Series de Fourier

Sumario: Definiciones preliminares. Serie trigonométrica. Series de Fourier. Obtención de los coeficientes de Fourier. Criterio suficiente de convergencia para desarrollar una función en serie de Fourier. Criterio de Dirichlet. Funciones pares e impares.

Objetivos

1. Operar con la series de Fourier, a partir de las definiciones y teoremas estudiados.
2. Aproximar funciones mediante series de Fourier.

Bibliografía

- Series Tomo II pág. 282-348.

Introducción

En las clases anteriores acabamos de estudiar el desarrollo de funciones en series de potencias y de las ventajas que se obtuvo al resolver determinados tipos de problemas. Por ejemplo:

$$\int_0^1 e^x dx$$

Las funciones no solo podran representarse como una serie de potencias, existen otras maneras de poder representarlas y la clase de hoy se dedicará a estudiar como representarlas en serie de senos y cosenos y para ello debemos recordar algunos resultados antes estudiados.

Desarrollo

Definición 0.1 *Una función $f(x)$ se dice periódica con período $T \neq 0$ si :*

$$f(x) = f(x+T)$$

Para todos los valores de x en el dominio de $f(x)$

También es bueno señalar sobre las funciones periódicas, los siguientes resultados.

- Si f tiene período T, entonces kT, $k \in \mathbb{Z}$, también es un período de f o sea que
$$f(x+kT) = f(x)$$
- $f(x) = Asen(wx + \phi)$ donde A, ϕ son constantes y $w = \dfrac{2\pi}{T}$ es la frecuencia de $f(x)$

- Calcular las siguientes integrales $T = \dfrac{2\pi}{w}$

$$\int_c^{c+T} cosnwxdx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq 0 \\ T & \text{si} \quad n = 0 \end{cases}$$

$$\int_c^{c+T} sennwxdx = 0, \text{ para todo } n$$

$$\int_c^{c+T} sennwxsenmwxdx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq m \\ \frac{1}{2}T & \text{si} \quad n = m \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_c^{c+T} cosnwxcosmwxdx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq m \\ \frac{1}{2}T & \text{si} \quad n = m \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_c^{c+T} sennwxcosmwxdx = 0, \text{ para todo } n \text{ y } m$$

Definición 0.2 *Se dice que $f(x)$ es una función seccionalmente continua en el intervalo $[a, b]$, si $f(x)$ es continua en todo punto del intervalo con la excepción de un número finito de puntos en los cuales tiene discontinuidades finitas.*

Definición 0.3 *Una serie trigonométrica es una serie de la forma:*

$$\frac{a_0}{2} + a_1coswx + b_1senwx + a_2cos2wx + b_2sen2wx + \cdots + a_ncosnwx + b_nsennwx + \cdots =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_ncosnwx + b_nsennwx$$

donde a_0, a_n, y b_n para $n = 1, 2, 3, \cdots$, son números reales, llamados coeficientes de la serie trigonométrica.

Supongamos que la serie converge en x_0 y analicemos la convergencia de la serie en los puntos $x_0 + \dfrac{2\pi}{w}$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_ncosnwx + b_nsennwx \qquad \text{sustituyendo x por } x_0 + \frac{2\pi}{w}$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_ncos(nw(x_0 + \frac{2\pi}{w})) + b_nsen(nw(x_0 + \frac{2\pi}{w})) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_ncos\left(nwx_0 + nw\frac{2\pi}{w}\right) + b_nsen\left(nwx_0 + nw\frac{2\pi}{w}\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_ncos\,(nwx_0 + n2\pi) + b_nsen\,(nwx_0 + n2\pi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_ncos\,(nwx_0) + b_nsen\,(nwx_0)$$

por tanto la serie converge en los puntos $x_0 + \frac{2\pi}{w}$
Por tanto, si denotamos X el conjunto de aquellos puntos, en los cuales la serie trigonométrica considerada converge y para cada $x \in X$ definimos $f(x)$ por:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cosnwx + b_n sennwx$$

resulta que $f(x)$ es una función periódica de período T

Supongamos que tenemos una función $f(x)$, seccionalmente continua en el intervalo [c, c+T] y periódica con período T y que es la suma de una serie trigonométrica en el intervalo [c, c+T], es decir,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cosnwx + b_n sennwx$$

Entonces para poder representar la función mediante la serie tenemos que determinar sus coeficientes y para ello vamos a aceptar que la serie trigonométrica se puede integrar término a término (Pues demostrar si es posible no está en los propósitos del curso).
Calculemos a_0 y a_n, la demostración de b_n la pueden ver en el libro de texto.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cosnwx + b_n sennwx \qquad \text{integrando cada término}$$

$$\int_c^{c+T} f(x)dx = \int_c^{c+T} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \overbrace{\int_c^{c+T} \cos(\cancel{nwx})\, dx}^{=0\ \forall\ n} + b_n \overbrace{\int_c^{c+T} sen(\cancel{nwx}) dx}^{=0\ \forall\ n}\right] = \frac{a_0}{2} x|_c^{c+T} = \frac{a_0}{2}[c+T-c] = \frac{a_0}{2}T$$

o sea $\boxed{a_0 = \frac{2}{T}\int_c^{c+T} f(x)dx}$

Si ahora multiplicamos por $cosmwx$, $m \neq 0$ e integramos

$$\int_c^{c+T} f(x)\cos(mwx)dx = \overbrace{\int_c^{c+T} \frac{a_0}{2}\cancel{\cos(mwx)}dx}^{=0\ \forall\ n} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \overbrace{\int_c^{c+T} \cos(nwx)\cancel{\cos(mwx)}\, dx}^{=0\ \forall\ n \neq m} + b_n \overbrace{\int_c^{c+T} sen(nwx)\cancel{\cos(mwx)}dx}^{=0\ \forall\ n}\right]$$

$$a_m = \int_c^{c+T} cos^2(mwx)dx = a_m\frac{T}{2} \qquad \boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_c^{c+T} f(x)cos(nwx)dx}$$

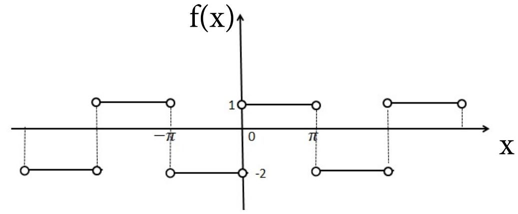
similarmente se obtiene b_n como $\boxed{b_n = \frac{2}{T}\int_c^{c+T} f(x)sen(nwx)dx}$

Ejemplo 0.1 *Dada la función*

$$f(x) = \begin{cases} -2 & si \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & si \quad 0 < x < \pi \end{cases} \qquad \textit{con período } T = 2\pi$$

1. *Represente gráficamente la función.*
2. *Determine el desarrollo trigonométrico de Fourier*

Solución



$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -2dx + \int_{0}^{\pi} dx\right) = \frac{3}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -2cosnxdx + \int_{0}^{\pi} cosnxdx\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sennxdx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -2sennxdx + \int_{0}^{\pi} sennxdx\right) = -\frac{2cosn\pi}{n\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

$$por\ tanto\ f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} sennx$$

TEOREMA 1 *Supongamos que:*

- $f(x)$ *es periódica con período* T, *y que,*
- $f(x)$ *y* $f'(x)$ *son seccionalmente continua en* [c, c+T]

Entonces :
La serie trigonométrica de Fourier de $f(x)$ *converge hacia:*

a) $f(x_o)$ *si* x_0 *es un punto decontinuidad de* $f(x)$

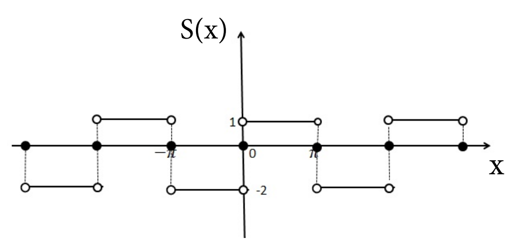
b) $\dfrac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$ *si* x_0 *es un punto de discontinuidad de* $f(x)$.

En el Ejemplo 1, si se verifican las condiciones del teorema de Dirichlet resulta que

$$S(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} sennx$$

el desarrollo converge a la función suma S(x)

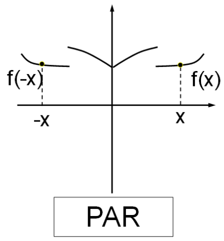
y la gráfica de $S(x)$ será



Desarrollo trigonométrico de Fourier de funciones pares e impares

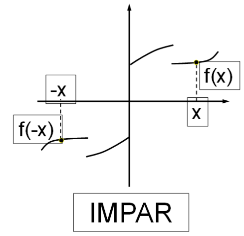
f es PAR

Si f(x) existe, entonces f(-x) = f(x)



f es IMPAR

Si f(x) existe, entonces f(-x) = - f(x)



Operaciones con funciones pares e impares

+ -	P	I
P	P	
I		I

* /	P	I
P	P	I
I	I	P

$$\int_{-a}^{a} P(x)dx = 2\int_{0}^{a} P(x)dx \qquad \int_{-a}^{a} I(x)dx = 0$$

Funciones impares en un intervalo [-a,a] con T=2a

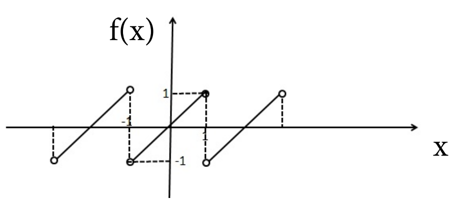
$$a_0 = \tfrac{2}{T}\int_{-a}^{a} \underset{\mathrm{I}}{f(x)}dx = 0 \qquad a_n = \tfrac{2}{T}\int_{-a}^{a} \underset{\mathrm{I}}{f(x)}\underset{\mathrm{P}}{\cos(nwx)}dx = 0 \qquad b_n = \tfrac{2}{T}\int_{-a}^{a} \underset{\mathrm{I}}{f(x)}\underset{\mathrm{I}}{\mathrm{sen}(nwx)}dx = \tfrac{4}{T}\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{sen}(nwx)dx$$

Funciones pares en un intervalo [-a,a] con T=2a

$$b_n = \tfrac{2}{T}\int_{-a}^{a} \underset{\mathrm{P}}{f(x)}\underset{\mathrm{I}}{sen(nwx)}dx = 0 \qquad a_0 = \tfrac{2}{T}\int_{-a}^{a} \underset{\mathrm{P}}{f(x)}dx = \frac{4}{T}\int_{0}^{a} f(x)dx \qquad a_n = \tfrac{2}{T}\int_{-a}^{a} \underset{\mathrm{P}}{f(x)}\underset{\mathrm{P}}{\cos(nwx)}dx = \tfrac{4}{T}\int_{0}^{a} f(x)\cos(nwx)dx$$

EJEMPLO 0.2 *Dada la función* $f(x) = x, \quad x \in]-1, 1[$ *y periódica con período* $T = 2$. *Determine el desarrollo trigonométrico de Fourier*

Solución



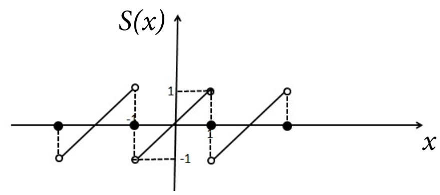
antes de continuar observemos que la función es impar y cuando esto ocurre el cálculo de la integrales se simplifica tanto para las funciones pares como impares veamos como afecta esto a los coeficientes de Fourier.

$$\frac{a_0}{2} = 0 \qquad a_n = 0 \qquad b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x) sennwxdx \qquad w = \frac{2\pi}{T}$$

$$b_n = 2\left(\int_0^1 xsenn2\pi x dx\right) = -\frac{1}{\pi}$$

$$por\ tanto\ f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{\pi}\ senn\pi x$$

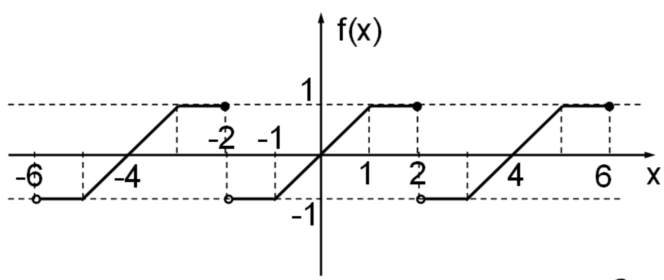
Verificando las condiciones del teorema de Dirichlet resulta que:
$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{\pi} senn\pi x$ y la gráfica de $f(x)$ sera



Ejemplo 3. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -2 \le x < -1 \\ x & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$ con período T=4

Halle la serie trigonométrica de Fourier generada por f(x) y dibuje la gráfica de la suma de la serie

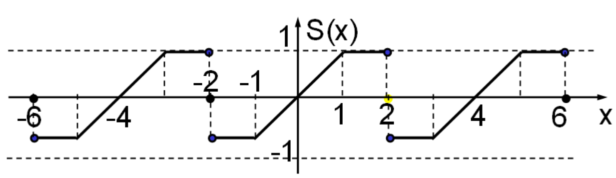


como f(x) es impar, $a_0=0$ y $a_1=0$ $\quad w = \frac{2\pi}{T} \quad w = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$$b_n = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(x)sen(nwx)dx = 2(\tfrac{2}{4})\int_0^2 f(x)sen(\frac{n\pi}{2}x)dx$$ aplicando las propiedades de una función impar

$$= \int_0^1 xsen\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx + \int_1^2 xsen\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx \quad = \frac{4}{n^2\pi^2} sen\frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n\pi}(-1)^n$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2\pi^2} sen\frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n\pi}(-1)^n\right) sen\ \frac{n\pi}{2}x$$

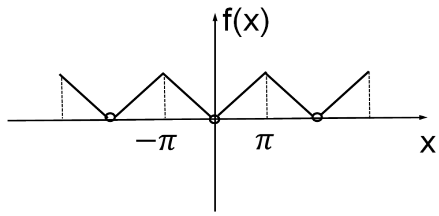


$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2\pi^2} sen\frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n\pi}(-1)^n\right) sen\ \frac{n\pi}{2}x$$

EJEMPLO 0.3 *Dada la función* $f(x) = |x|$, *para* $-\pi < x \leq \pi$, $f(x+2\pi) = f(x)$ *Determine el desarrollo trigonométrico de Fourier.*

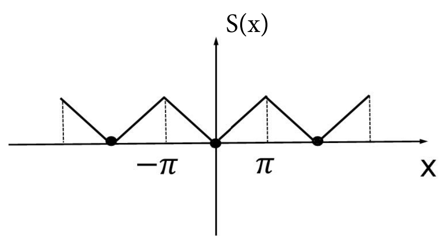
Solución

Como f *es par entonces resulta que* $b_n = 0$



$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2} \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

de donde resulta que $f(x) \sim \dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]\cos nx$ *podemos observar que cuando* n *es par hay infinitos términos de la serie que se anulan y entonces tenemos que* $f(x) \sim \dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2n+1)^2}\cos(2n+1)x$



S(x)= $\dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2n+1)^2}\cos(2n+1)x$

CONCLUSIONES

- Serie de Fourier.
- Fórmula para determinar los coeficientes incluyendo las f unciones pares e impares.
- Condiciones de convergencia.
- Volver a insistir que en la conferencia se realizo un análisis general mientras que en el texto se particulariza para funciones de periodo 2π y despúes se generaliza.

TRABAJO INDEPENDIENTE

- Ejercicios del I al VI de la pág 444-445 LT
- Ejemplos resueltos del I al III pág.389-400 LT