Chapitre VI

Équations Différentielles et Primitives

I. Notion d'Équation Différentielle

I.1. Définition

Une équation liant une fonction et ses dérivées est appelée une équation différentielle. En général, on note y la fonction, y' sa dérivée, y'' sa dérivée seconde.

I.2. Exemples

- $y' = 2x$ est une équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ dont *une* solution est $y = x^2$.
- $y' = y$ est une équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ dont une solution est exp.

I.2.a. Remarque

Ce ne sont pas les seules solutions !

II. Primitives d'une Fonction Continue (Solutions de $y' = f(x)$)

II.1. Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Une primitive de f sur I est une fonction F telle que :

$$\mathrm{F}' = f$$

II.2. Exemple

La fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \frac{1}{x}$ est une primitive de $f : x \mapsto \frac{-1}{x^2}$, sur $\mathbb{R}^{+*}$.

II.3. Théorème

(Démontré dans le Chapitre sur l'Intégration)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I

II.4. Remarque

Il arrive qu'on ne puisse pas exprimer cette primitive avec les fonctions classiques.

II.4.a. Exemple

$f : x \mapsto e^{x^2}$

II.5. Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F est une primitive de f sur I.

Alors, f admet une infinité de primitives sur I① et toute primitive G de f sur I est définie par $\mathrm{G}(x) = \mathrm{F}(x) + k$② où k est une constante réelle.

II.5.a. Démonstration

1. Si F est une primitive de f, quel que soit le réel k, la fonction $\mathrm{G} : x \mapsto \mathrm{F}(x) + k$ est une primitive de f. En effet, $\mathrm{G}'(x) = \mathrm{F}'(x) = f(x)$, donc, il y a une infinité de primitives.
2. Si F et G sont deux primitives d'une même fonction f, alors :

$$(\mathrm{F} - \mathrm{G})'(x) = \mathrm{F}'(x) - \mathrm{G}'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

La dérivée de $\mathrm{F} - \mathrm{G}$ est nulle, donc $\mathrm{F} - \mathrm{G}$ est une constante.

Donc, $\forall x \in \mathrm{I},\ \mathrm{F}(x) - \mathrm{G}(x) = k$

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{G}(x) + k \quad \square$$

On a montré que deux primitives d'une même fonction sont différents d'une constante.

III. Calcul des Primitives

III.1. Primitives des Fonctions usuelles

Fonction $f : x \mapsto$	Primitive $\mathrm{F} : x \mapsto$	Intervalle
k (constante)	kx	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}}$ ou $\frac{x^{-n+1}}{-n+1}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{+*}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$

Figure 6.1. – Tableau des Primitives des Fonctions Usuelles

III.2. Primitives de Fonctions Composées

Les primitives se déduisent des formules de dérivation. u désigne une fonction continue sur I

Fonction f du type	Primitive F	Conditions
$u'u^n$ $(n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1} \times u^{n+1}$	–
$\frac{u'}{u^n} = u'u^{-n}$ $(n \geq 2, n \in \mathbb{N},)$	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{u^{n-1}}$ ou $\frac{u^{-n+1}}{-n+1}$	$\forall x \in \mathrm{I},\ u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$	$\forall x \in \mathrm{I},\ u(x) > 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$\forall x \in \mathrm{I},\ u(x) > 0$
$u'e^u$	e^u	–
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$	–
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$	–

Figure 6.2. – Tableau des Primitives de Fonctions Composées

III.3. Primitives et Opérations sur les Fonctions

III.3.a. Théorème

Si F et G sont des primitives respectivement des fonctions f et g et si k est une constante réelle, $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ est une primitive de $f+g$ et $k\mathrm{F}$ est une primitive de kf

III.3.b. Propriété

Si f est une fonction continue sur un intervalle tel que $ax+b \in \mathrm{I}$, et F est une primitive de f, alors : $g : x \mapsto g(x) = f(ax+b)$ admet une primitive :

$$\mathrm{G}(x) = \frac{1}{a}\mathrm{F}(ax+b)$$

III.3.b.i. Exemple

$$f(x) = (3x-2)^4 \qquad \mathrm{F}(x) = \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{5}(3x-2)^5$$
$$= \tfrac{1}{15}(3x-2)^5$$

IV. Équation Différentielle $y' - ay = 0$

IV.1. Théorème

Posons (E) : $y' = ay$

Soit $a \in \mathbb{R}$, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{C}e^{ax}$, où C est une constante réelle.

$$y' - ay = 0 \qquad \mathscr{S} = \left\{x \mapsto \mathrm{C}e^{ax},\ \mathrm{C} \in \mathbb{R}\right\}$$

IV.1.a. Démonstration

— Toute fonction $f : x \mapsto f(x) = \mathrm{C}e^{ax}$ vérifie $f'(x) = a\mathrm{C}e^{ax} = a \times f(x)$. f est donc solution de (E).

— Montrons que toute solution de (E) est sous la forme $x \mapsto \mathrm{C}e^{ax}$
Soit g, une solution de (E). On a $g' = ag$, or $f : x \mapsto f(x) = e^{ax}$ est solution de (E).
f ne s'annulant pas, on peut définir $h : x \mapsto \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(x)}{e^{ax}}$

On peut écrire $h(x) = g(x)e^{-ax}$

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(x)e^{-ax} - ae^{-ax}g(x) \\ &= e^{-ax}\big(g'(x) - ag(x)\big) \qquad \text{or} \qquad g'(x) = ag(x) \\ &= e^{-ax} \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, h est une fonction constante, $\exists \mathrm{C},\ h(x) = \mathrm{C} = \frac{g(x)}{e^{ax}}$

$$g(x) = \mathrm{C}e^{ax},\ \mathrm{C} \in \mathbb{R} \quad \square$$

IV.2. Exemple

Soit l'équation $y' + 5y = 0 \iff y' = -5y$

Les solutions de l'équation sont les fonctions f définies par
$f(x) = \mathrm{C}e^{-5x},\ \mathrm{C} \in \mathbb{R}$

V. Équations Différentielles $y' - ay = k(x)$, k étant Continue

V.1. Méthode

Supposons qu'on a deux fonctions f et g, solutions de l'équation
(E) : $y' - ay = k(x)$.

Alors la fonction $h(x)$, définie par $h(x) = g(x) - f(x)$ est solution de l'équation
$y' - ay = 0$.

V.1.a. Vérification

$$\begin{aligned} h'(x) - ah(x) &= g'(x) - f'(x) - a\big(g(x) - f(x)\big) \\ &= g'(x) - ag(x) - \big(f'(x) - af(x)\big) \\ &= k(x) - k(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout x (sur un ensemble de définition que l'on n'a pas étudié)

$$h(x) = \mathrm{C}e^{ax},\ \mathrm{C} \in \mathbb{R} \qquad \text{(d'après §IV)}$$

Donc, si l'on trouve une solution particulière f de l'équation (E) toute solution s'écrit sous la forme

$$g(x) = f(x) + \mathrm{C}e^{ax},\ \mathrm{C} \in \mathbb{R}$$

$$\text{car} \quad g(x) - f(x) = h(x) = \mathrm{C}e^{ax}$$

V.2. Exemple

Soit l'équation différentielle $y' + y = \frac{x-1}{x^2}$ (E)

1. Vérifier que la fonction inverse est solution de (E).
2. En déduire toutes les solutions de (E)

1. Soit $f_0 : x \mapsto \frac{1}{x}$ alors $f_0' = \frac{-1}{x^2}$
   $f_0' + f_0 = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$, la fonction inverse est solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. D'après la démonstration précédente, toute solution f de (E) est de la forme
   $f : x \mapsto f_0(x) + \mathrm{C}e^{ax}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.
   On résout $y' + u = 0$: ici $a = -1$.
   Ainsi, les solutions sont :

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \frac{1}{x} + \mathrm{C}e^{ax},\ \mathrm{C} \in \mathbb{R}\right\}$$

V.3. Exemple

Soit l'équation $y' - 2y = 5$ (E)

1. Trouvons une fonction constante solution (E).
   La fonction $x \mapsto \frac{-5}{2}$ convient.
2. On résout $y' - 2y = 0$:

$$\left\{x \mapsto \mathrm{C}e^{2x},\ \mathrm{C} \in \mathbb{R}\right\}$$

Les solutions de (E) sont les fonctions du type :

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \frac{-5}{2} + \mathrm{C}e^{2x},\ \mathrm{C} \in \mathbb{R}\right\}$$