Chapitre 13

Équations dans l'Espace

I. Représentation Paramétrique d'une Droite

Dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, soit (d) la droite passant par un point A $\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(a;b;c\right)$.

Un point M $\left(x;y;z\right)$ appartient à (d) si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$.

C'est-à-dire : $(S)\begin{cases}x=x_A+ta\\y=y_A+tb\\z=z_A+tc\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$

A. Définition

Le système (S) est une représentation paramétrique de la droite (d).
t est le paramètre de cette représentation.

1. Démonstration

Reprenons la situation précédente :
$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x_M-x_A&=&x-x_A\\y_M-y_A&=&y-y_A\\z_M-z_A&=&z-z_A\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}M\in(d)&\iff\overrightarrow{AM}=t\vec{u}\\&\iff\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_a\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\\&\iff\begin{cases}x-x_A=ta\\y-y_A=tb\\z-z_A=tc\end{cases}\\&\iff\begin{cases}x=x_A+ta\\y=y_A+tb\\z=z_A+tc\end{cases}\end{aligned}$$

B. Exemple

La droite (d) passant par A $(2;0;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ a pour représentation paramétrique :

$$(d)\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Les points M $(0;6;-5)$ et N $(1;3;2)$ appartiennent-ils à (d) ?

— M : $\begin{cases} 0 = 2 + t \\ 6 = -3t \\ -5 = -1 + 2t \end{cases}$ M $\in (d)$, car -2 est solution du système.

— N : $\begin{cases} 1 = 2 + t \\ 3 = -3t \\ 2 = -1 + 2t \end{cases}$ N $\notin (d)$, car -1 est solution de (1) et (2) mais pas (3).

II. Équation Cartésienne de Plan

A. Rappel

La plan $\mathscr{P}$ qui passe par un point A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} = 0$.

B. Théorème

(1) L'ensemble des points M $(x;y;z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$, où a, b, c et d sont quatre réels tels que a, b et c sont non nuls, est un plan de vecteur normal $\vec{n}\,(a,b,c)$.

(2) Réciproquement : si $\vec{n}\,(a,b,c)$ est un vecteur normal d'un plan $\mathscr{P}$, une équation cartésienne de ce plan est $ax + by + cz + d = 0$ où d est un réel.
Autrement dit, pour tout point M $(x;y;z)$ de $\mathscr{P}$ vérifie $ax + by + cz + d = 0$.

1. Démonstration

(1) Appelons $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M $\left(x;y;z\right)$ tels que $ax+by+cz+d=0$.
(on ne sait pas que c'est un plan)
Soit le vecteur $\vec{n}\ (a,b,c)$.
Supposons $a\neq 0$, prenons le point A $\left(\frac{-d}{a};0;0\right)$.
Vérifions que $\mathrm{A}\in\mathscr{E}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{A}\in\mathscr{E} &\iff a\times\frac{-d}{a}+b\times 0+c\times 0+\left(-a\times\frac{-d}{a}-b\times 0-c\times 0\right)=0\\ &\iff a\times\frac{-d}{a}-a\times\frac{-d}{a}=0\end{aligned}$$

C'est identique pour les points $\left(0;\frac{-d}{b};0\right)$ ou $\left(0;0;\frac{-d}{c}\right)$.
Donc, quel que soit M $\left(x;y;z\right)\in\mathscr{E}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\vec{n}=0 &\iff \begin{pmatrix}x-\frac{-d}{a}\\ y\\ z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}\\ &\iff ax+by+cz+d=0\end{aligned}$$

Donc, tout point M de $\mathscr{E}$ vérifie $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\vec{n}=0$, donc appartient au plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. (c'est la caractérisation d'un plan) $\square$
Ainsi, $\mathscr{E}\subset\mathscr{P}$.

(2) Soit A $\left(x_{\mathrm{A}};y_{\mathrm{A}};z_{\mathrm{A}}\right)\in\mathscr{P}$.
Pour tout point M $\left(x;y;z\right)$ du plan $\mathscr{P}$ on calcule le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\vec{n}$ qui est nul par définition (voir le rappel) d'un plan de vecteur normal $\vec{n}\ (a;b;c)$.
On trouve $a\left(x-x_{\mathrm{A}}\right)+b\left(y-y_{\mathrm{A}}\right)+c\left(z-z_{\mathrm{A}}\right)=0$ et donc $ax+by+cz+d=0$, où $d=-ax_{\mathrm{A}}-by_{\mathrm{A}}-cz_{\mathrm{A}}$. $\square$
Ainsi $\mathscr{P}\subset\mathscr{E}$.

Comme $\mathscr{E}\subset\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}\subset\mathscr{E}$, $\mathscr{P}=\mathscr{E}$.