Optimización Numérica

Sumario:

- Introducción. Modelo Matemático General de un problema de optimización. Clasificación de un problema de optimización
- Problemas de optimización unidimensionales sin restricciones. Método de Búsqueda Secuencial Uniforme y Acelerada
- Problemas de optimización unidimensionales con restricciones. Método de Bisección. Método de la Sección de Oro

Bibliografía:

Texto Básico: "Matemática Numérica", Manuel Álvarez Blanco, Alfredo Guerra Hernández, Rogelio Lau Fernández.

Volumen 2, Capitulo 6

Epígrafes. 6.1 al 6.3

Objetivos:

- Conocer el concepto de problema de optimización y su clasificación.
- Conocer los métodos para resolver un problema de optimización unidimensional sin restricciones para una función unimodal de una variable.
- Conocer los métodos numéricos para resolver un problema de optimización numérica con restricciones.

Aspectos a desarrollar:

1. Optimización. Características generales, Representación matemática de la función objetivo y sus restricciones. Clasificación de un problema de optimización. Optimización numérica
2. Problemas de optimización unidimensionales sin restricciones. Método de Búsqueda Secuencial Uniforme y Acelerada
3. Problemas de optimización unidimensionales con restricciones, Método de Bisección. Método de la Sección de Oro

1. Optimización numérica. Generalidades

En la práctica se presentan con frecuencia situaciones como las siguientes:

- Obtener la mayor producción posible dada cierta cantidad de materia prima
- Obtener la mayor ganancia de una inversión
- El planeamiento de manteniendo y reemplazo de equipos para reducir los costos de operación
- El planeamiento eficiente de una construcción
- El planeamiento de una estrategia de mercado para obtener la mayor ganancia o reducir su efecto
- Seleccionar la ruta más corta para visitar determinado número de ciudades.

Optimización es la presentación formal de estas y otras situaciones que se pueden presentar. En la mayoría de los casos priman dos tipos de criterios de optimización: financieros y técnicos.

La optimización es la colección de procedimientos para determinar el conjunto de condiciones requeridas para obtener el mejor resultado en determinada situación. Debido a lo anterior la optimización está presente en muchos problemas de importancia práctica.

Características generales de la optimización

En muchos estudios de optimización se distinguen varias características comunes. Examinemos algunas de las mismas.

1) *Objetivo de optimización*

La selección del objetivo (magnitud, criterio) a optimizar resulta básico en los problemas de optimización. En un avión el criterio puede ser lograr el menor peso posible, en una planta térmica un criterio frecuente es el mínimo costo (costo inicial +costo de operación), en una tubería para un flujo dado la selección de la velocidad del mismo que dé lugar a un mínimo costo total.

Si el problema está completamente definido por un conjunto específico de valores de entrada, entonces los valores de salida son fijos. Por ejemplo, el volumen de un cilindro circular queda completamente determinado si su diámetro y altura son conocidos. En este problema no se puede optimizar nada, a menos que se relaje alguna especificación, como por ejemplo, determinar las dimensiones de modo que el área lateral del recipiente sea mínima (y por tanto más económica la fabricación del mismo) para un volumen dado. Cuando un problema no está completamente determinado para un conjunto de valores de entrada dado, se dice que es indeterminado, y en principio posee un número infinito de soluciones. De lo anterior resulta que para resolver un problema de optimización es necesario disponer de recursos de optimización, por los cuales se entiende la libertad de elegir los valores de algunos factores de dirección del problema a optimizar. En otras palabras, el objetivo de optimización debe poseer determinados grados de libertad que permitan variar su estado de acuerdo con unos u otros requisitos.

2) *Parámetros en conflicto*

Una característica de muchos problemas de optimización es la presencia de parámetros en conflicto. Por ejemplo, en la selección de la velocidad del flujo en una tubería que dé lugar a un mínimo costo, si el diámetro disminuye su costo y manteniendo disminuyen, pero el costo de bombeo aumenta. En situaciones como la anteriormente presentada es esencial establecer algún tipo de compromiso o balance entre los parámetros en conflicto, mediante el establecimiento del objetivo a optimizar, como pudiera ser en el ejemplo anterior para un flujo dado la selección de la velocidad del flujo que dé lugar a un mínimo costo total.

3) *Restricciones*

Los estudios de optimización de muchos problemas solo es posible obtener si se imponen restricciones. Por ejemplo, si se desea obtener las dimensiones del cilindro circular de mayor volumen posible, este problema no tendría solución real, pues por muy grande que sea el volumen de un recipiente dado, siempre es posible construir otro de mayor volumen. Ahora si se impone la restricción de que el área de la superficie sea un valor determinado, entonces este problema ya puede tener solución. Nótese que el problema anterior tiene dos restricciones naturales, y es que los valores del diámetro y la altura tienen que ser positivos.

Representación matemática de la función objetivo y sus restricciones

Los elementos del modelo matemático de un problema de optimización incluyen la especificación de la función objetivo y de sus restricciones. Representemos por Z la función a optimizar.

Modelo:

$$\begin{cases} Z = F(x_1, x_2, \ldots, x_N) & \text{minimizar (o maximizar)} \\ \text{sujeta a} \quad g_i(x_1, x_2, \ldots, x_N) \leq 0 & i = 1, 2, \ldots, G \\ \qquad\qquad h_i(x_1, x_2, \ldots, x_N) = 0 & i = 1, 2, \ldots, H \quad (\text{con } H < N) \\ \qquad\qquad x_1, x_2, \ldots, x_N \geq 0 & \end{cases} \tag{1}$$

donde x_i con i = 1, 2, …, N, representan el conjunto de N variables independientes o de decisión que pertenecen a un cierto conjunto llamado espacio de soluciones factibles, F representa la llamada función objetivo que depende de las N variables x_i y es la función a la que hay que minimizar o maximizar, G y H son el número de restricciones de desigualdad y de igualdad respectivamente, g_i representa el conjunto de las restricciones de desigualdad y h_i representa el conjunto de las restricciones de igualdad.

Tanto la función F como las restricciones de desigualdad o de igualdad pueden ser lineales o no lineales. En el conjunto de las restricciones de desigualdad también puede haber inicialmente restricciones del tipo “mayor que” pero estas pueden transformarse a restricciones del tipo “menor que” como las planteadas en la definición anterior multiplicando por el factor (-1) dichas ecuaciones. Como se observa el valor de H debe ser siempre menor que N mientras que el valor de G no tiene que cumplir con esta condición.

A los efectos de simplificar el trabajo, es importante tener en cuenta que, si se adiciona una constante a la función objetivo esto no afecta los valores de las variables independientes en los cuales ocurre el óptimo y se cumple:

$$min[a + Z(x_1, x_2, \ldots, x_N)] = a + min[Z(x_1, x_2, \ldots, x_N)]$$

$$max[a + Z(x_1, x_2, \ldots, x_N)] = a + max[Z(x_1, x_2, \ldots, x_N)]$$

Otra propiedad es que el máximo (mínimo) de una función y el mínimo (máximo) del negativo de la función tienen lugar en el mismo punto y se cumple:

$$max[Z(x_1, x_2, \ldots, x_N)] = -min[Z(x_1, x_2, \ldots, x_N)]$$

$$min[a + Z(x_1, x_2, \ldots, x_N)] = -max[Z(x_1, x_2, \ldots, x_N)]$$

Ejemplos de problemas de optimización

Pueden ser ejemplos de problemas de optimización los siguientes casos:

$$\text{(A)}\quad Z = 2x^3 + 4x^2 \quad \text{(minimizar)}$$

$$\text{(B)}\begin{cases} Z = x_1 + x_2 & \text{(maximizar)} \\ x_1 + 2x_2 \le 8 & \\ 2x_1 + x_2 \ge 2 & \\ x_1, x_2 \ge 0 & \end{cases}$$

$$\text{(C)}\begin{cases} Z = x_1^2 + x_2^2 & \text{(minimizar)} \\ x_1 + 2x_2 = 8 & \\ x_1, x_2 \ge 0 & \end{cases}$$

$$\text{(D)}\quad Z = 2x^3 + 4x^2 \quad x \in [0,1] \quad \text{(maximizar)}$$

El caso (A) es un problema no lineal de optimización de una variable real y sin restricciones mientras que el caso (D) es un problema no lineal de optimización de una variable real y con restricciones de cotas de la variable x. El caso (B) es un problema de optimización lineal de dos variables y con restricciones lineales de desigualdad y de no negatividad de las variables mientras que el caso (C) es un problema no lineal de optimización de dos variables y con restricciones lineales de igualdad y de no negatividad de las variables.

Se han desarrollado procedimientos que permiten encontrar valores de las variables independientes para los cuales una cierta función toma su mayor (o menor) valor. En ocasiones el conjunto donde están definidas las variables independientes está restringido en una cierta región del dominio de definición.

El objetivo final es determinar el punto, o los puntos, de la forma $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ en los cuales la función objetivo alcanza el valor máximo o el valor mínimo según corresponda al problema que se esté resolviendo. Este objetivo sería desde un punto de vista analítico, pero desde el punto de vista numérico el objetivo común a todos los métodos de optimización es, en esencia, obtener, con el menor número posible de evaluaciones de la función objetivo, una representación adecuada de la misma que permita determinar la ubicación del punto óptimo.

Clasificación de un problema de optimización

Los problemas de optimización pueden clasificarse atendiendo a diferentes aspectos:

a) Según el número de variables independientes (unidimensionales o multidimensional).

b) Según el tipo de variables (continuas, discretas, mixtas, entera, binarias, etc.):

c) Según la presencia de restricciones (sin restricciones o con restricciones).

d) Según la expresión de la función objetivo y de las restricciones: lineales si la función objetivo y todas las restricciones son lineales y no lineales si la función objetivo no es lineal y las restricciones pueden ser no lineales).

e) Según el número de funciones objetivos (una sola función objetivo o multiobjetivos)

Existen varios métodos para resolver un problema de optimización, estos métodos pueden agruparse en dos grandes clases:

a) Métodos de optimización basados en el uso de las derivadas.

b) Métodos de optimización no basados en el uso de las derivadas.

En los cursos de Cálculo Diferencial se han estudiado los primeros, es decir, los métodos de optimización para determinar los puntos de extremos de una función basados en el cálculo de las derivadas de la función objetivo. Aquí se estudiaran los segundos métodos, los métodos de optimización para determinar los puntos de extremos de una función donde no se hace uso de las derivadas de la función.

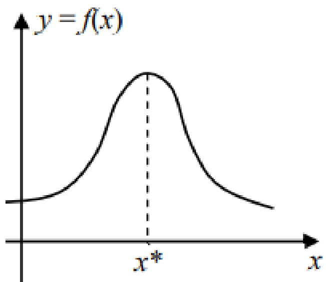
Se estudiarán técnicas numéricas, las cuales descansarán, fundamentalmente, en la operación de evaluar la función a optimizar. Primero se analizará el caso más simple de las funciones que dependen de una sola variable independiente. Los procedimientos más generales, para funciones de n variables, casi siempre consisten en resolver secuencias de problemas unidimensionales; de aquí la importancia del caso unidimensional. Por otra parte, algunos problemas prácticos son a veces unidimensionales.

Aquellos algoritmos en los que las evaluaciones se realizan todas a un tiempo, se llaman de búsqueda simultánea mientras que los que siguen la estrategia de realizar una evaluación después que han sido analizados los resultados de las anteriores, se llaman métodos secuenciales. Los algoritmos secuenciales requieren menos evaluaciones que los simultáneos, ya que en estos se realizan evaluaciones sin analizar resultados anteriores que podrían haber descartado la necesidad de muchos de estás evaluaciones.

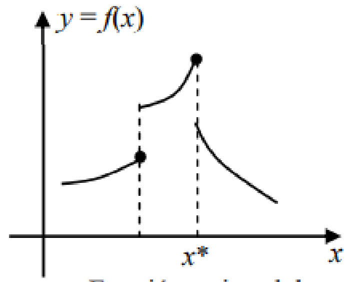
En la búsqueda secuencial hay dos situaciones bastante diferentes que requieren también procedimientos diferentes: los casos en que el óptimo x^* se halla dentro de un intervalo conocido (búsqueda con restricciones) y los casos en que no se sabe nada acerca de x^* (búsqueda sin restricciones). Es usual que ambos tipos de problemas se combinen y que se comience utilizando un método de búsqueda sin restricciones que termina dando un intervalo donde se halla x^* y, a continuación, aplicar procedimientos de búsqueda con restricciones para hallar x^* con una precisión aceptable.

2. Problemas de optimización unidimensionales sin restricciones

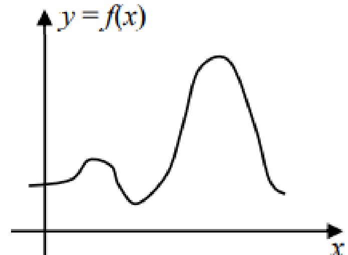
Supondremos en lo sucesivo que función a optimizar (maximizar o minimizar) es ***unimodal.*** De modo informal, una función unimodal de una variable es aquella que posee en su conjunto de definición un solo punto de extremo relativo:



Función unimodal



Función unimodal



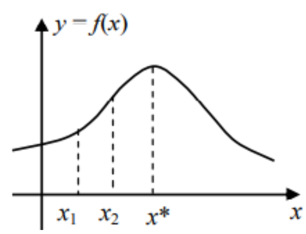
Función no unimodal

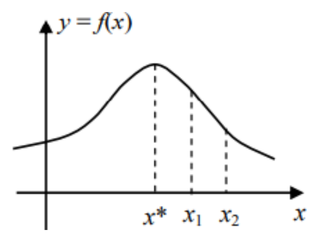
Una definición un poco más precisa es la siguiente:

Definición **(Función unimodal)**

Una función f(x) es unimodal con máximo, si existe en su dominio un punto x* tal que, si x_1 y x_2 pertenecen al dominio se cumple que:

- Si $x_1 < x_2 < x^*$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$
- Si $x^* < x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$





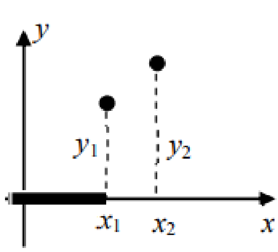
Nótese que la definición anterior simplemente establece que f es creciente a la izquierda de x* y decreciente a la derecha de x*. De manera evidente se puede modificar la definición para el caso de una función unimodal con mínimo. Sin embargo, no es necesario estudiar por separado los casos de máximo y de mínimo porque todo problema de minimización se puede reducir a uno de maximización (y viceversa).

En todos los métodos que se estudiarán se aplica el siguiente resultado el cual, por ser tan elemental, no se ha querido llamarlo teorema.

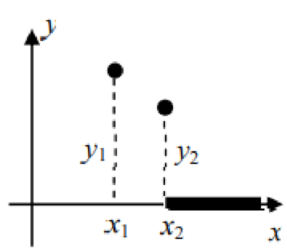
Propiedad básica de la optimización unidimensional

Sea f(x) una función unimodal con máximo en x* y sean x_1 y x_2 dos valores de su dominio. Sean $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$:

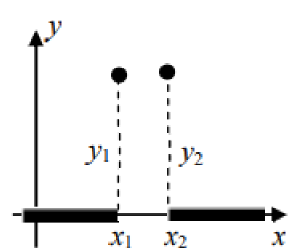
$y_1 < y_2 \Rightarrow x_1 < x^*$



$y_1 > y_2 \Rightarrow x^* < x_2$



$y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 < x^* < x_2$



La justificación es bastante simple. Por ejemplo, en el primer caso, si se admitiera que el punto de máximo x* está a la izquierda de x_1 entonces en el intervalo $[x_1, x_2]$ f(x) tendría que ser decreciente y en ese caso debería ser $y_1 > y_2$; como esto contradice la hipótesis, entonces x* no está a la izquierda sino a la derecha de x_1. De modo similar se prueba para los otros dos casos.

Existen varios procedimientos de búsqueda unidimensional, pero la idea central es común, y consta de dos fases:

1ra fase: Determinar los extremos de un intervalo (llamado intervalo de incertidumbre), en el cual se conozca con certeza que está contenido el óptimo x* ; es decir, se deben encontrar dos valores x_k y x_{k+1} , tales que $x_k \le x^* \le x_{k+1}$.

2da fase: Reducir iterativamente la longitud del intervalo de incertidumbre. De esta forma nos acercaremos más y más al conocimiento de x* .

Búsqueda secuencial uniforme

Sea y = f(x) una función unimodal con un punto de máximo en x*, de la cual solo se supone que está definida en un intervalo que incluye a x* y que puede ser evaluada en cualquier punto de dicho intervalo. El método más simple para hallar x* es la búsqueda secuencial uniforme.

Sea x_0 el punto donde se comenzará la búsqueda. La selección de x_0 requiere, por lo general, algún conocimiento previo de la función que se desea optimizar y a veces algún tipo de "sospecha" basada en análisis realizados a la misma o en la naturaleza del fenómeno con que se está tratando. En cualquier caso, como es natural, se seleccionará x_0 lo más próximo posible de x*.

Sea s un número real distinto de cero (puede ser positivo o negativo) al que se llamará paso. El método de búsqueda secuencial uniforme consiste, simplemente, en generar la sucesión de valores:

$$x_i = x_0 + is \qquad i = 0, 1, 2, 3,...$$

y obtener para cada uno de ellos la imagen de f, esto es:

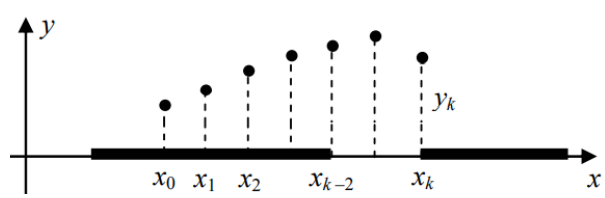
$$y_i = f(x_i)$$

El proceso se detiene tan pronto se obtiene un y_k tal que $y_{k-1} > y_k$, es decir:

$$y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_{k-1} > y_k$$

y puede entonces asegurarse, en base la propiedad básica, que x* se encuentra entre x_{k-2} y x_k. Teniendo en cuenta el signo de s, se puede escribir:

si s > 0, $x_{k-2} < x^* < x_k$



si s < 0, $x_k < x^* < x_{k-2}$

Algoritmo en seudo código:

El algoritmo que sigue permite determinar un intervalo en el que se encuentra el punto x* de máximo de una función f(x) unimodal. Se supone que la función está definida en todo el intervalo en que se realiza la búsqueda. El algoritmo utiliza como datos: la función f(x), el número x_0 a partir del cual se comienza la busqueda y el paso s, que puede ser positivo o negativo.

$k = 0$
$y_0 = f(x_0)$
Repetir
  $k = k + 1$
  $x_k = x_{k-1} + s$
  $y_k = f(x_k)$
Hasta que $y_k < y_{k-1}$
x* se encuentra entre x_{k-2} y x_k
Terminar

Es de notar que, en cualquier caso, la región final en que queda acotado x* tiene como amplitud 2|s|; para obtener x* con una exactitud adecuada se debe tomar un paso s pequeño pero, por otra parte, si s es pequeño se requiere de muchas evaluaciones para cubrir la distancia $|x^* - x_0|$. Hay varias formas de resolver esta contradicción, una de ellas se analiza a continuación.

Búsqueda secuencial por etapas

Esta estrategia consiste en tomar un paso s inicial grande (del orden de magnitud de la distancia |x* – x0|); una vez determinado el intervalo $x_{k-2} < x^* < x_k$ (aquí y en lo que sigue se está suponiendo s > 0; en el caso s < 0, los cambios a realizar son muy simples) tomar $x_0 = x_{k-2}$ y comenzar una nueva búsqueda con un paso s menor. El número total de evaluaciones para encontrar el óptimo con una cierta precisión dada, se hace mínimo cuando, en cada etapa, el paso se reduce en **e** veces (e = 2.71828...).

Ejemplo

Determinar la longitud de la escalera más corta, que llegue del suelo a la pared del edificio sobre la cerca, situada a d=4 metros de la pared del edificio y altura de h=2 metros.

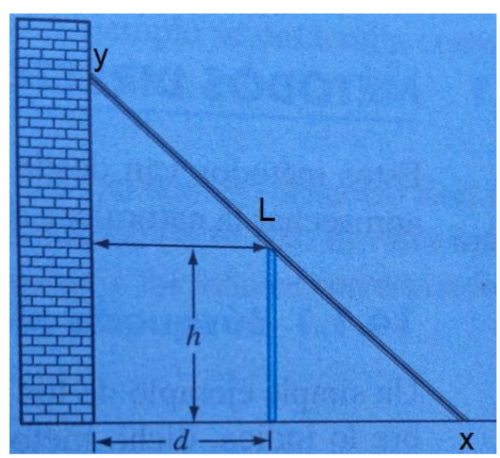
Solución

$$L(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (Min.)$$

Son restricciones naturales que x>d=4, y>h=2; y además sujeta a la condición (segmentos entre paralelas):

$$\frac{h}{y} = \frac{x-d}{x} \Rightarrow y = \frac{x}{x-d}h$$

$$\therefore L(x) = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x}{x-d}\right)^2 h^2} \qquad (Min.)$$



Sustituyendo valores:

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 4\left(\frac{x}{x-4}\right)^2} = \frac{x\sqrt{x^2-8x+20}}{x-4}$$

Este problema solo puede tener un óptimo de mínima, por lo que $L(x)$ es unimodal.

De los conocimientos de primer año, se deben buscar los puntos críticos:

$$L'(x) = \frac{x^3 - 12x^2 - 48x - 80}{(x-4)^2\sqrt{x^2-8x+20}} = 0 \Rightarrow x^3 - 12x^2 - 48x - 80 = 0$$

La solución de esta ecuación aplicando métodos numéricos para solución de ecuaciones, nos daría con 2 cifras decimales exactas el valor x=6.52, siendo L=8.3239.

Abordemos la solución de este problema desde la optimización numérica. Veremos que no será necesario derivar, ni resolver ecuaciones, simplemente evaluar la función a optimizar.

Dado que nos hemos dedicado a analizar problemas de máximo, convirtamos el problema de mínima anterior en uno equivalente de máxima:

$$f(x) = -L(x) = -\frac{x\sqrt{x^2-8x+20}}{x-4} = \frac{x\sqrt{x^2-8x+20}}{4-x}$$

Empleemos el método de búsqueda secuencial uniforme con partiendo del punto inicial x_0=5 y paso s=0.25:

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	5	5.25	5.5	5.75	6	6.25	6.5	6.75
$y_i=f(x_i)$	-11.1803	-9.90568	-9.16667	-8.73191	-8.48528	-8.36222	-8.32406	-8.34636

Note que la secuencia de los valores de y_i aumenta hasta y_6, y disminuye en y_7, esto es índice de que el óptimo se encuentra en el intervalo [x_5, x_7]=[6.25, 6.75]. la amplitud de este intervalo es de 0.5. Para reducir el mismo, y acercarnos al óptimo empleemos ahora el método de búsqueda secuencial por etapas, tomando por ejemplo x_0=6.25 y paso s=0.1:

i	0	1	2	3	4
x_i	6.25	6.35	6.45	6.55	6.65
$y_i=f(x_i)$	-8.36222	-8.33837	-8.32622	-8.3243	-8.33136

El óptimo se encuentra en el intervalo [x_2, x_4]=[6.45, 6.65]. Tomando ahora x_0=6.45 y paso s=0.01:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	6.45	6.46	6.47	6.48	6.49	6.5	6.51	6.52	6.53
$y_i=f(x_i)$	-8.32622	-8.32559	-8.32506	-8.32463	-8.3243	-8.32406	-8.32392	-8.32388	-8.32392

El óptimo se encuentra ahora en el intervalo [x_6, x_8]=[6.51, 6.53]. Tomando como aproximación del punto donde se alcanza el óptimo, el punto medio, se tiene x^*=6.52. Por lo tanto, la longitud mínima seria:

$$L(6.52) \approx \frac{6.52\sqrt{6.52^2-8(6.52)+20}}{6.52-4} = 8.3239$$

La escalera más corta es de 8.3239 m.

Otra forma de proceder es mediante *interpolación cuadrática*. En este caso se aproxima a y=f(x) mediante un polinomio de interpolación de 2do grado $y = px^2 + qx + r$ en el intervalo [x_6, x_8] donde se encuentra el óptimo, es decir, la parábola que pasa por los puntos:

$$(x_a, y_a) = (x_6, y_6)\ ;\ (x_b, y_b) = (x_7, y_7)\ ;\ (x_c, y_c) = (x_8, y_8)$$

Derivando, igualando a cero y despejando, resulta:

$$x^* \approx -\frac{q}{2p} = \frac{(y_a - y_b)[(x_b)^2 - (x_c)^2] - (y_b - y_c)[(x_a)^2 - (x_b)^2]}{2[(y_a - y_b)(x_b - x_c) - (y_b - y_c)(x_a - x_b)]}\ .$$

En este ejemplo se tiene:

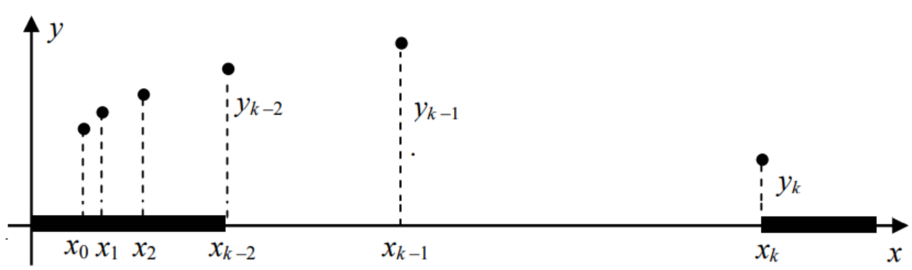
$$(x_a, y_a) = (6.51, -8.32392)\ ;\ (x_b, y_b) = (6.52, -8.32388)\ ;\ (x_c, y_c) = (6.53, -8.32392)$$

Sustituyendo: $x^* \approx \frac{(-8.32392+8.32388)[(6.52)^2-(6.53)^2]-(-8.32388+8.32392)[(6.51)^2-(6.52)^2]}{2[(-8.32392+8.32388)[6.52-6.53]-(-8.32388+8.32392)[6.51-6.52]]} = 6.52$

que en este ejemplo coincide con el valor estimado con el punto medio del intervalo.

Búsqueda secuencial acelerada

Esta estrategia resulta apropiada cuando no se tiene una idea clara del tamaño del problema, o sea, de la distancia |x* – x_0|. Consiste en lo siguiente: En cada paso del algoritmo mientras no se cumpla la condición de parada, el paso se duplica en valor; de esta manera, aun cuando inicialmente s fuera demasiado pequeño, pronto toma valores suficientemente grandes para alcanzar a x* en no muchas iteraciones. A este algoritmo se le llama búsqueda secuencial acelerada:



A continuación se muestra el algoritmo, que solo posee una ligera modificación respecto al anterior:

k = 0
y_0= f(x_0)
Repetir
    k = k + 1
    x_k= x_{k-1} + s
    y_k = f(x_k)
    s = 2s
Hasta que $y_k < y_{k-1}$
x* se encuentra entre x_{k-2} y x_k
Terminar

Retomemos el ejemplo, y busquemos un intervalo de incertidumbre, ahora el método de búsqueda secuencial acelerada, partiendo igualmente del punto inicial x_0=5 y paso inicial s=0.25:

i	0	1	2	3	4
x_i	5	5.25	5.75	6.75	8.75
y_i=f(x_i)	-11.1803	-9.90568	-8.73191	-8.34635	-9.49399

El óptimo se encuentra en el intervalo [x_2, x_4]=[5.75, 8.75]. Realicemos otra búsqueda con paso acelerado, toman x_0=5.75 y paso inicial s=0.05:

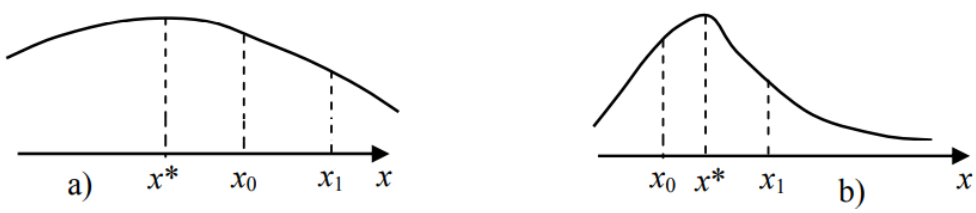
i	0	1	2	3	4	5
x_i	5.75	5.8	5.9	6.1	6.5	7.3
y_i=f(x_i)	-8.73191	-8.67011	-8.56625	-8.42380	-8.32406	-8.53603

El óptimo se encuentra en el intervalo [x_3, x_5]=[6.1, 7.3].

Este proceso se puede continuar, o combinar con búsqueda secuencial o por etapas. También puede utilizarse alguno de los métodos de búsqueda en un intervalo, los cuales además son más eficientes.

Selección del sentido de la búsqueda

En algunos casos aparece una dificultad adicional, cuando se desconoce si x* es mayor o menor que x_0. Considérese que este es el caso para la función unimodal con máximo f(x) y que se toma un paso s > 0. Si f(x_1) > f(x_0), es obvio que puede descartarse la región (– ∞, x_0), así que ya se sabe que x* > x_0. Sin embargo, si f(x_1) < f(x_0) la región descartable es (x_1, ∞), o sea que – ∞ < x* < x_1, por tanto, pudiera ser x* > x_0 o x* < x_0 (ver figura)



Observe que el resultado f(x_1) < f(x_0) puede deberse a que se está buscando x* en el sentido equivocado (a) o a que se ha tomado un paso tan grande que se ha sobrepasado x* en la primera iteración (b). Hay dos modos de proceder: buscar de nuevo en el mismo sentido con un paso más pequeño a partir de x_0 o comenzar una nueva búsqueda a partir de x_1 pero en el sentido opuesto.

En el ejemplo anterior, esta situación se daría si por ejemplo se considera x_0=7 y paso s=0.25:

i	0	1
x_i	7	7.25
y_i=f(x_i)	-8.41295	-8.5128

Se observa que f(x_1) < f(x_0). Un modo de proceder seria considera x_0=7.25 y paso s=-0.25. Mediante el método de búsqueda secuencial uniforme:

i	0	1	2	3	4
x_i	7.25	7	6.75	6.5	6.25
y_i=f(x_i)	-8.5128	-8.41295	-8.34636	-8.32406	-8.36222

El óptimo se encuentra en el intervalo $[x_3, x_1]$=[6.25, 6.75]. Ahora se podría considerar, por ejemplo, x_0=6.75 y paso s=-0.1, y así sucesivamente.

3. Problemas de optimización unidimensionales con restricciones

En los problemas de optimización con restricciones de funciones de una variable el objetivo es determinar los puntos de extremos globales o absolutos de una función en un intervalo. En este caso si el punto de extremo absoluto está dentro del intervalo este punto tiene que ser un punto crítico y sino el punto de extremo absoluto se encuentra en uno de los extremos del intervalo. De esta forma, desde el punto de vista analítico, para determinar los puntos de extremos absolutos o globales de una función de una variable en un intervalo se procede a determinar primero todos los puntos críticos de dicha función que pertenezcan al intervalo y después se evalúa la función en dichos puntos y de ahí se determina el máximo o el mínimo absoluto de la función según sea el objetivo a resolver.

Desde el punto de vista numérico existen métodos para determinar los extremos absolutos o globales de una función en un intervalo. De estos se verán el método de Bisección y el Método de la Sección de Oro.

Si en un problema de optimización unidimensional se conoce un intervalo [a, b] donde se encuentra el punto de máximo x* de la función unimodal f(x), el problema puede resolverse de modo más efectivo que la búsqueda secuencial. El intervalo [a, b] puede estar dado desde un inicio a partir de consideraciones físicas, económicas, etc., o puede haberse llegado a él a partir de una etapa previa de búsqueda secuencial. En cualquier caso pueden aplicarse los métodos antes mencionados.

Las técnicas secuenciales estudiadas hasta ahora en menor o mayor medida son de carácter heurístico. Se derivan de la propiedad de la unimodalidad, del simple sentido común y de la experiencia del trabajo computacional. Sin embargo, el desconocimiento del número de evaluaciones de la función que hay que realizar para encontrar el óptimo con una precisión dada, puede ser un inconveniente. En algunos problemas se llega rápidamente a la solución, pero en otros se torna lento, porque la eficiencia del método depende fuertemente de las características de la función objeto en el intervalo de incertidumbre.

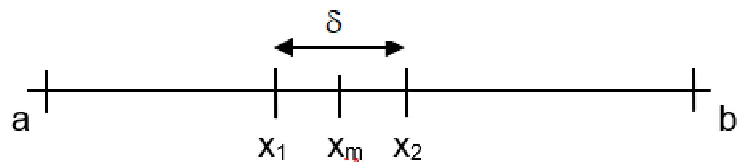
En problemas de optimización el número de evaluaciones de la función objetivo es un parámetro crítico a causa del costo computacional, que debería ser controlado a priori, o ser independiente de las características de la función.

Los métodos que veremos a continuación contemplan la evaluación de la función objetivo en un conjunto de puntos interiores al intervalo de incertidumbre, cuya longitud, se reduce paulatinamente en cada iteración, con independencia de las particularidades de la función, de manera que es posible estimar de antemano el esfuerzo de cómputo necesario.

Supóngase que se realiza una búsqueda unidimensional del máximo de la función máximo f(x), conociendo que el punto de máxima x* cumple que $a \le x^* \le b$. Se toman dos puntos de prueba x_1 y x_2 en el interior del intervalo [a, b], de manera que $a< x_1 < x_2 <b$. Si $f(x_1)<f(x_2)$ su máximo pertenece al intervalo $[x_1, b]$, en caso contrario pertenece al intervalo $[a, x_2]$. Es natural pensar que los puntos de prueba deben estar a igual distancia de los extremos del intervalo de incertidumbre.

Método de Bisección

Se supone que la función unimodal y = f(x) tiene un punto de mínimo dentro del intervalo [a, b]. La esencia del Método de Bisección es que el intervalo se divide en tres partes de forma que en cada iteración se va desechando una de las partes del intervalo de forma que el intervalo inicial [a, b] se va reduciendo hasta que la longitud del último intervalo [a, b] obtenido sea menor que un error prefijado ε.

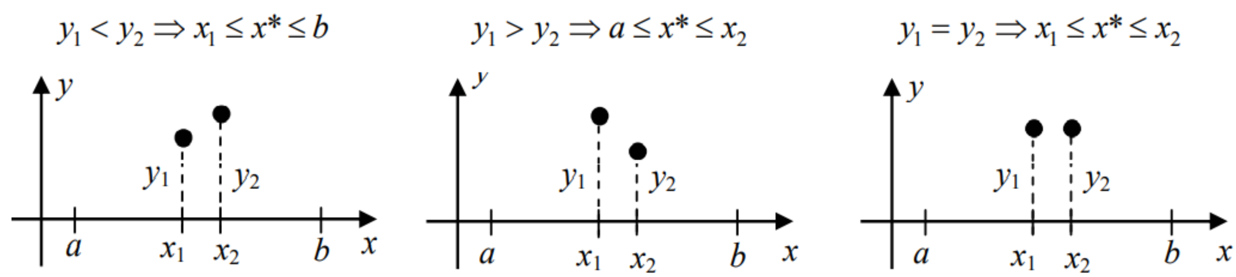


Primeramente se prefija el error ε y se calculan dos puntos x_1 y x_2 dentro del intervalo inicial separados por una distancia δ y situados a una misma distancia δ/2 del punto medio x_m del intervalo como se muestra en la gráfica anterior. Esta distancia δ se toma pequeña, sin embargo, debe ser razonablemente grande de modo que, al hallar $f(x_1)$ y $f(x_2)$ estos valores sean distinguibles uno del otro; esto es aún más importante si f(x) se evalúa en forma experimental, pues entonces hay que tomar en cuenta los inevitables errores de observación, de medición, etc. Se puede tomar como un porciento del error ε, aquí se ha tomado el 10 % del error, es decir,

$\delta = 0.1\,\varepsilon$ y los valores de los dos puntos mencionados se calculan según las expresiones siguientes

$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \frac{\delta}{2} \qquad x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{\delta}{2}$$

Sean $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Como consecuencia inmediata de la propiedad básica de la optimización unidimensional, como muestra la siguiente figura, se tiene que:



La convergencia del método de bisección es muy fácil de analizar. Si consideramos que δ es un número muy pequeño en relación con la amplitud del intervalo, puede suponerse que en cada iteración (que requiere dos evaluaciones de f) la longitud del intervalo de búsqueda se reduce a cerca de la mitad. Más formalmente, llamando:

$L_0 = b - a$ $\quad$ L_n: Amplitud del intervalo de búsqueda después de n evaluaciones (n par)

entonces $L_n \approx \frac{L_0}{2^{n/2}}$

lo cual prueba que L_n converge hacia 0 cuando n tiende hacia infinito. En la práctica, sin embargo, L_n no puede reducirse a valores menores que δ.

La relación L_n/L_0 se utiliza con frecuencia para medir la eficiencia de los métodos de optimización en un intervalo, pues indica cuánto se puede reducir la región de incertidumbre mediante n experimentos. En el método de bisección esta relación es: $\frac{L_n}{L_0} = \frac{1}{2^{n/2}}$

Algoritmo

El algoritmo que sigue describe el método de optimización de bisección del intervalo. Se supone que la función f(x) es unimodal con máximo en el intervalo [a, b] y que está definida en todos los puntos de ese intervalo. El algoritmo da como resultado un intervalo cerrado de amplitud menor que un número especificado ε y que contiene al punto de máximo. Los datos que se requiere son: la función f(x), el intervalo [a, b] en que se encuentra inicialmente el punto de máximo de la función, la distancia δ que separará a los puntos experimentales y la tolerancia ε, que determina la amplitud del intervalo final.

Repetir

$x_1 = \frac{a+b}{2} - \frac{\delta}{2}$

$$x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{\delta}{2}$$

$y_1 = f(x_1)$

$y_2 = f(x_2)$

Si $y_1 < y_2$ entonces $a= x_1$ sino $b= x_2$

L= b – a

Hasta que L < ε

El punto de máximo x* se halla en [a, b]

Terminar

Ejemplo

Al final de la página 11, encontramos que el óptimo de máxima de:

$$f(x) = -\frac{x\sqrt{x^2-8x+20}}{x-4}$$

se encuentra en el intervalo [a, b]=[6.25, 6.75]. Para lograr un intervalo de incertidumbre de amplitud menor o igual que ε=0.1, se podría emplear la búsqueda por etapas desarrollada con anterioridad, en la que se desconoce el número de evaluaciones necesarias. Empleemos ahora el método de Bisección del cual se puede estimar el número de evaluaciones de modo que $L_n = \varepsilon = 0.1$. Entonces:

$$\frac{L_0}{2^{n/2}} \leq L_n \Rightarrow \frac{6.75 - 6.25}{2^{n/2}} \leq 0.1 \Rightarrow 2^{n/2} \geq \frac{0.5}{0.1} \Rightarrow n \geq 2log_2 5 = 2\frac{ln5}{ln2} = 4.64$$

Dado que n debe ser par, no se tendrán más de n=6 nuevas evaluaciones, un gasto computacional nada elevado, Consideremos $\delta = 0.1$ $\varepsilon = 0.01$, se obtiene:

i	a	b	L	x_1	x_2	y_1	y_2
0	6.2500	6.7500	0.5000	6.4950	6.5050	-8.324167	-8.323980
1	6.4950	6.7500	0.2550	6.6175	6.6275	-8.328145	-8.329043
2	6.4950	6.6175	0.1225	6.5513	6.5613	-8.324330	-8.324662
3	6.4950	6.5513	0.0563 (<0.01)				

Se observa, que efectivamente fueron solo necesarias 6 evaluaciones de la f(x) y 3 pasos del proceso iterativo.

Para una estimación del optimo en el intervalo [6.495, 6.5513] se puede considerar el punto medio ($x^*\approx 6.52315$) o emplear interpolación cuadrática con los puntos:

$(x_a, y_a)=(6.495, -8.32433)$, $(x_b, y_b)= (6.5231, -8,32388)$; $(x_c, y_c)= (6.5513, -8.324662)$

Sustituyendo en: $x^* \approx -\frac{q}{2p} = \frac{(y_a-y_b)[(x_b)^2-(x_c)^2]-(y_b-y_c)[(x_a)^2-(x_b)^2]}{2[(y_a-y_b)(x_b-x_c)-(y_b-y_c)(x_a-x_b)]}$

Se obtiene:

$$x^* \approx \frac{(-8.32433+8.32388)[(6.5231)^2-(6.55)^2]-(-8,32388+8.324662)[(6.495)^2-(6.5231)^2]}{2[(-8.32433+ 8.32388)[6.5231-6.55]-(-8,32388+8.324662)[6.495-6.5231]]} = 6.5188$$

Por lo tanto, la longitud mínima seria: $L(6.5188) \approx 8.32388$, la que es menor, aunque no de forma significativa, que lo obtenido con anterioridad.

<u>Método de la Sección de Oro</u>

Este método tiene cierta similitud con el Método de Bisección en cuanto a que en cada iteración se van desechando partes del intervalo, pero ahora los puntos x_1 y x_2 no se escogen tan próximos entre sí de forma que al desechar una parte del intervalo el otro punto que se queda pueda ser utilizado en la próxima iteración, con ganancia computacional.

Consideremos inicialmente un intervalo de longitud L = 1, y se quiere determinar el punto x_1 que se encuentre a una distancia 1- r del extremo izquierdo x = 0 de forma que el punto x_2 se encuentre a la misma distancia del extremo derecho x = 1.

Según se muestra en la figura anterior la cantidad 1 – r tiene que ser menor que la cantidad r ya que el valor de r es mayor que 0.5. Se debe de mantener la igualdad entre la fracción de las longitudes 1- r y r y la fracción de las longitudes r y 1, esto se plantea de la forma

$$\frac{1-r}{r} = \frac{r}{1}$$

De aquí se obtiene una ecuación de segundo grado en la variable r con dos soluciones una negativa y otra positiva, la solución positiva tiene el valor ***r = 0.618034*** a la cual se le llama ***fracción de oro***. Luego el punto x_1 se encuentra a la distancia 1 – r = 0.381966 del extremo de la izquierda del intervalo, es decir, el valor del punto x_1 es $x_1 = 1 - r = 0.382$. Por otro lado, el punto x_2 se encuentra a la misma distancia del extremo de la derecha del intervalo, $x_2 = 1 - 0.618034= 0.381966$.

Si se quiere hacer, de forma similar, la deducción para un intervalo [a, b] cualquiera, de longitud L = b – a, hay que tener en cuenta la siguiente ecuación

$$x = a + (b - a)\,r = a + L\,r$$

Esta ecuación transforma la variable r que varía en el intervalo [0, 1] a la variable x que varía en el intervalo [a, b]. Por lo tanto, evaluando para la fracción de oro, r = 0.381966, se obtiene $x_1 = a + 0.381966\ \mathrm{L}$. Esto quiere decir que el punto x_1 se encuentra a una distancia 0.381966 L del extremo x = a. Teniendo en cuenta esto el punto x_2 puede calcularse según el valor $x_2 = a + 0.618034\,\mathrm{L} = b - 0.381966\,\mathrm{L}$. La figura siguiente muestra la posición de ambos puntos dentro del intervalo [a, b].

Después de tener calculados los valores de x_1 y x_2 se evalúa la función en estos dos puntos, $y_1 = f(x_1)$ $y_2 = f(x_2)$ y se continúa con un proceso iterativo que va reduciendo el intervalo hasta que la longitud L del nuevo intervalo [a, b] sea menor que un error prefijado ε. Este método tiene una gran diferencia con el Método de Bisección, por ejemplo, si en el proceso de búsqueda del punto de mínimo (o de máximo) se desecha el intervalo [a, x_1] entonces el punto x_2 pasa a ser el nuevo punto x_1 y hay que calcular solamente un nuevo punto x_2. Un posible algoritmo de cálculo de este método puede ser el siguiente.

Algoritmo del método de la sección de oro

Se supone que la función f(x) es unimodal con máximo en el intervalo [a, b] y que está definida en todos los puntos de ese intervalo. El algoritmo da como resultado un intervalo cerrado de amplitud menor que un número especificado ε y que contiene al punto de máximo. Los datos que se requiere son: la función f(x), el intervalo [a, b] en que se encuentra inicialmente el punto de máximo de la función y la tolerancia ε, que determina la amplitud del intervalo final.

L = b – a ; Factor= 0.381966
x_1 = a + Factor · L ; x_2= b – Factor · L
y_1 = f(x_1) ; y_2 := f(x_2)
Repetir
  Si $y_1 < y_2$ entonces
    a= x_1
    x_1= x_2 ; y_1= y_2
    L= b – a
    x_2= b – Factor · L ; y_2 = f(x_2)
  sino
    b= x_2 ; x_2= x_1
    y_2= y_1 ; L:= b – a
    x_1= a + Factor · L ; y_1 = f(x_1)
  Fin ciclo Si
Hasta que L < ε
El punto de máximo x* se halla en [a, b]
Terminar

Ejemplo

Retomemos el óptimo de máxima de $f(x) = -\frac{x\sqrt{x^2-8x+20}}{x-4}$ que se encuentra en el intervalo [a, b]=[6.25, 6.75].

Empleemos ahora el método de de la sección de oro con $\varepsilon = 0.01$.

i	a	b	L	x_1	x_2	y_1	y_2
0	6.2500	6.7500	0.5000	6.4410	6.5590	-8.326877	-8.324580
1	6.4410	6.7500	0.3090	6.5590	6.6320	-8.324580	-8.329470
2	6.4410	6.5590	0.1180	6.4861	6.5139	-8.324416	-8.323893
3	6.4861	6.5590	0.0729	6.5139	6.5312	-8.323893	-8.323936
4	6.4861	6.5139	0.0279	6.4967	6.5033	-8.324128	-8.324005
5	6.4967	6.5139	0.0172	6.5033	6.5074	-8.324005	-8.323949
6	6.5033	6.5139	0.0106	6.5074	6.5099	-8.323949	-8.323923
7	6.5074	6.5139	0.0066				

Para una estimación del optimo en el intervalo [6.5074, 6.5139] se puede considerar el punto medio ($x^* \approx 6.51045$) o emplear interpolación cuadrática.

Conclusiones

Resaltar las principales ideas desarrolladas:

- Una función f(x) es unimodal con máximo si existe en su dominio un x* tal que, si x_1 y x_2 pertenecen al dominio se cumple que:
  - Si $x_1 < x_2 < x^*$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$
  - Si $x^* < x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$
- La propiedad básica de la optimización unidimensional establece que: Si f(x) una función unimodal con máximo en x* y x_1 y x_2 son dos valores de su dominio y se denomina $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$. Entonces:
  - $y_1 < y_2 \Rightarrow x_1 < x^*$
  - $y_1 > y_2 \Rightarrow x^* < x_2$
  - $y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 < x^* < x_2$
- El método de búsqueda secuencial uniforme consiste en generar la sucesión de valores: $x_i = x_0 + is$ (i = 0, 1, 2, 3,...) y obtener para cada uno de ellos la imagen $y_i = f(x_i)$. El proceso se detiene tan pronto se obtiene un y_k tal que $y_{k-1} > y_k$, y puede entonces asegurarse, se acuerdo con el principio básico, que x* se encuentra entre x_{k-2} y x_k
- La búsqueda secuencial acelerada consiste en lo siguiente: en cada paso del algoritmo mientras no se cumpla la condición de parada, el paso se duplica en valor; de esta manera, aun cuando inicialmente s fuera demasiado pequeño, pronto toma valores suficientemente grandes para alcanzar a x* en no muchas iteraciones

- En el método de bisección se toman dos puntos de prueba x_1 y x_2 muy próximos entre sí y a ambos lados del centro del intervalo [a, b]. Si se llama $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$, entonces se tiene que:
  - $y_1 < y_2 \Rightarrow x_1 \leq x^* \leq b$
  - $y_1 > y_2 \Rightarrow a \leq x^* \leq x_2$
  - $y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 \leq x^* \leq x_2$
- En el método de bisección se cumple que: $\frac{L_n}{L_0} = \frac{1}{2^{n/2}}$, donde L_n representa la longitud del intervalo de búsqueda después de haber realizado n evaluaciones de la función objetivo
- En el método de la sección áurea los puntos de prueba en un intervalo [a, b] son $x_1 = a + 0.381966$ L y $x_2 = b - 0.381966$ L , donde L=b-a. En el proceso de búsqueda del óptimo se desecha el intervalo [a, x_1], entonces el punto x_2 pasa a ser el nuevo punto x_1 y hay que calcular solamente un nuevo punto x_2. n

A continuación, se presenta una ejercitación clasificada en tres categorías: resueltos (los estudiantes deben primeramente tratar de identificar vías posibles de solución y compararla con la utilizada), propuestos (constituyen una sugerencia de ejercitación) y de estudio independiente (constituyen la base de la tarea a asignar a los estudiantes).

Ejercicios resueltos

1. Se desea obtener la mínima distancia (d) desde el punto (3, 2) hasta la sinusoide y = sen x.

a) Describa matemáticamente este problema de optimización, y desarrolle uno equivalente que sea de máxima

b) Obtenga un intervalo de incertidumbre, tomando como punto inicial x_0=1.6:

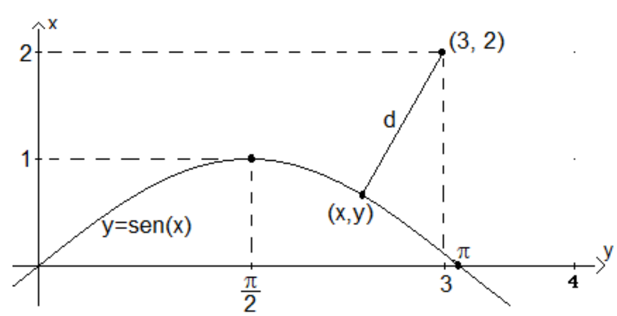
- Mediante el método de búsqueda uniforme con paso s=0.25
- Mediante el método de búsqueda acelerada con paso inicial s=0.15

Sea [a,b] el intervalo de incertidumbre de menor amplitud

c) En el intervalo [a, b] obtenga un valor aproximado del punto donde se alcanza el óptimo, tomando el punto medio de un intervalo de incertidumbre de amplitud menor o igual que la décima parte de la longitud del intervalo [a, b], mediante:

- El método de Bisección
- El método de la sección de oro

d) Determine una aproximación de la distancia mínima d y un intervalo donde se encuentre su valor exacto,



Solución

a)

$$FO: \quad d(x,y) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} \qquad (min.)$$
$$Condición; \quad y = senx$$

$Restricciones\colon \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \qquad 0 \leq y \leq 1$

Sustituyendo en FO la expresión de y:

$$FO\colon\ d(x) = \sqrt{(x-3)^2 + (senx-2)^2} \qquad (min.)x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

El siguiente problema alcanza el mínimo en el mismo punto:

$$FO\colon\ D(x) = (x-3)^2 + (senx-2)^2 \qquad (min.)$$
$$x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

Este problema de mínima se transforma en el siguiente de máxima:

$$FO\colon\ f(x) = -[(x-3)^2 + (senx-2)^2] \qquad (min.)$$
$$x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

b)

- Mediante búsqueda uniforme

$x_{i+1} = x_i + s \quad (i = 0, 1, 2, \ldots)$

$x_0 = 1.6 \qquad s=0.25$

i	0	1	2	3	4
x_i	1.6	1.85	2.1	2.35	2.6
$y_i = f(x_i)$	-2.96085	-2.40145	-2.10229	-2.0828	-2.36374

El óptimo se encuentra en el intervalo $[x_2, x_4]$=[2.1, 2.6] $L = x_4 – x_2 = 0.5$

- Mediante búsqueda acelerada

$s_i = 2\, s_{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots) \qquad s_0 = 0.15$

$x_{i+1} = x_i + s_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots) \quad x_0 = 1.6$

i	0	1	2	3
s_i	0.15	0.3	0.6	
x_i	1.6	1.75	2.05	2.65
$y_i = f(x_i)$	-2.96085	-2.59478	-2.14046	-2.45719

El óptimo se encuentra en el intervalo $[x_1, x_3]$=[1.75, 2.65] $L = x_3 - x_1 = 0.9$

El intervalo de incertidumbre de menor amplitud es [a,b] = [2.1, 2.6]

c)

Intervalo [a, b] inicial (i=0) : [2.1, 2.6]

$\varepsilon = \frac{b-a}{10} = \frac{0.5}{10} = 0.05$ (amplitud del intervalo de incertidumbre deseado)

- Método de Bisección

$\delta = 0.1\,\varepsilon = 0.005$

Puntos de prueba en el intervalo [a, b] de cada paso i del método:

$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \frac{\delta}{2} = \frac{a+b}{2} - 0.0025 \qquad x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{\delta}{2} = \frac{a+b}{2} + 0.0025$$

i	a_i	b_i	L	x_1	x_2	y_1	y_2
0	2.1	2.6	0.5	2.3475	2.3525	-2.08154	-2.08409
1	2.1	2.3525	0.2525	2.22375	2.22875	-2.05629	-2.05591
2	2.22375	2.3525	0.12875	2.285625	2.290625	-2.05984	-2.06092
3	2.22375	2.290625	0.066875	2.254688	2.259688	-2.05582	-2.05617
4	2.22375	2.259688	0.035937				

$$x^* = \frac{a_4 + b_4}{2} = \frac{2.22375 + 2.259688}{2} = 2.241719 \qquad \Delta x^* = \frac{\varepsilon}{2} = 0.025$$

- Método de la Sección de Oro

Puntos de prueba en el intervalo [a, b] de cada paso i del método:

$x_1 = a + 0.381966\,L \qquad x_2 = b - 0.381966\,L \qquad$ L=b-a

i	a_i	b_i	L	x_1	x_2	y_1	y_2
0	2.1	2.6	0.5	2.290983	2.409017	-2.061	-2.12139
1	2.1	2.409017	0.309017	2.218034	2.290983	-2.05687	-2.061
2	2.1	2.290983	0.190983	2.172949	2.218034	-2.06671	-2.05687
3	2.172949	2.290983	0.118034	2.218034	2.245898	-2.05687	-2.0555
4	2.218034	2.290983	0.072949	2.245898	2.263119	-2.0555	-2.05647
5	2.218034	2.263119	0.045085				

$$x^* = \frac{a_5 + b_5}{2} = \frac{2.218034 + 2.263119}{2} = 2.240576 \qquad \Delta x^* = \frac{\varepsilon}{2} = 0.025$$

d) La distancia mínima d y un intervalo donde se encuentre su valor exacto depende del método empleado. Para el intervalo, se necesita del error en la evaluación de:

$$d(x^*) = \sqrt{(x^* - 3)^2 + (sen x^* - 2)^2}$$

que se puede estimar mediante:

$$\Delta d \approx d'(x^*)\,\Delta x^* = \frac{\cos(x^*)(\text{sen}(x^*) - 2) + x^* - 3}{\sqrt{(\text{sen}^2(x^*) - 4\,\text{sen}(x^*) + (x^*)^2 - 6\,x^* + 13)}}\Delta x^*$$

- Método de Bisección

$$d = d(x^*) = d(2.241719) = \sqrt{(2.241719 - 3)^2 + (sen(2.241719) - 2)^2}$$
$$= 1.433692650$$

$$\Delta d \approx \left|d'(x^*)\right| \Delta x^*$$
$$= \left|\frac{\cos(2.241719)(\text{sen}(2.241719) - 2) + x^* - 3}{\sqrt{(\text{sen}^2(2.241719) - 4\,\text{sen}(2.241719) + (2.241719)^2 - 6\,(2.241719) + 13)}}\right| 0.025$$
$$= 0.000032$$

$$\therefore d_{min} \in [1.433692650 - 0.000032, 1.433692650 + 0.000032]$$
$$= [1.433660649, 1.433724650]$$

- Método de la Sección de Oro

$$d = d(x^*) = d(2.240576) = \sqrt{(2.240576-3)^2 + (sen(2.240576) - 2)^2}$$
$$= 1.433724650$$

$$d \approx \left|d'(x^*)\right| \Delta x^*$$
$$= \left|\frac{\cos(2.240576)(\text{sen}(2.240576) - 2) + x^* - 3}{\sqrt{(\text{sen}^2(2.240576) - 4\,\text{sen}(2.240576) + (2.240576)^2 - 6\,(2.240576) + 13)}}\right| 0.025$$
$$= 0.035843$$

$$\therefore d_{min} \in [1.433692650 - 0.035843, 1.433692650 + 0.035843]$$
$$= [1.397849650, 1.469535650]$$

Ejercicio propuesto (sugerencia de ejercitación)

Sea $f(x) = -1.5\, x^6 - 2x^4 + 12x$

a) Verifique que la función es unimodal con óptimo de máxima. Para ello analice la concavidad de la función

b) Obtenga un intervalo de incertidumbre, tomando como punto inicial x_0=0:

- Mediante el método de búsqueda uniforme con paso s=0.3
- Mediante el método de búsqueda acelerada con paso inicial s=0.1

Sea [a,b] el intervalo de incertidumbre de menor amplitud

c) En el intervalo [a, b] obtenga un valor aproximado del punto donde se alcanza el óptimo, tomando el punto medio de un intervalo de incertidumbre de amplitud menor o igual que la sexta parte de la longitud del intervalo [a, b], mediante:

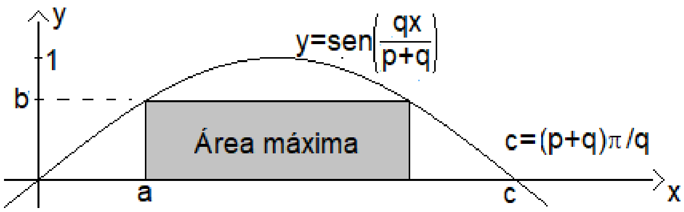
- El método de Bisección
- El método de la sección de oro

d) Determine una aproximación del valor máximo de la función, y un intervalo donde se encuentre su valor exacto. En términos ingenieriles, es buena la aproximación del valor de la función obtenido?.

Ejercicios de estudio independiente

Nota: Para el siguiente ejercicio, los valores de p y q están asignados en la tarea#5:

Dada la gráfica:



a) Describa matemáticamente este problema de optimización, en el cual **a** sea la variable independiente

b) Obtenga un intervalo de incertidumbre, tomando como punto inicial $a_0=0$:

- Mediante el método de búsqueda uniforme con paso s=c/10
- Mediante el método de búsqueda acelerada con paso inicial s=c/20

Sea [u, v] el intervalo de incertidumbre de menor amplitud

c) En el intervalo [u, v] obtenga un valor aproximado del punto donde se alcanza el óptimo, tomando el punto medio de un intervalo de incertidumbre de amplitud menor o igual que la décima parte de la longitud del intervalo [u, v], mediante:

- El método de Bisección
- El método de la sección de oro

d) Determine una aproximación del área máxima y un intervalo donde se encuentre su valor exacto, y valore si es o no una buena aproximación desde el punto de vista ingenieril.