Introducción a la Matemática Numérica

Sumario:

- El objeto de la Matemática Numérica
- Teoría elemental de errores
- Medidas del error
- Cifras significativas, cifras exactas y cifras decimales exactas
- Propagación del error

Bibliografía:

Texto Básico: "Matemática Numérica", Manuel Álvarez Blanco, Alfredo Guerra Hernández, Rogelio Lau Fernández. Volumen 1. Capítulo 1 epígrafes (1.1 al 1.4 y 1.6).

Objetivos:

- Conocer el objeto de la Matemática Numérica
- Enumerar las fuentes de error, sus tipos y medidas
- Conocer el concepto de cifras significativas, cifras exactas y cifras decimales exactas
- Conocer los procedimientos para determinar el número de cifras decimales exactas que tiene un número a partir de un error absoluto prefijado, y el número de cifras exactas a partir del error relativo
- Conocer como estimar errores al evaluar expresiones, en particular en operaciones aritméticas.

Aspectos a desarrollar:

1. El objeto de la Matemática Numérica. Diferencias con los métodos analíticos.
2. Teoría elemental de errores. Fuentes y medidas de los mismos.
3. Cifras significativas, cifras exactas y cifras decimales exactas. Relación de la cantidad de las cifras decimales exactas con el error absoluto. Relación de la cantidad de las cifras exacta con el error relativo.
4. Propagación del error al evaluar una función real, en particular en las operaciones aritméticas.

Desarrollo

La Matemática Numérica es un campo muy amplio de la Matemática. Se le conoce también como Análisis o Cálculo Numérico, Matemática Computacional o de Computo, Matemática de Cálculo, etc. Aunque, como ciencia estructurada y rigurosa, la Matemática Numérica es relativamente joven (siglos XIX y XX), desde tiempos muy remotos se emplearon métodos numéricos aproximados.

Con el surgimiento de las computadoras digitales a mediados del siglo XX y su continuo desarrollo, la Matemática Numérica ha recibido un fuerte estímulo, ya que la computadora digital ha hecho posible la aplicación práctica de muchos métodos numéricos, que, con el trabajo en forma manual, solo tendrían un valor teórico. Por otra parte, las computadoras digitales han traído la necesidad de desarrollar nuevos métodos numéricos para dar respuesta a nuevos problemas que antes no era posible siquiera imaginar.

1. El objeto de la Matemática Numérica

La Matemática Numérica es la teoría de la práctica del cálculo eficiente y la estimación del error de la solución aproximada de muchos problemas de la aplicación Matemática con ayuda fundamentalmente de las operaciones aritméticas y decisiones de tipo lógico. El adjetivo eficiente es muy importante. Unas de las diferencias primarias entre la Matemática "pura'' y la Matemática Numérica es que la primera carece del concepto de eficiencia. Para la Matemática pura resolver un problema significa demostrar la existencia de su solución y señalar el proceso que converge a la misma. En cambio, el tiempo de obtención de la solución, o sea, la velocidad de convergencia del proceso, resulta ser con frecuencia un factor de mayor importancia. Así es sabido que la solución de un sistema de **n** ecuaciones algebraicas puede obtenerse como resultado de un número finito de operaciones, por ejemplo, con ayuda de los métodos de Cramer o de Gauss. La realización práctica de estos métodos encuentra dificultades de principio que no siempre, ni mucho menos, son superables. Con **n** bastante grande el número de operaciones alcanza una magnitud tan enorme que aún para los ordenadores más potentes el tiempo de ejecución sería muy elevado. Si además se tiene en consideración la necesidad de trabajar con un número finito de cifras en los cálculos, el error de cálculo acumulado en cada operación ejerce una influencia tan grande sobre el resultado final que a menudo esta muy lejos de la solución verdadera. Actualmente estos métodos exactos suelen utilizarse para resolver sistemas cuyo orden no supere 10^3. Para resolver sistemas de orden superior se emplean métodos iterativos, que, a pesar de ser aproximados, tienen la ventaja de no acumular el error de cálculo al pasar de una iteración a otra. Este hecho a primera vista parece paradójico, pero a pesar de esto es característico en la Matemática Numérica: preferencia en muchas ocasiones de un algoritmo aproximado al exacto.

Para medir la eficiencia de un método numérico podemos emplear los siguientes criterios:

I. **Rapidez**, es decir, cual es la magnitud de los cálculos a realizar. La rapidez se mide frecuentemente por el número de divisiones y multiplicaciones, por el número de evaluaciones de las funciones, etc.

II. **Almacenamiento**, es decir, cual es la capacidad de memoria necesaria para la realización de los cálculos. Por ejemplo, para invertir matrices se prefieren aquellos procedimientos por medio de los cuales se obtiene la inversa en el mismo lugar que ocupa la matriz.

III. **Exactitud**, es decir, cual es la estimación de la diferencia entre la solución aproximada y la exacta. Esta interrogante surge aún en los casos que se empleen procedimientos que teóricamente conducen a la solución exacta.

En los últimos años ingenieros, físicos y otros especialistas han mantenido un gran interés en las técnicas de la Matemática Numérica y la aplicación de estas técnicas a la solución de problemas concretos de carácter científico-técnico. Este interés ha sido estimulado por el desarrollo de la computación en los últimos años y la aparición de computadoras más potentes permiten resolver problemas que exigen la ejecución de una gran cantidad de operaciones y mayor almacenamiento de datos. Lo anterior ligado a la dificultad o imposibilidad de encontrar respuestas cuantitativas aceptables a muchos problemas ingenieriles, físicos y de otras ramas mediante soluciones de carácter analítico, ha motivado que la Matemática Numérica y las técnicas de ella derivadas sean de mayor utilidad al trabajo científico.

La aplicación de métodos numéricos a la solución de un problema concreto requiere por lo general poseer conocimientos del mismo. Muchos métodos se han originados del trabajo conjunto de matemáticos y especialistas.

En el desarrollo del curso se tratarán de establecer comparaciones entre los diferentes métodos, enumerados sus ventajas y desventajas, de modo que Ud. pueda seleccionar para un problema en particular una solución cercana a la objetiva.

Sin embargo, se desea resaltar que las recomendaciones y consejos no se pueden considerar reglas rígidas, sino lineamientos generales que ayudan a encontrar el método más idóneo. Ocuparse de la aplicación práctica de los métodos numéricos, requiere experiencia y porque no, también un poco de intuición.

A lo largo del curso se deducirán métodos numéricos para resolver ecuaciones, para aproximar funciones, para calcular integrales, para optimizar funciones, para resolver ecuaciones diferenciales, para invertir matrices, etc. Nótese que se trata de problemas que ya antes han sido estudiados y, por tanto, se contará con mucha información acerca de los resultados teóricos fundamentales sobre estos temas; esto permitirá dedicar la atención, fundamentalmente, a encontrar métodos eficientes para resolver los problemas.

2. Teoría elemental de errores. Fuentes y medidas de los mismos.

En el proceso de resolución de problemas nos vemos obligados a tratar diferentes números que pueden ser exactos o aproximados. Los números exactos representan el valor verdadero del número y los aproximados, un valor próximo al verdadero con determinado grado de proximidad (error). Esto está relacionado con la imperfección de los instrumentos de medida que utilizamos y en ocasiones con un concepto en si, por ejemplo, se habla del radio de la tierra y esta no es exactamente redonda. Un mismo número puede ser tanto exacto como aproximado depende de cómo se le utilice. Así por ejemplo el número 3 es exacto si se trata del número de lados del triángulo y aproximado si se utiliza en lugar de π.

Fuentes del error

La resolución de la mayoría de los problemas puede ser representado en forma de dos etapas sucesivas:

1ra: Descripción matemática del problema dado

En la primera etapa hay dos fuentes características de errores. En ler. lugar los procesos en desarrollo real no siempre pueden ser descritos matemáticamente y las simplificaciones introducidas ofrecen solo la posibilidad de obtener modelos más o menos idealizados. Esto está relacionado a que las leyes que describen el fenómeno físico, químico, biológico, etc. son en sí de naturaleza aproximada. Estos errores son generalmente despreciables, como por ejemplo los efectos relativisticos en la mecánica clásica. Sin embargo, si el modelo matemático dista del real en una cantidad no despreciable, entonces se pueden generar errores de significancia en los resultados. En lo sucesivo no nos ocuparemos de esta fuente de error, pues su estudio cae fuera del campo de la matemática numérica y en parte de la Matemática. En 2do lugar, la fijación de los parámetros iniciales que se obtienen, por lo general, de un experimento ofrecen no más que un resultado aproximado, es insuficientemente exacto. Se debe tener en cuenta el efecto de este error en el resultado final. Debido a la naturaleza aleatoria del mismo se dificulta su manipulación analítica.

El error sumario del modelo matemático y de los datos de partida da el error inherente, también conocido como error heredado, error de información inicial o error inevitable.

2da: Resolución matemática del problema matemático formulado

La solución exacta de un problema matemático (2da, etapa) por vía analítica o en una computadora generalmente es irrealizable. Así, por ejemplo, solo por una clase muy restringida de ED, se puede lograr la solución exacta. Por eso en los cálculos prácticos se utilizan los métodos de obtención de las soluciones aproximadas y en primer lugar, soluciones numéricas.

Es precisamente tal sustitución forzada de la solución exacta por una aproximada que engendra el error de método o error de aproximación.

Por último, en el proceso de resolución del problema se lleva a cabo el redondeo de los datos iniciales y de los resultados intermedios y finales. Estos errores, así como los que aparecen durante la ejecución de las operaciones aritméticas sobre los números aproximados, se transportan en una u otra medida a los resultados de los cálculos y forman el así llamado error de cálculo o error de redondeo. Los errores de redondeo son también de naturaleza aleatoria, lo que dificulta el poder ser estimados, o se obtiene estimados a veces muy pesimistas. Para lograr que el efecto de esto no se transmita a las cifras de valor de resultado es conveniente trabajar con al menos dos cifras más que las necesarias para el orden de la aproximación deseada y aplicar las reglas de redondeo.

Otra fuente de error de cálculo se debe al error generado por el hombre o la computadora. Este último es muy poco probable en la actualidad. El error generado por el hombre se debe a cuando él directamente realiza los cálculos o con la ayuda de una calculadora, o al programar. Se debe resaltar que la programación requiere de un trabajo muy preciso, pues cualquier imprecisión puede traer consecuencias considerables en la ejecución del programa.

Ejemplo

Consideremos la integral $I = \int_a^b f(x)dx$, donde la función f(x) es dos veces continuamente diferenciable en [a, b]. Para el cálculo numérico del valor de una integral definida existen diversos métodos, entre los que se encuentra el método de los trapecios. Subdividamos en intervalo [a, b] en n partes iguales, representando $h = \frac{b-a}{n}$ el paso y $x_i = a + i * h$ (i = 0, 1, 2,…,n) los puntos extremos de los subintervalos generados. En base al método de los trapecios $t_n = h\left[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n)\right]$ constituye un valor aproximado de I.

El error de aproximación (o error de método) es igual a $I - t_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$, donde ξ es un punto desconocido del intervalo [a, b]. De aquí se infiere que el valor modular del error de aproximación no es mayor que $\frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2$, donde $M_2 = \sup\{|f''(x)| : a \le x \le b\}$.

Los valores de $f(x_i)$ por lo general son sustituidos por aproximaciones y_i, obteniéndose el valor aproximado $T_n = h\left[\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n\right]$ de t_n.

Si $|f(x_i) - y_i| \le \delta$ (i = 0,1,2,…,n), entonces el error heredado por la aproximación de los dato

$$|t_n - T_n| = h\left[\frac{1}{2}|f(x_0) - y_0| + |f(x_1) - y_1| + |f(x_2) - y_2| + \ldots + |f(x_{n-1}) - y_{n-1}| + \frac{1}{2}|f(x_n) - y_n|\right]$$
$$\le hn\delta \le \delta(b-a) .$$

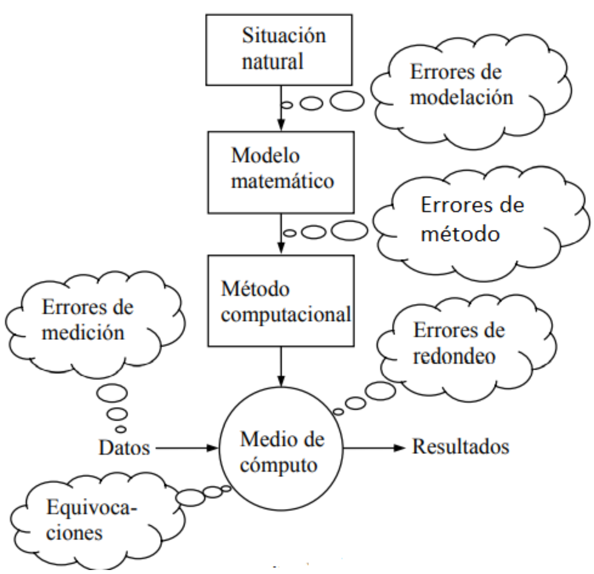
A los errores de método y heredado se puede añadir el error de redondeo, pues, aunque la suma se calcule generalmente sin errores, luego de multiplicar por h se necesita redondear al valor τ_n, generándose el error de redondeo $|T_n - \tau_n|$.

De todo lo anterior se deduce que el valor modular del error entre el valor exacto I y el valor aproximado τ_n no puede ser mayor que

$$|I - \tau_n| \le |I - t_n| + |t_n - T_n| + |T_n - \tau_n|$$

Si el valor de la integral se desea calcular con error menor que ε, entonces los cálculos se deben realizar de modo que cada error (método, heredado, redondeo) sea menor que $\frac{\varepsilon}{3}$.

El siguiente esquema sintetiza las diferentes fuentes de errores:



Independientemente de cuál haya sido la fuente de un error, muchas veces se necesita medirlo. En lo que sigue se introducirán varias definiciones con este propósito. En todos los casos, se supone que **x** el valor exacto de una variable o magnitud, y $\mathbf{x_a}$ un valor aproximado de x.

Definiciones:

- La diferencia **Error(a)=x-**$\mathbf{x_a}$ se denomina ***error***.

  Cuando $\mathbf{x_a}$ es mayor que **x**, es costumbre decir que se trata de una aproximación por exceso y en ese caso el error es negativo ($Error(x_a)<0$). Por el contrario, cuando $\mathbf{x_a}$ es menor que **x** el error es positivo ($Error(x_a)>0$) y se dice que la aproximación es por defecto.

- La diferencia $\mathbf{E(x_a)=|x- x_a|}$ se denomina ***error absoluto***.

  Por lo general, la magnitud del error (e incluso su signo) y del error absoluto no se conoce pues el valor de x es en la mayoría de los casos es desconocido. En esta situación lo que se busca es una cota superior del error absoluto.

- Se denomina cota del error absoluto (o error absoluto máximo) a una magnitud Δx_a, tal que $\mathbf{E(x_a)=|x- x_a|<\Delta x_a}$ **.**

  Lo anterior es equivalente a que $x_a-\Delta x_a<x<\mathbf{x_a}+\Delta x_a$, por lo que $\mathbf{x_a}-\Delta x_a$ constituye una aproximación por defecto, mientras $\mathbf{x_a}+\Delta x_a$ una aproximación por exceso.

  La notación $x=a\pm\Delta_a$ es también empleada.

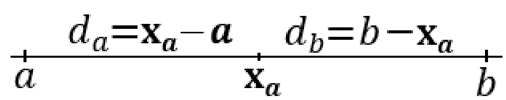
  Ejemplo

  Se conoce que el valor exacto de cierta magnitud x pertenece al intervalo I=[a,b]. Si se toma como aproximación de x un valor cualquiera x_a del intervalo I:

  a) Diga una cota segura del error absoluto

  b) ¿Cuál debe ser el valor de x_a, para que la cota segura del error absoluto sea mínima?

  Solución

  a) Apoyándonos en el siguiente gráfico: 

  se observa que el error absoluto $E(x_a)$ no puede exceder a la mayor de las dos distancias (d_a, d_b) que determina x_a en el intervalo I $\therefore \Delta\mathbf{x}_a = \boldsymbol{max}(d_a, d_b)$

  b) De la figura resulta obvio que el error absoluto máximo tomará su mínimo valor si se escoge x justo en el centro del intervalo I=[a,b], en ese caso Δx_a será exactamente la semiamplitud del intervalo, esto es: $\Delta\mathbf{x}_a = \frac{\boldsymbol{b-a}}{\mathbf{2}}$ **.**

Si bien el error absoluto de un número aproximado da una idea de la magnitud del error, no siempre se puede juzgar la calidad de la aproximación utilizando el error absoluto. Por ejemplo, si $\mathbf{x_a}$ es el resultado de medir una longitud y $E(x_a)$ es 2 mm, no se sabe si se trata de una buena o mala aproximación; si **x** fuera el largo de una habitación, probablemente se considere que $\mathbf{x_a}$ es una medición aceptable, pero si **x** es el diámetro de un tornillo, la medición que se ha realizado es muy mala. Por esta causa se introduce el concepto de error relativo.

- A la razón $e(\mathbf{x_a}) = \frac{E(\mathbf{x_a})}{|x|}$ se denomina error relativo de $\mathbf{x_a}$ en relación con el valor exacto **x** ($\neq 0$).

  Nótese que el error absoluto posee la misma dimensión física que los números $\mathbf{x_a}$ y **x**. El error relativo, sin embargo, es una cantidad adimensional y muchas veces se expresa en por ciento y en ocasiones por mil.

  De igual modo como consecuencia de no ser conocido el valor el valor exacto x es, lo que se busca es una cota superior del error relativo.

- Se denomina cota del error relativo (o error relativo máximo) a una magnitud δx_a, tal que $e(x_a) = \frac{E(x_a)}{|x|} \leq \delta x_a$.

  Es evidente que $\frac{\Delta x_a}{|x|}$ constituye una cota del error relativo.

  Debido a que la diferencia entre $\frac{\Delta x_a}{|x|}$ y $\frac{\Delta x_a}{|a|}$ es despreciable en una magnitud de segundo orden:

$$\left|\frac{\Delta x_a}{|x_a|} - \frac{\Delta x_a}{|x|}\right| = \Delta x_a \left|\frac{|x| - |x_a|}{|x_a||x|}\right| \leq^{(*)} \frac{\Delta x_a{}^2}{|x_a|(|x_a| - \Delta x_a)} = \frac{\Delta x_a{}^2}{|x_a|^2\left(1 - \frac{\Delta x_a}{|x_a|}\right)} = \frac{\delta x_a{}^2}{1 - \delta x_a}$$

$$\left[\ (*)\!:\ \big||x| - |x_a|\big| \leq |x - x_a| \leq \Delta x_a \qquad |x| > |x_a| - \Delta x_a\ \right]$$

  y como generalmente δx_a es pequeño, se obtiene que la diferencia es del orden de $\delta x_a{}^2$. Debido a lo anterior, en la práctica el error relativo se estima mediante $e(\mathrm{x}_a) = \frac{E(\mathrm{x}_a)}{|\mathrm{x}_a|}$ y en consecuencia $\delta x_a = \frac{\Delta x_a}{|\mathrm{x}_a|}$ como cota del error relativo, de hecho muchos autores lo definen así, a causa de que x es generalmente desconocido.

En ingeniería un error relativo de hasta el 5% se considera bueno, y aceptable hasta el 10%.

Ejemplo

Supongamos que, al medir en metros, la longitud L y el ancho A de un canal recto se obtuvo L= 100 m $\pm$ 1 m y A = 2 m $\pm$ 1 m. Determine el error relativo en la medición de ambas magnitudes e interprete el resultado.

Observe que L= 100 m $\pm$ 1 m nos indica que el valor aproximado de la longitud es L_a=100 m, mientras que una cota del error absoluto es ΔL_a=1 m. Entonces una estimación del error relativo seria: $\delta L_a = \frac{\Delta L_a}{|L_a|} = \frac{1}{100}$ y expresado en porciento $\delta L_a(\%) = \frac{\Delta L_a}{|L_a|}100 = 1\%$, que indica que la estimación de la longitud es muy buena.

Ahora, que A= 2 m $\pm$ 1 m nos indica que el valor aproximado de la longitud es A_a=2 m, mientras que una cota del error absoluto es ΔA_a=1 m. Entonces una estimación del error relativo seria: $\delta A_a = \frac{\Delta A_a}{|A_a|} = \frac{1}{2}$ y expresado en porciento $\delta A_a(\%) = \frac{\Delta A_a}{|A_a|}100 = 50\%$, que indica que la estimación del ancho es pésima.

Nótese que, si bien error absoluto en las dos magnitudes es el mismo (1 m), el error relativo es mucho menor en la longitud (1%) que en el ancho (50%), resultando inaceptable la precisión con la cual se estimó el ancho. Para obtener un error relativo en la medición del ancho del mismo orden que el de la longitud, sería necesario estimar una correspondiente cota error absoluto en el ancho:

$\delta A_a(\%) = \frac{\Delta A_a}{|A_a|}100 = 1\% \Rightarrow \frac{\Delta A_a}{|1|}100 = 1 \Rightarrow \Delta A_a = \frac{1}{100}$ m, es decir, la cota del error absoluto seria de 1 cm.

3. Cifras significativas y cifras exactas

En el trabajo con números aproximados es muy frecuente utilizar el lenguaje de las cifras. En este punto se harán las definiciones necesarias y se estudiarán las relaciones entre esta manera de hablar y los conceptos introducidos en el punto anterior.

Definición

Se llaman cifras significativas de un número a todas sus cifras, a excepción de los ceros puestos a la izquierda de la primera cifra distinta de cero. Los ceros puestos al final de un número son siempre significativas (en caso contrario no deben escribirse).

Número	*Cifras significativas*
0.001604	4
30.500	5
400 10^3	3
0,40 10^5	2

Definición

Si el digito **d** ocupa en un número real la posición k-esima según la tabla siguiente, se denota el valor posicional de d como p(d) y se define como p(d) = 10^k.

El valor de un digito d dentro de un número, que se denotará como v(d) se obtiene multiplicando el digito d por su valor posicional p(d) y el valor del número es la suma del valor de cada uno de sus dígitos.

Lugar decimal	**k**
….	…..
milésimas	-3
centésimas	-2
decimas	-1
unidades	0
decenas	1
centenas	2
….	…..

Ejemplo

Determine el valor posicional y el valor de cada digito en el número real x = 65.403.

Este número x tiene 5 cifras significativas y 3 cifras decimales.

digito (d)	**Valor posicional p(d)**	**Valor de cada digito v(d)**
6	p(6) = 10^1 = 10	v(6) = 6 p(6) = 60
5	p(5) = 10^0 = 1	v(5) = 5 p(5) = 5
4	p(4) = 10^{-1} = 0.1	v(4) = 4 p(4) = 0.4
0	p(0) = 10^{-2} = 0.01	v(0) = 0 p(0) = 0
3	p(3) = 10^{-3} = 0.001	v(3) = 3 p(3) = 0.003

Como se observa el número real x es la suma de los valores de cada digito, es decir, x = v(6)+v(5)+v(4)+v(0)+v(3) = 65.403 = $6·10^1 + 5·10^0 + 4·10^{-1} + 0·10^{-2} + 3·10^{-3}$

Definición

Un digito **d** de un número x se dice que es un **digito exacto o una cifra exacta,** si el error absoluto de x, E(x), es menor o igual que la mitad del valor posicional de **d.** Esto quiere decir

$$\boxed{E(x) \le 0.5 \cdot p(d) = 0.5 \cdot 10^k}$$

En caso contrario, la cifra **d** se dice que no es exacta.

Ejemplo

Determine cuantas cifras, significativas y decimales, del número aproximado x = 3.1416 son exactas si se sabe que el error absoluto es E(x) = 0.002.

$E(x) \le 0.5\ \mathrm{p}(d)$	Cifra o digito
$0.002 \le 0.5\ \mathrm{p}(3) = 0.5·10^0 = 0.5$	3 SI es exacta
$0.002 \le 0.5\ \mathrm{p}(1) = 0.5·10^{-1} = 0.05$	1 SI es exacta
$0.002 \le 0.5\ \mathrm{p}(4) = 0.5·10^{-2} = 0.005$	4 SI es exacta
$0.002 \ge 0.5\ \mathrm{p}(1) = 0.5·10^{-3} = 0.0005$	1 NO es exacta

Luego el número x tiene 3 cifras significativas exactas y dos cifras decimales exactas. Si se hubiera tomado el error de E(x) = 0.006 entonces el digito 4 no es exacto. Si se hubiera tomado el error de E(x) = 0.00002 entonces todas las cifras del número son exactas.

Cifras decimales exactas y error absoluto

Existe una relación muy directa entre la cantidad de cifras decimales exactas y el error absoluto de un número. En efecto, como la k-sima cifra decimal tiene un valor posicional $\frac{1}{2}10^{-K}$, un número aproximado posee k cifras decimales exactas si y solo si su error absoluto es menor o igual que $\frac{1}{2}10^{-K}$. Como ejemplo se relaciona a continuación algunos casos:

Cifras decimales exactas	Error absoluto menor o igual que
2	0.005
3	0.0005
4	0.00005
5	0,000005

Cifras exactas y error relativo

La cantidad de cifras exactas de un número no está relacionada con el error absoluto sino con el error relativo. Si que un número aproximado x posee k cifras exactas, es decir, que sus k primeras cifras significativas son exactas, se deduce que se pude tomar como cota del error relativo la expresión: $\delta x_a = \frac{1}{2}10^{1-K}$.

Ejemplo

Los tres números que siguen poseen cuatro cifras exactas. Determine en cada caso el error absoluto máximo y el error relativo máximo.

a) x = 673 500

b) x = 67.35

c) x = 0.000 673 5

Solución:

a) x = 673 500. Como 5 es la última cifra exacta y posee un valor posicional de 100 (k=2), el error absoluto es menor o igual que 0.5 10^2 = 50. Por tanto, Δx = 50 . El error relativo máximo se puede obtener como: $\delta x = \frac{\Delta x}{|x|} = \frac{50}{673500} = 0.000074$

b) x = 67.35. Como 5 es la última cifra exacta y posee un valor posicional de 0.01 (k=-2), el error absoluto es menor o igual que 0.5 10^{-2} = 0.005. Por tanto, Δx = 0.005. El error relativo máximo se puede obtener como: $\delta x = \frac{\Delta x}{|x|} = \frac{0.005}{67.35} = 0.000074$

c) x = 0.0006735. Como 5 es la última cifra exacta y posee un valor posicional de 0.0000001 (k=-7), el error absoluto es menor o igual que 0.5 10^{-7} = 0.00000005. Por tanto, Δx = 0.00000005. El error relativo máximo se puede obtener como: $\delta x = \frac{\Delta x}{|x|} = \frac{0.0000005}{0.0006735} = 0.000074$

En resumen, con cuatro cifras exactas, los números poseen los siguientes errores:

x	Δx	δx
673 500	50	0.000074
67.35	0.005	0.000074
0,0006735	$0.5 \cdot 10^{-7}$	0.000074

Por cierto, al aplicar la fórmula $\delta x_a = \frac{1}{2} 10^{1-K}$ se obtiene $\delta x = \frac{1}{2} 10^{1-4} = 0.0005$ que es unas 7 veces mayor que el calculado en el ejemplo.

Observaciones

- Las tablas matemáticas contienen solo cifras exactas, por lo que no es necesario indicar la cota del error

- Cuando un número posee una cantidad demasiado grande de cifras significativas y, sobre todo si no son exactas, las cifras excedentes se redondean. Las reglas de redondeo están diseñadas de tal modo que cuando se redondea un número exacto, el número aproximado que resulta tiene todas sus cifras exactas, ya que el error absoluto que se introduce al redondear es menor que la mitad del valor posicional del último dígito conservado. Cuando se redondea un número aproximado, sin embargo, deben tenerse algunas precauciones. Un número aproximado posee siempre algún error, al redondear el número se introduce un error adicional que puede agregarse al error que existía. Este fenómeno puede causar que al redondear un número aproximado eliminando todas las cifras no exactas y conservando solamente las exactas, ocurra que alguna cifra que originalmente era exacta, deje de serlo debido al incremento del error. Por esta razón se acostumbra redondear los números aproximados conservando varias (al menos 1 o 2) de sus cifras no exactas (o dudosas). Por cierto, cuando se trata de cifras dudosas, es frecuente que algunas de ellas sean realmente exactas y esta es otra razón para esta regla.

4. Propagación del error

Una vez que en algún paso de un algoritmo se introducen errores por una causa cualquiera, estos errores incidirán en los pasos siguientes. A este proceso se le denomina propagación del error y en este punto se veremos algunas leyes básicas que permiten, en ciertos casos sencillos, comprender la forma en que ello se produce y evitar resultados indeseables.

Consideremos una función real en n variables:

$$w = \mathrm{f}(\mathbf{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \cdots, \mathrm{x}_\mathrm{n}) \qquad \mathbf{x} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \cdots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$$

Sea $\mathbf{a} = (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \cdots, \mathrm{a}_\mathrm{n})$ un punto cercano al punto **x**. Esto significa que E(a_i)= |x_i – a_i| es pequeño para i=1, 2, …, n.

Sea $w = \mathrm{f}(\mathbf{x})$ diferenciable en **x**=**a**. Del cálculo diferencial de varias variables, se tiene que el incremento de f al ir del punto **x** al punto **a**:

$$\mathrm{Error}(f(\mathbf{a})) = \mathrm{f}(\mathbf{x}) - \mathrm{f}(\mathbf{a}) = \mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \cdots, \mathrm{x}_\mathrm{n}) - \mathrm{f}(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \cdots, \mathrm{a}_\mathrm{n})$$

se pude estimar con el diferencial f en el punto **a**:

$$\mathrm{Error}(\mathrm{f}(\mathbf{a})) \approx \mathrm{d}\big(\mathrm{f}(\mathbf{a})\big) = \frac{\partial \mathrm{f}(\mathbf{a})}{\partial \mathrm{x}_1}(\mathrm{x}_1 - \mathrm{a}_1) + \frac{\partial \mathrm{f}(\mathbf{a})}{\partial \mathrm{x}_2}(\mathrm{x}_2 - \mathrm{a}_2) + \cdots + \frac{\partial \mathrm{f}(\mathbf{a})}{\partial \mathrm{x}_n}(\mathrm{x}_n - \mathrm{a}_\mathrm{n})$$

$$\frac{\partial \mathrm{f}(\mathbf{a})}{\partial \mathrm{x}_i} = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}} \quad i = 1,2, \dots, n$$

Tomando valor absoluto:

$$\mathrm{E}(\mathrm{f}(\mathbf{a})) \approx \left|\frac{\partial \mathrm{f}(\mathbf{a})}{\partial \mathrm{x}_1}(\mathrm{x}_1 - \mathrm{a}_1) + \frac{\partial \mathrm{f}(\mathbf{a})}{\partial \mathrm{x}_2}(\mathrm{x}_2 - \mathrm{a}_2) + \cdots + \frac{\partial \mathrm{f}(\mathbf{a})}{\partial \mathrm{x}_n}(\mathrm{x}_n - \mathrm{a}_\mathrm{n})\right|$$

y considerando la desigualdad triangular:

$$\mathrm{E}(\mathrm{f}(\mathbf{a})) \le \left|\frac{\partial \mathrm{f}(\mathbf{a})}{\partial \mathrm{x}_1}\right| |x_1 - a_1| + \left|\frac{\partial \mathrm{f}(\mathbf{a})}{\partial \mathrm{x}_2}\right| |x_2 - a_2| + \cdots + \left|\frac{\partial \mathrm{f}(\mathbf{a})}{\partial \mathrm{x}_n}\right| |x_n - a_n|$$

Tomando en considerando cotas del error absoluto de cada componente:

$$|x_i - a_i| \le \Delta a_i \quad i = 1,2, \cdots, n$$

se obtiene la cota del error absoluto para f(**a**):

$$\Delta \mathrm{f}(\mathbf{a}) = \left|\frac{\partial \mathrm{f}(\mathbf{a})}{\partial \mathrm{x}_1}\right| \Delta a_1 + \left|\frac{\partial \mathrm{f}(\mathbf{a})}{\partial \mathrm{x}_2}\right| \Delta a_2 + \cdots + \left|\frac{\partial \mathrm{f}(\mathbf{a})}{\partial \mathrm{x}_n}\right| \Delta a_n \qquad (*)$$

Ejemplo

La deflexión Y de la punta de un mástil en un bote de vela es $\mathrm{Y}=\frac{\mathrm{FL}^4}{8\mathrm{EI}}$ donde:

F: carga lateral uniforme (N/m) L: altura(m)

E: módulo de elasticidad (N/m^2) I: momento de inercia (m^4)

Estime el error absoluto, el error relativo, cifras decimales exactas y cifras exactas en el valor calculado de Y con los siguientes datos aproximados:

F= 750 (N/m) ΔF= 30 (N/m) L = 9 (m) ΔL = 9 (m)

E=7.5 10^9 (N/m^2) ΔE=5 10^7 (N/m^2) I=0.0005 (m^4) ΔI=0.000005 (m^4)

Solución

El valor aproximado seria $\mathrm{Y}=\frac{(750)9^4}{8\left(7.5\ 10^9\right)(0.0005)}=0.164025$

Empleando la expresión (*) para:

x=(F,L,E,I) **a**=(750, 9, 7.5 10^9, 0.0005) Δ**a**=(ΔF, ΔL, ΔE, ΔI)=(30, 0.03, 5 10^7, 0.000005)

se tiene

$$\Delta\mathrm{Y}=\left|\frac{\partial\mathrm{Y}(\mathbf{a})}{\partial\mathrm{F}}\right|\Delta F+\left|\frac{\partial\mathrm{Y}(\mathbf{a})}{\partial\mathrm{L}}\right|\Delta L+\left|\frac{\partial\mathrm{Y}(\mathbf{a})}{\partial\mathrm{E}}\right|\Delta E+\left|\frac{\partial\mathrm{Y}(\mathbf{a})}{\partial\mathrm{I}}\right|\Delta I$$

Obteniendo las derivadas parciales y sustituyendo:

$$\Delta\mathrm{Y}=0.006561+0.002187+0.001094+0.00164=0.011482$$

$$\delta\mathrm{Y}=\frac{\Delta\mathrm{Y}}{|Y|}=\frac{0.011482}{0.164025}=0.0700015$$

Para la determinación de cifras decimales exactas y cifras exactas:

$$\Delta\mathrm{Y}=0.011482\leq 0.05=0.5\ 10^{-1}\qquad \mathrm{k}=1\ \text{ cifra decimal exacta}$$

$$\delta\mathrm{Y}=0.0700015\leq 0.5=0.5\ 10^{1-1}\qquad n=1\ \text{ cifra exacta}$$

Propagación del error en operaciones aritméticas

Representen **a** y **b** aproximaciones de **x** y **y** con cotas absolutas de error Δ_a y Δ_b respectivamente: $|x-a|\leq\Delta_a$ $|y-b|\leq\Delta_b$

- ***Suma y diferencia***

Sea s el resultado de la suma de dos números reales (positivos o negativos).

s(x,y)=x+y $\frac{\partial\mathrm{s(x,y)}}{\partial\mathrm{x}}=\frac{\partial\mathrm{s(x,y)}}{\partial\mathrm{y}}=1$

$$\Delta s(\mathrm{a,b}) = \underbrace{\left|\frac{\partial s(\mathrm{a,b})}{\partial \mathrm{x}}\right|}_{=1}\Delta_a + \underbrace{\left|\frac{\partial s(\mathrm{a,b})}{\partial \mathrm{y}}\right|}_{=1}\Delta_b = \Delta_a + \Delta_b$$

Como los números x y y pueden ser positivos o negativos, la fórmula anterior es válida para sumas o diferencias (suma algebraica). Es decir:

s(x,y)=x±y $\left|\frac{\partial s(\mathrm{x,y})}{\partial \mathrm{x}}\right| = \left|\frac{\partial s(\mathrm{x,y})}{\partial \mathrm{y}}\right| = 1$

$$\Delta s(\mathrm{a,b}) = \underbrace{\left|\frac{\partial s(\mathrm{a,b})}{\partial \mathrm{x}}\right|}_{=1}\Delta_a + \underbrace{\left|\frac{\partial s(\mathrm{a,b})}{\partial \mathrm{y}}\right|}_{=1}\Delta_b = \Delta_a + \Delta_b$$

Estos resultados pueden extenderse a la suma (algebraica) de una cantidad finita de términos, obteniéndose:

$$\Delta s = \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \cdots + \Delta_{a_n}$$

Particularmente, si todos los sumandos poseen una misma cota del error Δ_a, entonces

$$\Delta s = n\Delta_a$$

En el caso de algoritmos donde se suman varios números de diferentes signos, el problema se suele hacer inestable cuando los datos conducen a una suma próxima a cero, debido a que en el error absoluto se suman los errores absolutos de los sumandos y el error relativo se hace muy grande al dividir por una suma muy pequeña (pérdida de exactitud).

- ***Producto***

p(x,y)=xy $\frac{\partial \mathrm{p(x,y)}}{\partial \mathrm{x}} = y \quad \frac{\partial \mathrm{p(x,y)}}{\partial \mathrm{y}} = x$

$$\Delta \mathrm{p(a,b)} = \underbrace{\left|\frac{\partial \mathrm{p(a,b)}}{\partial \mathrm{x}}\right|}_{=|b|}\Delta_a + \underbrace{\left|\frac{\partial \mathrm{p(a,b)}}{\partial \mathrm{y}}\right|}_{=|a|}\Delta_b = |b|\Delta_a + |a|\Delta_b$$

Es más fácil recordar la estimación para el error relativo:

$$\delta \mathrm{p(a,b)} = \frac{\Delta \mathrm{p(a,b)}}{|ab|} = \frac{|b|\Delta_a + |a|\Delta_b}{|a||b|} = \frac{\Delta_a}{|a|} + \frac{\Delta_b}{|b|} = \delta_a + \delta_b$$

Este resultado puede extenderse al producto de una cantidad finita de términos, obteniéndose:

$$\delta \mathrm{p} = \delta_{a_1} + \delta_{a_2} + \cdots + \delta_{a_n}$$

Un caso particular en la potenciación con exponente entero positivo:

$$\delta_{a^n} = \mathrm{n}\delta_a$$

- **Cociente**

$q(x,y) = \frac{x}{y} \quad \frac{\partial \mathrm{q(x,y)}}{\partial \mathrm{x}} = \frac{1}{y} \quad \frac{\partial \mathrm{q(x,y)}}{\partial \mathrm{y}} = -\frac{x}{y^2}$

$$\Delta q(a,b) = \underbrace{\left|\frac{\partial q(a,b)}{\partial x}\right|}_{=\left|\frac{1}{b}\right|=\frac{1}{|b|}}\Delta_a + \underbrace{\left|\frac{\partial q(a,b)}{\partial y}\right|}_{=\left|-\frac{a}{b^2}\right|=\frac{|a|}{b^2}}\Delta_b = \frac{1}{|b|}\Delta_a + \frac{|a|}{b^2}\Delta_b = \frac{|b|\Delta_a + |a|\Delta_b}{b^2}$$

Es más fácil recordar la estimación para el error relativo:

$$\delta q(a,b) = \frac{\Delta q(a,b)}{\left|\frac{a}{b}\right|} = \frac{\frac{|b|\Delta_a + |a|\Delta_b}{b^2}}{\left|\frac{a}{b}\right|} = \frac{\Delta_a}{|a|} + \frac{\Delta_b}{|b|} = \delta_a + \delta_b$$

Si el número b es cercano a cero, entonces la magnitud del error relativo del cociente entre a y b puede resultar considerable (pérdida de exactitud).

Ejemplo

Calcular $X = \frac{(A+B)M}{(C-D)^2}$ y determinar cotas de los errores, donde:

$$\begin{array}{lll}
A = 2.754 \pm 0.001 & [a = 2.754 & \Delta_a = 0.001] \\
B = 11.7 \pm 0.04 & [b = 11.7 & \Delta_b = 0.04] \\
M = 0.56 \pm 0.05 & [m = 0.56 & \Delta_m = 0.05] \\
C = 10.536 \pm 0.002 & [c = 10.536 & \Delta_c = 0.002] \\
D = 6.32 \pm 0.008 & [d = 6.32 & \Delta_d = 0.008]
\end{array}$$

a) Empleando acotamientos de las operaciones aritméticas

b) Empleando la expresión (*) de la página 11

Redondee a la séptima cifre decimal en los cálculos.

Solución

El valor aproximado de X seria $x = \frac{(a+b)m}{(c-d)^2} = \frac{(2.754+11.7)0.56}{(10.536-6.32)} = 0.4553810$

a) Dado que $x = \frac{p}{q}$ $\quad p = (a+b)m \quad q = (c-d)^2$, entonces $\quad \delta_x = \delta_p + \delta_q$

$$\delta_p = \delta_{a+b} + \delta_m = \frac{\Delta_{a+b}}{|a+b|} + \frac{\Delta_m}{|m|} = \frac{\Delta_a + \Delta_b}{|a+b|} + \frac{\Delta_m}{|m|} = \frac{0.001 + 0.04}{|2.754 + 11.7|} + \frac{0.05}{0.56} = 0.0921223$$

$$\delta_q = 2\delta_{c-d} = 2\frac{\Delta_{c-d}}{|c-d|} = 2\frac{\Delta_c + \Delta_d}{|c-d|} = 2\frac{0.002 + 0.008}{|10.536 - 6.32|} = 0.0047438$$

$$\delta_x = \delta_p + \delta_q = 0.0921223 + 0.00447438 = 0.09686661$$

$$\Delta_x = |x|\delta_x = 0.4553810\,(0.09686661) = 0.0441071$$

b) $\Delta X = \left|\frac{\partial X}{\partial A}\right|\Delta a + \left|\frac{\partial X}{\partial B}\right|\Delta b + \left|\frac{\partial X}{\partial C}\right|\Delta c + \left|\frac{\partial X}{\partial D}\right|\Delta d + \left|\frac{\partial X}{\partial M}\right|\Delta m$

$$\Delta X = \left|\frac{M}{(C-D)^2}\right|\Delta a + \left|\frac{M}{(C-D)^2}\right|\Delta b + \left|\frac{2M(A+B)}{(D-C)^3}\right|\Delta c + \left|\frac{2M(A+B)}{(C-D)^3}\right|\Delta d + \left|\frac{A+B}{(C-D)^2}\right|\Delta m$$

Sustituyendo valores:

Δ_x=0.0315055(0.001) + 0.0315055(0.04) + 0.2160251256(0.002) + 0.2160251256(0.008) +

+ 0.8131803(0.005) = 0.0075179

$$\delta_x = \frac{\Delta_x}{|x|} = \frac{0.0075179}{0.4553810} = 0.0165090$$

La estimación de los errores en el inciso b son mejores que las correspondientes del inciso a. Esto quizás se deba a que se realizaron menos redondeos intermedios. Nótese, sin embargo, que la forma de proceder en el inciso b, aunque es más directa, requiere calcular derivadas y efectuar operaciones aritméticas engorrosas. Sin embargo, ambas resultados son valederos dado su carácter de estimaciones

El término de estabilidad de un problema será tratado en otro momento. En términos no muy precisos, se entiende por un problema estable aquel en el cual pequeños cambios en los datos producen pequeños cambios en los resultados. Por el contrario, problemas inestables son aquellos en que pequeños cambios en los datos pueden causar grandes cambios en los resultados. En determinados tipos de problemas estos conceptos se pueden hacer más precisos, e incluso se puede medir cuantitativamente la inestabilidad. Por el momento, solo se quiere enfatizar en el concepto.

Conclusiones

Se debe destacar:

- el papel de la Matemática Numérica dentro de la Matemática
- la identificación de las diferentes fuentes de error, sus tipos y formas de estimación.
- los conceptos de cifras decimales, cifras significativas y cifras exactas
- los procedimientos para determinar el número de cifras decimales exactas que tiene un número a partir de un error absoluto prefijado, y el número de cifras exactas a partir del error relativo
- la estimación de errores al evaluar expresiones, en particular en operaciones aritméticas.

A continuación, se presenta una ejercitación clasificada en tres categorías: resueltos (los estudiantes deben primeramente tratar de identificar vías posibles de solución y compararla con la utilizada), propuestos (constituyen una sugerencia de ejercitación) y de estudio independiente (constituyen la base de la tarea a asignar a los estudiantes).

Antes de estudiar los ejercicios resueltos y resolver ejercicios propuestos y de estudio independiente, se sugiere consultar la bibliografía indicada, en particular los ejemplos del libro de texto en formato digital: 1(pág. 11), 2(13), 3(14), 4(15), 2(19), 6(22), 13(25), 1(32), 3(35), 4(36)

Con esta ejercitación, se pretende que el estudiante adquiera habilidades para:

- Identificar las fuentes de error, sus tipos y formas de estimación
- Interpretar los conceptos de cifras decimales, cifras significativas y cifras exactas
- Aplicar los procedimientos para determinar el número de cifras decimales exactas que tiene un número a partir de un error absoluto prefijado, y el número de cifras exactas a partir del error relativo
- Estimar errores al evaluar expresiones, en particular en operaciones aritméticas.

Ejercicios resueltos

1. Completar la siguiente tabla:

x	Δx	δx	k	n
a) 25.19345±	0.0004			
b) 3.7948±		2%		
c) 77.8897±			2	
d) 9.8323±				3

Solución

a) $\delta x = \frac{\Delta x}{|x|} = \frac{0.0004}{25.19345} = 0.0000159 < 0.00005 = 0.5\ 10^{1-5} \Rightarrow$ n=5

$\Delta x = 0.0004 < 0.0005 = 0.5\ 10^{-3} \Rightarrow$ k=3

b) $\delta x = 0.02 < 0.05 = 0.5\ 10^{1-2} \Rightarrow$ n=2

$\Delta x = |x|\delta x = (3.7948)\ 0.02 = 0.075896 < 0.5 = 0.5\ 10^{0} \Rightarrow$ k=0

c) $\mathrm{k} = 3 \Rightarrow \Delta x < 0.5\ 10^{-3} = 0.0005$

$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|} = \frac{0.0005}{77.8897} = 0.0000064 < 0.00005 = 0.5\ 10^{1-5} \Rightarrow$ n=5

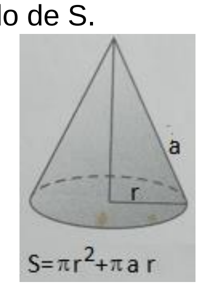
d) $\mathrm{n} = 3 \Rightarrow \delta x = 0.5\ 10^{1-3} = 0.005$

$\Delta x = |x|\delta x = (9.8323)\ 0.005 = 0.0491615 < 0.05 = 0.5\ 10^{-1} \Rightarrow$ k=1

En resumen:

x	Δx	δx	k	n
a) **25.19345 ± 0.0004**	**0.0004**	0.0000159	3	5
b) **53.7948 ±** 0.075896	0.075896	**2%**=0.02	0	2
c) **77.8897 ±** 0.0005	0.0005	0.0000064	**2**	5
d) **9.8323 ±** 0.0491615	0.0491615	0.005	**1**	**3**

2. En un cono circular recto se conoce que todas las cifras del radio **r=10.25** y de la apotema **a=15.05** son exactas. Estime el error relativo y la cantidad de cifras exactas del valor calculado de S.



Solución

$S = \pi r^2 + \pi ar = \pi r(r + a) = 3.1416\ (10.25)(10.25 + 15.05) = 814.6935148$

Debido a que r y a poseen dos cifras decimales exactas, se tiene que

$\Delta_r = \Delta_r = 0.5\ 10^{-2} = 0.005$

Tomando en consideración las propiedades de las operaciones aritméticas y las relaciones entre error absoluto y error relativo:

$\Delta_S = \Delta(\pi r^2) + \Delta(\pi ar) = \pi\Delta(r^2) + \pi\Delta(ar) = 2\pi r^2\delta(r^2) + \pi|ar|\delta(ar) = 2\pi r^2\delta(r) + \pi|ar|(\delta_a + \delta_r)$

$\Delta_S = 2\pi r^2 \frac{\Delta_r}{|r|} + \pi|ar|\left(\frac{\Delta_a}{|a|} + \frac{\Delta_r}{|r|}\right) = 2\pi r\Delta_r + \pi(|r|\Delta_a + |a|\Delta_r)$

Debido a que r y a son positivos y $\Delta_r = \Delta_r$: $\Delta_S = 2\pi r\Delta_r + \pi(r\Delta_r + a\Delta_r) = \pi\Delta_r(3r + a)$

Sustituyendo valores: $\Delta_S = \pi(0.005)(3(10.25) + 15.05) = 0.7194247176$

$\delta_S = \frac{\Delta_S}{|S|} = \frac{0.7194247176}{814.6935148} = 0.0008830617950 = 0.09\%$

$\delta_S = 0.0008830617950 < 0.005 = 0.5\ 10^{1-3} \Rightarrow$ n=3

Ejercicios propuestos (sugerencia de ejercitación)

1. Completar la siguiente tabla:

x	Δx	δx	k	n
a) 3.1900				
b) 5.49±		0.002		
c) 70.07±			3	
d) 0.0318±				2

2. Suponiendo la tierra como una esfera de unos 6400 km de radio, proponga cuántas cifras exactas tomar de π y del radio para calcular el volumen de la tierra con un error menor que 1%. Estime el error en el cálculo de V.

Ejercicios de estudio independiente

Resolver los ejercicios propuestos del libro de texto (en formato digital):

- 3, 4, 5 y 6 entre las páginas 26 y 27
- 1, 2, 5 y 9 entre las páginas 39 y 40
- 3, 4 y 6 entre las páginas 55 y 56 (Autoexamen).