

Chapitre VIII

Géométrie Vectorielle dans l'Espace

I. VECTEURS DE L'ESPACE

La notion de vecteur se généralise à l'espace.

Le vecteur \vec{u} est caractérisé par un sens, une direction, et une norme, notée $||\vec{u}||$.

A. THÉORÈME

A, B, et C étant quatre points de l'espace, les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\vec{AB} = \vec{CD}$
- Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
- Les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.

B. DÉFINITION

Deux vecteurs de l'espace \vec{u} et \vec{v} sont *colinéaires* si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

C. PROPRIÉTÉ

Toutes les opérations sur les vecteurs, en particulier la relation de Chasles sont identiques dans l'espace comme dans le plan.

D. THEORÈME

A et B étant deux points distincts de l'espace, (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{AM} = t\vec{AB}$, $t \in \mathbb{R}$

$$(AB) = \{ M \in \mathcal{E}, \vec{AM} = t\vec{AB}, t \in \mathbb{R} \}$$

E. DÉFINITION

Un vecteur \vec{k} est une *combinaison linéaire* des vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} s'il existe des réels a , b et c tels que $\vec{k} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$

II. VECTEURS COPLANAIRES

A. DÉFINITION

Des vecteurs sont *coplanaires* s'ils admettent des représentants dont les extrémités sont dans un même plan.

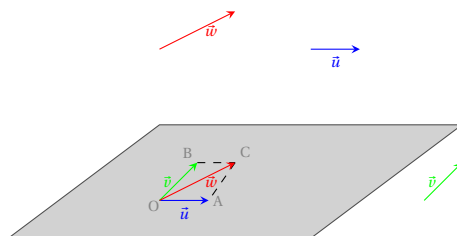


FIGURE 8.1. – Illustration de la Définition

Si O est un point quelconque et A, B et C sont tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$
 \vec{u} , \vec{v} , et \vec{w} coplanaires \iff O, A, B, et C coplanaires

B. THÉORÈME

\vec{u} , \vec{v} et \vec{w} étant trois vecteurs de l'espace avec \vec{u} et \vec{v} non colinéaires.

\vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels α et β tels que
 $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. (\vec{w} est une *combinaison linéaire* de \vec{u} et \vec{v})

1. DÉMONSTRATION

Soient O, A, B, et C quatre points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$

\vec{u} et \vec{v} sont non-colinéaires donc, O, A et B sont non alignés, et (OAB) est un plan de base $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

“ \implies ” On suppose que \vec{u} , \vec{v} , et \vec{w} sont coplanaires. Alors, $C \in (OAB)$.
 C admet donc des coordonnées $(\alpha; \beta)$ dans la base $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
 C'est-à-dire $\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ ou encore $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. \square

“ \impliedby ” On suppose que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

Soit D le point de (OAB) de coordonnées $(\alpha; \beta)$

Alors,

$$\overrightarrow{OD} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$$

$$= \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{w} = \overrightarrow{OC}$$

Donc, D = C, les points sont confondus, et comme $C \in (OAB)$,

\vec{u} , \vec{v} , et \vec{w} sont coplanaires. \square

2. THÉORÈME : CARACTERISATION VECTORIELLE D'UN ESPACE

Si A, B, et C sont trois points non-alignés de l'espace, le plan (ABC) est l'ensemble des M tels que :

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t'\overrightarrow{AC} \quad (t, t' \in \mathbb{R})$$

III. REPÈRAGE DANS L'ESPACEA. DÉFINITION

Un repère de l'espace est constitué d'un point appelé origine du repère (en général O) et d'un triplet de vecteurs non-coplanaires (en général \vec{i} , \vec{j} et \vec{k})

On le note $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

B. VOCABULAIRE

La droite $(O; \vec{i})$ est appelée axe des *abscisses*.

La droite $(O; \vec{j})$ est appelée axe des *ordonnées*.

La droite $(O; \vec{k})$ est appelée axe des *cotes*.

Lorsque ces trois axes sont perpendiculaires deux à deux, le repère est *orthogonal*.

Si de plus $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$, le repère est *orthonormé*.

C. COORDONNÉES DANS L'ESPACE1. THÉORÈME

Si $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère, pour tout point M, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, appelés coordonnées de M.

On note M $(x; y; z)$

A. DÉMONSTRATION

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$$

Or $M \in (O; \vec{i}; \vec{j})$ donc il a des coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

$$\overrightarrow{OM'} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$\overrightarrow{M'M}$ est colinéaire à \vec{k} (on a projeté dans sa direction). Il existe un réel z tel que $\overrightarrow{M'M} = z\vec{k}$

Donc, $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ \square
 (On admet l'unicité)

B. REMARQUE

On définit de même les coordonnées d'un vecteur de l'espace. Tout vecteur de l'espace est une combinaison linéaire des vecteurs \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} .

2. THÉORÈME

Si dans un repère A $(x_A; y_A; z_A)$ et B $(x_B; y_B; z_B)$ sont deux points, le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Et I, le point du milieu de $[AB]$:

$$I \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

Dans un repère orthonormé, un vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ a pour norme :

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

A. DÉMONSTRATION

Passer par M', le projeté orthogonal de M sur $(O; \vec{i}, \vec{j})$, puis appliquer le théorème de Pythagore deux fois.

3. THÉORÈME

Si I est le milieu de $[AB]$, pour tout M :

$$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$$

A. DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MI} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AI} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} \quad (\text{Chasles}) \end{aligned}$$