

Ejercicio 1:

a)

Primero calculo la acumulada de la función en cada intervalo de x :

$$x \leq 0: F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{3} \cdot e^{3t} dt = \frac{1}{3} \cdot e^{3t} \Big|_{-\infty}^x = \frac{e^x}{3} \quad \checkmark$$

$$x > 0: F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = \frac{e^0}{3} + \int_0^x \frac{4}{3} \cdot e^{-2t} dt = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{e^{-2t}}{2} \Big|_0^x \right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{e^{-2x}}{2} + \frac{e^0}{2} \right) = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{e^{-2x}}{2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot e^{-2x}$$

$$= 1 - \frac{2}{3} \cdot e^{-2x} \quad \checkmark$$

Luego calculo la inversa de la acumulada en cada intervalo:

$$x \leq 0: U = \frac{e^x}{3} \rightarrow \log(3U) = x \quad \checkmark$$

$$x > 0: U = 1 - \frac{2}{3} \cdot e^{-2x} \rightarrow \frac{\log((1-U) \frac{3}{2})}{-2} = x \quad \checkmark$$

Finalmente, con $F(0) = \frac{e^0}{3} = \frac{1}{3}$ escribo el algoritmo

¿y cómo se genera x ?

b) Bien.

Para comprobar, $P(X \leq 1) = F(1) = 1 - e^{-2} \cdot \frac{2}{3} \approx 0,9098$

23 pts.

Falta Ej 1

Ejercicio 3:

a) Dado que el intervalo de x es $-1 \leq x \leq 1$ es conveniente utilizar una distribución $U(-1, 1)$ para rechazar.

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \leq c \Rightarrow h(x) = \frac{b(1-x^2)}{\frac{1}{1-(-1)}} = 2 \cdot b \cdot (1-x^2)$$

Para calcular b utilizo la propiedad de función de densidad $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

$$1 = \int_{-1}^1 b(1-x^2) dx = b \left(\int_{-1}^1 1 dx - \int_{-1}^1 x^2 dx \right) = b \left(x \Big|_{-1}^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 \right) = b \cdot \left((1-(-1)) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \right) \right)$$

$$\frac{1}{b} = 2 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = 2 - \frac{2}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{2 - \frac{2}{3}} = 0,75$$

$$\text{Como } b=0,75 \Rightarrow 2 \cdot 0,75 \cdot (1-x^2) = 1,5 \cdot (1-x^2)$$

a simple vista en $x=0$ la función se maximiza (recordar $-1 \leq x \leq 1$) y $h(0)=1,5$

y puedo reescribir $\frac{f(x)}{g(x)}$ como $\frac{1,5 \cdot (1-x^2)}{1,5} = 1-x^2$, función que

utilizo para rechazar.

$$b) \text{ Para comprobar, } P(X > 0) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - F(0) = 1 - \int_{-1}^0 0,75 \cdot (1-x^2) dx$$

$$= 1 - 0,75 \cdot \frac{2}{3} = 0,5$$

Ejercicio 4:

$$b) G \sim \text{Geo}(1/3) \rightarrow g(n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2^{n-1} + 2}{3^n} \cdot \frac{3^{n+1}}{2^n} = \frac{3 \cdot 2^{n-1}}{2^n} + \frac{6}{2^n} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2^{n-1}}$$