

# Chapitre IV

## Fonction Logarithme Népérien

### I. DÉFINITION DE LA FONCTION LN

#### A. THÉORÈME-DÉFINITION

Pour tout réel  $x$  strictement positif, il existe un unique réel tel que :

$$e^a = x$$

Le nombre  $a$  est appelé logarithme népérien de  $x$ . La fonction qui à  $x$  associe  $a$  est appelée “fonction logarithme népérien” et se note  $\ln$ .

Ainsi,

$$e^a = x \iff a = \ln(x), \quad \text{pour } x > 0$$

#### B. DÉMONSTRATION

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

D’après le corollaire du Théorème des Valeurs Intermédiaires, pour tout nombre  $k \in ]0; +\infty]$ , il existe un unique réel  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $e^a = k$   $\square$

#### C. REMARQUES

La fonction  $\ln$  est la fonction réciproque de  $\exp$ .

On déduit que :  $\ln(1) = 0$   $\ln(e) = 1$

#### D. PROPRIÉTÉS

$$\forall x \in ]0; +\infty[, e^{\ln(x)} = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$$

## II. ÉTUDE DE LA FONCTION LN

### A. CONTINUITÉ, DÉRIVABILITÉ

#### 1. PROPRIÉTÉ

- La fonction  $\ln$  est continue sur  $]0; +\infty]$
- La fonction  $\ln$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et  $\forall x \in ]0; +\infty[, \ln'(x) = \frac{1}{x}$
- La fonction  $\ln$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$

#### A. DÉMONSTRATION (FACILE)

Admettre que si  $f$  et  $u$  sont dérivables,  $f(u(x))' = u'(x) \times f'(u(x))$

$$(e^{\ln(x)})' = \ln'(x) \times e^{\ln(x)} = \ln'(x) \times x$$

$$(x)' = 1$$

$$\ln'(x) \times x = 1 \iff \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

#### B. DÉMONSTRATION (COMPLÈTE)

On étudie le taux d'accroissement, en admettant que  $\ln$  est continue :

$$\frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h}$$

Posons :

$$\begin{cases} u = \ln(x+h) \\ v = \ln(x) \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x+h = e^u \\ x = e^v \end{cases} \quad \text{et} \quad k = u - v$$

$$\begin{aligned} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} &= \frac{k}{e^u - e^v} \quad \text{or} \quad \lim_{h \rightarrow 0} k = 0 \\ &= \frac{1}{\frac{e^{v+h} - e^v}{k}} \end{aligned}$$

Or,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{v+h} - e^v}{h}$  est l'expression de la dérivée de  $e$ . La dérivée de  $e^v$  est  $e^v$ .

$$\frac{1}{e^v} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \frac{1}{x} \quad \square$$

2. PROPRIÉTÉ

Soit  $u$ , une fonction dérivable et strictement positive sur  $I$

Alors, la fonction  $f : x \mapsto \ln(u(x))$  et  $f' : x \mapsto \frac{u'}{u}$

A. EXEMPLE

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ , par  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

$f$  est dérivable en  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

B. LIMITES

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$$

1. DÉMONSTRATION

Soit  $M > 0$ , en posant  $A = e^M$ ,  $\exists A > 0$  tel que :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, x > A \implies \ln(x) > M$$

En effet,  $x > A \iff x > e^M$

Comme  $\ln$  est strictement croissante :

$$\ln(x) > \ln(e^M)$$

$$\ln(x) > M \quad \square$$

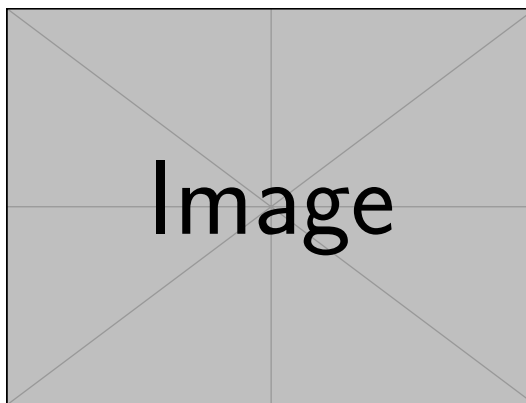
C. REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

FIGURE 4.1. – Représentation Graphique de la Fonction  $\ln$

### III. PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DE LA FONCTION LN

#### A. PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE

Quels que soient les réels  $a$  et  $b$ , strictement positifs,

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

##### 1. DÉMONSTRATION

Rappel :

$$\begin{aligned} X = Y &\iff e^X = e^Y \\ e^{\ln(ab)} &= ab \\ e^{\ln(a) + \ln(b)} &= e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = a \times b \end{aligned}$$

Donc :

$$e^{\ln(ab)} = e^{\ln(a) + \ln(b)} \iff \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

#### B. CONSÉQUENCES

— Quels que soient les réels  $a$  et  $b$ , strictement positifs,

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$$

— Quels que soient les réels  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , strictement positifs,

$$\ln(a_1 a_2 \cdots a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n)$$

##### 1. DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCE

###### A. INITIALISATION

$$\ln(a_1) = \ln(a_1)$$

###### B. HÉRÉDITÉ

Supposons que, pour  $n$  nombres strictement positifs,

$$\ln(a_1 a_2 \cdots a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \ln(a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}) &= \ln(a_1 a_2 \cdots a_n) + \ln(a_{n+1}) \quad \text{Propriété Fond.} \\ &= \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n) + \ln(a_{n+1}) \quad \square \end{aligned}$$

— De plus,

$$\forall a \in ]0; +\infty[, \forall n \in \mathbb{Z}, \ln(a^n) = n \ln(a)$$

2. DÉMONSTRATION

— Dans le cas où  $n$  est positif, c'est le cas particulier :

$$\ln(a_1 a_2 \cdots a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n)$$

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$$

$$\ln(a^n) = \ln(a) + \ln(a) + \cdots + \ln(a) = n \ln(a) \quad \square$$

— Dans le cas où  $n$  est négatif, on prend  $m = -n$

$$\ln(a^n) = \ln(a^{-m}) = \ln\left(\frac{1}{a^m}\right) = -\ln(a^m) = -m \ln(a) = n \ln(a) \quad \square$$

— Finalement,

$$\forall a, a > 0, \quad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$$

3. DÉMONSTRATION

$$\ln(a) = \ln(\sqrt{a^2}) = 2 \ln(\sqrt{a})$$

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a) \quad \square$$

IV. RÉOLUTION D'INÉQUATIONS DU TYPE  $a^n > M$ A. EXEMPLE

On sait que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$$

On cherche le plus petit entier  $n$  tel que  $3^n > 1000$  :

$$\ln(3^n) > \ln(1000)$$

$$\iff n \ln(3) > \ln(1000)$$

$$\iff n > \frac{\ln(1000)}{\ln(3)} \approx 6,3$$

On trouve  $n \geq 7$ , 7 est le plus petit entier  $n$  tel que  $3^n > 1000$

B. EXEMPLE

On sait que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad (\text{car } 0 < \frac{1}{2} < 1)$$

On veut résoudre :  $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0,0001$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \leq \ln(0,0001) \quad \ln \text{ strictement croissante}$$

$$\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq \ln(0,0001)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,0001)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \approx 13,3$$

Donc,  $n \geq 14$

V. LOGARITHME DÉCIMALA. DÉFINITION

La fonction logarithme décimal, notée  $\log$ , est définie sur  $]0; +\infty[$ , par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

B. PROPRIÉTÉS

De part de sa définition, la fonction  $\log$  a les mêmes propriétés algébriques et analytiques que la fonction  $\ln$  (dérivable, strictement croissante)

C. REMARQUE

La fonction  $\log$  est la fonction réciproque de  $f : x \mapsto 10^x$