Ecuaciones diferenciales lineales de orden Superior

Sumario: Definiciones preliminares (problemas de Cauchy, y problemas de contorno). **Teorema de existencia y unicidad de la solución.** Ecuaciones diferenciales homogéneas con coeficientes constantes. Sistema fundamental de soluciones. **Principio de superposición.**

Objetivos

1. Definir el concepto de ecuación diferencial lineal de orden n
2. Clasificarla en base al término independiente y sus coeficientes.
3. Definir dependencia lineal de un sistema de funciones y su interrelación con el Wronskiano asociado al mismo.
4. Resolver ecuaciones diferenciales lineales homogéneas.

Bibliografía

- Ecuaciones diferenciales con aplicaciones , Dennis G. Zill, Epígrafe 4.1 pág. 112 a la 127 Epígrafe 4.3 pág. 136 a la 144

Introducción

En las primeras conferencias nos dedicamos a resolver ciertos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Ahora pasaremos a resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden o mayor. Por lo que examinaremos algo de la teoría y métodos para resolver ciertos tipos de ecuaciones lineales.

Desarrollo

Problema de valores iniciales. Para una ecuación diferencial lineal, un problema de valores iniciales de orden n es.

$$a_n(x)\ \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{x} + a_0(x)y = f(x) \tag{1}$$

Sujeto a :

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \cdots\ ,\ y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$$

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_0(x)y=f(x)$$

$\boxed{\text{Coeficientes}}\begin{cases}\text{Constantes}\\ \text{Variables}\end{cases}$

$\boxed{f(x)\equiv 0}$ Homogénea

Ejemplos:

$$x\frac{d^2y}{dx^2}-e^x\frac{dy}{dx}+y=x^3$$

Lineal
Orden 2
No homogénea
Coeficientes variables

$$y'''-y'=x^2+\text{sen}\,x$$

Lineal
Orden 3
No homogénea
Coeficientes constantes

$$\frac{d^3u}{dt^3}-t\frac{d^2u}{dt^2}=0$$

Lineal
Orden 3
Homogénea
Coeficientes variables

$$y\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=x+1$$

No lineal
Orden 2

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\text{sen}\,y$$

No lineal
Orden 2

Al igual que para los problemas de Cauchy de primer orden estudiamos un teorema de existencia y unicidad de la solución veamos las condiciones de existencia y unicidad para un problema de tipo (1)

TEOREMA 1 (EXISTENCIA DE UNA SOLUCIÓN ÚNICA) *Sean $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, $\cdots$ $a_1(x)$ y $g(x)$ continuas en un intervalo I, y sea $a_n(x)\neq 0$ para todo x del intervalo. Si $x=x_0$ es cualquier punto en el intervalo, existe una solución en dicho intervalo $y(x)$ del problema de valores iniciales representado por las ecuaciones 1 que es única.*

EJEMPLO 0.1 *Dado el siguiente problema de valores iniciales.*

$$
\begin{aligned}
&\textit{Resolver :} \quad 3\frac{d^3y}{dx^3}+5\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+7y=0\\
&\textit{Sujeto a :} \quad y(1)=0,\ y'(1)=0,\ y^{''}(1)=0
\end{aligned}
$$

Muestre que $y=0$ es solución única.

Solución

Como $a_3(x)=3$, $a_2(x)=5$, $a_1(x)=-1$, $a_0(x)=7$ y $g(x)=0$ son funciones continuas en cualquier intervalo I y $a_3(x)=3\neq 0$ para todo x del intervalo I. Podemos comprobar que se cumplen las condiciones del teorema por tanto $y=0$ es la única solución del problema planteado.

Ejemplo 0.2 *Comprobar que la función $y=3e^{2x}+e^{-2x}-3x$ es una solución del problema de valores iniciales*

$$
\begin{aligned}
&\textit{Resolver :} \quad y''-4y=12x\\
&\textit{Sujeto a :} \quad y(0)=4,\ y'(0)=1
\end{aligned}
$$

Solución

Como $a_2(x)=1$, $a_1(x)=-4$ y $g(x)=12x$ son funciones continuas en cualquier intervalo I y $a_2(x)=1\neq 0$ para todo x del intervalo I están garantizadas las condiciones del teorema de existencia y unicidad y como se cumple que

$$y=3e^{2x}+e^{-2x}-3x \Rightarrow y(0)=3+1=4$$

$$y=3e^{2x}+e^{-2x}-3x \Rightarrow y'(x)=6e^{2x}-2e^{-2x}-3 \Rightarrow y'(0)=6-2-3=1$$

y además tenemos que

$$y''(x)=12e^{2x}+4e^{-2x}$$

sustituyendo en la ecuación tenemos que

$$12e^{2x}+4e^{-2x}-4\left(3e^{2x}+e^{-2x}-3x\right)=12x \Rightarrow 12x=12x$$

luego como se cumple que la función es solución de la ecuación y además cumple con las condiciones iníciales entonces es la única solución del problema planteado.

Problema de valor en la frontera. Para una ecuación diferencial lineal, un problema de valor en la frontera de orden n es.

$$
\begin{aligned}
&\text{Resolver :} \quad a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{x}+a_0(x)y=g(x)\\
&\text{Sujeto a :} \quad y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1,\ \cdots,\ y(x_n)=y_n
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Los problemas de valores en la frontera aun cumpliendo las condiciones del teorema de existencia y unicidad pueden tener

i) varias soluciones

ii) solución única

iii) ninguna solución

DEFINICIÓN 0.1 *Una ecuación lineal de orden n de la forma*

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{x} + a_0(x)y = 0 \tag{3}$$

se llama homogénea, mientras que una ecuación

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{x} + a_0(x)y = g(x) \tag{4}$$

donde $g(x)$ no es idénticamente cero, se llama no homogénea.

EJEMPLO 0.3 *Clasifique las siguientes ecuaciones:*

a) $2y'' + 3y' + 5y = 0$
Solución
Ecuación diferencial lineal homogénea de orden 2.

b) $x^3y''' + 6y' + 10y = e^x$
Solución
Ecuación diferencial lineal no homogénea de orden 3.

Para resolver una ecuación lineal no homogénea como la (4), en primera instancia debemos poder resolver la ecuación homogénea asociada (3) y para ello analicemos algunos aspectos teóricos que nos permitan encontrar la solución de la ecuación

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{x} + a_0(x)y = 0$$

Operadores diferenciales: En cálculo, la diferenciación suele indicarse con la D mayúscula; esto es, $\frac{dy}{dx} = Dy$. El símbolo D se llama operador diferencial porque transforma una función diferenciable en otra función; por ejemplo, $D(\cos 4x) = -4sen4x$ y $D(5x^3 - 6x^2) = 15x^2 - 12x$. Las derivadas de orden superior se pueden expresar en términos de D en forma natural $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = D^2(y)$ y en general $\frac{d^ny}{dx^n} = D^ny$ donde y representa una función suficientemente diferenciable.
En general, el **operador diferencial** de orden **n** se define

$$P(D) = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x) \tag{5}$$

Como consecuencia de la propiedad básica de diferenciación el operador diferencial D verifica la propiedad de linealidad

$$D(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha D(f(x)) + \beta D\,(g(x))$$

Ahora toda ecuación diferencial se puede expresar en notación de operadores por ejemplo la ecuación

$$y'' + 5y' + 6y = 5x - 3$$

se puede escribir en la forma

$$D^2y + 5Dy + 6y = 5x - 3$$

o como

$$\left(D^2 + 5D + 6\right) y = 5x - 3$$

Teorema 2 (Principio de superposición) *Sean $y_1, y_2, \ldots, y_k$ soluciones de la ecuación diferencial homogónea de orden n*

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{x} + a_0(x)y = 0$$

donde x esta en un intervalo I. La combinación lineal

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ky_k$$

en donde los c_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ son constantes arbitrarias, también es una solución cuando x esta en el intervalo I.

Demostración
Representemos la ecuación

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{x} + a_0(x)y = 0$$

en terminos de operadores

$$P(D)\, y = 0$$

ahora debemos probar que

$$P(D)(c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ky_k) = 0$$

en virtud de la propiedad de linealidad resulta que

$$P(D)\,(c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ky_k) = c_1P\,(D)y_1 + c_2P\,(D)y_2 + \cdots + c_kP\,(D)y_k$$

y como $P(D)y_i = 0$ entonces se cumple que

$$P(D)\, y = 0$$

y por tanto está demostrado que $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ky_k$ es solución de la ecuación homogénea.

Definición 0.2 *Se dice que un conjunto de funciones* $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ *es* ***linealmente dependiente*** *(LD) en un intervalo* I *si existen constantes* $c_1, c_2, \cdots, c_n$ *no todas nulas, tales que*

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_nf_n(x) = 0$$

para todo x *en el intervalo.En caso contrario se dice que es* ***linealmente independiente*** *(LI).*

La definición anterior es equivalente a decir que un sistema de funciones es LD en un intervalo I, si al menos una de las funciones se puede expresar como combinación lineal de las restantes. En consecuencia es LI si ninguna se puede expresar como combinación lineal de las restantes.

Ejemplo 0.4 *Diga si los siguientes conjuntos de funciones son LI o LD.*

1. $A = \{1, x, x^2\}$
   solución
   $c_1 \cdot 1 + c_2x + c_3x^2 = 0$ *y como esto solo se cumple para* $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ *entonces el conjunto* A *es LI.*

2. $B = \{\sqrt{x} + 5, \sqrt{x} + 5x, x - 1, x^2\}$
   solución
   $c_1(\sqrt{x} + 5) + c_2(\sqrt{x} + 5x) + c_3(x - 1) + c_4(x^2) = 0$ *y como podemos apreciar se cumple para* $c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 5, c_4 = 0$ *por tanto el conjunto* B *es LD*

Investigar la dependencia o no de un sistema de funciones a partir de la definición, en general, no es tarea fácil. El siguiente teorema aporta una condición suficiente en este sentido:

Teorema 3 *Sean* $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ *funciones derivables al menos hasta el orden* $(n - 1)$ *en un intervalo I. Si el determinante llamado Wronskiano:*

$$W(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{n-1} & f_2^{n-1} & \cdots & f_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

no es cero por lo menos en un punto de I, entonces el sistema de funciones $\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)\}$ *es linealmente independiente.*

Ejemplo 0.5 *Diga si los siguientes sistemas de vectores son LI o LD*

$\{e^{m_1x}, e^{m_2x}\}$ *con* $m_1 \neq m_2$
Solución

$$W(e^{m_1x}, e^{m_2x}) = \begin{vmatrix} e^{m_1x} & e^{m_2x} \\ m_1e^{m_1x} & m_2e^{m_2x} \end{vmatrix} = m_2e^{(m_1+m_2)x} - m_1e^{(m_1+m_2)x} = (m_2 - m_1)e^{(m_1+m_2)x} \neq 0$$

para todo x *real.*
Nota *es posible también probar que los sistemas de vectores*

- $\{e^{m_1x}, e^{m_2x}, \cdots, e^{m_kx}\}$ *con* $m_1, \cdots m_k$ *reales y diferentes entre si*
- $\left\{e^{mx}, xe^{mx}, \cdots, x^{k-1}e^{mx}\right\}$ *donde* m *es real y* $k(>1)$ *natural*
- $\left\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}sen\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}sen\beta x, \cdots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x\right\}$ *donde* α *y* β *son reales y* $k(>1)$ *natural.*

Son LI

Definición 0.3 *Se denomina sistema fundamental de soluciones en un intervalo I, a cualquier conjunto de n soluciones linealmente independientes de la ecuación*

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{x} + a_0y = 0$$

en el intervalo I.

De donde podemos obtener el siguiente resultado.

Teorema 4 *Sea* $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ *un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación*

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{x} + a_0y = 0$$

Entonces la solución general de la misma es $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$ *.*

Luego para resolver la ecuación $a_n(x)\dfrac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1\dfrac{dy}{x}+a_0y = 0$

solo necesitamos buscar el conjunto fundamental de soluciones. La búsqueda de un conjunto fundamental de soluciones para una EDOLH con coeficientes variables es en general una tarea difícil, sin embargo, para el caso de coeficientes constantes

$$a_n\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{x} + a_0y = 0$$

es posible determinar un conjunto fundamental de soluciones, buscando soluciones de la forma $y = e^{mx}$, donde m es un número complejo (o real como caso particular) a determinar para que constituya solución de la EDOLH. Mostraremos el procedimiento para el caso particular de una ED de orden 2, generalizando los resultados de los casos a los que se arriban.

Dada la ecuación $a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$ o $L_2(D)y = 0$ donde $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $a_2 \neq 0$
Sustituyendo $y = e^{mx}$ en la ecuación resulta:
$a_2m^2e^{mx} + a_1me^{mx} + a_0e^{mx} = 0$ como $e^{mx} \neq 0$ para todo x entonces dividiendo por e^{mx} se obtiene la siguiente ecuación de segundo grado

$$a_2m^2 + a_1m + a_0 = 0$$

Sus soluciones dependen de los siguientes casos.

I. $D > 0$ que implica que la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes m_1 y m_2 por tanto tendremos que las funciones e^{m_1x} y e^{m_2x} son soluciones de la ecuación pero además son LI por tanto la solución de la ecuación deferencial será

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$$

II $D = 0$ que implica que la ecuación tiene una solución real de multiplicidad dos.

Pero son dos soluciones , por lo que es necesario buscar la otra. Si consideramos una ecuación del tipo

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \text{ecuación característica}$$

donde conocemos que $y = y_1$ es una solución nos proponemos encontrar otra que tenga la forma $y = u(x)$

$y_1 = u(x)e^{mx}$

$y' = u'(x)e^{mx} + mu(x)e^{mx}$

$$y'' = u''(x)e^{mx} + mu'(x)e^{mx} + mu'(x)e^{mx} + m^2u(x)e^{mx} = e^{mx}(u''(x) + 2mu'(x) + m^2u(x))$$

sustituyendo en la ecuación tenemos que:

$$a\left[\cancel{e^{mx}}\,(u''(x)+2mu'(x)+m^2u(x))\right]+b\left[\cancel{e^{mx}}\,(u'(x)+mu(x))\right]+cu(x)\cancel{e^{mx}} = 0$$

$$au''(x)+2amu'(x)+am^2u(x)+bu'(x)+bmu(x)+cu(x)=0$$

$$au''(x)+\underbrace{(2amu'(x)+bu'(x))}_{=0 \;\; pues \;\; m=-\frac{b}{2a}}+\underbrace{(am^2+bm+c)}_{\text{Ecuación característica por lo que es igual a cero}}u(x)=0$$

$$au''(x) = 0 \;\; \Rightarrow u''(x) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; u'(x) = c \;\; \Rightarrow \;\; u(x) = cx$$

como se había supuesto:

$y_1 = u(x)e^{mx} \;\; \Rightarrow \;\; y_1 = u(x)e^{mx}$

por tanto la solución general será:

$y = c_1e^{mx} + c_2xe^{mx}$

III. $D < 0$ las soluciones son complejas por tanto $m = \alpha \pm \beta i$ y la solución es:

$$y = c_1e^{\alpha+\beta i}x + c_2e^{\alpha-\beta i}x$$

que haciendo uso de la identidad de Euler

$$e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta$$

se obtiene

$$y = e^{\alpha x}\left(c_1cos\beta x + c_2sen\beta x\right)$$

Ejemplo 0.6 Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $2y'' - 5y' - 3y = 0$
b) $y'' - 10y' + 25y = 0$
c) $y'' + y' + y = 0$

Solución

a) $2m^2 - 5m - 3 = 0 \Rightarrow (2m+1)(m-3) = 0 \Rightarrow m = -\dfrac{1}{2}$, $m = 3$ la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes por tanto su conjunto fundamental de soluciones es

$$CFS = \left\{ e^{\frac{1}{2}x}, e^{3x} \right\}$$

y la solución de la ecuación es

$$y = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{3x}$$

b) $m^2 - 10m + 25 = 0 \Rightarrow (m-5)^2 = 0 \Rightarrow m = 5$ la ecuación tiene una solución real de multiplicidad dos por tanto su conjunto fundamental de soluciones es

$$CFS = \left\{ e^{5x}, xe^{5x} \right\}$$

y la solución de la ecuación es

$$y = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}$$

c) $m^2 + m + 1 = 0 \Rightarrow m = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ la ecuación tiene soluciones complejas tenemos que $\alpha = \dfrac{-1}{2}$ y $\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ por tanto su conjunto fundamental de soluciones es

$$CFS = \left\{ e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right), e^{-\frac{1}{2}x} sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\}$$

y la solución de la ecuación es

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + c_2 sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

Conclusiones

Señalar que esta conferencia en lo esencial está encaminada hacia la solución de EDOLH de orden n, destacando el papel del bien llamado teorema fundamental para su solución, según el cual la solución de este tipo de ecuación se reduce a la determinación de un conjunto fundamental de soluciones. Para ello resulta imprescindible identificar cuándo un conjunto de funciones es LI y su interrelación con el Wronskiano asociado a las mismas. Resumir el procedimiento para resolver EDOLH con coeficientes constantes, resaltando la interrelación entre el operador y la ecuación característica (ecuación auxiliar, polinomio característico). Como motivación para la siguiente conferencia, señalar que lo estudiado en esta conferencia es muy necesario de dominar, por ello, y como preparación previa para la clase práctica correspondiente y a la próxima conferencia, es importante la realización del estudio independiente que a continuación se presenta.

Trabajo Independiente

Estudiar la bibliografía indicada, haciendo énfasis en los ejemplos presentes en la misma
Resolver los siguientes ejercicios:

1. Diga Verdadero o Falso o complete los espacios en blanco según corresponda:
   a) Dos funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son LI en un intervalo si una no es un múltiplo constante de la otra.
   b) Las funciones $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 1 - x^2$ y $f_3(x) = 2 + x^2$ son linealmente independientes en el intervalo $-\infty < x < \infty$
2. ejercicios del 1-36 pág 143