Chapitre 8

Géométrie Vectorielle dans l'Espace

I. Vecteurs de l'Espace

La notion de vecteur se généralise à l'espace.

Le vecteur $\vec{u}$ est caractérisé par un sens, une direction, et une norme, notée $||\vec{u}||$.

A. Théorème

A, B, et C étant quatre points de l'espace, les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
- Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
- Les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.

B. Définition

Deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires* si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

C. Propriété

Toutes les opérations sur les vecteurs, en particulier la relation de Chasles sont identiques dans l'espace comme dans le plan.

D. Theorème

A et B étant deux points distincts de l'espace, (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB},\ t \in \mathbb{R}$.

$(AB) = \left\{ M \in \mathscr{E},\ \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB},\ t \in \mathbb{R} \right\}$

E. Définition

Un vecteur $\vec{k}$ est une *combinaison linéaire* des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ s'il existe des réels a, b et c tels que $\vec{k} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

II. Vecteurs Coplanaires

A. Définition

Des vecteurs sont *coplanaires* s'ils admettent des représentants dont les extrémités sont dans un même plan.

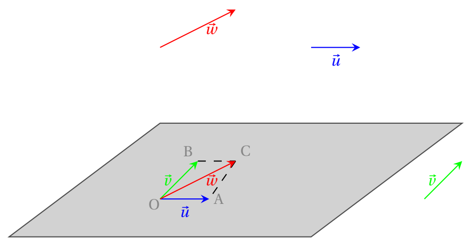

Figure 8.1. – Illustration de la Définition

Si O est un point quelconque et A, B et C sont tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$.

$\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{s}$ coplanaires $\iff$ O, A, B, et C coplanaires.

B. Théorème

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ étant trois vecteurs de l'espace avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. $\left(\vec{w}\right.$ est une *combinaison linéaire* de $\vec{u}$ et $\left.\vec{v}\right)$

1. Démonstration

Soient O, A, B, et C quatre points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non-colinéaires donc, O, A et B sont non alignés, et (OAB) est un plan de base $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.

" $\Longrightarrow$ " On suppose que $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ sont coplanaires. Alors, $C \in (OAB)$.
C admet donc des coordonnées $(\alpha ; \beta)$ dans la base $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.
C'est-à-dire $\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ ou encore $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. $\square$

" $\Longleftarrow$ " On suppose que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.
Soit D le point de (OAB) de coordonnées $(\alpha;\beta)$.
Alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}\\ &= \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{w} = \overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

Donc, $D = C$, les points sont confondus, et comme $C \in (OAB)$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ sont coplanaires. □

2. Théorème : Caracterisation Vectorielle d'un Espace

Si A, B, et C sont trois points non-alignés de l'espace, le plan (ABC) est l'ensemble des M tels que :

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t'\overrightarrow{AC} \quad (t,\ t' \in \mathbb{R})$$

III. Repèrage dans l'Espace

A. Définition

Un repère de l'espace est constitué d'un point appelé origine du repère (en général O) et d'un triplet de vecteurs non-coplanaires (en général $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$).

On le note $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

B. Vocabulaire

La droite $(O;\vec{\imath})$ est appelée axe des *abscisses*.

La droite $(O;\vec{\jmath})$ est appelée axe des *ordonnées*.

La droite $(O;\vec{k})$ est appelée axe des *cotes*.

Lorsque ces trois axes sont perpendiculaires deux à deux, le repère est *orthogonal*.
Si de plus $||\vec{\imath}|| = ||\vec{\jmath}|| = ||\vec{k}|| = 1$, le repère est *orthonormé*.

C. Coordonnées dans l'Espace

1. Théorème

Si $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ est un repère, pour tout point M, il existe un unique triplet $(x;y;z)$ de réels tels que $\overrightarrow{OM}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$, appelés coordonnées de M.

On note M $(x;y;z)$.

a. Démonstration

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{M'M}$

Or M $\in(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ donc il a des coordonnées $(x;y)$ dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

$\overrightarrow{OM'}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{M'M}$ est colinéaire à $\vec{k}$ (on a projeté dans sa direction). Il existe un réel z tel que $\overrightarrow{M'M}=z\vec{k}$.

Donc, $\overrightarrow{OM}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$ $\square$

(On admet l'unicité)

b. Remarque

On définit de même les coordonnées d'un vecteur de l'espace. Tout vecteur de l'espace est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$.

2. Théorème

Si dans un repère A$\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et B$\left(x_B;y_B;z_B\right)$ sont deux points, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$$

Et I, le point du milieu de $[AB]$:

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

Dans un repère orthonormé, un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ a pour norme :

$$||\vec{u}||=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

A. DÉMONSTRATION

Passer par M', le projeté orthogonal de M sur $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, puis appliquer le théorème de PYTHAGORE deux fois.

3. THÉORÈME

Si I est le milieu de $[AB]$, pour tout M :

$$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$$

A. DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MI} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AI} \\
&= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\
&= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{MB} \quad (\text{CHASLES})
\end{aligned}$$