Recopilación MAT021 – 2020-1

Clemente Ferrer

El siguiente documento tiene como único fin, servir de apoyo en el desarrollo de ayudantías y complemento de estudio.

CONTROL 1 (LA PREGUNTA 1 ES RESPECTO A QUE PARALELO PERTENECES)

Pregunta 2
Correcta
Puntúa 20 sobre 20

Considere la siguiente proposición: Si a^2+2a+9 es un número par entonces a es un número impar. Demostrar la proposición anterior utilizando el método del contrarecíproco es equivalente a demostrar:

Seleccione una:

a. Si a $\text{ es par } \Rightarrow a^2+2a+9 \text{ es par }$.

b. Si a $\text{ es impar } \Rightarrow a^2+2a+9 \text{ es par }$.

c. Si a $\text{ es par } \Rightarrow a^2+2a+9 \text{ es impar }$. ✓

d. Si a $\text{ es impar } \Rightarrow a^2+2a+9 \text{ es impar}$

La respuesta correcta es: Si a $\text{ es par } \Rightarrow a^2+2a+9 \text{ es impar }$.

Pregunta 3
Correcta
Puntúa 20 sobre 20

El conjunto solución de la inecuación

$$\frac{2}{x}+3>\frac{5}{\sqrt{x}}$$

viene dado por:

Seleccione una:

a. $]\frac{4}{9},1[$

b. $]-\infty,\frac{4}{9}[\cup]1,+\infty[[$

c. $]0,\frac{4}{9}[\cup]1,+\infty[$ ✓

d. $]0,\infty[$

La respuesta correcta es: $]0,\frac{4}{9}[\cup]1,+\infty[$

Pregunta 4
Correcta
Puntúa 20 sobre 20

Considerar los conjuntos:
$A=\{6n-1:n\in\mathbb{Z}\}$
$B=\{3n-4:n\in\mathbb{Z},n\,\text{impar}\}$
De las proposiciones:
I) $68\in B$.
II) $A\subseteq B$.
III) $A=B$.
son correctas:

Seleccione una:

a. Sólo I y II.

b. Sólo II y III. ✓

c. Sólo I.

d. I, II y III.

La respuesta correcta es: Sólo II y III.

Pregunta 5

Correcta

Puntúa 20 sobre 20

De un total de 17 personas encuestadas sobre si saben hablar inglés o francés, se tiene la siguiente información:
11 personas saben hablar francés.
9 personas saben hablar inglés.
4 personas saben hablar inglés pero no francés.
El número de personas que no saben hablar inglés ni tampoco francés es:

Seleccione una:

- a. 6
- b. 5
- c. 2
- d. 4

La respuesta correcta es: 2

Pregunta 6

Correcta

Puntúa 20 sobre 20

¿Qué valor debe tener $a > 0$ de tal manera que la solución de la inecuación,

$$||x-a|-a| \leq 2a$$

sea $S = [-4, 8]$?

Seleccione una:

- a. 1
- b. 4
- c. 3
- d. 2

La respuesta correcta es: 2

CERTAMEN 1

Pregunta 1

Correcta

Puntúa 20 sobre 20

Sea $\alpha > 0$ Encuentre el conjunto solución de:

$$\frac{|x-\alpha| - |x+\alpha|}{x^2 - \alpha^2} < 0$$

Seleccione una:

- a. $]-\alpha, 0[\cup]\alpha, \infty[$
- b. $]\infty, -\alpha[\cup]0, \alpha[$
- c. Se necesita mayor información
- d. $]-\alpha, 0[\cup]\alpha, \infty[$

Las respuestas correctas son: $]-\alpha, 0[\cup]\alpha, \infty[$
, $]-\alpha, 0[\cup]\alpha, \infty[$

Pregunta 2
Correcta
Puntúa 20 sobre 20

Determine el valor de $a \in \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ de tal manera que la inecuación

$$\sqrt{|x+a^2|} + a \geq 0$$

tenga por conjunto solución $]-\infty, -4] \cup [0, \infty[$.

Seleccione una:

a. $a = 2$

b. $a = -\sqrt{2}$ ✓

c. $a = \sqrt{2}$

d. $a = -2$

La respuesta correcta es: $a = -\sqrt{2}$

Pregunta 3
Correcta
Puntúa 20 sobre 20

Considerar la función real $f(x) = \sqrt{x^2 - \alpha x}$, con $0 < \alpha < 1$.
De las proposiciones:

I) $dom(f) =]-\infty, 0] \cup [\alpha, +\infty[$

II) Existe un valor de α para el cual $\left(2, \frac{1}{4}\right)$ pertenece al gráfico de f.

III) Las soluciones de la ecuación $f(x) = \sqrt{-x}$ son $x = 0$ y $x = \alpha - 1$.

son correctas:

Seleccione una:

a. Sólo II y III

b. Sólo I y II.

c. I, II y III.

d. Sólo I y III ✓

La respuesta correcta es: Sólo I y III

Pregunta 4
Correcta
Puntúa 20 sobre 20

Sea U el conjunto universo definido por $U = \left\{(-2)^n + \frac{3}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ y $A, B \subset U$ los conjuntos definidos por

$A = \left\{4^n + \frac{3}{2n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ y $B = \left\{-\frac{4^n}{2} + \frac{3}{2n-1} : n \in \mathbb{N}\right\}$

de las siguientes afirmaciones

I) $|A \cup B| = \infty$

II) $\inf(A) = \frac{11}{2}$.

III) $\sup(B) = 0$.

son correctas:

Seleccione una:

a. Solo II y III.

b. Solo I y II. ✓

c. Solo I y III.

d. I, II y III.

La respuesta correcta es: Solo I y II.

Pregunta **5**

Correcta

Puntúa 20 sobre 20

Considerar la proposición $P(n) : 3^n > n^2 + n + 1$ para $n \in \mathbb{N}$.
De las proposiciones:

I) $P(n+1) : 3^{n+1} > n^2 + 3n + 2$.
II) La desigualdad $n^2 \geq 0,\ n \geq 2$, es útil para demostrar $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
III) $P(n)$ es verdadero $\forall n \in \mathbb{N}$.
son correctas:

Seleccione una:

- a. I, II y III.
- b. Sólo II. ✓
- c. Sólo I.
- d. Sólo II y III.

La respuesta correcta es: Sólo II.

CONTROL 2

Pregunta **1**

Correcta

Puntúa 20 sobre 20

De las proposiciones:

I) El valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 3x^2 - 8}{\alpha x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 1}$ depende de α, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

II) Si $\beta \in \mathbb{R}$, entonces $\lim\limits_{x \to \beta} \dfrac{x^2 + \beta^2}{x + 1 - \beta}$ existe en $\mathbb{R}$.

III) Para $\gamma \neq 0$, el valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(\gamma x)}{\sin(\gamma x)}$ depende de γ.

son correctas:

Seleccione una:

- a. I, II y III
- b. Sólo I
- c. Sólo II y III
- d. Sólo I y II ✓

Respuesta correcta

La respuesta correcta es: Sólo I y II

Pregunta **2**

Correcta

Puntúa 20 sobre 20

Considere una sucesión de números $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ en progresión aritmética tales que $a_3 = 5$ y $a_7 = 29$. El valor de:

$$\sum_{k=1}^{74}\left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right)$$

es:

Seleccione una:

a. $\dfrac{450}{3101}$

b. $\dfrac{444}{3059}$ ✓

c. $\dfrac{468}{3227}$

d. $\dfrac{438}{3017}$

Respuesta correcta

La respuesta correcta es: $\dfrac{444}{3059}$

Pregunta **3**

Correcta

Puntúa 20 sobre 20

Sean $0 < a < b$, considere la función

$$f(x) = \begin{cases} |x-a| + x & , \quad x \leq b \\ |x-2b| + a & , \quad x > b \end{cases}$$

¿Cuál(es) de las siguientes proposiciones es(son) verdadera(s)?

$I)$ f es contínua en $x = a$.

$II)$ f es contínua en $x = b$, si $b = 2a$.

$III)$ f es contínua en $\mathbb{R}$, si $b = 2a$.

Seleccione una:

a. Sólo I

b. Todas I, II y III ✓

c. Sólo II

d. Sólo I y II

Respuesta correcta

La respuesta correcta es: Todas I, II y III

Pregunta **4**

Correcta

Puntúa 20 sobre 20

$f(x) = \varphi \cos(x) + \sqrt{4 - \varphi^2}\,\text{sen}\,(x)$ donde, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\varphi}{2}$ y $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, puede reescribirse como

Seleccione una:

a. $f(x) = 2\cos\left(x + \frac{3\pi}{10}\right)$

b. $f(x) = 2\,\text{sen}\left(x + \frac{3\pi}{10}\right)$ ✓

c. $f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$

d. $f(x) = 2\,\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$

Respuesta correcta

La respuesta correcta es: $f(x) = 2\,\text{sen}\left(x + \frac{3\pi}{10}\right)$

Pregunta **5**

Correcta

Puntúa 20 sobre 20

En un triángulo $\triangle ABC$ de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ y $\overline{BC} = a$. Se cumple $(a+b+c)(a+b-c) = \frac{7ab}{3}$. Calcule $3\text{sen}\,(2\gamma)\,\text{sen}\,(\gamma)$, donde γ es el ángulo interior del triángulo opuesto al lado c.

Seleccione una:

a. $2\sqrt{35}$

b. $\frac{\sqrt{35}}{6}$

c. $\frac{35}{36}$ ✓

d. $\sqrt{35}$

Respuesta correcta

La respuesta correcta es: $\frac{35}{36}$

CERTAMEN 2

Pregunta **1**

Correcta

Puntúa 20 sobre 20

Sea f una función continua en $\mathbb{R}$, tal que $f(6) = a$. El valor debe $a \in \mathbb{R}$ de tal manera que:

$$\lim_{x\to 6} \frac{(f(x)-a)\text{sen}(af(x)-a^2)}{1-\cos(f(x)-a)} = 12$$

es:

Seleccione una:

a. 3.

b. 12.

c. 6. ✓

d. 18.

La respuesta correcta es: 6.

Pregunta **2**

Correcta

Puntúa 20 sobre 20

Sean a y b reales y considere la función polinomial,

$$f(x) = ax^3 - bx^2 - 4x + 1; \text{ con } x \in [0,1].$$

Para asegurar la existencia de $c \in]0,1[$ tal que $f(c) = 0$. ¿Cuál(es) de las afirmaciones siguientes es(son) suficientes?

I) f tiene máximo y mínimo absoluto en $[0,1]$.

II) $a = b$.

III) $a - b < 3$.

Seleccione una:

a. Sólo I.

b. Sólo II.

c. Sólo II y III. ✓

d. Sólo III.

La respuesta correcta es: Sólo II y III.

Pregunta **3**

Correcta

Puntúa 20 sobre 20

Sean $b > a > 0$. Si $f : \mathbb{R} - \{3/b\} \to \mathbb{R}$ es la función definida por $f(x) = \dfrac{ax-5}{bx-3}$ entonces de las siguientes afirmaciones

I. f es una función decreciente sobre el intervalo $]-\infty, 3/b[$.
II. f es una función inyectiva.
III. El recorrido de f es el conjunto $\mathbb{R} - \{a/b\}$.

son correctas:

Seleccione una:

a. Todas son correctas.

b. Solo II y III ✓

c. Solo II.

d. Solo I.

La respuesta correcta es: Solo II y III

Pregunta **4**

Correcta

Puntúa 20 sobre 20

Uno de los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ de tal manera que la ecuación

$$\cos\left(\frac{5x}{4} - \alpha\right) = -\frac{1}{2}$$

tenga entre sus soluciones a expresiones del tipo

$$x = \frac{4\pi}{30} + \frac{8k\pi}{5}, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

es,

Seleccione una:

a. No existe un α que cumpla con la condición solicitada.

b. $\alpha = \dfrac{5\pi}{10}$

c. $\alpha = \pi$

d. $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$ ✓

La respuesta correcta es: $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$

Pregunta 5
Correcta
Puntúa 20 sobre 20

Un triángulo ABC isósceles con $\overline{AB} = \overline{CB}$ varía de tal manera que su vértice A permanece fijo en el punto $A = (-a, 0)$, su vértice B se mueve sobre el eje y y el lado $\overline{CB}$ es horizontal. La ecuación del lugar geométrico que recorre el vértice $C = (x, y)$ es:

Seleccione una:

a. $x^2 - y^2 = a^2$ ✓

b. $y^2 - x^2 = a^2$

c. $x^2 - y^2 = 2a^2$

d. $y^2 - x^2 = 2a^2$

La respuesta correcta es: $x^2 - y^2 = a^2$

CONTROL 3

Pregunta 1
Correcta
Puntúa 20 sobre 20

Sea $A = \{z \in \mathbb{C} : ||z-2|| - ||z+2|| = 2\}$. Si $z = x + iy \in A$ entonces

Seleccione una:

a. $x^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1$ ✓

b. $\dfrac{x^2}{3} + y^2 = 1$

c. $\dfrac{x^2}{3} - y^2 = 1$

d. $x^2 + \dfrac{y^2}{3} = 1$

La respuesta correcta es: $x^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1$

Pregunta 2
Correcta
Puntúa 20 sobre 20

Considere la función

$$f(x) = e^x - e^{-x}, \text{ con } x \in \mathbb{R}$$

El valor de $(f^{-1})'(0)$, es:

Seleccione una:

a. 2.

b. -2.

c. $-\dfrac{1}{2}$.

d. $\dfrac{1}{2}$. ✓

La respuesta correcta es: $\dfrac{1}{2}$.

Pregunta 3

Correcta

Puntúa 20 sobre 20

Al calcular

$$\frac{(1-i)^2(1+i)^3}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^5}$$

resulta

Seleccione una:

a. 8

b. $4\sqrt{2}$

c. -8

d. $-4\sqrt{2}$ ✓

La respuesta correcta es: $-4\sqrt{2}$

Pregunta 4

Correcta

Puntúa 20 sobre 20

Considere la curva

$$x^3+y^3-9xy=0$$

La ecuación de la recta tangente en el punto $P=(2,4)$, es:

Seleccione una:

a. $-4x+5y=12$ ✓

b. $4x-5y=12$

c. $4x+5y=12$

d. $4y-5x=12$

La respuesta correcta es: $-4x+5y=12$

Pregunta 5

Correcta

Puntúa 20 sobre 20

Una función $g(x)$ que satisface la ecuación

$$[\operatorname{arcsen}(g(x))]'=\frac{1}{x\sqrt{1-g^2(x)}}$$

es

Seleccione una:

a. $g(x)=\ln(x)$ ✓

b. $g(x)=\tan(x)$

c. $g(x)=e^x$

d. $g(x)=x^2$

La respuesta correcta es: $g(x)=\ln(x)$

CERTAMEN 3

Pregunta 1
Correcta
Puntúa 20 sobre 20

Sabiendo que 1 y 2 son raíces de

$$p(x) = x^4 - 11x^3 + (k^2 + 42)x^2 - (3k^2 + 64)x + 32 + 2k^2,$$

¿Cuál es el valor de k para que $p(x)$ tenga por raíz a $4 + 2i$?

Seleccione una:

a. $k = \pm 4$
b. $k = 0$
c. $k = \pm 1$
d. $k = \pm 2$ ✓

La respuesta correcta es: $k = \pm 2$

Pregunta 2
Correcta
Puntúa 20 sobre 20

El valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que la función $y(x) = xe^{\alpha x}$ cumpla con $y'' - 8y' + 16y = 0$ es:

Seleccione una:

a. 4 ✓
b. -6
c. 6
d. -4

La respuesta correcta es: 4

Pregunta 3
Correcta
Puntúa 20 sobre 20

En un triángulo rectángulo un cateto se alarga y el otro se acorta de tal manera que el área del triángulo varía a una razón de $3[cm^2/seg]$. Si el lado que se acorta lo hace a la mitad de la rapidez del que se alarga ¿a qué razón varía el ***cateto que se alarga*** cuando éste mide $4[cm]$ y el que se acorta mide $3[cm]$?

Seleccione una:

a. $-6[\frac{cm}{s}]$
b. $3[\frac{cm}{s}]$
c. $-3[\frac{cm}{s}]$
d. $6[\frac{cm}{s}]$ ✓

La respuesta correcta es: $6[\frac{cm}{s}]$

Pregunta **4**

Correcta

Puntúa 20 sobre 20

Considere el polinomio

$$p(x) = x^3 + ax^2 + 3bx + 4.$$

Los valores de a y b de modo al dividir $p(x)$ por $x - 3$ el resto sea 22 y que al dividirlo por $x + 1$ el resto sea -6, son:

Seleccione una:

a. $a = 3$ y $b = 2$.

b. $a = -3$ y $b = 2$. ✓

c. $a = -3$ y $b = -2$

d. $a = -3$ y $b = -2$.

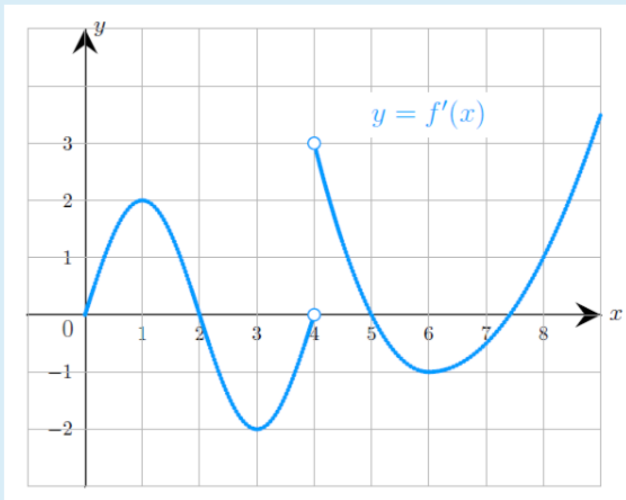
La respuesta correcta es: $a = -3$ y $b = 2$.

Pregunta **5**

Correcta

Puntúa 20 sobre 20

En la figura adjunta, se muestra la gráfica de la derivada f' de una función continua f.



¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I) En el intervalo $]7, 8[$ la función tiene un mínimo local.

II) La función tiene en]0,9[dos máximos lo cales y dos mínimos locales.

III) En $x = 3$ y $x = 6$ la función tiene mínimos locales.

Seleccione una:

a. Sólo III.

b. Todas I, II y III.

c. Sólo II y III

d. Sólo I y II. ✓

La respuesta correcta es: Sólo I y II.

GLOBAL

Pregunta 1
Correcta
Puntúa 20 sobre 20

Sea $\mathcal{S}$ el conjunto solución de la ecuación,

$$\text{sen}(x)\tan(x) = \text{sen}(x)$$

Si $\mathcal{S} \subseteq [-n\pi\,,\, n\pi]$, con $n \in \mathbb{R}$.

¿Cuál(es) de las afirmaciones siguientes es(son) verdadera(s)?

I) Si $n = 0$, entonces $\mathcal{S} = \{0\}$.

II) Si $n = 1$, entonces $\mathcal{S} = \left\{-\pi, -\frac{3\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \pi\right\}$

III) Si $n = 1$, entonces $\mathcal{S} = \left\{-2\pi, -\frac{5\pi}{4}, -\pi, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, 2\pi\right\}$

Seleccione una:

- a. Sólo I
- b. Todas I, II y III.
- c. Sólo I y III
- d. Sólo I y II ✓

La respuesta correcta es: Sólo I y II

Pregunta 2
Correcta
Puntúa 20 sobre 20

Si $p(x) = x^4 - 9x^2 - 4x + 12$ entonces de las afirmaciones

I. Candidatos a raíces racionales de $p(x)$ son $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$.
II. Dado que hay dos variaciones de signo de $p(x)$ entonces $p(x)$ tiene posiblemente 2 raíces reales positivas.
III. Todas las raíces de $p(x)$ son de multiplicidad 1.

son correctas

Seleccione una:

- a. Solo I y II. ✓
- b. Todas I, II y III.
- c. Solo II y III.
- d. Solo I y III.

La respuesta correcta es: Solo I y II.

Pregunta 3
Correcta
Puntúa 20 sobre 20

La recta tangente a la curva

$$y = \text{sen}\left(\frac{\pi}{8x}\right)\cos(\pi x^2)$$

en $x = \frac{1}{2}$, es perpendicular a la recta

Seleccione una:

- a. $4x + 3\pi y - 2\pi = 0$
- b. $3\pi x + 4y + \pi = 0$
- c. $4x - 3\pi y + \pi = 0$ ✓
- d. $3\pi x - 4y - \pi = 0$

La respuesta correcta es: $4x - 3\pi y + \pi = 0$

Pregunta 4

Correcta

Puntúa 20 sobre 20

Los valores de α y β, **en ese orden**, de modo que la función $f(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^3} + x$ tenga a $x = -3$ y $x = 2$ como puntos críticos son:

Seleccione una:

a. 12 y -13

b. 13 y -12 ✓

c. 42 y 24

d. 7 y -10

La respuesta correcta es: 13 y -12

Pregunta 5

Correcta

Puntúa 20 sobre 20

Se desea diseñar una lata con forma de cilindro circular recto de modo que la suma de su diámetro basal y su altura sea de 60[cm]. La altura, en [cm], de la lata de máximo volumen posible es:

Seleccione una:

a. 10

b. 15

c. 20 ✓

d. 30

La respuesta correcta es: 20