

# Chapitre II

## Continuité des Fonctions d'une Variable Réelle

### I. DÉFINITION

Soit  $f$ , définie sur un intervalle  $I$ , et soit  $a$ , un réel de  $I$ . La fonction  $f$  est continue si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$f$  est continue sur l'intervalle  $I$ , si et seulement si, quel que soit le réel  $x \in I$ ,  $f$  est continue en  $x$ .

H.P :  $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in ]a - \alpha; a + \alpha[, f(x) \in ]f(a) - \epsilon; f(a) + \epsilon[$

### A. EXEMPLE

La fonction inverse est continue sur  $] -\infty; 0[$ , et sur  $]0; +\infty[$ .

La fonction "Partie Entière" est définie sur  $\mathbb{R}$ , mais pas continue sur  $\mathbb{R}$ .

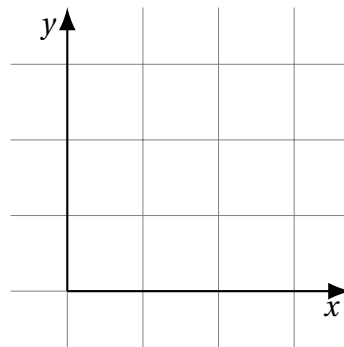


FIGURE 2.1. – Représentation Graphique de la Fonction  
"Partie Entière", continue sur  $[n; n + 1[$  avec  $n \in \mathbb{Z}$ .

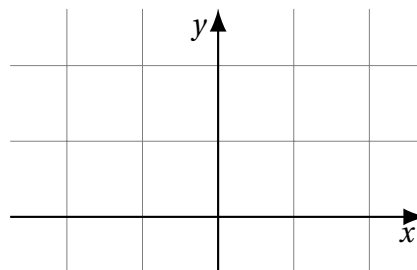


FIGURE 2.2. – Représentation Graphique de la Fonction Absolue

### B. PROPRIÉTÉ

La somme, le produit et la composée de deux fonctions continues est continue.  
L'inverse d'une fonction continue est continue sur tout intervalle où elle ne s'annule pas.

$$f : x \mapsto x^2 \quad \text{continue}$$

$$g : x \mapsto \frac{1}{x^2} \quad \text{Définie sur } \mathbb{R}^*, \text{ continue sur } ]-\infty; 0[ \text{ et } ]0; +\infty]$$

## II. THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

### A. THÉORÈME

Si une fonction  $f$  est continue sur un intervalle  $[a; b]$  alors, pour tout réel  $k \in [\min(f(a); f(b)); \max(f(a); f(b))]$  il existe au moins un réel  $c \in [a; b]$  tel que  $f(c) = k$

C'est-à-dire, pour tout réel  $k$ , compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe un réel  $c \in [a; b]$  tel que  $f(c) = k$

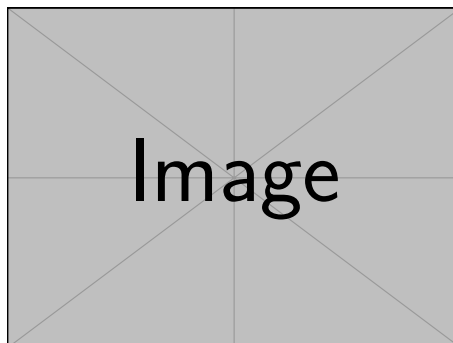


FIGURE 2.3. – Exemple du Théorème des Valeurs Intermédiaires

Pour tout  $k$  appartenant à  $[f(b); f(a)]$ , il existe au moins un réel  $c \in [a; b]$ , tel que  $f(c) = k$

### B. COROLLAIRE

Si une fonction  $f$  est continue et strictement monotone sur un intervalle  $[a; b]$ , alors, pour tout  $k \in [\min(f(a); f(b)); \max(f(a); f(b))]$ , il existe un *unique* réel  $c \in [a; b]$ , tel que  $f(c) = k$ .

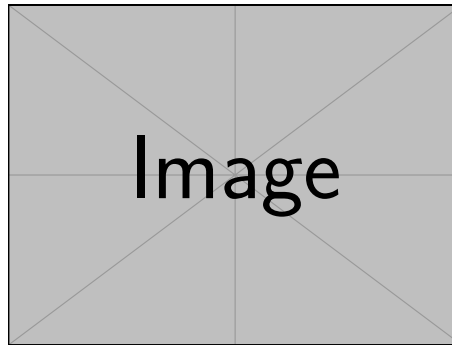


FIGURE 2.4. – Illustration du Corollaire du Théorème  
des Valeurs Intermédiaires

### 1. CAS PARTICULIER

Si une fonction  $f$  est continue sur un intervalle  $[a; b]$ , et si  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes contraires, alors il existe au moins une solution à  $f(x) = 0$ , sur  $[a; b]$ .