Diego Olelarz

Ejercicio 2:

a)

Primero calculo la acumulada de la función en cada intervalo de x:

$x \leq 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{3} \cdot e^{(t)}\, dt = \frac{1}{3} \cdot e^{t} \Big|_{-\infty}^{x} = \frac{e^{x}}{3}$$

$x > 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\, dt + \int_{0}^{x} f(t)\, dt = \frac{e^{0}}{3} + \int_{0}^{x} \frac{4}{3} \cdot e^{(-2t)}\, dt = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{e^{-2t}}{2} \Big|_{0}^{x} \right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{e^{-2x}}{2} + \frac{e^{0}}{2} \right) = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{e^{-2x}}{2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot e^{-2x}$$

$$= 1 - \frac{2}{3} \cdot e^{-2x}$$

Luego calculo la inversa de la acumulada en cada intervalo:

$x \leq 0$: $\quad U = \frac{e^{x}}{3} \;\rightarrow\; \log(3U) = x$

$x > 0$: $\quad U = 1 - \frac{2}{3} \cdot e^{-2x} \;\rightarrow\; \frac{\log\left((1-U)\frac{3}{2}\right)}{-2} = x$ revisa

Finalmente, con $F(0) = \frac{e^{0}}{3} = \frac{1}{3}$ escribo el algoritmo

b)

Para comprobar, $P(X \leq 1) = F(1) = 1 - e^{-2} \cdot \frac{2}{3} \cong 0{,}9098$

Diego Oleiarz

Ejercicio 3:

a) Dado que el intervalo de x es $-1 \leq x \leq 1$ es conveniente utilizar una distribución $U(-1,1)$ para rechazar.

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \leq c \Rightarrow h(x) = \frac{b(1-x^2)}{\frac{1}{1-(-1)}} = 2 \cdot b \cdot (1-x^2)$$

Para calcular b utilizo la propiedad de función de densidad $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

$$1 = \int_{-1}^{1} b(1-x^2)dx = b\left(\int_{-1}^{1} 1\,dx - \int_{-1}^{1} x^2 dx\right) = b\left(x\Big|_{-1}^{1} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right) = b \cdot \left((1-(-1)) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right)\right)$$

$$\frac{1}{b} = 2 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{2}{3} = b = \frac{1}{2 - \frac{2}{3}} = 0,75$$ ✓

Como $b = 0,75 \Rightarrow 2 \cdot 0,75 \cdot (1-x^2) = 1,5 \cdot (1-x^2)$

a simple vista en $x=0$ la función se maximiza (recordar $-1 \leq x \leq 1$) y $h(0) = 1,5$

y puedo reescribir $\frac{f(x)}{g(x) \cdot c}$ como $\frac{1,5 \cdot (1-x^2)}{1,5} = 1-x^2$, función que utilizo para rechazar. ✓

b) Para comprobar, $P(X>0) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - F(0) = 1 - \int_{-1}^{0} 0,75 \cdot (1-x^2)dx$

$= 1 - 0,75 \cdot \frac{2}{3} = 0,5$ ✓

El código estima $P(X \leq 0)$ y no $P(X > 0)$.

Diego Oleiarz

3/3

Ejercicio 4:

b) $G \sim Geo(1/3) \rightarrow g(n) = \frac{(2/3)^n}{3} = \frac{2^n}{3^{n+1}}$

$$g(n) \stackrel{!}{=} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{2^{n-1}}{3^n}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2^{n-1}+2}{\cancel{3}^n} \cdot \frac{\overset{3^n}{\boxed{\cancel{3}^{n+1}}}}{\underbrace{2^n}_{2^{n-1}}} = \frac{3 \cdot 2^{n+1}}{2^n} + \frac{6 \cdot}{2^n} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2^{n-1}}$$

$$\frac{\frac{2^{n-1}+2}{3^n}}{\frac{2^{n-1}}{3^n}} = \frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}} = 1 + \frac{4}{2^n}$$

$$\leq 1 + \frac{4}{2^2}, \; n \geq 2$$

$$= 2$$

$$\frac{f(n)}{2 \cdot g(n)} = 1 + \frac{2}{2^n} = 1 + \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \underline{\underline{n \geq 2}}$$

Ej 4a) Debe inicializar en i=1 (primera tirada) y devolver i+1 (tirada distinta).

4c) Incorrecto el codigo.