)^{n}\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0$ como R<1 entonces la serie es convergente

Ejemplo:

Analice la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}$$

Aplicando el criterio del cociente se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n+1)!}}{\frac{1}{(2n-1)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n+1)(2n)(2n-1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n)} = 0$$

Como L<1 entonces la serie es convergente.

Orientación para el estudio independiente:

- Estudiar Teorema 1 de la p. 20 y Teorema 1.4 de la p. 22, y Algunos aspectos sobre el cálculo de límites de la las pp. 23-27.
- Responder preguntas 27-38 pp. 97-98.
- Estudiar ejemplos resueltos XIII (1y 2), XV (4 y 5), XVI-2 (a, b, c), XVII-1, XVIII (1-3), XIX (1-3) pp. 122-138.
- Para la clase práctica se proponen similares a los siguientes ejercicios propuestos del texto: pp. 159-163: XVII (6 y 7); XIX (1 y 2); XXI (1, 2, 3, 4); XXII (1, 2 y 3), XXIII (2, 3, 8, 12, 14 y 17).