Solución Numérica de EDO

Sumario:

- Introducción. Métodos de Runge-Kutta. Estimación del error por doble cálculo
- Método de Euler
- Método de Euler-Mejorado
- Método de Runge-Kutta de 4to orden
- Método predictor-corrector de 3 puntos

Bibliografía:

Texto Básico: “Matemática Numérica”, Manuel Álvarez Blanco, Alfredo Guerra Hernández, Rogelio Lau Fernández.

Volumen 2, Capitulo 7

Objetivos:

- Describir los métodos de Runge – Kutta de orden 1(Euler), 2 (Euler Mejorado) y 4
- Interpretar geométricamente los métodos de Euler y de Runge – Kutta
- Valorar el error mediante doble cómputo
- Describir el método predictor-corrector de 3 puntos.

Aspectos a desarrollar:

1. Solución numérica de EDO. Generalidades
2. Métodos de Runge-Kutta. Valoración del error mediante doble cómputo.
3. Método de Euler. Interpretación geométrica. Fórmulas de trabajo
4. Método de Euler Mejorado. Interpretación geométrica. Fórmulas de trabajo
5. Método de Runge-Kutta de 4^{to} orden. Fórmulas de trabajo
6. Deducción de las fórmulas del método predictor-corrector de 3 puntos.

1. Solución numérica de EDO. Generalidades

La ecuación en la cual la función incógnita aparece bajo el signo de derivada o de diferencial se llama ecuación diferencial. Si la función incógnita depende de una sola variable independiente se clasifica como ecuación diferencial ordinaria; en caso contrario diremos que se trata de una ecuación diferencial en derivadas parciales.

Muchos problemas de la ingeniería y la ciencia pueden formularse a través de ecuaciones diferenciales ordinarias. La más sencilla es la de primer orden $y' = f(x,y)$.

Ya en cursos anteriores se han tratado métodos analíticos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Acerca de ellos puede afirmarse que:

- Utilizan operaciones algebraicas, incluyendo la derivación y la integración, para obtener la solución general a partir de la ecuación diferencial
- La solución particular deseada se halla a partir de la solución general, buscando valores adecuados para las constantes arbitrarias
- Cada método analítico se ocupa de un tipo especial de ecuación diferencial ordinaria y es inaplicable en otros casos
- A pesar de la diversidad de métodos analíticos, la mayoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias no puede resolverse por esta vía.

Una gran cantidad de problemas se pueden modelar mediante ecuaciones diferenciales ordinarias que pueden resolverse analíticamente; en otros casos es necesario simplificar e incluso ignorar aspectos importantes, con tal de poder aplicar posteriormente un método analítico. En otras no pocas situaciones, las ecuaciones obtenidas no se pueden resolver analíticamente.

El problema fundamental que nos ocupa es el llamado problema de Cauchy o problema del valor inicial (PVI), que consiste en hallar la función y=y(x) que satisface la ecuación diferencial y una condición inicial:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

donde x_0 y y_0 son números dados.

El objetivo ahora es determinar el valor de la solución particular en otro punto x_f., o en puntos pertenecientes a un intervalo [x_0, x_f]. Para esto en el semestre anterior se dieron métodos exactos para hallar dicha solución, de forma que después de hallada dicha solución particular solo queda evaluarla en dicho punto x_f.. Pero en la práctica la solución particular en muchas ocasiones es muy difícil o a veces imposible de determinar por eso es que son necesarios los métodos numéricos o aproximados para resolver este problema. Por lo tanto el objetivo fundamental es mostrar diferentes métodos para determinar el valor de la solución particular en otro punto x_f..

Para resolver este tipo de problema existen dos formas de enfrentarlos. Por los métodos de paso simple y por los métodos de pasos múltiples.

Los métodos numéricos para resolver el PVI se basan en la idea de tomar un conjunto discreto de valores de x: {x_0 , x_1, x_2 ,...} casi siempre uniformemente espaciados, y hallar valores: {y_0 , y_1, y_2 ,...} que se aproximen a los valores de la solución exacta del PVI: {$y(x_0)$, $y(x_1)$, $y(x_2)$,...}

Los algoritmos para hallar la solución aproximada {y_0 , y_1, y_2 ,...} son siempre iterativos y pueden simbolizarse mediante una ecuación del tipo:

$$y_{n+1} = G(y_n, y_{n-1}, \cdots, y_{n-k}) \qquad (n \geq k)$$

Los métodos de paso simple es cuando k = 0: $y_{n+1} = G(y_n) \qquad (n \geq 0)$

Dentro de los métodos de paso simple están los llamados métodos de Runge-Kutta que estudiaremos en el siguiente punto.

Entre los métodos de paso múltiple (k≥1), se encuentran:

paso doble: $y_{n+1} = G(y_n, y_{n-1}) \qquad (n \geq 1)$

paso triple: $y_{n+1} = G(y_n, y_{n-1}, y_{n-2}) \qquad (n \geq 2)$

En el último punto se tratarán métodos de paso triple.

2. Métodos de Runge-Kutta

Dado el problema del valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Dada una secuencia de puntos equidistantes: $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_m \qquad \left(h = \frac{x_m - x_0}{m} \qquad x_{n+1} = x_n + h\right)$

se obtiene la secuencia de aproximaciones: $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_m$

de: $y(x_0), y(x_1), y(x_2), \cdots, y(x_2)$

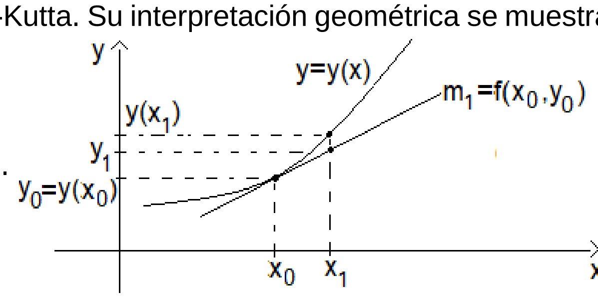
de modo que: $y_{n+1} = y_n + hw$

donde w es un promedio de pendientes (evaluaciones de la función f(x,y)) tomadas en el intervalo $[x_n, x_{n+1}]$.

El orden del método (p) coincide con el número de pendientes consideradas en w. Esto nos permite estimar el error mediante doble cómputo mediante $\Delta y_{\frac{h}{2}}(x) \approx \frac{\left|y_{\frac{h}{2}}(x) - y_h(x)\right|}{2^p - 1}$.

Método de Euler

Este es el más sencillo de los métodos de Runge-Kutta. Su interpretación geométrica se muestra en la siguiente gráfica:



Por el punto (x_0, y_0) se traza la recta tangente a la curva y=y(x), cuya pendiente es $m_1 = f(x_0, y_0)$.

Por lo tanto, la ecuación de recta tangente es;

$$y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

El valor aproximado de $y(x_1)$ se obtiene al sustituir x por x_1 en la ecuación de la recta tangente:

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)\underbrace{(x_1 - x_0)}_{h} \Rightarrow y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) \qquad K_1 = hf(x_0, y_0)$$

$\therefore y_1 = y_0 + K_1$

Procediendo de modo similar, se forma la recta que pasa por (x_1, y_1) de la recta tangente cuya pendiente es $\boldsymbol{m_2} = f(x_1, y_1)$: $y - y_1 = f(x_1, y_1)(x - x_1)$, y al sustituir x por x_2 en la ecuación se obtiene el valor aproximado de $y(x_2)$: $y_2 = y_1 + K_1 \quad K_1 = hf(x_1, y_1)$

En general, las fórmulas de trabajo de este método son:

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$K_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_1 + K_1 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots, m-1)$$

Ejemplo

Dado el problema del valor inicial

$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{4x - 2y} \\ \quad y(0) = 2 \end{cases}$$

Use la fórmula de Euler para obtener una aproximación de PVI en x=0.4 con paso h=0.2 y h=0.1; y estime el error cometido para el valor obtenido con el menor paso.

Solución

Se tiene que:

$$f(x, y) = \sqrt[3]{4x - 2y} \qquad x_0 = 0 \qquad y_0 = 2$$

Las fórmulas de trabajo serían:

h=0.2	h=0.1
$x_{n+1} = x_n + 0.2$ $K_1 = hf(x_n, y_n) = 0.2\sqrt[3]{4x_n - 2y_n}$ $y_{n+1} = y_n + K_1 \qquad (n = 1, 2)$	$x_{n+1} = x_n + 0.1$ $K_1 = hf(x_n, y_n) = 0.1\sqrt[3]{4x_n - 2y_n}$ $y_{n+1} = y_n + K_1 \qquad (n = 1, 2, 3, 4)$

n	$x_n \ (h = 0.2)$	y_n	K_1
0	0	2	-0.3175
1	0.2	1.6825	-9.2738
2	0.4	1.4087	

n	$x_n \ (h = 0.1)$	y_n	K_1
0	0	2	-0.1587
1	0.1	1.8413	-0.1486
2	0.2	1.6926	-0.1372
3	0.3	1.5554	-0.1241
4	0.4	1.4313	

$y_{0.2}(x) \approx 1.4087$

$y_{0.1}(x) \approx 1.4313$

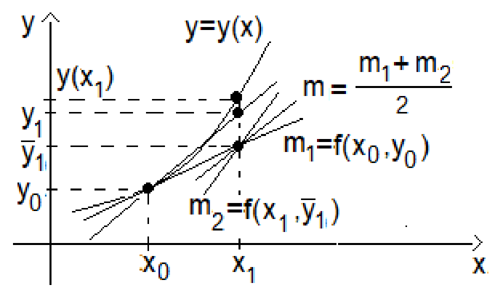
$$\Delta y_{\frac{h}{2}}(x) \approx \frac{\left|y_{\frac{h}{2}}(x) - y_h(x)\right|}{2^p - 1} \Rightarrow \Delta y_{0.1}(0.4) \approx \frac{|y_{0.1}(0.4) - y_{0.2}(0.4)|}{2^1 - 1} = |1.4313 - 1.4087| = 0.0026$$

El método de Euler es un método sencillo, de fácil aplicación, pero generalmente un tanto impreciso, con pasos pequeños es que brinda aproximaciones aceptables. A continuación, veremos una mejora de una aproximación obtenida por este método, que consecuentemente llamaremos Euler Mejorado. Podríamos decir que Euler predice una aproximación, y Euler Mejorado la corrige.

Método de Euler Mejorado

La interpretación geométrica del Método de Euler Mejorado se muestra en la siguiente gráfica:

Se empieza igual con el Método de Euler, tomando la recta tangente a la curva y=y(x), cuya pendiente es $m_1 = f(x_0, y_0)$, que pasa por el punto (x_0, y_0), y evaluando para $x=x_1$ se obtiene la aproximación $\overline{y_1}$ mediante el Método de Euler. A continuación, se considera la recta de pendiente $m_2 = f(x_1, \overline{y_1})$ que pasa por el punto $(x_1, \overline{y_1})$.



Las pendientes de las dos rectas anteriores se promedian: $m = \frac{m_1+m_2}{2} = \frac{f(x_0,y_0)+f(x_1,\overline{y_1})}{2}$; y se toma la recta que pasa por (x_0, y_0) y de pendiente m:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - y_0 = \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, \overline{y_1})}{2}(x - x_0)$$

Evaluando para $x=x_1$, y despejando y se obtiene la aproximación de y en x_1 mediante el Método de Euler Mejorado::

$$y_1 = y_0 + \frac{f(x_0,y_0)+f(x_1,\overline{y_1})}{2}(x_1 - x_0)$$

Se procede de forma similar partiendo ahora del punto (x_1, y_1), y así sucesivamente.

Todo lo anterior da lugar a las llamadas fórmulas de trabajo del Método de Euler Mejorado:

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$K_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$K_2 = hf(x_n + h, y_n + K_1)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{K_1 + K_2}{2} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots, m - 1)$$

El Método de Euler Mejorado es por tanto un método de Runge-Kutta de orden 2.

Ejemplo

Dado el problema del valor inicial

$$\begin{cases} y' + y = 10\, cosx \\ \quad y(0) = 0 \end{cases}$$

Emplee el Método de Euler Mejorado para obtener una aproximación de PVI en puntos del intervalo [0, 2] dividiendo el mismo en 4 partes iguales. Obtenga la cantidad de cifras decimales exactas en los puntos que se estime la solución, sabiendo que:

$$y(x) = 5\, cosx + 5\, sen\, x - \frac{5}{e^x}$$

es la solución del PVI.

Solución

$y' + y = 10\,cos x \Rightarrow y' = \underbrace{10\,cos x\ -\ y}_{=f(x,y)}$ $\qquad h = \frac{b-a}{m} = \frac{2-0}{4} = 0.5$

Las fórmulas de trabajo del Método de Euler Mejorado son:

$$x_{n+1} = x_n + h = x_n + 0.5$$

$$K_1 = hf(x_{\boldsymbol{n}}, y_{\boldsymbol{n}}) = 0.5[10\,cos(x_{\boldsymbol{n}})\ -\ y_{\boldsymbol{n}}]$$

$$K_2 = hf(x_{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{h}, y_{\boldsymbol{n}} + K_1) = 0.5[10\,cos(x_{\boldsymbol{n}} + 0.5)\ -\ (y_{\boldsymbol{n}} + K_1)]$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{K_1 + K_2}{2} \qquad (n = 0, 1, 2, 3)$$

n	x_n	$y_{\boldsymbol{n}}$	K_1	K_2	$y(x_n)$	Δy_n	k
0	0	0	5	1.8879	0	0	-
1	0.5	3.4440	2.6659	-0.3334	3.75239	0.30839	0
2	1	4.6002	0.4014	-2.1471	5.06947	0.46927	0
3	1.5	3.7274	-1.5100	-3.1894	4.22551	0.49811	0
4	2	1.3770			1.78908	0.41208	0

Las aproximaciones como se observa no poseen cifras decimales exactas. Esta situación podría mejorar si se considera un menor paso.

Con respecto a Euler, este método es mejor. El que veremos a continuación brinda por lo general buenas aproximaciones.

Método de Runge-Kutta de cuarto orden

Para los dos métodos anteriores fue fácil obtener las fórmulas de cada uno de ellos a partir de la interpretación geométrica de los mismos, pero para los métodos de cuarto orden es mucho más complicado. Se pueden deducir varios esquemas de Runge–Kutta de orden cuatro, de modo similar (naturalmente, mucho más laborioso) al usado para obtener RK-2. De estos esquemas, el más popular es el siguiente:

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$K_1 = hf(x_{\boldsymbol{n}}, y_{\boldsymbol{n}})$$

$$K_2 = hf\left(x_{\boldsymbol{n}} + \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{2}}, y_{\boldsymbol{n}} + \frac{K_1}{2}\right)$$

$$K_3 = hf\left(x_{\boldsymbol{n}} + \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{2}}, y_{\boldsymbol{n}} + \frac{K_2}{2}\right)$$

$$K_2 = hf(x_{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{h}, y_{\boldsymbol{n}} + K_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4}{6} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots, m-1)$$

Retomemos el ejemplo anterior, ahora mediante RK-4.

Ejemplo

Dado el problema del valor inicial

$$\begin{cases} y' + y = 10\,cosx \\ \quad y(0) = 0 \end{cases}$$

Emplee el método RK-4 para obtener una aproximación de PVI en puntos del intervalo [0, 2] dividiendo el mismo en 4 partes iguales. Obtenga la cantidad de cifras decimales exactas en los puntos que se estime la solución, sabiendo que:

$$y(x) = 5\,cosx + 5\,sen\,x - \frac{5}{e^x}$$

es la solución del PVI.

Solución

$$y' + y = 10\,cosx \Rightarrow y' = \underbrace{10\,cosx\ -\ y}_{=f(x,y)} \qquad h = \frac{b-a}{m} = \frac{2-0}{4} = 0.5$$

Las fórmulas de trabajo del método RK-4 son:

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$K_1 = hf(x_{\boldsymbol{n}}, y_{\boldsymbol{n}}) = 0.5[10\,cos(x_{\boldsymbol{n}})\ -\ y_{\boldsymbol{n}}]$$

$$K_2 = hf\left(x_{\boldsymbol{n}} + \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{2}}, y_{\boldsymbol{n}} + \frac{K_1}{2}\right) = 0.5\left[10\,cos(x_{\boldsymbol{n}} + 0.25)\ -\ \left(y_{\boldsymbol{n}} + \frac{K_1}{2}\right)\right]$$

$$K_3 = hf\left(x_{\boldsymbol{n}} + \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{2}}, y_{\boldsymbol{n}} + \frac{K_2}{2}\right) = 0.5\left[10\,cos(x_{\boldsymbol{n}} + 0.25)\ -\ \left(y_{\boldsymbol{n}} + \frac{K_2}{2}\right)\right]$$

$$K_2 = hf(x_{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{h}, y_{\boldsymbol{n}} + K_3) = 0.5[10\,cos(x_{\boldsymbol{n}} + 0.25)\ -\ (y_{\boldsymbol{n}} + K_3)]$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4}{6} \qquad (n = 0, 1, 2, 3)$$

n	x_n	$y_{\boldsymbol{n}}$	K_1 K_3	K_2 K_4	$y(x_n)$	Δy_n	k
0	0	0	5 3.9459	3.5946 2.4150	0	0	-
1	0.5	3.7493	2.5133 1.4949	1.1555 0.0794	3.75239	0.00309	2
2	1	5.0649	0.1691 -0.7063	-0.4981 -1.8256	5.06947	0.00457	2
3	1.5	4.2207	-1.7566 -2.3610	-2.5624 -3.0106	4.22551	0.00481	2
4	2	1.7850			1.78908	0.00408	2

Es notable la mejoría experimentada con respecto a RK-2, ni decir con respecto al Método de Euler si se hubiese empleado.

Características de los métodos de Runge-Kutta

En estos métodos la complejidad del coeficiente en el término del error dificulta el acotamiento del error; no obstante, la utilización del método de doble computo ofrece estimaciones generalmente satisfactorias del error. Para un mismo paso generalmente se obtienen mejores aproximaciones en el método de Runge-Kutta de cuarto orden, aunque a costa de utilizar un algoritmo un poco más complicado, pero programable de forma sencilla. Estos métodos por ser de simple paso tienen la ventaja de autoiniciarse, es decir, no requieren el auxilio de ningún otro algoritmo para comenzar a funcionar. Además, no presentan inestabilidad numérica para un paso h lo suficientemente pequeño.

Los algoritmos se encuentran en el epígrafe 7 del libro de texto:

- Euler: página 471
- Euler Mejorado: página 484
- RK-4: página 489-490

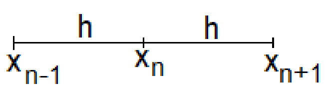
3. Método predictor-corrector de 3 puntos

Los métodos de predictor-corrector como lo indica su nombre requieren de evaluar dos expresiones o ecuaciones para poder obtener el valor deseado. Es algo similar a lo que ocurrió con el método de RK-2. Con la primera ecuación se propone un posible valor de la solución deseada y con la segunda ecuación se corrige finalmente dicha solución.

Para mostrar esto se toma el problema de Cauchy de primer orden de la forma:

$$\begin{cases} y' = f(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Se supone que se quiere buscar la solución en un punto x_m con lo cual se forma el intervalo $[x_0, x_m]$ donde m representa el número de subintervalos de una partición de dicho intervalo. Se considera el esquema que se muestra en la siguiente figura:



Se plantea la integración de la ecuación diferencial en el intervalo $[x_{n-1}, x_{n+1}]$,

$$\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} y'\,dx = \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} f(\mathrm{x}, \mathrm{y})\mathrm{dx} \Rightarrow [y(x)]_{x_{n-1}}^{x_{n-1}} = \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} f(\mathrm{x}, \mathrm{y})\mathrm{dx} \Rightarrow y_{n+1} - y_{n-1} = \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} f(\mathrm{x}, \mathrm{y})\mathrm{dx}$$

y se llega a la expresión siguiente:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} f(\mathrm{x}, \mathrm{y})\mathrm{dx}$$

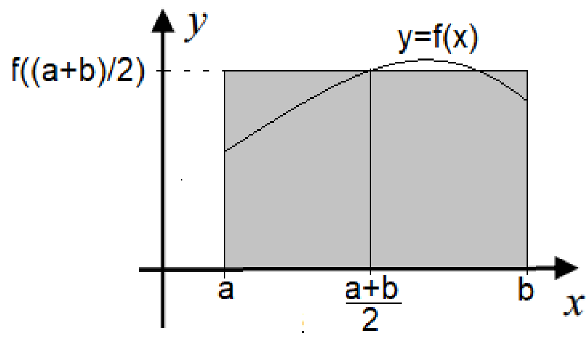
Es bueno aclarar que en la expresión anterior la función integrando f(x, y) depende de las variables (x, y), pero y es función de x, es decir y = y(x), que es precisamente la función incógnita de este problema. Se necesita calcular la expresión integral:

Trapecios: $\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} f(\mathrm{x},\mathrm{y})\mathrm{dx} \approx \frac{h}{2}\left[f\left(x_{n-1}, y_{n-1}\right) + 2f\left(x_n, y_n\right) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right]$

Simpson: $\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} f(\mathrm{x},\mathrm{y})\mathrm{dx} \approx \frac{h}{3}\left[f\left(x_{n-1}, y_{n-1}\right) + 4f\left(x_n, y_n\right) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right]$

Se necesita además de la llamada Fórmula de los Rectángulos. Esta fórmula es de tipo abierto y se considera el punto medio de cada intervalo. En este caso la función f(x) es aproximada mediante un polinomio de grado 0, es decir, una función constante e igual al valor de la función en el punto medio. Desde el punto de vista geométrico el área bajo la curva es aproximada de base la amplitud del intervalo y altura la función en el punto medio.

$$\int_a^b f(\mathrm{x})\mathrm{dx} \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$



En el caso que nos ocupa $a = x_{n-1}$ $b = x_{n+1}$ $\frac{a+b}{2} = x_n$ $b - a = 2h$

Por ello, empleando la Fórmula de los Rectángulos:

$\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} f(\mathrm{x},\mathrm{y})\mathrm{dx} \approx 2hf(x_n, y_n)$

Se tienen en resumen las siguientes expresiones:

Rectángulos: $y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf\left(x_n, y_n\right)$ (1)

Trapecios: $y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 2f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$ (2)

Simpson: $y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}[f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 4f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$ (3)

Observaciones:

a) Las tres fórmulas anteriores plantean que se puede calcular el valor de y_{n+1} si se conocen los valores de y_n e y_{n-1}.

b) Como se supone que el valor de y_{n-1} es conocido al inicio debido a la condición inicial entonces el único valor que hay que calcular al inicio es el valor de y_n.

c) Por lo tanto hay que conocer el valor de y_1 por algún otro método. Para esto se puede utilizar algún método de Runge-Kutta. Esto solo se hace una sola vez y es al comienzo de los cálculos.

d) Después de conocido el valor de y_i se puede tomar la ecuación (1) como ecuación ***predictora*** y las ecuaciones (2) y (3) como ecuaciones ***correctoras***.

Algoritmo de cálculo (Predictor-Corrector de 3 puntos, PC12)

1.- Se dan los datos: (x_0, y_0), m, f(x, y), x_m.

Se calcula el paso: $\mathrm{h} = (x_m - x_0)/\mathrm{m}$

2.- Resolución:

Cálculo de (x_1, y_1) por un método de RK.

Para n = 1, 2,..., m

$$\overline{y_{n+1}} = y_{n-1} + 2\,\mathrm{h}\,\mathrm{f}(x_n, \mathrm{y}_n) \qquad \text{ecuación (1)}$$

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{2}\,[f(x_{\mathrm{n-1}}, \mathrm{y}_{\mathrm{n-1}}) + 2\,\mathrm{f}(x_n, \mathrm{y}_n) + f(x_{n+1}, \overline{y_{n+1}})] \qquad \text{ecuación (2)}$$

Algoritmo de cálculo (Predictor-Corrector de 3 puntos, PC13)

1.- Se dan los datos: (x_0, y_0), m, f(x, y), x_m.

Se calcula el paso: $\mathrm{h} = (x_m - x_0)/\mathrm{m}$

2.- Resolución:

Cálculo de (x_1, y_1) por un método de RK.

Para n = 1, 2,..., m

$$\overline{y_{n+1}} = y_{n-1} + 2\,\mathrm{h}\,\mathrm{f}(x_n, \mathrm{y}_n) \qquad \text{ecuación (1)}$$

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}[f(x_{n-1}\,, y_{n-1}) + 4f(x_n\,, y_n) + f(x_{n+1}\,, \overline{y_{n+1}})] \qquad \text{ecuación (3)}$$

Ejemplo

Dado el problema del valor inicial

$$\begin{cases} y' + y = 10\,cosx \\ \quad y(0) = 0 \end{cases}$$

Emplee los métodos predictor-corrector PC12 y PC13 para obtener una aproximación de PVI en puntos del intervalo [0, 2] dividiendo el mismo en 4 partes iguales. Para la estimación de y_1 emplee RK-4. Obtenga la cantidad de cifras decimales exactas en los puntos que se estime la solución, sabiendo que:

$$y(x) = 5\,cosx + 5\,sen\,x - \frac{5}{e^x}$$

es la solución del PVI.

Solución

$$y' + y = 10\,cosx \Rightarrow y' = \underbrace{10\,cosx\; - \;\mathrm{y}}_{=f(x,y)} \qquad h = \frac{b-a}{m} = \frac{2-0}{4} = 0.5$$

El valor de $y_1=y(x_1)=y(0.5)$ se debe obtener mediante un método de RK. En los dos ejemplos anteriores se obtuvieron valores aproximados de y_1 por los métodos de RK-2 y RK-4, resultando el correspondiente a RK-4 el de mejor precisión: y_1= 3.7493. La precisión de $y_1=y(x_1)=y(0.5)$ se puede mejorar con un paso menor, incluso prefijando una cota de error y un paso inicial, e irlo reduciendo a la mitad y estimando el error mediante doble cómputo, hasta que se satisfaga el requerimiento de precisión deseado, similar a como se procede en integración numérica.

Empleando el método predictor-corrector PC12

Las fórmulas de trabajo serían:

$x_n = x_{n-1} + h = x_{n-1} + 0.5$ n=1, 2, 3

Predictor: $\overline{y_{n+1}} = y_{n-1} + 2hf(x_n , y_n) = y_{n-1} + f(x_n , y_n) = y_{n-1} + 10\,cos(\boldsymbol{x_n}) - \boldsymbol{y_n}$

Corrector: $y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{2}[f(x_{n-1} , y_{n-1}) + 2f(x_n , y_n) + f(x_{n+1} , \overline{y_{n+1}})]$

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{2}\{10\,cos(\boldsymbol{x_{n-1}}) - \boldsymbol{y_{n-1}} + 2[10\,cos(\boldsymbol{x_n}) - \boldsymbol{y_n}] + 10\,cos(\boldsymbol{x_{n+1}}) - \overline{y_{n+1}}\}$$

n	x_{n-1}	x_n	x_{n+1}	$\boldsymbol{y_{n-1}}$	$\boldsymbol{y_n}$	$\overline{y_{n+1}}$	$\boldsymbol{y_{n+1}}$
1	0	0.5	1	0.0000	3.7493	5.0265	5.1074
2	0.5	1	1.5	3.7493	5.1074	4.0449	4.3194
3	1	1.5	2	5.1074	4.3194	1.4954	1.9611

Análisis de errores:

n	x_n	$\boldsymbol{y_n}$	$y(x_n)$	Δy_n	k
0	0	0	0	0	-
1	0.5	3.7493	3.75239	0.00309	2
2	1	5.1074	5.06947	0.03793	1
3	1.5	4.3194	4.22551	0.09389	0
4	2	1.9611	1.78908	0.17202	0

Empleando el método predictor-corrector PC13

Las fórmulas de trabajo serían:

$x_n = x_{n-1} + h = x_{n-1} + 0.5$ n=1, 2, 3

Predictor: $\overline{y_{n+1}} = y_{n-1} + 2hf(x_n , y_n) = y_{n-1} + f(x_n , y_n) = y_{n-1} + 10\,cos(\boldsymbol{x_n}) - \boldsymbol{y_n}$

Corrector: $y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}[f(x_{n-1} , y_{n-1}) + 4f(x_n , y_n) + f(x_{n+1} , \overline{y_{n+1}})]$

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}\{10\,cos(\boldsymbol{x_{n-1}}) - \boldsymbol{y_{n-1}} + 4[10\,cos(\boldsymbol{x_n}) - \boldsymbol{y_n}] + 10\,cos(\boldsymbol{x_{n+1}}) - \overline{y_{n+1}}\}$$

n	x_{n-1}	x_n	x_{n+1}	$\boldsymbol{y_{n-1}}$	$\boldsymbol{y_n}$	$\overline{y_{n+1}}$	$\boldsymbol{y_{n+1}}$
1	0	0.5	1	0.0000	3.7493	5.0265	5.0804
2	0.5	1	1.5	3.7493	5.0804	4.0719	4.2414
3	1	1.5	2	5.0804	4.2414	1.5464	1.8269

Análisis de errores:

n	x_n	y_n	$y(x_n)$	Δy_n	k
0	0	0	0	0	-
1	0.5	3.7493	3.75239	0.00309	2
2	1	5.0804	5.06947	0.01093	1
3	1.5	4.2414	4.22551	0.01589	1
4	2	1.8269	1.78908	0.03782	1

A continuación, se presenta una ejercitación clasificada en dos categorías: propuestos (constituyen una sugerencia de ejercitación) y de estudio independiente (constituyen la base de la tarea a asignar a los estudiantes).

Ejercicio propuesto (sugerencia de ejercitación)

Dado el problema del valor inicial $\begin{cases} y' + 2y = 3 - 2x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

a) Escriba las fórmulas de trabajo de los métodos de Runge-Kutta y predictor-corrector estudiados

b) Determine mediante RK-4 un valor aproximado de y(1) con paso h=0.1 y estime el error cometido, sabiendo que con paso h=0.2, se tiene que $y(1) \approx 1.031610$. ¿Qué haría si la estimación del error obtenido no satisface sus requerimientos de precisión para el cálculo de y(1)?

c) Determine aproximadamente el área bajo la curva y=y(x) y estime el error cometido

d) Determine un intervalo de incertidumbre donde se encuentre el punto donde se alcanza el valor máximo de y(x) en el intervalo [0,1], y estime el valor máximo, tomando al punto medio del intervalo de incertidumbre como una aproximación de óptimo de máxima.

Ejercicios de estudio independiente

Dado el problema del valor inicial $\begin{cases} y' = \frac{xy}{p\,x^2 + q\,y^2} \\ y(q-1) = p \end{cases}$

a) Escriba las fórmulas de trabajo del método RK-p

b) Escriba las fórmulas de trabajo del método PC-1q

c) Determine mediante RK-p un valor aproximado de y(q+p) dividiendo inicialmente en 4 partes iguales el intervalo [q-1.q+p]. Finalice el proceso de aproximación una vez llegada a las 16 divisiones del intervalo, e indique una cota del error que se alcanzó.