

Chapitre 14

Convexité

I. FONCTION CONVEXE ET FONCTION CONCAVE

A. DÉFINITIONS

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère.

f est *convexe* sur I si quels que soient les points A et B de la courbe \mathcal{C} sur I , le segment $[AB]$ est au dessus de \mathcal{C} entre A et B .

f est *concave* sur I si quels que soient les points A et B de la courbe \mathcal{C} sur I , le segment $[AB]$ est en dessous de \mathcal{C} entre A et B .

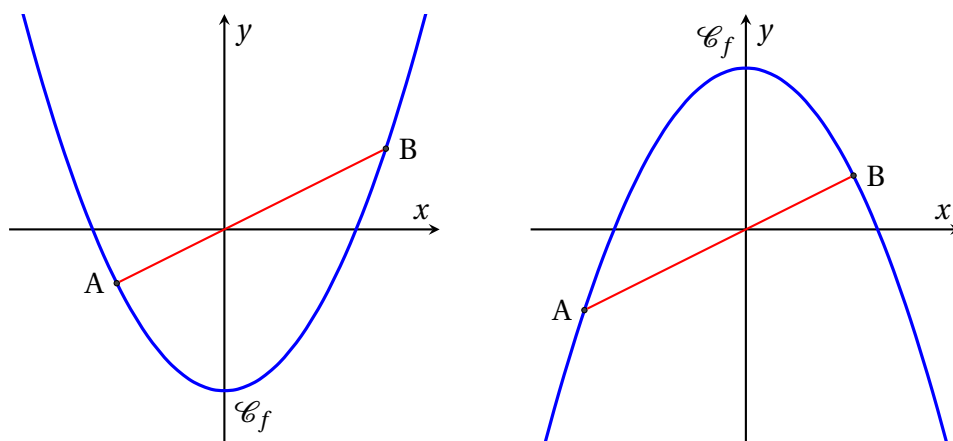


FIGURE 14.1. – Illustration de la Définition

B. PROPRIÉTÉ

Si f est convexe sur I , pour tous réels a et b de I , $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

Si f est concave sur I , pour tous réels a et b de I , $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

1. DÉMONSTRATION

Supposons f convexe.

Soit $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ deux points de \mathcal{C} , alors $[AB]$ est au dessus de \mathcal{C} , en particulier, le milieu de $[AB]$ d'abscisse $\frac{a+b}{2}$ et d'ordonnée $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ est au dessus de l'image de $\frac{a+b}{2}$ par f .

C. PROPRIÉTÉ (ADMISE)

f est convexe sur I si et seulement si \mathcal{C} est située au dessus de chacune de ses tangentes sur I .

f est concave sur I si et seulement si \mathcal{C} est située en dessous de chacune de ses tangentes sur I .

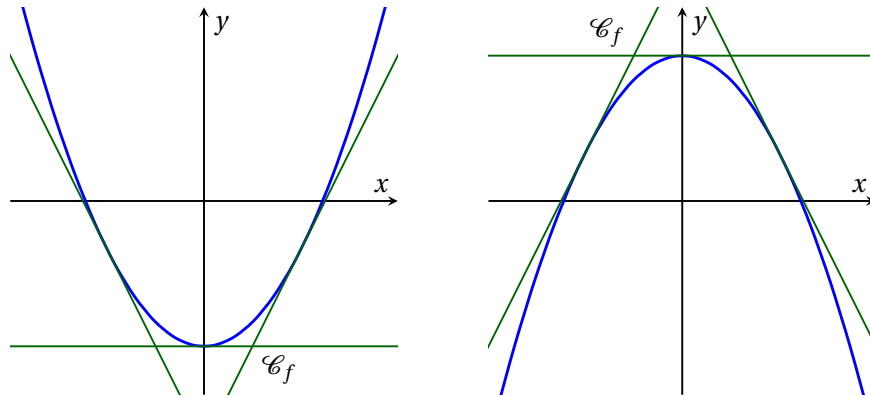


FIGURE 14.2. – Illustration de la Propriété

D. DÉFINITION

A est un point d'inflexion de \mathcal{C} si au point A , la courbe traverse sa tangente.

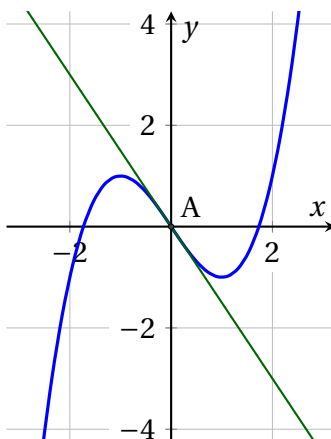


FIGURE 14.3. – Exemple d'un Point d'Inflexion

E. REMARQUE

Lorsque f change de convexité, sa courbe \mathcal{C} admet un point d'inflexion.

II. LIEN AVEC LA DÉRIVÉEA. DÉFINITION

Soit f une fonction dérivable sur I dont la fonction dérivée f' est dérivable sur I . La dérivée de f' se nomme la dérivée seconde de f et se note f'' .

B. PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction dérivable deux fois sur un intervalle I .

f est convexe sur I si et seulement si :

- f' est croissante sur I .
- f'' est positive sur I .
- La courbe représentative est située au dessus de ses tangentes sur I .

C. PROPRIÉTÉ

f est concave sur I si et seulement si :

- f' est décroissante sur I .
- f'' est négative sur I .
- La courbe représentative est située en dessous de ses tangentes sur I .

D. PROPRIÉTÉ

Si \mathcal{C} est la courbe représentative de f dans un repère, \mathcal{C} admet un point d'inflexion au point d'abscisse a si et seulement si f'' s'annule et change de signe en a .

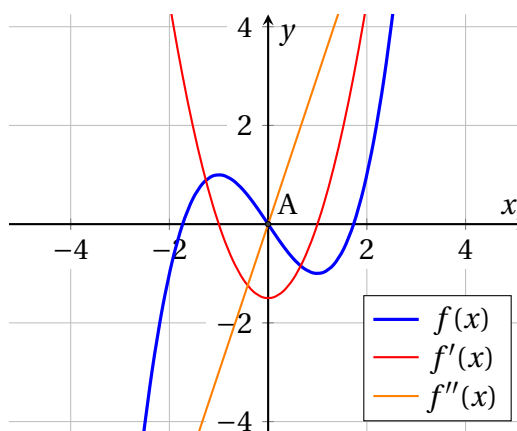


FIGURE 14.4. – Illustration de l'Évolution de la Convexité en Fonction de la Dérivée
Seconde