Chapitre XV

Opérations sur les Variables Aléatoires

I. Rappels

Soit Ω l'univers d'une experience aléatoire.

Une variable aléatoire X est une fonction qui à tout élément de Ω associe un nombre réel.

A. Exemple

On tire deux fois une pièce. $\Omega = \{ PP , PF , FP , FF \}$

Soit X la variable aléatoire définie sur Ω qui donne le nombre de « pile »obtenus.

Soit G la variable aléatoire égale au gain suivant :

— Deux faces identiques (PP et FF) font gagner £ 2.

— Deux faces différentes (PF et FP) font perdre £ 2.

Les lois de probabilités des variables aléatoires X et G sont :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

g_i	-2	2
$P(G = g_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

FIGURE 15.1. – Lois de Probabilité de X et G

B. Définition

L'espérance de la variable aléatoire X est le réel :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

L'espérance est une moyenne, les probabilités jouent le role de fréquences.

Dans notre exemple, $E(X) = 1$ et $E(G) = 0$

C. Définition

La variance de la variable aléatoire X est le réel :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$$

C'est la moyenne des écarts au carré

D. Définition

L'écart-type de la variable aléatoire X est le réel :

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

E. Théorème

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} x^2 P(X = x_i) - (E(X))^2 = E\left(X^2\right) - (E(X))^2$$

La variance est aussi la moyenne des valeurs au carré moins la moyenne au carré.

1. Démonstration

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)^2\right) p_i \qquad \left(P(X = x_i) = p_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - 2x_i E(X) + (E(X))^2\right) p_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 p_i\right) - 2E(X) \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + (E(X))^2 \sum_{i=1}^{n} p_i \\
&= E\left(X^2\right) - 2\left(E(X) \times E(X)\right) + (E(X))^2 \times 1 \\
&= E\left(X^2\right) - (E(X))^2 \quad \square
\end{aligned}$$

II. Opérations sur les Variables Aléatoires

A. Changement affine

1. Théorème

Si X est une variable aléatoire et a et b sont deux réels :

$$(1) \quad \mathrm{E}(a\mathrm{X}+b) = a\mathrm{E}(\mathrm{X})+b$$

$$(2) \quad \mathrm{V}(a\mathrm{X}+b) = a^2\mathrm{V}(\mathrm{X})$$

a. Démonstrations

On note p_i la probabilité $\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_i)$ pour alléger les notations.

$$\begin{aligned}(1) \quad \mathrm{E}(a\mathrm{X}+b) &= \sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)\,p_i \\ &= a\sum_{i=1}^{n}x_i p_i + b\sum_{i=1}^{n}p_i \\ &= a\mathrm{E}(\mathrm{X})+b \quad \square \\ (2) \quad \mathrm{V}(a\mathrm{X}+b) &= \mathrm{E}\left((a\mathrm{X}+b)^2\right)-(\mathrm{E}(a\mathrm{X}+b))^2 \\ &= \mathrm{E}\left(a^2\mathrm{X}^2+2a\mathrm{X}b+b^2\right)-(\mathrm{E}(a\mathrm{X}+b))^2 \\ &= a^2\mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right)+2ab\mathrm{E}(\mathrm{X})+b^2-a^2(\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2-2ab\mathrm{E}(\mathrm{X})-b^2 \\ &= a^2\left(\mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right)-(\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2\right) \\ &= a^2\mathrm{V}(\mathrm{X}) \quad \square\end{aligned}$$

2. Théorème

Si X est une variable aléatoire et a et b sont deux réels :

$$\sigma(a\mathrm{X}+b) = |a|\sigma(\mathrm{X})$$

a. Démonstration

$$\begin{aligned}\sigma(a\mathrm{X}+b) &= \sqrt{\mathrm{V}(a\mathrm{X}+b)} \\ &= \sqrt{a^2\mathrm{V}(\mathrm{X})} \\ &= |a|\sigma(\mathrm{X}) \quad \square\end{aligned}$$

3. Exemple

Dans le jeu précédent (deux tirages de pièce), si X' est la variable aléatoire qui donne le triple de nombre de « pile », $\mathrm{X}'=3\mathrm{X}$ et donc $\mathrm{E}\left(\mathrm{X}'\right)=3\mathrm{E}(\mathrm{X})=3$

B. Somme de Variables Aléatoires

Dans cette sous-partie, X et Y sont deux variables aléatoires prenant respectivement les valeurs $\{ a_1 , a_2 , \dots , a_n \}$ et $\{ b_1 , b_2 , \dots , b_m \}$, où n et m sont des entiers naturels non nuls.

1. Définition

La variable aléatoire $X+Y$ prend tous les valeurs $a_i + b_j$ possibles (où $1 \leq i \leq n$ et $q \leq j \leq m$)

Pour toute valeur de w, $P(X+Y=w) = \sum_{a_i+b_j=w} P\left(\{X=a_i\} \cap \{Y=b_j\}\right)$ c'est-à-dire la somme des probabilités $P\left(\{X=a_i\} \cap \{Y=b_j\}\right)$ telles que $a_i + b_j = w$ (toutes les sommes égales à w).