CLASE PRÁCTICA # 7

SERIES DE FOURIER DE FUNCIONES NO PERIÓDICAS.

Objetivos

- Operar con las series de Fourier, a partir de las definiciones y teoremas estudiados.
- Obtener desarrollos de funciones definidas en intervalos de longitud menor que el período deseado.
- Aproximar funciones mediante series de Fourier.

Bibliografía:
Series Tomo II pág. 324-348.

Ejercicios:

1. Dada la función:

$$f(x) = x \qquad para \;\; 0 \leq x < 1$$

Analice si es posible obtener un desarrollo trigonométrico de Fourier con las siguientes características:

a. En senos y cosenos con T=0.5
b. En cosenos solamente con T=1
c. En senos solamente con T=4 y que converja hacia cero en el punto 13.

En todos los casos justifique su respuesta y de ser posible obtenga el desarrollo trigonométrico de Fourier y haga el gráfico de la función hacia la cual converge el desarrollo obtenido.

2. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

a. Obtenga el desarrollo de Fourier en cosenos solamente.
b. Dibuje el gráfico de la función hacia la cual converge el desarrollo obtenido.
c. Hacia qué valor converge la función en el punto x=7. Justifique su respuesta.

3. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x < 1 \\ 1 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

a. Haga una prolongación para obtener un desarrollo trigonométrico de Fourier con T=5 tal que f(2)= -1.5.
b. Plantee las integrales necesarias para obtener el desarrollo trigonométrico de Fourier en senos solamente.
c. Dibuje el gráfico de la función hacia la cual converge el desarrollo obtenido.
d. Haga una prolongación para obtener un desarrollo trigonométrico de Fourier en cosenos solamente con T=6 tal que f(2)=2.

4. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x & si \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{\pi}{2} & si \quad \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

De ser posible represente gráficamente la función hacia la cual converge el desarrollo de Fourier con las siguientes características:

a. En senos y cosenos y que converja a $\frac{\pi}{4} \quad en\ x = \pi \quad con\ T = \frac{3\pi}{2}$
b. En senos solamente con T=π.
c. En cosenos solamente con T=2π. Plantee las integrales necesarias para obtener los coeficientes del desarrollo.

5. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -2 < x < -1 \\ x + 1 & -1 < x < 0 \end{cases}$$

a. Plantee las integrales necesarias para calcular los coeficientes de Fourier de un desarrollo de trigonométrico de Fourier que converja a la extensión periódica de f(x).
b. Dibuje el gráfico de la función hacia la cual converge el desarrollo obtenido.
c. Haga una prolongación de f que permita obtener un desarrollo con T=3 que converja a $\frac{3}{2}$ en x=1.

6. Sea $f(x) = x^2 + 1 \qquad para\ -1 \leq x \leq -1 \qquad con \quad T = 2$
   a. Obtener su desarrollo trigonométrico de Fourier.
   b. A partir del desarrollo trigonométrico anterior demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$