Aproximación de funciones

Sumario:

- El problema de la Interpolación de funciones
- La interpolación global y la interpolación por tramos.
- Interpolación de Lagrange. Error de Interpolación.
- Interpolación de Newton. Error de Interpolación

Bibliografía:

Texto Básico: "Matemática Numérica", Manuel Álvarez Blanco, Alfredo Guerra Hernández, Rogelio Lau Fernández.

Volumen 1. Capítulo 4

Epígrafes 4.1 al 4.4 entre las páginas 223 y 253.

Objetivos:

- Describir el problema general de la aproximación de funciones y, como caso particular, el problema de interpolación polinómica
- Establecer la relación entre el grado de un polinomio interpolador y la cantidad de nodos de interpolación de manera que dicho polinomio exista y sea único
- Explicar el concepto de error de interpolación y acotarlo haciendo uso de la fórmula correspondiente
- Hallar valores interpolados o el polinomio interpolador utilizando cualquiera de los métodos: Lagrange y Diferencias Divididas de Newton
- Explicar la relación entre las diferencias divididas y las derivadas y emplear esta relación para determinar el carácter polinomial de un conjunto de datos
- Describir la interpolación por tramos.

Aspectos a desarrollar:

1. Aproximación de funciones. Generalidades
2. Interpolación polinómica. Forma de Lagrange. Estimación del error
3. Forma del polinomio de interpolación mediante diferencias divididas. Estimación del error. Criterio para seleccionar el grado del polinomio interpolador. Interpolación en un conjunto creciente de puntos. Interpolación por tramos
4. Utilización de las fórmulas de interpolación.

1. Aproximación de funciones. Generalidades

Este es un tema muy importante de la Matemática numérica y trata de como aproximar una función f(x) mediante otra función g(x) más fácil de manipular.

Hay dos razones fundamentales que justifican la aproximación de funciones. La primera se debe a dificultades que se presentan al evaluar o manipular(integrar, derivar, …) funciones. Por ejemplo las funciones lnx y senx, entre otras, no pueden evaluarse estrictamente mediante operaciones aritméticas, a menos que se aproximen por otras como las obtenidas con la ayuda de las series. Otro ejemplo resulta ser que funciones como e^{-x^2} no poseen primitiva dentro del campo de las funciones elementales. La segunda causa es que muchas funciones vienen expresadas mediante tablas y en muchos casos la expresión analítica de la misma es desconocida.

Acerca de la función la información más frecuente es conocer el valor de la misma en algunos puntos y en ocasiones alguna que otra información sobre el comportamiento de la misma(continua en un intervalo de interés, …). A veces los valores de la función son aproximaciones de los valores reales, particularmente cuando son el resultado de experimentos.

El éxito de encontrar la función g(x) depende de muchos factores. Mientras más información se tenga de f(x), la fuente y precisión de los datos tabulados, los requerimientos sobre g(x) y el grado de aproximación, se tendrá mejores opciones de encontrar la función aproximante.

La técnica más frecuentemente empleada para encontrar la función aproximante g(x) es buscarla como una combinación, generalmente lineal, de funciones pertenecientes a una clase de funciones sencillas; como por ejemplo, $\{x^k\}$, {1, cos(kx), sen(kx)}, $\{e^{b_k x}\}$ para k = 0, 1,2,….

Utilizando combinación lineal se tendría:

- $f(x) \approx g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$
- $f(x) \approx g(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 senx + a_2 \cos 2x + b_2 sen2x + \ldots + a_n \cos nx + b_n sennx$
- $f(x) = a_0 e^{b_0 x} + a_1 e^{b_1 x} + a_2 e^{b_2 x} + \ldots + a_n e^{b_n x}$

En ocasiones se utiliza la aproximación racional:

$$f(x) \approx g(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m}$$

Una cuestión de vital importancia es el criterio que se utilice para obtener los coeficientes (a_i, b_i). Entre los que se emplean con mayor frecuencia se encuentran:

- Interpolación: En este criterio los coeficientes se obtienen al imponer que la función aproximante(y las derivadas hasta cierto orden) sean iguales a la función(y las derivadas hasta el orden citado) en un determinado conjunto de puntos.
- Ajuste de curvas: En este criterio se selecciona de determinada clase de funciones la que mejor se "ajusta" a los datos en base a la medida del ajuste empleada.

La aproximación mediante polinomios es la más empleada, entre otras razones, es la más desarrollada y simple. Además los polinomios se pueden evaluar fácilmente y la suma, diferencia y producto son también polinomios. Por otra parte se pueden integrar y derivar con facilidad.

2. Interpolación polinómica. Forma de Lagrange…

Dada una función definida en un intervalo [a, b] determinado por lo puntos(diferentes entre sí)

$x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$

y los valores

$f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots f(x_n)$.

Definición (polinomio interpolador)

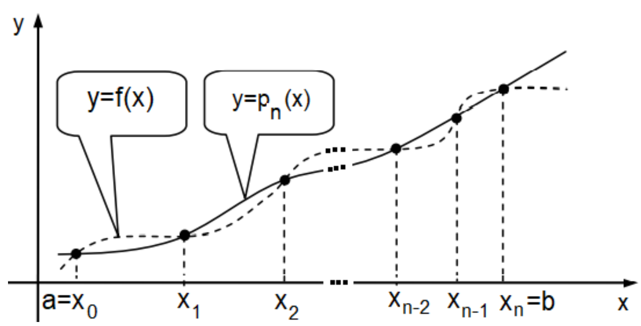
Se denomina polinomio interpolador de f(x) en [a, b] a un polinomio $p_n(x)$ que cumpla con las siguientes condiciones:

- Grado($p_n(x)$) $\leq$ n
- $p_n(x_i) = f(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$

A los puntos x_i se les denominan puntos o nodos de interpolación.

Note que el grado máximo del polinomio interpolador en la cantidad de nodos de interpolación disminuido en uno.

Desde el punto de vista geométrico las gráficas de f(x) y $p_n(x)$ se interceptan al menos en los nodos de interpolación:



Dentro del intervalo [a, b] habláremos de interpolación, fuera del mismo de extrapolación. La extrapolación puede ser muy inexacta y debe evitarse.

Teorema (existencia y unicidad del polinomio de interpolación)

Existe exactamente un polinomio que interpole a f(x) en el intervalo [a, b].

Demostración

Existencia (en forma constructiva: polinomio de interpolación de Lagrange)

Sea $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$ donde $l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$.

Nótese que:

- $grado(l_i(x)) = n$, lo que trae como consecuencia que $grado(p_n(x)) \leq n$
- $l_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & si \;\; i = k \\ 0 & si \;\; i \neq k \end{cases}$, lo que trae como consecuencia que

  $p_n(x_k) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x_k) = f(x_k)$, para k = 0, 1, 2, …,n.

con lo cual queda demostrado la existencia.

Unicidad

Supongamos que existen dos polinomios $p_n(x)$ y $q_n(x)$ que interpolan a f(x) en [a, b].

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

$$q_n(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n$$

Formemos el polinomio diferencia

$$h_n(x) = p_n(x) - q_n(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \ldots + (a_n - b_n)x^n$$

Evidentemente grado(h_n(x)) ≤ n y $h_n(x_i) = p_n(x_i) - q_n(x_i) = f_n(x_i) - f_n(x_i) = 0$ para

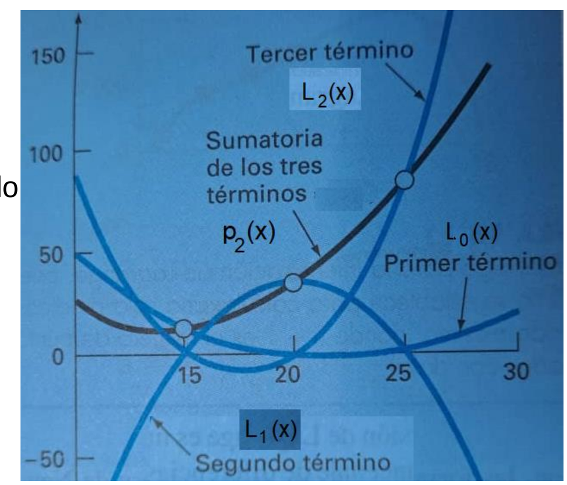
i = 0, 1, 2,…, n . Es decir, $h_n(x)$ posee n+1 ceros , lo que solo es posible si $h_n(x)$ si es idénticamente igual a cero, lo que trae como consecuencia que $p_n(x) = q_n(x)$, con lo cual queda demostrado la unicidad.

l.q.q.d.

Ejemplo:

Dada la siguiente tabla de valores:

i	0	1	2
x_i	15	20	25
$y_i = f(x_i)$	10	40	80



Obtenga el polinomio interpolador de f(x) en el intervalo [15,25], y calcule aproximadamente f(18).

S***olución***

$p_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i) l_i(x)$ $\qquad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

$i = 0, 1, 2$

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 20)(x - 25)}{(15 - 20)(15 - 25)} = \frac{1}{50}x^2 - \frac{9}{10}x + 10$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_0)} = \frac{(x - 15)(x - 25)}{(20 - 15)(20 - 25)} = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{8}{5}x - 15$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 15)(x - 25)}{(20 - 15)(20 - 25)} = \frac{1}{50}x^2 - \frac{7}{10}x + 6$$

$$p_2(x) = \underbrace{f(x_0)l_0(x)}_{L_0(x)} + \underbrace{f(x_1)l_1(x)}_{L_1(x)} + \underbrace{f(x_2)l_2(x)}_{L_2(x)}$$

$$p_2(x) = 10\left(\frac{1}{50}x^2 - \frac{9}{10}x + 10\right) + 40\left(-\frac{1}{25}x^2 + \frac{8}{5}x - 15\right) + 80\left(\frac{1}{50}x^2 - \frac{7}{10}x + 6\right)$$

$\therefore f(x) \approx p_2(x) = \frac{1}{5}x^2 - \mathrm{x} - 20$

De este modo $f(18) \approx p_2(18) = \frac{1}{5}\, 18^2 - 18 - 20 = 26.8.$

Si solo fuese necesario una aproximación de f(18), se podría haber evaluado directamente en:

$l_0(18) = \frac{(18-20)(18-25)}{(15-20)(15-25)} = 0.28$ $\quad$ $l_1(18) = \frac{(18-15)(18-25)}{(20-15)(20-25)} = 0.84$

$$l_2(18) = \frac{(18 - 15)(18 - 25)}{(20 - 15)(20 - 25)} = -0.12$$

$$f(18) \approx p_2(18) = 10(0.28) + 40(0.84) + 80(-0.12) = 26.8$$

sin tener que obtener la expresión de $p_2(x)$.

El algoritmo que sigue permite obtener el polinomio interpolador evaluado en un valor de x dado.

Algoritmo:

Se suponen conocidos los nodos de interpolación y los valores correspondientes de la función a interpolar:

$x_0, x_1, \ldots, x_n$

$y_0, y_1, \ldots, y_n$.

y el valor de x en el que se desea evaluar (Resultado) el polinomio interpolador $p_n(x)$:

Resultado = 0

Para i = 0 hasta n

L = 1

Para j = 0 hasta n

Si j ≠ i entonces $L = L\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$

Fin ciclo j

Resultado = Resultado + y_i L

Fin ciclo i

Terminar

Error de interpolación

Tomemos la función de ayuda

$$g(z) = f(z) - p_n(z) - \frac{w_n(z)}{w_n(x)}\left(f(x) - p_n(x)\right) \qquad \left(x \neq x_i \quad i = 0,\ 1,\ 2...,\ n\right)$$

donde

$$w_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\ ,$$

que resulta ser un polinomio de grado n+1 con coeficiente principal igual a 1.

Notemos que la función g(z) se anula para z = x_0, x_1, x_2,… x_n, x, en total ,en n+2 puntos.

En la demostración se emplea el llamado teorema de Rolle:

Teorema de Rolle

Sea f(x) continua en [a,b]; diferenciable en]a,b[y f(a)=f(b). Entonces existe al menos un valor c entre a y b, tal que $f^{\prime}(c) = 0$.

Aplicando de forma reiterada el teorema de Rolle se deduce que g´(z) se anula en al menos n+1 puntos, g´´(z) se anula en al menos n puntos, …, $g^{(n+1)}$(z) se anula al menos en un punto en [a, b].

Representemos por ξ a uno de los ceros de $g^{(n+1)}$(z) en [a, b].

$$g^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - \frac{(n+1)!}{w_n(x)}\left(f(x) - p_n(x)\right)$$

$$0 = f^{(n+1)}(c) - \frac{(n+1)!}{w_n(x)}\left(f(x) - p_n(x)\right)$$

Evaluando para x = c se tiene $0 = f^{(n+1)}(c) - \frac{(n+1)!}{w_n(x)}\left(f(x) - p_n(x)\right)$ de donde se despeja la expresión del error de interpolación:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}w_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \qquad c \in [a,b]$$

Denote M_{n+1} una cota superior de $\left|f^{(n+1)}(c)\right|$ en [a, b] , entonces

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|w_n(x)| = \Delta_{p_n(x)}(x)$$

Ejemplo

Dada la función $f(x) = 1 - cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ y los valores x= -1, 0 y 1.

a) Obtenga el polinomio interpolador de f(x) en el intervalo [-1, 1] tomando como nodos de interpolación los puntos para los valores de x dados, así como la expresión del error y una cota del error absoluto

b) Determine un valor aproximado de f(0.5) y una estimación del error cometido. ¿Qué se podría hacer para mejorar la aproximación obtenida?

Solución

a) Los nodos de interpolación serian:

i	0	1	2
x_i	-1	0	1
$y_i = 1 - cos\left(\frac{\pi x_i}{2}\right)$	1	0	1

El grado máximo del polinomio de interpolación seria dos (cantidad de nodos de interpolación menos uno).

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i) l_i(x) \qquad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{2} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \qquad i = 0, 1, 2$$

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_0)} = \frac{(x-(-1))(x-1)}{(0-(-1))(0-1)} = -x^2 + 1$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-(-1))(x-0)}{(1-(-1))(1-0)} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$p_2(x) = \underbrace{f(x_0)l_0(x)}_{L_0(x)} + \underbrace{f(x_1)l_1(x)}_{L_1(x)} + \underbrace{f(x_2)l_2(x)}_{L_2(x)}$$

$$p_2(x) = 1\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right) + 0(-x^2 + 1) + 1\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right) = x^2$$

$$\therefore f(x) \approx p_2(x) = x^2$$

El error de interpolación será:

$$R_2(x) = f(x) - p_2(x) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-(-1))(x-0)(x-1) \qquad c \in [-1,1]$$

$$R_2(x) = -\frac{\pi^3 \text{sen}\left(\frac{\pi c}{2}\right)}{48}(x+1)x(x-1) \qquad c \in [-1,1]$$

Error absoluto: $|R_2(x)| = \frac{\pi^3}{48}\left|\text{sen}\left(\frac{\pi c}{2}\right)\right| |x^3 - x| \qquad c \in [-1,1]$

Dado que $\left|\text{sen}\left(\frac{\pi c}{2}\right)\right| \leq 1 \ \ para\ c \in [-1,1]$, entonces una cota del error absoluto es:

$$\Delta_{p_2(x)}(x) = \frac{\pi^3}{48}|x^3 - x|$$

b) En base a lo anterior:

$$f(0.5) \approx p_2(0.5) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Delta_{p_2(x)}(0.5) = \frac{\pi^3}{48}\left|\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2}\right| = \frac{\pi^3}{48}\left|-\frac{3}{8}\right| = \frac{\pi^3}{128} \approx 0.2422$$

Para mejorar se tendrían que considerar una mayor cantidad de nodos de interpolación, aumentando por ende el grado del polinomio interpolador. Se verá a continuación que entonces el error propagado puede ser significativamente mayor que el error de los datos iniciales. Así para interpolar los datos deben ser precisos o utilizar polinomios de interpolación de grado pequeño, dividiendo el intervalo en el que se aproxima la función en varios subintervalos, que constituye la llamada interpolación por tramos que será abordada hacia el final del documento.

Propagación del error en los datos iniciales

En la práctica $f(x_i) \approx y_i$ con $| f(x_i) \approx y_i| \leq \varepsilon_i$ (i = 0, 1, 2, …, n).

En este caso el error propagado es

$$\left|p_n(x) - p_n^*(x)\right| = \left|\sum_{i=0}^{n}\left(f(x_i) - y_i\right)l_i(x)\right| \leq \sum_{i=0}^{n}\left|f(x_i) - y_i\right|\left|l_i(x)\right| \leq \varepsilon L_n$$

donde $\varepsilon = \max \varepsilon_i$ (i = 0, 1, 2, …,n) y $L_n = \sup | l_i(x)|$ ($x \varepsilon [a, b]$).

Se conoce que $L_n \geq \dfrac{2}{\pi}\ln n + c$ (c es una constante), de donde se deduce que el error propagado puede ser significativamente mayor que el error de los datos iniciales. Así para interpolar los datos deben ser precisos o utilizar polinomios de interpolación de grado pequeño.

El método de Lagrange brinda por lo tanto un procedimiento eficiente para hallar el polinomio interpolador, y además un algoritmo que permite encontrar el valor interpolado para una x específica, sin necesidad de hallar la expresión analítica del polinomio interpolador.

La forma de Lagrange del polinomio de interpolación tiene la desventaja de que, si el número de nodos es aumentado, los cálculos precedentes se pierden. Estudiaremos otra forma del polinomio de interpolación en que esta dificultad se elimina.

3. Forma de Newton mediante diferencias divididas…

La idea fundamental del método de Newton es realizar la interpolación en un punto de forma sucesiva: partiendo de dos nodos ir agregando los demás, uno por uno, en el orden que se desee, de tal manera que en cada paso solo se requiera agregar un nuevo término a los cálculos precedentes. El método permite, sin realizar ninguna operación adicional, ir obteniendo en cada paso del proceso una estimación del error de interpolación, de manera que el proceso iterativo se pueda detener si se alcanza un error suficientemente pequeño.

Para ello se necesita introducir el concepto de diferencias. El cálculo de las diferencias y las fórmulas de interpolación basadas en ellas son de particular importancia en la Matemática numérica, debido a que simplifican el proceso de cálculo y sirven de base a otras técnicas numéricas; integración, diferenciación, solución de ED…

Sea f(x) la función a interpolar, $p_{n-1}(x)$ el polinomio interpolador (de grado menor o igual que n – 1) correspondiente a los nodos $\{x_0, x_1,..., x_{n-1}\}$ y $p_n(x)$ al polinomio interpolador (de grado menor o igual que n) que corresponde a los nodos $\{x_0, x_1,..., x_{n-1}, x_n\}$. Se supone, igual que hasta ahora, que todos los nodos de interpolación son diferentes, aunque no tienen que estar ordenados de ninguna forma. Con el propósito de simplificar la notación, se llamará $y_i = f(x_i)$ para i = 0, 1, 2,... .

Como el grado de $p_n(x)$ es menor o igual que n y el de $p_{n-1}(x)$ es menor o igual que n – 1, se tiene que:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + C_n(x) \quad (\Rightarrow C_n(x) = p_n(x) - p_{n-1}(x)) \qquad (1)$$

donde $C_n(x)$ es algún polinomio de grado menor o igual que n. Por otra parte, como ambos polinomios interpolan a f(x) se tiene que:

$$\begin{array}{ll} p_{n-1}(x_0) = y_0 & p_n(x_0) = y_0 \\ p_{n-1}(x_1) = y_1 & p_n(x_1) = y_1 \\ \vdots & \vdots \\ p_{n-1}(x_{n-1}) = y_{n-1} & p_n(x_{n-1}) = y_{n-1} \\ & p_n(x_n) = y_n \end{array}$$

Dado que $C_n(x) = p_n(x) - p_{n-1}(x)$, entonces $C_n(x_0) = C_n(x_1) = C_n(x_2) = \ldots = C_n(x_{n-1}) = 0$

El hecho de que $C_n(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que n asegura que no puede tener más que estos n ceros. Por esta razón será:

$$C_n(x) = a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

con lo cual la expresión (1) toma la forma:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \qquad (2)$$

El coeficiente a_n queda determinado por la condición: $p_n(x_n) = y_n$.

Con el objetivo de llegar a una formulación general es conveniente comenzar a partir de n = 1.

En ese caso la expresión (2) es:

$$p_1(x) = p_0(x) + a_1(x - x_0) \qquad (3)$$

donde $p_0(x)$ es un polinomio de grado cero (una constante) determinado por un solo nodo; esto es:

$$p_0(x) = y_0$$

y a_1 se halla a partir de: $p_1(x_1) = y_1$

Evaluando para $x = x_1$ en la fórmula (3): $y_1 = y_0 + a_1(x_1 - x_0)$

de donde: $a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

El cociente anterior se denomina primera diferencia dividida de la función f para los puntos x_0 y x_1 y se denota $f[x_0, x_1]$, esto es:

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$$

Introduciendo la diferencia de orden cero en el punto x_i mediante $f[x_i] = y_i$, entonces

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

Para obtener el polinomio $p_2(x)$ se llevará a cabo un procedimiento similar:

$p_2(x) = p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$

y se obtiene $a_2 = \frac{f[x_1.x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0} = f[x_0, x_1. x_2]$

denominada segunda diferencia dividida de f para los puntos x_0, x_1, x_2.

Repitiendo este proceso se llega, en general, a:

$$\begin{aligned} p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ + f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

donde, las diferencias divididas de cualquier orden (k) se definen recursivamente por:

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

En general:

$$f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \cdots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

Cuando se trabaja manualmente resulta cómodo organizar los datos como muestra en la siguiente tabla para calcular las diferencias divididas necesarias. Note que una diferencia dividida de determinado orden, se calcula con las diferencias divididas con que está relacionada del orden anterior, dividida entre los valores de x a donde conducen las diagonales que parten de él. Por ejemplo, véase en el cálculo de la diferencia $f[x_0, x_1. x_2] = \frac{f[x_1.x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0}$ de orden 2, cómo se relaciona con las diferencias de orden 1 y con los valores de x de la primera columna.

x	$f(x)$	1ª dif.	2ª dif.	3ª dif.
$\boxed{x_0}$	$f(x_0)$	$\boxed{f[x_0, x_1]}$	$\boxed{f[x_0, x_1, x_2]}$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_1	$f(x_1)$	$\boxed{f[x_1, x_2]}$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$
$\boxed{x_2}$	$f(x_2)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	$\vdots$
x_3	$f(x_3)$	$f[x_3, x_4]$	$\vdots$	
x_4	$f(x_4)$	$\vdots$		
$\vdots$	$\vdots$			

Estimación del error de interpolación

El error de interpolación cometido cuando se utiliza el método de Newton, es el mismo que cuando se usa cualquier otro método, ya que el polinomio interpolador es único para un conjunto de nodos y una función dados. Por tanto, se puede usar la fórmula deducida con anterioridad:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} w_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \qquad c \in [a, b]$$

Sin embargo, es más eficiente utilizar una expresión equivalente que puede calcularse directamente utilizando la tabla de diferencias divididas y no requiere el cálculo de derivadas, aunque se supone, igual que antes, que f(x) posee derivadas hasta el orden n + 1 en un intervalo que incluye a todos los valores de x involucrados en la deducción que sigue.

Sea $p_n(x)$ el polinomio interpolador correspondiente a los nodos $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$. Se desea calcular o por lo menos estimar, el error de interpolación de $p_n(x)$ en el punto $\hat{x}$:

$$R_n(\hat{x}) = f(\hat{x}) - p_n(\hat{x})$$

Considérese ahora el polinomio interpolador de grado menor o igual que n + 1 que corresponde a los n + 2 nodos $\{x_0, x_1, \cdots, x_n, \hat{x}\}$:

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + f\left[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_{n,}\hat{x}\right](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

Sustituyendo $x = \hat{x}$ en esta expresión, y teniendo en cuenta que $p_{n+1}(\hat{x}) = f(\hat{x})$, entonces:

$$f(\hat{x}) = p_n(\hat{x}) + f\left[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_{n,}\hat{x}\right](\hat{x} - x_0)(\hat{x} - x_1) \cdots (\hat{x} - x_n)$$

de donde $R_n(\hat{x}) = f(\hat{x}) - p_n(\hat{x}) = f\left[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_{n,}\hat{x}\right](\hat{x} - x_0)(\hat{x} - x_1) \cdots (\hat{x} - x_n)$

Como en esta expresión, $\hat{x}$ representa un número arbitrario, no existe inconveniente por cambiarlo por x. Esto es:

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = f\left[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_{n,}x\right](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

La fórmula anterior brinda el valor exacto del error de interpolación del polinomio $p_n(x)$, pero su valor no es calculable, pues calcular la diferencia dividida $f\left[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_{n,}x\right]$ requeriría conocer f(x) lo cual carece de sentido pues, precisamente se quiere calcular $p_n(x)$ porque no se dispone de f(x). Si en esta diferencia dividida se toma x_{n+1} en lugar de x, se obtiene una aproximación del error de interpolación. Por tanto, se define:

$$\hat{R}_n(x) = f\left[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_{n,}x_{+1}\right](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

y puede esperarse que, si las diferencias divididas de orden n + 1 no son funciones que experimenten grandes cambios, se cumpla la aproximación:

$$R_n(x) \approx \hat{R}_n(x) = p_{n+1}(x) - p_n(x)$$

Es decir, el error estimado para $p_n(x)$, sumado a $p_n(x)$ da la aproximación $p_{n+1}(x)$, lo cual hace sumamente cómodo y eficiente el modo de estimar el error de interpolación cuando se utiliza el método de Newton.

En términos de cota del error absoluto:

$$\Delta_{p_n(x)}(x) \approx |p_{n+1}(x) - p_n(x)|$$

Observación

Debe tenerse cuidado al ordenar los nodos para formar la tabla de diferencias divididas si se desea que las sucesivas aproximaciones que se van obteniendo tengan la mejor calidad. Así, si se desea que la aproximación $p_1(x)$ sea una buena aproximación, los nodos x_0 y x_1 deben ser escogidos de modo que estén lo más cerca posible y que entre ellos se encuentre el valor x donde se ha de interpolar. El nodo x_2 se tomará de tal modo que el conjunto $\{x_0, x_1, x_2\}$ esté lo más cerca posible del valor x y similarmente con los demás nodos que se incluyan en la tabla. De no procederse así, puede suceder que algunas de las aproximaciones obtenidas en los pasos sucesivos del algoritmo correspondan a extrapolaciones en lugar de interpolaciones y se obtengan errores de interpolación muy exagerados.

El siguiente teorema nos permite detectar si un conjunto de pares (x, y) corresponden a una función polinómica, o tienen un comportamiento similar a una función polinómica.

Teorema

Las diferencias divididas de orden m de un polinomio de grado m son constantes (es decir, no dependen de los nodos seleccionados) y las de orden mayor que m son nulas.

El orden de las diferencias constantes indica el grado del polinomio de que se trata.

Criterio para seleccionar el grado del polinomio interpolador

Un criterio para seleccionar el grado del polinomio a utilizar, menor que la cantidad de puntos menos 1, en funciones que no son polinómicas, pero se aproximan a un polinomio de grado m en ese caso en que la columna de las diferencias de grado m se hace aproximadamente constante.

Ejemplo

Dada la siguiente tabla de valores:

x	1	1.2	1.4	1.6	1.8
f(x)	4.002	5.719	7.678	9.878	12.317

a) Confeccione la tabla de diferencias divididas y escriba la expresión del polinomio interpolador de f(x) en el intervalo [1, 1.8] y del error. ¿es posible estimar el error?

b) Analizando la tabla de diferencias obtenida, indique el grado de un polinomio (menor que el del inciso a) que aproxime a f(x) en el intervalo [1, 1.8] de modo adecuado y determínelo. ¿Es factible en este ejemplo estimar el error?

c) Obtenga un valor aproximado de f(1.12) y una estimación del error cometido.

Solución

a) $f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1},\cdots,x_{i+k-1},x_{i+k}] - f[x_i,x_{i+1},\cdots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}$ i : 0 a 4 k : 1 a 4 (orden de dif.)

i	x_i	$f[x_i] = y_i$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+3}]$	$[x_i, \cdots, x_{i+4}]$
0	1.000	4.002	8.585	3.025	-0.021	-0.02604
1	1.200	5.719	9.795	3.013	-0.042	
2	1.400	7.678	11.000	2.988		
3	1.600	9.878	12.195			
4	1.800	12.317				

$$p_4(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$p_4(x) = 4.002 + 8.585(x - 1) + 3.025(x - 1)(x - 1.2) - 0.021(x - 1)(x - 1.2)(x - 1.4) - 0.02604(x - 1)(x - 1.2)(x - 1.4)(x - 1.6)$$

$$p_4(x) = -0.98771552 + 2.062189120\,\mathrm{x} + 2.8391584\,x^2 + 0.114408\,x^3 - 0.02604\,x^4$$

$$R_4(x) = f(x) - p_4(x) = f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

La fórmula anterior brinda el valor exacto del error de interpolación del polinomio $p_4(x)$, pero su valor no es calculable en este ejemplo, pues para calcular la diferencia dividida $f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x]$ se requiere conocer f(x), y en este ejemplo no se conoce, solo sus valores en algunos puntos.

b) Analizando la tabla de diferencias, se observa que los valores de las diferencias divididas de orden 2 ($f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$) son cercanos a 3, lo que es índice de que un polinomio de grado 2 aproxima de modo adecuado a f(x) en el intervalo [1, 1.8]. En este caso es factible estimar el error:

$$\Delta_{p_2(x)}(x) \approx |p_3(x) - p_2(x)| = f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Para formar un polinomio de grado 2 se requieren 3 puntos, y un 4to para estimar el error por la expresión anterior.

Tomando en consideración la observación dada al final de la página 10, para aproximar por ejemplo a f(1.12), es conveniente que x_0 siga siendo x=1. En este caso:

$$f(x) \approx p_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$p_2(x) = 4.002 + 8.585(x - 1) + 3.025(x - 1)(x - 1.2)$$

$$p_2(x) = -0.9953 + 1.93\,\mathrm{x} + 3.025\,x^2$$

$$\Delta_{p_2(x)}(x) \approx |p_3(x) - p_2(x)| = |f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)|$$

$$\Delta_{p_2(x)}(x) \approx |-0.021(x - 1)(x - 1.2)(x - 1.4)| = 0.021|\,x^3 - 3.6\,x^2 + 4.28\,x - 1.68|$$

Si por ejemplo, se desea aproximar por ejemplo a f(1.22), es conveniente que el papel de x_0 lo tome ahora x= x_1 =1.2. En este caso:

$$f(x) \approx p_2(x) = f[x_1] + f[x_1, x_2](x - x_1) + f[x_1, x_2, x_3](x - x_1)(x - x_2)$$

c) En base a lo discutido en el inciso anterior:

$$f(1.12) \approx p_2(1.12) = -0.9953 + 1.93\,(1.12) + 3.025\,(1.12)^2 = 4.96086$$

$$\Delta_{p_2(x)}(1.12) \approx 0.021|\,1.12^3 - 3.6\,(1.2^2) + 4.28\,(1.12) - 1.68| = 0.0000564$$

Interpolación en un conjunto creciente de nodos

En muchas ocasiones no se conoce el grado adecuado para interpolar. En estos casos se puede emplear la técnica de interpolar en un conjunto creciente de nodos. Se comienza con un número pequeño de nodos y se van añadiendo nodo tras nodo y observando el comportamiento de las aproximaciones hasta lograr el requerimiento de precisión deseado.

El algoritmo que sigue permite calcular p(x) donde p es el polinomio interpolador y x es un valor numérico. Se suponen conocidos los nodos de interpolación: x_0, x_1,..., x_n, los valores correspondientes de la función a interpolar: y_0, y_1,..., y_n, el número x donde se desea interpolar y la tolerancia ε del error absoluto de interpolación la cual debe ser mucho mayor que el error por redondeo, o por otras causas, que contengan los datos. El resultado será el número p(x) y el error de interpolación estimado.

Para i=0 hasta n {En este lazo, los valores de la función se transfieren al arreglo $d_i = f(x_i)$: diferencias de orden 0}

$d_i = y_i$

Fin ciclo i

Para i=1 hasta n {A la salida de este lazo, cada variable di contiene la diferencia dividida de orden i que corresponde a la primera fila de la tabla de diferencias}

j=n

Repetir

$d_j = \frac{d_j - d_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}$

j=j-1

Hasta que j<i

Fin ciclo i

p=d_0

producto=x-x_0

error=d_1 producto

ea= $|error|$

i=1

Mientras ea> ε y i<n {El algoritmo termina cuando el error absoluto estimado es menor que la tolerancia ε o cuando el grado de interpolación se hace muy alto}

p=p+error

producto=producto (x-x_i)

i=i+1

error=d_i producto

Fin de Mientras

El resultado de la interpolación es p con error estimado de error

Terminar

Interpolación por tramos

Existen en la práctica muchas situaciones en que se desea encontrar una curva plana que pase por n+1 puntos dados. A primera vista podría parecer que un polinomio interpolador de grado n sería idóneo. Con un número de puntos no muy elevado se empiezan a presentar dificultades, como lo trabajoso de obtenerlos y evaluarlos, pero peor aún es que al aumentar el grado de interpolación los errores de redondeo se propagan de forma vertiginosa.

En estos casos es preferible abordar el problema de otra manera: en lugar de buscar un solo polinomio que satisfaga las n+1 condiciones $p_n(x_i)=f(x_i)$ hallar varios polinomios, cada uno de los cuales pase por un número reducido de puntos. A este modo de proceder se le denomina interpolación por tramos.

Ejemplo

Dada la siguiente tabla de valores:

x	1	1.07	1.1	1.17	1.2	1.27	1.3
f(x)	1	0.9735	0.95135	0.93304	0.91817	0.9064	0.89747

a) Obtener una aproximación de f(x) mediante polinomios de grado por tramo

b) Calcular aproximadamente f(1.05), f(1.15) y f(1.25)

c) Estimar el área bajo la curva y=f(x) en el intervalo [1, 1.3].

Solución

a) Para formar un polinomio de grado 2, se necesitan tres puntos. Por ello se forman tres tramos:

x	1	1.07	1.1
f(x)	1	0.9735	0.95135

1.1	1.17	1.2
0.95135	0.93304	0.91817

1.2	1.27	1.3
0.91817	0.9064	0.89747

Formemos las tablas de diferencias divididas por cada tramo y el correspondiente polinomio interpolador:

<u>Tramo 1:</u>

i	x_i	$f[x_i] = y_i$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	1	1	-0.37857	-3.59762
1	1.07	0.9735	-0.73833	
2	1.1	0.95135		

$$f(x) \approx p_2^{(1)}(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$p_2^{(1)}(x) = 1 - 0.37857(x - 1) - 3.59762(x - 1)(x - 1.07)$$

$$p_2^{(1)}(x) = -\,2.470883399 + \ 7.0685034\,\mathrm{x} - \ 3.59762\,\mathrm{x}^2$$

Tramo 2:

i	x_i	$f[x_i] = y_i$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	1.1	0.95135	-0.26157	-2.34095
1	1.17	0.93304	-0.49567	
2	1.2	0.91817		

$$f(x) \approx p_2^{(2)}(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$p_2^{(2)}(x) = 0.95135 - 0.26157(x - 1.1) - 2.34095(x - 1.1)(x - 1.17)$$

$$p_2^{(2)}(x) = -\,1.77372565 + \ 5.0523865\,\mathrm{x} - \ 2.34095\,x^2$$

Tramo 3

i	x_i	$f[x_i] = y_i$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	1.2	0.91817	-0.16814	-1.29524
1	1.27	0.9064	-0.29767	
2	1.3	0.89747		

$$f(x) \approx p_2^{(3)}(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$p_2^{(3)}(x) = 0.91817 - 0.16814(x - 1.2) - 1.29524(x - 1.2)(x - 1.27)$$

$$p_2^{(3)}(x) = -\,0.8540077599 + \ 3.0311028\,\mathrm{x} - \ 1.29524\,x^2$$

$$\therefore f(x) \approx \begin{cases} p_2^{(1)}(x) = -\,2.470883399 + \ 7.0685034\,\mathrm{x} - \ 3.59762\,x^2 & para\ 1 \le x \le 1.1 \\ p_2^{(2)}(x) = -\,1.77372565 + \ 5.0523865\,\mathrm{x} - \ 2.34095\,x^2 & para\ 1.1 \le x \le 1.2 \\ p_2^{(3)}(x) = -\,0.8540077599 + \ 3.0311028\,\mathrm{x} - \ 1.29524\,x^2 & para\ 1.2 \le x \le 1.3 \end{cases}$$

b) $f(1.05) \approx p_2^{(1)}(1.05) = -\,2.470883399 + \ 7.0685034\,(1.05) - \ 3.59762\,(1.05)^2 = 0.9846691210$

$$f(1.15) \approx p_2^{(2)}(1.15) = -\,1.77372565 + \ 5.0523865(1.15) - \ 2.34095\,(1.15)^2 = 0.9406124499$$

$$f(1.25) \approx p_2^{(3)}(1.25) = -\,0.8540077599 + \ 3.0311028(1.25) - \ 1.29524\,(1.25)^2 = 0.9110582400$$

c) $Area = \int_{1}^{1.3} f(x)dx = \int_{1}^{1.1} f(x)dx + \int_{1.1}^{1.2} f(x)dx + \int_{1.2}^{1.3} f(x)dx \approx$
$\int_{1}^{1.1} p_2^{(1)}(x)dx + \int_{1.1}^{1.2} p_2^{(2)}(x)dx + \int_{1.2}^{1.3} p_2^{(3)}(x)dx = \int_{1}^{1.1}[-2.470883399 + 7.0685034\,\mathrm{x} - 3.59762\,x^2]dx + \int_{1.1}^{1.2} p_2^{(2)}(x)dx + \int_{1.2}^{1.3} p_2^{(3)}(x)dx =$

$$\int_{1}^{1.1} p_2^{(1)}(x)dx = \int_{1}^{1.1}[-2.470883399 + 7.0685034\,\mathrm{x} - 3.59762\,x^2]dx$$
$$= \left[-2.470883399\mathrm{x} + 7.0685034\frac{\mathrm{x}^2}{2} - 3.59762\frac{\mathrm{x}^3}{3}\right]_1^{1.1} = 0.09816711043$$

$$\int_{1.1}^{1.2} p_2^{(2)}(x)dx = \int_{1.1}^{1.2}[-1.77372565 + 5.0523865\,\mathrm{x} - 2.34095\,x^2]dx$$
$$= \left[-1.77372565\mathrm{x} + 5.0523865\,\frac{\mathrm{x}^2}{2} - 2.34095\frac{\mathrm{x}^3}{3}\right]_{1.1}^{1.2} = 0.09386616583$$

$$\int_{1.2}^{1.3} p_2^{(3)}(x)dx = \int_{1.2}^{1.3}[-0.8540077599 + 3.0311028\,\mathrm{x} - 1.29524\,x^2]dx$$
$$= \left[-0.8540077599\mathrm{x} + 3.0311028\,\frac{\mathrm{x}^2}{2} - 1.29524\frac{\mathrm{x}^3}{3}\right]_{1.2}^{1.3} = 0.09099788734$$

$Area \approx 0.09816711043 + 0.09386616583 + 0.09099788734 = 0.2830311636$

4. Utilización de las fórmulas de interpolación

Ante todo, se debe resaltar que todas las formas de los polinomios de interpolación vistas anteriormente aplicadas sobre un mismo conjunto de nodos son equivalentes.

La utilidad de la forma de Lagrange es ante todo de tipo teórico. Se emplean por ejemplo para el desarrollo de fórmulas de integración y derivación.

La fórmula de Newton con diferencias divididas se puede utilizar en cualquier conjunto de puntos, equidistantes o no, ordenados o no. Particularmente útil al interpolar en un conjunto creciente de nodos, pues no se pierden los cálculos anteriores y resulta cómoda la estimación del error de interpolación.

A continuación, se presenta una ejercitación clasificada en tres categorías: resueltos (los estudiantes deben primeramente tratar de identificar vías posibles de solución y compararla con la utilizada), propuestos (constituyen una sugerencia de ejercitación) y de estudio independiente (constituyen la base de la tarea a asignar a los estudiantes).

Antes de estudiar los ejercicios resueltos y resolver ejercicios propuestos y de estudio independiente, se sugiere consultar la bibliografía indicada, en particular los ejemplos del libro de texto en formato digital: 1(pág. 11),

Ejercicios resueltos

1. Dada la función $f(x) = ln(x^2 + 1)$ y los valores x= 0, 0.3, 0.5, 0.8 y 1.
   a) Obtenga el polinomio interpolador (global) de f(x) en el intervalo [0, 1] tomando como nodos de interpolación los puntos para los valores de x dados, así como la expresión del error y una cota del error absoluto, sabiendo $\left|f^{(5)}(x)\right| = \left|48\frac{x(x^4 - 10x^2 + 5)}{(x^2 + 1)^5}\right| < 40 \ \ para\ 0 \le x \le 1$
   b) Obtenga los polinomios interpoladores en los tramos [0, 0.5] y [0.5, 1]
   c) Determine un valor aproximado de f(0.2) y f(0.7) mediante los polinomios de interpolación obtenidos, y compare estos resultados con la evaluación de f(x) en estos mediante algún medio de cómputo.

Solución

a) Los nodos de interpolación serian (redondeando a la 5ta cifra decimal)

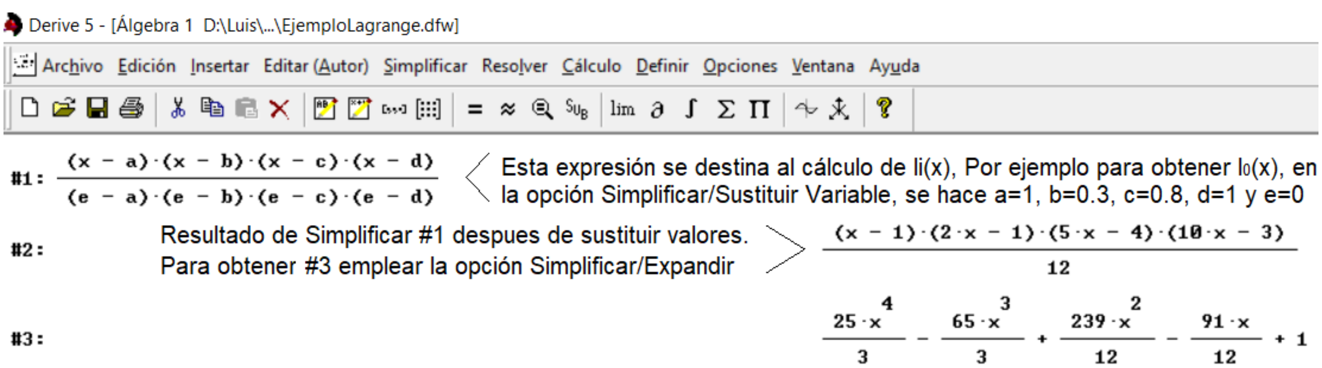
i	0	1	2	3	4
x_i	0	0.3	0.5	0.8	1
$y_i = ln(x_i^2 + 1)$	0	0.08618	0.22314	0.49475	0.69315

El grado máximo del polinomio de interpolación seria 4 (cantidad de nodos de interpolación menos uno).

$$p_4(x) = \sum_{i=0}^{4} f(x_i) l_i(x) \qquad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{4} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad i = 0, 1, 2, 3, 4$$

Para obtener las expresiones de $l_i(x)$, se puede utilizar un asistente matemático como el Derive.

Se muestra a continuación como obtener $l_0(x)$, los demás de forma similar:



$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4)} = \frac{(x - 0.3)(x - 0.5)(x - 0.8)(x - 1)}{(-0.3)(-0.5)(-0.8)(-1)}$$
$$= \frac{25}{3}x^4 - \frac{65}{3}x^3 + \frac{239}{12}x^2 - \frac{91}{12}x + 1$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} = \frac{x(x - 0.5)(x - 0.8)(x - 1)}{0.3(0.3 - 0.5)(0.3 - 0.8)(0.3 - 1)}$$
$$= -\frac{1000}{21}x^4 + \frac{2300}{21}x^3 - \frac{1700}{21}x^2 + \frac{400}{21}x$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} = \frac{x(x-0.3)(x-0.8)(x-1)}{0.5(0.5-0.3)(0.5-0.8)(0.5-1)}$$
$$= \frac{200}{3}x^4 - 140x^3 + \frac{268}{3}x^2 - 16x$$

$$l_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} = \frac{x(x-0.3)(x-0.5)(x-1)}{0.8(0.8-0.3)(0.8-0.5)(0.8-1)}$$
$$= -\frac{125}{3}x^4 + 75x^3 - \frac{475}{12}x^2 + \frac{25}{4}x$$

$$l_4(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} = \frac{x(x-0.3)(x-0.5)(x-0.8)}{(1-0.3)(1-0.5)(1-0.8)}$$
$$= \frac{100}{7}x^4 - \frac{160}{7}x^3 + \frac{79}{7}x^2 - \frac{12}{7}x$$

$$p_4(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x) + f(x_3)l_3(x) + f(x_4)l_4(x) =$$
$$0\left(\tfrac{25}{3}x^4 - \tfrac{65}{3}x^3 + \tfrac{239}{12}x^2 - \tfrac{91}{12}x + 1\right) + 0.08618\left(-\tfrac{1000}{21}x^4 + \tfrac{2300}{21}x^3 - \tfrac{1700}{21}x^2 + \tfrac{400}{21}x\right) +$$
$$0.22314\left(\tfrac{200}{3}x^4 - 140x^3 + \tfrac{268}{3}x^2 - 16x\right) + 0.4947\left(-\tfrac{125}{3}x^4 + 75x^3 - \tfrac{475}{12}x^2 + \tfrac{25}{4}x\right) +$$
$$0.69315\left(\tfrac{100}{7}x^4 - \tfrac{160}{7}x^3 + \tfrac{79}{7}x^2 - \tfrac{12}{7}x\right)$$

Para simplificar esta expresión, copiarla, introducirla y Simplificar en el Derive, luego Expandir y aproximar (≈):

$$\therefore f(x) \approx p_4(x) = 0.06183x^4 - 0.54177x^3 + 1.19818x^2 - 0.0251x$$

El error de interpolación será:

$$R_4(x) = f(x) - p_4(x) = \frac{f^{(5)}(c)}{6!}x(x-0.3)(x-0.5)(x-0.8)(x-1) \qquad c \in [0,1]$$

$$f^{(5)}(c) = 48\frac{c(c^4 - 10c^2 + 5)}{(c^2+1)^5}$$

Error absoluto: $|R_4(x)| = \left|\frac{f^{(5)}(c)}{6!}x(x-0.3)(x-0.5)(x-0.8)(x-1)\right| \qquad c \in [-1,1]$

Dado que $\left|f^{(5)}(c)\right| < 40 \;\; para\; c \in [0,1]$, entonces una cota del error absoluto es:

$$\Delta_{p_4(x)}(x) = \frac{1}{18}|x(x-0.3)(x-0.5)(x-0.8)(x-1)|$$

b) ***Primer tramo:***

i	0	1	2
x_i	0	0.3	0.5
y_i	0	0.08618	0.22314

$p_2^{(1)}(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)l_i(x) \qquad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{2} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \qquad i = 0, 1, 2$

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0.3)(x-0.5)}{(-0.3)(-0.5)} = \frac{20}{3}x^2 - \frac{16}{3}x + 1$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{x(x-0.5)}{0.3(0.3-0.5)} = -\frac{50}{3}x^2 + \frac{25}{3}x$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{x(x-0.3)}{0.5(0.5-0.3)} = 10x^2 - 3x$$

$$\begin{aligned} p_2^{(1)}(x) &= f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x) \\ &= 0\left(\frac{20}{3}x^2 - \frac{16}{3}x + 1\right) + 0.08618\left(-\frac{50}{3}x^2 + \frac{25}{3}x\right) \\ &\quad + 0.22314(10x^2 - 3x) \end{aligned}$$

$$f(x) \approx p_2^{(1)}(x) = 0.79507x^2 + 0.04875x$$

Segundo tramo:

i	2	3	4
x_i	0.5	0.8	1
y_i	0.22314	0.49475	0.69315

$$p_2^{(2)}(x) = \sum_{i=2}^{4} f(x_i)l_i(x) \qquad l_i(x) = \prod_{\substack{j=2 \\ j\neq i}}^{4} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \qquad i = 2, 3, 4$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_3)(x_0-x_4)} = \frac{(x-0.8)(x-1)}{(0.5-0.8)(0.5-1)} = \frac{20}{3}x^2 - 12x + \frac{16}{3}$$

$$l_3(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_2)(x_3-x_4)} = \frac{(x-0.5)(x-1)}{(0.8-0.5)(0.8-1)} = -\frac{50}{3}x^2 + 25x - \frac{25}{3}$$

$$l_4(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_2)(x_4-x_3)} = \frac{(x-0.5)(x-0.8)}{(1-0.5)(1-0.8)} = 10x^2 - 13x + 4$$

$$\begin{aligned} p_2^{(2)}(x) &= f(x_2)l_2(x) + f(x_3)l_3(x) + f(x_4)l_4(x) \\ &= 0.22314\left(\frac{20}{3}x^2 - 12x + \frac{16}{3}\right) + 0.49475\left(-\frac{50}{3}x^2 + 25x - \frac{25}{3}\right) \\ &\quad + (10x^2 - 13x + 4) \end{aligned}$$

$$f(x) \approx p_2^{(2)}(x) = 3.24177x^2 - 3.30893x + 1.06716$$

c) Evaluaciones:

	Aprox. global	Aprox, por tramo	Valor computado
$f(0.2) \approx$	0.038672	0.0415528	0.039220
$f(0.7) \approx$	0.398556	0.3393763	0.398776

Las aproximaciones obtenidas mediante el polinomio de interpolación global fueron ligeramente mejores, pero a costa de un mayor volumen de cálculos.

Las aproximaciones obtenidas mediante polinomios de interpolación por tramos fueron ligeramente peores, pero con un menor volumen de cálculos.

2. Dada la siguiente tabla de valores, obtenida mediante la evaluación de la función f(x)=senh(x), redondeando a la cuarta cifra decimal;

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	-3	-2.4	-2	-1.4	-1	-0.4	0
y_i	-10.0179	-5.4662	-3.6269	-1.9043	-1.1752	-0.4108	0

a) Confeccione la tabla de diferencias divididas

b) Determinar aproximadamente f(-2.7) con error absoluto menor que 0.005, mediante interpolación en un conjunto creciente de puntos. ¿Es del todo casual que el polinomio de grado 3 nos aportará una buena aproximación? Justifique

c) Será recomendable emplear el polinomio con que se aproximó f(-2.7) para aproximar f(-1.2)?. Justifique

d) Obtenga los polinomios interpoladores en los tramos [-3, -1.4] y [-1.4, 0]; y obtenga una aproximación de f(-1.2) y una valoración del error absoluto.

Solución

a) La tabla de diferencias divididas se puede formar con la ayuda del Excel:

i	x_i	$y_i = f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+3}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+4}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+5}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+6}]$
0	-3	-10.0179	7.5861	-2.9877	0.7876	-0.1512	0.024876	-0.003
1	-2.4	-5.4662	4.5984	-1.7275	0.4852	-0.0865	0.015868	
2	-2	-3.6269	2.8709	-1.0482	0.3122	-0.0484		
3	-1.4	-1.9043	1.8228	-0.5487	0.2153			
4	-1	-1.1752	1.2741	-0.2472				
5	-0.4	-0.4108	1.0269					
6	0	0.0000						

b) $f(x) \approx p_1(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0)$

$R_1(x) \approx p_2(x) - p_1(x) = f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$

$f(-2.7) \approx p_1(-2.7) = -10.0179 + 7.5861(-2.7 + 3) = -7.74207$

$R_1(-2.7) = -2.9877(-2.7 + 3)(-2.7 + 2.4) = 0.268893$

$\Delta_{p_1(x)}(-2.7) \approx |R_2(-2.7)| = 0.268893\ (> 0.005)$

$f(x) \approx p_2(x) = p_1(x) + R_1(x)$

$f(-2.7) \approx p_2(-2.7) = p_1(-2.7) + R_1(-2.7) = -7.74207 + 0.26889 = -7.47318$

$R_2(x) \approx p_3(x) - p_2(x) = f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

$R_2(-2.7) \approx 0.7876(-2.07 + 3)(-2.07 + 2.4)(-2.07 + 2) = -0.01692$

$\Delta_{p_2(x)}(-2.7) \approx |R_2(-2.7)| = 0.01692\ (> 0.005)$

$f(x) \approx p_3(x) = p_2(x) + R_2(x)$

$f(-2.7) \approx p_3(-2.7) = p_2(-2.7) + R_2(-2.7) = -7.47318 - 0.01692 = -7.4901$

$R_3(x) \approx p_4(x) - p_3(x) = f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

$R_3(-2.7) \approx -0.1512(-2.07 + 3)(-2.07 + 2.4)(-2.07 + 2)(-2.07 + 1.4) = -0.00217$

$\Delta_{p_3(x)}(-2.7) \approx |R_3(-2.7)| = 0.00217\ (< 0.005)$

$\therefore f(-2.07) \approx p_3(-2.07) = -7.4901 \qquad \Delta_{p_3(x)}(-2.7) \approx 0.00217\ (< 0.005)$

No es del todo casual que el polinomio de grado 3 nos aportará una buena aproximación, ya que los valores de la columna de diferencias divididas de orden 3 son cercanos entre sí, lo que se evidencia además por ser los elementos de las sucesivas diferencias cercanas a cero. Esto trae como consecuencia que un polinomio de grado 3 interpola de modo adecuado a la función.

c) El polinomio con que se aproximó f(-2.7) se formó con los nodos en el intervalo [-3, -1.4]. El punto x=-1.2 cae fuera de este intervalo, por lo que estaríamos extrapolando. Por ello seria recomendable emplear los nodos en el intervalo [-1.4, 0] para un polinomio interpolador con el cual aproximar f(-1.2). El papel de x_0 se asume ahora x_3.

d) <u>En el tramo [-3, -1.4]</u> :

$$p_3^{(1)}(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$p_3^{(1)}(x) = -10.0179 + 7.5861(x + 3) - 2.9877(x + 3)(x + 2.4) + 0.7876(x + 3)(x + 2.4)(x + 2)$$

$$p_3^{(1)}(x) = 0.7876\,\mathrm{x}^3 + 2.84054\,\mathrm{x}^2 + 5.62932\mathrm{x} + 2.5704$$

<u>En el tramo [-1.4, 0]</u> :

$$p_3^{(2)}(x) = f[x_3] + f[x_3, x_4](x - x_3) + f[x_3, x_4, x_5](x - x_3)(x - x_4) + f[x_3, x_4, x_5, x_6](x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$$

$$p_3^{(2)}(x) = -1.9043 + 1.8228(x + 1.4) - 0.5487(x + 1.4)(x + 1) + 0.2153(x + 1.4)(x + 1)(x + 0.4)$$

$$p_3^{(2)}(x) = 0.2153\,\mathrm{x}^3 + 0.05414\,\mathrm{x}^2 + 1.014028\mathrm{x} + 0.00000008$$

$$f(-1.2) \approx p_3^{(2)}(-1.2) = -1.5109024$$

$$R_3(x) = f(x) - p_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x(x + 1.4)(x + 1)(x + 0.4) \qquad c \in [-1.4, 0]$$

$f^{(4)}(x) = senh(x)$

Debido a que la función senh(x) es creciente, el mayor valor absoluto en [-1.4, 0] se corresponde con el mayor valor absoluto de su valores en los extremos, que se corresponde en -1.4, así M_4=|senh(-1.4)|= 1.9043 (<2).

$$\therefore \Delta_{p_3(x)}(-1.2) = \left|\frac{2}{24}(-1.2)(-1.2+1.4)(-1.2+1)(-1.2+0.4)\right| = 0.0032$$

<u>Ejercicio propuesto</u> (sugerencia de ejercitación)

Sea $f(x) = cosh(\sqrt{x})$ y considérense los valores de la misma en x= 1, 1.4, 1.5, 1.8 y 2.

a) Completar la siguiente tabla de diferencias divididas;

i	x_i	y_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}]$
0	1	1.54308	0.60623	0.04734	0.00154	-0.00009
1	1.4	1.78557	0.62991	0.04857		
2	1.5	1.84857	0.64933			
3	1.8	2.04337				
4	2	2.17818				

b) Considera adecuado un polinomio de grado 2 para aproximar a f(x) en [1, 2]?. Justifique

c) Obtenga el polinomio de Lagrange en [1.5, 2] y la expresión del error, sabiendo que $\left|f'''(x)\right| < \frac{1}{50}$ en [1, 2]

d) Obtenga el polinomio de Newton en [1, 1.5] y una estimación computacional del error

e) Obtenga valores aproximados de f(x) para x=1.7 y x=1.2 , y una valoración del error absoluto en cada uno

f) Determine un valor aproximado de $\int_1^2 f(x)dx$.

<u>Ejercicios de estudio independiente</u>

Para los ejercicios, los valores de p y q están asignados en la tarea#3:

1) Sea $f(x) = \left[ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right]^2$

a) Completar la tabla de diferencias divididas (redondeando a la 5ta cifra decimal):

i	x_i	$y_i = f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+3}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+4}]$
0	$1 + \frac{5-p}{100} + \frac{q}{1000}$					
1	$1.3 + \frac{5-p}{100} + \frac{q}{1000}$					
2	$1.5 + \frac{5-p}{100} + \frac{q}{1000}$					
3	$1.7 + \frac{5-p}{100} + \frac{q}{1000}$					
4	$2 + \frac{5-p}{100} + \frac{q}{1000}$					

b) Diga el grado adecuado (<4) de un polinomio interpolador de f(x) en $[x_0, x_4]$. Justifique

c) Obtenga el polinomio de Lagrange en:

- $[x_0, x_2]$ si su número de lista es impar
- $[x_2, x_4]$ si su número de lista es par

y la expresión del error correspondiente.

Nota: Para obtener una cota de la derivada del orden (k) que se necesite, dibuje el gráfico de $\left|f^{(k)}(x)\right|$ y estime una cota superior en el intervalo en cuestión. Se recomienda el empleo de un asistente matemático, por ejemplo, el Derive.

d) Obtenga el polinomio de Newton en:

- $[x_0, x_2]$ si su número de lista es par
- $[x_2, x_4]$ si su número de lista es impar

y una estimación computacional del error

e) Obtenga valores aproximados de f(x) para $x = \frac{x_0+x_1}{2}$ y $x = \frac{x_2+x_3}{2}$, y una valoración del error absoluto en cada uno

f) Determine un valor aproximado de $\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx$

2) Sea $f(x) = \left[ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right]^2$

a) Completar la tabla de diferencias divididas (redondeando a la 5ta cifra decimal):

i	x_i	$y_i = f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+3}]$	$f[x_i, \cdots, x_{i+4}]$
0	$-2 + \frac{5-p}{100} + \frac{q}{1000}$					
1	$-1.8 + \frac{5-p}{100} + \frac{q}{1000}$					
2	$-1.4 + \frac{5-p}{100} + \frac{q}{1000}$					
3	$-1.2 + \frac{5-p}{100} + \frac{q}{1000}$					
4	$-1 + \frac{5-p}{100} + \frac{q}{1000}$					

b) Diga el grado adecuado (<4) de un polinomio interpolador de f(x) en $[x_0, x_4]$. Justifique

c) Obtenga el polinomio de Lagrange en:

- $[x_0, x_2]$ si su número de lista es par
- $[x_2, x_4]$ si su número de lista es impar

y la expresión del error correspondiente.

Nota: Para obtener una cota de la derivada del orden (k) que se necesite, dibuje el gráfico de $\left|f^{(k)}(x)\right|$ y estime una cota superior en el intervalo en cuestión. Se recomienda el empleo de un asistente matemático, por ejemplo, el Derive.

d) Obtenga el polinomio de Newton en:

- $[x_0, x_2]$ si su número de lista es impar
- $[x_2, x_4]$ si su número de lista es par

y una estimación computacional del error

e) Obtenga valores aproximados de f(x) para $x = \frac{x_0+x_1}{2}$ y $x = \frac{x_2+x_3}{2}$, y una valoración del error absoluto en cada uno

f) Determine un valor aproximado de $\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx$

Observación:

Los que discutan la tarea antes de la PP deberán traer programado además la interpolación en un conjunto creciente de puntos, y ejecutar el programa con el punto y cota del error que le asigne el profesor. Para la puesta a punto puede utilizar el ejercicio resuelto 2 inciso b.