ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Actividad # 27

Sumario: Definición de una ecuación diferencial. Clasificación. Tipos de soluciones. Problema de Cauchy. Teorema de existencia y unicidad. Ecuaciones diferenciales de primer orden. Ecuaciones diferenciales de variables separadas y separables. Solución.

OBJETIVOS

1. Describir el concepto de ecuación diferencial y los asociados al tema tales como orden, grado, solución, solución general y solución particular.
2. Resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden de variables separadas y separables.

BIBLIOGRAFÍA

- Zill. Sección 1.1, 2.1, 2.2, 2.3 (pag. 1-12, 31- 50).

INTRODUCCIÓN

Uno de los temas más importantes de la Matemática es el relacionado con el estudio de las Ecuaciones Diferenciales, pues una gran variedad de problemas de la Física, la Química, la propia Matemática, la Biología, la sociedad, entre otros problemas; conducen a ecuaciones diferenciales, para la comprensión de este tema es bueno recordar el significado de la derivada de una función de una variable $y = f(x)$); insistiendo que la derivada $\frac{dy}{dx}$ expresa la rapidez de cambio de la magnitud y respecto de la magnitud x. En el caso de que la variable y represente el espacio recorrido s por un cuerpo y la variable x represente el tiempo t; entonces la derivada $\frac{ds}{dt}$ representa la velocidad del cuerpo en el instante t. También, si y representa la velocidad v de un cuerpo y x representa el tiempo t; entonces la derivada $\frac{dv}{dt}$ representa la aceleración del cuerpo en el instante t. Por ejemplo, si la variable y representa la carga q de un conductor respecto al tiempo, entonces la derivada de la carga respecto al tiempo $\frac{dq}{dt}$ representa la intensidad de corriente que hay en el conductor en el instante t.

Ejemplo No.1: Un cuerpo de masa m cae desde cierta altura. Determine la velocidad v con que cae el mismo; si sobre el cuerpo además de la fuerza de gravedad; actúa la fuerza de resistencia del aire, la cual es proporcional a la velocidad.
Solución. De acuerdo con las consideraciones del problema se debe utilizar la segunda ley de Newton de movimiento de un cuerpo: $F = ma$
Es decir, $F = m\frac{dv}{dt}$, donde $\frac{dv}{dt}$ es la aceleración del cuerpo en movimiento y F representa la fuerza que actúa sobre el cuerpo en la dirección del movimiento; siendo la suma de dos fuerzas. Aquella que es debida a la fuerza de gravedad $F_g = mg$, y la que corresponde con la

fuerza de resistencia del aire $F_r = -kv$, donde la presencia del signo menos es debido a que esta fuerza se opone al movimiento del cuerpo y k es una constante de proporcionalidad. Así se obtiene la ecuación:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

Puede observarse que se ha obtenido una ecuación que relaciona una función que se desconoce v y su derivada $\frac{dv}{dt}$ Más aún, se ha obtenido lo que se denomina una ecuación diferencial respecto a la función incógnita v y como la derivada que aparece en la ecuación es de primer orden se dice que la ecuación diferencial es de primer orden.
Hemos analizado una situación que conducen a una ecuación diferencial, pero, surgen varias preguntas:

I ¿Bajo qué condiciones existe o se garantiza la existencia de solución de una ecuación diferencial dada ?
II ¿Si existe la solución, esta es única?
III ¿Si existe y es única, cómo determinar la solución?

Para dar respuestas a tales interrogantes comenzaremos con las definiciones de ecuación diferencial, orden y solución de una ecuación diferencial.

Desarrollo

Definición 0.1 *Una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes es una ecuación diferencial.*

Las ecuaciones diferenciales se clasifican de acuerdo a su tipo, orden y linealidad.

Clasificación según el tipo.

Definición 0.2 *Si una ecuación sólo contiene derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, entonces se dice que es una ecuación diferencial ordinaria.*

Ejemplo 0.1 $4\frac{dy}{dx} + 10y = e^x$ *y* $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0$ *son ecuaciones diferenciales ordinarias.*

Definición 0.3 *Una ecuación que contiene las derivadas parciales de una o más variables dependientes, respecto a dos o más variables independientes, se llama ecuación en derivadas parciales*

Ejemplo 0.2 $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ *son ecuaciones en derivadas parciales*

Clasificación según el orden.

Definición 0.4 *El orden de una ecuación diferencial (ordinaria o en derivadas parciales) es el de la derivada de mayor orden en la ecuación*

Ejemplo 0.3 $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$ *es una ecuación diferencial de segundo orden.*

Una ecuación diferencial ordinaria general de orden n se suele representar mediante los símbolos $F(x, y, y', y'', \ldots, y^n) = 0$

Clasificación según la linealidad o no linealidad

Definición 0.5 *Se dice que una ecuación diferencial es lineal si tiene la forma:*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Debemos notar que las ecuaciones diferenciales lineales se caracterizan por dos propiedades:

1. La variable dependiente y y todas sus derivadas son de primer grado; esto es, la potencia de todo término donde aparece y es 1.

2. Cada coeficiente sólo depende de x, que es la variable independiente.

Una ecuación que no es lineal se dice no lineal.

Ejemplo 0.4 *Clasifique las siguientes ecuaciones de acuerdo al orden y su linealidad.*

1. $xdy + ydx = 0$
   Solución
   $xdy + ydx = 0 \Rightarrow \frac{xdy}{dx} + y = 0$ *por tanto es una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden.*

2. $y'' - 2y' + y = 0$
   Solución
   es una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo órden.

3. $yy'' - 2y' = x$
   Solución
   es una ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden, debido al que existe un coeficiente en y.

Definición 0.6 *Se dice que una función f cualquiera, definida en un intervalo I, es solución de una ecuación diferencial en el intervalo, si sustituida en dicha ecuación la reduce a una identidad.*

Ejemplo 0.5 *Muestre que la función* $y = \frac{x^4}{16}$ *es una solución de la ecuación*
$\frac{dy}{dx} - xy^{\frac{1}{2}} = .$ cl ä ɵ : v : ɵ

Solución:

sustituyendo la solución en la ecuación diferencial

$\frac{4x^3}{16} - x\frac{x^2}{4} = 0 \Rightarrow \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{4} = 0$ *para todo número real.*

Ejemplo 0.6 *Demuestre que la función* $\left(\frac{x^2}{4}+c\right)^2$ *es una solución de la ecuación*

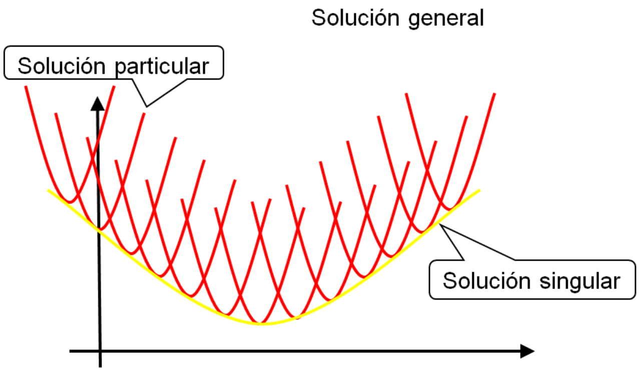
$\frac{dy}{dx} - xy^{1/2} = 0$ *en* $-\infty < x < \infty$ *sustituyendo en la ecuación diferencial, fijense que hay que derivar la función para poder sustituir*

Solución

$$2\left(\frac{x^2}{4}+c\right)\frac{x}{2} - x\left(\frac{x^2}{4}\right) + c = 0 \Rightarrow \frac{x^3}{4} + xc - \frac{x^3}{4} - xc = 0$$ *para todo número real.*

Nota

- $y = \left(\frac{x^2}{4}+c\right)^2$ Familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación.
- $y = \frac{x^4}{16}$ Solución particular que se obtiene para $c = 0$. No contiene constantes arbitrarias
- $y = 0$ Solución singular ya que no se obtiene para ningún valor de c de la familia uniparamétrica.



cada función en rojo es una solución particular

todas las soluciones particulares forman la solución general

Definición 0.7 *Si todas las soluciones de* $F(x, y, y', y'', \ldots, y^n) = 0$ *en un intervalo* I *pueden obtenerse de* $G(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$ *mediante valores apropiado de los* c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ *entonces se dice que la familia n- paramétrica es la solución general o completa de la ecuación diferencial.*

Comencemos por estudiar las ecuaciones diferenciales de primer orden. **Problema del valor inicial.(Problema de Cauchy)**

Sea $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ Sujeta a la condición $y(x_0) = y_0$

Dado este problema surgen las siguientes interrogantes. ¿Existe una solución del problema? ¿Es la única?

Ejemplo 0.7 *Dado el siguiente problema de Cauchy*

$$\frac{dy}{dx} - xy^{\frac{1}{2}} = 0 \qquad y(0) = 0$$

ya habiamos analizados que la función $y = \left(\frac{x^2}{4}+c\right)^2$ *era solución de la ecuación para todo* x *real si ahora utilizamos la condición obtenemos que* $y = \frac{x^4}{16}$ *es solución del problema de Cauchy. Pero también la función* $y = 0$ *es solución del problema de Cauchy por lo tanto tenemos al menos dos soluciones del problema.*

Sin embargo el siguiente teorema da condiciones suficientes para la existencia de una solución única del problema de Cauchy.

Teorema 1 *Sea R una región rectangular en plano xy definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ que contiene al punto (x_0, y_0)en su interior. Si $f(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en R, entonces existe un intervalo I con centro en x_0 y una única función $y(x)$ definida en I que satisface el problema de Cauchy.*

Ejemplo 0.8

$$\frac{dy}{dx} - xy^{\frac{1}{2}} = 0 \quad y(0) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f(x,y) = xy^{\frac{1}{2}} \quad y \quad \frac{\partial f}{dy} = \frac{x}{2y^{\frac{1}{2}}}$$

luego para que la ecuación tenga solución única x tendrá que ser real y mayor que cero. Por eso en el punto (0,0) no se garantiza la existencia de una solución única.

Ejemplo 0.9 *Verifique que la función $y = 3e^x$ es la única solución del problema de Cauchy*

$$y = y' \quad y(0) = 3$$

Solución

$$y = y' \Rightarrow 3e^x = (3e^x)' \Rightarrow 3e^x = 3e^x$$

sustituyendo la función en la ecuación para verificar si es solución

$$y(0) = 3 \Rightarrow 3 = 3e^0 = 3$$

por otro lado tenemos que $f(x,y) = y$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 1$ son continuas en todo el plano xy. Por tanto la solución es única.

Para encontrar las soluciones de las ecuaciones vamos a estudiar varios casos. Analicemos la ecuación diferencial más simple de primer orden. Si $g(x)$ es una función continua dada, entonces la ecuación de primer orden $\dfrac{dy}{dx} = g(x)$ se puede resolver por integración

$$y = \int g(x)dx + c$$

Ejemplo 0.10 *Resolver* $\dfrac{dy}{dx} = 1 + e^{2x}$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = 1 + e^{2x} \qquad dy = (1 + e^{2x})dx$$

expresando la ecuación en forma diferencial e integrando

$$y = x + \frac{1}{2}e^{2x} + c$$

Definición 0.8 *Se dice que una ecuación diferencial de la forma $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g(x)}{h(y)}$ es separable o que tiene variable separable.*

Ejemplo 0.11 *Resolver*

1. $(1 + x)dy - ydx = 0$

Solución
dividamos la ecuación por $(1+x)y$

$$\frac{1}{y}dy - \frac{1}{1+x}dx = 0$$

$$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{1+x}dx$$

$$\int \frac{1}{y}\ dy = \int \frac{1}{1+x}dx$$
$$\ln|y| = \ln|1+x| + c$$

2. $xsen(x)e^{-y}dx - ydy = 0$

Solución
multipliquemos la ecuación por e^y

$$xsenxdx - ye^y dy = 0$$

$$xsenxdx = ye^y dy$$

$$\int xsenxdx = \int ye^y dy$$

$$-xcosx + senx = ye^y - e^y + c$$

Conclusiones

Precisar

- ¿Que es una ecuación diferencial ordinaria?
- ¿Cuando un problema de Cauchy tiene solución única?
- ¿Que es una ecuación de variable separable?

Trabajo Independiente

- Ejercicios del 1 al 10 pág 35.
- Ejercicios 2.2 pág 43