CAPÍTULO 2 Matemática Numérica, 2da Edición

Manuel Álvarez, Alfredo Guerra, Rogelio Lau

RAÍCES DE ECUACIONES

Objetivos

Al finalizar el estudio y la ejercitación de este capítulo, el lector debe ser capaz de:

- Separar las raíces reales de una ecuación utilizando en su ayuda la graficación manual en los casos sencillos o un programa graficador en los casos más complicados.
- Utilizar algunos resultados del Álgebra Superior, tales como el teorema de las *n* raíces, la regla de los signos de Descartes y la Fórmula de Lagrange para establecer cotas en cuanto a la cantidad y localización de las raíces de las ecuaciones algebraicas.
- Describir brevemente los métodos de bisección, Regula Falsi, iterativo general, Newton – Raphson y el método de las secantes, las hipótesis necesarias en cada caso, su interpretación gráfica, sus ventajas e inconvenientes.
- Describir mediante un seudo código cada uno de los algoritmos antes mencionados.
- Describir el concepto de rapidez de convergencia y su relación con el orden de la convergencia de cada uno de los métodos estudiados y comparar los métodos desde este punto de vista.
- Utilizar los métodos de bisección, Regula Falsi, Newton – Raphson y secantes para resolver ecuaciones en forma manual o utilizando algún programa personal si posee los conocimientos necesarios de programación.
- Modelar problemas sencillos que conducen a ecuaciones no lineales y resolverlos, seleccionando en cada caso el método más conveniente.
- Describir el método de Newton para sistemas de dos ecuaciones no lineales y su extensión a un número mayor de ecuaciones y utilizar este método en casos sencillos y con alguna información sobre la posición de la solución buscada.
- Describir el método de Newton – Bairstow para hallar raíces imaginarias de ecuaciones algebraicas y utilizar el método cuando posea alguna información sobre la ubicación de las raíces imaginarias que se desea hallar.

2.1 Introducción

El problema que se resolverá

En este capítulo se tratará acerca del problema de encontrar las raíces reales de una ecuación con una incógnita; en términos más precisos: se tiene una ecuación del tipo:

$$f(x) = 0$$

y se desea hallar los números reales (si es que existe alguno) $r_1, r_2, ..., r_n$ comprendidos en un cierto intervalo I que satisfacen la ecuación, es decir tales que:

$$f(r_i) = 0 \qquad \text{para } i = 1, 2, ..., n$$

El intervalo I en que se busca las raíces puede ser cerrado o no y su amplitud puede incluso ser infinita.

La importancia de los métodos numéricos que resuelven este problema, viene dada por dos hechos: por una parte, la frecuencia con que se presenta el problema en cualquier rama de la ciencia o de la técnica; por otra parte, lo limitados que resultan los métodos analíticos de solución.

En los ejemplos que siguen se podrá apreciar la sencillez de algunos problemas de los cuales aparecen ecuaciones cuya solución por métodos analíticos no es posible.

***Ejemplo* 1**

Bajo ciertas suposiciones, muchas poblaciones de animales y plantas crecen según el modelo logístico:

$$p(t) = \frac{P_L}{1 - ce^{-kt}}$$

cuya gráfica se muestra en la figura 1 y donde P_L, (población límite), c y k son parámetros; t es el tiempo y $p(t)$ la población en el instante t. Si se conoce la población en tres instantes t_1, t_2 y t_3, se puede determinar los parámetros y con ello la función logística correspondiente. Sean: $p(t_1) = p_1$, $p(t_2) = p_2$ y $p(t_3) = p_3$. Entonces, se deberá cumplir que:

$$\frac{P_L}{1 - ce^{-kt_1}} = p_1 \qquad (1)$$

$$\frac{P_L}{1 - ce^{-kt_2}} = p_2 \qquad (2)$$

$$\frac{P_L}{1 - ce^{-kt_3}} = p_3 \qquad (3)$$

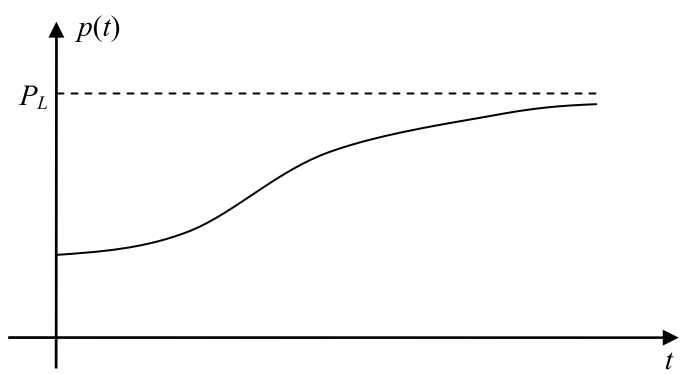

Figura 1

Las ecuaciones (1), (2) y (3) forman un sistema que contiene las tres incógnitas P_L, c y k. Eliminando de este sistema las incógnitas P_L y c se obtiene:

$$(p_2 - p_1)(p_3e^{-kt_3} - p_2e^{-kt_2}) - (p_3 - p_2)(p_2e^{-kt_2} - p_1e^{-kt_1}) = 0 \qquad (4)$$

que es una ecuación con la única incógnita *k*. La resolución de esta ecuación por métodos algebraicos es, en general, imposible. Más adelante será resuelta numéricamente.

Ejemplo 2

En el momento (t = 0) en que el voltaje sinuosidad de la fuente de voltaje de la figura 2 alcanza su máximo valor, se cierra el interruptor y comienza a circular una corriente. Se quiere saber en que instante la corriente i(t) tomará por primera vez el valor cero.

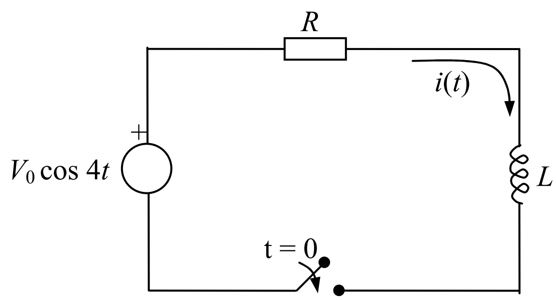

Figura 2

Solución:

Para determinar la expresión analítica de la corriente eléctrica hay que resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$L\frac{di}{dt} + ri = V_0 \cos 4t$$

con la condición inicial: $i(t) = 0$

Al resolver esta ecuación analíticamente se obtiene:

$$i(t) = ae^{-\frac{R}{L}t} + a\cos 4t + b\,\mathrm{sen}\,4\mathrm{t}$$

donde $$a = \frac{V_0 R}{16L^2 + R^2} \quad \text{y} \quad b = \frac{4V_0 L}{16L^2 + R^2} \qquad (5)$$

Haciendo $i(t) = 0$, se obtiene la ecuación:

$$ae^{-\frac{R}{L}t} + a\cos 4t + b\,\mathrm{sen}\,4\mathrm{t} = 0 \qquad (6)$$

cuya primera raíz positiva es la solución del problema. Nótese que la resolución de la misma por los métodos tradicionales del álgebra, es imposible. Posteriormente, esta ecuación será resuelta.

Ejemplo 3

Un cable que cuelga de sus extremos adquiere la forma que se muestra en la figura 3 y se demuestra que la ecuación de esta curva (llamada *catenaria*) viene dada por

$$y = L + a\cosh\frac{x}{a}$$

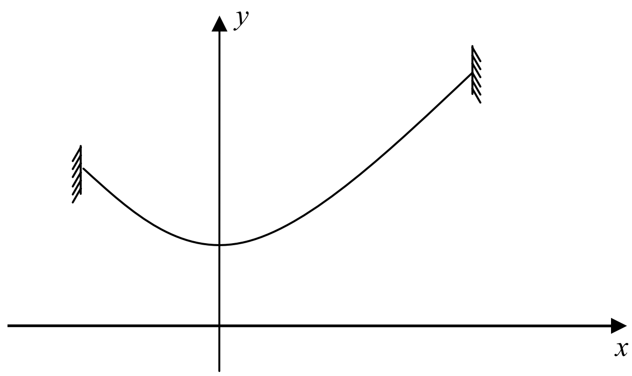

Figura 3

donde el parámetro a depende del peso por unidad de longitud del cable y de la tensión a que es sometido y L de la posición del sistema de referencia, el cual se encuentra colocado de manera que el origen de coordenadas se encuentra justamente debajo del punto de altura mínima. Como la ecuación solo contiene dos parámetros, midiendo la altura de un cable en dos puntos, se pueden determinar ambos parámetros. Por ejemplo, si la altura mínima es de 15 m y si 10 m más allá, la altura del cable es de 17 m, entonces:

Para $x = 0$ es $y = 15$ y, por tanto: $L + a = 15$

Para $x = 10$ es $y = 17$ y, será: $L + a\cosh\dfrac{10}{a} = 17$

Basta restar ambas ecuaciones para eliminar la incógnita L y obtener:

$$a\cosh\frac{10}{a} - a = 2 \qquad (7)$$

ecuación cuya raíz da el valor de a, del cual resulta fácil determinar posteriormente el valor de L. Sin embargo, solo mediante métodos como los que se verán en este capítulo, puede resolverse esta ecuación, en apariencia sencilla.

Ejemplo 4

Se quiere construir un recipiente cilíndrico de 1000 cm^3 de capacidad, utilizando la mínima cantidad de material. Teniendo en cuenta que es necesario un sobrante de 0,25 cm para poder doblar y soldar el material, entonces, si las dimensiones del recipiente son r cm de de radio y h cm de altura, se tiene (ver figura 4):

$$S = 2\pi(r + 0{,}25)^2 + (2\pi r + 0{,}25)h$$

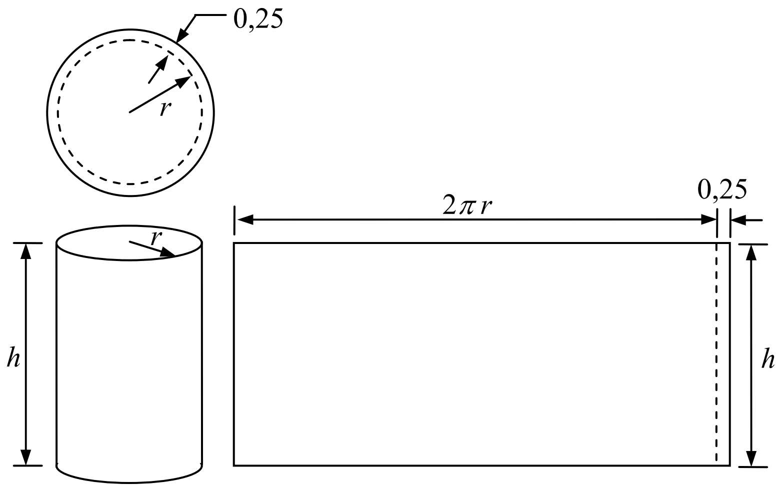

Figura 4

donde S es la superficie en cm^2 de material necesario para fabricar la lata. Como el volumen de la misma tiene que ser de 1000 cm^3, se tendrá:

$$\pi r^2 h = 1000$$

de donde, despejando h y sustituyendo en la expresión de S se obtiene:

$$S = 2\pi(r + 0{,}25)^2 + (2\pi r + 0{,}25)\frac{1000}{\pi r^2}$$

Como se sabe, el valor de r que hace mínimo a S se obtiene derivando respecto a r e igualando a cero:

$$\frac{dS}{dr} = 4\pi(r + 0{,}25) - \frac{2000}{r^2} - \frac{500}{\pi r^3} = 0$$

Multiplicando ambos miembros por r^3 (se supone $r \neq 0$)

$$4\pi r^4 + \pi r^3 - 2000r - \frac{500}{\pi} = 0 \qquad (8)$$

que es una ecuación algebraica de cuarto grado, cuyas raíces se puede calcular por los métodos algebraicos, pero con una gran dificultad. Próximamente, esta ecuación será resuelta numéricamente.

2.2 Separación de raíces

Dos etapas

En todos los métodos de resolución de ecuaciones que serán considerados en este capítulo, se parte del conocimiento de un intervalo (a, b) en el que la ecuación tiene exactamente una raíz. Lo más frecuente, sin embargo, es que en el intervalo de interés, lo más que se pueda asegurar es la existencia de una o más raíces. Por esta razón, el cálculo de las raíces de una ecuación consta, en general, de dos etapas; la primera, llamada separación de las raíces, persigue precisamente determinar intervalos como el (a, b) que contengan una raíz; la segunda es ya la aplicación de un algoritmo para hallar una aproximación de la raíz deseada con la aproximación requerida.

Separación gráfica de raíces

La técnica más elemental para la separación de raíces es el método gráfico que utiliza el conocido hecho de que las raíces de $f(x) = 0$ son las abscisas de los puntos en que la gráfica de la función $y = f(x)$ corta al eje x.

Es obvio que de esta forma no se pueden determinar las raíces con una precisión aceptable, pero sí se pueden acotar dentro de intervalos de separación suficientemente pequeños. Como en la actualidad existe una enorme cantidad de programas que grafican funciones, el método gráfico es sumamente atractivo y eficiente. Por lo general, se comienza graficando la función $f(x)$ en un intervalo grande y se van precisando intervalos de búsqueda más pequeños en los cuales se ordena de nuevo graficar la función, hasta obtener un intervalo en que solamente esté contenida la raíz que interese. El método gráfico brinda, además, valiosa información acerca de las características de la función $f(x)$, tales como los signos de la función y de su primera y segunda derivadas en diferentes puntos del intervalo de separación; esta información puede ser de gran importancia para la aplicación posterior de los métodos de cálculo de raíces.

Ejemplo 1

Separar las raíces de la ecuación: $\ln x + 4x - x^2 - 2 = 0$

Solución:

En la figura 1 se muestra la gráfica que aparece en la pantalla correspondiente a la función:

$$f(x) = \ln x + 4x - x^2 - 2$$

en el intervalo [0,001; 100]. Es evidente que fuera de este intervalo no puede encontrarse ninguna raíz, ya que para $x \leq 0$ el logaritmo de x no está definido y para $x > 100$ el término x^2 predomina obviamente sobre los demás, haciendo a $f(x)$ tomar valores negativos enormes. De la gráfica se observa que las raíces se hallan relativamente próximas a cero, por lo cual se repite el proceso con un intervalo más reducido tal como [0,001; 8] (figura 2), en el cual ya es posible apreciar dos raíces, una en (0, 1) y otra en (3, 4).

$f(x) = \ln x + 4x - x^2 - 2$

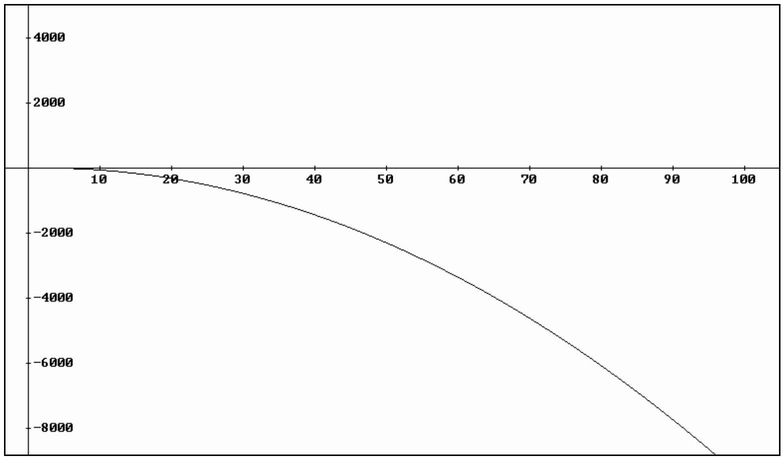

Figura 1

$f(x) = \ln x + 4x - x^2 - 2$

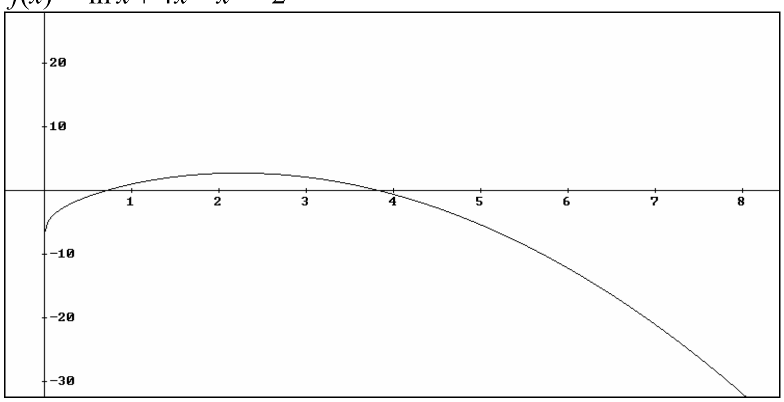

Figura 2

Algunos resultados importantes para ecuaciones algebraicas

En particular para las ecuaciones algebraicas, es decir, de la forma:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

donde n es un número natural y a_0, a_1, ..., a_n son constantes reales, existen resultados muy importantes del Álgebra Superior que hacen más simple la separación de raíces. A continuación se verán algunos. En todos los casos se excluyen las demostraciones, ya que no constituye objetivos de este texto. Al final del capítulo, en "Otras lecturas recomendadas", se indica dónde puede encontrarlas el lector interesado en ellas.

***Teorema* 1 (*de las n raíces*)**

Una ecuación algebraica de grado n tiene n raíces, reales o imaginarias, si cada raíz se cuenta tantas veces según sea su multiplicidad. ■

El interés de este teorema en el proceso de separación de raíces reales, es que hace posible establecer una cota superior del número de estas, pues, evidentemente, del teorema puede extraerse la siguiente consecuencia:

Una ecuación algebraica de grado n tiene como máximo n raíces reales.

Ejemplo 2

Se puede afirmar que la ecuación: $x^5+4x^4-x^3-10x^2-6x-36=0$ tiene a lo más cinco raíces reales, ya que es de quinto grado.

Regla de Descartes

Sea m el número de cambios de signo que se presentan en la sucesión de coeficientes de la ecuación $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$. Entonces el número de raíces positivas de la ecuación es menor o igual que m y tiene su misma paridad.

Para la aplicación de esta sencilla regla, cuya demostración no es nada trivial, los coeficientes nulos no se tienen en cuenta. En el número de raíces, por supuesto, cada una se considera tantas veces como sea su multiplicidad. Obsérvese que la regla de Descartes establece una *cota superior* para la cantidad de raíces *positivas* de una ecuación *algebraica;* no obstante en dos casos particulares se puede llegar a conclusiones precisas: Si $m = 0$ se puede asegurar que no hay raíces positivas y si $m = 1$ se puede asegurar que existe exactamente una raíz positiva.

Ejemplo 3

Aplique la regla de Descartes para analizar el número de raíces positivas de las ecuaciones:

a) $x^4+3x^2-5x+8=0$

b) $x^5-x^4+3x^3-8x^2+x-9=0$

c) $x^5+4x^4-3x^3-10x^2-6x-36=0$

Solución:

a) La sucesión de los coeficientes (los coeficientes nulos, como el de x^3, no se consideran) es:

$$1 \qquad \underbrace{3 \qquad -5}_{\text{cambio}}\!\!\underbrace{\qquad 8}_{\text{cambio}}$$

Como hay $m = 2$ cambios de signo en la sucesión de los coeficientes, el número de raíces positivas tiene que ser menor o igual a 2 y de su misma paridad, es decir, 0 ó 2. En conclusión la ecuación ó tiene 2 raíces positivas ó no tiene raíces positivas. En este caso, la regla de Descartes solo deja estas dos posibilidades.

b) Como hay $m = 5$ cambios de signo en la sucesión de los coeficientes, el número de raíces positivas tiene que ser menor o igual a 5 y de su misma paridad, es decir, impar. La cantidad de raíces positivas será entonces: 5 ó 3 ó 1.

c) Como existe un solo cambio de signo en la sucesión de los coeficientes ($m = 1$) se puede asegurar que la ecuación tiene exactamente una raíz positiva.

La fórmula de Lagrange para acotar raíces

Sea la ecuación $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ con $a_0 > 0$. Si B es el valor absoluto del coeficiente negativo con mayor valor absoluto y a_k es el primer coeficiente negativo contando desde la izquierda, entonces todas las raíces positivas de la ecuación, si existen, son menores que el número

$$R = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}$$

Nótese que el número R da una cota superior de las raíces *positivas* de la ecuación; no dice nada acerca de las negativas. Obsérvese también que el índice k de la raíz se obtiene como el sub índice que le corresponde al primer coeficiente negativo.

Ejemplo 4

Mediante la fórmula de Lagrange, halle una cota superior de las raíces positivas de la ecuación:

$$x^4 + 3x^2 - 5x + 8 = 0$$

Solución:

Los coeficientes de la ecuación son: $a_0 = 1$; $a_1 = 0$; $a_2 = 3$; $a_3 = -5$; $a_4 = 8$

El coeficiente negativo de mayor valor absoluto (en este caso, el único) vale –5, así que $B = 5$. Como el primer coeficiente negativo es a_3 entonces $k = 3$. La fórmula da para R:

$$R = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} = 1 + \sqrt[3]{\frac{5}{1}} = 1 + \sqrt[3]{5} = 2{,}71$$

Puede entonces asegurarse que todas las raíces positivas que tenga la ecuación (que, por la regla de Descartes, son dos o ninguna) están comprendidas en el intervalo [0; 2,71].

Análisis de las raíces negativas de una ecuación algebraica

Las reglas de Descartes y de Lagrange solo se refieren a raíces positivas. Cuando se desee investigar las raíces negativas, bastará cambiar en la ecuación la variable x por $-x$ y analizar las raíces positivas de la nueva ecuación obtenida, ya que, evidentemente, si r es una raíz positiva de la nueva ecuación $f(-x) = 0$ entonces $-r$ es una raíz negativa de la ecuación original $f(x) = 0$.

Ejemplo 5

Analice las raíces reales negativas de las ecuaciones

a) $x^5 + 4x^4 - x^3 - 10x^2 - 6x - 36 = 0$

b) $x^4 + 3x^2 - 5x + 8 = 0$

Solución:

a) Desígnese la ecuación original con (1):

$$x^5 + 4x^4 - x^3 - 10x^2 - 6x - 36 = 0 \qquad (1)$$

Cambiando x por $-x$ se obtiene la nueva ecuación:

$$-x^5 + 4x^4 + x^3 - 10x^2 + 6x - 36 = 0 \qquad (2)$$

o, lo que es igual: $x^5 - 4x^4 - x^3 + 10x^2 - 6x + 36 = 0$

Como se observan cuatro cambios de signo en la sucesión de coeficientes, se puede afirmar que la ecuación (2) tiene cuatro, dos o ninguna raíces positivas. Según el teorema de Lagrange, las mismas están acotadas por:

$$R = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} = 1 + \sqrt[1]{\frac{6}{1}} = 1 + \sqrt[1]{6} = 7$$

De acuerdo con esto, las raíces negativas de la ecuación (1) serán cuatro, dos o ninguna y estarán comprendidas en el intervalo [–7, 0].

b) La ecuación original es: $x^4 + 3x^2 - 5x + 8 = 0 \qquad (3)$

Cambiando x por $-x$ se obtiene: $x^4 + 3x^2 + 5x + 8 = 0 \qquad (4)$

Cuyos coeficiente son todos no negativos. En este caso la regla de Descartes es concluyente: la ecuación (4) no posee raíces positivas. Por lo tanto, la ecuación original (3), no tiene raíces negativas.

Combinando las técnicas

Aunque en las páginas anteriores, algunas de las diversas técnicas de separación de raíces han sido utilizadas en forma aislada para facilitar su comprensión, es claro que combinándolas adecuadamente es como se logra efectuar con mayor seguridad y rapidez la separación de las raíces de una ecuación. En los ejemplos que siguen se ilustran algunas posibilidades en este sentido.

Ejemplo 6

Separe las raíces de la ecuación $x^3 - 9x^2 - 9x + 19 = 0$ en intervalos de amplitud 0,5.

Solución:

Como se trata de una ecuación algebraica de tercer grado, se sabe que el número de raíces reales será como máximo tres. De ellas, las positivas serán, según la regla de Descartes, dos o ninguna. Con esta información resulta fácil aplicar el método gráfico en la computadora para separar las raíces. No obstante, si se conoce una cota superior *R* de las posibles raíces positivas, entonces se simplifica el proceso gráfico pues la búsqueda está limitada al intervalo [0, *R*]. Según la regla de Lagrange:

$$R = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} = 1 + \sqrt[1]{\frac{9}{1}} = 1 + \sqrt[1]{9} = 10$$

Al graficar la función $f(x) = x^3 - 9x^2 - 9x + 19$ en el intervalo [0, 10] se observa la gráfica de la figura 3:

$$f(x) = x^3 - 9x^2 - 9x + 19$$

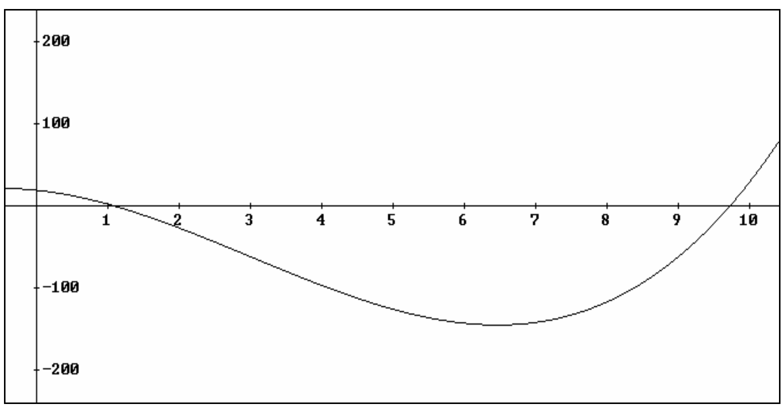

Figura 3

Resulta evidente la presencia de dos raíces positivas, una en el intervalo [1; 1,5] y otra en [9,5; 10]. Una vez separadas las dos raíces reales positivas se sabe que hay una raíz negativa, ya que las raíces imaginarias de las ecuaciones algebraicas con coeficientes reales solo se pueden presentar por pares. Para acotar esta raíz, se obtiene la ecuación resultante de cambiar *x* por *–x*:

$$-x^3 - 9x^2 + 9x + 19 = 0$$

esto es: $$x^3 + 9x^2 - 9x - 19 = 0$$

Aplicando la fórmula de Lagrange: $$R = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} = 1 + \sqrt[2]{\frac{19}{1}} = 1 + \sqrt[2]{19} \approx 5{,}4$$

Por lo tanto, la raíz negativa de la ecuación original se halla en el intervalo [–5,4; 0]. Utilizando el procedimiento gráfico en el intervalo [–6, 0] (figura 4) resulta evidente que la raíz se encuentra en el intervalo [–2; –1,5].

$f(x) = x^3 - 9x^2 - 9x + 19$

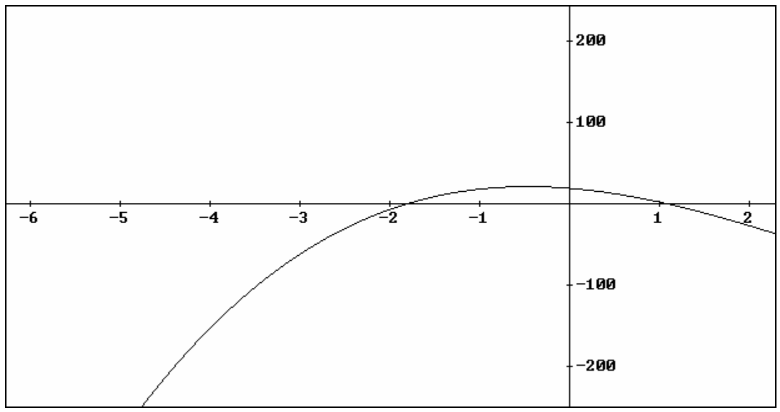

Figura 4

En conclusión, las raíces de la ecuación $x^3 - 9x^2 - 9x + 19 = 0$ son tres, las tres son reales y se encuentran en los intervalos: [–2; –1,5], [1; 1,5] y [9,5; 10].

Ejemplo 7

Separe las raíces de la ecuación $x^2 + 10\cos x = 0$ en intervalos de amplitud 0,5.

Solución:

Nótese primeramente que esta no es una ecuación algebraica y, por tanto, no se pueden aplicar algunas de las herramientas, especificas para ese tipo de ecuaciones, como las reglas de Descartes y de Lagrange. No obstante, siempre se debe auxiliar al método puramente gráfico con un análisis de la ecuación que permita establecer, al menos, cotas groseras de las raíces reales. La función

$$f(x) = x^2 + 10\cos x$$

cuyos ceros se quiere hallar, está formada por la suma de dos funciones pares y es, por tanto, par; luego sus ceros estarán situados simétricamente alrededor de $x = 0$. Basta entonces ocuparse de las raíces positivas. La función x^2 es positiva y crece ilimitadamente en R^+, mientras que 10 cos x solo toma valores entre –10 y 10. Resulta entonces que, una vez que x^2 alcance valores mayores que 10, la función $f(x)$ no puede tener más ceros. La búsqueda puede entonces reducirse al intervalo [0, 4]. En la figura 5 se muestra la gráfica de la función en ese intervalo. Resulta evidente que la ecuación tiene una raíz en cada uno de los intervalos [1,5; 2] y [3; 3,5]. Por la simetría de la función, existen raíces negativas en los intervalos [–3,5; –3] y [–2; –1,5].

$f(x) = x^2 + 10\cos x$

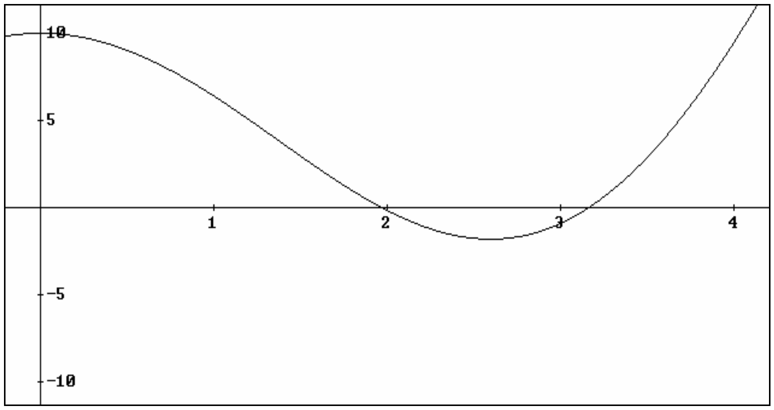

Figura 5

***Ejemplo* 8**

Separe las raíces positivas de la ecuación $\dfrac{1}{x+1} - x^2 + 100x - 100 = 0$

Solución:

Con este ejemplo se pretende ilustrar el peligro de aplicar el método gráfico sin un análisis de la ecuación, que permita asegurar que se han considerado todas las raíces. La gráfica de la función

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - x^2 + 100x - 100$$

en el intervalo [0, 10] se muestra en la figura 6; se observa una raíz en [0,5; 1,5]; se ve además que la función crece rápidamente alcanzando en $x = 10$ un valor mayor que 800. Tomando un intervalo mucho mayor: [0, 40] (figura 7) se observa el mismo comportamiento y $f(x)$ toma ya un valor superior a 2 300 para $x = 40$. Si, a partir de aqui, se concluyera que la ecuación solo posee una raíz positiva, se estaría cometiendo un error. Basta observar la gráfica en un intervalo aun mayor, por ejemplo [0, 120] (figura 8) para comprobar la existencia de una segunda raíz en las proximidades de $x = 100$.

$f(x) = \dfrac{1}{x+1} - x^2 + 100x - 100$

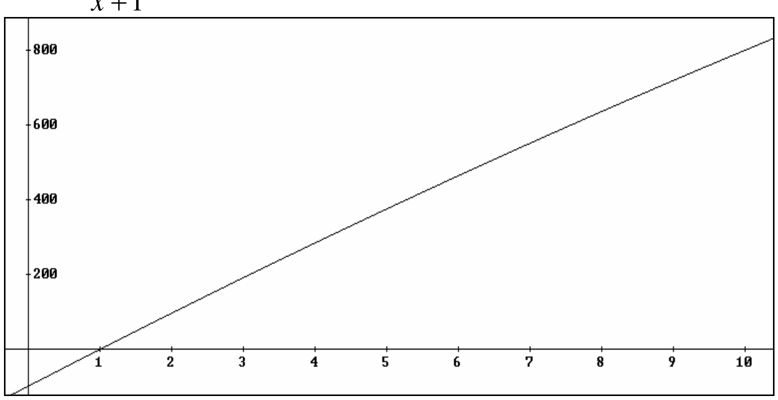

Figura 6

$$f(x)=\frac{1}{x+1}-x^2+100x-100$$

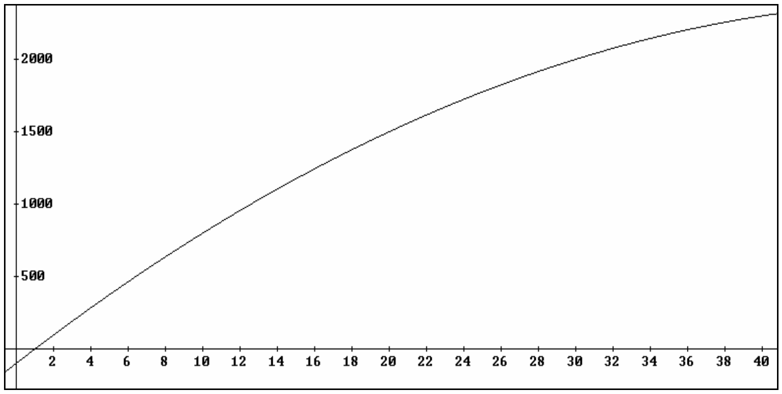

Figura 7

$$f(x)=\frac{1}{x+1}-x^2+100x-100$$

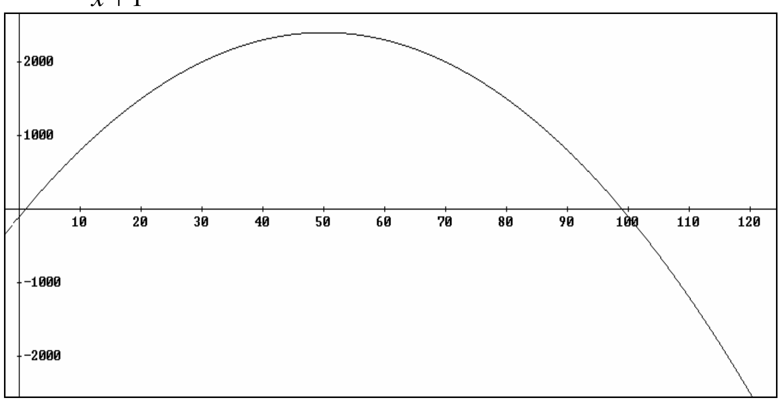

Figura 8

El error se podría haber evitado considerando que

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$$

ya que el término $-x^2$ predomina para x suficientemente grande y, por tanto, la función $f(x)$ tendría que tomar definitivamente los valores negativos.

Ejercicios

En los siguientes ejercicios utilice un programa graficador en la computadora cuando esto sea necesario.

1. Aplique las reglas de Descartes y de Lagrange para acotar el número y la posición de las raíces positivas y negativas de las ecuaciones que siguen. Compruebe sus resultados mediante el método gráfico.

   a) $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 = 0$
   b) $x^4 - 11x^3 + 41x^2 - 60x + 30 = 0$
   c) $x^4 - 3x^3 + 10x^2 - 13x + 5 = 0$
   d) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$
   e) $x^3 + 7x^2 + 14x + 9 = 0$

2. Separe las raíces de las ecuaciones anteriores en intervalos de amplitud 0,5.

3. Separe los ceros, los puntos de extremo y los puntos de inflexión de la función

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) + 1$$

   en intervalos de amplitud 0,3.

4. Separe las raíces de la ecuación $\operatorname{sen} x - \log x = 0$ en intervalos donde la derivada de la función $\operatorname{sen} x - \log x$ no cambie de signo.

5. Separe las raíces de la ecuación $5e^x - 2x - 10 = 0$ en intervalos de amplitud 0,5.

6. Separe las raíces de la ecuación $(x^2 + 1)\cos x = 1$ comprendidos en el intervalo [–10, 10].

7. Dada la función $f(x) = 2 \tanh x - \operatorname{sen} x - 0{,}3$, separe las raíces de la ecuación $f(x) = 0$ en intervalos donde las derivadas primera y segunda de la función $f(x)$ no se anulen.

8. Separe las raíces de la ecuación $x^4 - 4x^2 - 4x - 16 - \ln|x| = 0$ en intervalos de amplitud 0,2.

9. Separe las raíces de la ecuación $e^x \operatorname{sen} x - 2e^x + 3 = 0$ en intervalos de amplitud 0,5.

10. Separe en intervalos de amplitud 0,2 las raíces de la ecuación $x = \tan^2 x$ comprendidas en el intervalo $[0, 2\pi]$.

11. Separe en un intervalo de amplitud 0,2 la mayor raíz de la ecuación $\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = x$.

12. La hipérbola equilátera $xy = 1$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ se cortan en cuatro puntos. Determine intervalos de amplitud 0,1 que contengan las abscisas de esos puntos.

13. Separe las raíces de las ecuaciones $\pm\sqrt{x} = 2\ln x$

2.3 El método de la bisección

Hipótesis

Sea la ecuación $f(x) = 0$ y un intervalo $[a, b]$ tales que:

1. En el intervalo la ecuación tiene una sola raíz $x = r$.
2. $f(x)$ es continua en $[a, b]$
3. $f(x)$ posee signos diferentes en a y en b, es decir, $f(a) \cdot f(b) < 0$

El método

Tal como indica su nombre, el método consiste en aproximar la raíz de la ecuación como el punto medio del intervalo $[a, b]$. Evaluando la función en este punto se decide si la raíz se encuentra en la mitad izquierda del intervalo o en la mitad derecha. De esta manera, una de las dos mitades queda descartada y la amplitud del nuevo intervalo de búsqueda es exactamente un medio de la anterior. A medida que este proceso se repite, el intervalo de búsqueda va disminuyendo en amplitud. Si se conviene en llamar $[a_1, b_1]$ al intervalo inicial, entonces, en la iteración número n del método se tiene:

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

con error absoluto máximo: $$E_m(x_n) = \frac{b_n - a_n}{2} \tag{2}$$

Al evaluar la función $f(x)$ en x_n se selecciona el nuevo intervalo de búsqueda $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ de acuerdo con la siguiente regla:

Si $f(a_n) \cdot f(x_n) < 0$ entonces la raíz se encuentra en $[a_n, x_n]$ y se escoge $a_{n+1} = a_n$ y $b_{n+1} = x_n$

Si $f(x_n) \cdot f(b_n) < 0$ entonces la raíz se encuentra en $[x_n, b_n]$ y se escoge $a_{n+1} = x_n$ y $b_{n+1} = b_n$

Si $f(x_n) \cdot f(b_n) = 0$ entonces x_n es la raíz buscada y no hay que continuar.

En la figura 1 se ilustra gráficamente los primeros pasos del procedimiento. Para poder tener un algoritmo se requieren todavía varias cosas. Primero, hay que probar que este procedimiento converge hacia la raíz r; esto posee importancia teórica y práctica, ya que la convergencia garantiza que la aproximación x_n se acercará a la raíz r tanto como se quiera tomando una n suficientemente grande y eso significa que se podrá obtener una aproximación a r tan buena como se desee. También se necesita un criterio práctico para detener el proceso iterativo, el cual se obtiene a partir del error absoluto máximo en cada aproximación.

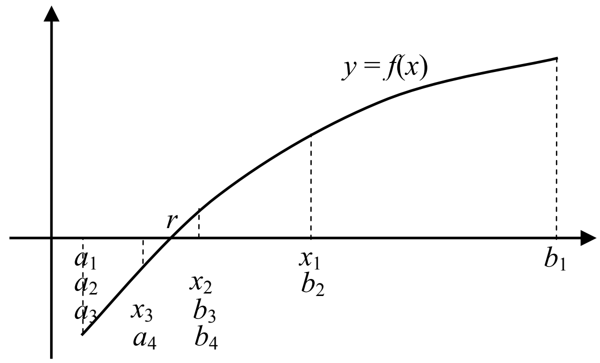

Figura 1

Convergencia del método

Como en cada paso del algoritmo el intervalo de búsqueda se reduce a la mitad, se tiene que:

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} \qquad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Como, según (2) el error absoluto máximo se obtiene mediante: $E_m(x_n) = \dfrac{b_n - a_n}{2}$ resulta:

$$E_m(x_n) = \frac{b_n - a_n}{2} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}\right)$$

Esto es:
$$E_m(x_n) = \tfrac{1}{2} E_m(x_{n-1}) \qquad (3)$$

Aplicando reiteradamente la ecuación (3):

$$E_m(x_n) = \tfrac{1}{2} E_m(x_{n-1}) = \tfrac{1}{4} E_m(x_{n-2}) = \tfrac{1}{8} E_m(x_{n-3}) = \cdots = \frac{E_m(x_1)}{2^{n-1}}$$

y como $E_m(x_1) = \dfrac{b-a}{2}$ resulta:

$$E_m(x_n) = \frac{b-a}{2^n} \qquad (4)$$

Cuando la variable entera n tiende hacia infinito, el miembro de la derecha de la igualdad (4) tiende hacia cero, así que:

$$\lim_{n\to\infty} E_m(x_n) = 0 \qquad (5)$$

Según su definición, el error absoluto máximo de x_n satisface:

$$|r - x_n| \le E_m(x_n)$$

Entonces: $$\lim_{n\to\infty}|r - x_n| = 0$$

y esto significa que $$\lim_{n\to\infty} x_n = r \qquad (6)$$

La conclusión anterior se puede redactar como un teorema:

***Teorema* 1**

Si en el intervalo $[a, b]$ la función $f(x)$ satisface las hipótesis del método de la bisección y las aproximaciones x_n ($n = 1, 2, 3, ...$) son halladas aplicando dicho procedimiento, entonces la sucesión $x_1, x_2, x_3, ...$ converge hacia la solución de la ecuación $f(x)$ en $[a, b]$.

Condición de terminación

Una vez que se tiene una forma de hallar el error absoluto máximo en cada paso de un método iterativo el proceso se puede detener tan pronto como dicho error sea suficientemente pequeño. Para precisar ideas, si el número $\varepsilon > 0$ es la tolerancia con que se necesita la raíz de la ecuación, entonces el proceso iterativo se debe detener cuando $E_m(x_n)$ sea menor o igual que ε. El error absoluto máximo se halla en cada paso mediante la ecuación (2). Entonces la condición de terminación del proceso iterativo será:

> Condición de terminación:
>
> Si se desea obtener la raíz de la ecuación con un error absoluto menor que ε, el método de bisección se llevará a cabo hasta la aproximación x_n para la cual
>
> $$E_m(x_n) = \frac{b_n - a_n}{2} \le \varepsilon$$

En el método de bisección se puede determinar, antes de comenzar, el número de iteraciones que será necesario realizar para alcanzar una cierta precisión; en efecto, de acuerdo con la ecuación (4) se tiene:

$$E_m(x_n) = \frac{b - a}{2^n}$$

Si se desea un error absoluto menor que ε será necesario iterar hasta un n tal que:

$$\frac{b - a}{2^n} \le \varepsilon$$

de donde se puede despejar n: $$\frac{b - a}{\varepsilon} \le 2^n$$

$$n \ln 2 \geq \ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)$$

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} \qquad (7)$$

Esta fórmula resulta un poco complicada para recordar, así que es preferible en cada caso utilizar la fórmula (4) y realizar el razonamiento que condujo a (7). De esta ecuación se aprecia, por otra parte, un hecho muy importante: la cantidad de iteraciones que se requiere en el método de bisección para obtener una raíz con error absoluto menor o igual que ε, solamente depende de ε y de la amplitud ($b - a$) del intervalo inicial pero no de las características de la función $f(x)$. De esto se volverá a hablar más adelante.

Ejemplo 1

Determine cuántas iteraciones del método de bisección se necesitan para obtener con cinco cifras decimales exactas una raíz de una ecuación, si dicha raíz está separada dentro de un intervalo de amplitud menor que 10.

Solución:

Tomando $b - a = 10$ y $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$

la fórmula (7) da: $$n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} = \frac{\ln\left(\frac{10}{0{,}5\cdot 10^{-5}}\right)}{\ln 2} = \frac{\ln(2\cdot 10^{6})}{\ln 2} = 19{,}93157$$

Como se ve, con 20 iteraciones se logra la exactitud deseada.

Algoritmo en seudo código

Se supone que la ecuación a resolver es $f(x) = 0$, que la raíz que se quiere hallar está separada dentro de un intervalo $[a, b]$ en el cual $f(x)$ es continua y que $f(a)\cdot f(b) < 0$. Se suponen conocidas la función $f(x)$, los extremos a y b del intervalo de separación y la tolerancia ε que se permitirá.

repeat

  $x := \frac{a+b}{2}$

  $Error := \frac{b-a}{2}$

  if $f(x) = 0$ **then**

    x es exactamente la raíz buscada

    Terminar

  else

    if $f(a)f(x) < 0$ **then**

      $b := x$

    else

$a := x$

end

end

until Error $\leq \varepsilon$

La raíz buscada es x y su error absoluto máximo es *Error*

Terminar

Comentarios finales

El método de bisección es el más sencillo de los métodos para determinar raíces reales de ecuaciones. Es un método poco eficiente en comparación con los que se verá más adelante, por lo cual no es recomendable si los cálculos (sobre todo, la evaluación de $f(x)$) hay que realizarlos a mano. Con el uso masivo de las computadoras, este problema no posee tanta trascendencia, a menos que se requiera resolver un enorme volumen de ecuaciones como parte de un algoritmo mayor. Por otra parte el método de bisección posee varios atractivos importantes:

- Las condiciones que se requiere para su aplicación son mínimas, de hecho $f(x)$ solo requiere ser continua en el intervalo de separación.
- El algoritmo posee una lógica muy simple y es muy fácil de programar.
- La rapidez de la convergencia es independiente de la función $f(x)$, por lo cual no existen temores de que se presenten casos patológicos, cuestión presente en casi todos los métodos más eficaces.
- La acotación del error es muy simple y segura y es también independiente de las características que posea la función $f(x)$.

Todo lo anterior se puede resumir en una sola frase: No es un método rápido pero es el más robusto de todos los procedimientos para hallar raíces reales de ecuaciones.

Ejemplo 2

Halle, con cuatro cifras decimales exactas, las raíces de la ecuación $e^{-x} = x$

Solución:

Primero es necesario separar las raíces. Si no se dispone de una computadora, lo mejor sería graficar sobre el mismo sistema de ejes las funciones $y = e^{-x}$ y $y = x$, que son muy sencillas, y determinar las abscisas de los puntos en que las graficas se intersecan. Si se dispone de un programa graficador, seguramente es preferible escribir la ecuación como $e^{-x} - x = 0$ y graficar la función $f(x) = e^{-x} - x$. Aquí se utilizará esta variante. Como la exponencial es positiva para toda x, la ecuación solo podrá tener raíces para $x > 0$. Por otra parte, cuando x crece el término e^{-x} tiende hacia cero y, por lo tanto, $f(x)$ se hará negativa; todo esto significa que las raíces de la ecuación serán positivas y próximas a $x = 0$.

En la figura 2 se muestra la gráfica de $f(x)$ en el intervalo [0, 4]. Obviamente solo existe una raíz y se halla en el intervalo [0, 1]. De la gráfica se observa, además, que las hipótesis requeridas se satisfacen:

$f(x) = e^{-x} - x$

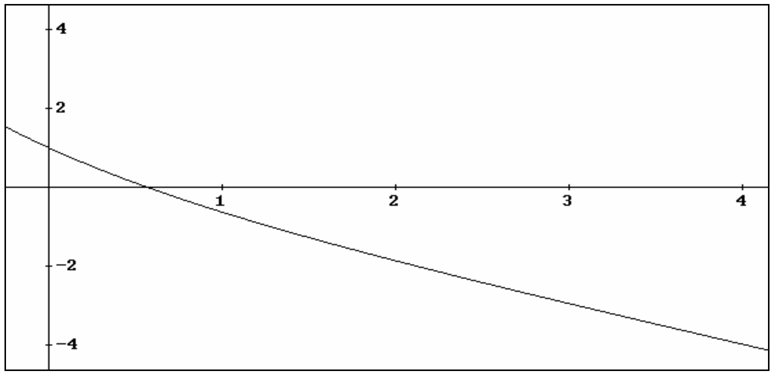

Figura 2

- En [0, 1] la ecuación pose una sola raíz.
- $f(x)$ es continua en [0, 1]
- $f(0)$ y $f(1)$ tienen signos opuestos.

Con un programa confeccionado a partir del algoritmo del método de bisección, se obtienen los resultados que muestra la tabla 1. Se utilizaron los datos: $f(x) = e^{-x} - x$; intervalo inicial: [0, 1]; tolerancia: ε = 0,00005.

Iteración	a	b	x	$E_m(x)$
1	0	1	0,5	0,5
2	0,5	1	0,75	0,25
3	0,5	0,75	0,625	0,125
4	0,5	0,625	0,5625	0,0625
5	0,5625	0,625	0,59375	0,03125
6	0,5625	0,59375	0,578125	0,015625
7	0,5625	0,578125	0,570313	0,007813
8	0,5625	0,570313	0,566406	0,003906
9	0,566406	0,570313	0,568359	0,001953
10	0,566406	0,568359	0,567383	0,000977
11	0,566406	0,567383	0,566895	0,000488
12	0,566895	0,567383	0,567139	0,000244
13	0,567139	0,567383	0,567261	0,000122
14	0,567139	0,567261	0,567200	0,000061
15	0,567139	0,567200	0,567169	0,000031

Tabla 1

Resultado: La única raíz real de la ecuación es 0,567169 con cuatro cifras decimales exactas.

Ejercicios

En todos los ejercicios que siguen se debe utilizar, siempre que se necesite, un programa graficador tanto para separar las raíces como para verificar las hipótesis del método utilizado. También se supone que el algoritmo de bisección se utilice mediante un programa computacional, preferiblemente confeccionado por usted. Si no cuenta con un programa adecuado, realice los cálculos a mano y obtenga las raíces con solo dos o tres cifras decimales exactas.

1. Calcule, con cinco cifras decimales exactas, las raíces reales de las siguientes ecuaciones algebraicas. Posiblemente, ya usted separó las raíces de estas ecuaciones en los ejercicios de la sección 2.2.
   a) $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 = 0$
   b) $x^4 - 11x^3 + 41x^2 - 60x + 30 = 0$
   c) $x^4 - 3x^3 + 10x^2 - 13x + 5 = 0$
   d) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$
   e) $x^3 + 7x^2 + 14x + 9 = 0$

2. Halle los ceros, los puntos de extremo y los puntos de inflexión de la función

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) + 1$$

   con cinco cifras decimales exactas. Es probable que ya usted haya separado las raíces necesarias en los ejercicios de la sección 2.2.

3. Halle, con cinco cifras decimales exactas, las raíces de las siguientes ecuaciones trascendentes. Posiblemente, ya usted separó las raíces de estas ecuaciones en los ejercicios de la sección 2.2.
   a) $\operatorname{sen} x - \log x = 0$
   b) $5e^x - 2x - 10 = 0$
   c) $(x^2 + 1)\cos x = 1; \quad -10 \le x \le 10$
   d) $2 \tanh x - \operatorname{sen} x - 0{,}3 = 0$
   e) $x^4 - 4x^2 - 4x - 16 - \ln|x| = 0$
   f) $e^x \operatorname{sen} x - 2e^x + 3 = 0$
   g) $x = \tan^2 x; \quad 0 \le x \le 2\pi$
   h) $\sqrt{x} = 2\ln x$

4. Halle, con cinco cifras decimales exactas la mayor raíz de la ecuación $\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = x$.

5. Halle, con cinco cifras decimales exactas, los ceros, los puntos de extremo y los puntos de inflexión de la función

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 4x + 1 + \operatorname{sen} x$$

6. Determine, con error menor que 0,0001 los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ y la exponencial $y = e^x$

7. Las curvas $y = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$, $y = x$ y $y = x^2$ forman un triangulo curvilíneo en el primer cuadrante uno de cuyos vértices es (1, 1). Halle, con cuatro cifras decimales exactas los otros dos vértices de cada este triángulo.

8. Dada la función $y = x^x$ halle, con cinco cifras exactas el valor de x para el cual la función toma el valor 2 y el punto de la gráfica que tiene pendiente 2.

9. La figura 2 muestra la gráfica de la función $y = x^2 \operatorname{sen} x$ y la recta L que es tangente a la gráfica en el punto P y la corta en ese punto. Halle la ecuación de L. Realice los cálculos necesarios con cinco cifras decimales exactas.

$f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$

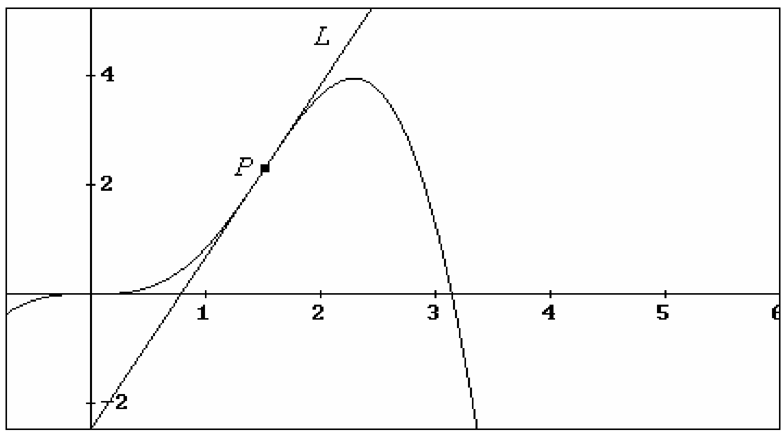

Figura 2

10. Dos escaleras de madera, una de tres metros y otra de cuatro metros de largo, están colocadas contra las paredes de dos edificios que limitan un pasillo, como muestra la figura 3. El punto P en que ambas se cruzan está a 1,5 metros del suelo. Determine el ancho del pasillo con una precisión de 1 milímetro.

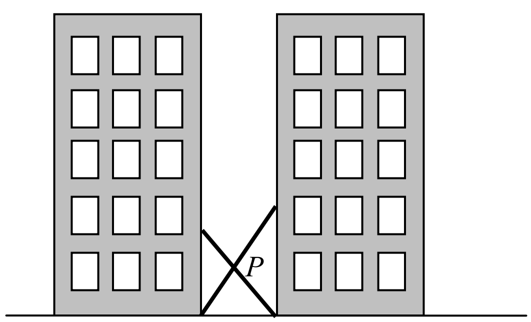

Figura 3

11. La esfera B tiene su radio un centímetro mayor que la esfera A y un centímetro menor que la esfera C. Se sabe que el volumen de la esfera C es igual a la suma de los volúmenes de A y B. Determine el radio de cada esfera con 5 cifras decimales exactas.

12. El algoritmo en seudo código que sigue es una ligera modificación del que se ofreció dentro de la sección; se han suprimido algunas instrucciones. Analice qué sucede con este algoritmo si, casualmente, $f(x)$ se anula en alguna de las aproximaciones que se obtiene durante el proceso.

repeat

$$x := \frac{a+b}{2}$$

$$Error := \frac{b-a}{2}$$

if $f(a)f(x) < 0$ **then**

$b := x$

else

$a := x$

end

until Error ≤ ε

La raíz buscada es x y su error absoluto máximo es *Error*

Terminar

13. Analice qué sucede en el algoritmo de la bisección si no se satisface la hipótesis $f(a)f(b) < 0$.

14. Analice qué sucede con el algoritmo de la bisección si siendo $f(a)f(b) < 0$ la ecuación $f(x) = 0$ no se satisface en el intervalo $[a, b]$ debido a que la función presenta una discontinuidad para $x = c$ en el intervalo $[a, b]$, tal como se muestra en la figura 4.

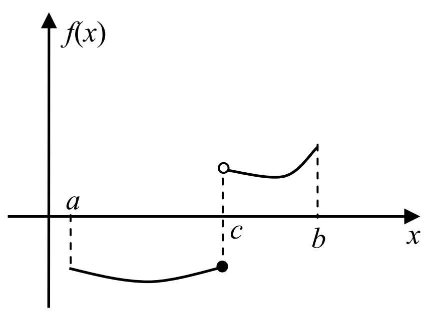

Figura 4

2.4 El método Regula Falsi

En el método de la bisección se aproxima la raíz en cada iteración como el punto medio del intervalo de búsqueda; la lógica de esta opción es que, de esa forma se minimiza el error absoluto máximo. Sin embargo, puede haber otras opciones. Una de ellas es la que sigue el método Regula Falsi: si la raíz se encuentra en el intervalo $[a, b]$ es de suponer que esté más cerca de aquel extremo del intervalo donde la función $f(x)$ tome un valor más cercano a cero. En la figura 1 se muestran dos funciones para las cuales el valor de la función en b es mucho más próximo a cero que el valor en a; en la primera función la raíz se encuentra próxima a b, que es lo esperado, pero en la segunda función, que muestra un comportamiento *extraño*, la raíz se halla más cercana a a.

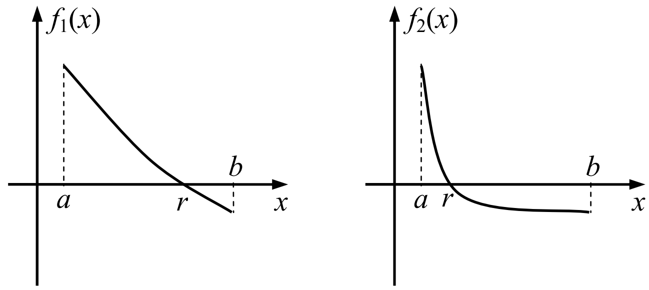

Figura 1

Como se ve, esta lógica no siempre funciona pero, la mayor parte de las veces sí y, en esos casos, se logra en cada iteración una aproximación mejor de la raíz y se llega más rápido a la exactitud deseada.

Hipótesis

Se desea hallar la raíz r de una ecuación $f(x) = 0$ que se encuentra en el intervalo $[a, b]$ y se cumplen las mismas hipótesis que en el método de bisección:

1. En el intervalo la ecuación tiene una sola raíz $x = r$.
2. $f(x)$ es continua en $[a, b]$
3. $f(x)$ posee signos diferentes en a y en b, es decir, $f(a) \cdot f(b) < 0$

El método

El nombre de este método proviene de una frase latina que significa *regla inclinada* y geométricamente consiste en tomar como aproximación de la raíz en el intervalo $[a_n, b_n]$ el punto de intersección con el eje x de un segmento que une los extremos del arco de la gráfica en ese intervalo. Por esta razón, también se le conoce como *método de las cuerdas*. En la figura 2 se muestra esta idea. Como el segmento AB determina con el eje x dos triángulos rectángulos semejantes, se puede establecer la proporcionalidad entre sus lados:

$$\frac{x_n - a_n}{|f(a_n)|} = \frac{b_n - x_n}{|f(b_n)|}$$

Es decir, que la distancia de x a cada extremo del intervalo es proporcional al valor absoluto de la función en ese extremo.

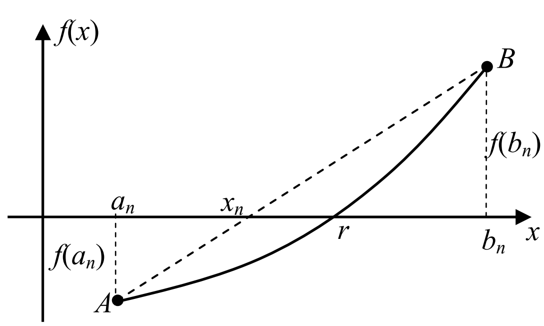

Figura 2

Para determinar el punto x_n se halla la ecuación de la recta que contiene al segmento *AB*:

$$y - f(a_n) = \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}(x - a_n)$$

y como x_n es la abscisa que corresponde a $y = 0$:

$$0 - f(a_n) = \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}(x_n - a_n)$$

Despejando x_n resulta:

$$x_n = a_n - \frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)} f(a_n) \qquad (1)$$

Tal como en el método de bisección, una vez obtenido el valor x_n, se analiza el signo de $f(x_n)$ y de acuerdo con él se determina si la raíz r se encuentra en $[a_n, x_n]$ o en $[x_n, b_n]$ y el proceso se repite sucesivamente.

Convergencia del método

Antes de entrar en demostraciones, es conveniente ver gráficamente como se produce la convergencia en este proceso. En las figuras 3 y 4 se muestran dos de las situaciones más frecuentes: en la primera, $f(x)$ posee segunda derivada positiva (concavidad hacia arriba); en la figura 4 la segunda derivada es negativa (concavidad hacia abajo). Nótese que en ambos casos x_n tiende hacia r pero que, en la figura 3, $b_1 = b_2 = b_3 = \ ...$ mientras a_n tiende hacia la raíz r, pero que en la figura 4, es b_n quien tiende hacia r y el extremo de la izquierda permanece fijo, esto es: $a_1 = a_2 = a_3 = \ ...$

Aunque, excepcionalmente es posible que ambos extremos del intervalo tiendan hacia la raíz, y en ese caso la amplitud del intervalo $[a_n, b_n]$ tendería hacia cero, lo más frecuente es que uno de los extremos permanezca fijo mientras el otro tiende hacia la raíz; en este caso, la longitud del intervalo $[a_n, b_n]$ no tiende hacia cero. Esta es una importante diferencia entre este método y el de la bisección, en el cual ambos extremos del intervalo tienden hacia la raíz y su amplitud, por tanto, tiende hacia cero en cualquier caso.

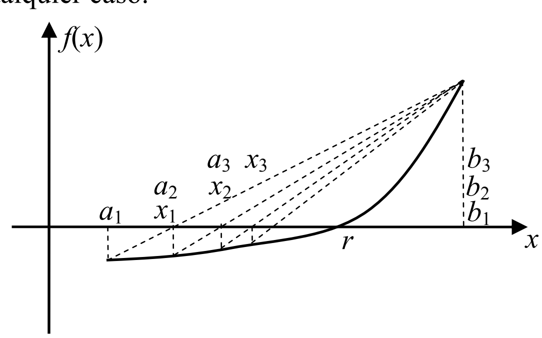

Figura 3

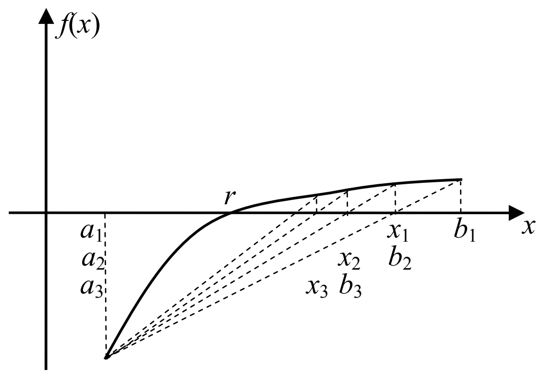

Figura 4

A pesar de que la longitud del intervalo $[a_n, b_n]$ no tiende en general hacia cero, se puede demostrar que, bajo las hipótesis hechas,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = r$$

pero la demostración es muy larga, pues requiere considerar varias posibilidades diferentes. Si se imponen hipótesis más fuertes (que en la práctica generalmente se satisfacen) las demostraciones se simplifican y se obtienen expresiones más útiles. Estas hipótesis adicionales son:

4. $f(x)$ es derivable y $f'(x)$ no cambia de signo en $[a, b]$
5. Existe $f''(x)$ y no cambia de signo en $[a, b]$

Para precisar, considérese el caso en que $f'(x) > 0$ y $f''(x) > 0$ en $[a, b]$, que es el caso que ilustra la figura 3. Para las demás combinaciones de signos, la deducción siguiente se lleva cabo de forma similar.

Como se ve en la figura 3, la sucesión de aproximaciones en este caso satisface que:

$x_n > x_{n-1}$ (x_n es creciente)
$x_n \le r$ (x_n está acotada superiormente)

Por ser creciente y acotada superiormente, la sucesión x_n posee límite. Sea

$$\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Esto prueba que el proceso iterativo es convergente, ahora hay que probar que converge hacia la solución de la ecuación $f(x) = 0$. En efecto, bajo las hipótesis realizadas, el extremo b_n se mantiene fijo en b mientras que $a_n = x_{n-1}$ para todo n. Sustituyendo en la ecuación (1):

$$x_n = x_{n-1} - \frac{b - x_{n-1}}{f(b) - f(x_{n-1})} f(x_{n-1}) \qquad (2)$$

Pasando al límite para $n \to \infty$ y recordando que por ser $f(x)$ continua

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(\bar{x})$$

resulta: $$\bar{x} = \bar{x} - \frac{b-\bar{x}}{f(b)-f(\bar{x})} f(\bar{x})$$

es decir: $$\frac{b-\bar{x}}{f(b)-f(\bar{x})} f(\bar{x}) = 0$$

y esto solamente es posible si $f(\bar{x}) = 0$, o sea si $\bar{x}$ es la raíz de la ecuación.

El error del método

Tan importante o más que el hecho de que el proceso iterativo converge hacia la solución es conocer con qué rapidez lo hace y poseer una estimación del error en cada iteración que permita un criterio práctico acerca de cuándo debe ser detenido el proceso.

Igual que antes, se supone que se cumplen las hipótesis 1, 2, 3, 4 y 5 y se considerará solamente el caso en que $f'(x) > 0$ y $f''(x) > 0$ en $[a, b]$. Otras combinaciones de signos llevan a los mismos resultados. Bajo estas suposiciones se obtuvo la ecuación (2), que se puede escribir:

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{f(x_{n-1})}{f(b)-f(x_{n-1})}(b - x_{n-1})$$

Como $f(r) = 0$, se puede sumar a $f(x_{n-1})$:

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{f(x_{n-1}) - f(r)}{f(b)-f(x_{n-1})}(b - x_{n-1})$$

Aplicando el teorema del valor medio a cada término del cociente:

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{f'(\alpha)(x_{n-1} - r)}{f'(\beta)(b - x_{n-1})}(b - x_{n-1})$$

donde $\alpha \in (x_{n-1}, r)$ y $\beta \in (x_{n-1}, b)$. Simplificando

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{f'(\alpha)}{f'(\beta)}(x_{n-1} - r) \qquad (3)$$

y trasponiendo:

$$f'(\beta)(x_n - x_{n-1}) = f'(\alpha)(r - x_{n-1})$$

Sumando y restando x_n: $$f'(\beta)(x_n - x_{n-1}) = f'(\alpha)(r - x_n + x_n - x_{n-1})$$

Esto es: $$f'(\beta)(x_n - x_{n-1}) = f'(\alpha)(r - x_n) + f'(\alpha)(x_n - x_{n-1})$$

Despejando $r - x_n$: $$r - x_n = \frac{f'(\beta) - f'(\alpha)}{f'(\alpha)}(x_n - x_{n-1}) \qquad (4)$$

y tomando módulos: $$\left|r - x_n\right| = \frac{\left|f'(\beta) - f'(\alpha)\right|}{\left|f'(\alpha)\right|}\left|x_n - x_{n-1}\right| \qquad (5)$$

Sean ahora d y D cotas inferior y superior respectivamente de $\left|f'(x)\right|$ en $[a, b]$, esto es:

$$d \leq \left|f'(x)\right| \leq D \text{ en } [a, b]$$

Entonces la ecuación (5) implica que:

$$\left|r - x_n\right| \leq \frac{D-d}{d}\left|x_n - x_{n-1}\right| \qquad (6)$$

Cuando el intervalo $[a, b]$ se selecciona lo suficientemente pequeño de modo que $\left|f'(x)\right|$ no sufra cambios grandes (esto significa que la gráfica no presenta pendientes muy diferentes) entonces sucede que

$$2d > D \qquad (7)$$

en ese caso: $$\frac{D-d}{d} < \frac{2d-d}{d} = 1$$

y la ecuación (6) se puede escribir: $$\left|r - x_n\right| \leq \left|x_n - x_{n-1}\right|$$

En otras palabras, la diferencia $\left|x_n - x_{n-1}\right|$ puede tomarse como error absoluto máximo de x_n y sirve como condición para terminar el proceso iterativo del método Regula Falsi. Nótese sin embargo, que esta condición está sujeta al cumplimiento de muchas hipótesis y el incumplimiento de cualquiera de ellas la invalida. Para su referencia posterior, es conveniente resumir el desarrollo anterior en un teorema:

***Teorema* 1**

Si $f(x)$ es continua y dos veces derivable en [a, b], $f(x)$ posee en $[a, b]$ una sola raíz siendo $f(a)$ y $f(b)$ de signos opuestos, $f\,'(x)$ y $f\,''(x)$ no cambian de signo en $[a, b]$ y existen números d y D tales que $d \leq \left|f'(x)\right| \leq D$ en $[a, b]$ y se cumple que $2d > D$, entonces el error absoluto máximo de la aproximación x_n obtenida por el método Regula Falsi puede tomarse como:

$$E_m(x_n) = \left|x_n - x_{n-1}\right| \qquad \blacksquare$$

Condición de terminación: Si se desea obtener la raíz de la ecuación con un error absoluto menor que ε y se satisfacen las hipótesis del teorema 1, el método Regula Falsi se llevará a cabo hasta la aproximación x_n para la cual $E_m(x_n) = \left|x_n - x_{n-1}\right| \leq \varepsilon$

Rapidez de la convergencia

Está claro que la mayor complejidad del método Regula Falsi y la necesidad de verificar muchas más hipótesis lo hacen menos atractivo que el método de bisección. Por ello, solo se justifica su uso si se obtiene una velocidad de convergencia mucho mayor que la que logra el método de bisección. La ecuación (3) de la sección anterior caracteriza la forma en que converge el método de bisección:

$$E_m(x_{n+1}) = \tfrac{1}{2} E_m(x_n)$$

Es decir, en cada iteración el error absoluto máximo disminuye a la mitad. Para Regula Falsi una expresión similar se puede obtener de la siguiente forma. Al analizar el error del método se obtuvo la expresión (3):

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{f'(\alpha)}{f'(\beta)}(x_{n-1} - r)$$

de la cual:

$$r - x_{n-1} = \frac{f'(\beta)}{f'(\alpha)}\left(x_n - x_{n-1}\right) \qquad (8)$$

Más adelante, se llegó a la ecuación (4):

$$r - x_n = \frac{f'(\beta) - f'(\alpha)}{f'(\alpha)}(x_n - x_{n-1})$$

Si esta ecuación se divide miembro a miembro por la igualdad (8) resulta:

$$\frac{r - x_n}{r - x_{n-1}} = \frac{f'(\beta) - f'(\alpha)}{f'(\beta)}$$

Esto es, en término de errores:

$$E(x_n) = \left|\frac{f'(\beta) - f'(\alpha)}{f'(\beta)}\right| E(x_{n-1})$$

Teniendo en cuenta que $d \leq \left|f'(x)\right| \leq D$:

$$E(x_n) \leq \frac{D-d}{d} E_m(x_{n-1})$$

Puede entonces tomarse:

$$E_m(x_n) = \frac{D-d}{d} E_m(x_{n-1}) \qquad (9)$$

En el caso en que el término $\frac{D-d}{d}$ es menor que 0,5 el método Regula Falsi presenta una rapidez de convergencia mayor que bisección. Esto sucederá si la diferencia entre la menor pendiente d y la mayor pendiente D de la gráfica de $f(x)$ es pequeña, lo cual en palabras simples significa que en el intervalo $[a, b]$ dicha gráfica presenta poca curvatura. Si por el contrario, el término $\frac{D-d}{d}$ toma valores mayores que 0,5 la convergencia es peor que en bisección y, de hecho, se presentan ecuaciones en las que la convergencia del método es extraordinariamente lenta.

Algoritmo en seudo código

Se supone que la ecuación a resolver es $f(x) = 0$, que la raíz que se quiere hallar está separada dentro de un intervalo $[a, b]$ en el cual $f(x)$ es continua y que $f(a) \cdot f(b) < 0$ y se cumplen las demás hipótesis del teorema 1. Se suponen conocidas la función $f(x)$, los extremos a y b del intervalo de separación y la tolerancia ε que se permitirá.

> $x_{anterior} := 10^6$
> **repeat**
>
> $$x := a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$$
>
> $Error := |x - x_{anterior}|$
> **if** $f(x) = 0$ **then**
> x es exactamente la raíz buscada
> Terminar
> **else**
> **if** $f(a)f(x) < 0$ **then**
> $b := x$
> **else**
> $a := x$
> **end**
> **end**
> $x_{anterior} := x$
> **until** $Error \leq \varepsilon$
> La raíz buscada es x y su error absoluto máximo es *Error*
> Terminar

Nótese que se necesita guardar el valor de la aproximación anterior con vistas a calcular el error. La primera vez que se calcula x, sin embargo, no existe aproximación anterior y por eso se le ha dado un valor grande de modo que el primer error obtenido sea tan grande que el algoritmo no se detenga en la primera iteración.

Comentarios finales

El método Regula Falsi puede considerarse como una codificación del método de bisección para mejorar la velocidad de convergencia. Aunque para que esta se produzca basta con que se cumplan hipótesis muy sencillas, para lograr una buena velocidad se requieren condiciones más fuertes, en particular que la gráfica de la función $f(x)$ presente poca curvatura. En el caso extremo en que la gráfica es lineal, la convergencia se produce en una sola iteración.

La condición de curvatura pequeña en el intervalo de búsqueda siempre puede lograrse reduciendo la amplitud de $[a, b]$, lo cual es muy sencillo si se puede visualizar la gráfica de $f(x)$ en un display. Si la condición $2d > D$ no se puede garantizar, se corre el riesgo no solo de obtener una pobre velocidad de convergencia sino que la fórmula para acotar el error deja de ser válida y da cotas del error que no son ciertas.

El algoritmo es bastante sencillo de programar y difiere del de bisección solamente en algunos detalles.

Ejemplo 1

Halle, con cinco cifras decimales exactas mediante el método Regula Falsi, la mayor raíz positiva de la ecuación:

$$x^4 + x^3 - 8x^2 - 12x - 1 = 0$$

Solución:

Primero se necesita separar la raíz buscada. Como se trata de una ecuación algebraica, es fácil acotar el número y la posición de las raíces. La regla de Descartes asegura que hay solo una raíz positiva, que es precisamente la que se desea hallar. Una cota superior para esa raíz la da la regla de Lagrange:

$$R = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} = 1 + \sqrt{\frac{12}{1}} < 4{,}5$$

La gráfica en un intervalo [0, 5] se muestra en la figura 5. Se aprecia una raíz muy próxima a 3. Para garantizar las condiciones de poca curvatura, se tomará un intervalo de pequeña amplitud que contenga la raíz. En la figura 6 se muestra la gráfica en [2,8; 3,2] donde se puede ver que las hipótesis de continuidad, derivadas y curvatura se satisfacen. En la tabla 1 se muestran los resultados obtenidos con un programa confeccionado a partir del algoritmo en seudo código.

Observe que, utilizando el método de bisección con este mismo intervalo inicial, para obtener cinco cifras decimales exactas, es decir ε = 0,000005 se habría necesitado

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} = \frac{\ln\left(\frac{3{,}2-2{,}8}{0{,}000005}\right)}{\ln 2} = 16{,}29$$

es decir, no menos de 17 iteraciones, en lugar de las 7 que se necesitó con Regula Falsi.

$f(x) = x^4 + x^3 - 8x^2 - 12x - 1$

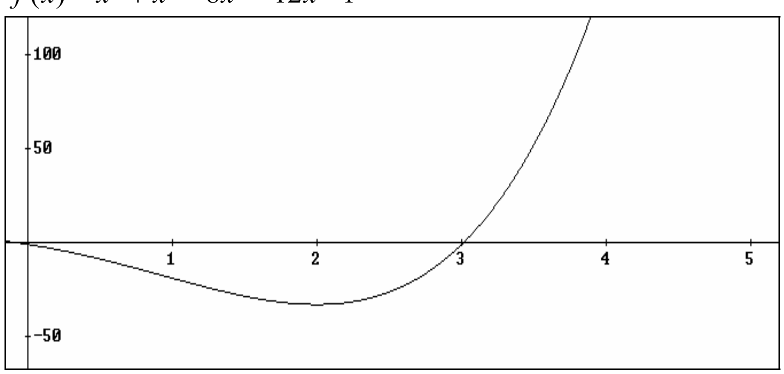

Figura 5

$f(x) = x^4 + x^3 - 8x^2 - 12x - 1$

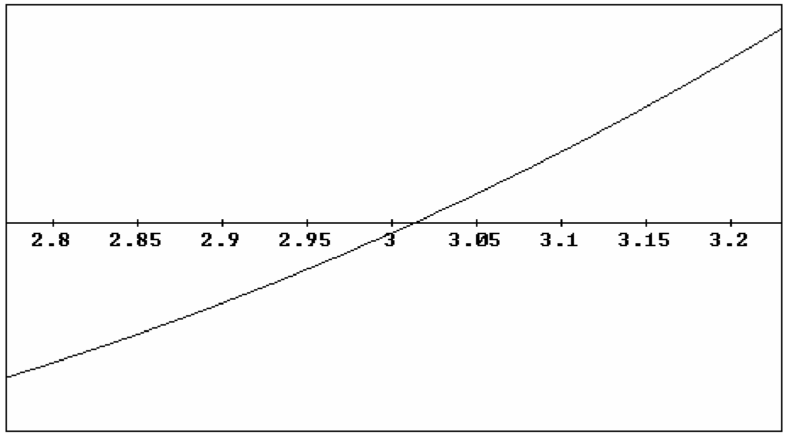

Figura 6

Iteración	a	b	x	$E_m(x)$
1	2,8	3,2	2,984089	
2	2,984089	3,2	3,009546	0,025457
3	3,009546	3,2	3,012750	0,003205
4	3,012750	3,2	3,013149	0,000298
5	3,013149	3,2	3,013198	0,000049
6	3,013198	3,2	3,013204	0,000006
7	3,013204	3,2	3,013205	0,000001

Tabla 1

Resultado: La mayor raíz real de la ecuación es 3,013205 con cinco cifras decimales exactas.

Ejemplo 2

Aplique el método Regula Falsi para resolver la ecuación $\frac{1}{x} = \frac{1}{5}$ con error absoluto menor que 0,005. Tome como intervalo de búsqueda [1,5; 7]. Analice los resultados obtenidos.

Solución:

En el intervalo dado, la función $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{5}$ cambia de signo y es continua y derivable cualquier número de veces. Si se observa la gráfica (figura 7), se aprecia, sin embargo que en este intervalo la pendiente toma valores muy diferentes, lo cual hace prever un pobre comportamiento. En efecto, la tabla 2 muestra los resultados obtenidos.

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{5}$$

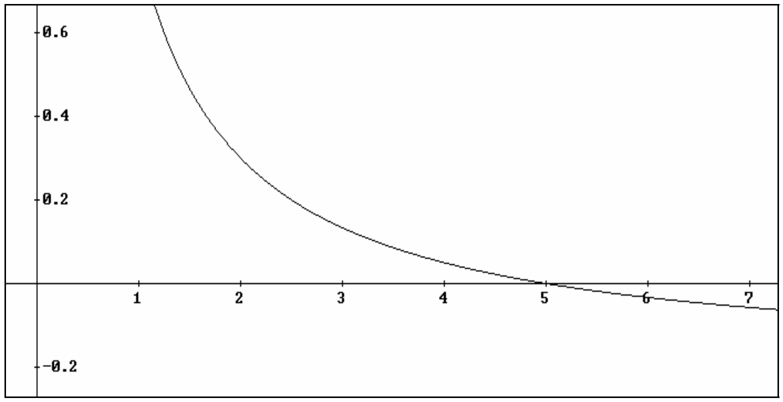

Figura 7

Iteración	a	b	x	$E_m(x)$
1	1,5	7	6,4	
2	1,5	6,4	5,98	0,42
3	1,5	5,98	5,686	0,294
4	1,5	5,686	5,4807	0,2058
5	1,5	5,4807	5,33614	0,14406
6	1,5	5,33614	5,235298	0,100842
7	1,5	5,235298	5,164709	0,070589
8	1,5	5,164709	5,115296	0,049413
9	1,5	5,115296	5,080707	0,034589
10	1,5	5,080707	5,056495	0,024212
11	1,5	5,056495	5,039547	0,016949
12	1,5	5,039547	5,027683	0,011864
13	1,5	5,027683	5,019378	0,008303
14	1,5	5,019378	5,013564	0,005813
15	1,5	5,013564	5,009495	0,004069

Tabla 2

Observe que en 15 iteraciones la aproximación que se obtiene es 5,013564 de la solución exacta, que es x = 5, esto significa un error de 0,013564. Con 15 iteraciones, el método de bisección habría logrado un error:

$$E_m(x_n)=\frac{b-a}{2^n}=\frac{7-1{,}5}{2^{15}}=0{,}000168$$

Por otra parte, las cotas de los errores que se muestran en la tabla 2 no son ciertas. Todo este comportamiento se debe a que la condición $2d > D$ no se satisface en el intervalo escogido. Bajo estas condiciones el método Regula Falsi posee una convergencia muy lenta y la fórmula $E_m(x_n)=|x_n-x_{n-1}|$ para obtener el error, pierde su validez.

Ejercicios

En todos los ejercicios que siguen se debe utilizar, siempre que se necesite, un programa graficador tanto para separar las raíces como para verificar las hipótesis del método utilizado. También se supone que el algoritmo Regula Falsi se utilice mediante un programa computacional, preferiblemente confeccionado por usted. Si no cuenta con un programa adecuado, realice los cálculos a mano y obtenga las raíces con solo dos o tres cifras decimales exactas.

1. Calcule, con cinco cifras decimales exactas, las raíces reales de las siguientes ecuaciones algebraicas. Posiblemente, ya usted separó las raíces de estas ecuaciones en los ejercicios de la sección 2.2 y las resolvió por bisección en los ejercicios de la sección 2.3. Compare la cantidad de iteraciones que necesitó con las que necesitaría el método de bisección.
   a) $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 = 0$
   b) $x^4 - 11x^3 + 41x^2 - 60x + 30 = 0$
   c) $x^4 - 3x^3 + 10x^2 - 13x + 5 = 0$
   d) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$
   e) $x^3 + 7x^2 + 14x + 9 = 0$

2 Utilice el método Regula Falsi para calcular con cinco cifras decimales exactas, las raíces de las siguientes ecuaciones trascendentes. Posiblemente, ya usted separó las raíces de estas ecuaciones en los ejercicios de la sección 2.2 y las resolvió por el método de bisección. En ese caso, compare la cantidad de iteraciones que necesito con cada método.
   a) $\operatorname{sen} x - \log x = 0$
   b) $5e^x - 2x - 10 = 0$
   c) $(x^2 + 1)\cos x = 1; \quad -10 \le x \le 10$
   d) $2 \tanh x - \operatorname{sen} x - 0{,}3 = 0$
   e) $x^4 - 4x^2 - 4x - 16 - \ln|x| = 0$
   f) $e^x \operatorname{sen} x - 2e^x + 3 = 0$
   g) $x = \tan^2 x; \quad 0 \le x \le 2\pi$
   h) $\sqrt{x} = 2\ln x$

3. Aplique el método Regula Falsi para determinar, con cuatro cifras decimales exactas las coordenadas cartesianas del punto del primer cuadrante donde se intersecan la parábola cúbica $y = x^3$ y la conchoide $r = 3 - \cos\theta$.

4. Halle, con error menor que 0,0001 la pendiente de una recta que pasa por el punto (5, 1) y es tangente en el primer cuadrante a la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$. Utilice el método Regula Falsi.

5. El cuadrado de un número positivo menos la raíz cuadrada del número da 1. Determine el número con 4 cifras decimales exactas empleando el método Regula Falsi

6. Halle con cinco cifras decimales exactas el valor de *a* de manera que el área sombreada de la figura 8 tome el valor 2.

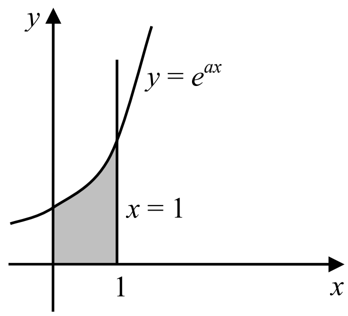

Figura 8

7. Al comienzo de este capítulo se analizó (vea el ejemplo 3 de la sección 2.1) un problema en que se requería hallar la ecuación de un cable colgante conociendo las coordenadas de dos de sus puntos. Se llegó a la siguiente ecuación cuya solución fue pospuesta:

$$a\cosh\frac{10}{a} - a = 2$$

Halle mediante Regula Falsi la raíz positiva de esta ecuación con error menor que 10^{-4}.

8. La ecuación $x\tan x = 1$ tiene una sola raíz en el intervalo [0,5; 1,4]. Aplique el método Regula Falsi (utilice este intervalo) para hallar esta raíz con cuatro cifras decimales exactas. Calcule cuántas iteraciones del método de Bisección se necesitarían para resolver el mismo problema. Explique.

9. A continuación aparece un algoritmo en seudo código que es una modificación del algoritmo Regula Falsi que se mostró en esta sección. Se ha tomado como cota del error la longitud del intervalo [a, b], lo cual es cierto; sin embargo este algoritmo no funciona. Explique por qué.

repeat

$$x := a - \frac{b-a}{f(b) - f(a)} f(a)$$

Error := $b - a$
if $f(x) = 0$ **then**
x es exactamente la raíz buscada
Terminar
else
if $f(a)f(x) < 0$ **then**
$b := x$
else
$a := x$
end
end
until Error ≤ ε
La raíz buscada es x y su error absoluto máximo es *Error*
Terminar.

10. En el algoritmo Regula Falsi se utiliza la fórmula $x := a - \dfrac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$. ¿La presencia de la diferencia $f(b) - f(a)$ puede provocar pérdida de significación si $f(a)$ y $f(b)$ son números muy parecidos? Explique.

11. En el algoritmo Regula Falsi usado en esta sección no se prestó atención a la cantidad de veces que debe ser evaluada la función $f(x)$ en cada iteración. Observe que en la fórmula $x := a - \dfrac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$ se requieren 3 evaluaciones y otras 2 para analizar si $f(a)f(x) < 0$. Perfeccione el algoritmo en seudo código de manera que en cada iteración solo haya que evaluar $f(x)$ una vez.

2.5 El método de Newton – Raphson

Los dos algoritmos para resolver ecuaciones vistos hasta aquí tienen en común el hecho de que se trata de métodos de intervalos. En ellos se comienza con un intervalo de búsqueda y todo el proceso ocurre dentro de este intervalo. Los métodos que ahora se estudiarán son métodos de puntos, no de intervalos. Todos estos métodos funcionan de manera similar: se tiene una aproximación inicial x_0 de la raíz de la ecuación y, mediante un proceso más o menos simple, se obtiene otra aproximación x_1; este mismo proceso aplicado sobre x_1 da lugar a la aproximación x_2 y sucesivamente, se obtienen los elementos de una sucesión de aproximaciones. Bajo ciertas condiciones, esta sucesión converge hacia la raíz buscada.

Antes de pasar al método de Newton – Raphson, es conveniente analizar algunos aspectos generales de los procesos de este tipo.

El método iterativo en general

Los métodos iterativos de punto, o más brevemente, iterativos, pueden representarse así:

$$\begin{aligned} &x_0 \text{ es conocido} \\ &x_n = g(x_{n-1}) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned} \qquad (1)$$

Es fácil demostrar que, si g es continua y la sucesión x_n generada de esta forma posee un límite finito $\bar{x}$ entonces este límite es una raíz de la ecuación $x = g(x)$. En efecto, tomando límites en ambos miembros de (1):

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} g(x_{n-1})$$

Como g es continua: $$\lim_{n\to\infty} x_n = g(\lim_{n\to\infty} x_{n-1})$$

Como ambos límites existen y valen $\bar{x}$:

$$\bar{x} = g(\bar{x})$$

lo cual significa que $\bar{x}$ es solución de la ecuación $x = g(x)$.

La idea anterior es realmente muy sugestiva: si se quiere hallar una raíz de la ecuación $f(x) = 0$, bastaría escribirla de la forma $x = g(x)$ (lo cual siempre es posible y de muchas formas) y definir un proceso iterativo del tipo (1) a partir de un cierto valor x_0 inicial; si la sucesión así generada converge hacia un límite finito, ese límite es una solución de la ecuación original.

***Ejemplo* 1**

Intente resolver las siguientes ecuaciones definiendo el proceso iterativo que resulta de escribir la ecuación como se indica y tomar la aproximación inicial dada

a) $\cos x - x = 0$ escrita como: $x = \cos x$ tomando $x_0 = 0$

b) $x^2 = 2$ mediante: $x = \dfrac{2}{x}$ tomando $x_0 = 1$

c) $x^2 = 2$ mediante: $x = \dfrac{x + \frac{2}{x}}{2}$ tomando $x_0 = 1$

Solución:

a) Se escoge $x_0 = 0$ y $x_n = \cos x_{n-1}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Se obtienen sucesivamente los valores:

$x_0 = 0{,}0000$; $x_1 = 1{,}0000$; $x_2 = 0{,}5403$; $x_3 = 0{,}8576$; $x_4 = 0{,}6543$; $x_5 = 0{,}7935$; ... $x_{15} = 0{,}7401$;

$x_{16} = 0{,}7384$; $x_{17} = 0{,}7396$; $x_{18} = 0{,}7388$; ... $x_{25} = 0{,}739106$; $x_{26} = 0{,}739071$; ...

Se observa que la sucesión converge hacia un límite cuyas primeras cifras son 0,7390. Después de 45 iteraciones la convergencia se hace evidente:

$x_{45} = 0{,}739085140$; $x_{46} = 0{,}739085126$; $x_{47} = 0{,}739085130$ ...

Con seis cifras decimales exactas, el límite de la sucesión es $\bar{x} = 0{,}739085$. Esta es una solución de la ecuación $\cos x - x = 0$ con seis cifras decimales exactas.

b) Se escoge $x_0 = 1$ y $x_n = \dfrac{2}{x_{n-1}}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Se obtienen los valores:

$x_0 = 1$; $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 1$; $x_5 = 2$; ...

Evidentemente, en este caso la sucesión obtenida no converge hacia ningún límite.

c) Observe primero que la ecuación $x = \dfrac{x + \frac{2}{x}}{2}$ se obtiene de $x^2 = 2$ por transformaciones de equivalencia. Partiendo de $\qquad x^2 = 2$

Se divide por $x \neq 0$: $\qquad x = \dfrac{2}{x}$

Sumando x a cada miembro: $\qquad 2x = x + \dfrac{2}{x}$

y dividiendo por 2: $x = \dfrac{x + \dfrac{2}{x}}{2}$

Para obtener la sucesión se hace: $x_0 = 1$ y $x_n = \dfrac{x_{n-1} + \dfrac{2}{x_{n-1}}}{2}$ para $n = 1, 2, 3,...$

Se obtienen sucesivamente los valores: $x_0 = 1$; $x_1 = 1{,}5$; $x_2 = 1{,}416666666$; $x_3 = 1{,}414215686$; $x_4 = 1{,}414213562$; $x_5 = 1{,}414213562$ ...

Como se observa, después de la cuarta aproximación, las primeras 9 cifras decimales se mantienen fijas. Se ha obtenido una solución de la ecuación $x^2 = 2$ con una gran exactitud en muy pocos pasos. ■

Del ejemplo anterior se puede concluir varias cosas:

- El proceso iterativo a veces converge y otras no. Incluso una misma ecuación puede generar un proceso convergente o divergente.
- Cuando el proceso iterativo converge puede hacerlo lentamente, como en el inciso a) o rápidamente como en el c).
- Si la ecuación original tiene más de una raíz (como en el inciso c) y el proceso iterativo converge lo hace hacia una de las raíces, las otras no se obtienen.

Evidentemente, se necesita investigar varios aspectos: ¿Por que unas veces el proceso converge y otras no? ¿De qué depende la rapidez de convergencia? ¿Cómo saber a que raíz convergerá el proceso? Todas estas preguntas las responde un solo teorema:

***Teorema* 1**

Sea r una raíz de la ecuación $x = g(x)$ e I un entorno de r en el cual g y g' son continuas y se cumple que, para alguna constante $K < 1$, $|g'(x)| \le K$ para todo x de I. Entonces, la sucesión generada por el proceso iterativo:

$$x_0 \in I\,; \quad x_n = g(x_{n-1}) \text{ para } n = 1, 2, 3, ...$$

converge hacia r, es decir: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = r$

Demostración:

Como r es una raíz de $x = g(x)$, se cumplirá que $r = g(r)$. Si esta igualdad se resta miembro a miembro de $x_n = g(x_{n-1})$ se obtiene:

$$x_n - r = g(x_{n-1}) - g(r) \qquad (2)$$

Primero se utilizará el principio de inducción completa para probar que todos los x_n están en el entorno I. La aproximación inicial cumple la condición por hipótesis. Supóngase ahora que $x_{n-1} \in I$. Como $r \in I$ (ya que I es un entorno de r), entonces la función g es continua y derivable en el intervalo que determinen x_{n-1} y r. Bajo estas condiciones, se puede aplicar el teorema del valor medio en el miembro derecho de la ecuación (2) y resulta:

$$x_n - r = g'(c)(x_{n-1} - r) \qquad (3)$$

para algún c entre x_{n-1} y r. Puede entonces afirmarse que $c \in I$ y, por tanto, se cumple que

$$|g'(c)| \leq K < 1$$

Tomando módulos en (3) y sustituyendo $|g'(c)|$ por K:

$$|x_n - r| \leq K|x_{n-1} - r| \qquad (4)$$

Como $K < 1$:

$$|x_n - r| < |x_{n-1} - r|$$

Esto indica que la distancia entre x_n y r es menor que la que hay entre x_{n-1} y r. Como $x_{n-1} \in I$ entonces, con más razón $x_n \in I$. Esto demuestra que, para todo n, $x_n \in I$.

Ahora se demuestra que la sucesión converge hacia r. Para ello observe que, por estar en I todos los términos x_n, la ecuación (4) es válida para todo n:

$$|x_n - r| \leq K|x_{n-1} - r| \qquad \text{Para } n = 1, 2, 3,...$$

Esta ecuación se puede escribir en términos de errores absolutos:

$$E(x_n) \leq KE(x_{n-1}) \qquad \text{Para } n = 1, 2, 3,... \qquad (5)$$

o también:

$$E_m(x_n) = KE_m(x_{n-1}) \qquad \text{Para } n = 1, 2, 3,... \qquad (6)$$

Aplicando la ecuación (5) n veces se tiene:

$$E(x_n) \leq KE(x_{n-1}) \leq K^2E(x_{n-2}) \leq \cdots \leq K^nE(x_0)$$

Esto es:

$$E(x_n) \leq K^nE(x_0)$$

Cuando n tiende hacia infinito, el término de la derecha tiende hacia cero por ser $K < 1$ y se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} E(x_n) = 0$$

es decir:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = r$$

como se quería probar. ■

Como parte de la demostración, queda aclarado el problema de la velocidad de convergencia. En la ecuación (6) se muestra que el error absoluto máximo en cada paso se reduce a K veces el error absoluto máximo del paso anterior. Como K es una cota superior de $|g'(x)|$ resulta claro que, si la derivada de $g(x)$ es pequeña en valor absoluto en un entorno de r, se puede acotar con una K

pequeña y la rapidez de convergencia será alta. Por el contrario valores de $|g'(x)|$ próximos a 1 en las cercanías de *r* significarán una velocidad de convergencia baja.

Ejemplo 2

Analice los valores que toman las derivadas de las funciones *g*(*x*) del ejemplo 1 en un entorno de la raíz de la ecuación y verifique el cumplimiento del teorema 1.

Solución:

a*)* $g(x) = \cos x$, así que $g'(x) = -\operatorname{sen} x$. Como la raíz está muy próxima a 0,74, se tiene que:

$$|g'(r)| \approx |\operatorname{sen}(0{,}74)| = 0{,}674$$

Es de suponer que en un entorno de *r* los valores de *K* sean de este orden, es decir, números próximos a 1. Esto explica la convergencia lenta del proceso iterativo del inciso a) .

b) $g(x) = \dfrac{2}{x}$. La derivada es: $g'(x) = -\dfrac{2}{x^2}$. En la raíz de la ecuación $r = \sqrt{2}$, se tiene $g'(r) = -1$. En cualquier entorno de esta raíz, la derivada tomará valores absolutos mayores que 1, por lo cual no se pueden satisfacer las condiciones del teorema de convergencia. Como el teorema solo da condiciones suficientes para la convergencia (no necesarias), esto no asegura la divergencia del proceso pero no permite asegurar la convergencia.

c) $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}$. Derivando: $g'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x^2}$

En la raíz $r = \sqrt{2}$ de la ecuación se tiene: $g'(r) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$. Esto asegura valores muy próximos a cero de $g'(x)$ en un entorno de la raíz y esto determina una alta velocidad de convergencia, como se vio en el ejemplo 1 c). ■

El método iterativo general es muy importante desde un punto de vista teórico pero su utilización práctica es limitada debido a que la manera en que la ecuación *f*(*x*) = 0 se transforma en *x* = *g*(*x*) decide si se obtendrá un buen algoritmo iterativo o si será uno de convergencia lenta o incluso divergente. Claro que siempre se podría probar varias alternativas y, con el análisis de la derivada, tomar alguna que garantice una convergencia rápida. A menos que se trate de una ecuación que deba ser resuelta muchas veces para diferentes valores de algunos parámetros, no vale la pena emplear tanto tiempo en un análisis complicado cuando existen otros procedimientos numéricos más sencillos para determinar raíces.

El método de Newton – Raphson

Este importante método numérico puede concebirse como una forma sistemática de aplicar el método iterativo de manera que se obtenga una rápida convergencia.

Considérese la ecuación $\qquad f(x) = 0$

cuya raíz r se desea hallar. La función $f(x)$ se supone derivable todas las veces necesarias en las proximidades de r. Si la ecuación se multiplica por una constante $A \neq 0$ y se suma x en cada miembro, se obtiene la ecuación equivalente:

$$x = x + Af(x) \qquad (7)$$

La ecuación se ha escrito de la forma $x = g(x)$, donde $g(x) = x + Af(x)$
La idea es hallar un valor de A tal que la derivada de $g(x)$ sea muy pequeña en valor absoluto en las proximidades de r. Derivando se obtiene:

$$g'(x) = 1 + Af'(x)$$

para $x = r$ se tiene: $\quad g'(r) = 1 + Af'(r)$

A menos que $f'(r)$ se anule, se puede seleccionar un valor de A para el cual sea $g'(r) = 0$. En efecto:

$$g'(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + Af'(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = -\frac{1}{f'(r)} \qquad \text{donde } f'(r) \neq 0$$

La ecuación (7) quedaría entonces como: $\quad x = x - \dfrac{f(x)}{f'(r)}$

la cual define el proceso iterativo: $\quad x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(r)} \qquad (8)$

el cual posee una velocidad de convergencia muy alta, debido a que los valores de la derivada de $g(x)$ en un entorno de r son muy próximos a cero. El tamaño del entorno estaría limitado por la proximidad de x_0 a r.

El proceso iterativo (8), teóricamente impecable, presenta una dificultad práctica muy importante. Se supone conocida la raíz r que es precisamente lo que se desea hallar. Si en lugar de evaluar la derivada en r se evalúa en x_{n-1}, que es la mejor aproximación que se tiene para r, se obtiene un proceso iterativo quizás no tan rápido como (8) pero que si resulta aplicable:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \qquad (9)$$

Este algoritmo recibe el nombre de método de Newton – Raphson y es posiblemente uno de los más importantes de toda la Matemática Numérica por la cantidad de aplicaciones directas y la gran cantidad de generalizaciones, modificaciones y aplicaciones que se han hecho de él.

Desde ahora se puede ver que la selección de x_0 será muy importante para determinar la convergencia del algoritmo a la raíz deseada con una velocidad alta. Este asunto será tratado posteriormente con más detalle.

Interpretación geométrica

Sea $f(x) = 0$ la ecuación cuya raíz r se desea hallar. En la figura 1 se muestra la gráfica de la función $y = f(x)$ donde r es el intercepto con el eje x. Se supone que x_{n-1} es un valor de x próximo a r. Este valor determina un punto sobre la gráfica, cuyas coordenadas son $(x_{n-1},\ f(x_{n-1}))$ y que en la figura se denota por P_{n-1}. Por ese punto se ha trazado una recta L tangente a la gráfica cuya pendiente es $f'(x_{n-1})$. La ecuación de L es:

$$y - f(x_{n-1}) = f'(x_{n-1})(x - x_{n-1})$$

haciendo $y = 0$ se obtiene el intercepto de L con el eje x:

$$x = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Como el intercepto es el mismo valor de x_n que brinda el método de Newton – Raphson, resulta la interpretación geométrica que se muestra en la figura 1: el algoritmo consiste en tomar como aproximación x_n el intercepto con el eje x de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto que determina x_{n-1}; una vez obtenido x_n se determina una nueva recta tangente cuyo intercepto es x_{n+1} y el proceso continúa de tal manera que las aproximaciones sucesivas convergen rápidamente hacia r.

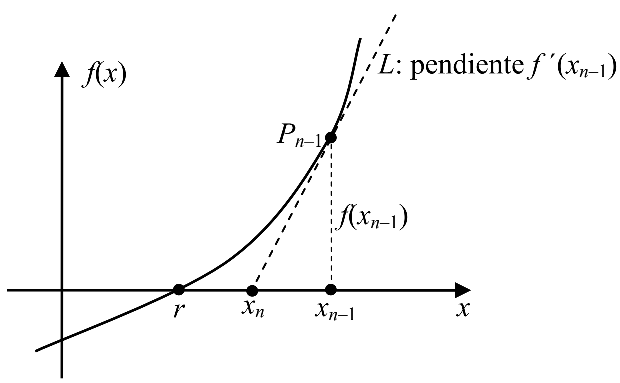

Figura 1

Convergencia del método de Newton – Raphson

Antes de pasar a enunciar y demostrar el teorema correspondiente, es útil ver, desde un punto de vista geométrico algunas situaciones en las que la convergencia del proceso iterativo no se produciría.

En la figura 2 se observa como la presencia en las cercanías de r de un punto donde la derivada se anula y cambia de signo puede provocar o bien la aparición de una tangente horizontal, que no cortará al eje x (y provocará en el algoritmo una división por cero) o de una aproximación x_n muy alejada de la raíz y donde incluso podría no estar definida la función $f(x)$.

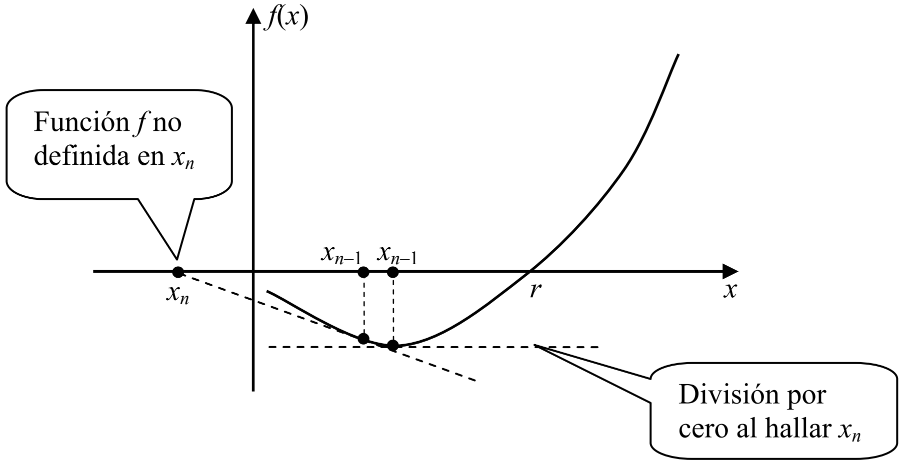

Figura 2

En la figura 3 se ilustra lo que puede suceder si en las cercanías de la raíz existe algún punto donde la segunda derivada cambia de signo (punto de inflexión). Nótese como al tomar x_{n-1} como P se obtiene $x_n = Q$ y viceversa, tomando Q como una aproximación se obtiene P como la siguiente. De esta manera, la sucesión de aproximaciones sería ... P, Q, P, Q, P, Q,... indefinidamente.

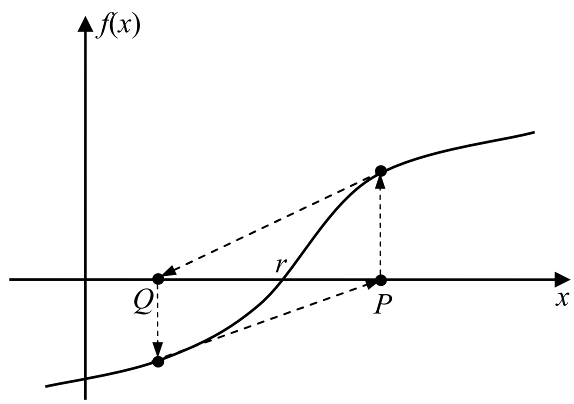

Figura 3

Por último, la figura 4 indica la importancia de seleccionar acertadamente la aproximación inicial x_0; véase cómo para esta ecuación al tomar como x_0 el punto a se obtiene como x_1 un punto muy alejado de la raíz r, en el que $f(x)$ puede no estar definida o no cumplir las condiciones necesarias para que el algoritmo converja. Sin embargo, al seleccionar x_0 como el punto b se asegura una convergencia rápida hacia la raíz r.

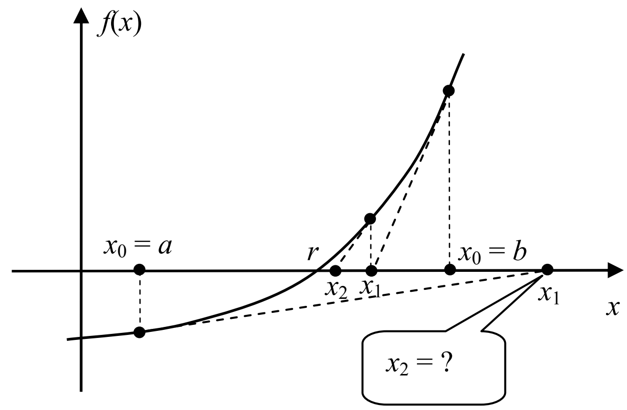

Figura 4

Teorema 2

Sea r la única raíz de $f(x) = 0$ en $[a, b]$. Sean $f'(x)$ y $f''(x)$ continuas y no nulas en $[a, b]$. Sea x_0 un elemento de $[a, b]$ tal que $f(x_0)f''(x_0) > 0$. Entonces, si

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

se cumple que $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = r$.

Demostración:

Como las derivadas son funciones continuas que no se anulan en $[a, b]$, entonces ellas no pueden cambiar su signo en ese intervalo. La demostración que sigue debe considerar las cuatro combinaciones posibles de signo para f' y f". Por razones de espacio solo se verá el caso en que ambas derivadas son positivas; las otras tres combinaciones se llevan a cabo de manera similar. Se supone entonces en todo lo que sigue que en $[a, b]$ $f'(x) > 0$ y $f''(x) > 0$, que es un caso como el que muestra la figura 4.

Está claro que por ser $f'(x) > 0$, $f(x)$ es creciente en $[a, b]$, así que tiene signos distintos a uno y otro lados de r. Por otra parte, como $f''(x)$ mantiene un solo signo, existirán muchos puntos (en este caso todos los que se encuentran a la derecha de r) donde se cumple que $f(x)f''(x) > 0$. Esto significa que es posible seleccionar x_0 de manera que satisfaga $f(x_0)f''(x_0) > 0$, basta con que se tome $x_0 > r$. A continuación se demuestra que, si es así, entonces $x_n > r$ para todo n. Se utilizará el principio de inducción completa. La propiedad se cumple para $n = 0$. Partiendo de que se cumpla para algún n entonces, utilizando el polinomio de Taylor de primer grado alrededor de x_n con resto de Lagrange, se puede escribir:

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_n)^2$$

donde c se encuentra entre x y x_n. En particular, para $x = r$, se tiene que:

$$f(r) = 0 = f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) + \frac{f''(c)}{2!}(r - x_n)^2 \qquad (10)$$

Como el sumando $\frac{f''(c)}{2!}(r - x_n)^2$ es positivo y la suma es cero,

$$f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) < 0$$

despejando r (recuérdese que se ha supuesto la derivada positiva) se tiene:

$$r < x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Pero el miembro de la derecha de esta desigualdad es x_{n+1}, así que se ha llegado a

$$x_{n+1} > r$$

Es decir, que si $x_n > r$ entonces también se cumple $x_{n+1} > r$ y como $x_0 > r$ se tiene que, para todos los valores de n, es $x_n > r$. Esto significa que la sucesión de las x_n esta acotada inferiormente. Ahora se demostrará que es una sucesión decreciente. En efecto, como

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \qquad (11)$$

y $x_{n-1} > r$, entonces $f(x_{n-1}) > 0$; por otra parte $f'(x_{n-1}) > 0$ porque se ha supuesto $f'(x) > 0$ en todo el intervalo $[a, b]$. Por estas razones se tiene:

$$\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} > 0$$

y ello significa que $x_n < x_{n-1}$ para $n = 1, 2, 3,...$ Es decir, la sucesión es decreciente.

Como se trata de una sucesión decreciente y acotada inferiormente es obligatoriamente convergente. Sea entonces:

$$\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Ahora hay que probar que este valor límite es la raíz buscada. En efecto, aplicando límite en cada término de la igualdad (11) y teniendo en cuenta la continuidad de las funciones que en ella aparecen, se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n-1} - \frac{\lim_{n\to\infty} f(x_{n-1})}{\lim_{n\to\infty} f'(x_{n-1})} = \lim_{n\to\infty} x_{n-1} - \frac{f(\lim_{n\to\infty} x_{n-1})}{f'(\lim_{n\to\infty} x_{n-1})}$$

Esto es:

$$\bar{x} = \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$$

De donde $f(\bar{x}) = 0$, lo cual significa que el valor límite es la raíz buscada. Esto prueba el teorema. ∎

El error en el Método de Newton – Raphson

Al tratar del error, serán abordados dos aspectos: con qué rapidez tiende este error hacia cero y como se puede hallar en cada paso una cota del error absoluto que permita detener el proceso iterativo en el momento adecuado. En ambos se requiere plantear el polinomio de Taylor de primer grado con resto de Lagrange alrededor de x_{n-1}:

$$f(x) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x - x_{n-1}) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_{n-1})^2 \qquad (12)$$

donde c es un número entre x y x_{n-1}

Si en esta expresión hacemos $x = r$, como $f(r) = 0$, se obtiene:

$$0 = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(r - x_{n-1}) + \frac{f''(c)}{2!}(r - x_{n-1})^2$$

Dividiendo en cada término por $f'(x_{n-1})$ se llega a:

$$0 = \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} + (r - x_{n-1}) + \frac{1}{2}\frac{f''(c)}{f'(x_{n-1})}(r - x_{n-1})^2$$

Agrupando de otra forma: $$r - \left[x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}\right] = -\frac{1}{2}\frac{f''(c)}{f'(x_{n-1})}(r - x_{n-1})^2$$

Nótese que la expresión entre corchetes es x_n, por tanto resulta:

$$r - x_n = -\frac{1}{2}\frac{f''(c)}{f'(x_{n-1})}(r - x_{n-1})^2$$

Tomando módulos en ambos miembros esta igualdad se puede expresar en términos de errores absolutos:

$$E(x_n) = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(c)}{f'(x_{n-1})}\right|\left[E(x_{n-1})\right]^2$$

Una expresión mucho más interesante se obtiene si se llama:

M : una cota superior de $|f''(x)|$ para x en $[a, b]$

d: una cota inferior de $|f'(x)|$ para x en $[a, b]$

Resulta: $$E(x_n) \le \frac{M}{2d}\left[E(x_{n-1})\right]^2$$

O, en términos de errores absolutos máximos:

$$E_m(x_n) = \frac{M}{2d}\left[E_m(x_{n-1})\right]^2$$

Si se compara esta expresión con las similares obtenidas para los métodos de bisección y Regula Falsi se verá que en aquellos el error absoluto máximo de una iteración era igual a una parte (menor que 1) del error absoluto máximo de la aproximación anterior; es decir, eran expresiones del tipo:

$$E_m(x_n) = k \cdot E_m(x_{n-1})$$

Para el método de Newton – Raphson, el error en x_{n-1} aparece al cuadrado y esto posee una gran importancia. Por ejemplo, esto implica que si en la iteración $n-1$, el error es del orden de 0,001, entonces en la iteración siguiente será del orden de $(0{,}001)^2 = 0{,}000001$, lo cual significa que en este método, una vez que el error ha alcanzado valores pequeños, con cada nueva iteración se duplica el número de las cifras decimales exactas obtenidas en la iteración anterior. Como se ve, se trata de una velocidad de convergencia muy alta. Este hecho se expresa en términos más técnicos diciendo que los métodos de bisección y Regula Falsi presentan convergencia lineal mientras el de Newton – Raphson posee convergencia cuadrática.

Para hallar una forma sencilla de acotar el error absoluto del método, hágase $x = x_n$ en la ecuación (12):

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{f''(c)}{2!}(x_n - x_{n-1})^2 \qquad (13)$$

donde c es un número entre x_n y x_{n-1}.

Sin embargo, recuérdese que en este método se basa en que

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Trasponiendo algunos términos esto se puede escribir como:

$$f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0$$

Como $f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})$ son los dos primeros términos a la derecha de la ecuación (13), ella se transforma en:

$$f(x_n) = \frac{f''(c)}{2!}(x_n - x_{n-1})^2$$

Esta ecuación se puede escribir, teniendo en cuenta que $f(r) = 0$, como:

$$f(x_n) - f(r) = \frac{f''(c)}{2!}(x_n - x_{n-1})^2$$

Aplicando el teorema del valor medio al primer miembro de esta ecuación se tiene:

$$f'(\alpha)(x_n - r) = \frac{f''(c)}{2!}(x_n - x_{n-1})^2$$

Esto es: $$r - x_n = -\frac{f''(c)}{2f'(\alpha)}(x_n - x_{n-1})^2$$

Tomando módulos y sustituyendo las derivadas por sus cotas *M* y *d*:

$$|r - x_n| \le \left|\frac{M}{2d}\right|(x_n - x_{n-1})^2 \qquad (14)$$

Para no tener que hallar las cotas *M* y *d*, se puede razonar así. Sea δ un número positivo muy pequeño y supóngase que se ha llegado a una iteración para la cual:

$$|x_n - x_{n-1}| < \delta$$

Entonces la ecuación (14) implica que:

$$|r - x_n| \le \left|\frac{M\delta}{2d}\right||x_n - x_{n-1}| \qquad (15)$$

Como el número δ es muy pequeño, la expresión $\left|\frac{M\delta}{2d}\right|$ es mucho menor que 1, así que la ecuación (15) implica que: $|r - x_n| \le |x_n - x_{n-1}|$

Como el primer miembro de esta desigualdad es el error absoluto, resulta que el miembro de la derecha puede tomarse como error absoluto máximo de x_n:

$$E_m(x_n) = |x_n - x_{n-1}| \qquad (16)$$

Nótese que (16) puede no ser cierto en los primeros pasos del algoritmo pero sí lo será una vez que la diferencia entre dos iteraciones sucesivas se haya hecho pequeña.

En el método de Newton – Raphson se toma la siguiente condición de terminación:

> Condición de terminación:
>
> Si se desea obtener la raíz de la ecuación con un error absoluto menor que ε el método de Newton – Raphson se llevará a cabo hasta la aproximación x_n para la cual
>
> $$E_m(x_n) = |x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$$

Algoritmo en seudo código

Se supone que la ecuación a resolver es $f(x) = 0$, que la raíz que se quiere hallar está separada dentro de un intervalo $[a, b]$ en el cual $f(x)$ y sus dos primeras derivadas son continuas y que $f'(x)$ y $f''(x)$ no se anulan en $[a, b]$. Se supone que x_0 se ha seleccionado dentro del intervalo $[a, b]$ de modo que se cumple $f(x_0)\, f''(x_0) > 0$ (es decir, el signo de la función coincidiendo con el sentido de la concavidad). Se suponen conocidas la funciones $f(x)$ y $f'(x)$, la aproximación inicial x_0 y la tolerancia ε que se permitirá.

$x_{anterior} := x_0$
repeat

$$x := x_{anterior} - \frac{f(x_{anterior})}{f'(x_{anterior})}$$

$Error := |x - x_{anterior}|$

$x_{anterior} := x$

until $Error < \varepsilon$
La raíz buscada es x y su error absoluto máximo es *Error*
Terminar

Comentarios finales

El método de Newton – Raphson es, generalmente, un método de convergencia rápida aunque esta rapidez depende de la función $f(x)$ y de la aproximación inicial que se elija; usualmente con cuatro o cinco iteraciones se obtiene la raíz con más de cuatro cifras decimales exactas. Esta característica hace aconsejable el empleo de este algoritmo en el trabajo a mano o cuando las limitaciones de tiempo obliguen a utilizar un método muy eficiente para el cálculo de raíces. Su mayor inconveniente es la necesidad de hallar la primera derivada de $f(x)$, lo cual puede ser muy engorroso y hay que hacerlo casi siempre fuera de la máquina.

Aunque las condiciones de convergencia son más exigentes que en otros métodos, las mismas se satisfacen si el intervalo $[a, b]$ se toma suficientemente pequeño; además se puede verificar fácilmente su cumplimiento con solo mirar en la pantalla la gráfica de $f(x)$, teniendo en cuenta que el crecimiento, positivo o negativo, de la función indica el signo de la primera derivada en tanto que el sentido de la concavidad de la curva indica el signo de la segunda derivada.

Cuando el intervalo $[a, b]$ donde está separada la raíz es pequeño, la selección del punto x_0 de partida no es muy importante, pero cuando el intervalo es mayor, debe tenerse cuidado de seleccionar x_0 de manera que $f(x_0)$ coincida con el signo de $f''(x_0)$. Observando la gráfica de f es muy fácil realizar esta selección.

Como se ha visto, el método de Newton – Raphson pose un algoritmo muy simple para su programación y, como todos los métodos numéricos iterativos es prácticamente inmune a los errores de redondeo que ocurran a lo largo del proceso.

Ejemplo 3

Utilice el método de Newton – Raphson para determinar con cinco cifras decimales exactas la menor raíz positiva de la ecuación: $2\,\text{sen}\,\pi x + x = 0$

Solución:

Primero se requiere aislar la raíz en un intervalo en que se cumplan las condiciones suficientes para la convergencia del método. Como la función $2 \operatorname{sen} \pi x$ solo toma valores entre –2 y 2, la función:

$$f(x) = 2 \operatorname{sen} \pi x + x$$

no se puede anular para $x > 2$. Basta entonces graficar $f(x)$ en el intervalo [0, 2]. En la figura 5 se muestra la gráfica. En ella se observa que la menor raíz positiva se encuentra en el intervalo [1; 1,25] en el cual se cumple además que la primera derivada es negativa (función decreciente) y la segunda derivada es positiva (concavidad hacia arriba). Para seleccionar x_0, como la segunda derivada es positiva en el intervalo (un análisis más detallado muestra que en $x = 1$ la segunda derivada se anula), se selecciona un punto en el que la función también sea positiva. En este caso se ha seleccionado $x_0 = 1{,}1$ aunque cualquier punto del intervalo a la izquierda de la raíz serviría igual. Utilizando un programa realizado a partir del algoritmo de Newton – Raphson y tomando como tolerancia para el error ε = 0,000005 se obtienen los resultados que muestra la tabla 1. La raíz buscada es, por tanto, 1,206035 con cinco cifras decimales exactas en solo cuatro iteraciones.

$f(x) = 2 \operatorname{sen} \pi x + x$

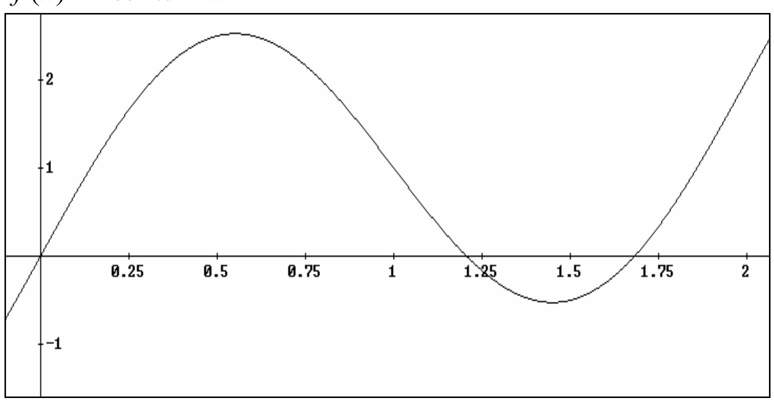

Figura 5

Iteración	x	$E_m(x)$
0	1,1	
1	1,19686466	0,09686466
2	1,20591673	0,00905207
3	1,20603510	0,00011837
4	1,20603512	0,00000002

Tabla 1

Ejemplo 4

Se sabe que en el intervalo [1, 2] la ecuación $x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$ tiene una raíz.

a) Determine cuantas iteraciones se requerirían para hallar dicha raíz por el método de bisección.
b) Halle la raíz por el método Regula Falsi.
c) Halle la raíz por el método de Newton – Raphson.
d) Compare la rapidez de la convergencia y la eficiencia relativa de los tres métodos en este caso.

Solución:

a) La cantidad de iteraciones necesarias en el método de bisección es independiente de $f(x)$ y se calcula a partir del intervalo de separación inicial y la tolerancia deseada como:

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}$$

Como en este caso es $a = 1$, $b = 2$ y $\varepsilon = 0{,}000005$, se obtiene:

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{2-1}{0{,}000005}\right)}{\ln 2} = 17{,}6$$

Es decir, se requiere como mínimo, de 18 iteraciones.

b) Antes de proceder al cálculo, es conveniente verificar si se satisfacen las hipótesis de continuidad y de poca curvatura en la función $f(x)$ para el intervalo [1, 2]. En la figura 6 se muestra la gráfica de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 6$ en dicho intervalo. Se aprecia que la función es continua y que la derivada no se anula y sufre poco cambio en el intervalo. Esto garantiza el buen funcionamiento del método Regula Falsi y la validez de la fórmula para acotar el error absoluto. En la tabla 2 se muestran los resultados numéricos. La raíz buscada es, con cinco cifras decimales exactas: 1,094550

$f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 6$

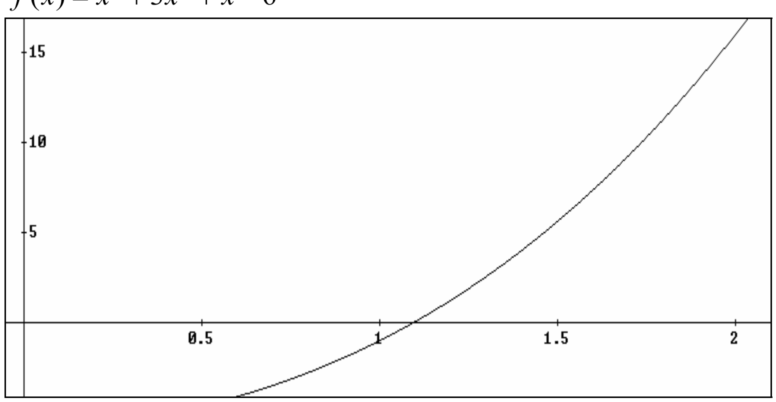

Figura 6

Iteración	a	b	x	$E_m(x)$
1	1	2	1,058824	
2	1,058824	2	1,081264	0,022440
3	1,081264	2	1,089639	0,008376
4	1,089639	2	1,092740	0,003100
5	1,092740	2	1,093884	0,001144
6	1,093884	2	1,094305	0,000422
7	1,094305	2	1,094461	0,000155
8	1,094461	2	1,094518	0,000057
9	1,094518	2	1,094539	0,000021
10	1,094539	2	1,094547	0,000008
11	1,094547	2	1,094550	0,000003

Tabla 2

c) Para la aplicación del método de Newton – Raphson se verifican las hipótesis adicionales acerca de las derivadas. En el intervalo [1, 2] la primera derivada y la segunda son positivas. La aproximación inicial debe tomarse en algún punto a la derecha de la raíz, donde $f(x)$ es positiva como la segunda derivada. En este caso se seleccionó $x_0 = 1,5$. Los resultados numéricos se muestran en la tabla 3. La raíz deseada, calculada con 5 cifras decimales exactas es 1.094551.

Iteración	x	$E_m(x)$
0	1,5	
1	1,16417910	0,33582090
2	1,09713536	0,06704375
3	1,09455523	0,00258012
4	1,09455148	0,00000375

Tabla 3

d) Como era de esperar, la cantidad de iteraciones requeridas para el cálculo fue mayor en el método de bisección (18), menor en Regula Falsi (11) y muy inferior en Newton – Raphson (4). En cuanto a la eficiencia, hay que tener en cuenta que, mientras en el método de bisección y en Regula Falsi en cada iteración se requiere evaluar solamente una función, en el método de Newton – Raphson se requiere evaluar dos funciones: $f(x)$ y su derivada. Así, resulta que este método ha requerido 8 evaluaciones en comparación con 11 de Regula Falsi. Como se ve, la eficiencia en este caso es mayor pero no tan desproporcionada.

Ejercicios

En todos los ejercicios que siguen se debe utilizar, siempre que se necesite, un programa graficador tanto para separar las raíces como para verificar las hipótesis del método utilizado. También se supone que el algoritmo Newton – Raphson se utilice mediante un programa computacional, preferiblemente confeccionado por usted. Si no cuenta con un programa adecuado, realice los cálculos a mano y obtenga las raíces con solo dos o tres cifras decimales exactas.

1. En la figura 7 se muestra la gráfica de la función $f(x)$. Proponga valores adecuados de x_0 para calcular las cuatro raíces de la ecuación $f(x) = 0$ mediante el método de Newton – Raphson.

$f(x)$

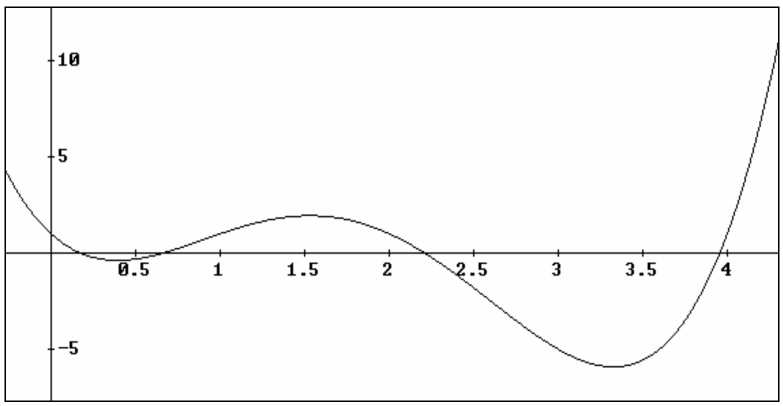

Figura 7

2. Calcule, con cinco cifras decimales exactas, las raíces reales de las siguientes ecuaciones algebraicas mediante el método de Newton – Raphson. Posiblemente, ya usted separó las raíces de estas ecuaciones en los ejercicios de la sección 2.2 y las resolvió por alguno de los métodos anteriores. Compare la cantidad de iteraciones que necesitó con cada uno de los métodos que haya utilizado.
   a) $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 = 0$
   b) $x^4 - 11x^3 + 41x^2 - 60x + 30 = 0$
   c) $x^4 - 3x^3 + 10x^2 - 13x + 5 = 0$
   d) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$
   e) $x^3 + 7x^2 + 14x + 9 = 0$

3. Utilice el método Newton – Raphson para calcular con cinco cifras decimales exactas, las raíces de las siguientes ecuaciones trascendentes. Posiblemente, ya usted separó las raíces de estas ecuaciones en los ejercicios de la sección 2.2 y las resolvió usando los algoritmos anteriores. En ese caso, compare la cantidad de iteraciones que necesito con cada método usado.
   a) $\operatorname{sen} x - \log x = 0$
   b) $5e^x - 2x - 10 = 0$
   c) $(x^2 + 1)\cos x = 1; \quad -10 \le x \le 10$

d) $2 \tanh x - \operatorname{sen} x - 0{,}3 = 0$

e) $x^4 - 4x^2 - 4x - 16 - \ln|x| = 0$

f) $e^x \operatorname{sen} x - 2e^x + 3 = 0$

g) $x = \tan^2 x;\quad 0 \le x \le 2\pi$

h) $\sqrt{x} = 2 \ln x$

4. Al comienzo de este capítulo, en el ejemplo 2 de la sección 2.1, se planteó el problema de hallar las dimensiones de un recipiente cilíndrico de 1000 cm^3 de capacidad que hiciera mínima la cantidad de material a utilizar. Se llegó a la ecuación:

$$4\pi r^4 + \pi r^3 - 2000r - \frac{500}{\pi} = 0$$

Calcule el valor de r con cinco cifras decimales exactas mediante Newton – Raphson.

5. En la figura 8, el área sombreada es 0,6 veces el área del rectángulo *ABCD*. Halle el área de dicho rectángulo. Utilice el método de Newton – Raphson y determine las raíces con cinco cifras decimales exactas.

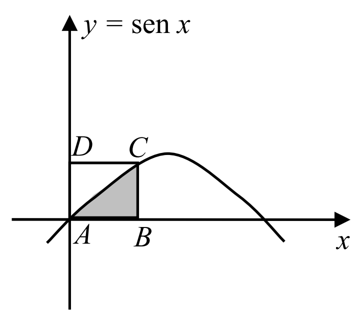

Figura 8

6. La recta L de la figura 9 es tangente a la sinusoide en dos puntos. Determine la ecuación de la recta. Utilice el método de Newton – Raphson y realice los cálculos con cuatro cifras decimales exactas.

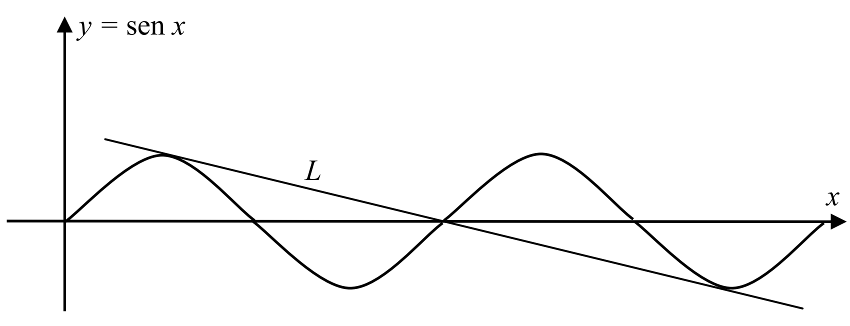

Figura 9

7. Una pieza cilíndrica de queso tiene 30 cm de diámetro. Se quiere separar la quinta parte mediante un corte, como muestra la figura 10. Determine, con error menor que 0,5 mm a qué distancia del centro debe darse el corte. Utilice el método de Newton – Raphson.

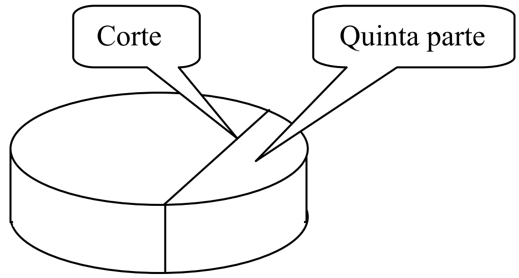

Figura 10

8. La circunferencia de la figura 11 tiene su centro en el punto (0, 1) y es tangente a la cosinusoide. Determine su radio con cinco cifras decimales exactas. Utilice el método de Newton – Raphson.

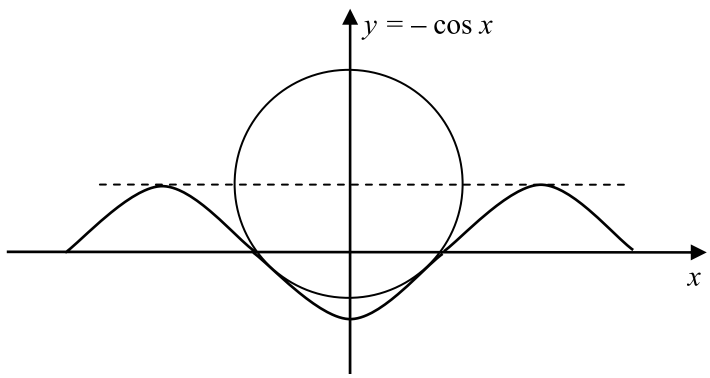

Figura 11

9. Al comienzo de esta sección se mostró un algoritmo iterativo que converge muy rápidamente hacia la raíz cuadrada de 2. Se basa en la fórmula recursiva:

$$x_0 = 2; \qquad x_n = \frac{x_{n-1} + \dfrac{2}{x_{n-1}}}{2} \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Demuestre que esta fórmula se obtiene aplicando el método de Newton – Raphson a la ecuación $x^2 = 2$.

10. Generalice la idea del problema anterior para obtener un algoritmo recursivo que permita calcular la raíz cuadrada positiva de cualquier número positivo N.

11. Suponga que usted necesita un algoritmo que permita hallar el recíproco de un número positivo N sin efectuar divisiones. Plantee el problema en términos de resolver la ecuación

$$N - \frac{1}{x} = 0$$

y aplique el método de Newton – Raphson para obtener un algoritmo iterativo adecuado. Recuerde que la selección de x_0 es parte del algoritmo. Ensaye el algoritmo, hallando el recíproco de 3.

12. El algoritmo en seudo código que aparece a continuación es una simplificación del método de Newton – Raphson que suele llamarse Newton Modificado. Interprételo gráficamente y analice las ventajas y desventajas que presenta.

$x_{anterior} := x_0$
$P := f'(x_0)$
repeat
$$x := x_{anterior} - \frac{f(x_{anterior})}{P}$$
$Error := |x - x_{anterior}|$
$x_{anterior} := x$
until $Error < \varepsilon$
La raíz buscada es x y su error absoluto máximo es *Error*
Terminar

2.6 El método de las secantes

La principal desventaja del método de Newton – Raphson es la necesidad de trabajar con la función derivada de $f(x)$. En muchos casos prácticos esto es un gran inconveniente. Por ejemplo, recuerdes la ecuación (4) de la sección 2.1 que surgió al tratar de determinar los parámetros de la función logística

$$p(t) = \frac{P_L}{1 - ce^{-kt}}$$

a partir de los valores p_1, p_2 y p_3 correspondientes a tres instantes t_1, t_2 y t_3. Para calcular el parámetro k se necesitaba resolver la ecuación:

$$(p_2 - p_1)(p_3e^{-kt_3} - p_2e^{-kt_2}) - (p_3 - p_2)(p_2e^{-kt_2} - p_1e^{-kt_1}) = 0$$

En este caso resulta obvio lo problemático de utilizar dicho método.

El método de las secantes es una modificación del método de Newton – Raphson dirigida a eliminar la necesidad de utilizar la función derivada. Para ello, se sustituye la pendiente de la recta tangente por la pendiente de una recta secante a la gráfica de $f(x)$. El método de las secantes requiere de dos aproximaciones iniciales de la raíz r ya que una secante se determina por dos puntos de la curva.

En la figura 1 se muestra gráficamente cómo funciona el algoritmo. La recta L_1, secante a la curva $y = f(x)$ por los puntos de abscisas x_0 y x_1 corta al eje x en un punto cuya abscisa se toma como x_2; con x_1 y x_2 se determina una nueva secante L_2 la cual interseca al eje x en x_3, etcétera; este proceso da lugar a la sucesión $\{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ la cual, bajo condiciones apropiadas, converge hacia la raíz r.

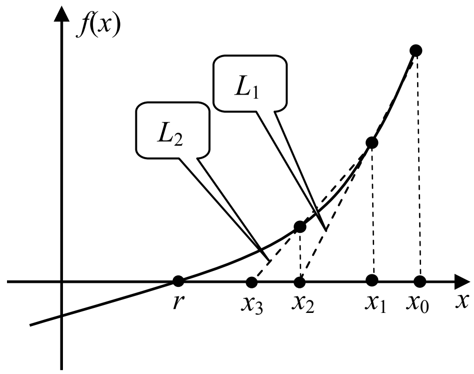

Figura 1

Como la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(x_{n-2},\ f(x_{n-2}))$ y $(x_{n-1},\ f(x_{n-1}))$ es

$$\frac{f(x_{n-1})-f(x_{n-2})}{x_{n-1}-x_{n-2}} \qquad (1)$$

la ecuación que permite determinar x_n se puede obtener si en la fórmula de Newton – Raphson

$$x = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

se sustituye la pendiente de la recta tangente $f'(x_{n-1})$ por la expresión (1). De ahí:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}-x_{n-2}}{f(x_{n-1})-f(x_{n-2})} f(x_{n-1}) \qquad \text{para } n = 2, 3, 4,... \qquad (2)$$

Las aproximaciones x_0 y x_1 no hay que tomarlas obligatoriamente a un mismo lado de r ni en un orden específico y no siempre la sucesión x_n converge monótonamente a la raíz r; en muchas ocasiones se obtienen unas aproximaciones por defecto y otras por exceso. Obsérvese la forma en que se produce la convergencia en el caso de la figura 2.

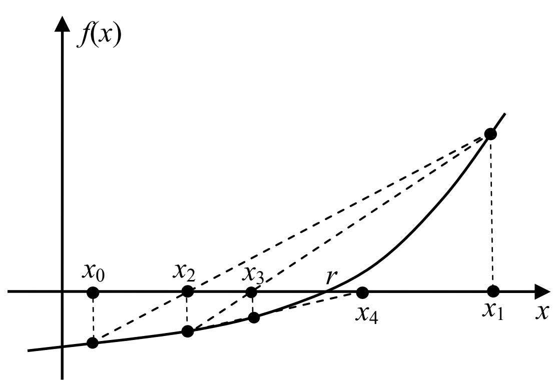

Figura 2

Tal como en el método de Newton – Raphson del cual es una modificación, en el método de las secantes pueden suceder comportamientos indeseables del proceso de convergencia si la primera o la segunda derivadas de $f(x)$ se anulan en las cercanías de la raíz r o si las aproximaciones iniciales no se seleccionan con cuidado.

Convergencia del método de las secantes

Al analizar el error del método de Newton – Raphson se llegó a la relación:

$$r - x_n = -\frac{1}{2}\frac{f''(c)}{f'(x_{n-1})}(r - x_{n-1})^2$$

de la cual se obtuvo posteriormente importantes consecuencias. Mediante algunas manipulaciones algebraicas en cuyos detalles no se entrará, en el método de las secantes se puede llegar a una relación análoga:

$$r - x_n = -\frac{1}{2}\frac{f''(\alpha_n)}{f'(\beta_n)}(r - x_{n-1})(r - x_{n-2}) \qquad (3)$$

Esta fórmula relaciona los errores en tres iteraciones consecutivas obtenidas mediante la fórmula de la secante. A partir de ella, se puede analizar cómo es la convergencia en este método.

Usando la misma notación que en Newton – Raphson, sea

M : una cota superior de $|f''(x)|$ para x en un entorno I de la raíz r.
d: una cota inferior de $|f'(x)|$ para x en I.

Tomando módulos en ambos miembros de (3) se puede escribir dicha ecuación en términos de errores absolutos:

$$E(x_n) \le \frac{M}{2d}E(x_{n-1})E(x_{n-2}) \qquad (4)$$

Para simplificar las notaciones, se llamará: $\lambda = \frac{M}{2d}$ de modo que la ecuación (4) se puede escribir:

$$E(x_n) \le \lambda E(x_{n-1})E(x_{n-2})$$

o, multiplicando por λ:

$$\lambda E(x_n) \le \lambda E(x_{n-1})\lambda E(x_{n-2}) \qquad (5)$$

Si ahora se supone que las iteraciones iniciales x_0 y x_1 se seleccionan lo suficientemente próximas a r de manera que:

$$\lambda E(x_0) \le \delta < 1 \quad \text{y} \quad \lambda E(x_1) \le \delta < 1$$

y se aplica la desigualdad (5), se obtiene para las siguientes iteraciones

$$\lambda E(x_2) \le \lambda E(x_1)\lambda E(x_0) \le \delta \cdot \delta = \delta^2$$
$$\lambda E(x_3) \le \lambda E(x_2)\lambda E(x_1) \le \delta^2 \cdot \delta = \delta^3$$

$$\lambda E(x_4) \leq \lambda E(x_3)\lambda E(x_2) \leq \delta^3 \cdot \delta^2 = \delta^5$$
$$\lambda E(x_5) \leq \lambda E(x_4)\lambda E(x_3) \leq \delta^5 \cdot \delta^3 = \delta^8$$
etcétera.

De manera que los errores absolutos van siendo cada vez menores y convergen rápidamente hacia cero. Nótese que el exponente a que aparece elevada δ viene dado por los términos de la sucesión de Fibonacci, los cuales tienden a infinito con rapidez exponencial.

El resultado anterior se puede establecer como un teorema:

Teorema 1

Sea $f(x) = 0$ una ecuación con una sola raíz $x = r$ en un intervalo $[a, b]$. Sean $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$ continuas en $[a, b]$ y no nulas en dicho intervalo. Si M representa una cota superior de $|f''(x)|$ para x en $[a, b]$ y d una cota inferior de $|f'(x)|$ para x en $[a, b]$. Entonces, tomando aproximaciones iniciales x_0 y x_1 en [a, b] que satisfagan la condición: $\lambda E(x_0) \leq \delta < 1$ y $\lambda E(x_1) \leq \delta < 1$ con $\lambda = M/2d$, la sucesión de valores obtenida con la aplicación de la fórmula de las secantes converge hacia r.

■

En la práctica, es muy difícil contar con el parámetro λ, pero lo fundamental es que el teorema garantiza que, si se toman x_0 y x_1 suficientemente próximos a r, el algoritmo convergerá hacia r.

El error en el método de las secantes

El método de Newton – Raphson posee una notable velocidad de convergencia debido a que es un método de convergencia cuadrática, es decir, el error absoluto máximo se comporta según la ecuación:

$$E_m(x_n) = \frac{M}{2d}\left[E_m(x_{n-1})\right]^2$$

cabe entonces preguntarse si el método de las secantes poseerá una convergencia del mismo orden.

Supóngase que en el método de las secantes el error se comporta según la ecuación:

$$E_m(x_n) = k\left[E_m(x_{n-1})\right]^p \qquad (5)$$

donde k y p son parámetros por determinar. La ecuación (4)

$$E(x_n) \leq \frac{M}{2d} E(x_{n-1})E(x_{n-2})$$

se puede escribir fácilmente en términos de errores absolutos máximos:

$$E_m(x_n) = \frac{M}{2d} E_m(x_{n-1})E_m(x_{n-2}) \qquad (6)$$

Según la ecuación (5): $E_m(x_{n-1}) = k\left[E_m(x_{n-2})\right]^p$

y $$E_m(x_n) = k\left[E_m(x_{n-1})\right]^p = k\left[k\left[E_m(x_{n-2})\right]^p\right]^p = k^{p+1}\left[E_m(x_{n-2})\right]^{p^2}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (6), resulta:

$$k^{p+1}\left[E_m(x_{n-2})\right]^{p^2} = \frac{M}{2d}k\left[E_m(x_{n-2})\right]^p E_m(x_{n-2})$$

es decir: $$k^p\left[E_m(x_{n-2})\right]^{p^2} = \frac{M}{2d}\left[E_m(x_{n-2})\right]^{p+1}$$

De aquí se obtienen las ecuaciones: $$k^p = \frac{M}{2d} \quad \text{y} \quad p^2 = p+1$$

La segunda de ellas posee dos raíces, una negativa, que carece de sentido, y una positiva:

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618$$

en cuanto al valor de k: $$k = \left(\frac{M}{2d}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{M}{2d}\right)^{0{,}618}$$

Sustituyendo en la ecuación (5) los valores hallados para p y k:

$$E_m(x_n) = \left(\frac{M}{2d}\right)^{0{,}618}\left[E_m(x_{n-1})\right]^{1{,}618}$$

Puede concluirse entonces que el método de las secantes posee una convergencia de orden 1,618 (un poco menor que 2), de modo que no se obtendrá una velocidad de convergencia tan alta como en el método de Newton – Raphson.

En cuanto a la estimación del error en el método, dado que su convergencia es comparable con la Newton – Raphson, se utiliza el mismo criterio que en ese método:

$$E_m(x_n) = \left|x_n - x_{n-1}\right|$$

y por tanto, la misma condición de terminación:

> Condición de terminación:
>
> Si se desea obtener la raíz de la ecuación con un error absoluto menor que ε el método de las secantes se llevará a cabo hasta la aproximación x_n para la cual
>
> $$E_m(x_n) = \left|x_n - x_{n-1}\right| \leq \varepsilon$$

Algoritmo en seudo código

Se supone que la ecuación a resolver es $f(x) = 0$, que la raíz que se quiere hallar está separada dentro de un intervalo $[a, b]$ en el cual $f(x)$ y sus dos primeras derivadas son continuas y que $f'(x)$ y $f''(x)$ no se anulan en $[a, b]$. Se supone que x_0 y x_1 se han seleccionado dentro del intervalo $[a, b]$ lo suficientemente próximos a r para que el algoritmo converja. Se suponen conocidas la función $f(x)$, las aproximaciones iniciales x_0 y x_1 y la tolerancia ε que se permitirá.

$x_a := x_0$
$y_a := f(x_a)$
$x_b := x_1$
$y_b := f(x_b)$
repeat

$$x_c := x_b - \frac{x_b - x_a}{y_b - y_a} y_b$$

$y_c := f(x_c)$
$Error := |x_c - x_b|$
$x_a := x_b$
$y_a := y_b$
$x_b := x_c$
$y_b := y_c$

until $Error < \varepsilon$
La raíz buscada es x_c y su error absoluto máximo es *Error*
Terminar

Comentarios finales

El método de las secantes posee varias características muy positivas, principalmente su rapidez de convergencia. Si esta se mide en cantidad de iteraciones necesarias para obtener la raíz con cierta exactitud, entonces esta velocidad es ligeramente menor que la de Newton – Raphson; sin embargo, como este método requiere evaluar dos funciones en cada paso mientras que en el algoritmo de las secantes solo se evalúa una función, cuando la rapidez se mide en tiempo necesario para alcanzar la solución, el método de las secantes es casi siempre más rápido.

Otro aspecto favorable es el hecho de que no se requiere conocer la primera ni la segunda derivadas de la da función; sólo se necesita que estas sean continuas y no se anulen, lo cual puede verificarse con la observación de la gráfica de $f(x)$ obtenida en la pantalla.

Un inconveniente del método es la posibilidad de no convergencia a la raíz si las aproximaciones iniciales no están suficientemente cerca de ella; sin embargo, cuando el cociente $f''(x)/f'(x)$ toma valores pequeños en las proximidades de la raíz (esto es, la gráfica de $f(x)$ tiene pendiente pronunciada y curvatura pequeña), entonces la convergencia es casi segura aun para valores de x_0 y x_1 no tan próximos a r.

Como todos los métodos de puntos (no de intervalos) el método de las secantes no produce intervalos donde esté encerrada la raíz buscada y el acotamiento del error no es completamente seguro; téngase en cuenta, por tanto, que el criterio de terminación que se ha dado es valido solamente si las aproximaciones obtenidas están en un entorno de la raíz pequeño, en que la derivada de $f(x)$ no sufre grandes cambios. Siempre que sea posible, es aconsejable seleccionar las aproximaciones iniciales mediante una observación de la gráfica de $f(x)$ y teniendo en cuenta el fundamento geométrico del método.

En el método de las secantes aparece un cociente donde hay una diferencia de valores de x entre una diferencia de valores de la función; cuando los valores de la función son ya muy similares y con el mismo signo (lo cual no sucede en la fórmula de Regula Falsi), puede presentarse pérdida de significación. Por este motivo, no se debe buscar una exactitud que exceda la precisión del sistema numérico de la computadora que se esté empleando.

***Ejemplo* 1**

Determine una función logística $p(t) = \dfrac{P_L}{1 - ce^{-kt}}$ que satisfaga las condiciones:

$p(2001) = 1{,}2$ millones
$p(2003) = 2{,}4$ millones
$p(2004) = 2{,}8$ millones

Solución:

Conviene primero seleccionar adecuadamente las unidades de tiempo y de población. Sea la variable t definida por:

$$t = \text{año} - 2000$$

Si la variable p se mide en millones de habitantes, entonces:

$p(1) = 1{,}2$
$p(3) = 2{,}4$
$p(4) = 2{,}8$

El valor de k será entonces la raíz de la ecuación:

$$(p_2 - p_1)(p_3 e^{-kt_3} - p_2 e^{-kt_2}) - (p_3 - p_2)(p_2 e^{-kt_2} - p_1 e^{-kt_1}) = 0$$

Haciendo $t_1 = 1$ $p_1 = 1{,}2$
$t_1 = 3$ $p_1 = 2{,}4$
$t_1 = 4$ $p_1 = 2{,}8$

se obtiene; $$3{,}36\, e^{-3k} - 3{,}84\, e^{-2k} + 0{,}48 = 0 \qquad (7)$$

Como el parámetro k es positivo por definición, al separar las raíces de esta ecuación bastará considerar $k > 0$. La gráfica de la función $f(k) = 3{,}36\, e^{-3k} - 3{,}84\, e^{-2k} + 0{,}48$ se muestra en la figura 3 en el intervalo [0, 4].

$f(k) = 3{,}36\, e^{-3k} - 3{,}84\, e^{-2k} + 0{,}48$

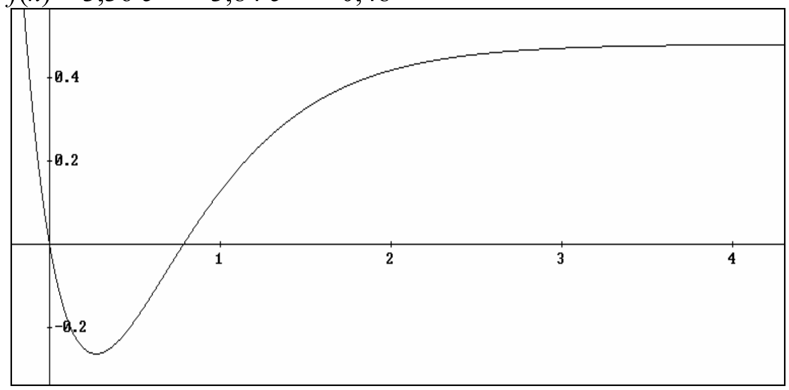

Figura 3

Nótese que la función se aproxima rápidamente a su valor asintótico 0,48 debido a que los sumandos exponenciales decrecen con rapidez. Se puede descartar la presencia de raíces para valores de k más allá de 4. De la gráfica se observa la presencia de una raíz positiva en el intervalo [0,5; 1]. Como en ese intervalo la gráfica presenta una curvatura muy reducida la segunda derivada es pequeña y los valores de x_0 y x_1 no tiene que estar muy próximo a r.

Utilizando un programa basado en el algoritmo del método de las secantes con x_0 =0,5 y x_1 = 1 y tomando una tolerancia de 0,000005, se obtiene la raíz con cinco cifras decimales exactas. Los resultados se muestran en la tabla 1.

Iteración	x	$E_m(x)$
5	0,5	
6	1	
7	0,79455403	0,20544597
8	0,78431003	0,01024400
9	0,78508192	0,00077189
10	0,78508003	0,00000190

Tabla 1

Luego, con cinco cifras decimales exactas k = 0,78508. Los otros dos parámetros se hallan fácilmente. En efecto, como

$$p_1 = \frac{P_L}{1 - ce^{-kt_1}} \quad \text{y} \quad p_2 = \frac{P_L}{1 - ce^{-kt_2}}$$

resulta: $$p_1 - p_1 c e^{-kt_1} = P_L \quad \text{y} \quad p_2 - p_2 c e^{-kt_2} = P_L$$

Restando miembro a miembro: $$p_2 - p_1 = c(p_2 e^{-kt_2} - p_1 e^{-kt_1})$$

de donde $$c = \frac{p_2 - p_1}{p_2 e^{-kt_2} - p_1 e^{-kt_1}} = \frac{2{,}4 - 1{,}2}{2{,}4e^{-3k} - 1{,}2e^{-k}} = -3{,}75457$$

y $$P_L = p_1\left(1 - ce^{-kt_1}\right) = 1{,}2\left(1 - ce^{-k}\right) = 3{,}25488$$

La función logística será entonces: $$p(t) = \frac{3{,}25488}{1 + 3{,}75457e^{-0{,}78508t}}$$

donde $t = 0$ corresponde al año 2000 y la población se refiere a millones de habitantes. La gráfica de la función en el intervalo de 2000 a 2005 se muestra en la figura 4. Se han agregado los tres puntos correspondientes a los datos que permitieron hallar los parámetros de la curva.

$$p(t) = \frac{3{,}25488}{1 + 3{,}75457e^{-0{,}78508t}}$$

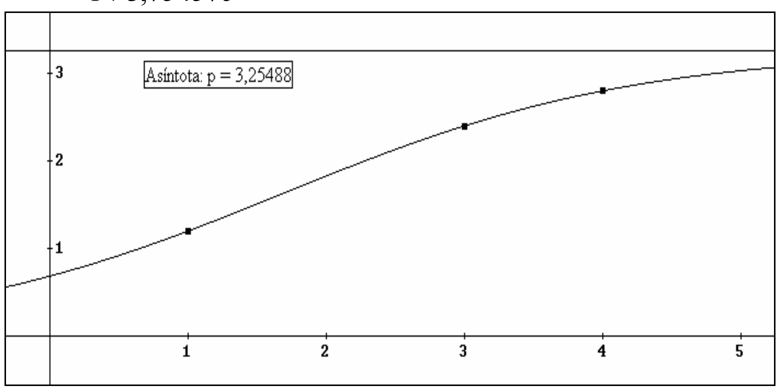

Figura 4

Ejemplo **2**

La ecuación $x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$ posee una raíz en el intervalo [1, 2]. Para hallar esta raíz con cinco cifras decimales exactas se utilizaron varios métodos en el ejemplo 4 de la sección 2.5. Usando el método de bisección se necesitarían 18 iteraciones; mediante Regula Falsi, 11 iteraciones y mediante Newton – Raphson solamente 4. Halle la raíz por el método de las secantes utilizando $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$.

Solución:

En la tabla 2 se muestran los resultados obtenidos. En cinco iteraciones se obtienen las cinco cifras decimales exactas que se deseaban.

Iteración	x	$E_m(x)$
0	1	
1	2	
2	1.05882353	0.94117647
3	1.08126366	0.02244013
4	1.09482415	0.01356049
5	1.09454943	0.00027472
6	1.09455148	0.00000205

Tabla 2

La rapidez de convergencia solo se compara con la de Newton – Raphson. Sin embargo, si se cuenta la cantidad de veces que se necesita evaluar funciones, que es el paso de estos algoritmo que más tiempo consume, el método de Newton – Raphson requirió realizar 8 evaluaciones (dos evaluaciones en cada iteración) mientras que el método de las secantes necesitó evaluar $f(x)$ en las dos aproximaciones iniciales y, a partir de ahí, una evaluación por cada iteración, es decir un total de siete evaluaciones, una menos que el método de Newton – Raphson.

Ejercicios

En todos los ejercicios que siguen se debe utilizar, siempre que se necesite, un programa graficador tanto para separar las raíces como para verificar las hipótesis del método utilizado. También se supone que el algoritmo de las secantes se utilice mediante un programa computacional, preferiblemente confeccionado por usted. Si no cuenta con un programa adecuado, realice los cálculos a mano y obtenga las raíces con solo dos o tres cifras decimales exactas.

1. Se quiere resolver la ecuación $f(x) = 0$ mediante el método de las secantes, donde $f(x)$ esla función cuya gráfica muestra la figura 5. Diga qué aproximaciones iniciales permitirían, con seguridad, obtener la raíz.

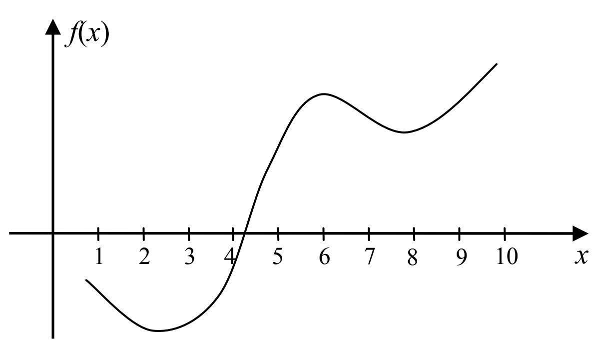

Figura 5

2. Calcule, con cinco cifras decimales exactas, las raíces reales de las siguientes ecuaciones algebraicas mediante el método de las secantes. Posiblemente, ya usted separó las raíces de

estas ecuaciones en los ejercicios de la sección 2.2 y las resolvió por alguno de los métodos anteriores. Compare la cantidad de iteraciones que necesitó con cada uno de los métodos que haya utilizado y la cantidad de veces que hubo que evaluar funciones.

a) $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 = 0$
b) $x^4 - 11x^3 + 41x^2 - 60x + 30 = 0$
c) $x^4 - 3x^3 + 10x^2 - 13x + 5 = 0$
d) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$
e) $x^3 + 7x^2 + 14x + 9 = 0$

3. Utilice el método de las secantes para calcular con cinco cifras decimales exactas, las raíces de las siguientes ecuaciones trascendentes. Posiblemente, ya usted separó las raíces de estas ecuaciones en los ejercicios de la sección 2.2 y las resolvió usando los algoritmos anteriores. En ese caso, compare la cantidad de iteraciones que necesito con cada método usado y la cantidad de veces que hubo que evaluar funciones.
   a) $\operatorname{sen} x - \log x = 0$
   b) $5e^x - 2x - 10 = 0$
   c) $(x^2 + 1)\cos x = 1; \quad -10 \le x \le 10$
   d) $2 \tanh x - \operatorname{sen} x - 0{,}3 = 0$
   e) $x^4 - 4x^2 - 4x - 16 - \ln|x| = 0$
   f) $e^x \operatorname{sen} x - 2e^x + 3 = 0$
   g) $x = \tan^2 x; \quad 0 \le x \le 2\pi$
   h) $\sqrt{x} = 2 \ln x$

4. Una circunferencia tiene su centro en el origen de coordenadas y es tangente a la gráfica de la función $y = e^x$. Halle el radio de la circunferencia con cinco cifras decimales exactas mediante el método de las secantes.

5. Se tiene un tanque cilíndrico de 2 m de diámetro y 10 000 litros de capacidad, colocado con su eje horizontal. Se quiere construir una vara de madera con 10 marcas que indiquen las alturas del líquido en el tanque cuando el mismo contiene 1000, 2000, 3000, ..., 10 000. Determine con precisión de un mm la posición de cada marca. Utilice el método de las secantes.

6. Resuelva el problema anterior para un tanque esférico de la misma capacidad.

7. Se sabe que el área sombreada de la figura 6 es de 10 unidades cuadradas. Halle el valor de a con cuatro cifras decimales exactas. Utilice el método de las secantes.

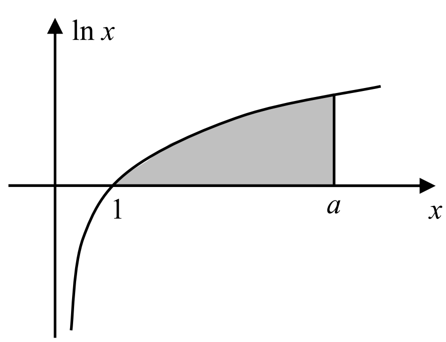

Figura 6

8. Un poste de 10 m de altura estaba situado junto a un muro de un metro de altura y un metro de ancho. El poste se ha partido, como muestra la figura 7, de manera que ha quedado tocando el suelo y el borde del muro. Utilice el método de las secantes para calcular, con precisión de 1 mm, a que altura del suelo se partió el poste.

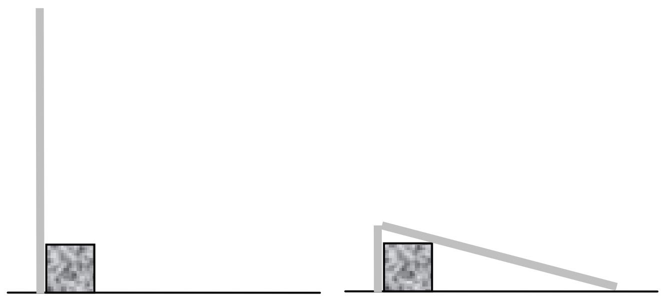

Figura 7

9. Un cuadro de 2 m de altura está colocado a 3 m del piso en una pared, como muestra la figura 8. ¿A qué distancia de la pared deberá colocarse un observador cuyos ojos se encuentran a 1,70 m del piso para contemplar el cuadro bajo un ángulo vertical de 20º? Utilice el método de las secantes y obtenga la respuesta con un error menor que 1 mm.

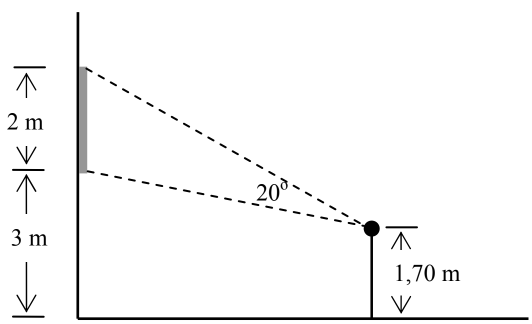

Figura 8

10. En una copa de sección parabólica cayó un palillo de 5 cm de longitud, como se muestra en la figura 9. Uno de sus extremos está en el punto (–1, 1). ¿Dónde está el otro extremo? Utilice el método de las secantes y obtenga la respuesta con cuatro cifras decimales exactas.

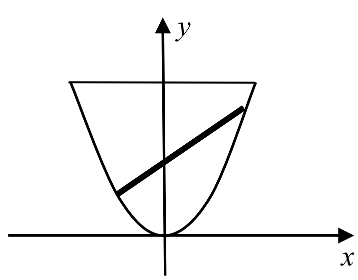

Figura 9

11. En el método Regula Falsi se aproxima la raíz de una ecuación como el punto en que una recta secante interseca al eje x. Explique cuál es entonces la diferencia entre Regula Falsi y el método de las secantes.

12. Muestre la gráfica de una función $f(x)$ que ilustre el hecho de que en el método de las secantes no es indiferente el orden en que se tomen x_0 y x_1. Para ello, haga que en el ejemplo que usted proponga, al tomar $x_0 = 3$ y $x_1 = 2$ el algoritmo converja a la raíz deseada, pero tomando $x_0 = 2$ y $x_1 = 3$ no converja.

13. Se necesita ajustar el modelo de dos parámetros $f(x) = e^{bx} + e^{ax}$ de manera que $f(1) = 2.6$ y $f'(1) = 1.1$. Determine los valores de los parámetros a y b con cuatro cifras decimales exactas. Utilice el método de las secantes.

2.7 Extensiones del método de Newton – Raphson

El método de Newton – Raphson puede ser extendido en varios sentidos. En esta sección se estudiarán dos de estas extensiones. La aplicación del método a sistemas de dos o más ecuaciones y su adaptación para calcular raíces complejas de polinomios.

El método de Newton – Raphson para sistemas de ecuaciones

Para simplificar la notación solo se considerarán sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas pero la extensión a problemas de mayor dimensión es inmediata. Sea entonces el sistema:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Si se utiliza la notación matricial, el par (x, y) se puede representar como la matriz columna:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

así que el sistema se expresaría como: $\begin{cases} f(\mathbf{x}) = 0 \\ g(\mathbf{x}) = 0 \end{cases}$

Empleando la función vectorial $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$

el sistema de ecuaciones adquiere el aspecto de una ecuación matricial:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{2}$$

donde **0** representa a la matriz columna nula de orden 2.

El análogo matricial de la derivada $f'(x)$ se define como la matriz jacobiana de **f**(**x**) respecto a **x**, y será denotada por **W**(**x**), es decir:

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ g_x(x,y) & g_y(x,y) \end{bmatrix}$$

Entonces la extensión del algoritmo de Newton – Raphson para un sistema de ecuaciones sería:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{n-1} - \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{x}_{n-1})\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1}) \qquad n = 1, 2, 3,... \qquad (3)$$

donde: $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ es la aproximación inicial a la solución buscada.

El teorema que sigue, en cuya demostración no se entrará, establece condiciones suficientes para la convergencia.

Teorema **1**

Sea $\mathbf{x}^*$ una raíz del sistema $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ y R una región que contiene a $\mathbf{x}^*$ tal que: f, g y sus primeras y segundas derivadas parciales son continuas y acotadas en R y **W** es no singular en R. Entonces, si $\mathbf{x}_0$ se escoge en R y lo suficientemente cerca de $\mathbf{x}^*$, la sucesión de vectores $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,... generada por el algoritmo $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{n-1} - \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{x}_{n-1})\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1})$ converge hacia $\mathbf{x}^*$.

■

Cuando el proceso iterativo converge lo hace en forma cuadrática lo cual garantiza una rápida aproximación hacia la raíz.

En el caso de los sistemas de ecuaciones, el error en la aproximación $\mathbf{x}_n$, se denota $E(\mathbf{x}_n)$ y se define como la norma–∞ del vector $\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_n$, esto es:

$$E(\mathbf{x}_n) = \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_n\|_\infty = \max\{|x^* - x_n|,\ |y^* - y_n|\}$$

Puede probarse que, si la norma–∞ de la diferencia de dos iteraciones sucesivas es pequeña, puede tomarse como cota del error, es decir:

$$E_m(\mathbf{x}_n) = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}\|_\infty = \max\{|x_n - x_{n-1}|,\ |y_n - y_{n-1}|\}$$

y, por lo tanto el proceso iterativo se debe detener tan pronto como ambos, $|x_n - x_{n-1}|$ y $|y_n - y_{n-1}|$ son menores que la tolerancia ε que se permitirá.

Como la operación de invertir la matriz **W** es muy costosa en tiempo, es preferible transformar la expresión (3) de la siguiente manera.

Trasponiendo el término $\mathbf{x}_{n-1}$: $\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1} = -\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{x}_{n-1})\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1})$

Llamando $\Delta\mathbf{x}_n$ al vector diferencia: $\Delta\mathbf{x}_n = -\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{x}_{n-1})\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1})$

Si se premultiplica en ambos miembros por la matriz jacobiana:

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_{n-1})\Delta\mathbf{x}_n = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1}) \qquad (4)$$

Ahora, el vector $\Delta\mathbf{x}_n$ se halla resolviendo el sistema lineal (4) por algún método numérico eficiente, por ejemplo, el método de Gauss. En el caso de sistemas de dos ecuaciones, se pueden aplicar incluso métodos más elementales, como Cramer.

El sistema (4), si se prefiere, puede ser expresado en forma escalar, escribiendo las matrices en términos de sus componentes:

$$\begin{bmatrix} f_x(x_{n-1}, y_{n-1}) & f_y(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ g_x(x_{n-1}, y_{n-1}) & g_y(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_n \\ \Delta y_n \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} f(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ g(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{bmatrix}$$

de donde:
$$\begin{cases} f_x(x_{n-1}, y_{n-1})\Delta x_n + f_y(x_{n-1}, y_{n-1})\Delta y_n = -f(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ g_x(x_{n-1}, y_{n-1})\Delta x_n + g_y(x_{n-1}, y_{n-1})\Delta y_n = -g(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{cases} \qquad (5)$$

Resolviendo el sistema (5) se obtienen Δx_n y Δy_n y con ellos se determinan x_n y y_n:

$$x_n = x_{n-1} + \Delta x_n$$
$$y_n = y_{n-1} + \Delta y_n$$

El algoritmo se detiene cuando $|\Delta x_n|$ y $|\Delta y_n|$ son ambos menores que ε.

Algoritmo en seudo código

Se desea resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

el cual posee una raíz $\mathbf{x}^* = (x^*, y^*)$ en una región R del plano xy. Se supone que las funciones y sus derivadas de primer y segundo orden son continuas y acotadas en R, que $\mathbf{W}$ no es singular en R y que el par (x_0, y_0), formado por las aproximaciones iniciales, está en R y suficientemente próximo a $\mathbf{x}^*$, de modo que el proceso iterativo converge.

El algoritmo requiere como datos: las funciones f, g, f_x, f_y, g_x, g_y, las aproximaciones iniciales x_0, y y_0 y la tolerancia ε que se permitirá.

$x := x_0$
$y := y_0$
repeat

Resolver el sistema $\begin{cases} f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y = -f(x, y) \\ g_x(x, y)\Delta x + g_y(x, y)\Delta y = -g(x, y) \end{cases}$

Error := max $\{|\Delta x|, |\Delta y|\}$
$x := x + \Delta x$

$y := y + \Delta y$
until *Error* < ε
La solución del sistema es (x, y) con error menor que *Error*
Terminar

Ejemplo 1

Halle la solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} xy = 1 \\ x = y^2 \end{cases}$

mediante el método de Newton – Raphson tomando aproximación inicial $x_0 = 0{,}7$ y $y_0 = 1{,}5$. Obtenga el resultado con cinco cifras decimales exactas.

Solución:

Primero el sistema debe escribirse de manera que en cada ecuación el segundo miembro sea cero:

$$\begin{cases} xy - 1 = 0 \\ x - y^2 = 0 \end{cases}$$

las funciones $f(x, y) = xy - 1$ y $g(x, y) = x - y^2$ son continuas y poseen primeras y segundas derivadas continuas y acotadas en cualquier región R acotada. La aproximación inicial se ignora si está o no cerca de la solución, así que todo lo que se puede hacer es utilizar el proceso iterativo y ver si converge. Este ejemplo, que solo posee un valor didáctico, tiene una solución evidente en $x = 1$ y $y = 1$, pero en un caso real, esta información no se tiene.

El sistema de ecuaciones lineales que habrá que resolver en cada iteración es:

$$\begin{cases} f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y = -f(x, y) \\ g_x(x, y)\Delta x + g_y(x, y)\Delta y = -g(x, y) \end{cases}$$

en este caso:

$$\begin{cases} y\Delta x + x\Delta y = 1 - xy \\ \Delta x - 2y\Delta y = y^2 - x \end{cases}$$

$x = x_0 = 0{,}7$
$y = y_0 = 1{,}5$

Iteración 1:

Sistema lineal: $\begin{cases} 1{,}5\Delta x + 0{,}7\Delta y = -0{,}05 \\ \Delta x - 3\Delta y = 1{,}55 \end{cases}$

Solución del sistema lineal: $\Delta x = 0{,}179808$
$\Delta y = -0{,}456731$

$x = 0{,}7 + \Delta x = 0{,}879808$
$y = 1{,}5 + \Delta y = 1{,}043269$

$E_m(\mathbf{x}_1)$ = max $\{|\Delta x|, |\Delta y|\}$ = 0,457

Iteración 2:

Sistema lineal: $$\begin{cases} 1{,}043269\Delta x + 0{,}879808\Delta y = 0{,}082124 \\ \Delta x - 2{,}086538\Delta y = 0{,}208602 \end{cases}$$

Solución del sistema lineal: Δx = 0,116103
Δy = – 0,044331

x = 0,879808 + Δx = 0,995911
y = 1,043269 + Δy = 0,998938

$E_m(\mathbf{x}_2)$ = max $\{|\Delta x|, |\Delta y|\}$ = 0,117

Iteración 3:

Sistema lineal: $$\begin{cases} 0{,}998938\Delta x + 0{,}995911\Delta y = 0{,}005147 \\ \Delta x - 1{,}997876\Delta y = 0{,}001966 \end{cases}$$

Solución del sistema lineal: Δx = 0,004092
Δy = 0,001064

x = 0,995911 + Δx = 1,000003
y = 0,998938 + Δy = 1,000002

$E_m(\mathbf{x}_3)$ = max $\{|\Delta x|, |\Delta y|\}$ = 0,000409

Iteración 4:

Sistema lineal: $$\begin{cases} 1{,}000002\Delta x + 1{,}000003\Delta y = -0.000005 \\ \Delta x - 2.000004\Delta y = 0.000001 \end{cases}$$

Solución del sistema lineal: Δx = – 0,000003
Δy = – 0,000002

x = 1,000003 + Δx = 1,000000
y = 1,000002 + Δy = 1,000000

$E_m(\mathbf{x}_4)$ = max $\{|\Delta x|, |\Delta y|\}$ = 0,000003

El proceso se detiene por ser $E_m(\mathbf{x}_4) < \varepsilon$ = 0,000005

Resultado: Con cinco cifras decimales exactas la solución es x = 1,000000 y = 1,000000

El método de Newton – Bairstow

El método de Newton – Raphson puede utilizarse para buscar raíces imaginarias de una función. En ese caso la función y sus derivadas hay que considerarlas como funciones de variable compleja y todas las operaciones deben ser realizadas en el campo complejo, lo cual genera un problema bastante complicado cuando debe ser implementado en una computadora.

El método de Newton – Bairstow, que es la segunda de las extensiones de Newton – Raphson que se estudiarán en esta sección, es una aplicación del algoritmo para la solución de sistemas de dos ecuaciones, al problema de hallar las raíces imaginarias de una ecuación polinomial que posea todos sus coeficientes reales. El mayor atractivo del algoritmo es que permite hallar un par de raíces imaginarias realizando todas las operaciones en el campo real.

Considérese entonces la ecuación polinomial de grado $n > 2$:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0 = 0 \qquad (6)$$

con todos sus coeficientes reales y $a_n \neq 0$. Nótese que los coeficientes se han numerado en orden diferente a como se hizo al principios de este capítulo (Sección 2.2); en este método es preferible seguir este criterio.

Como se sabe, en las ecuaciones polinomiales con coeficientes reales las raíces imaginarias se presentan en pares conjugados. Supóngase que la ecuación (6) posee un par de raíces imaginarias conjugadas:

$$r_1 = a + bi \quad \text{y} \quad r_2 = a - bi$$

Si r_1 y r_2 son raíces de (5), esto significa que $(x - r_1)$ y $(x - r_2)$ son factores del polinomio:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

En este caso, el polinomio de segundo grado que resulta de multiplicar ambos factores de primer grado, también será un factor de $p(x)$. Es decir que $p(x)$ contiene como factor al polinomio:

$$(x - r_1)(x - r_2) = (x - a - bi)(x - a + bi) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$$

En lo que sigue, para simplificar la exposición, se llamará:

$$\begin{aligned} r &= 2a \\ s &= -(a^2 + b^2) \end{aligned} \qquad (7)$$

Con esto el factor cuadrático queda de la forma: $x^2 - rx - s$.

Ahora el problema de encontrar las raíces imaginarias r_1 y r_2 se transforma en este equivalente: Hallar coeficientes r y s tales que el polinomio $x^2 - rx - s$ sea un factor de $p(x)$.

Para valores arbitrarios de r y de s, el polinomio $x^2 - rx - s$ no será, en general, un factor de $p(x)$, sino que se tendrá:

$$p(x) = (x^2 - rx - s)q(x) + \text{Resto}$$

donde $q(x)$ es un polinomio de grado $n - 2$ que es el cociente de dividir $p(x)$ entre $x^2 - rx - s$ y Resto es un polinomio de grado menor o igual que 1. El problema original de encontrar las raíces imaginarias r_1 y r_2 puede enunciarse de esta otra forma alternativa:

Hallar coeficientes r y s tales que el Resto sea cero.

El siguiente teorema del Álgebra Superior, que es una generalización del algoritmo de división sintética, simplifica el proceso de encontrar el cociente $q(x)$ y el Resto de la división.

***Teorema* 2**

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ ($n > 2$) y el polinomio $q(x)$, de grado $n - 2$, el cociente de dividir $p(x)$ por $x^2 - rx - s$. Si se denota:

$$q(x) = b_n x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-3} + \cdots b_3 x + b_2 \qquad \text{y} \qquad \text{Resto} = b_1(x - r) + b_0$$

entonces:

$$\begin{aligned} b_n &= a_n \\ b_{n-1} &= a_{n-1} + rb_n \\ b_{n-2} &= a_{n-2} + rb_{n-1} + sb_n \\ b_{n-3} &= a_{n-3} + rb_{n-2} + sb_{n-1} \\ &\vdots \\ b_1 &= a_1 + rb_2 + sb_3 \\ b_0 &= a_0 + rb_1 + sb_2 \end{aligned} \tag{8}$$

La demostración consiste en verificar que, con los coeficientes dados en (8), se cumple

$$p(x) = (x^2 - rx - s)q(x) + \text{Resto} \qquad \blacksquare$$

Las relaciones (8) se pueden representar como un algoritmo que permite, conociendo valores r y s y el conjunto de coeficientes $A = \{a_0, a_1, a_2,\ldots, a_n\}$ obtener el conjunto de coeficiente $B = \{b_0, b_1, b_2,\ldots, b_n\}$. Si este algoritmo de división sintética se representa formalmente como DivSint, se tiene:

$$B = \text{DivSint}(r, s, A)$$

El Resto de la división depende de los valores que se asigne a r y s, por tanto puede escribirse:

$$\text{Resto}(r, s) = b_1(r,s)(x - r) + b_0(r,s)$$

Como se necesita que el resto sea cero, el problema se ha convertido en hallar los valores de r y s que satisfagan el sistema:

$$\begin{cases} b_1(r,s) = 0 \\ b_0(r,s) = 0 \end{cases} \qquad (9)$$

La dependencia de b_1 y b_0 respecto r y s a es bastante complicada y viene dada por el conjunto (8) de ecuaciones. El sistema (9) se resolverá iterativamente mediante el método de Newton – Raphson para sistemas de dos ecuaciones, desarrollado en las páginas anteriores. Para ello, se parte de aproximaciones iniciales r_0 y s_0, y, a partir de ellas, en cada paso del algoritmo se calcula

$$\begin{aligned} r_n &= r_{n-1} + \Delta r \\ s_n &= s_{n-1} + \Delta s \qquad n = 1, 2, 3,... \end{aligned}$$

donde los incrementos Δr y Δs se obtienen resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial b_1}{\partial r}\right|_{n-1} \Delta r + \left.\dfrac{\partial b_1}{\partial s}\right|_{n-1} \Delta s = -b_1(r_{n-1}, s_{n-1}) \\ \left.\dfrac{\partial b_0}{\partial r}\right|_{n-1} \Delta r + \left.\dfrac{\partial b_0}{\partial s}\right|_{n-1} \Delta s = -b_0(r_{n-1}, s_{n-1}) \end{cases}$$

Donde el subíndice $n-1$ en las derivadas indica que se deben evaluar en la aproximación r_{n-1} y s_{n-1}. Para hallar las derivadas parciales respecto a r, se deriva en cada una de las expresiones (8) respecto a r. Se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_n}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial b_{n-1}}{\partial r} &= b_n \\ \frac{\partial b_{n-2}}{\partial r} &= b_{n-1} + r\frac{\partial b_{n-1}}{\partial r} \\ \frac{\partial b_{n-3}}{\partial r} &= b_{n-2} + r\frac{\partial b_{n-2}}{\partial r} + s\frac{\partial b_{n-1}}{b_{n-2}} \qquad (10) \\ &\vdots \\ \frac{\partial b_1}{\partial r} &= b_2 + r\frac{\partial b_2}{\partial r} + s\frac{\partial b_3}{\partial r} \\ \frac{\partial b_0}{\partial r} &= b_1 + r\frac{\partial b_1}{\partial r} + s\frac{\partial b_2}{\partial r} \end{aligned}$$

Para simplificar la notación, conviene llamar las derivadas respecto a r de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{\partial b_{n-1}}{\partial r} \\
c_{n-1} &= \frac{\partial b_{n-2}}{\partial r} \\
c_{n-2} &= \frac{\partial b_{n-3}}{\partial r} \\
&\vdots \\
c_2 &= \frac{\partial b_1}{\partial r} \\
c_1 &= \frac{\partial b_0}{\partial r}
\end{aligned}
$$

y el sistema (10) se convierte en:

$$
\begin{aligned}
c_n &= b_n \\
c_{n-1} &= b_{n-1} + rc_n \\
c_{n-2} &= b_{n-2} + rc_{n-1} + sc_n \\
&\vdots \\
c_2 &= b_2 + rc_2 + sc_4 \\
c_1 &= b_1 + rc_2 + sc_3
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

Si se compara el sistema (11) con el (8) se observará que el algoritmo para hallar el conjunto de derivadas $C = \{ c_0, c_1, c_2,... , c_n\}$ vuelve a ser DivSint salvo que el coeficiente c_0 no interesa. Esto es:

$$C = \text{DivSint}(r, s, B)$$

Para hallar las derivadas parciales respecto a s, se deriva en cada una de las ecuaciones (8) respecto a esa variable y se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial b_n}{\partial s} &= 0 \\
\frac{\partial b_{n-1}}{\partial s} &= 0 \\
\frac{\partial b_{n-2}}{\partial s} &= b_n \\
\frac{\partial b_{n-3}}{\partial s} &= r\frac{\partial b_{n-2}}{\partial s} + b_{n-1} + s\frac{\partial b_{n-1}}{b_{n-2}} = r\frac{\partial b_{n-2}}{\partial s} + b_{n-1} \\
&\vdots \\
\frac{\partial b_1}{\partial s} &= r\frac{\partial b_2}{\partial s} + b_3 + s\frac{\partial b_3}{\partial s} \\
\frac{\partial b_0}{\partial s} &= r\frac{\partial b_1}{\partial s} + b_2 + s\frac{\partial b_2}{\partial s}
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

Introduciendo ahora las variables $D = \{d_0, d_1, d_2,... , d_n\}$ como:

$$
\begin{aligned}
d_n &= \frac{\partial b_{n-2}}{\partial s} \\
d_{n-1} &= \frac{\partial b_{n-3}}{\partial s} \\
d_{n-2} &= \frac{\partial b_{n-4}}{\partial s} \\
&\vdots \\
d_3 &= \frac{\partial b_1}{\partial s} \\
d_2 &= \frac{\partial b_0}{\partial s}
\end{aligned}
$$

el sistema (12) se reduce a:

$$
\begin{aligned}
d_n &= b_n \\
d_{n-1} &= b_{n-1} + rd_n \\
d_{n-2} &= b_{n-2} + rd_{n-1} + sd_n \\
&\vdots \\
d_3 &= b_3 + rd_4 + sd_5 \\
d_2 &= b_2 + rd_3 + sd_4
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

Si se compara las ecuaciones (13) con las (11), se comprobará que los coeficientes D y C coinciden hasta $d_2 = c_2$; por esta causa, no será necesario utilizar las expresiones (13) ya que: $d_3 = c_3$ y $d_2 = c_2$. Volviendo al sistema de ecuaciones del método de Newton – Raphson

$$
\begin{cases}
\left.\dfrac{\partial b_1}{\partial r}\right|_{n-1} \Delta r + \left.\dfrac{\partial b_1}{\partial s}\right|_{n-1} \Delta s = -b_1(r_{n-1}, s_{n-1}) \\
\left.\dfrac{\partial b_0}{\partial r}\right|_{n-1} \Delta r + \left.\dfrac{\partial b_0}{\partial s}\right|_{n-1} \Delta s = -b_0(r_{n-1}, s_{n-1})
\end{cases}
$$

y sustituyendo las derivadas por los coeficientes correspondientes:

$$
\frac{\partial b_1}{\partial r} = c_2\,; \quad \frac{\partial b_0}{\partial r} = c_1\,; \quad \frac{\partial b_1}{\partial s} = d_3 = c_3\,; \quad \frac{\partial b_0}{\partial s} = d_2 = c_2
$$

$$
\begin{cases}
c_2 \Delta r + c_3 \Delta s = -b_1 \\
c_1 \Delta r + c_2 \Delta s = -b_0
\end{cases}
\qquad (14)
$$

Resolviendo el sistema (14) se determinan los Δr y Δs y, según el método de Newton – Raphson,

$$
\begin{aligned}
r_n &= r_{n-1} + \Delta r \\
s_n &= s_{n-1} + \Delta s
\end{aligned}
$$

Los valores iniciales de r y s se determinan de alguna aproximación inicial $\alpha \pm \beta i$ a las raíces buscadas, para ello, aplicando (7):

$$r_0 = 2\alpha$$
$$s_0 = -(\alpha^2 + \beta^2)$$

Una vez hallados los valores de r y s, las mismas ecuaciones (7) permiten hallar los valores de a y b. En efecto:

Como $\qquad r = 2a \quad \text{y} \quad s = -(a^2 + b^2)$

Se obtiene: $\qquad a = \dfrac{r}{2} \quad \text{y} \quad b = \sqrt{-a^2 - s}$

Algoritmo en seudo código

Se desea hallar un par de raíces imaginarias $a \pm bi$ de la ecuación algebraica

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0 = 0$$

con coeficientes reales, $n > 2$ y $a_n \neq 0$ que están próximas a $\alpha \pm \beta i$, con error menor que ε. Se supone que las aproximaciones iniciales $\alpha \pm \beta i$ se encuentran lo suficientemente cerca de las raíces $a \pm bi$ de modo que el algoritmo iterativo converja. El algoritmo supone conocidos, n, los coeficientes del polinomio: a_0, a_1, a_2,... , a_n, la aproximación inicial $\alpha \pm \beta i$ y la tolerancia ε con que se desea hallar la raíz.

$r := 2\alpha$
$s := -(\alpha^2 + \beta^2)$
repeat
  Calcular los coeficientes B mediante: B := DivSint(r, s, A)
  Calcular los coeficientes C mediante: C := DivSint(r, s, B)
  Resolver el sistema lineal: $\begin{cases} c_2 \Delta r + c_3 \Delta s = -b_1 \\ c_1 \Delta r + c_2 \Delta s = -b_0 \end{cases}$
  Error := max $\{|\Delta r|, |\Delta s|\}$
  $r := r + \Delta r$
  $s := s + \Delta s$
until *Error* $< \varepsilon$
$a := \dfrac{r}{2}$
$b := \sqrt{-a^2 - s}$
Las raíces buscadas son $a \pm bi$ con error menor que *Error*
Terminar

El seudo código del algoritmo DivSint se ofrece a continuación:

El algoritmo DivSint supone conocidos los valores de r y s y los coeficientes de entrada: a_0, a_1, a_2,... , a_n. Ofrece como resultado los coeficientes b_0, b_1, b_2,... , b_n.

$b_n := a_n$
$b_{n-1} := a_{n-1} + rb_n$
$k := n - 2$
do while $k \geq 0$
  $b_k := a_k + rb_{k+1} + sb_{k+2}$
  $k := k - 1$
end
Los coeficientes resultantes son b_0, b_1, b_2,... , b_n
Terminar

Ejemplo 2

Halle el par de raíces imaginarias de la ecuación $x^4 + 5{,}2x^3 + 6{,}5x^2 - 0{,}2x + 13 = 0$ que están próximas a $0{,}5 \pm 0{,}9i$ con cinco cifras decimales exactas.

Solución:

$r = r_0 = 2\alpha = 2(0{,}5) = 1$
$s = s_0 = -(\alpha^2 + \beta^2) = -(0{,}5^2 + 0{,}9^2) = -1{,}06 \approx -1$

Iteración 1:

Coeficientes:						
	A:	1	5,2	6,5	-0,2	13
	B:	1	6,2	11,7	5,3	6,6
	C:	1	7,2	17,9	16,0	---

$b_1 = 5{,}3$; $b_0 = 6{,}6$ $c_3 = 7{,}2$ $c_2 = 17{,}9$ $c_1 = 16{,}0$

Sistema lineal: $\begin{cases} 17{,}9\Delta r + 7{,}2\Delta s = -5{,}3 \\ 16{,}0\Delta r + 17{,}9\Delta s = -6{,}6 \end{cases}$

Solución del sistema lineal: $\Delta r = -0{,}2307$
$\Delta s = -0{,}1625$

$r = 1 + \Delta r = 0{,}7693$
$s = -1 + \Delta s = -1{,}1625$

$E_m(\mathbf{X}_1) = \max\ \{|\Delta r|, |\Delta s|\} = 0{,}2307$

Iteración 2:

Coeficientes:						
	A:	1	5,2	6,5	-0,2	13
	B:	1	5,9693	9,92968	0,49959	1,84108
	C:	1	6,7386	13,95118	2,89902	---

$b_1 = 0{,}49959$ $b_0 = 1{,}84108$ $c_3 = 6{,}7386$ $c_2 = 13{,}95118$ $c_1 = 2{,}89902$

Sistema lineal: $\begin{cases} 13{,}95118\Delta r + 6{,}7386\Delta s = -0{,}49959 \\ 2{,}89902\Delta r + 13{,}95118\Delta s = -1{,}84108 \end{cases}$

Solución del sistema lineal: $\Delta r = 0{,}03105$
$\Delta s = -\ 0{,}13842$

$r = 0{,}7693 + \Delta r = 0{,}80035$
$s = -1{,}1625 + \Delta s = -1{,}30092$

$E_m(\mathbf{X}_1) = \max\ \{|\Delta r|, |\Delta s|\} = 0{,}13842$

Iteración 3: (En esta iteración y las siguientes, solo se muestran los resultados finales)

Solución del sistema lineal: $\Delta r = -\ 0{,}000349$
$\Delta s =\ 0{,}000919$

$r = 0{,}80035 + \Delta r = 0{,}800001$
$s = -1{,}30092 + \Delta s = -1{,}300001$

$E_m(\mathbf{X}_1) = \max\ \{|\Delta r|, |\Delta s|\} = 0{,}000919$

Iteración 4:

Solución del sistema lineal: $\Delta r = -\ 0.000001$
$\Delta s =\ 0{,}000001$

$r = 0{,}800001 + \Delta r = 0{,}800000$
$s = -1{,}300001 + \Delta s = -1{,}300000$

$E_m(\mathbf{X}_1) = \max\ \{|\Delta r|, |\Delta s|\} = 0{,}000001$

El proceso se detiene por ser $E_m(\mathbf{X}_4) < \varepsilon = 0{,}000005$

Con cinco cifras decimales exactas se obtuvo: $r = 0{,}800000$ $s = -1{,}300000$
Por tanto, el polinomio dado posee un factor cuadrático $x^2 - 0{,}800000x + 1{,}300000$

Este factor posee las raíces imaginarias $a \pm bi$ donde:

$$a := \frac{r}{2} = 0{,}400000$$
$$b := \sqrt{-a^2 - s} = \sqrt{-0{,}160000 + 1{,}300000} = \sqrt{1{,}140000} = 1{,}067708$$

Resultado: Con cinco cifras decimales exactas, las raíces imaginarias buscadas son:

$$0{,}400000 \pm 1{,}067708\,i$$

Ejercicios

1. Resuelva el sistema de dos ecuaciones que sigue mediante Newton – Raphson para sistemas, con cuatro cifras decimales exactas. Grafique las ecuaciones correspondientes para hallar la aproximación inicial necesaria.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 36 \end{cases}$$

2. Resuelva el sistema que sigue utilizando el método de Newton – Raphson para sistemas. Tome como aproximación inicial: $x = 1$ y $y = 0{,}8$ y obtenga cuatro cifras decimales exactas.

$$\begin{cases} 5x^2 + 2y^2 = 7 \\ \operatorname{sen} x + \cos 2y = 1 \end{cases}$$

3. En la figura 1 se muestran las graficas de las ecuaciones 1) $x^2y + 3xy^2 + 2x - 3y = 4$ y 2) $2xy + 4y^2 + x^3 = 2$. Utilice el método de Newton – Raphson para sistemas para hallar los puntos de intersección con cuatro cifras decimales exactas.

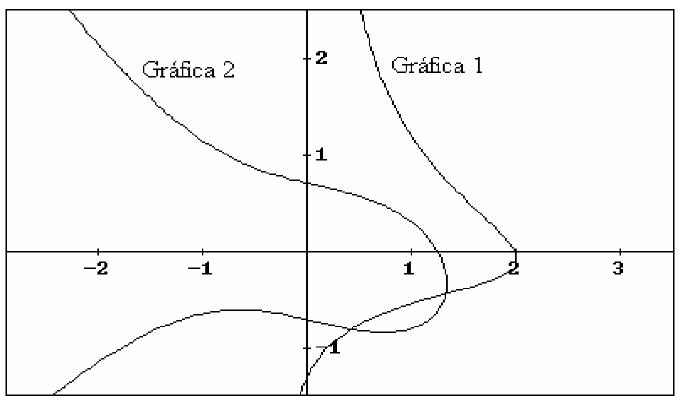

Figura 1

4. Para ajustar el modelo de dos parámetros $f(x) = e^{bx} + e^{ax}$ (vea el ejercicio 13 de la sección anterior) de manera que $f(1) = 2.6$ y $f'(1) = 1.1$. se necesita resolver un sistema de dos ecuaciones. Resuélvalo mediante el método de Newton – Raphson para sistemas, con cuatro cifras decimales exactas. Tome como aproximación inicial $a = 0{,}9$ y $b = -0{,}6$.

5. La ecuación $z^3 - 8z^2 + 5z - 2 = 0$ tiene una raíz compleja cercana a 0,3 + 0,4 *i*. Hállela de la siguiente forma: sustituya $z = x + yi$ y descomponga la ecuación original en el sistema: $\operatorname{Re}(z^3 - 8z^2 + 5z - 2) = 0$ y $\operatorname{Im}(z^3 - 8z^2 + 5z - 2) = 0$, después, resuelva el sistema mediante el método de Newton – Raphson para sistemas de ecuaciones. Halle las soluciones con cuatro cifras decimales exactas.

6. Resuelva el problema anterior aplicando el método de Newton – Bairstow.

7. Compruebe que la ecuación $x^4 - 9x^3 + 26x^2 - 24x + 8 = 0$ no posee raíces reales. Halle todas sus raíces con cuatro cifras decimales exactas. Utilice el método de Newton – Bairstow. Una de sus raíces está próxima a 4 + *i*.

8. Resuelva la ecuación $x^4 + 3x^2 + x + 2 = 0$ con 4 cifras decimales exactas. Una de sus raíces complejas está cerca de 0,3 + 1,6 *i*. Emplee el método de Newton – Bairstow.

Otras lecturas recomendadas

Varios de los resultados algebraicos útiles para la separación de raíces de ecuaciones algebraicas no han sido demostrados por razones de brevedad. El lector interesado en estos temas puede dirigirse a varios clásicos en esta materia, tal como "Álgebra Superior" de Pablo Miquel o al capítulo sobre ecuaciones algebraicas del Análisis Matemático de Rey Pastor.

Algunos métodos importantes para la solución de ecuaciones tales como los métodos de Graeffe, de Bernoullí, el modificado de Newton (que solo fue mencionado en un ejercicio) y el de Muller, no han sido tratados por razones de espacio. Todos ellos aparecen con un enfoque claro en el texto "Computacional Mathematics" de B. P. Demidovich e I. A. Maron, de la editorial MIR y también en "An Introduction to Numerical Analysis" de K. E. Atkinson.

En cuanto a los algoritmos computacionales, algunas cuestiones importantes han sido pasadas por alto debido a que el interés de este texto no está dirigido a la elaboración de algoritmos de carácter profesional. Los lectores interesados en estos aspectos encontrarán valiosas informaciones en "Computer Methods for Mathematical Computations" G. E. Forsythe, M. A. Malcolm y C. B. Moler, editado por Prentice–Hall.

El método iterativo general es uno de los aspectos más centrales de la teoría de los procesos iterativos; aquí solo algunos aspectos han sido tratados. Un enfoque serio y riguroso puede encontrarse en "Analysis of Numerical Methods" de E. Isaacson y H. B. Keller.

Principales ideas del capítulo

- Con una gran frecuencia aparecen en la práctica ecuaciones y sistemas de ecuaciones que no pueden ser resueltos por los métodos analíticos exactos.
- Antes de intentar resolver una ecuación hay que separar sus raíces, es decir, hallar intervalos cada uno de los cuales contenga solamente una raíz.
- La forma más simple de separar las raíces de la ecuación $f(x) = 0$ es graficar la función $f(x)$ con un programa graficador.
- Para las ecuaciones algebraicas existen varios resultados fáciles de aplicar como el teorema de las n raíces, la regla de los signos de Descartes y la fórmula de Lagrange que permiten acotar la cantidad y la localización de las raíces reales.
- El método de bisección es el algoritmo más simple y seguro para hallar las raíces reales de una ecuación. Descansa en hipótesis muy poco exigentes y ofrece una cota del error muy segura. Es un algoritmo poco eficiente pero muy robusto y su rapidez de convergencia no depende más que del intervalo inicial y de la tolerancia que se exija.
- El método Regula Falsi puede considerarse como una modificación del método de bisección para mejorar la velocidad de convergencia, lo cual casi siempre consigue. El algoritmo es

sencillo y funciona bien cuando la función $f(x)$ no presenta cambios grandes en su derivada en el intervalo $[a, b]$; esto siempre se puede conseguir tomando un intervalo de partida suficientemente pequeño.

- El método iterativo general descansa en una idea muy simple: expresar la ecuación $f(x) = 0$ en la forma $x = g(x)$ y definir el proceso iterativo $x_n = g(x_{n-1})$ el cual converge a la raíz de la ecuación original si en un entorno de ella la derivada de g es modularmente menor que un número $K < 1$ y si la aproximación inicial x_0 se toma en ese entorno.
- El método iterativo general es muy importante desde un punto de vista teórico pero su utilización práctica es limitada debido a que la manera en que la ecuación $f(x) = 0$ se transforma en $x = g(x)$ decide si se obtendrá un buen algoritmo iterativo o si será uno de convergencia lenta o incluso divergente.
- El método de Newton – Raphson o método de las tangentes está basado en la idea geométrica de aproximar la gráfica de $f(x)$ por la de su tangente y buscar el intercepto de la tangente en lugar del de $f(x)$. Es una forma efectiva de definir un proceso iterativo asegurando una alta rapidez de convergencia.
- El método de Newton – Raphson requiere del cumplimiento de hipótesis más fuertes que Bisección o Regula Falsi, ya que $f(x)$ debe ser derivable dos veces y sus dos primeras derivadas no se pueden anular en un entorno de la raíz buscada. Requiere, además, como dato la derivada de $f(x)$, lo cual puede ser un trabajo engorroso y que hay que realizar, por lo general, manualmente.
- El método de Newton – Raphson se puede extender en varios sentidos: solución de sistemas de ecuaciones no lineales, cálculo de raíces imaginarias o determinación de factores cuadráticos en ecuaciones algebraicas.
- El método de las secantes es una modificación del método de Newton – Raphson en el cual se utilizan secantes en lugar de tangentes para aproximar la función $f(x)$. Esto evita tener que conocer la derivada de $f(x)$ que es uno de los principales problemas de aquel método.
- El método de las secantes posee requisitos similares al método de Newton – Raphson para su convergencia.
- El orden de convergencia permite cuantificar la eficiencia de los métodos iterativos tratados. En el método de bisección y Regula Falsi la convergencia es de primer orden: $E_m(x_n) = kE_m(x_{n-1})$ aunque en el caso de bisección $k = 0{,}5$ y en Regula Falsi se logra generalmente valores más pequeños de k, que garantizan una convergencia más rapida. En el método de Newton – Raphson la convergencia es de segundo orden: $E_m(x_n) = k\,[E_m(x_{n-1})]^2$ y en el método de las secantes el orden es 1,618.
- Aunque el método de las secantes posee una rapidez de convergencia ligeramente menor que el de Newton – Raphson, como solo requiere evaluar una función en cada paso del proceso iterativo, resulta en general más eficiente, si se mide en tiempo de cómputo.
- El método de Newton – Raphson para sistemas de ecuaciones es una extensión del problema escalar $f(x) = 0$ al problema matricial $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$. En lugar de aparecer una división por la derivada de f aparece un producto por la inversa de la matriz jacobiana de $\mathbf{F}$. Se trata de un algoritmo mucho más complejo que su análogo escalar pues en cada iteración debe resolverse un sistema lineal de ecuaciones.
- El método de Newton – Bairstow es una aplicación del método de Newton – Raphson para sistemas que permite encontrar un factor cuadrático de un polinomio, en forma iterativa. Esto permite hallar las raíces imaginarias de una ecuación algebraica realizando todas las operaciones con aritmética real.

Auto examen

1. Separe las raíces de las siguientes ecuaciones en intervalos de longitud 0,5. Cuando sea posible, aplique previamente las reglas de Descartes y de Lagrange.
   a) $x^2 = \cos 2x$
   b) $x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$

2. Desde un punto de vista geométrico, ¿en qué se parecen y en qué difieren los métodos Regula Falsi y de las secantes?

3. ¿Qué condiciones debe cumplir la función $f(x)$ para resolver la ecuación $f(x) = 0$ mediante el método de Newton – Raphson?

4. A continuación se muestra un algoritmo en seudo código. Identifique qué problema se está resolviendo y qué método se está aplicando y repare un error que se ha introducido en el algoritmo.

   $f(x)$, a, b y T son datos del problema
   $y_a := f(a)$
   $y_b := f(b)$
   $xprevia := 10^{10}$
   repeat
   $$x := a - \frac{b-a}{y_b - y_a} y_a$$
   $y_x := f(x)$
   $Error := |x - xprevia|$
   if $y_a\, y_x < 0$ **then**
   $b := x$
   $y_b := y_x$
   else
   $a := x$
   $y_a := y_x$
   end
   $xprevia := x$
   until $Error > T$
   La solución es x con error absoluto menor que $Error$
   Terminar.

5. ¿Qué significa la afirmación de que el método de Newton – Raphson posee una convergencia cuadrática? ¿Qué implica este hecho desde un punto de vista computacional?

6. Resuelva las ecuaciones del primer problema de este examen. Utilice para cada una un método numérico diferente. Obtenga la solución con 4 cifras decimales exactas.

7. Acerca de un cilindro circular se conoce que su volumen es de 500 cm^3 y su superficie total de 350 cm^2. Determine las dimensiones del cilindro con error menor que 0,1 mm.

8. La ecuación $x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 2x + 5 = 0$ posee una raíz imaginaria cerca de $1 + i$. Halle esta raíz mediante el método de Newton – Bairstow con cuatro cifras decimales exactas.