Serie Numéricas

Actividad #7

Sumario: Series de términos con signo variables.Series alternadas Convergencia absoluta y condicional. Multiplicación de series.

Objetivos

1. Identificar el concepto de Serie alternada o de signos alternos.
2. Aplicar la Regla de Leibniz para determinar si una serie alternada es convergente.
3. Estimar la suma de una serie alternada convergente a partir de la regla de Leibniz y estimar el error cometido.
4. Determinar si una serie numérica converge absoluta o condicionalmente.
5. Propiedades

Bibliografía

- Del Castillo, A., R. Rivero, C. Fernández y C. Carbó: Series, Tomo 1.

Introducción

Los criterios estudiados para analizar el carácter de una serie han exigido que las mismas sean de términos no negativos por tanto de manera natural surgen la siguientes interrogantes.

Desarrollo

1. ¿$\sum_{n=0}^{\infty} -a_n \, a_n > 0$?
   O sea todos los términos de la serie son negativos la respuesta a esta interrogante se obtiene muy fácil pues bastaría analizar el carácter de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y virtud de la propiedad de que cuando se multiplica un número por una serie el carácter de esta no varía tendríamos el problema resuelto.

2. ¿$-a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_n + \cdots$?
   En este caso como hay un número finito de términos negativos podemos analizar el carácter de $\sum_{n=4}^{\infty} a_n$ y como el carácter de una serie no varÃa si se le adiciona o suprime un numero finito de términos el problema queda resuelto.

3. ¿$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + \cdots + (-1)^n a_n + \cdots, a_n > 0$?

4. ¿$-a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \cdots$?

De este tipo de problemas es del cual nos ocuparemos en esta actividad. Las series que tiene la forma de la interrogante 3 la denominaremos series alternadas. Analice el carácter de las siguientes series.

Definición 0.1 *Series alternadas son aquellas cuyos términos son alternativamente positivos y negativos, representándose por:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^n \mathsf{a_n} + \cdots$$

donde cada a_n es positiva ($a_n > 0$)

Analicemos cuando una serie alternada es convergentes para ellos analicemos la sucesión de sumas parciales:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 - a_2$$

$$s_3 = a_1 - a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 - a_2 + a_3 - s_4$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_n = a_1 - a_2 + a_3 - s_4 + \cdots + (-1)^n a_n$$

Tendríamos que probar que s_n es convergente, para ello analicemos la siguiente sucesión

$$s_2 = a_1 - a_2$$

$$s_4 = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4)$$

$$s_6 = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m})$$

Como los resultados que tenemos son para serie de términos positivos vamos imponer la condición a la sucesión a_n de que sea decreciente y entonces resulta que la sucesión s_{2m} es creciente y est á acotada inferiormente por $s_2 = a_1 - a_2 > 0$ ahora si reescribimos a

$$s_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}$$

podemos apreciar que todas las expresiones entre paréntesis son positivas y por tanto se cumple que

$$s_{2m} < a_1$$

por tanto como la sucesión es acotada y creciente, entonces es convergente.

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} s_{2m} = S$$

Formemos ahora la suseción de los impares

$$s_{2m-1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2m-2} - a_{2m-1})$$

que como $s_{2m-1} - s_{2m+1} < 0$ entonces la sucesión es decreciente y está acotada superiormente por a_1 ahora mostremos que también está acotada inferiormente para ellos escribamos la sucesión de la siguiente forma

$$s_{2m-1} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-3} - a_{2m-2}) + a_{2m-1}$$

como la sucesión es decreciente y todas la expresiones entre paréntesis son positivas y $a_{2m-1} > 0$ entonces la sucesión esta acotada inferiormente y por tanto la sucesión es convergente.

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} s_{2m-1} = S'$$

Ahora tenemos que para que exista el límite de s_n debe cumplirse que $S = S'$ entonces como

$$s_{2m} = s_{2m-1} - a_{2m}$$

pasando al límite se obtiene

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} s_{2m} = \lim_{n\longrightarrow\infty} s_{2m-1} - \lim_{n\longrightarrow\infty} a_{2m}$$

entonces si $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = 0$ se cumple lo deseado y la serie seria convergente.

TEOREMA 1 (REGLA DE LEIBNIZ) *Si la sucesión a_n, $a_n > 0$ es estrictamente decreciente y $a_n \longrightarrow 0$, entonces, la serie alternada:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ *es convergente, su suma es positiva y no excede al primer término.*

EJEMPLO 0.1 *. Analice el carácter de la siguiente serie:*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$

   Solución

   - $a_n = \dfrac{1}{n} > 0$ *para todo* n
   - $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{1}{n} = 0$
   - $a_n - a_{n+1} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n(n+1)} > 0 \Rightarrow a_n > a_{n+1}$ *y por tanto la sucesión es decreciente,entonces en virtud de la regla de Leibniz la serie dada converge.*

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$
Solución

- $a_n = \dfrac{1}{n!} \quad > 0$ *para todo* $n>1$
- $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{\text{n!}} = 0$
- $a_n - a_{n+1} = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{n+1-1}{(n+1)n!} = \dfrac{n}{(n+1)n!} > 0 \Rightarrow a_n > a_{n+1}$ *y por tanto la sucesión es decreciente,entonces en virtud de la regla de Leibniz la serie dada converge.*

Ejemplo 0.2 *Calcular el error que se comete al sustituir la suma de la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}$ *por la suma de los 8 primeros términos.*
Solución
Ocupémonos de un problema general encontrar el error al sustituir la suma de la serie por la suma de los n primeros términos.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^n a_n + \underbrace{(-1)^{n+1}a_{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2} + \cdots}_{r_n}$$

Ahora consideremos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_{n+1}$$

que es una seria alternada que cumpla las condiciones de Leibniz por tanto converge y su suma no excede el primer termino $r_n < (1)^{n+1}a_{n+1} \Rightarrow |r_n| < |a_{n+1}| = a_{n+1}$
Luego regresando al problema original tenemos que.

$$|r_8| < |a_9| = a_9 = \frac{1}{9!} \approx 2,75 \cdot 10^{-6}$$

Ejemplo 0.3 *Cuantos términos de la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ *hay que tomar para tener una estimación de la suma con una exactitud de hasta 0.001.*
Solución
$|r_n| <= a_{n+1} < 0{,}001 \Rightarrow \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{1000} \Rightarrow n > 999$ *por tanto el número mínimo de término a tomar es 1000 para obtener la aproximación requerida.*

Para resolver nuestra última interrogante definamos el concepto de convergencia absoluta que nos permitirá analizar la convergencia de la serie de signos cualesquiera.

Definición 0.2 *Se dice que la serie* $\sum u_n$ *es absolutamente convergente si la serie de sus módulos* $\sum |u_n|$ *es convergente.(la serie en general puede ser de números complejos)*

Ejemplo 0.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} sen \frac{n+1)\pi}{n}$

Solución

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{2^n} sen \frac{(n+1)\pi}{n} \right|$$

Ahora apliquemos el criterio de comparación para determinar la convergencia de la serie obtenida, tomando $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ *que es convergente tenemos que*

$$\left| sen \frac{(n+1)\pi}{n} \right| < 1 \Rightarrow \frac{\left| sen \frac{(n+1)\pi}{n} \right|}{2^n} < \frac{1}{2^n}$$

y como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ *es convergente entonces* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{2^n} sen \frac{(n+1)\pi}{n} \right|$ *converge y la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} sen \frac{(n+1)\pi}{n}$ *dada converge absolutamente.*

¿Existirá alguna relación entre la convergencia absoluta de la serie $\sum u_n$ y la convergencia ***de*** $\sum |u_n|$ **?**

Teorema 2 *Si la serie converge absolutamente, entonces ella converge,o sea, si* $\sum |u_n|$ *converge- también converge la serie* $\sum u_n$

nota:
El reciproco de este teorema no se cumple, una serie puede ser convergente sin serlo la serie de los módulos.

Ejemplo 0.5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ *es convergente sin embargo* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *que es la serie de los módulos es divergente, a este tipo de serie se le denomina condicionalmente convergente*

Definición 0.3 *Se dice que la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *es condicionalmente convergente si* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *converge, pero la serie de sus módulos* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *, diverge.*

Nota

Si la serie de los módulos $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ converge, entonces, la $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ converge. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ diverge nada se puede decir de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ salvo que:

1. Sea el caso de una serie alternada que cumpla las condiciones de Leibniz,entonces la serie original será condicionalmente convergente.
2. Que no cumpla la condición $\lim a_n = 0$ en cuyo caso diverge.
3. Se halla determinado la divergencia por el criterio del cociente o la raíz por que en ambos casos implica que el término general o enésimo de la serie no tiende hacia cero cuando $n \longrightarrow \infty$ y, por tanto la serie original diverge.

Ejemplo 0.6 *Analice el carácter de las siguientes series:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^5}{2^n}$
   ***Solu*ción**
   Analicemos la serie de los módulos $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n}$ *aplicando el criterio del cociente tenemos que* $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5 2^n}{2^{n+1}n^5} = \frac{1}{2} < 1$*por tanto la serie de los módulos* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n}$ *converge, entonces,*$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^5}{2^n}$ *converge* ***absolutamente***

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^2}{n^3+1}$
   ***Solu*ción**
   Analicemos la serie de sus módulos $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}$ *aplicando el teorema de comparación con paso al límite tenemos que* $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3+1} = 1 > 0$ *y como* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *es divergente, entonces la series de sus módulos* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}$ *es divergente y nada se puede decir de la convergencia de la dada.*
   Como es alternada verifiquemos si cumple con las condiciones de Leibniz.

   - $\frac{n^2}{n^3+1} > 0$ *para todo* n
   - $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3+1} = 0$

- $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+1} \Rightarrow f'(x)\dfrac{-x(x^3-2)}{(x^3+1)^2} \leq 0$ *para* $x \geq \sqrt[3]{2}$ *entonces* a_n *es decreciente*

Por tanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n^2}{n^3}$ *es condicionalmente convergente*

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 4\cdot 7\cdot\dots\cdot(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\cdot\dots\cdot(2n+5)}$

Soluión
Analicemos la serie de sus módulos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 4\cdot 7\cdot\dots\cdot(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\cdot\dots\cdot(2n+5)}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\dots\cdot(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\cdot\dots\cdot(2n+5)}$$

Apliquemos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\dots\cdot(3n+1)}{7\cdot 9\cdot 11\cdot\dots\cdot(2n+6)}\frac{7\cdot 9\cdot 11\cdot\dots\cdot(2n+5)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\dots\cdot(3n-2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+6} = \frac{3}{2} > 1$$

Por tanto la serie de los módulos es divergente pero como la divergencia fue determinada a partir de criterio de cociente la serie dada diverge.

Conclusiones

Analizar la importancia de reconocer las característica de la serie. Precisar la relación entre la convergencia de la serie y la serie de los módulos

Trabajo Independiente

- Estudiar Pág. 82 a la Pág. 92 LT
- Ejercicios XXVIII Pág. 164 LT
- Ejercicios XXX, XXXII y XXXIII Pág. 167 LT