Sumario: Seminario sobre Series Numéricas, Series de Potencias y de Fourier

Objetivos

1. Clasificar una serie numérica en base a la convergencia, en dependencia de los signos de sus términos
2. Realizar cálculos aproximados con la ayuda de series numéricas, estimando el error cometido.
3. Determinar el radio de convergencia de una serie de potencias
4. Determinar el intervalo y el domino de convergencia de series de potencias.
5. Obtener la serie de Taylor asociada a una función el intervalo de validez de la misma
6. Obtener la serie de Taylor asociada a una función y el intervalo de validez de la misma.
7. Obtener desarrollos en series de potencias de funciones a partir desarrollos conocidos, empleando propiedades y operaciones con series de potencias.
8. Identificar cuando a una función se le puede asociar una serie trigonométrica de Fourier.
9. Obtener la serie trigonométrica de Fourier asociada a una función y caracterizar su convergencia.
10. Representar gráfica y analíticamente los desarrollos trigonométricos de Fourier.
11. Describir las caracterÃsticas del desarrollo de Fourier para funciones pares e impares.
12. Aproximar funciones no periódicas y de medio recorrido mediante Series Trigonométricas de Fourier.

Aspectos a desarrollar

1. Determine el carácter de las siguientes series:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sabiendo que $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \dfrac{n+1}{e^{2n}}$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$, sabiendo que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5^n}{(2n)!}}{b_n} = 3$, y$b_n > 0$

2. Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ series numéricas de términos positivos, tales que:

   i $a_n \leq b_n$

   ii $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge.

   iii $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{c_n}$

   Determine el carácter de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

3. Determine el carácter de las siguientes series:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n^{2n}}{(2n^2+1)^n}$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n(n^2-1)}{(2n)!}$

   c) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$

   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{cos n\pi}{\sqrt{n(n+1)}}$

4. ¿Cuántos términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ hay que tomar para calcular la suma con error menor o igual que 0.0001 ?

5. Halle el dominio de convergencia de las siguientes Series de Potencias:

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2n}{n^2+3} \left(\dfrac{x}{5}\right)^n$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^{2n}}{n 9^n}$

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n)! 4^{2n}}$

6. Valiéndose de las propiedades de las series de potencias y de los desarrollos dados en el texto, obtenga los desarrollos de potencias alrededor de cero de las siguientes funciones. Indique en cada caso el intervalo de convergencia.

   a) $f(x) = \dfrac{x}{1-2x}$

   b) $f(x) = x^3 \ln(2+3x)$

   c) $f(t) = \displaystyle\int_0^t \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$

   d. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+25}$

   e. $\dfrac{x-6}{3x^2+27}$

7. Determinar cuántos términos hay que tomar de la serie $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots$ para calcular el $\ln 2$ con error menor o igual que 0.001.

8. Hallar el área bajo la curva $y = e^{-x^2}$ entre 0 y 1 con error menor que 0,001

9. Sea $f(x)$ una función periódica con período 2π definida en $]-\pi,\pi[$ según se indica a continuación :$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$

   a) Dibuje su gráfico
   b) Analice si cumple las condiciones de Dirichlet
   c) Obtenga su desarrollo trigonométrico de Fourier
   d) Haga el gráfico del desarrollo.
   e) ¿A qué valor converge el desarrollo en $x = 10\pi$ y $x = \dfrac{11\pi}{2}$?.

10. Sea $f(x) = |x|$ en el intervalo $]-2,2[$ y periódica con peródo $T = 4$:

   a) Dibuje su gráfico
   b) Analice si cumple las condiciones de Dirichlet
   c) Obtenga su desarrollo trigonométrico de Fourier
   d) Haga el gráfico del desarrollo.

11. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \\ 2x-1 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \end{cases}$ Plantear las integrales necesarias para el cálculo de los coeficientes de desarrollos de Fourier(en los casos que sean posible) que representen a la función $f(x)$ donde está definida con las características siguientes:

   a) Periodo $T = 1$
   b) Cosenos con periodo $T = 3$
   c) Con periodo $T = 10$
   d) Con periodo $T = 3$ y que converja a 1 en $x = 0$.
   e) En cada caso posible además escriba las expresiones analíticas de las prolongaciones y/o extensiones periódicas realizadas y dibuje la gráfica del desarrollo en el intervalo $[-5,5]$.

12. Dada la función $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$ si $f(x+2\pi) = f(x)$

   a) Obtener el desarrollo trigonométrico de Fourier.
   b) Representé gráficamente la función a la que converge el desarrollo anterior en el intervalo $(-5\pi, 5\pi)$
   c) Muestre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$

13. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ \\ 3 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \end{cases} \quad \text{con } f(x+2) = f(x)$$

   a) Represente gráficamente la función
   b) Hallar el desarrollo de Fourier de f
   c) Represente la gráfica de la función hacia la cual converge el desarrollo de Fourier de f