Integración Numérica

Sumario:

- El problema de la Integración numérica
- Método de los Trapecios. Interpretación geométrica. Fórmulas básica y compuesta de la Regla de los Trapecios y expresiones del error
- Método de Simpson. Interpretación geométrica. Fórmulas básica y compuesta de la Regla de Simpson y expresiones del error
- Estimación de una cota del error mediante doble computo (o Cálculo y Recalculo)

Bibliografía:

Texto Básico: "Matemática Numérica", Manuel Álvarez Blanco, Alfredo Guerra Hernández, Rogelio Lau Fernández.

Volumen 2. Capítulo 5
Epígrafes 5.1 al 5.3 en las páginas 301 a la 321

Objetivos:

- Describir el problema general de la integración numérica
- Describir geométricamente los métodos de trapecios y de Simpson para el cálculo aproximado de integrales definidas
- Obtener las fórmulas del método de los trapecios y del método de Simpson y de las expresiones para estimar el error, y emplearlas en el calculo aproximado de integrales definidas y la valoración del error cometido.

Aspectos a desarrollar:

1. Aproximación de integrales definidas. Generalidades
2. Cuadraturas de Newton-Cotes
3. Método de los Trapecios. Interpretación geométrica. Formulas básica y compuesta. Estimación del error.
4. Método de Simpson. Interpretación geométrica. Formulas básica y compuesta. Estimación del error
5. Estimación del error mediante doble computo.

1. Integración numérica. Generalidades

Este es otro tema muy importante de la Matemática numérica, motivado en primer lugar, por dificultades que se presentan en la evaluación de integrales definidas, y en segundo lugar y no menos importante, por las importantes aplicaciones que poseen las integrales definidas en las diferentes ramas de la Geometría, la Física, la Química, las Ciencias Económicas y, prácticamente, en todas las ramas del saber.

Desde el punto de vista numérico, la fórmula de Leibniz $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ para el cálculo de integrales de forma explícita, posee poco valor. Esto se debe a que la clase de funciones que poseen primitivas en términos de una suma finita de funciones elementales es relativa pequeña (ejemplo e^x/x, e^{-x^2}, $\frac{\text{sen x}}{\text{x}}$, ... no poseen primitivas en términos de una suma finita de funciones elementales), y en no pocas ocasiones, el proceso de obtención de primitivas es engorroso Otra causa se presenta cuando la expresión analítica de función no es conocida, y solo se conocen sus valores en un conjunto de puntos, o simplemente cuando se tiene la necesidad de automatizar el proceso de evaluación de las mismas.

La aproximación de $\int_a^b f(x)\,\text{dx}$ mediante una suma de Riemann:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \qquad (c_i \in [x_{i-1}, x_i])$$

tampoco es desde el punto de vista numérico suficiente, pues no se tienen resultados que nos permitan escoger los puntos x_i y c_i de modo que S_n posea una precisión dada de antemano.

Los métodos numéricos de integración (cuadratura numérica) poseen la forma general:

$$\int_a^b f(x)\,\rho(x)dx = \sum_{i=1}^{n} H_i\, f(x_i) + R_n(f) \qquad (1)$$

donde:

x_i: nodos de la cuadratura

ρ(x): función de ponderación, no negativa e integrable en (a, b)

$H_i(x_1, \ldots, x_n, \rho(\text{x}))$: pesos de la cuadratura

R_n (f): error de la cuadratura.

La función f(x) se aproxima mediante un polinomio de interpolación y los valores x_i y H_i se seleccionan de modo que la cuadratura sea exacta (R_n (f)= 0) para polinomios de hasta cierto grado. Esto da lugar a distintos tipos de cuadraturas:

- Cuadratura de Newton-Cotes.

  Los nodos se toman equidistantes y ρ(x)=1.

  Esta su vez se clasifica como:

a) cerrada (los extremos forman parte de los nodos)

b) abierta (los extremos no forman parte de los nodos)

- Cuadratura de Gauss

  Los nodos x_i y pesos H_i se escogen de modo que la cuadratura sea exacta (R_n (f)= 0) para polinomios de grado el mayor posible

- Cuadratura de Csebisev.

  Los pesos se toman iguales $H_1 = H_2 = ... = H_n$

En la práctica generalmente el intervalo [a, b] se particiona en m subintervalos, y sobre cada subintervalo se aplica una fórmula de cuadratura y estos resultados se suman. Las fórmulas de cuadraturas obtenidas por este procedimiento se denominan fórmulas compuestas.

Algunos resultados comunes a las cuadraturas serán tratados a continuación.

Investiguemos la propagación del error que se origina al sustituir $f(x_i)$ por una aproximación y_i . Represente ε una cota superior: $\left| f(x_i) - y_i \right| \le \varepsilon \quad (i = 1,2\ldots m)$ entonces

$$\left| \sum_{i=1}^{n} H_i f(x_i) - \sum_{i=1}^{n} H_i y_i \right| \le \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \left| H_i \right|$$

Resulta natural emplear una cuadratura donde $\sum_{i=1}^{n} \left| H_i \right|$ sea lo menor posible, o al menos

$$\sum_{i=1}^{n} \left| H_i \right| \le K \qquad (2) .$$

Consideremos el caso especial en que los pesos H_i sean positivos. Si la cuadratura (1) es exacta para los polinomios de grado 0 (constante), entonces (2) se cumple. En efecto, consideremos que para f(x)=C, se cumple que R_n (f)= 0, entonces según (1)

$$\int_a^b f(x)\rho(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \int_a^b C\rho(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{H_i} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} H_i C$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} H_i = \int_a^b \rho(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \mathrm{K}$$ (pues ρ(x) es integrable en (a, b)).

Por tanto, si los pesos son positivos la cuadratura desde el punto de vista de la propagación del error está cerca de la óptima. Mostraremos que desde el punto de vista del error R_n (f), también se comporta de modo adecuado.

Teorema:

Sea [a, b] un intervalo finito. Supongamos que la cuadratura (1) es exacta para todo polinomio de grado menor o igual que m ($\mathrm{m} = \mathrm{m(n)} \to \infty \ \text{ si } \ \mathrm{n} \to \infty$) y los pesos cumplen la condición (2), entonces para toda función continua en [a, b] se cumple $R_n(f) \to 0 \ \text{ si } \ n \to \infty$.

2. Cuadraturas de Newton-Cotes

Las fórmulas de cuadratura de Newton-Cotes se obtienen al sustituir el integrando por un polinomio de interpolación del tipo Lagrange sobre la base de un conjunto de nodos de interpolación equidistantes $x_i = c + i\,h \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$, es decir, $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_{n-1}(x)$.

El error de integración será, por tanto:

$$R_{n-1}(f) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b p_{n-1}(x) = \int_a^b [f(x) - p_{n-1}(x)]dx = \int_a^b r_{n-1}(x)dx \quad rp.$$

es decir, el error de integración no es más que la integral del error de interpolación.

Diferenciaremos dos casos:

- c = a y b = c + (n+1)h de donde $h = \dfrac{b-a}{n+1}$, es decir, los extremos del intervalo de integración no se consideran entre los nodos de interpolación. Las fórmulas de cuadratura obtenidas por esta vía se denominan fórmulas de cuadratura abiertas.
- c + h = a y b = c + nh de donde $h = \dfrac{b-a}{n-1}$, es decir, los extremos del intervalo de integración se consideran entre los nodos de interpolación. Las fórmulas de cuadratura obtenidas por esta vía se denominan fórmulas de cuadratura cerradas.

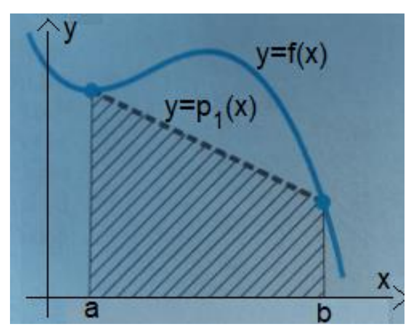
Fórmulas de cuadratura cerradas en un extremo y abierta en el otro se pueden formar, pero solo en raras ocasiones son utilizadas.

Supondremos en lo sucesivo que f(x) es una función continua en [a, b]. Aunque algunas de las expresiones que se deducirán pueden usarse aun sin el requisito de la continuidad de f(x), las fórmulas para el cálculo de los errores siempre requerirán la continuidad, e incluso la derivabilidad de f(x), de modo que no vale la pena contemplar el caso de funciones discontinuas. Por otra parte, en la mayoría de los casos de interés práctico el integrando es continuo o la integral se puede descomponer en una suma de integrales con el integrando continuo en el intervalo de integración.

En los siguientes dos puntos se desarrollan cuadraturas del tipo Newton-Cotes para polinomios de interpolación del tipo Lagrange de primer grado (Método de los Trapecios) y de segundo grado (Método de Simpson).

3. Método de los Trapecios

Este método se obtiene tomando dos nodos (n=2) y empleando una fórmula de tipo cerrado, por lo que x_1=a y x_2=b. En este caso la función f(x) es aproximada mediante un polinomio de grado 1. Desde el punto de vista geométrico el área bajo la curva es aproximada por el área bajo el segmento de recta que une los puntos (a, f(a)) y (b, f(b)).



En la figura anterior la línea continua (en color azul) representa la función y = f(x) y la línea discontinua (en color negro) representa la aproximación por una línea recta. En este método la idea es aproximar a la función integrando por una función lineal de forma que el área del trapecio curvilíneo se aproxime por el área del trapecio representado en la figura.

Para esto lo primero que hay que hacer es determinar el polinomio lineal de Lagrange en dicho intervalo. Del tema de interpolación de funciones se sabe que si se conocen los valores de los puntos $(x_1, y_1)=(a, f(a))$ y $(x_2, y_2)=(b, f(b))$, entonces el polinomio lineal de interpolación de Lagrange $p_1(x)$ en el intervalo $[x_1, x_2]=[a, b]$ que interpola a los valores y_1 y y_2 viene dado por la expresión

$$p_1(x) = y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) = y_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = f(a)\frac{x - b}{a - b} + f(b)\frac{x - a}{b - a}$$

Es evidente, geométricamente, que estos dos polinomios cumplen con la propiedad:

$$\int_{x_1}^{x_2} l_1(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} l_2(x)dx = \frac{b-a}{2} = \frac{h}{2} \qquad (h = b - a))$$

Este resultado no es más que el área bajo la curva de ambas funciones, donde h es la longitud del intervalo de integración. Luego si se hace uso del polinomio lineal $p_1(x)$, este se sustituye en la integral, y se efectúan las integraciones. Apoyándose en el resultado anterior, se obtiene la siguiente fórmula (básica) de aproximación de correspondiente al Método de los Trapecios:

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_h = \int_a^b p_1(x)\,dx = \int_a^b \left[y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)\right]dx = y_1 \int_a^b l_1(x)\,dx + y_2 \int_a^b l_2(x)\,dx$$
$$= \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] = h\left[\frac{f(x_1)}{2} + \frac{f(x_2)}{2}\right] = h\left[\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2}\right]$$

Como puede observarse la aproximación, para el caso particular de la figura al final de la página anterior, es por defecto ya que el valor exacto del área de la región es mayor que el área del trapecio inscrito en la misma. El valor numérico de ese error está dado por el valor absoluto de la diferencia de las áreas entre las dos regiones. Por lo tanto, el error será cero solo cuando la función integrando sea un polinomio lineal o una constante dentro del intervalo coincidiendo el resultado de la fórmula de los trapecios con el valor exacto de la integral. Debido a esto se dice que esta fórmula tiene ***orden de precisión 1***.

El error de integración será, por tanto:

$$R_1(f) = \int_a^b r_1(x)dx = \int_a^b \frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x - a)(x - b)\,dx = \frac{f^{(2)}(c)}{2!}\int_a^b (x - a)(x - b)\,dx \quad c \in [a, b]$$

Dado que: $\int_a^b (x - a)(x - b)\,dx = -\frac{(b-a)^3}{6} = -\frac{h^3}{6}$

entonces $R_1(f) = -\frac{f^{(2)}(c)}{12}h^3 \qquad c \in [a, b]$

Obsérvese que el signo menos que aparece tiene un significado interesante: como era de esperar, cuando la segunda derivada es positiva en el intervalo [a, b] (la gráfica de la función es cóncava hacia arriba) la recta de interpolación está por encima de f(x) y el error es negativo, es decir por exceso, mientras que cuando la gráfica es cóncava hacia abajo (segunda derivada negativa) el error de integración es positivo, es decir, por defecto.

En término de cota del error absoluto: $\Delta I_h = \frac{M_2}{12} h^3 \qquad \left(\left| f^{(2)}(x) \right| \leq M_2 \quad x \in [a, b] \right)$

En resumen (Regla básica de los trapecios):

$$I_h = h\left[\frac{f(x_1)}{2} + \frac{f(x_2)}{2}\right] = h\left[\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2}\right]$$

$$\Delta I_h = \frac{M_2}{12} h^3 \qquad \left(\left| f^{(2)}(x) \right| \leq M_2 \quad x \in [a, b] \right)$$

Ejemplo

Determine un valor aproximado de $\int_0^1 [cos(x^2+1)+1]dx$ y una valoración del error cometido mediante el empleo de la Regla básica de los trapecios.

Solución

$$f(x) = cos(x^2+1)+1 \qquad f''(x) = -4x^2 cos(x^2+1) - 2sen(x^2+1) \qquad h = b - a = 1$$

$$f(a) = f(0) = cos(1) + 1 \approx 1.540302305 \qquad f(b) = f(1) = cos(2) + 1 \approx 0.5838531634$$

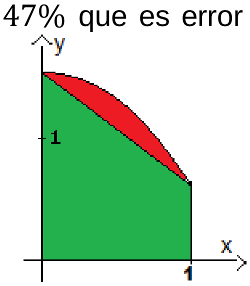
$$\left| f''(x) \right| = \left| -4x^2 cos(x^2+1) - 2sen(x^2+1) \right| \leq 4x^2 \underbrace{\left| cos(x^2+1) \right|}_{\leq 1} + 2 \underbrace{\left| sen(x^2+1) \right|}_{\leq 1}$$

$$\leq 4x^2 + 2 \leq 6 \qquad para\ x \in [0, 1] \qquad \therefore M_2 = 6$$

$$I_h = h\left[\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2}\right] \Rightarrow I_1 = 1\left[\frac{f(0)}{2} + \frac{f(1)}{2}\right] = \frac{1.540302305 + 0.5838531634}{2} = 1.062077734$$

$$\Delta I_h = \frac{M_2}{12} h^3 \Rightarrow \Delta I_1 = \frac{6}{12} 1^3 = 0.5$$

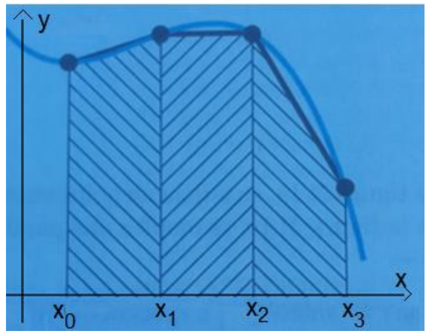
Observe que $\delta I_1 = \frac{\Delta I_1}{|I_1|} = \frac{0.5}{1.062077734} = 0.4707753340 \approx 47\%$ que es error relativo muy alto, lo que indica que la aproximación no es buena.



Geométricamente, el área en color verde representa el valor aproximado de la integral, el área en color rojo el error cometido.

Para mejorar el resultado anterior se puede proceder de dos formas. Uno es aumentar el grado del polinomio de interpolación, el caso de segundo grado será abordado en el próximo punto. Vimos en interpolación que no es recomendable aumentar en demasía el grado del polinomio de interpolación, debido al carácter oscilante de los mismos con el aumento del grado. La otra forma, y que desarrollaremos a continuación, es dividir el intervalo de integración en m partes iguales, y en cada uno de los subintervalos generados emplear la formula básica, que equivale a haber interpolado por tramos e integrar la función por tramos obtenida.

Generalmente el método de los trapecios no se aplica directamente al intervalo [a, b], sino que se subdivide en m partes iguales y sobre cada uno de ellos se aplica el método. Por ejemplo, dividiendo el intervalo de integración en 3 partes iguales:



Sea $h = \frac{b-a}{m}$ el paso y x_i los puntos extremos de los subintervalos generados, así

$$x_0 = a, \quad x_1 = x_0 + h = a + h, \quad x_2 = x_1 + h = a + 2h, \cdots, x_m = x_{m-1} + h = a + mh = b$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_h = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p_1(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} h\left[\frac{f(x_{i-1})}{2} + \frac{f(x_i)}{2}\right]$$

$$= h\left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{m-1}) + \frac{f(x_m)}{2}\right]$$

que es la expresión que aparece en el libro de texto, la cual es equivalente a:

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_h = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{m-1}) + f(x_m)] = \frac{h}{2}[E + 2\,S_{int}]$$

donde:

$E = f(x_0) + f(x_m)$: Suma de la función en los extremos

$S_{int} = f(x_1) + \cdots + f(x_{m-1})$: Suma de la función en los puntos intermedios

La expresión obtenida se denomina formula compuesta del método de los trapecios y el error de la misma será:

$$R(f) = -\frac{h^3}{12}\left[f^{(2)}(c_1) + f^{(2)}(c_2) + \cdots + f^{(2)}(c_m)\right] = -\frac{mh^3}{12} f^{(2)}(c) = -\frac{(b-a)^3}{12\,m^2} f^{(2)}(c)$$

donde $c \in [a, b]$.

En término de cota del error absoluto:

$$\Delta I_h = \frac{mh^3}{12} M_2 = \frac{(b-a)^3}{12\,m^2} M_2 = \frac{(b-a)h^2}{12} M_2 \qquad \left(\left|f^{(2)}(x)\right| \le M_2 \quad x \in [a, b]\right)$$

En resumen (Regla compuesta de los trapecios):

$$I_h = \frac{h}{2}[E + 2\,S_{int}] \qquad h = \frac{b-a}{m} \qquad E = f(x_0) + f(x_m) \qquad S_{int} = f(x_1) + \cdots + f(x_{m-1})$$

$$\Delta I_h = \frac{mh^3}{12} M_2 = \frac{(b-a)^3}{12\,m^2} M_2 = \frac{(b-a)h^2}{12} M_2 \qquad \left(\left|f^{(2)}(x)\right| \le M_2 \quad x \in [a, b]\right)$$

Ejemplo

Determine un valor aproximado de $\int_0^1 [cos(x^2+1)+1]dx$ y una valoración del error cometido mediante el empleo de la Regla compuesta de los trapecios dividiendo el intervalo de integración en 4 partes iguales.

Solución

$f(x) = cos(x^2+1)+1 \quad f''(x) = -4x^2 cos(x^2+1) - 2sen(x^2+1) \quad h = \frac{b-a}{4} = 0.25$

Organicemos los cálculos en la siguiente tabla:

i	x_1	E	S_{int}
0	0	1.540302305	
1	0.25		1.486689667
2	0.5		1.315322362
3	0.75		1.008296231
4	1	0.583853163	
	∑:	2.124155468	3.810308260

$$I_h = \frac{h}{2}[E + 2\,S_{int}] \Rightarrow I_{0.25} = \frac{0.25}{2}[2.124155468 + 2(3.810308260)] = 1.218096498$$

Del ejercicio anterior se sabe que:

$$\left|f''(x)\right| \leq 6 \quad para\ x \in [0,1] \qquad \therefore M_2 = 6$$

$$\Delta I_h = \frac{mh^3}{12}M_2 \Rightarrow \Delta I_{0.25} = \frac{4\,(0.25)^3}{12}6 = 2\,(0.25)^3 = \frac{1}{32} = 0.03125$$

Se manifiesta una mejora considerable en el error absoluto, y en el relativo:

$$\delta I_{0.25} = \frac{\Delta I_{0.25}}{|I_{0.25}|} = \frac{0.03125}{1.218096498} = 0.02565478190 \approx 2.5\%$$

Si el paso se reduce a la mitad, h=0.125, entonces el número de subdivisiones pasa a ser el doble, m=8. Entonces:

i	x_1	E	S_{int}
0	0	1.540302305	
1	0.125		1.527088903
2	0.25		1.486689667
3	0.375		1.417026526
4	0.5		1.315322362
5	0.625		1.179198129
6	0.75		1.008296231
7	0.875		0.806401548
8	1	0.583853163	
	∑:	2.124155468	8.740023366

$$I_h = \frac{h}{2}[E + 2\,S_{int}] \Rightarrow I_{0.125} = \frac{0.125}{2}[2.124155468 + 2(8.740023366)] = 1.225262637$$

$$\Delta I_h = \frac{mh^3}{12}M_2 \Rightarrow \Delta I_{0.125} = \frac{8\,(0.125)^3}{12}6 = 4\,(0.125)^3 = 0.0078125$$

$$\delta I_{0.125} = \frac{\Delta I_{0.125}}{|I_{0.125}|} = \frac{0.0078125}{1.225262637} = 0.006376183982 \approx 0.63\%$$

Como era de esperar, a medida que el paso h toma valores más pequeños se obtienen resultados más exactos, así los errores respectivos irán disminuyendo. Observe el hecho, que no es casual, de que en la medida en que el paso se reduce a la mitad, el error se reduce aproximadamente a la cuarta parte.

Algoritmo

El algoritmo que sigue calcula aproximadamente la integral definida de la función continua f(x) en el intervalo [a, b] mediante el método de los trapecios tomando n sub intervalos. Se suponen conocidos la función f(x), el intervalo [a, b] y el número entero n > 1:

$h = \frac{b-a}{n}$ {paso

E=f(a)+f(b) {suma del valor de la función en los extremos

$S = 0$

Para i=1 hasta n-1

$x = a + i\,h$ {puntos intermedios

$S = S + f(x)$ {se suman los valores de la función en los puntos intermedios (S_{int})

Fin ciclo i

$Ih = h(E + 2S)/2$ {valor aproximado de la integral

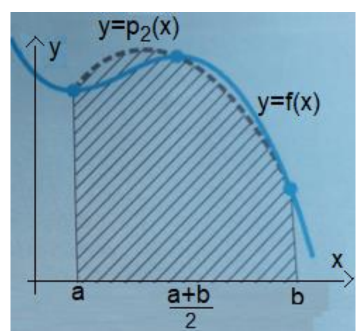
Terminar

4. **Método de Simpson**

Este método se obtiene tomando tres nodos (n=3) y empleando una fórmula de tipo cerrado, por lo que $x_0 = a,\ x_1 = \frac{a+b}{2},\ x_2 = b$.

En este caso la función f(x) es aproximada mediante un polinomio de grado 2.

Desde el punto de vista geométrico el área bajo la curva es aproximada por el área bajo la parábola que pasa por los puntos $(a, f(a));\ \left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right);\ (b, f(b))$.



En la figura anterior la línea continua (en color azul) representa la función y = f(x) y la línea discontinua (en color negro) representa la aproximación mediante una parábola. En este método la idea es aproximar a la función integrando por una función cuadrática de forma que el área bajo la curva se aproxime por el bajo la parábola representada en la figura.

Para esto lo primero que hay que hacer es determinar el polinomio de grado 2 de Lagrange en dicho intervalo. Del tema de interpolación de funciones se sabe que si se conocen los valores de los puntos

$(x_0.y_0)=(a,f(a))$; $(x_1.y_1)=\left(\frac{a+b}{2},f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$; $(x_2.y_2)=(b,f(b))$, entonces el polinomio de grado 2 de interpolación de Lagrange $p_2(x)$ en el intervalo $[x_0, x_2]=[a, b]$ que interpola a f(x) en [a, b] viene dado por la expresión

$$p_2(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+y_2l_2(x)$$

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_2-x_2)}=\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)}=\frac{2}{(b-a)^2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)}=-\frac{4}{(b-a)^2}(x-a)(x-b)$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)}=\frac{2}{(b-a)^2}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$$

Teniendo en cuenta la integral:

$$k\int_a^b\frac{(x-c)(x-d)}{(b-a)^2}=\frac{k}{6(b-a)}[2a^2+a(2b-3(c+d))+2b^2-3b(c+d)+6cd]$$

y sustituyendo k, c y d por los valores correspondientes, se tiene:

$$\int_a^b l_0(x)dx=2\int_a^b\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{(b-a)^2}dx=\frac{b-a}{6}=\frac{h}{3}\qquad\left(h=\frac{b-a}{2}\right)$$

$$\int_a^b l_1(x)dx=-4\int_a^b\frac{(x-a)(x-b)}{(b-a)^2}dx=\frac{2(b-a)}{3}=\frac{4h}{3}$$

$$\int_a^b l_2(x)dx=2\int_a^b\frac{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)^2}dx=\frac{b-a}{6}=\frac{h}{3}$$

$$\int_a^b f(x)dx\approx\int_a^b p_2(x)dx=y_0\int_a^b l_0(x)dx+y_1\int_a^b l_1(x)dx+y_2\int_a^b l_2(x)dx=$$

$$=f(x_0)\frac{h}{3}+f(x_1)\frac{4h}{3}+f(x_2)\frac{h}{3}=\frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]$$

Obteniéndose la llamada fórmula básica del método de Simpson:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx\approx\frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]$$

El valor numérico de ese error está dado por el área entre las curvas y=f(x), $y=p_2(x)$. El error será cero solo cuando la función integrando sea un polinomio de grado menor o igual que 2 dentro del intervalo, coincidiendo el resultado de la fórmula de Simpson con el valor exacto de la integral. Debido a esto se dice que esta fórmula tiene ***orden de precisión 2***.

De forma semejante a como se procedió en el método de los trapecios, aunque con dificultades adicionales, se puede demostrar que el error está dado por la expresión:

$$R_2(f) = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(c) = -\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(c) \qquad c \in [a, b]$$

En término de cota del error absoluto: $\Delta I_h = \frac{M_4}{90}h^5 \qquad \left(\left|f^{(4)}(x)\right| \leq M_4 \quad x \in [a, b]\right)$

Ejemplo

Dada la siguiente tabla de valores de cierta función y=f(x).

x_i	0	0.5	1	1.5	2
y_i	1	2.028115	2.718282	3.403298	4.11325

Determine un valor aproximado de $\int_0^2 f(x)dx$ con paso h=1 mediante el método de Simpson

Solución

Los valores a considerar son los siguiente;

i	0	1	2
x_i	0	1	2
y_i	1	2.718282	4.11325

$$I_h = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \Rightarrow I_1 = \frac{1}{3}[f(0) + 4f(1) + f(2)]$$

$$= \frac{1}{3}[1 + 4(2.718282) + 4.11325] = 5.328792666$$

El error no puede estimarse al ser desconocida la expresión analítica de la función, y en consecuencia su cuarta derivada no se puede obtener y acotar su valor en [0, 2].

En aras de mejorar la aproximación que da la regla básica de Simpson, por lo general el método de Simpson no se aplica directamente al intervalo [a, b], sino que se subdivide en m partes iguales y sobre la base de ellos se aplica el método. Debido a que cada arco de parábola necesita tres puntos para definirla, o lo que es equivalente, necesita 2 subintervalos, se deduce que el número de subdivisiones(m) tiene que ser par debido a que k arcos de parábola necesitarían 2k subdivisiones.

Sea $h = \frac{b-a}{m}$ (m es par) el paso y x_i los puntos extremos de los subintervalos generados, así

$$x_0 = a, \quad x_1 = x_0 + h = a + h, \quad x_2 = x_1 + h = a + 2h, \cdots, x_m = x_{m-1} + h = a + mh = b$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_h = \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} p_2(x)\,dx = \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} \frac{h}{3}[f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})]$$

$$= \frac{h}{3}[E + 4I + 2P]$$

donde:

$E = f(x_0) + f(x_m)$: Suma de la función en los extremos

$I = f(x_1) + f(x_3) + + \cdots + f(x_{2m-1})$: Suma de la función en los puntos de índice impar

$P = f(x_2) + f(x_4) + + \cdots + f(x_{2m-2})$: Suma de la función en los puntos de índice par (no ext.)

La expresión obtenida se denomina formula compuesta del método de Simpson y el error de la misma será:

$$R(f) = -\frac{h^5}{90}\left[f^{(4)}(c_1) + f^{(4)}(c_2) + \cdots + f^{(4)}\left(c_{\frac{m}{2}}\right)\right] = -\frac{mh^5}{180}f^{(4)}(c) = -\frac{(b-a)\,h^4}{180}f^{(4)}(c)$$

donde $c \in [a,b]$.

Esta fórmula, debida a Peano, requiere conocer una cota superior de la cuarta derivada para poder acotar el error, por lo cual su valor práctico es algo limitado. Su valor teórico fundamental reside en que ella pone claramente de manifiesto la dependencia del error con la potencia h^4 , lo cual indica que, a medida que h tome valores más pequeños, el error tenderá a cero con rapidez. Nótese que la presencia de la cuarta derivada en la expresión de $R(f)$, indica que el método de Simpson es exacto si f(x) es un polinomio de grado 2 (lo cual era de esperar, puesto que se aproxima con parábolas) y también para polinomios de grado 3, lo cual resulta realmente inesperado.

En término de cota del error absoluto:

$$\Delta I_h = \frac{mh^5}{180}M_4 = \frac{(b-a)M_4}{180}h^4 \qquad \left(\left|f^{(4)}(x)\right| \le M_4 \quad x \in [a,b]\right)$$: cota segura del error

En resumen (Regla compuesta de Simpson):

$$I_h = \frac{h}{3}[E + 4I + 2P] \qquad h = \frac{b-a}{m} \quad (m\ es\ par)$$

$$E = f(x_0) + f(x_m) \quad I = f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{2m-1}) \quad P = f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{2m-2})$$

$$\Delta I_h = \frac{mh^5}{180}M_4 = \frac{(b-a)M_4}{180}h^4 \qquad \left(\left|f^{(4)}(x)\right| \le M_4 \quad x \in [a,b]\right)$$

Ejemplo

Dada la siguiente tabla de valores de cierta función y=f(x).

x_i	0	0.5	1	1.5	2
y_i	1	2.028115	2.718282	3.403298	4.11325

Determine un valor aproximado de $\int_0^2 f(x)dx$ con paso h=0.5 mediante el método de Simpson.

Solución

Organicemos los cálculos en la siguiente tabla:

i	x_1	E	I	P
0	0	1		
1	0.5		2.028115	
2	1			2.718282
3	1.5		3.403298	
4	2	4.11325		
	Σ:	5.11325	5.431413	2.718282

$$I_h = \frac{h}{3}[E + 4I + 2P] \qquad h = \frac{b-a}{m} = \frac{2-0}{4} = 0.5$$

$$I_{0.5} = \frac{0.5}{3}[5.11325 + 4(5.431413) + 2(2.718282)] = 5.379244333$$

El error igualmente no puede ser estimado mediante la expresión del error dada.

Algoritmo

El algoritmo que sigue calcula aproximadamente la integral definida de la función continua f(x) en el intervalo [a, b] mediante el método de Simpson tomando un número par m de sub intervalos. Se supone conocidos la función f(x), el intervalo [a, b] y el número entero par m≥2:

$h = \frac{b-a}{m}$ {paso m : par (≥2)

E=f(a)+f(b) {suma de los valores de la función en los puntos extremos

$I = 0$ {para sumar de los valores de la función en los puntos de índice impar

$i = 0$

Mientras i< m

  $x = a + i\,h$ {punto de índice impar

  $I = I + f(x)$ {se suman los valores de la función en los puntos de índice impar

  $i = i + 2$

Fin ciclo Mientras

P=0 {para sumar los valores de la función en los puntos de índice par

$i = i + 2$

Mientras i< m

  $x = a + i\,h$ {punto de índice impar

  $P = P + f(x)$ {se suman los valores de la función en los puntos de índice par

  $i = i + 2$

Fin ciclo Mientras

$I_h = \frac{h}{3}[E + 4I + 2P]$ {valor aproximado de la integral

Terminar

5. Estimación del error mediante doble cómputo (cálculo y recálculo)

La estimación del error basado en las fórmulas anteriores requieren de la estimación de las derivadas de la función en el intervalo de integración, que en muchas ocasiones es difícil y en otras nos conducen a estimaciones del error muy por encima de la realidad. También puede suceder que la función venga expresada por una tabla y su expresión sea desconocida. En tales situaciones es preferible encontrar estimaciones del error donde las dificultades anteriores no se presenten.

En las fórmulas compuestas desarrolladas para valores de h es lo suficientemente pequeño se cumple $R(f) \approx Ch^p \quad (C \in R)$ donde p = 2 para el método de los trapecios y p=4 para el método de Simpson. En tal caso diremos que el método es de orden p.

Denoten:

$I_h, I_{\frac{h}{2}}$: valores aproximados de la integral con pasos h y $\frac{h}{2}$ respectivamente

$E_h, E_{\frac{h}{2}}$: error de los valores aproximados de la integral con pasos h y $\frac{h}{2}$ respectivamente

Nótese que $E_{\frac{h}{2}} \approx C\left(\frac{h}{2}\right)^p = \frac{Ch^p}{2^p} \approx \frac{E_h}{2^p}$ de donde $E_h \approx 2^p E_{\frac{h}{2}}$, entonces

$\int_a^b f(x)dx = I_{\frac{h}{2}} + E_{\frac{h}{2}} = I_h + E_h \approx I_h + 2^p E_{\frac{h}{2}}$ por lo que $I_{\frac{h}{2}} + E_{\frac{h}{2}} \approx I_h + 2^p E_{\frac{h}{2}}$

de la cual despejando $E_{\frac{h}{2}}$ se obtiene la estimación $E_{\frac{h}{2}} \approx \dfrac{I_{\frac{h}{2}} - I_h}{2^p - 1}$

o en su versión de error absoluto $\left|E_{\frac{h}{2}}\right| \approx \dfrac{\left|I_{\frac{h}{2}} - I_h\right|}{2^p - 1}$.

En término de cota del error absoluto:

$\Delta I_{\frac{h}{2}} \approx \dfrac{\left|I_{\frac{h}{2}} - I_h\right|}{2^p - 1}$ (p=2 en trapecios, p=4 en Simpson)

Esta forma de estimar el error de integración se denomina estimación del error mediante doble cómputo (en el texto cálculo y recálculo) y nos sugiere un algoritmo para obtener un valor aproximado con una precisión ε prefijada de antemano:

1) Tomar un paso inicial adecuado h = h_0 (o lo que es equivalente tomar un número inicial de subdivisiones y obtener el paso correspondiente) y calcular la aproximación de la integral para el mismo: I_h
2) Calcular el valor aproximado de la integral con paso $\frac{h}{2}$: $I_{\frac{h}{2}}$

3) Estimar el error absoluto $\Delta \boldsymbol{I}_{\frac{h}{2}} \approx \dfrac{\left|\boldsymbol{I}_{\frac{h}{2}} - \boldsymbol{I}_{h}\right|}{\boldsymbol{2^{p}-1}}$ para la aproximación con paso $\dfrac{h}{2}$
4) Si $\Delta I_{\frac{h}{2}} \leq \varepsilon$ entonces tomar como valor aproximado de la integral $I_{\frac{h}{2}}$ y terminar, en caso contrario hacer $h = \dfrac{h}{2}$ y regresar al paso 2.

La programación de este algoritmo se puede hacer eficiente, si se toma en consideración que:

- La suma de la función en los extremos (E) es la misma para cualquier paso, por lo que se debe calcular una sola vez antes del proceso repetitivo
- En el método de los Trapecios a la suma de la función en los puntos intermedios del paso anterior (h) se le deben sumar los valores de la función en los puntos intermedios de índice impar generados al disminuir el paso a la mitad (h/2), para obtener la suma de los valores de la función en los puntos intermedios con el nuevo paso (h/2)
- En el método de Simpson la suma de la función en los puntos de índice impar y de índice par del paso anterior (I(h)+P(h)) es igual a la suma de la función en los puntos de índice par al disminuir el paso a la mitad (h/2), es decir, P(h/2)=I(h)+P(h). Solo se necesita obtener la suma de los valores de la función en los puntos de índice impar con el nuevo paso: I(h/2)

Ejemplo

Dada la siguiente tabla de valores de cierta función y=f(x).

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2
y_i	1	1.648721	2.028115	2.377443	2.718282	3.058835	3.403298	3.754202	4.11325

Determine un valor aproximado de $\int_0^2 f(x)dx$ con error menor que 0.0025 mediante el método de Simpson.

Solución

Ante todo, debemos hacer notar que para estimar el error solo disponemos del método de doble computo, pues la expresión de la función en si es desconocida.

Dividiendo el intervalo de integración en dos partes iguales, se tendría que el paso h=1. Del penúltimo ejemplo se tiene que $I_1 = 5.328792666$.

Dividiendo el paso a la mitad (h=0.5), es decir duplicando la cantidad de subintervalos, del ejemplo anterior se tiene que:

$$I_{0.5} = \frac{0.5}{3}[5.11325 + 4(5.431413) + 2(2.718282)] = 5.379244333$$

Estimando el error por doble computo:

$$\Delta I_{\frac{h}{2}} \approx \frac{\left|I_{\frac{h}{2}} - I_h\right|}{2^p - 1} \Rightarrow \Delta I_{0.5} \approx \frac{|I_{0.5} - I_1|}{2^4 - 1} = \frac{|5.379244333 - 5.328792666|}{15}$$
$$= 0.003363444466 \;\; (> 0.0025)$$

Debido a que no se ha alcanzado la precisión deseada, debemos repetir el procedimiento, o sea volver a dividir el paso a la mitad: h=0.25. En base a las consideraciones realizadas antes de este ejercicio, se tendría que:

E=f(0)+f(2)= 5.11325 ya calculada en los dos ejemplos precedentes

P(h=0.25)=I(h=0.5)+P(h=0.5)= 5.431413+2.718282=8.149695

I(h=0.25)= f(0.5)+ f(0.75)+ f(1.25)+ f(1.75)= 1.648721+2.377443+3.058835+3.754202

=10.83920100

$$I_h = \frac{h}{3}[E + 4I + 2P] \Rightarrow I_{0.25} = \frac{0.25}{3}[5.11325 + 4(10.83920100) + 2(8.149695)]$$
$$= 5.397453666$$

Estimando el error por doble computo:

$$\Delta I_{\frac{h}{2}} \approx \frac{\left|I_{\frac{h}{2}} - I_h\right|}{2^p - 1} \Rightarrow \Delta I_{0.25} \approx \frac{|I_{0.25} - I_{0.5}|}{2^4 - 1} = \frac{|5.397453666 - 5.379244333|}{15}$$

$$= 0.0012139555 \;\; (< 0.0025)$$

$$\therefore \int_0^2 f(x)dx \approx I_{0.25} = 5.397453666 \qquad \Delta I_{0.25} \approx 0.0012139555 \;\; (< 0.0025)$$

Conclusiones

- El método analítico para calcular integrales definidas está limitado a funciones que posean primitiva en términos de una suma finita de funciones elementales, e imposible de aplicar cuando la función está definida en forma tabulada.
- La idea general de los métodos de Newton-Cotes, y que da origen a las denominadas Reglas Básicas, es sustituir el integrando por un polinomio de interpolación (de primer grado en el Método de los Trapecios y de segundo grado en el de Simpson, que corresponden geométricamente al área bajo una recta y una parábola respectivamente) y estimar el error mediante la integral del error de interpolación.
- Para mejorar los resultados, el intervalo de integración se divide en varios subintervalos, en los cuales se aplican las Reglas básicas obtenidas, dando origen a las llamadas Reglas compuestas.
- La forma de estimar del error mediante doble cómputo.

A continuación, se presenta una ejercitación clasificada en tres categorías: resueltos (los estudiantes deben primeramente tratar de identificar vías posibles de solución y compararla con la utilizada), propuestos (constituyen una sugerencia de ejercitación) y de estudio independiente (constituyen la base de la tarea a asignar a los estudiantes).

Antes de estudiar los ejercicios resueltos y resolver ejercicios propuestos y de estudio independiente, se sugiere consultar la bibliografía indicada, en particular los ejemplos del libro de texto en formato digital: 1 al 4(pág. 300-302)), 1(305-306), 2(309-310), 4(312-313), 1(317-318).

Ejercicios resueltos

1. La cantidad de masa transportada por un tubo durante cierto periodo de tiempo se calcula mediante $M = \int_{t_1}^{t_2} Q(t)c(t)dt$ donde M=masa(mg), t_1=tiempo inicial(min), t_2=tiempo inicial(min), Q(t)=tasa de flujo (m^3/min) y c(t)=concentración(mg/m^3). Las representaciones funcionales siguientes definen las variaciones temporales en el flujo y la concentración:

$$Q(t) = 9 + 4cos^2(0.4t) \qquad c(t) = 5e^{-0.5t} + 2e^{0.15t}$$

Determine un valor aproximado de la masa transportada en el intervalo de tiempo [1, 2] minutos, mediante el método de los trapecios con error menor que una centena, sabiendo que $|f''(t)| \leq 10$ en [1, 2] donde $f(t) = Q(t)c(t)$.

Solución

$$M = \int_{t_1}^{t_2} Q(t)c(t)dt \Rightarrow M = \int_1^2 \underbrace{[9 + 4cos^2(0.4t)][5e^{-0.5t} + 2e^{0.15t}]}_{=f(t)} dt$$

Se conoce que: $|f''(t)| \leq 10 \quad para\ t \in [1, 2] \qquad \therefore M_2 = 10$

Una cota del error absoluto viene dada por $\Delta I_h = \frac{(b-a)h^2}{12} M_2 = \frac{(2-1)h^2}{12} 10 = \frac{5h^2}{6} \leq 0.01$

Despejando: $h \leq \sqrt{\frac{6(0.01)}{5}} \approx 0.1095445115.$

Por lo tanto, tomando paso h=0.1 se garantiza que el error en la aproximación del valor de M, mediante el método de los Trapecios, va a ser menor que 0.01, o sea, una centena.

Organicemos los cálculos en la siguiente tabla:

i	t_i	E	S_{int}
0	1	66.38311027	
1	1.1		64.36073720
2	1.2		62.41747873
3	1.3		60.55292105
4	1.4		58.76661152
5	1.5		57.05807237
6	1.6		55.42681468
7	1.7		53.87235208
8	1.8		52.39421411
9	1.9		50.99195859
10	2	49.66518306	
	∑:	116.0482933	515.8411603

$$I_h = \frac{h}{2}[E + 2\,S_{int}] \Rightarrow I_{0.25} = \frac{0.1}{2}[116.0482933 + 2(515.8411603)] = 57.38653069$$

El valor aproximado de la masa transportada en el intervalo de tiempo [1, 2] minutos, con error menor que una centena, es de M=57.3865069 mg.

2. Un cuerpo se mueve lo largo de una línea recta con una velocidad dada por la expresión $v(t) = \sqrt{t}sen^2t \ \left(\frac{m}{min^2}\right)$. Determine con una precisión de una cifra decimal exacta, el espacio recorrido en el intervalo de tiempo entre 1 y 3 minutos, mediante:

   a) el método de los Trapecios, determinando un número de subintervalos que garantice la precisión dada

   b) el método de Simpson, tomando inicialmente el paso correspondiente a la cuarta parte de las subdivisiones determinadas en el inciso anterior, y estimando el error por doble cómputo.

Solución

$$S = \int_1^5 v(t)dt = \int_1^5 \sqrt{t}sen^2t\,dt \qquad v''(t) = \left(4\sqrt{t} + \frac{1}{4t\sqrt{t})}\right)cos^2t + \frac{sen(2t)}{\sqrt{t}} - 2\cdot\sqrt{t} - \frac{1}{4t\sqrt{t}}$$

a) Un número de subintervalos que garantice la precisión de 1 cifra decimal exacta, se obtiene mediante la solución respecto a m de la inecuación: $\Delta I_h = \frac{(b-a)^3}{12\,m^2}M_2 \le 0.5\ 10^{-1}$.

Para ello debemos obtener una cota superior del módulo de la segunda derivada de v(t):

$$\left|v''(t)\right| = \left|\left(4\sqrt{t} + \frac{1}{4t\sqrt{t})}\right)cos^2t + \frac{sen(2t)}{\sqrt{t}} - 2\sqrt{t} - \frac{1}{4t\sqrt{t}}\right|$$
$$\le \left|\left(4\sqrt{t} + \frac{1}{4t\sqrt{t})}\right)cos^2t\right| + \left|\frac{sen(2t)}{\sqrt{t}}\right| + \left|\,2\sqrt{t}\right| + \left|\frac{1}{4t\sqrt{t}}\right|$$

Debido a que el valor modular de las funciones trigonométricas seno y coseno son menores o iguales que 1, y tomando en consideración que t ≥1, entonces:

$$\left|v''(t)\right| \le 4\sqrt{t} + \frac{1}{4t\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{t}} + 2\sqrt{t} + \frac{1}{4t\sqrt{t}} = \underbrace{6\sqrt{t}}_{f(t)} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2t\sqrt{t}}}_{g(t)}$$

La función f(t) es estrictamente creciente en [1, 3], por lo que en este intervalo alcanza su mayor valor en t=3 (f(3)), mientras la función g(t) es estrictamente creciente en [1, 3], por lo que en este intervalo alcanza su mayor valor en t=1 (g(1)):

$$\left|v''(t)\right| \le f(3) + g(1) = 6\sqrt{3} + 1 + \frac{1}{2} \approx 11.9 < 12 = M_2$$

Entonces: $\Delta I_h = \frac{(b-a)^3}{12\,m^2}M_2 = \frac{(3-1)^3}{12\,m^2}12 = \frac{8}{m^2} \le 0.05 \Rightarrow m \ge \sqrt{160} \approx 12.64$

Tomemos m=16, por simplicidad de los cálculos: $h = \frac{b-a}{m} = \frac{3-1}{16} = 0.125$

Organicemos los cálculos en la siguiente tabla:

i	t_i	v_i	E	S_{int}
0	1	0.708073	0.708073	
1	1.125	0.863469		0.863469
2	1.25	1.00687		1.00687
3	1.375	1.128222		1.128222
4	1.5	1.218617		1.218617
5	1.625	1.271013		1.271013
6	1.75	1.280846		1.280846
7	1.875	1.246452		1.246452
8	2	1.169303		1.169303
9	2.125	1.054008		1.054008
10	2.25	0.908097		0.908097
11	2.375	0.741577		0.741577
12	2.5	0.566315		0.566315
13	2.625	0.395256		0.395256
14	2.75	0.241558		0.241558
15	2.875	0.11768		0.11768
16	3	0.034494	0.034494	
		∑:	0.742567	13.20928

$$I_h = \frac{h}{2}[E + 2\,S_{int}] \Rightarrow I_{0.125} = \frac{0.125}{2}[0.742567 + 2(13.20928)] = 1.697570437 \quad (metros)$$

$$\Delta I_{0.125} = \frac{(3-1)^3}{12\left(16^2\right)}12 = 0.03125 \quad (< 0.05)$$

El espacio recorrido en el intervalo de tiempo entre 1 y 3 minutos, mediante el método de los Trapecios es $S = 1.697570437 \quad (m)$, con cota del error absoluto $\Delta S = 0.03125 \quad (< 0.05)$.

b) $h = \frac{b-a}{m} = \frac{3-1}{4} = 0.5$

i	t_i	v_i	E	I	P
0	1	0.708073	0.708073		
1	1.5	1.218617		1.218617	
3	2	1.169303			1.169303
3	2.5	0.566315		0.566315	
4	3	0.034494	0.034494		
			0.742567	1.784932	1.169303

$$I_h = \frac{h}{3}[E + 4I + 2P] \Rightarrow I_{0.5} = \frac{0.5}{3}[0.742567 + 4(1.784932) + 2(1.169303)] = 1.703483499$$

Utilizando las consideraciones dadas en la página 15, para el paso h=0.25 se tiene:

$$E(h = 0.25) = E(h = 0.5) = 0.742567$$

$$P(h = 0.25) = I(h = 0.5) + P(h = 0.5) = 1.784932 + 1.169303 = 2.954235$$

Cálculo de I:

i	t_i	v_i
1	1.25	1.00687
3	1.75	1.280846
5	2.25	0.908097
7	2.75	0.241558
	I=∑:	3.437371

$$I_h = \frac{h}{3}[E + 4I + 2P] \Rightarrow I_{0.25} = \frac{0.25}{3}[0.742567 + 4(3.437371) + 2(2.954235)]$$
$$= 1.700043416$$

$$\Delta I_{\frac{h}{2}} \approx \frac{\left|I_{\frac{h}{2}} - I_h\right|}{2^p - 1} \Rightarrow \Delta I_{0.25} \approx \frac{|I_{0.25} - I_{0.5}|}{2^4 - 1} = \frac{|1.700043 - 1.703483|}{15} = 0.000229(< 0.05)$$

El espacio recorrido en el intervalo de tiempo entre 1 y 3 minutos, mediante el método de Simpson es $S = 1.700043416\ \ (metros)$, con cota del error absoluto $\Delta S = 0.000229(< 0.05)$.

Nótese que en el método de Simpson con paso el doble que el correspondiente en el método de los Trapecios se obtienen resultados del orden de precisión deseados, de hecho, mejor en Simpson.

<u>**Ejercicios propuestos**</u> (sugerencia de ejercitación)

1. Las profundidades de un rio H se miden a distancias espaciadas iguales a través de un canal como se muestra en la tabla siguiente:

x(m)	0	2	4	6	8	10	12	14	16
H(m)	0	1.9	2	2	2.4	2.6	2.25	1.12	0

Determine aproximadamente el área de la sección transversal y estime el error cometido (tomando paso inicial h=4) mediante:

a) El método de los trapecios

b) El método de Simpson

Alguno de ellos alcanza la precisión de un 1%?. Justifique.

2. Se sabe de Estadística, que si z es una variable aleatoria con una distribución de probabilidad normal, N(0,1), es decir, con media $\mu = 0$ y desviación standard $\sigma = 1$ la probabilidad de que la variable z se encuentre en el intervalo [a, b] se denota por $P(a \le z \le b)$ y se calcula a partir de la integral definida

$$P(a \le z \le b) = \int_a^b f(z)dz \qquad \text{donde} \qquad f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

a) Determine una cota superior de $\left|f^{(2)}(z)\right|$ y de $\left|f^{(4)}(z)\right|$ en [1.2, 2.4].

Nota: Si $f(x)$ es estrictamente monótona en [a, b], entonces $|f(x)|$ alcanza su mayor valor en el intervalo [a, b] en x=a o en x=b

b) Calcule la probabilidad $\mathrm{P}(1.2 \leq \mathrm{Z} \leq 2.4)$ utilizando el método de los Trapecios tomando m = 8 subintervalos en la partición. Estime el error

c) Calcule la probabilidad $\mathrm{P}(1.2 \leq \mathrm{Z} \leq 2.4)$ utilizando el método de Simpson tomando m = 4 subintervalos en la partición. Estime el error

Compare las aproximaciones anteriores con el valor de la tabla de Estadística:

$P(1{,}2 \leq z \leq 2.4) = 0.10687$

Datos:

$$f^{(2)}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}(z^2 - 1) \qquad f^{(4)}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}(z^4 - 6z^2 + 3)$$

z	1.2	1.35	1.5	1.65	1.8	1.95	2.1	2.25	2.4
f(z)	0.19419	0.16038	0.12952	0.10226	0.07895	0.05959	0.04398	0.03174	0.02239

Ejercicios de estudio independiente

Para los ejercicios, los valores de n, p y q están asignados en la tarea#4:

Sea $f(x) = \left[ln\left(p\, x^2 + \frac{q}{n}\right)\right]^2$ y denote A el área bajo la curva y=f(x) en el intervalo D= [p, p+q]

a) A partir de la gráfica de $y = \left|f^{(2)}(x)\right|$, identifique una cota superior de $\left|f^{(2)}(x)\right|$ en el intervalo D, y determine una cantidad de subdivisiones (k) del intervalo D que garanticen una aproximación de A mediante el método de los Trapecios, con una precisión q-p+1 cifras decimales exactas

b) Determine un valor aproximado de A mediante el método de los Trapecios, dividiendo el intervalo D en $m = \min\,(k, 10)$ subdivisiones y estime una cota del error absoluto cometido y el error porcentual

c) Determine valores aproximados de A mediante el método de Simpson, dividiendo el intervalo D en $m = 2, 4, 8$ partes iguales, y estime una cota del error absoluto para los valores aproximados obtenidos para m= 4 y 8. Será necesario dividir aún más D para obtener una precisión de q-p+1 cifras decimales exactas? Justifique.