Conferencia 2

Título: Series Numéricas y Criterios de Convergencia de Series

Numéricas.

Sumario:

- Serie armónica e hiperarmónica.
- Condición necesaria para la convergencia de una serie.
- Criterio del término n-simo.
- Criterios de comparación.
- Criterio de la integral.

Bibliografía: Del Castillo, A., R. Rivero, C. Fernández y C. Carbó: Series, Tomo 1, pp. 38-66. Epígrafes: 1.3 hasta 1.5

Cálculo con trascendentes tempranas. Parte 3. pp. 693-703, 704-726

Objetivos:

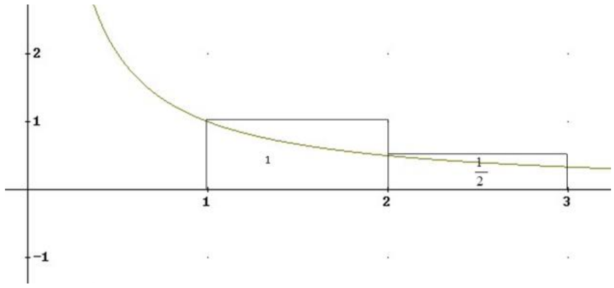
- Identificar cuando una serie es armónica e hiperarmónica.
- Reconocer la convergencia de las series armónica e hiperarmónica.
- Determinar cuándo una serie es divergente a partir de la condición necesaria para la convergencia de toda serie numérica.
- Aplicar los criterios de comparación y la integral para conocer el carácter de una serie de términos positivos.
- Determinar el carácter de una serie de términos negativos

Introducción:

Analizar la dificultad que encierra el saber si una serie converge, haciendo uso de la definición, pues tanto obtener la sucesión de sumas parciales, como analizar su convergencia no siempre resulta un problema fácil de abordar y es por ello en la clase de hoy estudiaremos algunos resultados que nos permitirán analizar si una serie converge o diverge.

Desarrollo:

Serie armónica.



$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots \qquad \textit{esta serie es divergente y se demostrará posteriormente.}$$

$$\textit{Se conoce como serie armónica}$$

Teorema. Condición necesaria para la convergencia.

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge* *entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Demostración:

Sea $\lim_{n\to\infty} S_k = S$

Pero $S_k = S_{k-1} + a_k$

Luego $a_k = S_k - S_{k-1}$

por tanto $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_k - S_{k-1} = S - S = 0$

Contrarrecíproco.

$$Si \quad \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \quad entonces \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad diverge$$

Se conoce como criterio del término enésimo.

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \qquad por\ tanto \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \qquad diverge$$

Series de términos no negativos.

Teorema. Criterio de comparación.

Sean las series de términos no negativos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{a_n} \quad \text{con} \quad \boldsymbol{a_n \geq 0 \quad o \quad a_n > 0}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{b_n} \quad \text{con} \quad \boldsymbol{b_n \geq 0 \quad o \quad b_n > 0}$$

a. $Si\ a_n \leq b_n \quad para \quad n \geq N\ \ y\ la\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad converge, entonces, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ \ converge$

b. $Si\ a_n \geq b_n \quad para \quad n \geq N\ \ y\ la\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad diverge, entonces, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad diverge$

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$$

$$\frac{\ln(n)}{n} > \frac{1}{n}$$

$$\ln(n) > 1 \qquad como \quad \ln(e) = 1 \qquad entonces \qquad se\ cumple\ \ para \quad n \geq 3$$

como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad diverge \qquad entonces \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n} \quad también \quad diverge$$

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen^2(n\alpha)}{2^n}$$

Tomemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

que es una serie geométrica con $r = \frac{1}{2} \quad y\ por\ tanto\ converge$

$$\frac{sen^2(n\alpha)}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

$como\ sen^2(n\alpha) \leq 1$

$$entonces\ para\ todo\ n\ se\ cumple \quad \frac{sen^2(n\alpha)}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} \quad y\ la\ serie \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen^2(n\alpha)}{2^n} \quad converge$$

Corolario. Comparación con paso al límite.

Sean $\quad a_n > 0\ ;\ b_n > 0\ para\ n \geq N \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \quad entonces:$

$$c > 0: \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad tienen\ igual\ carácter$$

$$c = 0: \quad si \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad converge \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad converge$$

$$c = \infty \quad si \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad diverge \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad diverge$$

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n2^n}$$

Si comparamos con la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ que es una serie geométrica con $r=\frac{1}{2}$ y por tanto convergente, tendríamos,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n2^n}}{\frac{1}{2^n}}=0 \quad por\ tanto, como \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} \quad es\ convergente\ entonces \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n2^n} \quad es\ convergente$$

Si se hubiera utilizado para la comparación la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ serie armónica, que es divergente

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n2^n}}{\frac{1}{n}}=0 \qquad por\ tanto, como \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \quad es\ divergente, entonces\ \ el\ criterio\ no\ decide$$

Teorema. Criterio de la integral

Si la función f(x) es positiva, continua y decreciente en el intervalo [1, +∞) y tal que f(n) = a_n para todo n, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ y la integral impropia $\int_1^{\infty}f(x)dx$ convergen o divergen simultáneamente.

Ejemplo:

Analice el carácter de la siguiente serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$

Consideramos la función $f(x)=\frac{1}{x^p}$ la cual cumple las hipótesis del teorema, es decreciente, positiva y continua.

Por tanto analizaremos el carácter de la integral $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx$. Para esto se considerará los casos p=1 y p≠1.

Si **p=1** entonces la integral quedaría como $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,dx$. Si se aplica el criterio de la integral se tendría:

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x}\,dx=\lim_{b\to\infty}\ln(x)|_1^b=\lim_{b\to\infty}(\ln(b)-\ln(1))=\infty$$

Por tanto la $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,dx$ diverge y la $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ también diverge

Si **p≠1** entonces

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{1-p}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}\right) = \frac{1}{1-p}(\lim_{b\to\infty}(b^{1-p}-1)$$

$$= \begin{cases} si\ p<1 \quad es\ \infty \\ si\ p>1\ es\ \dfrac{-1}{1-p} \end{cases}$$

En resumen, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \qquad \begin{matrix} \text{converge para p} > 1 \\ \text{diverge para } \text{p} \leq 1 \end{matrix}$$

Orientación para el estudio independiente:

- Estudiar Teorema 1 de la p. 20 y Teorema 1.4 de la p. 22, y Algunos aspectos sobre el cálculo de límites de la las pp. 23-27.
- Responder preguntas 27-38 pp. 97-98.
- Estudiar ejemplos resueltos XIII (1y 2), XV (4 y 5), XVI-2 (a, b, c), XVII-1, XVIII (1-3), XIX (1-3) pp. 122-138.
- Para la clase práctica se proponen similares a los siguientes ejercicios propuestos del texto: pp. 159-163: XVII (6 y 7); XIX (1 y 2); XXI (1, 2, 3, 4); XXII (1, 2 y 3), XXIII (2, 3, 8, 12, 14 y 17).