

## Solución Numérica de Sistemas de Ecuaciones Lineales

### Sumario:

- Métodos directos para la solución de SEL (recordatorio)
- Método de Gauss para matriz tridiagonal. Algoritmo de Cálculo.
- Métodos Iterativos o Aproximados.
- Método de Jacobi. Algoritmo de Cálculo. Convergencia del Método de Jacobi.
- Método de Gauss-Seidel. Algoritmo de Cálculo. Convergencia del Método de Gauss-Seidel

### Bibliografía:

**Texto Básico:** “Matemática Numérica”, Manuel Álvarez Blanco, Alfredo Guerra Hernández, Rogelio Lau Fernández. Volumen 1. Capítulo 3:

Epígrafe 3.1 (pag. 143-149)

Epígrafe 3.3 (pag. 160-165)

Epígrafe 3.5 (pag. 178-206)

### Objetivos:

1. Describir las características de los métodos directos y los métodos iterativos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales
2. Describir los conceptos de norma de un vector y de norma de una matriz y explicar las propiedades (axiomas) de las mismas
3. Describir el algoritmo de Gauss especializado en sistemas tridiagonales y su implementación computacional
4. Describir los métodos de Jacobi y de Seidel para resolver sistemas lineales en forma iterativa y las condiciones bajo las cuales los mismos convergen
5. Resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante los algoritmos de Jacobi y de Seidel manualmente o mediante programas computacionales escritos al efecto
6. Realizar un análisis comparativo entre los algoritmos iterativos de Jacobi y de Seidel.

### Aspectos a desarrollar:

1. Sistema de  $n$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas. Generalidades,
2. Métodos de eliminación para la solución de SEL (breve recordatorio). Adaptación del método de Gauss para sistemas tridiagonales, Algoritmo
3. Métodos iterativos. Métodos de Jacobi y de Seidel, Condiciones suficientes de convergencia para cada método. Estimación del error para cada método.

## Desarrollo

En la modelación de problemas reales surgen con frecuencia sistemas de ecuaciones lineales de orden apreciable.

La importancia de los sistemas lineales no viene dada solamente porque ellos aparezcan directamente en la modelación matemática de infinidad de problemas del mundo real; además de esto, la solución de muchos problemas matemáticos conduce a resolver sistemas lineales; así sucede con el ajuste de curvas, en varias técnicas de interpolación, en la solución de ecuaciones diferenciales parciales y en muchos otros campos.

Relacionados con los sistemas lineales existen varios problemas numéricos importantes. El primero es la solución de grandes sistemas, formados por cientos y hasta decenas de miles de ecuaciones. Cuando el tamaño del problema crece en ese grado es fundamental analizar la eficiencia del método empleado, de otro modo la cantidad de operaciones aritméticas puede crecer en demasía.

Entre los sistemas lineales de ecuaciones se presentan a veces problemas de inestabilidad, es decir, pequeños cambios en los datos pueden producir grandes cambios en los resultados, que reciben más frecuentemente el nombre de mal condicionados (del inglés ill – conditioned). Se estudiará la manera de medir el mal condicionamiento y se analizará la forma en que debe procederse en estos casos.

### 1. Sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas. Generalidades

Dado el sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

Este puede ser expresado en forma matricial como  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$  (2)

donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Designemos por  $\mathbf{A}_b$  (matriz del sistema ampliada) a la matriz que se obtiene al considerar sus primeras n columnas coincidentes con las de la matriz  $\mathbf{A}$  y a  $\mathbf{b}$  como la columna de orden n+1.

El rango de una matriz M (cantidad máxima de vectores columnas, o lo que es igual vectores filas, linealmente independientes) se representará por  $r(M)$ .

De los cursos de álgebra son conocidos los siguientes teoremas:

**Teorema 1** (Kronecker-Cappelli: existencia de la solución)

El sistema (2) se puede resolver si y solo si  $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A}_b)$ .

**Teorema 2** (Unicidad de la solución)

El sistema (2) posee solución única si y solo si  $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A}_b)=n$ .

Una consecuencia de este teorema es que un sistema de ecuaciones homogéneo ( $\mathbf{b}=\mathbf{0}$ ) posee solución no trivial ( $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ ) si y solo si  $r(\mathbf{A})<n$ .

**Teorema 3** (Estructura de la solución)

Si  $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A}_b)=k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) y las incógnitas  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$  pertenecen a los vectores columnas linealmente independientes, entonces a las restantes  $n-k$  incógnitas se les puede dar cualquier valor. Es decir, la solución del sistema depende de  $n-k$  parámetros.

**Teorema 4** (Regla de Cramer)

Si  $D=\text{Det}(\mathbf{A})\neq 0$ , entonces (2) posee solución única y puede ser hallada en la forma  $x_k = \frac{D_k}{D}$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ), donde  $D_k$  es el determinante que se obtiene del determinante  $D$  al sustituir su columna de orden  $k$  por la columna de términos independientes ( $\mathbf{b}$ ).

La Regla de Cramer nos da un procedimiento para obtener la solución de un sistema donde  $\text{Det}(\mathbf{A})\neq 0$ . Las dificultades aparecen a la hora de calcular la solución. Aún para valores no muy grandes del orden del sistema ( $n$ ), ¡los determinantes a calcular requieren efectuar un número considerable de operaciones ( $(n+1)!$  si se desarrollan por menores), que conllevan a que la utilidad práctica de esta Regla sea escasa y sólo se utilice para sistemas de orden no mayor que 5. Nuestro objetivo es desarrollar métodos de solución eficientes. Además, se debe señalar que para sistemas de orden mayor que 10 su solución se efectúa casi exclusivamente con la ayuda de la computadora.

La solución de un sistema de ecuaciones lineales también se puede obtener de forma trivial mediante  $\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ , pues la inversión de matrices conduce a la solución de  $n$  sistemas de ecuaciones en los cuales sólo el término independiente varía, por lo que resultará un proceso más largo y complicado que el original.

Los métodos de solución para sistemas de ecuaciones lineales se pueden clasificar en métodos de eliminación, métodos iterativos y métodos de Monte-Carlo.

El método de eliminación (directo, exacto) más estudiado es el Método de Gauss el que ya con se abordó en la asignatura Matemática I. Aquí se verá el caso particular del Método de Gauss con matriz tridiagonal debido a su aplicación en el último tema de esta asignatura.

Entre los métodos iterativos veremos los métodos de Jacobi y de Seidel, los cuales a partir de una aproximación inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$  generan una sucesión de aproximaciones  $\{\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots\}$  que bajo determinadas condiciones convergen a la solución exacta del sistema de ecuaciones.

Los métodos de Monte-Carlo no son objeto de estudio de este curso. Estos métodos utilizan procesos aleatorios para obtener una solución aproximada de sistemas de ecuaciones lineales.

**2. Métodos de eliminación(directos)**

Estos métodos transforman el sistema de ecuaciones original en otro del cual se pueda obtener la solución de forma más fácil, aprovechando el hecho de que la solución de un sistema no sufre

variación si una ecuación del mismo se multiplica por un número diferente de cero y/o se adiciona a otra y que cualquier par de ecuaciones del sistema se pueden intercambiar.

Los métodos de eliminación teóricamente no presentan ningún tipo de dificultad y de no existir errores de redondeo nos aportan la solución exacta del problema. En ocasiones estos errores conllevan a que la solución “exacta” de un método de eliminación sea muy distante, a veces de forma muy significativa, de la verdadera. La precisión en los resultados por estos métodos y el tiempo empleado dependen en gran medida de la organización de los cálculos.

### ***Método de eliminación de Gauss***

El método de Gauss consiste en realizar sobre el sistema dado una sucesión de transformaciones que, sin afectar la solución, conduzcan a un sistema especialmente simple, el cual es resuelto de inmediato. El método consta de dos etapas, llamadas proceso directo y proceso inverso.

#### **Proceso directo**

Consiste en la realización de transformaciones elementales que conduzcan a un sistema triangular superior, es decir, los elementos por debajo de la diagonal sean todos cero. Un algoritmo para lograr lo anterior podría ser el siguiente:

Puede suceder que el elemento pivote  $a_{kk}$  no sea cero, pero si un número muy pequeño (inclusive a veces no es cero simplemente debido a los errores de redondeo); en este caso, a partir de ese momento, a consecuencia de la división por un número muy pequeño, la cantidad de cifras significativas se reduce considerablemente. Esto puede evitarse si en el proceso se efectúa el intercambio de filas no sólo cuando el elemento de la diagonal de la fila de pivote es cero (selección simple de pivote). Es recomendable emplear técnicas de selección de pivote, que disminuyen el error por redondeo:

- a) **Pivote parcial:** En esta técnica de selección de pivote se busca el elemento de mayor valor absoluto de la columna  $k$  a partir del elemento de la diagonal, supongamos que se encuentre en la fila  $l$ , es decir  $|a_{lk}| = \max_{k \leq j \leq n} |a_{jk}|$ , entonces se procede a intercambiar las filas  $k$  y  $l$ . Si

$a_{lk} = 0$  significa que el sistema no posee solución.

- b) **Pivote total:** En esta técnica de selección de pivote se busca el elemento de mayor valor absoluto en la submatriz a partir de la fila  $k$  y de la columna, supongamos que se encuentre en la fila  $l$  y columna  $m$ , es decir  $|a_{lm}| = \max_{k \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$ , entonces se procede a intercambiar las

filas  $k$  y  $l$ , y las columnas  $k$  y  $m$ . Nótese que se debe llevar los cambios de columna, pues en este caso las incógnitas cambian de posición. Desde el punto de vista computacional esto se realiza mediante un vector de permutaciones inicializado en  $1, 2, \dots, n$  y cada vez que se efectúe un cambio de columnas se hace el intercambio correspondiente en el vector de permutación. Si  $a_{lk} = 0$  significa que el sistema no posee solución.

#### **Proceso inverso**

De la última ecuación se puede obtener la incógnita  $x_n$ ; conocida esta se sustituye en la penúltima ecuación y se obtiene  $x_{n-1}$ , etc, hasta llegar a la primera ecuación, de la cual se halla  $x_1$ .

Algoritmo:

```

C := [A|b] {Se forma la matriz ampliada C, de  $n$  filas y  $n+1$  columnas}
{Aquí comienza el proceso directo}
for  $i = 1$  to  $n - 1$ 
    Seleccionar la fila pivote  $i$  – sima {Depende de la estrategia de pivote usada}
    for  $k = i + 1$  to  $n$ 
         $m := \frac{c_{ki}}{c_{ii}}$ 
         $fila(k) := fila(k) - m\ fila(i)$ 
    end
end
{Aquí comienza el proceso inverso}
 $i := n$ 
repeat
     $x_i := c_{i,n+1}$ 
    for  $j = i + 1$  to  $n$  {Cuando  $i = n$  este lazo no se ejecuta}
         $x_i := x_i - c_{ij}x_j$ 
    end
     $x_i := \frac{x_i}{c_{ii}}$ 
     $i := i - 1$ 
until  $i = 0$ 
La solución es  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$  {El supraíndice  $T$  indica traspuesta}
Terminar

```

En el caso de usar la estrategia parcial de pivote, el algoritmo “Seleccionar la fila pivote  $i$ -sima” sería:

```

 $max := |c_{ii}|$  {La variable  $max$  guarda el mayor coeficiente obtenido hasta el momento}
 $Fila\ de\ max := i$  {La variable  $Fila\ de\ max$  guarda el número de la fila donde ocurrió el máximo}

for  $k = i + 1$  to  $n$ 
    if  $|c_{ki}| > max$  then
         $max := |c_{ki}|$ 
         $Fila\ de\ max := k$ 
    end
end
if  $k > i$  then {Si  $k = i$  el intercambio no tiene sentido}
    Intercambiar  $fila(k)$  con  $fila(i)$ 
end

```

### **Método de eliminación de Jordan**

El método de Gauss se modifica en la dirección de hacer cero todos los elementos de la columna  $k$ , excepto el término de la diagonal de la fila pivote. Las filas de pivote a su vez se dividen por el elemento de la diagonal, por lo que aparecerá el valor uno en esa posición.

En la eliminación de Jordan no es necesario el proceso inverso, las soluciones son directamente  $x_i = a_{i,n+1}$ .

A simple vista parece mejor el método de Jordan que el Gauss, pero la cantidad de operaciones de Jordan es del orden de  $\frac{n^3}{2}$ , por lo que para  $n$  grande la cantidad de operaciones en Jordan es muy superior al de Gauss.

Ahora para invertir matrices o resolver muchos sistemas de ecuaciones con igual matriz es conveniente emplear el método de Jordan.

El método de Gauss es, entre los métodos directos uno de los más eficientes.

Con el método de Gauss se pueden tratar problemas del orden de 200 o más, cosa que con otros métodos directos es casi que imposible. No obstante, ya para tan grandes el alto número de operaciones hace a veces intolerables los errores debido al redondeo y en algunos casos se requiere aplicar posteriormente otras técnicas con vistas a mejorar la solución obtenida por el método de Gauss.

Debe señalarse la deficiencia del método de Gauss al tratar con matrices escasas que surgen con frecuencia en la práctica, pues no aprovecha que muchos de los valores de la matriz son cero. Sin embargo, el método de Gauss puede ser adaptado para resolver otros problemas especiales. Aquí se analizarán tres de ellos: la solución de sistemas tridiagonales, debido a su aplicación en el último tema de la asignatura.

### **El método de Gauss para sistemas tridiagonales**

En muchos problemas importantes aparecen sistemas de ecuaciones muy grandes con la característica especial de que la matriz del sistema es tridiagonal, esto es, solo la diagonal principal y las dos adyacentes, no son nulas. Para sistemas de este tipo se puede obtener un algoritmo de Gauss especializado sumamente eficiente. Ante todo, es obvio que en lugar de guardar todos los elementos de la matriz del sistema (la mayoría de los cuales son ceros) es preferible guardar solamente las tres diagonales no nulas y el vector de términos independientes. El sistema, por tanto, se expresa matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & \\ & b_3 & a_3 & c_3 & \\ & & b_4 & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & b_n & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

donde se ha tomado el convenio de no escribir los términos (todos ellos ceros) fuera de las tres diagonales. Para aplicar el método de Gauss al sistema, primero debe construirse la matriz ampliada:

$$\left[ \begin{array}{ccccccc} a_1 & c_1 & & & & & d_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 & & & & d_2 \\ & b_3 & a_3 & c_3 & & & d_3 \\ & & b_4 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & a_{n-1} & c_{n-1} & d_{n-1} \\ & & & & b_n & a_n & d_n \end{array} \right] \quad (1)$$

En el desarrollo que sigue se supondrá que los términos que se utilizan como denominadores no son ceros. Posteriormente se darán condiciones que garantizan que ello se cumpla. Dividiendo por  $a_1$  toda la primera fila queda:

$$\left[ \begin{array}{ccccccc} 1 & p_1 & & & & & q_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 & & & & d_2 \\ & b_3 & a_3 & c_3 & & & d_3 \\ & & b_4 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & a_{n-1} & c_{n-1} & d_{n-1} \\ & & & & b_n & a_n & d_n \end{array} \right] \quad \text{donde} \quad p_1 = \frac{c_1}{a_1} \quad \text{y} \quad q_1 = \frac{d_1}{a_1}$$

Ahora se multiplicará la primera fila por  $-b_2$  para sumársela a la segunda fila, de modo que se anule el segundo elemento de la columna 1 (que es único de esa columna por debajo de la diagonal que no era ya cero). La matriz quedará entonces:

$$\left[ \begin{array}{ccccccc} 1 & p_1 & & & & & q_1 \\ 0 & r_2 & c_2 & & & & d_2 - b_2 q_1 \\ & b_3 & a_3 & c_3 & & & d_3 \\ & & b_4 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & a_{n-1} & c_{n-1} & d_{n-1} \\ & & & & b_n & a_n & d_n \end{array} \right] \quad \text{donde:} \quad r_2 = a_2 - b_2 p_1$$

Ahora se divide toda la segunda fila por  $r_2$  con el objetivo de hacer 1 el elemento de la diagonal principal. La matriz ampliada queda en la forma:

$$\left[ \begin{array}{ccccccc} 1 & p_1 & & & & & q_1 \\ 0 & 1 & p_2 & & & & q_2 \\ & b_3 & a_3 & c_3 & & & d_3 \\ & & b_4 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & a_{n-1} & c_{n-1} & d_{n-1} \\ & & & & b_n & a_n & d_n \end{array} \right] \quad \text{donde:} \quad p_2 = \frac{c_2}{r_2} \quad \text{y} \quad q_2 = \frac{d_2 - b_2 q_1}{r_2}$$

Si ahora se usa la segunda fila como pivote para colocar un cero en lugar de  $b_3$  y se definen  $r_3$ ,  $p_3$  y  $q_3$  de manera análoga al paso anterior, la matriz se transforma en:

$$\begin{bmatrix} 1 & p_1 & & & & q_1 \\ 0 & 1 & p_2 & & & q_2 \\ & 0 & 1 & p_3 & & q_3 \\ & & b_4 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & a_{n-1} & c_{n-1} d_{n-1} \\ & & & & b_n & a_n d_n \end{bmatrix} \quad \text{donde: } \begin{aligned} r_3 &= a_3 - b_3 p_2 \\ p_3 &= \frac{c_3}{r_3} \\ q_3 &= \frac{d_3 - b_3 q_2}{r_3} \end{aligned}$$

Procediendo de esta manera, la matriz ampliada se transforma en una matriz equivalente con todos los elementos nulos por debajo de la diagonal:

$$\begin{bmatrix} 1 & p_1 & & & & q_1 \\ & 1 & p_2 & & & q_2 \\ & & 1 & p_3 & & q_3 \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 & p_{n-1} q_{n-1} \\ & & & & & 1 & q_n \end{bmatrix} \quad \text{donde } \begin{aligned} p_1 &= \frac{c_1}{a_1}; \quad q_1 = \frac{d_1}{a_1} \\ r_i &= a_i - b_i p_{i-1} \quad p_i = \frac{c_i}{r_i} \\ q_i &= \frac{d_i - b_i q_{i-1}}{r_i} \end{aligned}$$

para  $i = 2, 3, \dots, n$

El sistema de ecuaciones representado por esta matriz tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & p_1 & & & & \\ & 1 & p_2 & & & \\ & & 1 & p_3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & p_{n-1} \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{bmatrix} \quad \text{Esto es: } \begin{cases} x_1 + p_1 x_2 = q_1 \\ x_2 + p_2 x_3 = q_2 \\ x_3 + p_3 x_4 = q_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} + p_{n-1} x_n = q_{n-1} \\ x_n = q_n \end{cases}$$

El proceso inverso se simplifica notablemente por el hecho de que en cada ecuación solamente aparecen dos incógnitas, salvo en la última que permite encontrar  $x_n$ . Despejando sucesivamente las incógnitas de abajo hacia arriba, se obtiene:

$$\begin{cases} x_n = q_n \\ x_{n-1} = q_{n-1} - p_{n-1} x_n \\ x_{n-2} = q_{n-2} - p_{n-2} x_{n-1} \\ \vdots \\ x_2 = q_2 - p_2 x_3 \\ x_1 = q_1 - p_1 x_2 \end{cases}$$

Obsérvese que para resolver un sistema tridiagonal se requiere de muy pocas operaciones aritméticas.

Se trata de resolver un sistema tridiagonal para el cual se conocen las diagonales:



$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  (diagonal principal)

$\{b_2, b_3, \dots, b_n\}$  (diagonal debajo de la principal)

$\{c_1, c_2, \dots, c_{n-1}\}$  (diagonal encima de la principal)

y los términos independientes

$\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ .

Puede demostrarse que, si la diagonal principal es predominante, es decir si en cada fila  $i$  el valor absoluto de  $a_i$  es mayor que la suma de los valores absolutos de  $b_i$  y  $c_i$ , entonces, ninguno de los denominadores que aparecen en el algoritmo que sigue se hacen cero.

```

 $p_1 := \frac{c_1}{a_1}$ 
 $q_1 := \frac{d_1}{a_1}$ 
for  $i = 2$  to  $n$ 
     $r_i = a_i - b_i p_{i-1}$ 
     $p_i = \frac{c_i}{r_i}$ 
     $q_i = \frac{d_i - b_i q_{i-1}}{r_i}$ 
end
 $x_n := q_n$ 
 $i := n - 1$ 
repeat
     $x_i := q_i - p_i x_{i+1}$ 
     $i := i - 1$ 
until  $i = 0$ 
La solución es  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 
Terminar
  
```

### Ejemplo

Resolver el SEL 
$$\begin{bmatrix} 2.04 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2.04 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2.04 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2.04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40.8 \\ 0.8 \\ 0.8 \\ 200.8 \end{bmatrix}$$

### Solución

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} a_1 & c_1 & & & d_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 & & d_2 \\ & b_3 & a_3 & c_3 & d_3 \\ & & b_4 & a_4 & c_4 & d_4 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 2.04 & -1 & & & 40.8 \\ -1 & 2.04 & -1 & & 0.8 \\ & -1 & 2.04 & -1 & 0.8 \\ & & -1 & 2.04 & 200.8 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} c_1 \Rightarrow \frac{c_1}{a_1} \\ d_1 \Rightarrow \frac{d_1}{a_1} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -0.4902 & & & 20 \\ -1 & 2.04 & -1 & & 0.8 \\ & -1 & 2.04 & -1 & 0.8 \\ & & -1 & 2.04 & 200.8 \end{array} \right] \begin{array}{l} c_2 \Rightarrow \frac{c_2}{a_2 - b_2 c_1} \\ d_2 \Rightarrow \frac{d_2 - b_2 d_1}{a_2 - b_2 c_1} \end{array} \left[ \begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -0.4902 & & & 20 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & -0.64524 & & 13.42105 \\ & -1 & 2.04 & -1 & 0.8 \\ & & -1 & 2.04 & 200.8 \end{array} \right] \\
 &\begin{array}{l} c_3 \Rightarrow \frac{c_3}{a_3 - b_3 c_2} \\ d_3 \Rightarrow \frac{d_3 - b_3 d_2}{a_3 - b_3 c_2} \end{array} \left[ \begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -0.4902 & & & 20 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & -0.64524 & & 13.42105 \\ & \boxed{0} & \boxed{1} & -0.71697 & 10.19608 \\ & & -1 & 2.04 & 200.8 \end{array} \right] \begin{array}{l} d_4 \Rightarrow \frac{d_4}{a_4} \end{array} \left[ \begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -0.4902 & & & 20 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & -0.64524 & & 13.42105 \\ & \boxed{0} & \boxed{1} & -0.71697 & 10.19608 \\ & & \boxed{0} & \boxed{1} & 159.47952 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Los valores encerrados en cuadros nunca fueron calculados, por el algoritmo esos serían sus valores, de hecho, conservan sus valores iniciales, los que interesan en verdad son la diagonal superior y el término independiente, con los cuales se calcula la solución que se muestra a continuación:

$$x_4 = d_4 = 159.47952$$

$$x_3 = d_3 - c_3 x_4 = 124.53823$$

$$x_2 = d_2 - c_2 x_3 = 93.778462$$

$$x_1 = d_1 - c_1 x_2 = 65.969834$$

Este ejemplo se debe utilizar para poner a punto la programación del algoritmo empleado en el mismo. Este será de utilidad cuando se imparta el Método de Diferencias Finitas más adelante.

### 3. Métodos iterativos

Estos métodos a partir de una aproximación inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$  generan una sucesión de aproximaciones  $\{\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots\}$  que bajo determinadas condiciones convergen a la solución exacta del sistema de ecuaciones. La solución del sistema se aproxima mediante un elemento de la sucesión de aproximaciones, que es en muchas ocasiones más precisa que la solución “exacta” obtenida mediante un método de eliminación.

Del mismo modo que la solución de ecuaciones escalares puede obtenerse por métodos iterativos (bisección, Regula Falsi, Newton – Raphson, Secantes) los sistemas de ecuaciones lineales pueden ser resueltos también por procedimientos de este estilo, lo cual tiene a veces sus ventajas. Una de estas ventajas es la sencillez de estos algoritmos, lo cual significa programas computacionales más simples y seguros. Otra de sus ventajas es la no propagación de errores. En efecto, como en los métodos iterativos se obtiene una sucesión de soluciones aproximadas que converge hacia la solución exacta, la aproximación número  $n - 1$  solo sirve para encontrar una mejor solución en la aproximación número  $n$ , por tanto, los errores de la aproximación  $n - 1$  no se propagan a la aproximación  $n$ . A pesar de estos dos atractivos, la cuestión más importante al decidirse por uno u otro algoritmo es la eficiencia computacional, medida en tiempo de máquina, y, para sistemas muy voluminosos, la cantidad de memoria necesaria.

Se verá el método de Jacobi y el método de Seidel, que son dos de los más empleados actualmente.

**Método de Jacobi**

Dado el sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Si todos los elementos de la diagonal de **A** son no nulos ( $a_{ii} \neq 0 \ i = 1, 2, \dots, n$ ), el sistema puede escribirse de la forma:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

que equivale a haber despejado de cada ecuación k la incógnita  $x_k$ .

Introduzcamos las notaciones:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

entonces el sistema se puede escribir de la forma **x=Mx+c**.

Esta expresión nos sugiere tomar una aproximación inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$  y utilizar la iteración

$$\mathbf{x}^{(k)} = M\mathbf{x}^{(k-1)} + c \quad (k=1, 2, \dots), \text{ o sea}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}} [b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k-1)}] \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}} [b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k-1)}] \\ \vdots \\ x_n^{(k)} = \frac{1}{a_{nn}} [b_n - a_{n1}x_1^{(k-1)} - a_{n2}x_2^{(k-1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k-1)}] \end{cases}$$

Antes de estudiar las condiciones que garantizan la convergencia del método de Jacobi es necesario recordar algunos conceptos y resultados relacionados con vectores y matrices.

## Normas de vectores y matrices

En temas de las asignaturas precedentes se tiene conocimientos acerca de las operaciones con matrices y vectores, y de espacios vectoriales (reales fundamentalmente. No obstante, como en estos temas se obvia lo relativo a normas matriciales, que más adelante se requieren.

### **Definición** (norma de un vector)

Se denomina norma de un vector  $\mathbf{x}$  de un espacio vectorial real  $\mathbf{E}$ , a un número representado por  $\|\mathbf{x}\|$  que cumple las siguientes condiciones:

- a)  $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ ,  $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ : **vector** nulo de  $\mathbf{E}$
- b)  $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\| \quad \alpha \in \mathfrak{R}$
- c)  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

En los espacios de tipo  $\mathbf{R}^n$  se definen normas de diversas formas. La empleada con mayor frecuencia es la llamada norma cuadrática, que se define como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes del vector, que en algunos temas es muy importante, pero que aquí no resulta la más conveniente. En todo sucesivo se utilizará para los vectores de  $\mathbf{R}^n$  la siguiente norma:

### **Definición** (norma de un vector de $\mathbf{R}^n$ )

Si  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^n$ , se define la norma de  $\mathbf{x}$  como:  $\|\mathbf{x}\| = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)$

Se puede probar que esta definición satisface los cuatro axiomas de norma.

En el caso de las matrices cuadradas, ellas, como se sabe, constituyen un espacio vectorial y por tanto, su norma debe satisfacer los cuatro axiomas generales. No obstante, como en el espacio de las matrices cuadradas están definidas también las operaciones de producto entre matrices y producto de una matriz por un vector, se requiere de axiomas especiales que establezcan las propiedades que debe poseer la norma matricial respecto a estas operaciones. Así, para el espacio vectorial  $M_n$  de las matrices cuadradas de orden  $n$ , cualquier norma que se utilice deberá cumplir las siguientes 6 propiedades (axiomas de norma matricial):

- 1) Para toda matriz  $A$  de  $M_n$   $\|A\| \geq 0$
- 2) Para todo  $A$  de  $M_n$  y todo  $k$  real,  $\|kA\| = |k| \|A\|$
- 3) Para todos  $A$  y  $B$  de  $M_n$ ,  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- 4) Si  $\|A\| = 0$ , entonces  $A$  es la matriz nula de  $M_n$
- 5) Para todos  $A$  y  $B$  de  $M_n$ ,  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$
- 6) Si  $\|\cdot\|_v$  es la norma de un vector de  $\mathbf{R}^n$ , entonces, para toda  $A$  de  $M_n$  y todo  $\mathbf{x}$  de  $\mathbf{R}^n$ ,  $\|A\mathbf{x}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\|_v$

Nótese que el axioma 6 significa que el tipo de norma utilizado para las matrices debe ser compatible con la norma utilizada en  $\mathbf{R}^n$ . La siguiente definición de norma matricial satisface estos 6 axiomas si se toma la norma en  $\mathbf{R}^n$  de acuerdo con la definición anterior de norma de un vector de  $\mathbf{R}^n$ .

**Definición** (norma de una matriz de orden n)

Si A es una matriz cuadrada de orden n,  $A = [a_{ij}]$ , se define la norma de A como:

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

es decir, el mayor valor de entre las sumas de los valores absolutos de los elementos de una fila.

Aunque se pueden utilizar otras combinaciones de normas matriciales y vectoriales, la que aquí se ha seleccionado es la que más se emplea en el tema que se tratará, debido a la simplicidad de los cálculos que se requieren.

**Ejemplo**

Determinar la norma de  $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $Ax$

**Solución**

$$\|x\| = \max_{1 \leq i \leq 3} (|x_i|) = \max(1, 3, 2) = 3$$

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq 3} \sum_{j=1}^3 |a_{ij}| = \max(6, 7, 4) = 7$$

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \|Ax\| = \max(14, 7, 5) = 14$$

$$\text{Note que se cumple } \underbrace{\|Ax\|}_{14} \leq \underbrace{\|A\|}_7 \underbrace{\|x\|}_3$$

**Convergencia del método de Jacobi**

En lo que sigue se establecerán algunas condiciones de uso práctico que garanticen la obtención de la solución.

Para estudiar la convergencia del método de Jacobi (y, más adelante, el de Seidel) es necesario definir la forma en que se medirá el error en la k-sima aproximación  $x^{(k)}$ , respecto al vector solución x.

**Definición**

Si  $x^{(k)}$  denota la k-sima aproximación de un proceso iterativo a la solución x de un sistema lineal, entonces el error absoluto de  $x^{(k)}$  se denota por  $\Delta x^{(k)}$  y se define como:

$$E(x^{(k)}) = \|x - x^{(k)}\|$$

Nótese que, según los axiomas de las normas matriciales, el error absoluto es cero cuanto los vectores x y  $x^{(k)}$  coinciden en todas sus componentes, es decir, cuando su diferencia es el vector nulo.

Considérese ahora el sistema de ecuaciones cuya solución se desea hallar, escrito como en la forma  $x = Mx + c$ .

Si de ella se resta miembro a miembro la ecuación recursiva del método de Jacobi

$$x^{(k)} = Mx^{(k-1)} + c \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

se obtiene:  $x - x^{(k)} = M(x - x^{(k-1)}) \quad k = 1, 2, 3, \dots$

Tomando norma en cada miembro y aplicando el axioma 6 de las normas matriciales, se obtiene:

$$\|x - x^{(k)}\| \leq \|M\| \|x - x^{(k-1)}\| \Rightarrow E(x^{(k)}) \leq \|M\| E(x^{(k-1)}) \quad k = 1, 2, \dots$$

La norma de M juega un papel muy importante en la convergencia del algoritmo de Jacobi, por lo cual se le dará un nombre y una notación especiales:

**Definición** (factor de convergencia del método de Jacobi)

Sea el sistema lineal  $x = Mx + c$ . Se llama factor de convergencia del método de Jacobi para este sistema a la norma de M y se denotará como  $\alpha$ , es decir:  $\alpha = \|M\|$ .

Entonces se tiene:  $E(x^{(k)}) \leq \alpha E(x^{(k-1)}) \quad k = 1, 2, \dots$

De este hecho se deriva una consecuencia muy importante relacionada con la convergencia del algoritmo de Jacobi:

**Teorema** (condición suficiente de convergencia)

Una condición suficiente para que el método de Jacobi converja hacia la solución del sistema  $x = Mx + c$ , independientemente de la aproximación inicial  $x^{(0)}$ , es que el factor de convergencia  $\alpha$ , sea menor que 1.

La rapidez de convergencia del método de Jacobi depende del valor del parámetro  $\alpha$  de convergencia.

En efecto en términos de error absoluto máximo, se tiene que  $\Delta(x^{(k)}) = \alpha \Delta(x^{(k-1)})$ , de manera que se trata de un método de convergencia lineal. Valores de  $\alpha$  próximos a cero garantizan una alta rapidez en la convergencia, valores menores que 1 pero próximos a él, producen una convergencia lenta.

El teorema que sigue es una consecuencia inmediata del anterior. Su importancia radica en que permite analizar la convergencia del método de Jacobi para un sistema lineal cuando este aún se encuentra en la forma  $Ax = b$ .

**Teorema** (condición suficiente de convergencia)

Sea el sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas  $Ax = b$ . Una condición suficiente para que el método de Jacobi aplicado a dicho sistema, sea convergente, es que A tenga la diagonal predominante, esto es, que para cada fila  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , el elemento de la diagonal sea, en valor absoluto, mayor que la suma de los valores absolutos de los otros elementos. Es decir que:  $|a_{ii}| > |a_{i1}| + \dots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{in}| \quad (i = 1, 2, \dots, n)$ .

En efecto, al dividir por  $|a_{ii}|$  la expresión anterior:

$$\frac{|a_{i1}|}{|a_{ii}|} + \dots + \frac{|a_{i,i-1}|}{|a_{ii}|} + \frac{|a_{i,i+1}|}{|a_{ii}|} + \dots + \frac{|a_{in}|}{|a_{ii}|} < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

lo que conduce a que  $\alpha = \|M\| < 1$ .

**Estimación del error**

El error en el método de Jacobi, al igual que en todos los demás métodos iterativos, se necesita una forma de acotar el error en cada iteración del método para poder detener el proceso iterativo cuando el error sea suficientemente pequeño. Para ello téngase en cuenta que:

$$E(x^{(k)}) = \|x - x^{(k)}\| \qquad E(x^{(k-1)}) = \|x - x^{(k-1)}\|$$

$$\text{Ahora: } E(x^{(k-1)}) = \|x - x^{(k-1)}\| = \|x - x^{(k)} + x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq \underbrace{\|x - x^{(k)}\|}_{E(x^{(k)})} + \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

$$\text{Por ello: } E(x^{(k-1)}) \leq E(x^{(k)}) + \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

$$\text{Dado que: } E(x^{(k)}) \leq \alpha E(x^{(k-1)}) \Rightarrow \frac{E(x^{(k)})}{\alpha} \leq E(x^{(k-1)})$$

$$\text{Entonces: } \frac{E(x^{(k)})}{\alpha} \leq E(x^{(k)}) + \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

Despejando de esta inecuación  $E(x^{(k)})$ , para lo cual se supondrá que  $\alpha < 1$ :

$$E(x^{(k)}) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

Esto significa que el error absoluto máximo puede tomarse como el miembro de la derecha de esta desigualdad, es decir, que:

$$\Delta x^{(k)} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

Esta expresión permite establecer una condición práctica para la terminación del proceso iterativo de **Jacobi**.

**Condición de terminación 1:**

Si se desea obtener la solución de un sistema lineal con un error absoluto menor o igual que  $\varepsilon$ , y el factor de convergencia del método de Jacobi es  $\alpha < 1$ , entonces el proceso iterativo de Jacobi se llevará a cabo hasta la aproximación  $x^{(k)}$  para la cual:

$$\Delta x^{(k)} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq \varepsilon$$

En los casos en que  $\alpha$  es menor que 0.5, la condición de terminación se puede simplificar un poco, ya que  $\frac{\alpha}{1-\alpha} \leq \frac{0.5}{1-0.5} = 1$ , por lo que en este caso se tendrá  $\Delta x^{(k)} = \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$ . De aquí resulta:

**Condición de terminación 2:**

Si se desea obtener la solución de un sistema lineal con un error absoluto menor que  $\varepsilon$ , y el factor de convergencia del método de Jacobi es  $\alpha < 0.5$ , entonces el proceso iterativo de Jacobi se llevará a cabo hasta la aproximación  $x^{(k)}$  para la cual:

$$\Delta x^{(k)} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq \varepsilon$$

**Algoritmo del método de Jacobi**

Se desea hallar una solución del sistema  $Ax = b$  con error absoluto menor que  $\epsilon$ . Se supone que  $A$  tiene diagonal predominante y se conoce el valor del factor de convergencia  $\alpha$ . El algoritmo utiliza como datos las matrices  $A$  y  $b$ , el factor de convergencia  $\alpha$ , la tolerancia  $\epsilon$  y la aproximación inicial  $x^{(0)}$ . De no conocerse una aproximación inicial, se puede tomar  $c$  como aproximación inicial.

$xv = x^{(0)}$  {El vector  $xv$  representa la solución vieja, es decir, la aproximación obtenida en la iteración anterior, el vector  $xa$  representa la solución nueva, es decir, la aproximación obtenida en la iteración actual}

Repetir

Error=0

Para  $i=1$  hasta  $n$

$xa_i = b_i$  {En esta sección se calcula la  $i$ -sima componente de  $xa$ }

Para  $j=1$  hasta  $n$

Si  $j \neq i$  entonces  $xa_j = xa_j - a_{ij} xv_j$

$xa_j = xa_j / a_{ii}$

Fin ciclo  $j$

Si  $|xa_i - xv_i| > Error$  entonces  $Error = |xa_i - xv_i|$  {Se va guardando la máxima diferencia entre las dos últimas iteraciones}

Fin ciclo  $i$

$xv = xa$  {La solución obtenida se transfiere a la vieja}

Error = Error  $(\alpha / (\alpha - 1))$

Hasta que Error  $< \epsilon$

La solución del sistema es  $xa$  con error absoluto menor que Error

Terminar

**Nota:** Es recomendable traer programado este algoritmo antes de actividades prácticas. Incorporar en la programación limitar el número de iteraciones.

**Ejemplo:**

$$\text{Dado el sistema de ecuaciones} \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 21.044 \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 - x_4 = 14.424 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = -6.444 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = -14.241 \end{cases}$$

- Escriba el sistema en las formas  $Ax=b$  y  $x = Mx + c$ .
- Escriba la ecuación recursiva del método de Jacobi



- c) Verifique que la matriz A tiene diagonal predominante. ¿Qué consecuencia trae este hecho sobre el factor de convergencia del método de Jacobi (y determínelo) y sobre la convergencia de este método?
- d) Tomando  $x^{(0)}$  como el vector  $c$ , genere la sucesión de aproximaciones  $x^{(1)}$ ,  $x^{(2)}$ ,  $x^{(3)}$ . mediante la ecuación recursiva del método de Jacobi. ¿Habrá finalizado el proceso iterativo si se desea que el error absoluto sea menor 0.01?. Justifique.

**Solución**

$$a) \quad A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 8 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -6 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 21.044 \\ 14.424 \\ -6.444 \\ -14.241 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 8 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21.044 \\ 14.424 \\ -6.444 \\ -14.241 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 21.044 \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 - x_4 = 14.424 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = -6.444 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = -14.241 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_4 + \frac{21.044}{7} \\ x_2 = -\frac{3}{8}x_1 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{8}x_4 + \frac{14.424}{8} \\ x_3 = -\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4 - \frac{6.444}{5} \\ x_4 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{6}x_3 + \frac{14.241}{6} \end{cases}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{3}{8} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} \frac{21.044}{7} \\ \frac{14.424}{8} \\ -\frac{6.444}{5} \\ \frac{14.241}{6} \end{bmatrix}$$

$$x = Mx + c \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{3}{8} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{21.044}{7} \\ \frac{14.424}{8} \\ -\frac{6.444}{5} \\ \frac{14.241}{6} \end{bmatrix}$$

b) Para  $k = 1, 2, \dots$

$$x^{(k)} = Mx^{(k-1)} + c \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{3}{8} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}^{(k-1)} + \begin{bmatrix} \frac{21.044}{7} \\ 14.424 \\ \frac{8}{6.444} \\ -\frac{5}{14.241} \\ \frac{6}{6} \end{bmatrix}$$

c) Para que la matriz del sistema A sea diagonal dominante, se debe cumplir que  $|a_{ii}| > |a_{i1}| + \dots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{in}|$  para  $i=1, 2, 3, 4$ , En efecto:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 8 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -6 \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} |7| = 7 > |2| + |-1| + |2| = 5 \\ |8| = 8 > |3| + |2| + |-1| = 6 \\ |5| = 5 > |1| + |-1| + |1| = 3 \\ |-6| = 6 > |2| + |2| + |-1| = 5 \end{array} \right.$$

$\therefore$  A es diagonal dominante, lo que trae como consecuencia que  $\|M\| < 1$ . En efecto:

$$\alpha = \|M\| = \max_{1 \leq i \leq 3} \sum_{j=1}^3 |m_{ij}| = \max\left(\frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}\right) = \frac{5}{6} (< 1)$$

Todo lo anterior trae como consecuencia que método de Jacobi va a converger tomando cualquier aproximación inicial  $x^{(0)}$ , de un modo un tanto lento al ser el factor de convergencia  $\alpha = \frac{5}{6}$  más bien cercano a 1.

$$d) \alpha = \frac{5}{6} \Rightarrow \Delta x^{(k)} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{5}{6}} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| = 5 \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

Iteración	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$5 \ x^{(k)} - x^{(k-1)}\ $
0	3.0063	1.803	-1.2888	2.373	-----
1	1.6289	1.2945	-2.0042	4.1914	$5(1.8184)=7.2920$
2	1.1526	2.2171	-2.1939	3.6820	$5(0.9226)=4.6130$
3	1.0074	2.3795	-1.8123	3.8624	$5(0.3816)=1.9080$

El proceso iterativo no habrá finalizado si se desea que el error absoluto sea menor que 0.01, dado que la cota del error absoluto estimada es 1.9080.

La solución exacta es  $x_1 = 1.001$   $x_2 = 2.345$   $x_3 = -1.777$   $x_4 = 3.785$

### El método de Seidel

El método de Seidel, también llamado de Gauss – Seidel, es una variación del método de Jacobi que logra simplificar dicho algoritmo y mejorar la rapidez de la convergencia en la mayoría de los casos.

En el método de Jacobi, al calcular la variable  $x_i$  se utilizan los valores de las demás variables que se obtuvieron en la iteración anterior, sin embargo, en ese momento ya se han calculado los nuevos valores de  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$  que son, por lo general, mejores aproximaciones que los

obtenidos en la iteración anterior. En el método de Seidel, una vez que se obtiene el nuevo valor de una variable, éste se utiliza para actualizar los valores de las variables que siguen; de esta forma, no se necesita guardar los valores de la iteración anterior, lo cual simplifica el algoritmo y ahorra memoria y, por otra parte, la velocidad de la convergencia mejora sustancialmente.

En términos más precisos, sea  $Ax = b$  un sistema de  $n$  ecuaciones lineales. Se supone, como hasta ahora, que este sistema es cuadrado y que posee diagonal predominante. Escrito en forma desarrollada, el sistema es:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}} [b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)}] \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}} [b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)}] \\ x_3^{(k)} = \frac{1}{a_{33}} [b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} - a_{34}x_4^{(k-1)} - \dots - a_{3n}x_n^{(k-1)}] \\ \vdots \\ x_n^{(k)} = \frac{1}{a_{nn}} [b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}] \end{cases}$$

### **Convergencia del método de Seidel**

El parámetro  $\beta$  que a continuación se define, juega en el método de Seidel un papel análogo al  $\alpha$  del método de Jacobi:

**Definición** (factor de convergencia del método de Seidel)

Sea el sistema lineal  $Ax = b$ . Se llama factor de convergencia del método de Seidel para este sistema al número  $\beta$  definido como:

$$\beta = \max_i \frac{q_i}{1-p_i} \quad \text{donde} \quad p_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \quad q_i = \sum_{j=i+1}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \quad i = 1, 2, \dots, n$$

**Teorema** (condición suficiente de convergencia)

Una condición suficiente para que el método de Seidel converja hacia la solución del sistema  $x = Mx + c$ , independientemente de la aproximación inicial  $x^{(0)}$ , es que el factor de convergencia  $\beta$ , sea menor que 1.

Además, se tiene que:  $E(x^{(k)}) \leq \beta E(x^{(k-1)}) \quad k = 1, 2, \dots$

Al igual que con el método de Jacobi, el teorema que sigue es una consecuencia inmediata del anterior. Su importancia radica en que permite analizar la convergencia del método de Seidel para un sistema lineal cuando este aún se encuentra en la forma  $Ax = b$ .

**Teorema**

Una condición suficiente para que el método de Seidel converja hacia la solución del sistema  $Ax = b$  independientemente de la aproximación inicial  $x^{(0)}$  es que el sistema tenga diagonal predominante.

El error absoluto máximo en la iteración  $k$ -sima del algoritmo de Seidel puede tomarse como:

$$\Delta x^{(k)} = \frac{\beta}{1-\beta} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

**Condición de terminación 1**

Si se desea obtener la solución de un sistema lineal con un error absoluto menor que  $\epsilon$ , y el factor de convergencia del método de Seidel es  $\beta < 1$ , entonces el proceso iterativo de Seidel se llevará a cabo hasta la aproximación  $x^{(k)}$  para la cual:

$$\Delta x^{(k)} = \frac{\beta}{1-\beta} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq \epsilon$$

En los casos en que  $\beta$  es menor que 0.5, la condición de terminación se puede simplificar un poco, ya que  $\frac{\beta}{1-\beta} \leq \frac{0.5}{1-0.5} = 1$ , por lo que en este caso se tendrá:

$$\Delta x^{(k)} = \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

De aquí resulta:

**Condición de terminación 2:**

Si se desea obtener la solución de un sistema lineal con un error absoluto menor que  $\epsilon$ , y el factor de convergencia del método de Jacobi es  $\beta < 0.5$ , entonces el proceso iterativo de Seidel se llevará a cabo hasta la aproximación  $x^{(k)}$  para la cual:

$$\Delta x^{(k)} = \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq \epsilon$$

**Observación**

Es de resaltar que cuando la matriz  $A$  tiene diagonal predominante, de modo que  $\alpha < 1$ , la convergencia del método de Jacobi nunca es más rápida que la de Seidel. Lo anterior es consecuencia del hecho, que si  $\alpha < 1$  entonces  $\beta \leq \alpha$ .

Lo anterior prueba que en los casos de diagonal predominante, el método de Seidel tiene una convergencia más rápida o igual que el de Jacobi. En la práctica la diferencia es bastante apreciable y, en casi todos los casos de diagonal predominante, el método de Seidel necesita aproximadamente la mitad de las iteraciones que requiere el método de Jacobi.

Como el parámetro  $\beta$  puede ser más complicado de calcular que  $\alpha$ , en ocasiones, cuando la diagonal es predominante, se suele usar  $\alpha$  en lugar de  $\beta$  al trabajar con el método de Seidel y esto no conduce a errores precisamente porque en estos casos  $\beta \leq \alpha$ .

**Algoritmo del método de Seidel**

Se desea hallar una solución del sistema  $Ax = b$  con error absoluto menor que  $\epsilon$ . Se supone que  $A$  tiene diagonal predominante y se conoce el valor del factor de convergencia  $\beta$ . El algoritmo utiliza como datos las matrices  $A$  y  $b$ , el factor de convergencia, la tolerancia  $\epsilon$  y la aproximación inicial  $x^{(0)}$ . De no conocerse una aproximación inicial, se puede tomar  $c$  como aproximación inicial.

$x = x^{(0)}$

Repetir

    Error=0

    Para  $i=1$  hasta  $n$

$prov = b_i$  {En esta sección se calcula la i-sima componente de x, que se almacena provisionalmente en prov, de modo que no se afecte  $x_i$  para poder determinar la diferencia entre la iteración actual y la anterior}

Para  $j=1$  hasta  $n$

Si  $j \neq i$  entonces  $prov = prov - a_{ij} x_j$

$prov = prov/a_{ii}$

Fin ciclo  $j$

Si  $|prov - x_i| > Error$  entonces  $Error = |prov - x_i|$  {Se va guardando la máxima diferencia entre las dos últimas iteraciones}

$x_i = prov$  {El antiguo valor de  $x_i$  se cambia por el nuevo}

Fin ciclo  $i$

$Error = Error (\beta / (\beta - 1))$

Hasta que  $Error < \epsilon$

La solución del sistema es  $x$  con error absoluto menor que  $Error$

Terminar

**Nota:** Es recomendable traer programado este algoritmo antes de actividades prácticas. Incorporar en la programación limitar el número de iteraciones.

Consideremos el mismo ejemplo del método de Jacobi. Por simplicidad, dado que la matriz del sistema es diagonal dominante, consideremos  $\beta = \alpha = \frac{5}{6}$

**Ejemplo:**

$$\text{Dado el sistema de ecuaciones} \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 21.044 \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 - x_4 = 14.424 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = -6.444 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = -14.241 \end{cases}$$

Tomando  $x^{(0)}$  como el vector  $c$ , genere la sucesión de aproximaciones  $x^{(1)}$ ,  $x^{(2)}$ ,  $x^{(3)}$ . el método de Seidel. ¿Habría finalizado el proceso iterativo si se desea que el error absoluto sea menor 0.01?. Justifique.

**Solución**

$$\beta = \frac{5}{6} \Rightarrow \Delta x^{(k)} = \frac{\beta}{1 - \beta} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| = 5 \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

Iteración	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$5 \ x^{(k)} - x^{(k-1)}\ $
0	3.0063	1.803	-1.2888	2.373	-----
1	1.6290	1.7859	-1.7320	3.8005	$5(1.3773)=6.8865$
2	1.1627	2.2500	-1.8314	3.8163	$5(0.4663)=2.3315$
3	1.0114	2.3336	-1.7876	3.7864	$5(0.1513)=0.7565$

El proceso iterativo no habrá finalizado si se desea que el error absoluto sea menor que 0.01, dado que la cota del error absoluto estimada es 0.7565, pero los resultados son mejores que los alcanzados por el método de Jacobi.

La solución exacta es  $x_1 = 1.001$   $x_2 = 2.345$   $x_3 = -1.777$   $x_4 = 3.785$

### **Comentarios finales sobre los métodos iterativos**

A diferencia de los métodos directos, en que la cantidad de operaciones aritméticas requeridas está determinada únicamente por el orden del sistema, en los métodos iterativos hay que tener en cuenta la cantidad de iteraciones que se necesitará; esta depende de la exactitud deseada y de la rapidez de convergencia del método que se emplee. En la demostración del teorema sobre la convergencia del método de Jacobi se obtuvo una fórmula que puede utilizarse para decidir:

$$E(x^{(k)}) \leq \alpha^k E(x^{(k-1)})$$

que se puede escribir en términos de errores absolutos máximos como:

$$\Delta x^{(k)} = \alpha^k \Delta x^{(0)}$$

Para el método de Seidel, análogamente, se tiene:

$$\Delta x^{(k)} = \beta^k \Delta x^{(0)}$$

Estas fórmulas permiten predecir cuantas iteraciones se necesitará para obtener una exactitud deseada si se puede hacer una estimación del error absoluto máximo en la iteración inicial, lo cual requiere tener una idea aproximada de los valores que tomará la solución

$$k = \frac{\ln\left(\frac{\Delta x^{(k)}}{\Delta x^{(0)}}\right)}{\ln \alpha} \qquad k = \frac{\ln\left(\frac{\Delta x^{(k)}}{\Delta x^{(0)}}\right)}{\ln \beta}$$

Sin embargo, el único factor para decidir si se aplica un método directo o uno iterativo no es la cantidad de operaciones. Si el sistema tiene muchas ecuaciones, todas con la misma estructura, como en los ejemplos 6 (pág. 191) y 10 (pág. 202), seguramente es preferible escribir un pequeño programa que implemente el método de Seidel o el Jacobi, que tener que escribir todos los coeficientes de la matriz A (que pueden ser decenas de miles) para utilizar un programa profesional de alguna biblioteca numérica con un método directo.

Como los métodos iterativos solo se utilizan para sistemas con diagonal predominante, muchas veces no hay nada que decidir, porque, aunque teóricamente siempre es posible hacer transformaciones elementales en el sistema que hagan predominante la diagonal, esto puede resultar prácticamente imposible en sistemas de más de tres o cuatro ecuaciones.

En cuanto a la selección entre Seidel y Jacobi, el método de Seidel converge mucho más rápido, es más fácil de programar y requiere la mitad de la memoria. Solo en una cosa lleva ventaja el método de Jacobi: si se va a implementar el algoritmo en una máquina de cálculo paralelo, el algoritmo de Jacobi permite calcular en cada iteración todas las incógnitas (si la máquina posee esta posibilidad) simultáneamente, ya que cada una requiere los mismos datos y es independiente de la otra; el método de Seidel es, por naturaleza, un método secuencial, ya que para calcular una incógnita en una iteración hay que haber calculado todas las que le preceden.

A continuación, se presenta una ejercitación clasificada en tres categorías: resueltos (los estudiantes deben primeramente tratar de identificar vías posibles de solución y compararla con la utilizada), propuestos (constituyen una sugerencia de ejercitación) y de estudio independiente (constituyen la base de la tarea a asignar a los estudiantes).

Antes de estudiar los ejercicios resueltos y resolver ejercicios propuestos y de estudio independiente, se sugiere consultar la bibliografía indicada, en particular los ejemplos del libro de texto en formato digital: 1(pág. 148-149), 1(180-182), 3(185-186), 4(189), 5 y 6(190-192), 7(194-195), 8(199-200), 9 y 10(201-203).

### **Ejercicios resueltos**

1. Dado el sistema de ecuaciones 
$$\begin{cases} 20x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 3 \\ 2x_1 + 20x_2 + x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 - x_2 - 10x_3 + 2x_4 = -17 \\ 4x_2 - 2x_3 - 40x_4 = 55 \end{cases}$$

- Escriba el sistema en las formas  $Ax=b$  y  $x = Mx + c$ .
- Escriba la ecuación recursiva del método de Jacobi
- Verifique que método de Jacobi es convergente tomando cualquier aproximación inicial  $x^{(0)}$
- Tomando  $x^{(0)}$  como el vector  $c$ , determine una solución aproximada mediante el método de Jacobi con error absoluto menor que 0.01
- Verifique que método de Seidel es convergente tomando cualquier aproximación inicial  $x^{(0)}$
- Tomando  $x^{(0)}$  como el vector  $c$ , determine una solución aproximada mediante el método de Seidel con error absoluto menor que 0.01, obteniendo previamente el factor de convergencia del método de Seidel.

### **Solución**

a) 
$$A = \begin{bmatrix} 20 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 20 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -10 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & -40 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -17 \\ 55 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 20 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 20 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -10 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & -40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -17 \\ 55 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 20x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 3 \\ 2x_1 + 20x_2 + x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 - x_2 - 10x_3 + 2x_4 = -17 \\ 4x_2 - 2x_3 - 40x_4 = 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{10}x_2 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{3}{20} \\ x_2 = -\frac{1}{10}x_1 - \frac{1}{20}x_3 + \frac{1}{20}x_4 - \frac{3}{10} \\ x_3 = \frac{1}{10}x_1 - \frac{1}{10}x_2 + \frac{1}{5}x_4 + \frac{17}{10} \\ x_4 = \frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{20}x_3 - \frac{11}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -0.1 + 0.2x_3 + 0.15 \\ x_2 = -0.1x_1 - 0.05x_3 + 0.05x_4 - 0.3 \\ x_3 = 0.1x_1 - 0.1x_2 + 0.2x_4 + 1.7 \\ x_4 = 0.1x_2 - 0.05x_3 - 1.375 \end{cases} \quad M = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & 0.2 & 0 \\ -0.1 & 0 & -0.05 & 0.05 \\ 0.1 & -0.1 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & -0.05 & 0 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 0.15 \\ -0.3 \\ 1.7 \\ -1.375 \end{bmatrix}$$

$$x = Mx + c \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & 0.2 & 0 \\ -0.1 & 0 & -0.05 & 0.05 \\ 0.1 & -0.1 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & -0.05 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.15 \\ -0.3 \\ 1.7 \\ -1.375 \end{bmatrix}$$

b) Para  $k = 1, 2, \dots$

$$x^{(k)} = Mx^{(k-1)} + c \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & 0.2 & 0 \\ -0.1 & 0 & -0.05 & 0.05 \\ 0.1 & -0.1 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & -0.05 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}^{(k-1)} + \begin{bmatrix} 0.15 \\ -0.3 \\ 1.7 \\ -1.375 \end{bmatrix}$$

c) Para que la matriz del sistema A sea diagonal dominante, se debe cumplir que

$|a_{ii}| > |a_{i1}| + \dots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{in}|$  para  $i=1, 2, 3, 4$ , En efecto:

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 20 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -10 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & -40 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} |20| = 20 > |2| + |-4| = 6 \\ |20| = 20 > |2| + |1| + |-1| = 4 \\ |-10| = 10 > |1| + |-1| + |2| = 4 \\ |-40| = 40 > |4| + |-2| = 6 \end{cases}$$

$\therefore A$  es diagonal dominante, lo que trae como consecuencia que  $\|M\| < 1$ . En efecto:

$$\alpha = \|M\| = \max_{1 \leq i \leq 4} \sum_{j=1}^4 |m_{ij}| = \max(0.3, 0.2, 0.4, 0.15) = 0.4 (< 1)$$

Todo lo anterior trae como consecuencia que método de Jacobi va a converger tomando cualquier aproximación inicial  $x^{(0)}$ .

d) Dado que el valor de  $\alpha$  es cercano a 0.5, por simplicidad en los cálculos podemos tomar:

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

Iteración	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\ x^{(k)} - x^{(k-1)}\ $
0	0.15	-0.3	1.7	-1.375	-----
1	0.52	-0.46875	1.47	-1.49	0.37 (>0.01)
2	0.490875	-0.5	1.500875	-1.495375	0.03125 (>0.01)
3	0.500175	-0.4989	1.5000125	-1.50004375	0.0093 (<0.01)

La solución aprox. es  $x_1 = 0.500175$   $x_2 = -0.4989$   $x_3 = 1.5000125$   $x_4 = -1.50004375$ .

La solución exacta es  $x_1 = 0.5$   $x_2 = -0.5$   $x_3 = 1.5$   $x_4 = -1.5$



**Ejercicios propuestos** (sugerencia de ejercitación)

1. Dado el sistema 
$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - x_3 = 12 \\ x_1 - 10x_2 - x_3 = -8 \\ x_1 + x_2 - 10x_3 = 12 \end{cases}$$

- Escriba el sistema en las formas  $Ax=b$  y  $x = Mx + c$ .
- Escriba la ecuación recursiva del método de Jacobi
- Verifique que la matriz  $A$  tiene diagonal predominante. ¿Qué consecuencia trae este hecho sobre el factor de convergencia del método de Jacobi (y determínelo) y sobre la convergencia de este método?
- Tomando  $x^{(0)}$  como el vector  $c$ , determine una solución aproximada mediante el método de Jacobi con error absoluto menor que 0.007
- Tomando  $x^{(0)}$  como el vector  $c$ , determine una solución aproximada mediante el método de Seidel con error absoluto menor que 0.007, obteniendo previamente el factor de convergencia del método de Seidel.

**Ejercicios de estudio independiente**

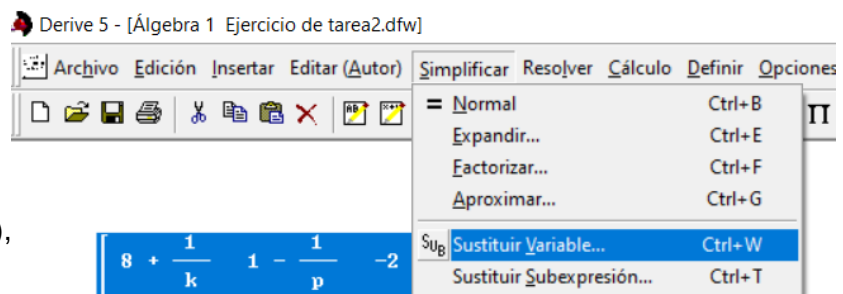
Para los ejercicios, los valores de  $p$  y  $q$  están asignados en la tarea#2:

En cada uno de los siguientes sistemas:

- Escriba la ecuación recursiva del método de Jacobi y compruebe su convergencia
- Tomando  $x^{(0)}$  como el vector  $c$ , determine una solución aproximada mediante el método de Jacobi con error absoluto menor que 0.005, estando limitada a 4 el número de iteraciones. Indique si se alcanzó o no la precisión deseada
- Escriba las ecuaciones recursivas del método de Seidel y compruebe su convergencia
- Tomando  $x^{(0)}$  como el vector  $c$ , determine una solución aproximada mediante el método de Seidel con error absoluto menor que 0.005, estando limitada a 4 el número de iteraciones. Indique si se alcanzó o no la precisión deseada
- Realice una comparación entre los 2 métodos.

**Nota:** En el fichero de Derive

“Ejercicio de tarea2” en la opción Simplificar que se muestra sustituya, en el ejercicio asignado (1, 2, 3 o 4), los valores de  $p$  y  $q$  dados, para que obtenga los valores de la matriz y el termino independiente de su tarea 2.



$$1) \begin{bmatrix} 8 + \frac{1}{k} & 1 - \frac{1}{p} & -2 + \frac{1}{p} & -1 + \frac{1}{k} \\ 2 - \frac{1}{k} & 7 + \frac{1}{p} & 1 - \frac{1}{p} & -1 + \frac{1}{k} \\ 3 - \frac{1}{k} & \frac{1}{k} & -7 - \frac{1}{k} & 2 + \frac{2}{p} \\ 1 + \frac{1}{k} & 3 - \frac{1}{2 \cdot k} & 4 - \frac{1}{2 \cdot p} & -8 - \frac{1}{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k \cdot (7 \cdot p + 24) - p + 2}{2 \cdot k \cdot p} \\ -\frac{k \cdot (17 \cdot p + 4) + 5 \cdot p + 2}{2 \cdot k \cdot p} \\ -\frac{14 \cdot k \cdot p + 5 \cdot p + 1}{k \cdot p} \\ \frac{3 \cdot k \cdot (10 \cdot p + 1) + 2 \cdot (2 \cdot p + 1)}{2 \cdot k \cdot p} \end{bmatrix}$$

$$2) \begin{bmatrix} 9 + \frac{1}{p} & 1 + \frac{1}{p} & 3 - \frac{1}{p} & -2 + \frac{1}{k} \\ 1 + \frac{2}{k} & -6 - \frac{2}{p} & -1 + \frac{1}{p} & 1 - \frac{1}{k} \\ 2 - \frac{1}{k} & 1 + \frac{1}{k} & -9 - \frac{1}{k} & 2 + \frac{2}{p} \\ 1 - \frac{1}{k} & 2 - \frac{1}{k} & 3 - \frac{1}{p} & 6 + \frac{2}{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2 \cdot k \cdot (16 \cdot p - 3) - 5 \cdot p - 2}{2 \cdot k \cdot p} \\ -\frac{k \cdot (19 \cdot p + 12) + 19 \cdot p + 4}{2 \cdot k \cdot p} \\ \frac{3 \cdot k^2 \cdot (7 \cdot p + 1) + 6 \cdot k \cdot p + p}{k^2 \cdot p} \\ \frac{k^2 \cdot (6 \cdot p + 5) + k \cdot p - p}{k^2 \cdot p} \end{bmatrix}$$

$$3) \begin{bmatrix} 10 + \frac{1}{k} & 2 + \frac{1}{p} & 1 - \frac{1}{p} & -1 + \frac{3}{k} \\ 2 + \frac{1}{k} & -5 - \frac{1}{k} & -1 + \frac{1}{p} & 1 - \frac{1}{k} \\ 3 - \frac{1}{k} & 2 + \frac{1}{k} & -10 - \frac{1}{p} & 1 + \frac{1}{k} \\ 1 - \frac{1}{k} & 2 - \frac{1}{k} & 1 - \frac{1}{p} & 5 + \frac{2}{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2 \cdot k \cdot (17 \cdot p - 10) + 28 \cdot p - 5}{5 \cdot k \cdot p} \\ \frac{2 \cdot k \cdot (28 \cdot p + 5) + 4 \cdot p + 5}{5 \cdot k \cdot p} \\ -\frac{k \cdot (99 \cdot p + 10) + 59 \cdot p + 5}{5 \cdot k \cdot p} \\ \frac{k \cdot (25 \cdot p + 2) + 5 \cdot (2 \cdot p - 1)}{5 \cdot k \cdot p} \end{bmatrix}$$

$$4) \begin{bmatrix} 6 - \frac{1}{k} & 2 - \frac{1}{p} & 1 - \frac{1}{p} & -1 + \frac{5}{k} \\ -2 + \frac{1}{k} & -7 - \frac{2}{k} & -3 + \frac{1}{p} & 2 - \frac{1}{k} \\ 2 - \frac{1}{k} & 3 + \frac{1}{k} & -8 - \frac{3}{p} & -1 + \frac{1}{k} \\ 3 - \frac{1}{k} & 2 - \frac{1}{k} & 1 + \frac{1}{p} & 9 + \frac{2}{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k^2 \cdot (111 \cdot p - 11) + 20 \cdot k \cdot p + 50 \cdot p}{10 \cdot k^2 \cdot p} \\ -\frac{k^2 \cdot (13 \cdot p - 21) - 50 \cdot k \cdot p + 10 \cdot p}{10 \cdot k^2 \cdot p} \\ -\frac{21 \cdot k^2 \cdot (8 \cdot p + 3) + 30 \cdot k \cdot p - 10 \cdot p}{10 \cdot k^2 \cdot p} \\ \frac{k \cdot (151 \cdot p + 41) + 20 \cdot (4 \cdot p + 1)}{10 \cdot k \cdot p} \end{bmatrix}$$