Chapitre X

Limites de Fonctions

I. Limites d'une Fonction en l'Infini

A. Limite en $+\infty$

1. Définitions

Soit une fonction f définie au moins sur $[a\,;+\infty[$, où a est un réel.

— On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si pour tout réel M positif, il existe un réel A, tel que $x > \mathrm{A}$ implique $f(x) \geq \mathrm{M}$.
Autrement dit, lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, $f(x)$ peut être aussi grand que l'on veut.
On note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

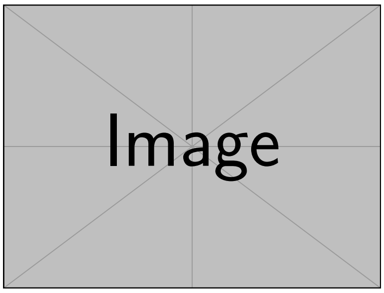

FIGURE 10.1. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers $+\infty$ en $+\infty$

— On dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si pout tout réel m négatif, il existe un réel A, tel que $x > \mathrm{A}$, $f(x) \leq m$.
Autrement dit, lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, $f(x)$ est négatif et peut être aussi grand que l'on veut en valeur absolue.
On note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

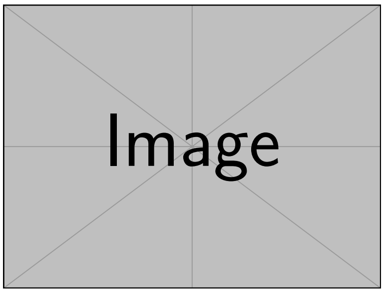

FIGURE 10.2. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers $-\infty$ en $+\infty$

— On dit que f a pour limite l en $+\infty$ où l est un réel si pour tout intervalle ouvert I contenant l, il existe un réel A tel que $x > \mathrm{A}$ implique $f(x) \in \mathrm{I}$
  Autrement dit, lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, $f(x)$ peut être aussi près de l que l'on veut.
  On note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

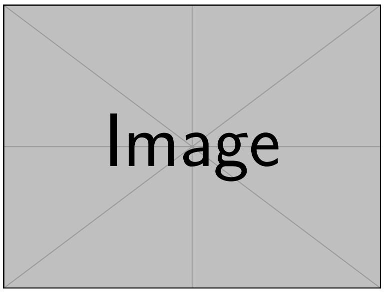

FIGURE 10.3. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers l en $+\infty$

H.P. : $\forall \epsilon > 0,\ \exists \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathcal{D}_f$

$$\left(x > \mathrm{A} \implies \left|f(x) - l\right| < \epsilon\right) \text{ ou } \left(x > \mathrm{A} \implies f(x) \in \left]l - \epsilon\,; l + \epsilon\right[\right)$$

2. Définition

Soit f une fonction définie au moins sur $[\mathrm{A}\,; +\infty[$, où A est un réel, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.
Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ alors $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = l$.

3. Remarque

Une fonction n'admet pas forcément de limite en $+\infty$, par exemple, les fonctions sin et cos sont bornées et n'admettent pas de limites en l'infini.

B. Limite en $-\infty$

1. Définitions

Soit f une fonction définie au moins sur $]-\infty\,;a[$, où a est un réel.

— On dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ si pour tout réel M, positif, il existe un réel A tel que $x < \text{A}$ implique $f(x) \geq \text{M}$
Autrement dit, lorsque x prend des valeurs négatives de plus en plus grandes en valeur absolue, $f(x)$ peut être aussi grand que l'on veut.
On note :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

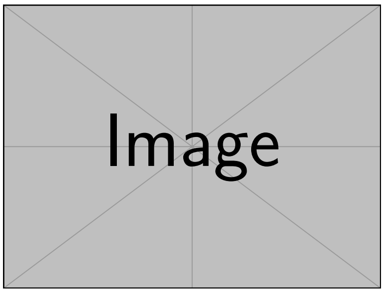

Figure 10.4. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers $+\infty$ en $-\infty$

— On dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ si pour tout réel m négatif, il existe un réel A tel que $x < \text{A}$ implique $f(x) \leq m$
On note :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

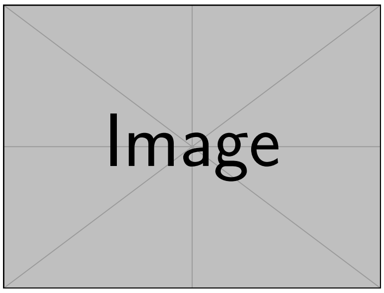

Figure 10.5. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers $-\infty$ en $-\infty$

— On dit que f a pour limite l en $-\infty$ où l est un réel, si pour tout intervalle ouvert I contenant l, on peut trouver un réel A tel que si $x \leq \text{A}$, $f(x)$ appartient à I.
Autrement dit, lorsque x prend des valeurs négatives, de plus en plus grandes en valeur absolue, $f(x)$ peut être aussi près de l que l'on veut.

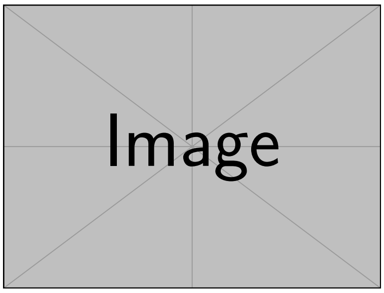

FIGURE 10.6. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers l en $+\infty$

H.P. : $\forall\epsilon > 0,\ \exists \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathscr{D}_f$

$$\left(x < \mathrm{A} \implies \left|f(x) - l\right| < \epsilon\right) \text{ ou } \left(x < \mathrm{A} \implies f(x) \in \left]l - \epsilon\,;l + \epsilon\right[\right)$$

2. DÉFINITION

Si $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ alors $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = l$.