Solución Numérica de Ecuaciones

Sumario:

- Localización y separación de las raíces de una ecuación
- Acotamiento de las raíces de una ecuación algebraica y su cantidad
- Métodos de bisección, Regula Falsi, iterativo general, Newton – Raphson y el método de las secantes: condiciones de convergencia, interpretación gráfica, ventajas e inconvenientes

Bibliografía:

Texto Básico: "Matemática Numérica", Manuel Álvarez Blanco, Alfredo Guerra Hernández, Rogelio Lau Fernández. Volumen 1. Capítulo 2 epígrafes (¿?????).

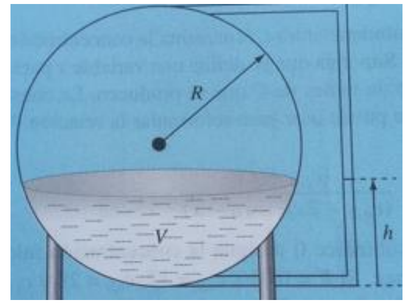
Objetivos:

- Separar las raíces reales de una ecuación empleando métodos gráficos, analíticos o una combinación de ambos
- Establecer cotas en cuanto a la cantidad y localización de las raíces de las ecuaciones algebraicas utilizando resultados del Álgebra Superior y el análisis matemático
- Describir los métodos de bisección, Regula Falsi, Newton – Raphson y el método de las secantes, las hipótesis necesarias para la convergencia en cada caso, su interpretación gráfica, ventajas e inconvenientes
- Modelar problemas sencillos que conducen a ecuaciones no lineales y resolverlos, seleccionando en cada caso el método más conveniente.

Aspectos a desarrollar:

1. Solución numérica de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Generalidades.
2. Separación de raíces de una ecuación: métodos gráficos, analíticos y combinados. Acotamiento de las raíces de una ecuación algebraica y su cantidad
3. Determinación aproximada de una raíz de una ecuación previamente separada en un intervalo: métodos de bisección, Regula-Falsi, iterativo general, Newton – Raphson y el método de las secantes. Condiciones de convergencia en cada método, interpretación gráfica, ventajas e inconvenientes

Desarrollo



Consideremos el siguiente problema:

En un tanque esférico de radio R=3 m se vierten 30 m^3 de un líquido. Qué altura (h) ocupará el líquido en el tanque?.

Se conoce que estas variables se relacionan mediante la expresión

$V = \pi h^2 \frac{3R-h}{3}$.

Por lo tanto, se debe resolver la ecuación: $30 = \pi h^2 \frac{9-h}{3} \Leftrightarrow h^3 - 9h^2 + \frac{90}{\pi} = 0.$

Para resolver esta ecuación algebraica de grado 3 se tienen las fórmulas de Cardano-Tartaglia, que son en extremo engorrosas de aplicar. Ello motiva resolver esta ecuación mediante métodos numéricos.

En problemas prácticos, como el citado, se necesita con frecuencia determinar raíces de una ecuación de la forma f(x) = 0, es decir, encontrar aquellos valores que convierten la ecuación en una identidad. Se puede hallar los valores exactos de las raíces de una ecuación sólo en casos excepcionales, por lo general, cuando existe cualquier fórmula simple para calcular los valores de las raíces, tal que permita expresarlos por las magnitudes conocidas.

La importancia de los métodos numéricos para resolver ecuaciones, viene dada por dos hechos: por una parte, la frecuencia con que se presenta este tipo de problema en cualquier rama de la ciencia o de la técnica; por otra parte, lo limitados que resultan los métodos analíticos de solución.

Por ejemplo, las ecuaciones algebraicas poseen fórmulas de solución en base a sus coeficientes hasta el grado 4, para grados superiores no existen tales fórmulas generales a excepción de algunos casos particulares. Incluso se dificulta el empleo de las fórmulas para grados 3 y 4.
Además, los coeficientes de algunas ecuaciones son números aproximados y, por consiguiente, la cuestión acerca de la determinación exacta de las raíces no puede ser planteada de ningún modo.

1. Solución numérica de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Generalidades

El proceso de determinar los valores aproximados de las raíces de una ecuación se subdivide en dos etapas:

1^{ra}: Localización de las raíces

La raíz ξ de una ecuación f(x)=0 se considera separada en un intervalo [a, b] si en el mismo la ecuación no posee otras raíces.

Para este fin se utilizan métodos gráficos, métodos analíticos o una combinación de estos.

En ocasiones por las características propias de un problema permite separar la raíz de interés. En el ejemplo del tanque, este tendrá sentido si el volumen V se encuentra entre 0 y el volumen de la esfera: $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(3)^3 = 36\pi \approx 113.1$. El valor de h a su vez está acotado entre 0 y 6(=2R), de hecho entre 0 y 3, debido a que V=30 está por debajo de la mitad del volumen de la esfera que corresponde a una altura igual al radio. Por lo tanto: h$\in$[0,3], y es un único valor de h en este intervalo, pues no puede existir otro valor de h en para el cual el volumen sea 30.

2da: Determinación más exacta de las raíces de una ecuación hasta el grado de precisión deseado.

La segunda etapa consiste en determinar más exactamente las raíces de una ecuación previamente separadas, es decir, llevarlas al grado prefijado de precisión. Estudiaremos los métodos de Bisección y de Regula-Falsi, los cuales generan una secuencia de intervalos encajados en el intervalo de separación de una raíz, en cada uno de ellos cuales se estima la raíz, generando una secuencia de aproximaciones. Los métodos de Newton-Rapson y de las secantes por su parte, a partir de una aproximación inicial generan una secuencia de aproximaciones. Es importante disponer de condiciones suficientes que garanticen la convergencia de estos métodos (con excepción del de Bisección que siempre es convergente). Se destacarán ventajas y desventajas en la aplicación de cada uno de estos métodos.

2. Separación de raíces de una ecuación: métodos gráficos, analíticos y combinados

- ***Método gráfico de separación de raíces***

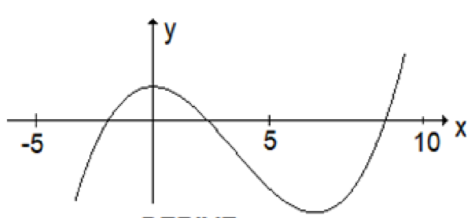
  - ***Procedimiento 1***

La técnica más elemental para la separación de raíces es el método gráfico, que utiliza el conocido hecho de que las raíces de f(x)=0 son las abscisas de los puntos en que la gráfica de la función y=f(x) corta al eje x. Es obvio que de esta forma no se puede determinar las raíces con una precisión aceptable, pero sí se puede acotar dentro de intervalos de separación por lo general pequeños. Hasta hace relativamente poco tiempo este procedimiento gráfico sólo era recomendable en aquellos casos raros en que la función f(x) era fácilmente graficable; en la actualidad, las posibilidades gráficas de las computadoras han cambiado radicalmente estos criterios; en sólo unos segundos se producen en la pantalla la gráfica de una función dada, en un intervalo finito dado, mediante un programa que simplemente coloque un buen número de puntos en el intervalo pedido. De esta manera comenzando por un intervalo grande [a, b], se pueden precisar intervalos más pequeños de búsqueda hasta lograr la amplitud de separación deseada. Además se brinda una valiosa información acerca de las características de la función, tales como los signos de la función y su primera y segunda derivada en diferentes puntos del intervalo de separación, que pueden ser de gran importancia para la aplicación posterior de los métodos de cálculo de raíces.

Ejemplo

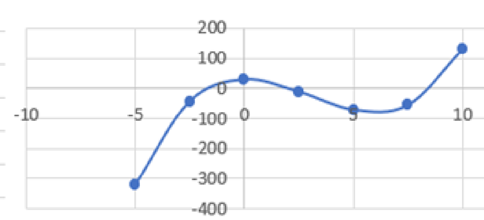
Separar las raíces de la ecuación $x^3 - 9x^2 + \frac{90}{\pi} = 0$ (se ha cambiado h por x)

Con la ayuda de algún asistente gráfico, represéntese la función en el intervalo [-5, 10]:



DERIVE

x	y
-5	-321,352
-2,5	-43,2272
0	28,64782
2,5	-11,9772
5	-71,3522
7,5	-55,7272
10	128,6478



EXCEL

Se observa que la ecuación tiene 3 raíces localizadas en los intervalos [-5, 0]; [0, 5] y [5,10].

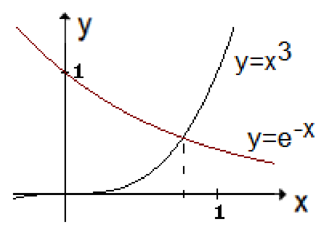
Para el problema de la esfera la raíz separada en el intervalo [-5, 0] no es de interés pues la altura h es positiva. En el caso de la separada en [5,10], se puede acotar también en el intervalo [7,10], por lo que tampoco es de interés, ya que h es menor o igual que 6.

- ***Procedimiento 2***

La ecuación f(x)=0 se expresa de la forma g(x)=h(x) y se procede al dibujo de las gráficas de las funciones y=g(x) y y=h(x). Las abscisas de los puntos de intersección de estas serán precisamente las raíces de f(x), y se procede a determinar los intervalos que contienen cada uno de estos valores.

El ejemplo anterior no es muy ilustrativo en este procedimiento. Si bien $x^3 - 9x^2 + \frac{90}{\pi} = 0$ es equivalente a $x^3 = 9x^2 - \frac{90}{\pi}$, el dibujo manual de ambas y hasta con un graficador, el intercepto para x<0 se ve claro, más los otros dos no tanto, es preferible emplear el procedimiento 1 en este caso.

Consideremos otro ejemplo: $e^x x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow x^3 = e^{-x}$, Ambas funciones son fáciles de representar manualmente o con graficador:



Se observa que la ecuación posee una sola raíz localizada en [0, 1].

- ***Método analítico de separación de raíces***

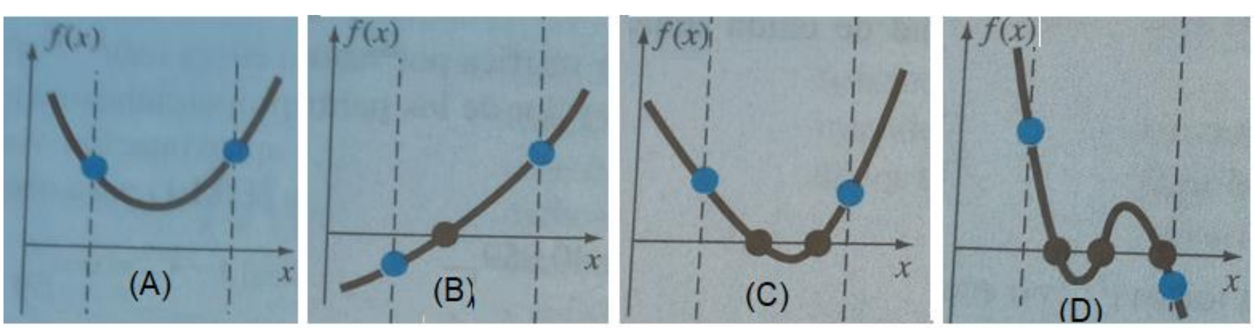
Analíticamente las raíces de la ecuación f(x)=0 pueden ser separadas utilizando algunas propiedades de las funciones que se estudian en los cursos del análisis matemático.

Enunciemos, sin demostrarlos, los teoremas cuyo conocimiento es necesario al separar raíces.

Teorema 1 (Bolzano)

Si la función f(x) es continua en [a, b] y toma en sus extremos valores de signos opuestos(f(a)f(b) < 0), entonces la ecuación f(x)=0 al menos posee una raíz real en [a, b].

Las condiciones de este teorema son suficientes, no necesarias, lo cual se pone de manifiesto en la siguiente gráfica de distintas funciones en un intervalo [a, b]:



En (B) y en (D) se cumplen las condiciones del Teorema de Bolzano por lo que la ecuación f(x)=0 tiene al menos una raíz en [a, b]; una en (B) y 3 en (D).

En (A) y en (C) no se cumplen las condiciones del Teorema de Bolzano, en este caso no se puede afirmar que la ecuación f(x)=0 tenga al menos una raíz en [a, b]; en (A) no se tiene raíz, en (C) dos raíces.

Nótese que en (B) la función es estrictamente creciente, por lo que en el intervalo [a, b] la gráfica de la función y=f(x) no puede volver a cortar al eje x, por lo que [a, b] constituye un intervalo de separación de una raíz d la ecuación. Este hecho se expresa en el siguiente teorema:

Teorema 2

Si la función f(x) es continua y estrictamente monótona en [a, b] y toma en sus extremos valores de signos opuestos, entonces la ecuación f(x)=0 posee exactamente una raíz real en [a, b].

En este caso las condiciones del teorema son necesarias y suficientes. En consecuencia, si la función no cambia de signo en un intervalo y cumple las restantes condiciones del teorema en el mismo, se puede afirmar que no tiene raíz en dicho intervalo.

Dada la relación entre el signo de la derivada de una función y la monotonía, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 3

Si la función f(x) es continua en [a, b] y toma en sus extremos valores de signos opuestos y f´(x) conserva un signo constante en]a, b[, entonces la ecuación f(x)=0 posee exactamente una raíz real en [a, b].

De acuerdo con lo expuesto anteriormente se puede recomendar el siguiente procedimiento para separar las raíces valiéndose del método analítico:

- Se halla f´(x)
- Se hace una tabla de signos de f(x) suponiendo x igual a los valores críticos de f´(x) (o valores cercanos a esta, la gráfica de $y = f^{´}(x)$ podría ayudar) y los valores frontera del conjunto de valores admisibles de f(x)
- Se determinan los intervalos en cuyos extremos la función toma valores de signos contrarios. Dentro de estos intervalos existe una sola raíz de la ecuación.

Ejemplo

$$f(x) = \mathrm{x}^3 - 9\mathrm{x}^2 + \frac{90}{\pi} \qquad f^{´}(x) = 3\mathrm{x}^2 - 18\mathrm{x} = 3\mathrm{x}(\mathrm{x}-6) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 6$$

Evaluando en los puntos críticos de la primera derivada y cerca de ellos:

a	b	f(a)	f(b)	$sg\left(f^{´}(x)\right)$ en]a,b[	[a,b] de separación?
-4	0	-179,35211	28,64789	-	Si
0	6	28,64789	-79,35211	+	Si
6	10	-79,35211	128,64789	-	Si

Se observa que en cada uno de los intervalos [-4,0]; [0,6] y [6,10] se cumplen las condiciones del teorema 3, por lo que en cada uno de estos intervalos se encuentra separada una raíz de la ecuación $f(x) = \mathrm{x}^3 - 9\mathrm{x}^2 + \frac{90}{\pi} = 0$.

En aras de tener intervalos de separación de menor amplitud, consideremos, por ejemplo, el punto medio en cada uno de ellos:

a	b	f(a)	f(b)	$sg\left(f'(x)\right)$ en]a,b[	[a,b] de separación?
-4	-2	-179,35211	-15,35211	-	No
-2	0	-15,35211	28,64789	-	Si
0	3	28,64789	-25,35211	+	Si
3	6	-25,35211	-79,35211	+	No
6	8	-79,35211	-35,35211	-	No
8	10	-35,35211	128,64789	-	Si

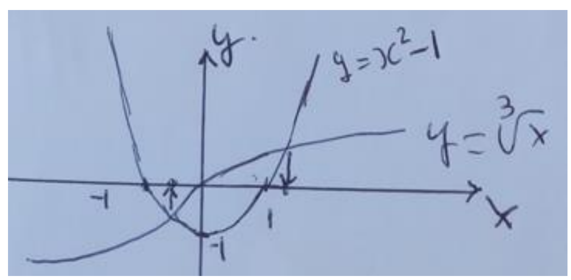
Los nuevos intervalos de separación de raíces de la ecuación $f(x) = \mathrm{x}^3 - 9\mathrm{x}^2 + \frac{90}{\pi} = 0$ son ahora [-2,0]; [0,3] y [8,10]

- ***Método combinado***

En ocasiones una combinación de los métodos gráficos y analíticos resulta conveniente.

Supongamos que se desee separar las raíces de la ecuación $f(x) = \mathrm{x}^2 - 1 - \sqrt[3]{x} = 0$.

Dado que $\mathrm{x}^2 - 1 - \sqrt[3]{x} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x}^2 - 1 = \sqrt[3]{x}$ y las gráficas de las funciones involucradas son fáciles de representar, hagamos un esbozo de las mismas de modo manual:



Esta gráfica nos brinda la información de que la ecuación posee dos raíces. Una de ellas con seguridad se encuentra en [-1, 0] y la otra raíz es mayor que 1 y al parecer no muy lejos de este valor. Ahora es que entra a jugar su papel lo analítico. Bastaría encontrar un valor b>1, tal f(1) y f(b) tengan signos diferente, para afirmar que la segunda raíz está separada en el intervalo [1, b] , ya que por el teorema de Bolzano en este intervalo hay al menos una raíz, pero la información gráfica nos permite afirmar que en ese intervalo se encuentra una sola raíz. No es necesario investigar nada acerca de la monotonía de la función.

Consideremos b=2. Observe que $1 < \sqrt[3]{2} < 2$, dado $y = \sqrt[3]{x}$ es estrictamente creciente, y que $\sqrt[3]{1} = 1$ y $\sqrt[3]{8} = 2$. Evaluemos la función pa x=1 y x=2:

$f(1) = 1^2 - 1 - \sqrt[3]{1} = -1$ $\quad f(2) = 2^2 - 1 - \sqrt[3]{2} = 3 - \sqrt[3]{2} > 0$ debido a que $1 < \sqrt[3]{2} < 2$ (nótese que no fue necesario evaluar para saber el signo del resultado, que es lo que nos interesa).

Por lo tanto, la segunda es raíz esta separada en el intervalo [1, 2].

Para el empleo de los métodos de separación de raíces seria de mucha utilidad tener información sobre la cantidad de raíces de una ecuación y en que intervalo se encuentran acotadas. Para el caso de funciones algebraicas se tienen algunos resultados en esta dirección.

- ***Acotamiento de las raíces de una ecuación algebraica y su cantidad***

  En particular para las ecuaciones algebraicas, es decir, de la forma

  $$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

  existen resultados muy importantes del Álgebra que hacen más simple la separación de raíces. A continuación se verán algunos:

  a) Teorema fundamental del Álgebra

  Una ecuación algebraica de grado n posee n raíces, reales o complejas(estas en forma de par conjugado), si cada raíz se cuenta tantas veces como su multiplicidad. Por lo tanto una ecuación algebraica posee como máximo n raíces reales.

  b) Regla de Descartes

  El número de raíces reales positivas de una ecuación algebraica es igual al número de cambios de signos en la sucesión de los coeficientes a_0, a_1, a_2,…, a_n(los coeficientes iguales a cero no se tienen en cuenta) o menor que ese número en un entero par.

  Para la aplicación de esta sencilla regla, cuya demostración no es nada trivial, los coeficientes nulos no se tienen en cuenta. En el número de raíces, por supuesto, cada una se considera tantas veces como sea su multiplicidad. Obsérvese que la regla de Descartes establece una cota superior para la cantidad de raíces positivas de una ecuación algebraica; no obstante en dos casos particulares se puede llegar a conclusiones precisas: Si m = 0 se puede asegurar que no hay raíces positivas y si m = 1 se puede asegurar que existe exactamente una raíz positiva

  Consecuencia

  El número de raíces reales negativas de una ecuación algebraica es igual al número de cambios de signos en la sucesión de los coeficientes de la ecuación algebraica, que se obtiene mediante la sustitución de x por –x, o menor que ese número en un entero par.

  c) Fórmula de Lagrange para acotar las raíces

  Si en la ecuación $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$ con a_0>0, se llama:

  B : valor absoluto del coeficiente negativo con mayor valor absoluto

  a_k : primer coeficiente negativo contando de izquierda a derecha

  entonces todas las raíces reales positivas de la ecuación, si existen, son menores que el número $R = 1 + \left[\frac{B}{a_0}\right]^{\frac{1}{k}}$.

  Para obtener el acotamiento de las raíces negativas bastará con cambiar x por –x en la ecuación y aplicar el método anterior.

Ejemplo

Separar las raíces de la ecuación $f(x) = 16x^4 + 56x^3 + x^2 + 56x - 15 = 0$.

Los coeficientes son a_0=16, a_1=56, a_2=1, a_3=56 y a_4=-15. En esta secuencia 1 solo cambio de signo, por lo que la ecuación tiene una raíz positiva. Para acotar el intervalo que la contiene:

B=15 por ser a_4=-15 el coeficiente negativo con mayor valor absoluto

k=4 por ser a_4=-15 el primer y único coeficiente negativo contando de izquierda a derecha.

Entonces la raíz real positiva de la ecuación, es menor que el número

$$R = 1 + \left[\frac{B}{a_0}\right]^{\frac{1}{k}} = 1 + \left[\frac{15}{16}\right]^{\frac{1}{4}} = 1.98$$

por lo que está contenida en [0, 1.98], y por ende también en [0, 2],

$f(-x) = 16x^4 - 56x^3 + x^2 - 56x - 15$

Los coeficientes son a_0=16, a_1=-56, a_2=1, a_3=-56 y a_4=-15. En esta secuencia 3 solo cambios de signo, por lo que la ecuación tiene una o tres raíces negativas. Para acotar el intervalo que las contiene:

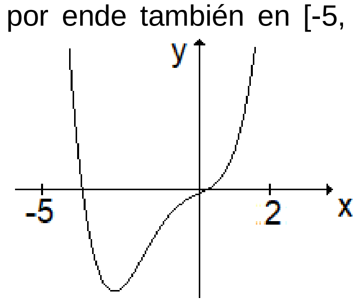
B=56 por ser a_1= a_3=-56 el coeficiente negativo con mayor valor absoluto

k=1 por ser a_1=-56 el primer coeficiente negativo contando de izquierda a derecha.

Entonces la raíz o las raíces negativas de la ecuación, es mayor que el opuesto del número

$$R = 1 + \left[\frac{B}{a_0}\right]^{\frac{1}{k}} = 1 + \frac{56}{16} = 4.5$$

por lo que las raíces negativas están contenidas en [-4.5, 0] y por ende también en [-5, 0]. Dibujando la función en el intervalo [-5, 2], se concluye que tiene 2 raíces reales separadas en los intervalos [-5, 0] y [0, 2]. Para lograr intervalos de separación de una unidad de longitud se hace la siguiente tabla:



x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	2730	289	-390	-315	-110	-15	114	805

De donde se concluye que las raíces están en los intervalos [-4, -3] y [0, 1].

3. Determinación aproximada de una raíz una ecuación previamente separada …

Dada una ecuación de la forma f(x) = 0 y un intervalo [a, b] en el cual se encuentra separada una raíz (r) de la misma. Si se considera cualquier punto x_r del intervalo como aproximación de r, se tendrá que $|r - x_r| \leq \Delta x_r = \max(x_r - a, b - x_r)$. Si esta aproximación no satisface los requerimientos de precisión deseados, se deben generar nuevas aproximaciones hasta que se satisfagan los requerimientos de precisión deseados.

La segunda etapa consiste precisamente en determinar más exactamente una raíz (r) de una ecuación previamente separada en un intervalo $(r\epsilon[a,b])$, es decir, llevarla al grado prefijado de precisión deseado.

Estudiaremos para ello 4 métodos, los cuales generan una secuencia de aproximaciones

$$\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \cdots, \mathrm{x}_n, \cdots$$

que es truncada en un paso n de acorde a un criterio de parada, que garantice los requerimientos de precisión deseados, y se toma $r \approx \mathrm{x}_n$.

Es importante disponer de condiciones suficientes que garanticen la convergencia de la sucesión de aproximaciones al valor de la raíz r de la ecuación en el intervalo en que ha sido separada.

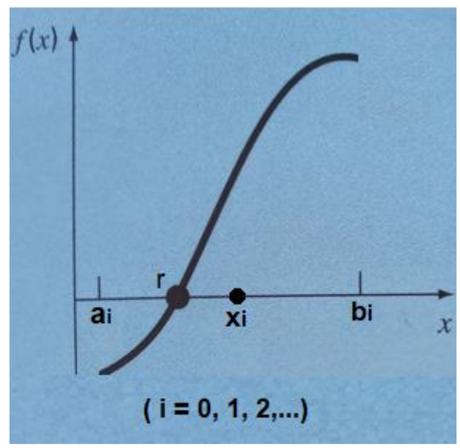
Se partirá de la interpretación geométrica de cada uno de estos métodos para deducir la fórmula de aproximación.

Se destacarán además ventajas y desventajas en la aplicación de cada uno de estos métodos.

- ***Método de Bisección***

Dada la ecuación f(x) = 0 y un intervalo [a, b] tales que:

- En el intervalo [a, b] la ecuación tiene separada una raíz (r)
- f(x) tiene signos contrarios en a y b, es decir f(a)f(b) < 0
- f(x) es continua en [a, b].



Llámese $[a_0, b_0]$ al intervalo inicial [a, b].

Tal como lo indica su nombre, el método de bisección consiste en tomar como aproximación x_0 de la raíz en un intervalo al punto medio del mismo:

$$\mathrm{x}_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

Evidentemente la mayor diferencia posible entre este valor aproximado y el valor exacto de la raíz (tomado modularmente, o sea, el error absoluto) siempre es menor o igual que mitad de la amplitud del intervalo:

$$|r - x_0| \leq \Delta\mathrm{x}_0 = \frac{b_0 - a_0}{2}$$

Si la precisión deseada no se ha alcanzado, se procede a determinar el signo de f(x) en la aproximación obtenida y en base a este determinar si la raíz se encuentra en la mitad izquierda o la mitad derecha del intervalo(donde se produzca cambio de signo en los extremos):

$[a_1, b_1]$ $\qquad \mathrm{x}_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ $\qquad \Delta\mathrm{x}_1 = \frac{b_1-a_1}{2}$

De esta manera se genera una sucesión de intervalos encajados:

$[a_0, b_0]$; $[a_1, b_1]$; $[a_2, b_2]$; …; $[a_i, b_i]$; …

cuya amplitud tiende a cero, cada uno de los cuales contiene el valor exacto de la raíz, por lo que el proceso anterior conduce necesariamente al valor exacto de la raíz (r) de la ecuación. Por supuesto este proceso es truncado cuando se alcance la precisión deseada acorde al criterio de parada empleado, que puede en base al error absoluto, el error relativo, la cantidad decimales exactas, significativas correctas, el valor modular de la función en la aproximación lo suficientemente pequeño, etc.

Un algoritmo podría ser el siguiente:

Llámese $[a_0, b_0]$ al intervalo inicial

Sea i=-1

Repetir

- Incrementar en uno el valor de i

- Sea $x_i = \frac{a_i+b_i}{2}$ $\left(\Delta x_i = \frac{b_i-a_i}{2} = \frac{b_0-a_0}{2^{i+1}}\right)$

- Si $f(x_i) = 0$ entonces x_i es “exactamente” la raíz buscada y terminar

en caso contrario si $f(a_i)f(x_i) < 0$ entonces $a_{i+1}=a_i$, $b_{i+1}=x_i$ sino $a_{i+1}=x_i$, $b_{i+1}=b_i$

hasta se cumpla el criterio de parada .

El principal inconveniente del método de bisección (casi podría decirse el único) es la lentitud con que converge hacia la solución de la ecuación en comparación con otros métodos; por esta razón, si se fuese a trabajar con calculadoras, sería el menos aconsejable.

Entre las ventajas del método, están las siguientes, que lo hacen muy atractivo para el trabajo con computadoras, siempre que el tiempo a emplear no sea un factor demasiado importante:

- Las condiciones de convergencia son mínimas
- La rapidez de convergencia es independiente de la ecuación a resolver
- El trabajo manual previo en mínimo y en la práctica consiste solamente en separar la raíz
- La acotación del error es muy simple y segura
- La cantidad de memoria que requiere es insignificante.

Ejemplo

Determinar un valor aproximado de la raíz de la ecuación $f(x) = x^3 - 9x^2 + \frac{90}{\pi} = 0$ separada en el intervalo [0, 3], con error (absoluto) menor que una centena.

Para ello podemos confeccionar la siguiente tabla EXCEL, donde se muestra la programación de algunas celdas:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	i	ai	bi	f(ai)	f(bi)	xi	∆(xi)	f(xi)
2	0	0	3	=B2^3-9*B2^2 +90/PI()	=C2^3-9*C2^2 +90/PI()	=(B2+C2)/2	=(C2-B2) /2	=F2^3-9*F2^2 +90/PI()
3	1	=IF(D2*H2<0 ;B2;F2)	=IF(D2*H2<0 ;F2;C2)					

obteniéndose la siguiente tabla (redondeando a la 5ta cifra decimal)

i	a_i	bi	$f(a_i)$	$f(b_i)$	x_i	Δx_i	$f(x_i)$
0	0.00000	3.00000	28.64789	-25.35211	1.50000	1.50000	11.77289
1	1.50000	3.00000	11.77289	-25.35211	2.25000	0.75000	-5.52399
2	1.50000	2.25000	11.77289	-5.52399	1.87500	0.37500	3.599062
3	1.87500	2.25000	3.59906	-5.52399	2.06250	0.18750	-0.86358
4	1.87500	2.06250	3.59906	-0.86358	1.96875	0.09375	1.39493
5	1.96875	2.06250	1.39493	-0.86358	2.01563	0.04688	0.272161
6	2.01563	2.06250	0.27216	-0.86358	2.03906	0.02344	-0.29413
7	2.01563	2.03906	0.27216	-0.29413	2.02734	0.01172	-0.01058
8	2.01563	2.02734	0.27216	-0.01058	2.02148	0.00586	

$\therefore r_a = x_8 = 2.02148 \quad \Delta r_a = \Delta x_8 = 0.00586 < 0.01$. Nótese que fueron necesarias 8 iteraciones (n=8) para alcanzar la precisión deseada ($\Delta r_a = \Delta x_8 < 0.01$).

¿Habrá concluido el proceso iterativo, si se desea una aproximación de la raíz con una precisión de 3 cifras exactas, es decir, $\delta r_a \leq 0.5\ 10^{1-4} = 0.0005$?

El error relativo de la aproximación obtenida:

$$\delta r_a = \delta x_8 = \frac{\Delta x_8}{|x_8|} = \frac{0.00586}{2.02148} = 0.002898866177 > 0.0005$$

por lo que el proceso iterativo debiera continuar en aras de obtener una aproximación con 4 cifras exactas.

- ***Método de Regula-Falsi***

  Dada la ecuación f(x) = 0 y un intervalo [a, b] tales que:

  - En el intervalo [a, b] la ecuación tiene separada una raíz (r)

  - f(x) tiene signos contrarios en a y b, es decir f(a)f(b) < 0

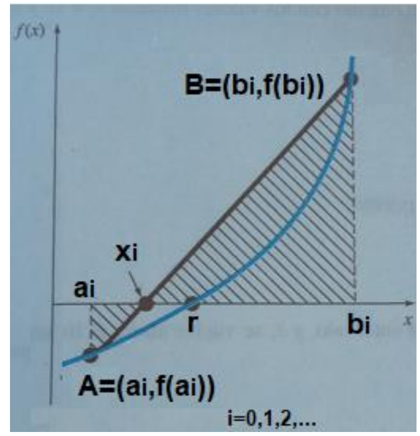
  - f(x) es continua en [a, b].

Llámese [a_0, b_0] al intervalo inicial [a, b].

En el método de la bisección se aproxima la raíz en cada iteración como el punto medio del intervalo de búsqueda; la lógica de esta opción es que, de esa forma se minimiza el error absoluto máximo. Sin embargo, puede haber otras opciones. Una de ellas es la que sigue el método Regula Falsi: si la raíz se encuentra en el intervalo [a, b] es de suponer que esté más cerca de aquel extremo del intervalo donde la función f(x) tome un valor más cercano a cero, y aunque esta lógica no siempre funciona, la mayor parte de las veces sí y, en esos casos, se logra en cada iteración una aproximación mejor de la raíz y se llega más rápido a la exactitud deseada.

El nombre de este método proviene de una frase latina que significa regla inclinada y geométricamente consiste en tomar como aproximación de la raíz en el intervalo [a_i, b_i] el punto de intersección con el eje x de un segmento que une los extremos del arco de la gráfica en ese intervalo. Por esta razón, también se le conoce como método de las cuerdas. En la figura a continuación se muestra esta idea.

Como el segmento AB determina con el eje x dos triángulos rectángulos semejantes, se puede establecer la proporcionalidad entre sus lados:



$$\frac{x_i - a_i}{|f(a_i)|} = \frac{b_i - x_i}{|f(b_i)|} \quad (*)$$

Este método sigue una idea similar al método de bisección, sólo que, en lugar de dividir en cada iteración i el intervalo de búsqueda $[a_i, b_i]$ en dos partes iguales, se divide mediante un punto x_i correspondiente a la abscisa de la intersección con el eje x del segmento de recta que une los puntos $A(a_i, f(a_i))$ y $B(b_i, f(b_i))$. La ecuación de la recta es

$$y - f(a_i) = \frac{f(b_i) - f(a_i)}{b_i - a_i}(x - a_i)$$

(esta fórmula también se obtiene de (*) teniendo en cuenta que en los extremos la función tiene signos opuestos)

y el valor de x_i corresponde al valor de la ordenada y=0, es decir

$$-f(a_i) = \frac{f(b_i) - f(a_i)}{b_i - a_i}(x_i - a_i)$$

de donde despejando x_i se obtiene

$$x_i = a_i - \frac{(b_i - a_i) f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$$

El método de Regula-Falsi con las condiciones exigidas anteriormente converge al valor exacto de la raíz en [a, b]. Una notable diferencia entre los métodos anteriores es que mientras que en el método de bisección los extremos de los intervalos generados tienden al valor de la raíz, y como consecuencia la longitud de los mismos tiende a cero, en el método de Regula-Falsi puede suceder que uno de los extremos permanezca constante(con seguridad si la segunda derivada no cambia de signo en]a, b[, en este caso el extremo fijo es aquel para el cual el signo de la función) y por tanto no tender a cero la longitud de los intervalos generados.

En el método de Regula-Falsi estimar el error no es tan simple como en el caso de bisección ya que, aunque aquí también para cada iteración la raíz está comprendida entre a_i y b_i, el hecho de que por lo general el intervalo $[a_i, b_i]$ no tienda a anularse, hace que el acotamiento anterior no tenga prácticamente utilidad.

Si se adiciona a las hipótesis del método algunas nuevas condiciones más rígidas, puede elaborarse diferentes formas de estimar cotas del error absoluto.

Teorema

Sea f(x) continua y con derivada continua en [a, b]. Sea r la raíz de f(x)=0 comprendida en el intervalo [a, b] y d y D dos números tales que : $0 < d \leq |f'(x)| \leq D$ para $x \in [a,b]$. Entonces, si x_{i-1} y x_i son dos aproximaciones sucesivas del método de Regula-Falsi, se cumple que $|\mathrm{r} - \mathrm{x}_i| \leq \frac{D-d}{d} |\mathrm{x}_i - \mathrm{x}_{i-1}|$

La expresión anterior nos da de por si una forma de estimar una cota del error absoluto, sólo que su aplicación práctica sería difícil por la necesidad de estimar los valores de d y D. Ahora bien, si se supone que en el intervalo [a, b] se toma lo suficientemente pequeño y en él la derivada de f(x) no sufre cambios bruscos, se cumplirá que $D \leq 2d$ y entonces $|\mathrm{r} - \mathrm{x}_i| \leq |\mathrm{x}_i - \mathrm{x}_{i-1}|$.

En la práctica siempre que [a, b] sea pequeño se supone que $D \leq 2d$ se cumple.

Un algoritmo podría ser el siguiente:

- Llámese $[a_0, b_0]$ al intervalo inicial

- Sea $x_0 = a_0 - \frac{(b_0 - a_0) f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}$

- Sea i=0

- Repetir

    Hallar $f(x_i)$

    Si $f(x_i) = 0$ entonces x_i es "exactamente" la raíz buscada y terminar

    en caso contrario si $f(a_i)f(x_i) < 0$ entonces $a_{i+1}=a_i$, $b_{i+1}=x_i$ sino $a_{i+1}=x_i$, $b_{i+1}=b_i$

    Incrementar en uno el valor de i

    Calcular $x_i = a_i - \frac{(b_i - a_i) f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$ y $error_i = |x_i - x_{i-1}|$

  hasta se cumpla el criterio de parada .

El método de Regula-Falsi presenta, por lo general, una convergencia lenta, aunque casi siempre más rápida que la de bisección y requiere sólo un poco más de cálculo que este último, debido a esto se trata de un método más eficiente que el de bisección. Nótese que la rapidez de convergencia está en dependencia de las características de la función, siendo mayor cuando la primera derivada de f sufre pequeños cambios en [a, b]. Una desventaja es que la estimación del error no es completamente satisfactoria: la otra forma de estimar el error ($|x_i - x_{i-1}|$) no siempre es válida.

Entre las características ventajosas se pueden citar:

- Las condiciones de convergencia son mínimas
- Si se sabe que cuando la primera derivada de f sufre pequeños cambios en [a, b], no se necesita apenas ningún trabajo manual previo, excepto el de separar la raíz
- La rapidez de convergencia es mayor que la de bisección
- La cantidad de memoria que requiere es insignificante.

Ejemplo

Determinar un valor aproximado de la raíz de la ecuación $f(x) = \mathrm{x}^3 - 9\mathrm{x}^2 + \frac{90}{\pi} = 0$ separada en el intervalo [0, 3], con error (absoluto) menor que una centena.

Para ello podemos confeccionar la siguiente tabla EXCEL, donde se muestra la programación de algunas celdas:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	i	ai	bi	f(ai)	f(bi)	xi	Δ(xi)	f(xi)
2	0	0	3	=B2^3-9*B2^2 +90/PI()	=C2^3-9*C2^2 +90/PI()	=B2-(C2-B2)*D2/(E2-D2)		=F2^3-9*F2^2 +90/PI()
3	1	=IF(D2*H2<0 ;B2;F2)	=IF(D2*H2<0 ;F2;C2)				=ABS(F3-F2)	

obteniéndose la siguiente tabla (redondeando a la 5ta cifra decimal)

i	a_i	bi	$f(a_i)$	$f(b_i)$	x_i	Δx_i	$f(x_i)$
0	0.00000	3.00000	28.64789	-25.35211	1.59155	-	9.882065
1	1.59155	3.00000	9.88207	-25.35211	1.98658	0.39503	0.969547
2	1.98658	3.00000	0.96955	-25.35211	2.02390	0.03733	0.072492
3	2.02390	3.00000	0.07249	-25.35211	2.02669	0.00278	0.005281

$\therefore r_a = x_3 = 2.02669 \quad \Delta r_a = \Delta x_3 \approx 0.00278 < 0.01$. Nótese que solo fueron necesarias 3 iteraciones (n=3) para alcanzar la precisión deseada ($\Delta r_a = \Delta x_3 < 0.01$).

¿Habrá concluido el proceso iterativo, si se desea que el valor modular de la función evaluada en una aproximación sea menor que una centena, o sea, $|f(r_a)| \leq 0.01$?

El proceso iterativo habrá concluido con este criterio de parada también, ya que

$$|f(r_a)| = |f(x_3)| = 0.0005281 < 0.01 .$$

Nótese que el extremo derecho de cada intervalo es el mismo: $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 3$; mientras la secuencia de los extremos derechos de los intervalos a_0, a_1, a_2, a_3 constituyen aproximaciones (por defecto) que tienden a la raíz de la ecuación. Esto se debe a que:

- $Sg\big(f^{\prime}(x) = 3x(x-6)\big)$ es constante (-) en]0,3[(geométricamente la función es monótona estrictamente decreciente en ese intervalo)
- $Sg\big(f^{\prime\prime}(x) = 6(x-3)\big)$ es constante (-) en]0,3[(geométricamente la función es cóncava hacia abajo en ese intervalo).

- ***Método de Newton-Raphson***

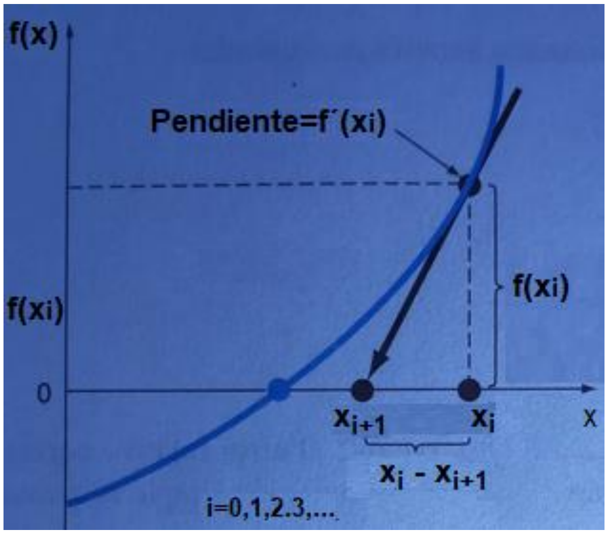
Los dos algoritmos para resolver ecuaciones vistos hasta aquí tienen en común el hecho de que se trata de métodos de intervalos. En ellos se comienza con un intervalo de búsqueda y todo el proceso ocurre dentro de este intervalo. Los métodos que ahora se estudiarán son métodos de puntos, no de intervalos. Todos estos métodos funcionan de manera similar: se tiene una aproximación inicial x_0 de la raíz de la ecuación y, mediante un proceso más o menos simple, se obtiene otra aproximación x_1; este mismo proceso aplicado sobre x_1 da lugar a la aproximación x_2 y sucesivamente, se obtienen los elementos de una sucesión de aproximaciones. Bajo ciertas condiciones, esta sucesión converge hacia la raíz buscada.

El método de Newton-Raphson, también conocido como método de Newton y como método de las tangentes, es uno de los más utilizados en el cálculo de raíces debido a su gran eficiencia; aunque se verá, el mismo no está exento de inconvenientes.

Supongamos que una raíz de f(x)=0 está separada en [a, b] y que se cumplen las siguientes condiciones:

- f(x) es continua y derivable en [a, b]
- El signo de f´(x) es constante en [a, b] (f´(x)>0 o f´(x)<0)
- El signo de f´´(x) es constante en [a, b] (f´´(x)>0 o f´´(x)<0)

El método de Newton consiste en tomar como aproximación x_i el intercepto en el eje x de la recta tangente a la curva en x_{i-1}.



La ecuación de esta recta es:

$$y - f(x_i) = f^{\prime}(x_i)(x - x_i)$$

El punto x_i es el valor de x para y=0; es decir:

$$-f(x_i) = f^{\prime}(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

y basta entonces despejar x_{i+1} para obtener:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f^{\prime}(x_i)}$$

La selección de la aproximación inicial x_0 es importante, pues de ello dependerá que el método converja a la raíz separada en [a, b]. Si se cumplen ciertas condiciones la sucesión $\{x_0, x_1, x_2,\ldots\}$ converge rápidamente hacia la solución de la ecuación.

Teorema

Sea f(x)=0 una ecuación con una raíz en el intervalo [a, b]. Si se satisfacen las condiciones planteadas para el método de Newton:

- f(x) es continua y derivable en [a, b]
- El signo de f´(x) es constante en [a, b] (f´(x)>0 o f´(x)<0)

- El signo de $f''(x)$ es constante en [a, b] ($f''(x)>0$ o $f''(x)<0$)

  y la aproximación inicial se toma de modo que $f(x_0)f''(x_0)>0$

  entonces la sucesión de aproximaciones $\{x_0, x_1, x_2,\ldots\}$ generada por el método de Newton converge a la raíz de f(x)=0 en [a, b].

Nótese que uno de los extremos (a o b) cumple la condición de convergencia respecto a la aproximación inicial.

Si se adiciona a las hipótesis del método algunas nuevas condiciones más rígidas, puede elaborarse diferentes formas de estimar cotas del error absoluto.

Si en el intervalo [a,b] el módulo de la primera derivada está acotada inferiormente por un número positivo d ($|f'(x)|\geq d>0$), y el módulo de la segunda derivada acotada superiormente por M_2 $\left(|f''(x)|\leq M_2\right)$,entonces $|\mathrm{r}-\mathrm{x}_{i+1}|\leq\frac{M_2(\mathrm{x}_{i+1}-\mathrm{x}_i)^2}{2d}$.

La expresión anterior nos da de por si una forma de estimar una cota del error absoluto, sólo que su aplicación práctica sería difícil por la necesidad de estimar los valores de d y M_2. Ahora bien, si se supone ε el error máximo con el que se desea hallar la raíz de la ecuación y $|x_i-x_{i-1}|\leq\varepsilon$, en este caso $|\mathrm{r}-\mathrm{x}_{i+1}|\leq\frac{M_2\varepsilon}{2d}\varepsilon$. Como ε es, por lo general, un número muy pequeño, normalmente se cumple que $\frac{M_2\varepsilon}{2d}<1$ y, por tanto $|\mathrm{r}-\mathrm{x}_{i+1}|\leq|\mathrm{x}_{i+1}-\mathrm{x}_i|$.

De todo lo anterior se infiere que se puede considerar como estimación de la cota del error absoluto la diferencia $\Delta\mathrm{x}_{i+1}=|\mathrm{x}_{i+1}-\mathrm{x}_i|$.

Nótese que $\Delta\mathrm{x}_{i+1}=|\mathrm{x}_{i+1}-\mathrm{x}_i|=\left|\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\right|$

Un algoritmo podría ser el siguiente:

- Seleccionar $x_0\in$[a, b] tal que $f(x_0)f''(x_0)>0$

- Sea i=0

- Repetir

  Calcular $x_{i+1}=x_i-\frac{\mathrm{f}(x_i)}{\mathrm{f}'(x_i)}$ y $\Delta\mathrm{x}_{i+1}=|\mathrm{x}_{i+1}-\mathrm{x}_i|$

  Incrementar en uno el valor de i

  hasta se cumpla el criterio de parada .

Ejemplo

Determinar un valor aproximado de la raíz de la ecuación $f(x)=\mathrm{x}^3-9\mathrm{x}^2+\frac{90}{\pi}=0$ separada en el intervalo [0.1, 2.9], con error (absoluto) menor que una centena.

Analicemos primeramente que las condiciones de convergencia del método estén garantizadas:

- $f(x) = \mathrm{x}^3 - 9\mathrm{x}^2 + \frac{90}{\pi}$ es continua en [0.1, 2.9$f(0.1)f(2.9) = \underbrace{\frac{90000-89\pi}{1000\pi}}_{>0}\underbrace{\frac{90000-51301\pi}{1000\pi}}_{<0} < 0$

- El signo de f´(x) es constante(-) en [0.1, 2.9]: $f^{´}(x) = 3x(x-6) < 0\ \ en\ [0.1, 2.9]$

- El signo de f´´(x) es constante(-) en [0.1, 2.9]: $f^{´´}(x) = 6(x-3) < 0\ \ en\ [0.1, 2.9]$

- Tomando x_0=2.9 se toma cumple que $f(2.9)f^{´´}(2.9) > 0$

Para ello podemos confeccionar la siguiente tabla EXCEL, donde se muestra la programación de algunas celdas:

	A	B	C	D	E
1	i	xi	f(xi)	fd(xi)	Δ(xi)
2	0	2.9	=B2^3-9*B2^2+90/PI()	=3*B2^2-18*B2	
3	1	=B2-C2/D2			=ABS(B3-B2)

obteniéndose la siguiente tabla (redondeando a la 5ta cifra decimal)

i	xi	f(xi)	fd(xi)	Δxi
0	2.90000	-22.65311	-26.97000	
1	2.06006	-0.80422	-24.34955	0.83994
2	2.02703	-0.00311	-24.16001	0.03303
3	2.02691	0.00000	-24.15926	0.00013

$\therefore r_a = x_3 = 2.02691 \quad \Delta r_a = \Delta x_3 \approx 0.00013 < 0.01$. Nótese que solo fueron necesarias 3 iteraciones (n=3) para alcanzar la precisión deseada ($\Delta r_a = \Delta x_3 < 0.01$).

El método de Newton es, generalmente, un método de convergencia rápida, aunque esta rapidez depende de la función f(x); por lo general con cuatro o cinco iteraciones se obtiene una aproximación con más de cuatro cifras decimales exactas. Esta característica hace aconsejable el empleo de este algoritmo en el trabajo manual o cuando limitaciones de tiempo obliguen a utilizar un programa muy eficiente para el cálculo de las raíces. El mayor inconveniente del método es la necesidad de hallar la primera derivada de f(x), lo que puede ser sumamente engorroso y hay que hacerlo fuera de la máquina.

Aunque las condiciones de convergencia son más exigentes que en los otros métodos, las mismas se satisfacen si se toma [a, b] lo suficientemente pequeño; además, es fácil verificar si dichas condiciones se cumplen con sólo mirar en pantalla la gráfica de y=f(x), teniendo en cuenta que el crecimiento de la función indica el signo de la derivada en tanto el sentido de la concavidad indica el signo de la segunda derivada.

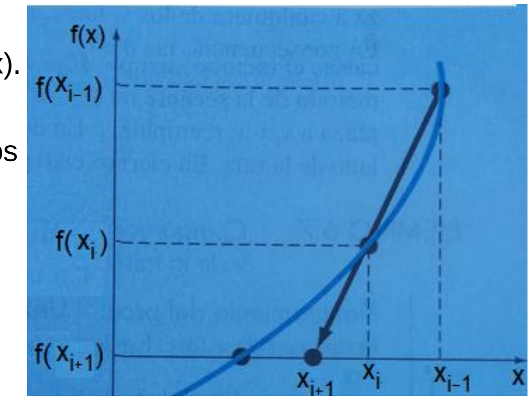
Se puede pensar en un principio aplicar un método menos exigente, por ejemplo bisección, y luego de reducir el intervalo donde se encuentra la raíz lo suficiente aplicar un método de convergencia rápida como el de Newton-Rahson.

- ***Método de la Secante***

  La principal desventaja del método de Newton–Raphson es la necesidad de trabajar con la función derivada de f(x). En muchos casos prácticos esto es un gran inconveniente.

El método de las secantes es una modificación del método de Newton – Raphson dirigida a eliminar la necesidad de utilizar la función derivada.

Para ello, se sustituye la pendiente de la recta tangente por la pendiente de una recta secante a la gráfica de f(x). El método requiere de dos aproximaciones iniciales de la raíz r (x_0, x_1) ya que una secante se determina por dos puntos de la curva.



En la figura se muestra gráficamente cómo funciona el algoritmo. La recta secante a la curva y = f(x) por los puntos de abscisas x_{i-1} y x_i corta al eje x en un punto cuya abscisa se toma como x_{i+1}.

Este proceso repetido para i=0, 1, 2, 3…. da lugar a la sucesión {x_0, x_1, x_2, x_3, ... }.

Si se toman x_0 y x_1 suficientemente próximos a r, el proceso descrito convergerá hacia r.

Como la pendiente de la recta que pasa por los puntos (x_{i-1}, f (x_{i-1})) y (x_i, f (x_i)) es

$$\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} \qquad (1)$$

la expresión que permite determinar x_{i+1} se puede obtener si en la fórmula de Newton–Raphson

$$x_{i+1}=x_i-\frac{\mathrm{f}(x_i)}{\mathrm{f}'(x_i)}$$

se sustituye la pendiente de la recta tangente $\mathrm{f}'(x_i)$ por la expresión (1):

$$x_{i+1}=x_i-\frac{x_i-x_{i-1}}{f(x_i)-f(x_{i-1})}\mathrm{f}(x_i)$$

En cuanto a la estimación del error en el método, su convergencia es comparable con la Newton–Raphson, se utiliza el mismo criterio que en ese método: $\Delta\mathrm{x}_{i+1}=|\mathrm{x}_{i+1}-\mathrm{x}_i|$.

Un algoritmo podría ser el siguiente:

- Seleccionar x_0, $x_1 \in$[a, b]

- Sea i=0

- Repetir

    Incrementar en uno el valor de i

    Calcular $x_{i+1}=x_i-\frac{x_i-x_{i-1}}{f(x_i)-f(x_{i-1})}\mathrm{f}(x_i)$ y $\Delta\mathrm{x}_{i+1}=|\mathrm{x}_{i+1}-\mathrm{x}_i|$

  hasta se cumpla el criterio de parada .

Ejemplo

Determinar un valor aproximado de la raíz de la ecuación $f(x)=\mathrm{x}^3-9\mathrm{x}^2+\frac{90}{\pi}=0$ separada en el intervalo [0.1, 2.9], con error (absoluto) menor que una centena.

Tomando x_0=2.9 y x_1=2.8

Para ello podemos confeccionar la siguiente tabla EXCEL, donde se muestra la programación de algunas celdas:

	A	B	C	D	E	F
1	i	xi	xi-1	f(xi)	f(xi-1)	Δ(xi)
2	0	2.8	2.9	=B2^3-9*B2^2+90/PI()	=C2^3-9*C2^2+90/PI()	
3	1	=B2-((B2-C2)/(D2-E2))*D2	=B2			=ABS(B3-B2)

obteniéndose la siguiente tabla (redondeando a la 5ta cifra decimal)

i	x_i	x_{i-1}	$f(x_i)$	$f(x_{i-1})$	Δx_i
0	2.90000	2.80000	-22.65311	-19.96011	
1	2.05882	2.90000	-0.77385	-22.65311	0.841185
2	2.02906	2.05882	-0.05214	-0.77385	0.029752
3	2.02691	2.02906	-0.00020	-0.05214	0.002149

$\therefore r_a = x_3 = 2.02906 \quad \Delta r_a = \Delta x_3 \approx 0.002149 < 0.01$. Nótese que solo fueron necesarias 3 iteraciones (n=3) para alcanzar la precisión deseada ($\Delta r_a = \Delta x_3 < 0.01$).

- **Métodos combinados de Regula-Falsi y de Newton, y de Regula-Falsi y Secante**

Supongamos que las 5 condiciones que garantizan la convergencia del método de Newton-Raphson se verifican en el intervalo de separación de una raíz, por lo que para los métodos de la Secante (tomando sus dos primeras aproximaciones que garanticen la convergencia del método de Newton-Raphson) y el Regula-Falsi se garantizan también su convergencia. Por eso se emplean frecuentemente combinados uno con otro y la raíz se precisa con mayor rapidez y cotas seguras de error.

Si f´(x)f´´(x)>0, el método de Regula-Falsi da las aproximaciones por defecto y el de Newton (y el de la Secante) por exceso.

Si f´(x)f´´(x)<0, el método de Regula-Falsi da las aproximaciones por exceso y el de Newton (y el de la Secante) por defecto.

Sin embargo, en cualquiera de los dos casos anteriores la raíz se encuentra entre los valores aproximados de las raíces obtenidas por los dos métodos.

Los cálculos han de realizarse en el orden siguiente. En cada iteración i se calculan las aproximaciones:

$$\bar{x}_i = \bar{x}_{i-1} - \frac{f(\bar{x}_{i-1})}{f'(\bar{x}_{i-1})} \qquad \bar{\bar{x}}_i = a_i - \frac{(b_i - a_i) f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$$

donde $\bar{x}_i$ representan las aproximaciones mediante el método de Newton y $\bar{\bar{x}}_i$ representan las aproximaciones mediante el método de Regula-Falsi. De modo similar se procede con la combinación Regula-Falsi y Secante.

En este método combinado es muy cómodo estimar el error de los cálculos. El proceso de cálculos cesa tan pronto se cumpla la desigualdad $\left|\bar{x}_i - \bar{\bar{x}}_i\right| \le 2\varepsilon$. Por valor aproximado se toma $r \approx \frac{\bar{x}_i + \bar{\bar{x}}_i}{2}$

Esto último equivale a aplicar el método de bisección una sola vez al final, por lo que más propiamente se trata de la combinación de los tres métodos estudiados hasta el momento.

Ejercicios resueltos

1. Dada la ecuación $x^3 - 4x^2 - 8x + 10 = 0$

   a) Separe las raíces de la ecuación en intervalos donde la primera y segunda derivadas tengan signos constantes

   b) Determine la menor raíz positiva aplicando 3 pasos (i=0, 1, 2, 3) de los 4 métodos estudiados y los dos métodos combinados, verificando que la convergencia esté garantizada en cada uno.

Solución

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 8x + 10 \qquad f'(x) = 3x^2 - 8x - 8 \qquad f''(x) = 6x - 8$$

a) Empleemos el Método de Lagrange para obtener un intervalo en el que estén contenidas las raíces reales de la ecuación.

Los coeficientes son a_0=1, a_1=-4, a_2=-8 y a_3=10. En esta secuencia existen dos cambios de signo, por lo que la ecuación tiene dos o ninguna raíz positiva. Para acotar el intervalo que la contiene:

B=8 por ser a_2=-8 el coeficiente negativo con mayor valor absoluto

k=1 por ser a_1=-4 el primer coeficiente negativo contando de izquierda a derecha.

Entonces las raíces reales positivas de la ecuación, es menor que el número

$$R = 1 + \left[\frac{B}{a_0}\right]^{\frac{1}{k}} = 1 + \left[\frac{8}{1}\right]^{\frac{1}{1}} = 9$$

por lo que estarán contenidas en [0, 9].

$$f(-x) = -x^3 - 4x^2 + 8x + 10$$

Como a_0 es negativo, debemos multiplicar por -1:

$$-f(-x) = x^3 + 4x^2 - 8x - 10$$

Los coeficientes son a_0=1, a_1=4, a_2=-8 y a_3=-10. En esta secuencia existe un solo cambio de signo, por lo que la ecuación tiene una raíz negativa. Para acotar el intervalo que la contiene:

B=8 por ser a_2=-8 el coeficiente negativo con mayor valor absoluto

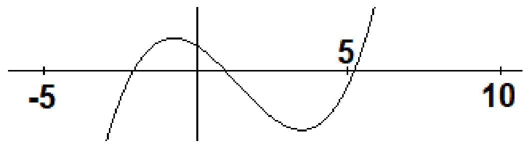
k=2 por ser a_2=-8 a su vez el primer coeficiente negativo contando de izquierda a derecha.

Entonces la raíz real negativa de la ecuación, es menor que el número

$$R = 1 + \left[\frac{B}{a_0}\right]^{\frac{1}{k}} = 1 + \left[\frac{8}{1}\right]^{\frac{1}{2}} = 1 + \sqrt{8} < 4$$

por lo que la raíz negativa esta contenida en [-4, 0], y todas en el intervalo [-4, 9].

En la gráfica de y=f(x) en el intervalo [-5,10] se observa que la ecuación posee 3 raíces separadas con seguridad en los intervalos [-5,0], [0,3] y [3,7].



Para obtener intervalos de separación en los cuales la 1ra y 2da derivadas tengan signo constante, se deben tener en cuenta además los ceros de estas derivadas:

$$f'(x) = 3x^2 - 8x - 8 = 0 \Rightarrow = \frac{8 \pm \sqrt{160}}{2(3)} = \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{3} \qquad x_1 \approx -0.77 \qquad x_2 \approx 3.44$$

$$f''(x) = 6x - 8 = 0 \ \Rightarrow x = \frac{4}{3} \approx 1.33$$

Tomando en consideración estos valores, en lugar de;

- [-5,0] se puede tomar [-5,-1] en el cual la 1ra y 2da derivadas son positivas
- [0,3] se puede tomar [0,1] en el cual la 1ra derivada es negativa y la 2da derivada positiva
- [3,7] se puede tomar [4,7] en el cual la 1ra derivada es positiva y la 2da derivada negativa

b) La menor raíz positiva está separada en el intervalo [0, 1]. Dado que la función es continua en este intervalo y cambia de signo en los extremos, se garantiza la convergencia de los métodos de Bisección y Regula-Falsi. Dado que en este intervalo el signo de la 1ra derivada es positiva y la segunda derivada negativa, las aproximaciones con RF son por defecto y constituyen una sucesión monótona creciente. Para la convergencia de NR, se debe tomar la aproximación inicial x_0 de modo que $f(x_0)f''(x_0) > 0$ y esto se cumple para $x_0 = 1$. En el caso de la secante es conveniente una 2da aproximación que satisfaga $f(x_1)f''(x_1) > 0$ y esto se cumple para $x_1 = 0.9$.

A continuación, se muestran los resultados para cada método:

Bisección

i	a_i	b_i	$f(a_i)$	$f(b_i)$	x_i	Δx_i	$f(x_i)$
0	0.00	1.00	10.00000	-1.00000	0.50000	0.50000	5.12500
1	0.50	1.00	0.22474	1.41421	0.75000	0.25000	0.98954
2	0.75	1.00	0.98954	1.41421	0.87500	0.12500	1.22645
3	0.88	1.00	1.22645	1.41421	0.93750	0.06250	1.32527

Regula-Falsi

i	ai	bi	f(ai)	f(bi)	xi	f(xi)	Δx_i
0	0.000000	1.000000	10.000000	-1.000000	0.909091	0.172802	
1	0.909091	1.000000	0.172802	-1.000000	0.922486	0.001213	0.013394677
2	0.922486	1.000000	0.001213	-1.000000	0.922580	0.000008	0.000093923
3	0.922580	1.000000	0.000008	-1.000000	0.922580	0.000000	0.000000650

Newton-Raphson

i	xi	f(xi)	fd(xi)	Δx_i
0	1.000000	-1.000000	-13.000000	
1	0.923077	-0.006372	-12.828402	0.0769231
2	0.922580	0.000000	-12.827179	0.0004967
3	0.922580	0.000000	-12.827179	0.00000002

Secante

i	xi	xi-1	f(xi)	f(xi-1)	Δx_i
0	1.000000	0.900000	-1.000000	0.289000	
1	0.922420	1.000000	0.002048	-1.000000	0.077580
2	0.922579	0.922420	0.000014	0.002048	0.000159
3	0.922580	0.922579	0.000000	0.000014	0.000001

Método combinado RF-NR

i	xi (RF)	xi(NR)	| xi (RF)-xi(NR) |	xi	Δx_i
0	0.90909091	1.00000000	0.09090909		
1	0.92248559	0.92307700	0.00059141		
2	0.92257951	0.92258000	0.00000049		
3	0.92258016	0.92258000	0.00000016	0.92258	0.0000000796

Método combinado RF-Sec

i	xi (RF)	xi(Sec)	| xi (RF)-xi(NR) |	xi	Δx_i
0	0.909090909	1.000000000	0.090909091		
1	0.922485586	0.922420481	0.000065105		
2	0.922579509	0.922579058	0.000000451		
3	0.922580159	0.922580164	0.000000005	0.9225802	0.0000000023

Ejercicios propuestos (sugerencia de ejercitación)

1. Dada la ecuación $\sqrt{x+1} - \frac{1}{x} + 1 = 0$

   a) Verifique que posee una sola raíz real separada en el intervalo [0.1, 1] combinando el método gráfico y el método analítico

   b) Determine la raíz con una precisión de 3 cifras decimales exactas mediante el método de Bisección

   c) Determine la raíz con una precisión de 3 cifras decimales exactas mediante el método de la Secante, seleccionando dos puntos iniciales con los cuales convergería el método de Newton-Raphson

d) Establezca una comparación entre los métodos anteriores.

2. Dada la ecuación $e^x + x = 0$

a) Separe las raíces de la ecuación

b) Determine la raíz con una precisión de 4 cifras exactas mediante el método de Regula-Falsi, asegurando que la sucesión de aproximaciones es monótona

c) Determine la raíz con una precisión de 4 cifras exactas mediante el método de New-Raphson, seleccionando el punto inicial de modo que su convergencia esté garantizada

d) Establezca una comparación entre los métodos anteriores.

3. Dada la ecuación $4x^3 - 6x^2 + 1 = 0$

a) Determine un intervalo en el que estén contenidas las raíces de la ecuación y separe cada una de ellas en intervalos de amplitud no mayor que 0.5

b) Determine la mayor raíz con error absoluto menor que 0.0005 mediante el método combinado R-F y N-R, verificando que la convergencia esté garantizada

c) Estime el error relativo, así como cantidad de cifras exactas y decimales exactas.

Ejercicios de estudio independiente

Para los ejercicios, los valores de p y q están asignados en la tarea#1:

1. Dada la ecuación $f(x) = pe^x + (q-p)(x-p) = 0$:

a) Exprese la ecuación en la forma h(x)=g(x)

b) Separe gráficamente la raíz de la ecuación haciendo el esbozo manual de y=h(x), y=g(x)

c) Realizar 4 pasos del método de bisección (i=0,1, 2, 3, 4) y estimar el error absoluto, número de cifras decimales exactas, error relativo y numero de cifras exactas de la aproximación de la raíz obtenida.

2. Dada la ecuación $f(x) = pe^{-x} + (p-q)(x-p) = 0$:

a) Exprese la ecuación en la forma h(x)=g(x)

b) Separe gráficamente la raíz de la ecuación haciendo el esbozo manual de y=h(x), y=g(x)

c) Realizar 4 pasos del método de bisección (i=0,1, 2, 3, 4) y estimar el error absoluto, número de cifras decimales exactas, error relativo y numero de cifras exactas de la aproximación de la raíz obtenida.

3. Dada la ecuación $f(x) = x^5 + (p-q)x^3 + (q-p)x^2 + px - q = 0$:

a) Determine un intervalo donde se encuentran las raíces reales de la ecuación aplicando la fórmula de Lagrange, y el posible número de raíces por la Regla de Descartes
b) Separe las raíces
c) Calcule un valor aproximado de la:
-mayor raíz si n (número de lista) es par
-menor raíz si n (número de lista) es impar

por los métodos de Regula-Falsi y Newton-Raphson, o en su defecto el método combinado de ambos, con error absoluto menor o igual que $\frac{q-p}{1000}$, garantizando la convergencia en cada caso.

4. Dada la ecuación $f(x) = x^5 + (q-p)x^4 + (p-q)x^2 - px + q = 0$:
   a) Determine un intervalo donde se encuentran las raíces reales de la ecuación aplicando la fórmula de Lagrange, y el posible número de raíces por la Regla de Descartes
   b) Separe las raíces
   c) Calcule un valor aproximado de la:
   -mayor raíz si n (número de lista) es impar
   -menor raíz si n (número de lista) es par
   por los métodos de Regula-Falsi y la Secante, o en su defecto el método combinado de ambos, con error absoluto menor o igual que $\frac{q-p}{1000}$, garantizando la convergencia en cada caso.