Sumario:

- Aproximación de una función mediante un polinomio.

Objetivos:

- Aproximar una función mediante un polinomio.

Bibliografía:

Del Castillo, A., R. Rivero, C. Fernández y C. Carbó: Series, Tomo 1. sección 2.5, pp 229-240

Cálculo con Trascendentes Tempranas. Parte 3. ep.11 y 12. p. 766-770

Habíamos visto que:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + R_n$$

$$f(x) \approx c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n$$ aproximación polinomial

$R_n(x)$: error en x

Es decir, que si tomamos una cantidad de términos determinada, estamos cometiendo un error en la aproximación.

Teniendo en cuenta lo anterior, pueden presentarse tres tipos de problemas:

1. Dados los valores de x y la cantidad de términos n, obtener una cota del error al realizar la aproximación.
2. Dados los valores de x y una cota del error, hallar la cantidad de términos necesarios para satisfacer el mismo.
3. Dada la cantidad de términos n y una cota del error, hallar los valores de x que cumplen con dicha condición.

En este curso vamos a estudiar la aproximación de funciones para series alternadas, por lo que utilizaremos el planteamiento de la Regla de Leibniz, que decía

$$|R_n(x)| < c_{n+1}(x-a)^{n+1}$$

Ejemplo 1

Halle un polinomio de 2do grado para aproximar la función cos(x) para ángulos pequeños. Determine qué valores puede tomar x de manera que el error cometido sea al menos igual a 0.001.

Según los desarrollos conocidos:

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

en el enunciado se pide hallar la aproximación por un polinomio de 2do grado por lo que, del desarrollo anterior, tomaríamos hasta la potencia x^2

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + R_2(x)$$

ahora debemos obtener los valores de x que puede tomar el desarrollo obtenido para garantizar que el error que se comete al tomar los dos primeros términos sea menor que 0.001.

El desarrollo del coseno es una serie alternada que cumple la Regla de Leibniz por lo que podemos plantear que:

$$|R_2(x)| \leq \frac{x^4}{4!} \leq 0{,}001$$

observen que el módulo del error cometido es menor que el término $c_{n+1}x^{n+1}$, siendo en este caso n=2, o lo que es lo mismo el primer término despreciado de la serie. Despejando quedaría:

$$x^4 \leq 0{,}024$$
$$|x| \leq 0{,}39$$

$$-0.39 \leq x \leq 0{,}39$$

Ejemplo 2

Calcular $\int_0^{0.6} \frac{sen\ (x)}{x} dx$ con 3 cifras decimales exactas (significa un error menor que 0.0005)

Recordemos que el desarrollo del sen(x) es uno de los desarrollos que vimos al comienzo de la clase (es importante que revisen los desarrollos conocidos en el libro de texto).

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad -\infty < x < \infty$$

$$\int_0^{0,6} \frac{sen\, x}{x} dx = \int_0^{0,6} \left(\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) dx = \int_0^{0,6} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \right) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^{0,6} x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right) \Bigg|_0^{0,6}$$

$$= 0{,}6 - \frac{(0{,}6)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(0{,}6)^5}{5 \cdot 5!} - \frac{(0{,}6)^7}{7 \cdot 7!} + \ldots$$

$$= \underbrace{0{,}6 - 0{,}012}_{0{,}588} + 0{,}0001296 - \ \ldots$$

$$\int_0^{0,6} \frac{sen\, x}{x} dx \approx 0{,}588$$ con un error menor que 0,00013

Ejemplo 3:

Se desea calcular aproximadamente el ln(3) mediante una serie de potencias, ¿qué desarrollo ud. tomaría para realizar dicho cálculo?.

Tomando de base el desarrollo del ln(1+x)

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} \qquad -1 < x \leq 1$$

ahora debemos encontrar el valor de x quenos permitiría utilizar el desarrollo, hay varias variantes

pudieramos tomar x=2, pero ese valor no se encuentra en el intervalo de convergencia,

sin embargo, si tomamos ln(2+1) y lo transformamos a ln(2(1+1/2)) y aplicamos propiedades de los logaritmos, tendriamos, ln(2)+ln(1+1/2).

En este caso x=1/2, que si se encuentra en el intervalo de convergencia.

Ejemplo 4

Se desea calcular aproximadamente $\sqrt{13}$, cuál desarrollo utilizaría y para qué valor de x

en este caso utilizaremos el desarrollo de

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m((m-1)}{1!}x^2 + \frac{m((m-1)(m-2)}{2!}x^3 + \cdots \qquad -1 < x < 1$$

$\sqrt{13} = \sqrt{9+4} = \sqrt{9(1+\frac{4}{9})}$ este valor de x se encuentra en el intervalo de convergencia