Exercices Chapitre sur les Géométrie Repérée *

Diego Van Overberghe

11 juin 2020

Exercice 5

1) — Un vecteur directeur de la droite (d_1) pourrait être $\vec{u}\,\binom{4}{2}$
   — Un vecteur directeur de la droite (d_2) pourrait être $\vec{v}\,\binom{1}{0}$
   — Un vecteur directeur de la droite (d_3) pourrait être $\vec{w}\,\binom{0}{1}$
   — Un vecteur directeur de la droite (d_4) pourrait être $\vec{x}\,\binom{1}{4}$
2) — Une équation carthésienne qui pourrait représenter l'ensemble de points de la droite (d_1) est : $-\frac{1}{2}x+y+2=0$
   — Une équation carthésienne qui pourrait représenter l'ensemble de points de la droite (d_2) est : $y+4=0$
   — Une équation carthésienne qui pourrait représenter l'ensemble de points de la droite (d_3) est : $x-3=0$
   — Une équation carthésienne qui pourrait représenter l'ensemble de points de la droite (d_4) est : $4x+y-1=0$

Exercice 6

1) On trouve d'abord $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} x_B-x_A = & 4 \\ y_B-y_A = & -8 \end{pmatrix}$ Il s'agit d'un vecteur directeur de la droite (AB).
   On sait que $\vec{u}$, un vecteur directeur d'une droite dont les points satisfont l'équation $ax+by+c=0$, vaut $\vec{u}\,\binom{-b}{a}$
   On a donc $b=-4$ et $a=8$
   On obtient une équation carthésienne qui pourrait caractériser les points de cette droite $-8x-4y+c=0$
   Or on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{A}\in(\mathrm{AB}) &\iff -8x_{\mathrm{A}}-4y_a+c=0 \\ &\iff 24-24+c=0 \\ &\iff c=0 \end{aligned}$$

   Au final, une équation carthésienne de la droite (AB) : $-2x-y=0$
2) On calcule une équation de la droite (BC) de la même manière :
   On trouve une équation de la droite (BC) : $-2x-y=0$
   Comme les deux droites partagent une même équation, elles sont confondues, et les points A, B, et C sont alignés.

*Page 249 du manuel Hatier

3) a) L'équation réduite de la droite (AC) est $y = -2x$. L'équation réduite de la droite (d) est $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$. Comme les coéfficients directeurs sont différents, les droites sont forcément sécantes.

b) On recherche un doublet satisfaisant les deux équations simultanement :

$$\begin{aligned}(d) = (\mathrm{AB}) &\iff -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = -2x \\ &\iff -\frac{5}{4}x = \frac{1}{4} \\ &\iff x = -\frac{1}{5}\end{aligned}$$

On calcule ensuite la valeur de y en ce point : $y = -2x \iff y = \frac{2}{5}$

$$\mathrm{S} = \left\{-\frac{1}{5}\,;\frac{2}{5}\right\}$$

Exercice 7

1) a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\iff \vec{u}_x\vec{v}_y - \vec{u}_y\vec{v}_x = 0$
$\vec{u}_x\vec{v}_y - \vec{u}_y\vec{v}_x = 4 \times 6 - (-8) \times (-3) = 0$
Donc, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

b) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\iff \vec{u}_x\vec{v}_y - \vec{u}_y\vec{v}_x = 0$
$\vec{u}_x\vec{v}_y - \vec{u}_y\vec{v}_x = (-5) \times (-2) - 3 \times 3 = 1$
Donc, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

2) a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\iff \vec{u}_x\vec{v}_x + \vec{u}_y\vec{v}_y = 0$
$\vec{u}_x\vec{v}_x + \vec{u}_y\vec{v}_y = -1 \times 4 + 5 \times 3 = 11$
Donc, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

b) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\iff \vec{u}_x\vec{v}_x + \vec{u}_y\vec{v}_y = 0$
$\vec{u}_x\vec{v}_x + \vec{u}_y\vec{v}_y = \sqrt{3}\sqrt{6} + (-3)\sqrt{2} = 0$
Donc, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Exercice 8

a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\iff \vec{u}_x\vec{v}_y - \vec{u}_y\vec{v}_x = 0$

$$\begin{aligned}&\vec{u}_x\vec{v}_y - \vec{u}_y\vec{v}_x = 0 \\ \iff\ & (-3) \times 5 - (-(1) \times (2a-1)) = 0 \\ \iff\ & -15 + 2a - 1 = 0 \\ \iff\ & a = 8\end{aligned}$$

b) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\iff \vec{u}_x\vec{v}_x + \vec{u}_y\vec{v}_y = 0$

$$\begin{aligned}&\vec{u}_x\vec{v}_x + \vec{u}_y\vec{v}_y = 0 \\ \iff\ & (b-1) \times (b+2) + 5 \times (-2) = 0 \\ \iff\ & b^2 + b - 12 = 0 \qquad \Delta = b'^2 - 4a'c' = 49 \\ \iff\ & b_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta}}{2a'} \qquad b_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta}}{2a'} \\ \iff\ & b_1 = -4 \qquad b_2 = 3\end{aligned}$$

Exercice 49

$\overrightarrow{n_2}$, $\overrightarrow{n_3}$ et $\overrightarrow{n_4}$ sont des normales de la droite (d), parce que $\vec{n}\,\binom{a}{b}$

Exercice 50

a) Faux. Si un vecteur est normal à une droite, il sera directeur de la perpendiculaire.

b) Faux. Deux droites ne peuvent partager une normale si et seulement si elles sont parallèles.

c) Vrai. Si un vecteur est normal à une droite, il sera directeur de la perpendiculaire.

d) Vrai. Il s'agit tout simplement d'une droite parallèle.

Exercice 51

- $d_1 \quad \overrightarrow{n_1}\,\binom{1}{0}$
- $d_2 \quad \overrightarrow{n_2}\,\binom{-3}{2}$
- $d_3 \quad \overrightarrow{n_3}\,\binom{1}{1}$
- $d_4 \quad \overrightarrow{n_4}\,\binom{-1}{2}$

Exercice 52

On a $\vec{u}\,\binom{-b}{a}$, un vecteur directeur, et $\vec{n}\,\binom{a}{b}$, une normale.

a) $(d):\ \vec{u}\,\binom{-3}{2} \quad \vec{n}\,\binom{2}{3} \qquad (d'):\ \vec{u}\,\binom{-2}{-3} \quad \vec{n}\,\binom{-3}{2}$
Un des vecteurs directeurs de (d') est colinéaire à une normale de (d), on peut donc conclure que les deux droites sont perpendiculaires.

b) $(d):\ \vec{u}\,\binom{3}{4} \quad \vec{n}\,\binom{-4}{3} \qquad (d'):\ \vec{u}\,\binom{6}{8} \quad \vec{n}\,\binom{8}{-6}$
Un des vecteurs directeurs de (d) est colinéaire avec un des vecteurs directeurs de (d'), on peut donc conclure que les deux droites sont parallèles.

Exercice 53

On a $\vec{u}\,\binom{-b}{a}$, un vecteur directeur, et $\vec{n}\,\binom{a}{b}$, une normale.

a) Faux. (CB) : $\vec{u}\begin{pmatrix} x_B - x_C = -2 \\ y_B - y_C = \ \ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{n}\begin{pmatrix} \vec{u}_y = 4 \\ -\vec{u}_x = 2 \end{pmatrix} \qquad$ (AC) : $\vec{u}\begin{pmatrix} x_C - x_A = -3 \\ y_C - y_A = \ \ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{n}$ de (CB) n'est pas colinéaire à $\vec{u}$ de (AC). Donc, l'affirmation est bien fausse.

b) Vrai. (AC) : $\vec{u}\begin{pmatrix} x_C - x_A = -3 \\ y_C - y_A = \ \ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{n}\begin{pmatrix} \vec{u}_y = 2 \\ -\vec{u}_x = 3 \end{pmatrix} \qquad$ (AD) : $\vec{u}\begin{pmatrix} x_D - x_A = -4 \\ y_D - y_A = -6 \end{pmatrix}$

$\vec{n}$ de (AC) est colinéaire avec $\vec{u}$ de (AD). Donc, l'affirmation est bien vraie.

Exercice 54

On a pour toute équation carthésienne $ax + by + c = 0$, un vecteur normal $\vec{n}\,\binom{a}{b}$

a) On a $\vec{n}\,\binom{2}{3}$, d'où une équation de (d) pourrait être $2x + 3y + c = 0$.
Or on sait que $A\,(1;2) \in (d)$

$$\begin{aligned} A\,(1;2) \in (d) &\iff 2 \times 1 + 3 \times 2 + c = 0 \\ &\iff c = -8 \end{aligned}$$

Au final, une équation carthésienne de la droite (d), de vecteur normal $\vec{n}\,\binom{2}{3}$, passant par le point $A\,(1;2)$ est : $\quad 2x + 3y - 8 = 0$

b) $\vec{n}\,\binom{0}{2}$, d'où une équation carthésienne de la droite (d) pourrait être $2y + c = 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{A}\,(3\,;1) \in (d) &\iff 2\times 1 + c = 0 \\ &\iff c = -2 \end{aligned}$$

Une équation carthésienne qui pourrait représenter la droite (d) est : $2y - 2 = 0$

c) $\vec{n}\,\binom{-3}{0}$, d'où une équation carthésienne de la droite (d) pourrait être $-3x + c = 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{A}\,(-5\,;2) \in (d) &\iff (-3)\times(-5) + c = 0 \\ &\iff c = -15 \end{aligned}$$

Une équation carthésienne qui pourrait représenter la droite (d) est : $-3x - 15 = 0$

d) $\vec{n}\,\binom{4}{-1}$, d'où une équation carthésienne de la droite (d) pourrait être $4x - y + c = 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{A}\,(-1\,;0) \in (d) &\iff 4\times(-1) + c = 0 \\ &\iff c = 4 \end{aligned}$$

Une équation carthésienne qui pourrait représenter la droite (d) est : $4x - y + 4 = 0$

Exercice 55

a) Un vecteur directeur : $\vec{u}\,\binom{-b\,=\,-5}{a\,=\,-2}$ et Un vecteur normal : $\vec{n}\,\binom{a\,=\,-2}{b\,=\,5}$

b) Une droite perpendiculaire à une autre droite aura un vecteur directeur colinéaire au vecteur normal de cette droite. Le vecteur directeur de notre droite perpendiculaire sera donc $\vec{n}\,\binom{-2}{5}$. On a donc $5x + 2y + c = 0$.

$$\begin{aligned} \mathrm{A}\,(3\,;-7) \in (d) &\iff 5\times 3 + 2\times(-7) + c = 0 \\ &\iff c = -1 \end{aligned}$$

Donc, une équation carthésienne de la droite (d') pourrait est : $5x + 2y - 1 = 0$

c) On cherche les formes réduites des deux équations :

$$\begin{aligned} -2x + 5y + 12 = 0 &\iff y = \frac{2}{5}x - \frac{12}{5} \\ 5x + 2y - 1 = 0 &\iff y = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On peut ensuite calculer leur point d'interséction.

$$\begin{aligned} & \frac{2}{5}x - \frac{12}{5} = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2} \\ \iff\ & \frac{29}{10}x = \frac{29}{10} \\ \iff\ & x = 1 \end{aligned}$$

On calcule maintenant le composant y : $y = \frac{2}{5}x - \frac{12}{5} \iff y = -2$
On a donc le point d'intersection B $(1\,;-2)$

Exercice 56

a) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B = 6 = -b \\ y_C - y_B = 2 = \ \ a \end{pmatrix}$ $\quad \vec{n}\begin{pmatrix} a = \ \ 2 \\ b = -6 \end{pmatrix}$

b) La droite perpendiculaire aura un vecteur directeur colinéaire au vecteur normal de la première droite. $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 = -b \\ -6 = \ \ a \end{pmatrix}$, d'où une équation carthésienne de cette droite est : $-6x - 2y + c = 0$

$$\begin{aligned} A\,(3;2) \in (d') &\iff (-6)\times 3 - (2\times 2) + c = 0 \\ &\iff c = 22 \end{aligned}$$

Une équation carthésienne qui représente la droite est donc : $\quad -6x - 2y + 22 = 0$

c) Le projeté orthogonal de A sur (BC) est le point d'intersection de la droite (BC) et la droite perpendiculaire à cette dernière, passant par A : (d'). On calcule d'abord les formes réduites des équations des deux droites.

$-6x - 2y + 22 = 0 \iff y = -3x + 11$

$y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$ $\qquad$ Par lecture graphique de (BC)

On calcule ensuite le point d'intersection :

$$\begin{aligned} & -3x + 11 = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} \\ \iff & \frac{10}{3}x = \frac{37}{3} \\ \iff & x = \frac{37}{10} \end{aligned}$$

On peut finalement calculer le composant y : $y = \frac{1}{3} \times \frac{37}{10} - \frac{4}{3} \iff y = -0{,}1$
Au final, le projeté orthogonal de A sur (BC) a pour coordonnées H $(\frac{37}{10}; -0{,}1)$

d) $AH = \sqrt{(x_A - x_H)^2 + (y_A - y_H)^2} \approx 2{,}21$

Exercice 57

La médiatrice d'un ségment est la droite dont tous ses points sont equidistants aux extrémités du ségment. C'est donc la normale passant par le point au centre du ségment. On cherche donc tout d'abord le point au centre du ségment, que l'on appelera C $(x;y)$

$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = 4 \qquad y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = 4 \qquad$ C $(4;4)$.

On doit maintenant calculer un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A = 2 = -b \\ y_B - y_A = 4 = \ \ a \end{pmatrix}$, un vecteur directeur.
On calcule donc $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, ceci est un vecteur directeur d'une droite (d'), perpendiculaire, représentée par $-2x - 4y + c = 0$.

$$\begin{aligned} C\,(4;4) \in (d') &\iff (-2)\times 4 - (4\times 4) + c = 0 \\ &\iff c = 24 \end{aligned}$$

Une équation carthésienne de la médiatrice est donc : $\quad -2x - 4y + 24 = 0$

Exercice 58

a) Tout d'abord, la hauteur issue d'un point est la droite normale du segment opposé à ce point, passant par ce point.

<u>Hauteur issue de A :</u>
Le segment opposé au point A est le segment [BC]. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B = & 5 = -b \\ y_C - y_B = & -4 = \ a \end{pmatrix}$
D'où un vecteur normal peut être $\vec{n}\begin{pmatrix} a = -4 \\ b = -5 \end{pmatrix}$. Une équation carthésienne de cette normale est : $-5x + 4y + c = 0$

$$\begin{aligned} A\,(1;1) \in (\text{Hauteur}) &\iff -5 \times 1 + 4 \times 1 + c = 0 \\ &\iff c = 1 \end{aligned}$$

On a donc une équation carthésienne de la hauteur issue de A : $-5x + 4y + 1 = 0$

<u>Hauteur issue de B :</u>
Le segment opposé au point B est le segment [AC]. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A = 3 = -b \\ y_C - y_A = 0 = \ a \end{pmatrix}$
D'où un vecteur normal peut être $\vec{n}\begin{pmatrix} a = 0 \\ b = -3 \end{pmatrix}$. Une équation carthésienne de cette normale est donc : $-3x + c = 0$

$$\begin{aligned} B\,(-1;5) \in (\text{Hauteur}) &\iff -3 \times (-1) + c = 0 \\ &\iff c = -3 \end{aligned}$$

On a donc une équation carthésienne de la hauteur issue de B : $-3x - 3 = 0$

b) L'Orthocentre peut se retrouver avec seulement deux hauteurs car deux droites ne peuvent pas se couper en plus que un point.
On calcule d'abord les équations réduites des droites :
$-5x + 4y + 1 = 0 \iff y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{4}$
$-3x - 3 = 0 \iff x = -1$
On trouve ensuite le point d'abscisse qui satisfait les deux équations, il s'agite de $x = -1$
On calcule $y = \frac{5}{4} \times (-1) - \frac{1}{4}$
On trouve que l'orthocentre est $(-1; -1{,}5)$

Exercice 60

$\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix} x_A - x_\Omega = 2 \\ y_A - y_\Omega = 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la droite (d).
On a $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, vecteur normal d'une droite d'équation $ax + by + c = 0$
Donc, on a (d) : $2x + y + c = 0$

$$\begin{aligned} A\,(3;3) \in (d) &\iff 2 \times 3 + 3 + c = 0 \\ &\iff c = -9 \end{aligned}$$

On retrouve donc une équation de la tangente au cercle au point A : $2x + y - 9 = 0$

Exercice 61

a) On calcule d'abord un vecteur directeur de (AB) : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A = 3 = & -b \\ y_B - y_A = 1 = & a \end{pmatrix}$
D'où un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a = 1 \\ b = -3 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{\text{AM}} \begin{pmatrix} x_{\text{M}}-x_{\text{A}} = x+4 \\ y_{\text{M}}-y_{\text{A}} = y-2 \end{pmatrix}$

c) $$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{AM}} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = 5 &\iff x_{\overrightarrow{\text{AM}}} \times x_{\overrightarrow{\text{AB}}} + y_{\overrightarrow{\text{AM}}} \times y_{\overrightarrow{\text{AB}}} = 5 \\ &\iff 3(x+4) + 1(y-2) = 5 \\ &\iff 3x + 12 + y - 2 = 5 \\ &\iff 3x + y + 5 = 0 \end{aligned}$$

Un vecteur directeur de cette droite pourrait être $\vec{u} \begin{pmatrix} -b = -1 \\ a = 3 \end{pmatrix}$. Or ce vecteur est colinéaire a un vecteur normal de (AB), donc cet ensemble de points est une droite parallèle à (AB).

Exercice 66

Le cercle de centre $\Omega\ (-8;0)$ et de rayon 3.

Exercice 67

Vrai : $$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 + 6y + 5 = 0 &\iff (x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 + 5 = 0 \\ &\iff (x-2)^2 + (y+3)^2 = 8 \end{aligned}$$

Les coordonnées du centre sont donc bien $(2;-3)$, et le rayon $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Exercice 68

b) : $$\begin{aligned} x^2 - 10x + y^2 + 4y + 29 = 0 &\iff (x-5)^2 - 25 + (y+2)^2 - 4 + 29 = 0 \\ &\iff (x-5)^2 + (y+2)^2 = 0 \end{aligned}$$

Il s'agit donc d'un point, de coordonnées $(5;-2)$.

Exercice 69

— $\mathscr{C}_1$: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$

— $\mathscr{C}_2$: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$

— $\mathscr{C}_3$: $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 5$

Exercice 70

On a $\Omega\ (4;1)$, $\overrightarrow{\text{OM}} \begin{pmatrix} x_{\text{M}}-x_{\text{O}} = x \\ y_{\text{M}}-y_{\text{O}} = y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\text{M}\Omega} \begin{pmatrix} x_{\Omega}-x_{\text{M}} = 4-x \\ y_{\Omega}-x_{\text{M}} = 1-y \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{M}\ (x;y) \in \mathscr{C}_2 &\iff \overrightarrow{\text{OM}} \cdot \overrightarrow{\text{M}\Omega} = 0 \\ &\iff x(4-x) + y(1-y) = 0 \\ &\iff 4x - x^2 + y - y^2 = 0 \\ &\iff (x-2)^2 + (y-\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{17}{4} \end{aligned}$$

Exercice 72

a) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}\begin{pmatrix} x_\mathrm{M}-x_\mathrm{O} = x \\ y_\mathrm{M}-y_\mathrm{O} = y\end{pmatrix}$, $\quad \overrightarrow{\mathrm{MA}}\begin{pmatrix} x_\mathrm{A}-x_\mathrm{M} = 3-x \\ y_\mathrm{A}-y_\mathrm{M} = 7-y\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}\,(x\,;y) \in \mathscr{C} &\iff \overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MA}} = 0\\
&\iff x_{\overrightarrow{\mathrm{OM}}} \times x_{\overrightarrow{\mathrm{MA}}} + y_{\overrightarrow{\mathrm{OM}}} \times y_{\overrightarrow{\mathrm{MA}}} = 0\\
&\iff x(3-x) + y(7-y) = 0\\
&\iff x^2 - 3x + y^2 - 7y = 0\\
&\iff \left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2 - \tfrac{9}{4} + \left(y-\tfrac{7}{2}\right)^2 - \tfrac{49}{4} = 0\\
&\iff \left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\tfrac{7}{2}\right)^2 = \tfrac{29}{2}
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\mathrm{B}\,(x\,;0) \in \mathscr{C} &\iff \left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2 + \left(0-\tfrac{7}{2}\right)^2 = \tfrac{29}{2}\\
&\iff \left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2 + \tfrac{49}{4} = \tfrac{29}{2}\\
&\iff x^2 - 3x + \tfrac{9}{4} = \tfrac{9}{4}\\
&\iff x(x-3) = 0\\
&\ \mathrm{S} = \{0\,;3\}
\end{aligned}$$

Le second point d'interséction avec l'axe des abscisses est donc à l'abscisse 3.

Exercice 73

a)
$$\begin{aligned}
x^2+y^2-4x+6y+5=0 &\iff (x-2)^2-4+(y+3)^2-9+5=0\\
&\iff (x-2)^2+(y+3)^2=8
\end{aligned}$$

Il s'agit donc d'un cercle de centre $(2\,;-3)$, de rayon $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

b)
$$\begin{aligned}
x^2+y^2-4x+6x+k=0 &\iff (x-2)^2-4+(y+3)^2-9+k=0\\
&\iff (x-2)^2+(y+3)^2=13-k
\end{aligned}$$

$k > 13 \iff \mathscr{E} : \emptyset \qquad k = 0 \iff \mathscr{E} :$ Le point $(2\,;-3)$
$k < 13 \iff \mathscr{E} :$ Un cercle de centre $(2\,;-3)$, de rayon $\sqrt{13-k}$

Exercice 74

a) Il s'agit d'un cercle de centre $(1\,;-2)$, de rayon 5.

b)
$$\begin{aligned}
\mathrm{A}\,(4\,;2) \in \mathscr{C} &\iff (4-1)^2 + (2+2)^2 = 25\\
&\iff 9 + 16 = 25
\end{aligned}$$

c) Un vecteur normal de la tangente est $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, avec O $(1\,;-2)$, le centre du cercle. $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\begin{pmatrix} x_\mathrm{A}-x_\mathrm{O} = 3 = a \\ y_\mathrm{A}-y_\mathrm{O} = 4 = b\end{pmatrix}$
D'où une équation de la tangente pourrait être $ax+by+c=0 \iff 3x+4y+c=0$
$$\begin{aligned}
\mathrm{A}\,(4\,;2) \in \mathscr{C} &\iff 3\times 4 + 4\times 2 + c = 0\\
&\iff c = -20
\end{aligned}$$

Une équation de la tangente est donc $3x+4y-20=0$

Exercice 79

a) On calcule $\mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2$, avec M $(1\,;7)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2 &= (x_\mathrm{A}-x_\mathrm{M})^2+(y_\mathrm{A}-y_\mathrm{M})^2+(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{M})^2+(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{M})^2\\ &= 94 \neq 92\end{aligned}$$

C n'appartient donc pas à $\mathscr{E}$.

b) $$\begin{aligned}\mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2=92 &\iff 2\mathrm{MI}^2+\tfrac{\mathrm{AB}^2}{2}=92\\ &\iff \mathrm{MI}^2=\tfrac{1}{2}\left(92-\tfrac{(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})^2)}{2}\right)\\ &\iff \mathrm{MI}^2=36\end{aligned}$$

Il s'agit donc d'un cercle de centre I et de rayon $\sqrt{36}=6$.