Chapitre XIV

Convexité

I. Fonction Convexe et Fonction Concave

A. Définitions

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

f est *convexe* sur I si quels que soient les points A et B de la courbe $\mathscr{C}$ sur I, le segment $[\text{AB}]$ est au dessus de $\mathscr{C}$ entre A et B.

f est *concave* sur I si quels que soient les points A et B de la courbe $\mathscr{C}$ sur I, le segment $[\text{AB}]$ est en dessous de $\mathscr{C}$ entre A et B.

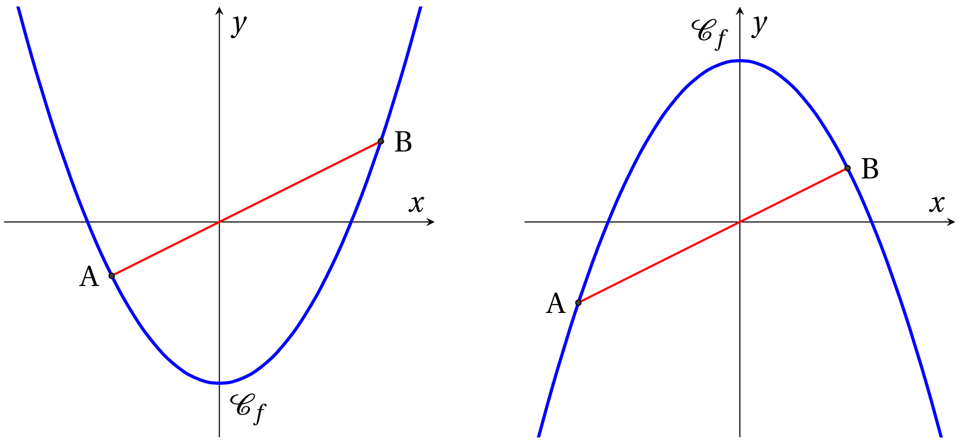

Figure 14.1. – Illustration de la Définition

B. Propriété

Si f est convexe sur I, pour tous réels a et b de I, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

Si f est concave sur I, pour tous réels a et b de I, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

1. Démonstration

Supposons f convexe.

Soit A $(a\,;f(a))$ et B $(b\,;f(b))$ deux points de $\mathscr{C}$, alors $[\text{AB}]$ est au dessus de $\mathscr{C}$, en particulier, le milieu de $[AB]$ d'abscisse $\frac{a+b}{2}$ et d'ordonnée $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ est au dessus de l'image de $\frac{a+b}{2}$ par f.

C. Propriété (admise)

f est convexe sur I si et seulement si $\mathscr{C}$ est située au dessus de chacune de ses tangentes sur I

f est concave sur I si et seulement si $\mathscr{C}$ est située en dessous de chacune de ses tangentes sur I

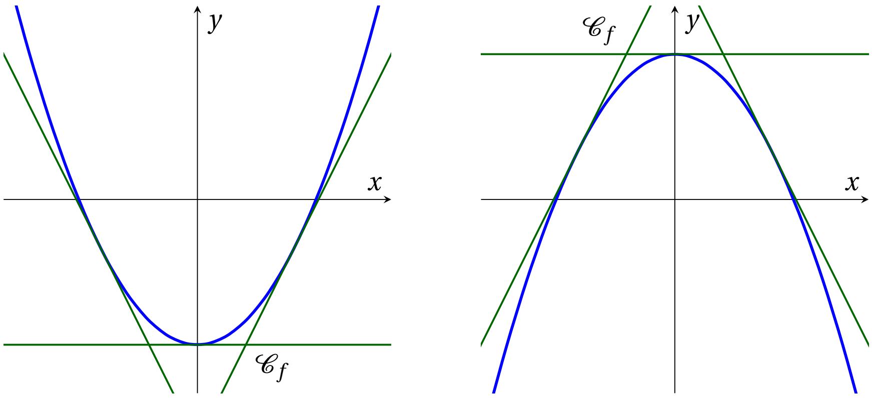

Figure 14.2. – Illustration de la Propriété

D. Définition

A est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$ si au point A, la courbe traverse sa tangente.

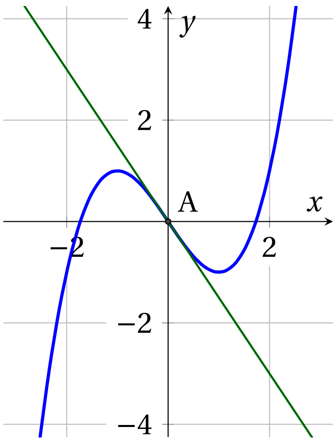

Figure 14.3. – Exemple d'un Point d'Inflexion

E. Remarque

Lorsque f change de convexité, sa courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion.

II. Lien avec la dérivée

A. Définition

Soit f une fonction dérivable sur I dont la fonction dérivée f' est dérivable sur I. La dérivée de f' se nomme la dérivée seconde de f et se note f''.

B. Propriété

Soit f une fonction dérivable deux fois sur un intervalle I.

f est convexe sur I si et seulement si :

— f' est croissante sur I

— f'' est positive sur I

— La courbe représentative est située au dessus de ses tangentes sur I

C. Propriété

f est concave sur I si et seulement si :

— f' est décroissante sur I

— f'' est négative sur I

— La courbe représentative est située en dessous de ses tangentes sur I

D. Propriété

Si $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère, $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse a si et seulement si f'' s'annule et change de signe en a.

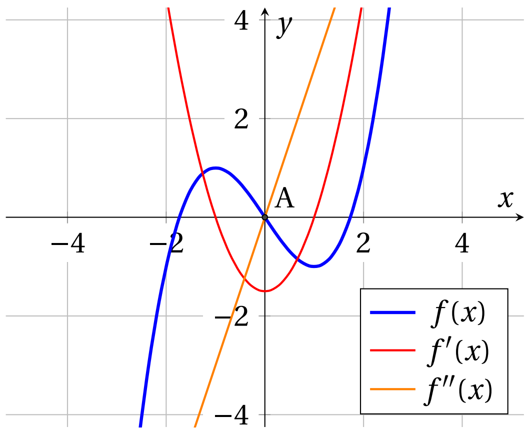

FIGURE 14.4. – Illustration de l'Évolution de la Convexité en Fonction de la Dérivée Seconde