Series de Potencias

Actividad #9

Sumario: Series de funciones: Series de potencias. Teorema de Abel. Radio, intervalo y dominio de convergencia. Diferenciación e integración de series de potencias. Otras operaciones con series de potencias (suma, resta, sustituciones)

Objetivos

Bibliografía

- Del Castillo, A., R. Rivero, C. Fernández y C. Carbó: Series, Tomo 1. Secciones 2.1, 2.2 y 2.3, p. 179 a 211
- Cálculo con trascendentes tempranas. Parte 3. Capítulo 11, p. 740-750

Introducción

A partir que ya se formalizó la operación de suma para el caso de infinitos sumandos (el concepto de series numéricas convergentes).Trataremos de ampliar estos conceptos a otros objetos matemáticos

Desarrollo

Definición 0.1 *Sean un conjunto no vacío arbitrario X y $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales.Se denomina sucesión de elementos del conjunto X a cualquier aplicación $f:\mathbb{N}\to X$; donde x_n denota el elemento $f(n)$ y se denomina elemento n-ésimo de la sucesión $f:\mathbb{N}\to X$*

Ejemplo 01. *Sea $F(S,R)$ el conjunto de l as f unciones definidas en el conjunto $S\subset R$ con valores en el conjunto R*
Sea $X=F(S,R)$.

1. $\left\{\dfrac{x}{n}\right\}$, $x\in[0,1]$, $n=1,2,\cdots$ *tenemos una sucesión de funciones*
2. $\{x^n\}$ $n=1,2,\cdots$ *tenemos una sucesión de funciones potenciales.*
3. $\{cosnx+sennx\}$, $n=1,2,\cdots$ *sucesión de funciones trigonométricas*

Definición 0.2 *Dada una sucesión de funciones $f_n(x)$, $n=1,2,\cdots$ compongamos una nueva sucesión de funciones $s_n(x)$, $n=1,2,\cdots$ de la siguiente forma*

$$s_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$$ *que se denomina serie de funciones*

Nótese que:
Para cada x la serie de funciones se convierte en una serie numérica, la cual puede ser convergente o divergente y en el primer caso tendrá una suma.

En este Curso de Matemática III estudiaremos dos tipos de series de funciones que son básicas y de amplio uso en ingeniería, que desde luego no le restan importancia a muchos otros tipos de series de funciones que suelen también utilizarse en el campo de la ingeniería. Estas series de funciones son las denominadas:

1. ***Series de potencias*** que se construyen a partir de la sucesión de funciones $\{1, x, x^2, x^3, x^4, \ldots, x^n, \ldots\}$ *y que tiene la forma* $\sum_{n=0} c_n x^n$
2. ***Series de Fourier*** que se construyen a partir de un tipo particular de sucesión de funciones trigonométricas periódicas con periodo común T del tipo

$$\{\frac{a_0}{2}, a_1 \cos \omega x + b_1 sen \omega x, a_2 \cos 2\omega x + b_2 \cos 2\omega x, \ldots, a_n \cos n\omega x + b_n sen n\omega x, \ldots\}$$

y que tiene la forma $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}[a_n \cos n\omega x + b_n sen n w x]$

Definición 0.3 *La series de funciones del tipo* $\sum_{n=1}^{\infty} C_n (x-a)^n$ *donde* c_n *y* a *son números reales dados se llaman series de potencias y los números* c_n $n = 1, 2, \cdots$ *se llaman coeficientes de la serie.*

Para *simplificar* el trabajo en el estudio de la serie de potencias podemos realizar la siguiente sustitución $t = x - a \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_n t^n$ ya que resulta claro que los resultados que se obtenga para esta última son los mismos pues solo se ha realizado una traslación.
Surge ahora una pregunta natural ¿para que valores de x la serie de potencia converge?. Resulta evidente que para $x = 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$ converge, el problema consiste en determinar otros valores para los cuales la serie sea convergente
Supongamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$ converge para $x = x_1 \neq 0$ entonces tenemos que la serie númerica $\sum_{n=1}^{\infty} C_n x_1^n$ converge y por tanto $\lim_{n\to\infty} C_n x_1^n = 0$

Analicemos ahora el carácter de la serie de los módulos $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n x^n|$ para ello utilicemos el criterio de comparación con paso al límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|C_n x^n|}{|C_n x_1^n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^n}{x_1^n}\right| \qquad \frac{x^n}{x_1^n} = r^n$$

si $|r| < 1$ converge por lo que si $|x| < |x_1|$ la serie de los módulos converge y la $\sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$ *converge absolutamente*

Este resultado que hemos obtenidos es el teorema de Abel

Teorema 1 (Abel) *Si una serie de potencias* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ *converge para un valor de* x_1 $(x_1 \neq 0)$ *entonces la serie converge absolutamente para todo* x *tal que* $|x| < |x_1|$.

Del siguiente teorema se obtiene el siguiente corolario.

COROLARIO 0.1 *Si una serie de potencias* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ *diverge para un valor* x_2*,entonces la serie diverge para todo* x *tal que* $|x| > |x_2|$

Estos resultados nos permiten conocer un conjunto de puntos donde la serie sea convergente o divergente sobre la base de que se conozca la convergencia o divergencia de la misma en un punto.

Ahora el problema consiste en poder determinar todos los puntos donde la serie converge o diverge. Para ellos veamos la siguiente definición y teorema:

DEFINICIÓN 0.4 *Sea la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$*. Si* R *es un número no negativo o,* $+\infty$ *y tiene la propiedad que para todos los valores de* x*,para los cuales* $|x| < R$ *la serie converge,y para todos los valores* x*, para los cuales* $|x| > R$*, la serie diverge, entonces este número se llama radio de convergencia de la serie de potencia .*

El conjunto de todos los puntos, para los cuales se cumple que $|x| < R$ *, se llama intervalo de convergencia de la serie.*

TEOREMA 2 *Para cualquier serie de potencias* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$*,existe un radio de convergencia* R*.*

En el intervalo de convergencia, es decir, para cualquier x*, para el cual,* $|x| < R$*, la* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ *converge absolutamente.*

EJEMPLO 0.2 *Determine el radio e intervalo de convergencia de las series siguientes.*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$

   Solución: Utilizando el criterio del cociente se tendría:

   $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|(n+1)x| = |x|\lim_{n\to\infty}(\text{n+1}) = |x|\cdot\infty < 1,$$ ***solo para x = 0*** *por tanto el radio de convergencia es* $R = 0$ *y la serie solo converge en* $x = 0$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

   Solución:

   $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right| = |x|\cdot 0 < 1$$ ***para todo x*** *por tanto el radio de convergencia es infinito y converge para todos los números reales.*

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{5^n}$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{5^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)}{5}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-3|}{5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x-3|}{5} < 1 \Rightarrow |x-3| < 5 \Rightarrow -5 < x-3 < 5 \Rightarrow -2 < x < 8$$

De donde tenemos que el radio de convergencia es $R=3$ y el intervalo es $-2<x<8$ ¿Que sucederá en los extremos del intervalo?

Analicemos $x=-2$ sustituyendo en la serie dada tenemos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ *por tanto la serie diverge*

Analicemos $x=8$ sustituyendo en la serie dada tenemos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5)^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}1$ *por tanto la serie diverge*

Ya hemos analizado como determinar los valores de x para los cuales converge la serie de potencia o sea su dominio de convergencia. Ahora como a cada valor de x se le hace corresponder un único valor entonces podemos plantear que esa serie de potencia converge a una función, o sea,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

Ejemplo 0.3 *Hallar la función a la que converge la serie* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Solución

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

tenemos una serie geométrica de razón x por tanto podemos afirmar que la serie converge a la función

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad , \ |x| < 1$$

Propiedades de las funciones definidas por serie de potencias

Teorema 3. *La serie de potencias,* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *y la serie derivada* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}(c_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ *tienen el mismo radio de convergencia.*

Teorema 4. *Sea $f(x)$ una función definida por una serie de potencias, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ para todo x en $]-R, R[$, entonces para cada x del intervalo $]-R, R[$ existe la derivada $f'(x)$ y está dada por la serie derivada, $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}$*

EJEMPLO 0.4 *Obtener una serie de potencias cuya función suma sea* $F(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$
Solución

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ |x| < 1$$

derivando en ambos miembros tenemos que

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}, \ |x| < 1$$

TEOREMA 5. *Si dos series de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} dnx^n$ *tienen la misma función suma* f *en un intervalo* $]-r, r[$*,entonces las dos series son iguales término a término y puede probarse que* $c_n = d_n = \dfrac{f^n(0)}{n!}$

TEOREMA 6. *Si* $f(x)$ *es la función suma de la serie de potencias:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n para\, x \in \,]-R, R[$$

entonces, l a función f es i ntegrable en cada subintervalo cerrado de $]-R, R[$ *y su i ntegral se puede calcular i ntegrando t érmino a t érmino l a serie de potencias. En particular, para cada* x *en* $]-R, R[$

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$

EJEMPLO 0.5 *Obtener una serie de potencias cuya función suma sea* $\ln(1+x)$ *en cierto intervalo*
Solución

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ |x| < 1$$

hagamos la sustitución $x = -x$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n, \ |-x| < 1$$

de donde resulta

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \ |x| < 1$$

y aplicamos la propiedad de integrabilidad tenemos que

$$\int \frac{dx}{1+x} = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int ((-1)^n x^n)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1},\ |x| < 1$$

Verificando lo **que** *pasa en los extremos del intervalo resulta*

$$x = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

una serie alternada que verifica las condiciones de la ***Regla Leibniz*** *y por tanto converge*

$$x = -1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

que es una serie divergente.

$$\int \frac{dx}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1},\ -1 < x \leq 1$$

Operaciones con series de potencias

Definición 0.5 *Consideremos dos series de potencias con f y g como funciones sumas $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $|x| < R$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$, $|x| < R_1$ y consideremos que $R_1 \leq R$*

1. *La series se pueden sumar o restar término a término obteniéndose:*

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + d_n) x^n,\ |x| < R_1$$

2. *Como la series son absolutamente convergente entonces resulta que :*

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n,\ |x| < R_1$$

donde:

$$W_n = c_0 d_n + c_1 d_{n-1} + \cdots + c_n d_0$$

Ejemplo 0.6 *Dadas la series de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $x \in \mathbb{R}$ y $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ $x \in\ ]-1, 1[$ Calcular $f(x)g(x)$*

solución
Calculemos los coeficientes de la serie producto:

$$w_0 = c_0 d_0 = 1 \cdot 0 = 0$$

$$w_1 = c_0 d_1 + c_1 d_0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$$

$$w_2 = c_0 d_2 + c_1 d_1 + c_2 d_0 = 1 \cdot (-\frac{1}{2}) + 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}$$

de donde se obtiene que

$$f(x) \cdot g(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots$$

Conclusiones

Toda serie de potencia siempre converge en al menos un punto.
El análisis de la convergencia en los extremos del intervalo de convergencia se realiza de forma independiente.

Trabajo Independiente

- Ejercicios I pág 245
- Ejercicios II pág 256