

Chapitre XV

Opérations sur les Variables Aléatoires

I. RAPPELS

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

Une variable aléatoire X est une fonction qui à tout élément de Ω associe un nombre réel.

A. EXEMPLE

On tire deux fois une pièce : $\Omega = \{ PP, PF, FP, FF \}$.

Soit X la variable aléatoire définie sur Ω qui donne le nombre de « pile » obtenus.

Soit G la variable aléatoire égale au gain suivant :

- Deux faces identiques (PP et FF) font gagner £ 2.
- Deux faces différentes (PF et FP) font perdre £ 2.

Les lois de probabilités des variables aléatoires X et G sont :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

g_i	-2	2
$P(G = g_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

FIGURE 15.1. – Lois de Probabilité de X et G

B. DÉFINITION

L'espérance de la variable aléatoire X est le réel :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$$

L'espérance est une moyenne, les probabilités jouent le rôle de fréquences.

Dans notre exemple, $E(X) = 1$ et $E(G) = 0$.

C. DÉFINITION

La variance de la variable aléatoire X est le réel :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$$

C'est la moyenne des écarts au carré.

D. DÉFINITION

L'écart-type de la variable aléatoire X est le réel :

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

E. THÉORÈME

$$V(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 P(X = x_i) - (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

La variance est aussi la moyenne des valeurs au carré moins la moyenne au carré.

1. DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i \quad (P(X = x_i) = p_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i E(X) + (E(X))^2) p_i \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 p_i) - 2E(X) \sum_{i=1}^n x_i p_i + (E(X))^2 \sum_{i=1}^n p_i \\ &= E(X^2) - 2(E(X) \times E(X)) + (E(X))^2 \times 1 \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 \quad \square \end{aligned}$$

II. OPÉRATIONS SUR LES VARIABLES ALÉATOIRES

A. CHANGEMENT AFFINE

1. THÉORÈME

Si X est une variable aléatoire et a et b sont deux réels :

$$(1) \quad E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$(2) \quad V(aX + b) = a^2V(X)$$

A. DÉMONSTRATIONS

On note p_i la probabilité $P(X = x_i)$ pour alléger les notations.

$$\begin{aligned} (1) \quad E(aX + b) &= \sum_{i=1}^n (ax_i + b) p_i \\ &= a \sum_{i=1}^n x_i p_i + b \sum_{i=1}^n p_i \\ &= aE(X) + b \quad \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad V(aX + b) &= E((aX + b)^2) - (E(aX + b))^2 \\ &= E(a^2X^2 + 2aXb + b^2) - (E(aX + b))^2 \\ &= a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - a^2(E(X))^2 - 2abE(X) - b^2 \\ &= a^2(E(X^2) - (E(X))^2) \\ &= a^2V(X) \quad \square \end{aligned}$$

2. THÉORÈME

Si X est une variable aléatoire et a et b sont deux réels :

$$\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$$

A. DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned} \sigma(aX + b) &= \sqrt{V(aX + b)} \\ &= \sqrt{a^2V(X)} \\ &= |a|\sigma(X) \quad \square \end{aligned}$$

3. EXEMPLE

Dans le jeu précédent (deux tirages de pièce), si X' est la variable aléatoire qui donne le triple de nombre de « pile », $X' = 3X$ et donc $E(X') = 3E(X) = 3$.

B. SOMME DE VARIABLES ALÉATOIRES

Dans cette sous-partie, X et Y sont deux variables aléatoires prenant respectivement les valeurs $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ et $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, où n et m sont des entiers naturels non nuls.

1. DÉFINITION

La variable aléatoire $X + Y$ prend tous les valeurs $a_i + b_j$ possibles (où $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$).

Pour toute valeur de w , $P(X + Y = w) = \sum_{a_i + b_j = w} P(\{X = a_i\} \cap \{Y = b_j\})$
c'est-à-dire la somme des probabilités $P(\{X = a_i\} \cap \{Y = b_j\})$ telles que $a_i + b_j = w$ (toutes les sommes égales à w).

2. THÉORÈME (ADMIS)

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

3. RAPPEL

A et B sont deux événements indépendants si et seulement si
 $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

4. DÉFINITION

Deux variables aléatoires sont indépendantes si elles donnent des résultats de deux expériences aléatoires indépendantes.

5. PROPRIÉTÉ

Si X et Y indépendantes :

$$P(\{X = a_i\} \cap \{Y = b_j\}) = P(X = a_i) \times P(Y = b_j)$$

6. THÉORÈME (ADMIS)

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même univers :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

III. APPLICATIONS

A. LOI BINOMIALE

1. PROPRIÉTÉ

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$:

$$E(X) = np \quad V(X) = np(1-p) \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

A. DÉMONSTRATION

X est la somme de n variables aléatoires indépendantes X_1, X_2, \dots, X_n , suivant la loi de BERNOULLI.

Pour tout i , $1 \leq i \leq n$, $E(X_i) = p$ et $V(X_i) = p(1-p)$.

Ainsi, $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = np$ et idem pour $V(X)$.

Enfin, $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

B. SOMME ET MOYENNE D'UN ÉCHANTILLON (GÉNÉRALISATION)

1. DÉFINITION

Un échantillon de taille n d'une loi de probabilité est une liste $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ de n variables aléatoires identiques et indépendantes qui suivent toutes cette loi.

2. PROPRIÉTÉ

Si on note X une variable aléatoire suivant la loi de probabilité de cet échantillon, la variable aléatoire « somme » de cet échantillon

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ vérifie :

$$(1) E(S_n) = nE(X) \quad (2) V(S_n) = nV(X) \quad (3) \sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X)$$

A. DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned} (1) E(S_n) &= E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) \\ &= nE(X) \quad \text{Car les variables sont identiques} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad V(S_n) &= V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \\
 &= V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n) \\
 &= nV(X)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \sigma(S_n) &= \sqrt{V(S_n)} \\
 &= \sqrt{nV(X)} \\
 &= \sqrt{n} \sigma(X)
 \end{aligned}$$

3. PROPRIÉTÉ

Si X est une variable aléatoire suivant la loi de probabilité de cet échantillon, la variable aléatoire « moyenne » de cet échantillon

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{S_n}{n} \text{ vérifie :}$$

$$(1) E(M_n) = E(X) \quad (2) V(M_n) = \frac{V(X)}{n} \quad (3) \sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$$

A. DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned}
 (1) \quad E(M_n) &= E\left(\frac{S_n}{n}\right) \\
 &= nE\left(\frac{X}{n}\right) \\
 &= \frac{1}{n} \times nE(X) \quad \text{changement affine de } \frac{1}{n} \\
 &= E(X)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad V(M_n) &= V\left(\frac{S_n}{n}\right) \\
 &= nV\left(\frac{X}{n}\right) \\
 &= \frac{1}{n^2} \times nV(X) \\
 &= \frac{V(X)}{n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \sigma(M_n) &= \sqrt{V(M_n)} \\
 &= \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}
 \end{aligned}$$