Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

Sumario: EDO de orden superir no homogéneas: Teoremas sobre la estructura de la solución general. Método del operador anulador para ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

Objetivos

1. Resolver ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas.

2. Resolver ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas por el método de los coeficientes indeterminados.

Bibliografía

- Ecuaciones diferenciales con aplicaciones , Dennis G. Zill,
  ep. 4.1.3, p. 126-128, ep. 4.4, p. 145-154, ep. 4.5, p. 155-161

Introducción

En la conferencia anterior estudiamos como resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden superior homogéneas con coeficientes constantes

$$a_n\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dx}+a_0y=0$$

está ecuación en forma abreviada suele escribirse

$$P_n(D)y=0,\text{ donde } P_n(D)y=a_n\ \frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dx}+a_0y$$

hoy nos proponemos resolver ecuaciones del la forma

$$a_n\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dx}+a_0y=g(x)$$

llamadas ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden superior no homogéneas con coeficientes constantes está ecuación en forma abreviada suele escribirse

$$P_n(D)y=g(x)$$

Desarrollo

Si conocemos que $y = y_p$ es una solución de la ecuación $P_n(D)y = g(x)$ y que $y = y_c$ es solución general de la ecuación $P_n(D)y = 0$. Probemos que

$$y = y_c + y_p$$

es solución de la ecuación $P_n(D)y = g(x)$

Solución

$$P_n(D)y = g(x)$$
$$P_n(D)(y_c + y_p) = g(x)$$

como el operador diferencial es lineal entonces tenemos que

$$P_n(D)(y_c) + P_n(D)(y_p) = g(x)$$

y como se cumple que $P_n(D)(y_c) = 0$ y $P_n(D)(y_p) = g(x)$ entonces resulta que

$$0 + g(x) = g(x)$$

y por tanto $y = y_c + y_p$ es solución de la $P_n(D)y = g(x)$

Teorema 1 (Solución general de la ecuación no homogénea) *Sea* y_p *cualquier solución particular de la ecuación diferencial lineal no homogénea de orden* n

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

en un intervalo I, *y* y_c *la solución general de la ecuación diferencial homogénea*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

en I,*entonces,* $y = y_c + y_p$ *es la solución general de la ecuación*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Ahora vamos a dedicarnos a resolver ecuaciones del tipo

$$a_n\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x)$$

donde ya tenemos una parte resuelta pues conocemos como resolver la ecuación

$$a_n\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

Entonces centremos ***nuestra*** atención en buscar la solución particular y para ello tratemos de transformar la ecuación

$$a_n\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x)$$

en homogénea o sea tratar de que la función $g(x)$ se transforme en la función nula.

Definición 0.1 *Si D es un operador diferencial con coeficientes constantes y f una función suficientemente diferenciable tal que*

$$D(f(x)) = 0$$

se dice que D es un anulador de la función

Ejemplo 0.1 *El operador diferencial D^n anula cada una de las siguientes funciones*

$$1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$$

Como consecuencia inmediata D^n anula

$$c_1 + c_2x + \cdots + c_nx^{n-1}$$

Ejemplo:

$f(x)=-3x^4+2x^3-x+5$

$P_a(D)=D^5$ $\qquad$ $P_a(D)$: polinomio anulador

Ejemplo 0.2 *El operador diferencial $(D-\alpha)^n$ anula cada una de las siguientes funciones*

$$e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2e^{\alpha x}, \cdots, x^{n-1}e^{\alpha x}$$

Ejemplo:

$f(x)=xe^{2x}$ $\quad$ $\alpha=2$ $\quad$ $n=2$

$P_a(D)=(D-2)^2$

$(D-2)^2(xe^{2x})=(D^2-2D+4)(xe^{2x})= D^2(xe^{2x})-2D(xe^{2x})+4xe^{2x}=2e^{2x}+2e^{2x}+4xe^{2x}-4e^{2x}-8xe^{2x}+4xe^{2x}=0$

Ejemplo 0.3 *El operador diferencial $(D^2-2\alpha D+\alpha^2+\beta^2)^n$ anula cada una de las siguientes funciones*

$$e^{\alpha x}cos\beta x, xe^{\alpha x}cos\beta x, x^2e^{\alpha x}cos\beta x, \cdots, x^{n-1}e^{\alpha x}cos\beta x$$
$$e^{\alpha x}sen\beta x, xe^{\alpha x}sen\beta x, x^2e^{\alpha x}sen\beta x, \cdots, x^{n-1}e^{\alpha x}sen\beta x$$

Ejemplo:

$f(x)=cos(2x)$ $\quad$ $\beta=2$

$P_a(D)=D^2+4$

$f(x)=e^{3x}cos(2x)$ $\quad$ $\alpha=3$ $\quad$ $\beta=2$

$P_a(D)=(D^2-6D+13)$

$f(x)=x^2e^{3x}cos(2x)$ $\quad$ $n=3$ $\quad$ $\alpha=3$ $\quad$ $\beta=2$

Pa(D)=(D2-6D+13)^3

Propiedades del operador P(D).

$P(D)= a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+...+a$ con los coeficientes constantes

1. Si P(D) puede factorizarse como P1(D)P2(D) entonces P(D)f(x)=P1(D)[P2(D)f(x)]
2. $P_1(D)P_2(D)f(x)= P_2(D)P_1(D)f(x)$

Ejemplo:

$D^2y+4Dy+3y=0$

D2y+4Dy+3y= (D+3)(D+1)y= (D+1)(D+3)y

(D+3)(D+1)y= (D+1)(Dy+3y)= (D+1)(y'+3y)= D(y')+D(3y)+y'+3y= y''+3y'+y'+3y= y''+4y'+3y

(D+3)(D+1)y= (D+3)(Dy+y)= (D+3)(y'+y)= Dy'+Dy+3y'+3y= y''+y'+3y'+3y= y''+4y'+3y

Propiedad general:
Si $P_1(D)$ anula a $f_1(x)$ y $P_2(D)$ anula a $f_2(x)$
entonces:
$P_1(D)P_2(D)$ anula a $f_1(x)f_2(x)$

Ejemplo Resuelva las siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=2e^{2x}-x+1$$

$$(D^2-5D+6)y=2e^{2x}-x+1$$

$$(D^2-5D+6)y=0$$

$$m^2-5m+6=0$$

$$(m-3)(m-2)=0$$

$$m=3 \qquad m=2$$

$$y_c=c_1e^{3x}+c_2e^{2x}$$

$$f(x)=2e^{2x}-x+1$$

buscar el polinomio anulador

$$P_a(\mathrm{D})=(\mathrm{D}-2)D^2$$

multiplicar el polinomio anulador por toda la ecuación

$(D-2)D^2(D^2-5D+6)y=0$

resolver la ecuación homogénea, para lo cual es necesaria la ecuación característica

$(m-2)m^2(m-3)(m-2)=0$

m=2 (2) m=0 (2) m=3

buscar la solución auxiliar

$$y_a = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3 + c_4x + c_5e^{3x}$$

comparar la solución auxiliar con la solución complementaria (solución de la homogénea) y eliminar las soluciones que se repiten, de esta forma se obtiene la solución particular

$$y_p = axe^{2x} + b + dx$$

es necesario aclarar que las constantes se sustituyeron por coeficientes, que se nombran coeficientes indeterminados, pues estos valores hay que determinarlos, mientras que las constantes que forman parte de la solución homogénea son las constantes arbitrarias y esenciales, que solo toman valor cuando se halla una solución particular del problema. Recordemos que una solución de una ecuación tendrá tantas constantes arbitrarias y esenciales como orden tenga la ecuación diferencial.

Para hallar los coeficientes de la solución particular utilizaremos el método de los coeficientes indeterminados, sustituyendo la misma en la ecuación diferencial.

Hay que hallar las derivadas que nos indica la ecuación

$$y_p' = ae^{2x} + 2\text{ax}e^{2x} + d$$

$$y_p'' = 2ae^{2x} + 2ae^{2x} + 4axe^{2x}$$

sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$2ae^{2x} + 2ae^{2x} + 4axe^{2x} - 5ae^{2x} - 10\text{ax}e^{2x} - 5d + 6axe^{2x} + 6b + 6dx = 0$$

agrupando términos semejantes y simplificando la expresión

-a=2 $\Rightarrow$ a=2

6d=-1 $\Rightarrow$ d=-1/6

-5d+6b=1 $\Rightarrow$ b=1/36

sustituyendo en la solución particular y posteriormente en la solución general

$$y_p = -2xe^{2x} + \frac{1}{36} - \frac{1}{6}x$$

hallar la solución general $\quad y_g = y_c + y_p$

$$y_g = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} - 2xe^{2x} + \frac{1}{36} - \frac{1}{6}x$$

Conclusiones

- Solución de la ecuación diferencial lineal no homogénea.
- Método de los coeficientes indeterminados.

Trabajo Independiente

Estudiar la bibliografía indicada, haciendo énfasis en los ejemplos presentes en la misma
Resolver los siguientes ejercicios:

1. ejercicios 4.4 pág 153
2. ejercicios 4.5 pág 161