

Chapitre V

Fonction Composée

I. DÉFINITION

Soient u une fonction définie sur un intervalle I et f une fonction définie sur un intervalle J , I étant tel que pour tout réel x de I , $u(x) \in J$

La fonction composée de u par f , notée $f \circ u$ est la fonction définie sur I par :

$$(f \circ u)(x) = f(u(x))$$

Schéma : intervalles : $I \rightarrow J \rightarrow \mathbb{R}$
 variables : $x \rightarrow u(x) \rightarrow f(u(x))$

A. EXEMPLES

La fonction $u : x \mapsto u(x) = x^2 + 1$ est définie sur \mathbb{R} , et $f : x \mapsto f(x) = \ln(x)$ est définie sur $]0; +\infty[$, la fonction $f \circ u$ est définie sur \mathbb{R} car $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) \in]0; +\infty[$, et $(f \circ u)(x) = \ln(x^2 + 1)$.

La fonction $g : x \mapsto g(x) = \sqrt{5x - 3}$ est la fonction composée de la fonction affine $x \mapsto 5x - 3$ et de la fonction racine carrée. Elle est définie sur $\left[\frac{3}{5}; +\infty\right]$, intervalle sur lequel $5x - 3 \in \mathbb{R}^+$

II. DÉRIVÉE D'UNE FONCTION COMPOSÉE

A. THÉORÈME

Si u est dérivable en un réel a et f est dérivable en $u(a)$ alors $f \circ u$ est dérivable en a et $(f \circ u)'(a) = u'(a) \times f'(u(a))$

Si u est dérivable sur I et f est dérivable sur J , I étant tel que, pour tout réel x de I , $u(x) \in J$ alors $f \circ u$ est dérivable sur I , et pour tout réel $x \in I$:

$$(f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$$

B. EXEMPLES

Si on appelle h la fonction par $h : x \mapsto h(x) = \ln(x^2 + 1)$, alors h est dérivable sur \mathbb{R} , et pour tout réel x , $h'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

La fonction g ci-dessus, définie par $g : x \mapsto g(x) = \sqrt{5x-3}$, est dérivable sur $\left] \frac{3}{5}; +\infty \right[$, et pour tout $x \in \left] \frac{3}{5}; +\infty \right[$, $g'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x-3}}$

III. LIMITES D'UNE FONCTION COMPOSÉEA. THÉORÈME

Soient a , b et c sont trois réels, ou $\pm\infty$

Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ et $\lim_{X \rightarrow b} f(X) = c$ alors, $\lim_{x \rightarrow a} f(u(x)) = c$

B. EXEMPLE

Soit $g : x \mapsto g(x) = e^{-x^2}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$