Series de Potencias

Sumario:

- Desarrollos en series de potencias: Significado de Desarrollar una función en serie de potencia.
- Serie de Taylor, serie de Maclaurin.
- Desarrollos de funciones elementales. Desarrollos conocidos.
- Aproximación de una función mediante un polinomio.

Objetivos:

- Determinar el desarrollo en serie de potencias de una función utilizando desarrollos conocidos de otras funciones.
- Aproximar una función mediante un polinomio.

Bibliografía:

Del Castillo, A., R. Rivero, C. Fernández y C. Carbó: Series, Tomo 1. sección 2.4, pp 214-229 y sección 2.5, pp 229-240

Cáculo con Trascendentes Tempranas. Parte 3. pp 751-759, 766-778

En esta actividad daremos respuesta a dos interrogantes que quedaron pendientes de la actividad anterior: ¿qué propiedades debe tener una función $f(x)$ para que exista una serie de potencias que la represente? y ¿cómo hallar esa serie si existe?

Sabemos, por lo demostrado en la sección anterior, que la función debe tener necesariamente derivadas de todos los órdenes en un intervalo abierto con centro x=a.
Sea $f(x)$ una función con esta característica en un intervalo centrado en $x = a$ y formemos la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$$

tomando los coeficientes según la expresión:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

A la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

se le denomina la serie de Taylor generada por f en a o en potencias de $(x-a)$, o alrededor de $x = a$. En el caso particular que $a = 0$, la serie toma la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

y se denomina la serie de Maclaurin generada por f.

Definición. Sea la función f definida en cierto entorno del punto x_0 y que tiene en este punto derivadas de todos los órdenes .Entonces la serie

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ se llama serie de Taylor de la función f en el punto x_0.

Para $x_0 = 0$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(o)}{n!}x^n$ se llama serie de Maclaurin de la función f

Luego de definida la serie de Taylor surgen dos preguntas: ¿Converge la serie de Taylor generada por f para otro valor de x distinto de $x = a$? de ser esto cierto ¿su suma es igual a $f(x)$?

La respuesta a ambas preguntas generalmente es no, o sea, la serie de Taylor generada por $f(x)$ puede converger o no para $x \neq a$, y de hacerlo para algún intervalo, su suma puede ser o no $f(x)$. En este sentido sería necesario determinar bajo qué condiciones una serie de Taylor converge a la función que la generó.

¿Cuándo la serie de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ de la función f sobre cierto intervalo converge a la función f?

Según lo estudiado en Matemática I una función que tiene derivada hasta el orden n+1 en un intervalo abierto centrado en x_0 puede representarse de la siguiente forma:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \quad + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Término residual de la fórmula de Taylor}}$$

donde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad x_0 < c < x \quad \textbf{fórmula de Lagrange}$$

Por tanto tenemos que $f(x) = s_n(x) + R_n(x)$ para que la serie de Taylor converja a $f(x)$ debe cumplirse que la sucesión de sumas parciales sea convergente, o sea, que $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ y para esto es necesario y suficiente que para todo x del intervalo de convergencia, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

Los siguientes teoremas nos dan las condiciones para poder obtener los resultados deseados

Teorema 2.6 pág. 217

Sea $f(x)$ una función que porsee derivadas de todos los órdenes en el intervalo $|x - a| < r$. La condición necesaria y suficiente para que la serie de Taylor, generada por f alrededor de a, converja hacia f en el intervalo $|x - a| < r$ es:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

Para toda x del intervalo $|x - a| < r$

Teorema 2.7 pág. 218

Sea f una función con derivadas de todos los órdenes en un intervalo de la forma $|x - x_0| < r$ .Si existe una constante M tal que $|f(x)^{n+1}| \leq M$ para todo $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ $n \geq 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para todo $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$

Ejemplo 1: Desarrollar en series de potencias de x la función $f(x) = senx$

Solución. La función admite derivadas de todos los órdenes entonces, luego la función genera la serie de Taylor:

Como se pide desarrollar en potencias de x, entonces $(x-a)=x$, o sea $a=0$ y la serie de Maclaurin generada sería :

$$senx \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{donde } c_n = \frac{f^n(0)}{n!}$$

Para encontrar la derivada n-ésima $f^n(0)$, calculemos las derivadas:

$$f'(x) = \cos(x) = sen\,(x + \frac{\pi}{2})$$

$$f''(x) = \cos\,(x + \frac{\pi}{2}) = sen\,(x + 2\,\frac{\pi}{2})$$

$$f'''(x) = \cos\,(x + 2\,\frac{\pi}{2}) = sen\,(x + 3\,\frac{\pi}{2})$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \cos\,(x + (n-1)\,\frac{\pi}{2}) = sen\,(x + n\,\frac{\pi}{2})$$

Evaluando para $x = 0$ obtenemos $f^{(n)}(0) = sen(\frac{n\pi}{2})$

Luego c_n va a tener la forma:

$$c_n = \frac{1}{n!} sen \frac{n\pi}{2}$$

por tanto tenemos que:

$$senx \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} sen \frac{n\pi}{2}\, x^n$$

donde se puede apreciar que para todos los valores de n par los términos de la serie son cero $(sen(2k\pi) = 0)$, entonces la serie se puede escribir como:

$$senx \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} sen \frac{(2n+1)\pi}{2}\, x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Ahora debemos analizar para que valores de x la serie converge a la función por lo que debemos probar si el $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

Como f tiene derivadas de todos los órdenes para toda $x \in \mathbb{R}$ y la derivada n-ésima de f cumple:

$$|f^{(n)}(x)| = |sen\,(x + n\,\frac{\pi}{2})| \leq 1$$

Entonces en virtud del teorema 2.7 se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{sen\,((n+1)\ \frac{\pi}{2})}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$$

luego tenemos que: $senx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ para todo $x \in R$

Como parte del estudio independiente debe demostrar, realizando un procedimiento similar, el desarrollo en series de potencias de x de la función $f(x) = \cos(x)$

Ejemplo 2: Desarrollar en series de potencias de x la función $f(x) = e^x$

Solución. La función $f(x) = e^x$ admite derivadas de todos los órdenes y se tiene que $f^n(x) = e^x \Rightarrow c_n = \frac{e^0}{n!} = \frac{1}{n!}$ luego $e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Analicemos entonces cuándo converge a la función:

Debemos probar que $\lim_{n} R_n = 0$, como f tiene derivadas de todos los órdenes para toda $x \in \mathbb{R}$ $f^{(n)}(x) = e^x$, en cualquier intervalo finito $(-r, r)$ se cumple que:

$e^x \leq e^r = M$, por ser la exponencial una función creciente, por lo que entonces se cumple que $f^{(n+1)}(x) = e^x \leq M$

Entonces en virtud del teorema 2.7 se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

entonces $e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n!}$ para todo $x \in R$.

Como parte del estudio independiente debe estudiar la demostración, que aparece en las páginas de la 222 a la 226, del desarrollo en series de potencias de x la función $f(x) = (1 + x)^{m}$

Ejemplo 3: Desarrollar en series de potencias de x la función $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^{3}}$.

Utilice el resultado obtenido para calcular la suma:

$$1 + \frac{4}{2} + \frac{9}{2^{2}} + \cdots + \frac{(n+1)^{2}}{2^{n}} + \cdots$$

Solución.

Primeramente desarrollemos en potencias de x la función $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^{3}}$

$$f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^{3}} \Rightarrow c_{0} = \frac{1}{0!} = (0+1)^{2} = 1$$

$$f'(x) = \frac{4+2x}{(1-x)^{4}} \Rightarrow c_{1} = \frac{4}{1!} = (1+1)^{2} = 4$$

$$f''(x) = \frac{-(18+6x)}{(1-x)^{5}} \Rightarrow c_{2} = \frac{18}{2!} = (2+1)^{2} = 9$$

$$f'''(x) = \frac{(96+24x)}{(1-x)^{6}} \Rightarrow c_{3} = \frac{96}{4!} = (3+1)^{2} = 16$$

Entonces podemos inferir que $c_{n} = (n+1)^{2} \Rightarrow \frac{1+x}{(1-x)^{3}} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{2} x^{n}$

Otra manera en que podemos determinar el desarrollo en potencias de x de una función con derivada de todos los órdenes es utilizando los desarrollos conocidos y las propiedades y operaciones definidas para las series de potencias. En este caso utilizaremos el desarrollo ya demostrado del binomio de Newton.

$$f(x) = (1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!} x^n = 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \cdots \quad |x| < 1$$

Si partimos de

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^3} = (1-x)^{-3}$$

Se tiene que $m = -3$ y aplicando el desarrollo anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{(1+x)^3} &= (1+x)^{-3} \\ &= 1 - 3(x) + \frac{-3(-3-1)(x)^2}{2!} + \frac{-3(-3-1)(-3-2)(x)^3}{3!} \\ &+ \frac{-3(-3-1)(-3-2)(-3-3)(x)^4}{4!} + \cdots \quad |x| < 1 \end{aligned}$$

Partiendo de este desarrollo anterior comencemos a aplicar propiedades y operaciones válidas hasta obtener el desarrollo de la función dada en el ejercicio

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}}$$

Como se podrán percatar en esta función aparece (–x) en el denominador, por lo que debemos sustituir en el desarrollo de f(x)= $\frac{1}{(1+x)^3}$ $\boldsymbol{x}$ **por** $\boldsymbol{-x}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^3} &= (1-x)^{-3} \\ &= 1 - 3(-x) + \frac{-3(-3-1)(-x)^2}{2!} + \frac{-3(-3-1)(-3-2)(-x)^3}{3!} \\ &+ \frac{-3(-3-1)(-3-2)(-3-3)(-x)^4}{4!} + \cdots \quad |-x| < 1 \to |x| < 1 \end{aligned}$$

Nótese como, se debe sustituir en la función, en la serie, en cada término del desarrollo y en el intervalo de convergencia, x por -x.

Ahora debemos multiplicar el nuevo desarrollo obtenido luego de sustituir x por $-x$ por el polinomio $(1+x)$

$$\frac{(1+x)}{(1-x)^3} = 1(1+x) - 3(-x)(1+x) + \frac{-3(-3-1)(-x)^2}{2!}(1+x) + \frac{-3(-3-1)(-3-2)(-x)^3}{3!}(1+x) + \frac{-3(-3-1)(-3-2)(-3-3)(-x)^4}{4!}(1+x) + \cdots \quad |x| < 1$$

Esta operación no afecta el intervalo de convergencia. Aplicando distributiva y reduciendo términos semejantes:

$$\frac{(1+x)}{(1-x)^3} = 1 + x + 3x + 3x^2 + 6x^2 + 6x^3 + 10x^3 + 10x^4 + 15x^4 + 15x^5 + \cdots \quad |x| < 1$$

$$\frac{(1+x)}{(1-x)^3} = 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + 25x^4 + \cdots + (n+1)^2 x^n + \cdots \quad |x| < 1 \qquad (1)$$

O lo que es lo mismo

$$\frac{(1+x)}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n \quad |x| < 1$$

En el ejercicio nos piden utilizar este resultado para calcular la suma

$$1 + \frac{4}{2} + \frac{9}{2^2} + \cdots + \frac{(n+1)^2}{2^n} + \cdots$$

si aplicando propiedades de la potencia reescribimos la suma anterior

$$1 + 4\frac{1}{2} + 9\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + (n+1)^2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots \qquad (2)$$

Nótese como (2) se asemeja bastante con el desarrollo de la función obtenido (1)

$$1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + 25x^4 + \cdots + (n+1)^2 x^n + \cdots$$

Y se puede obtener sustituyendo para $x = \frac{1}{2}$; $|x| < 1$

Luego la suma

$$1 + \frac{4}{2} + \frac{9}{2^2} + \cdots + \frac{(n+1)^2}{2^n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{8}} = 12$$

Ejemplo 4: Desarrollar en series de potencias de x la función $\boldsymbol{f(x)} = \arctan \boldsymbol{x}$

Solución.

Cuando se trata de buscar el término e-nesimo de la derivada no se obtiene de manera tan sencilla como en los casos anteriores por tanto para encontrar su desarrollo es más útil utilizar las propiedades y las operaciones de las series de potencias

Para ellos partimos del desarrollo conocido (ver páginas 241 y 242)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

Sustituyamos $\boldsymbol{x}$ por $-\boldsymbol{x^2}$ para obtener la función $\frac{1}{1+x^2}$ que es la derivada de la $\mathbf{arctan}\ (\boldsymbol{x})$, función que se pide desarrollar en potencias de $\boldsymbol{x}$

Recordar que se debe sustituir en la función, en el desarrollo y en el intervalo de convergencia

$$\frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \qquad |-x^2| < 1$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad |x^2| < 1 \to |x| < 1$$

Ahora aplicamos la propiedad de integración (esta propiedad no altera el intervalo de convergencia)

$$\int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n x^{2n} dx \qquad |x| < 1$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad |x| < 1$$

Ejemplo 5: Desarrollar en series de potencias de x la función

$$f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}$$

Solución.

$$f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)} = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+2x} \ .$$

Ahora haciendo uso del desarrollo tabulado:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$$

tenemos el primer sumando y podemos obtener el desarrollo del segundo sumando de la función aplicando propiedades y operaciones de las series de potencias.

Sustituimos x por $(-2x)$

$$\frac{1}{1-(-2x)} = \frac{1}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,(2x)^n \qquad |-2x| < 1 \rightarrow |x| < 1/2$$

Multiplicamos por 2

$$\frac{2}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,(2)^{n+1}(x)^n \qquad |-2x| < 1 \rightarrow |x| < 1/2$$

Sumamos ambos desarrollos

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

$$\frac{2}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,(2)^{n+1}(x)^n \qquad |x| < 1/2$$

Y obtenemos:

$$\frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,(2)^{n+1}(x)^n \qquad |x| < 1/2$$

$$\frac{3}{(1-x)(1+2x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n(2)^{n+1})x^n \qquad |x| < 1/2$$

Ejemplo 6: Desarrollar la función $f(x) = \ln x$ en potencias de $x-1$

Solución.

Partimos del desarrollo tabulado:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

Hacemos $x = 1-x$

$$\frac{1}{1-(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n \qquad |1-x| < 1$$

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n \qquad 0 < x < 2$$

Integrando

$$\int_0^x \frac{1}{x}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n(x-1)^n dx \qquad 0 < x < 2$$

$$\ln(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} \qquad 0 < x < 2$$