Chapitre X

Limites de Fonctions

I. Limites d'une Fonction en l'Infini

A. Limite en $+\infty$

1. Définitions

Soit une fonction f définie au moins sur $[a\,;+\infty[$, où a est un réel.

— On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si pour tout réel M positif, il existe un réel A, tel que $x > \mathrm{A}$ implique $f(x) \geqslant \mathrm{M}$.
Autrement dit, lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, $f(x)$ peut être aussi grand que l'on veut.
On note :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

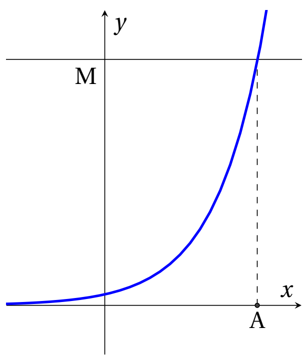

FIGURE 10.1. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers $+\infty$ en $+\infty$

— On dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si pout tout réel m négatif, il existe un réel A, tel que $x > \text{A}$, $f(x) \leqslant m$.
Autrement dit, lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, $f(x)$ est négatif et peut être aussi grand que l'on veut en valeur absolue.
On note :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

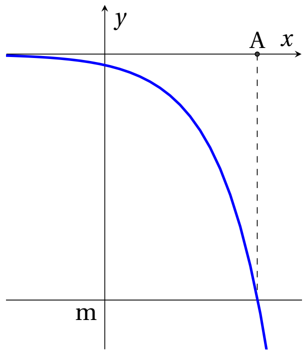

FIGURE 10.2. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers $-\infty$ en $+\infty$

— On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ où ℓ est un réel si pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, il existe un réel A tel que $x > \text{A}$ implique $f(x) \in \text{I}$
Autrement dit, lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, $f(x)$ peut être aussi près de ℓ que l'on veut.
On note :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell}$$

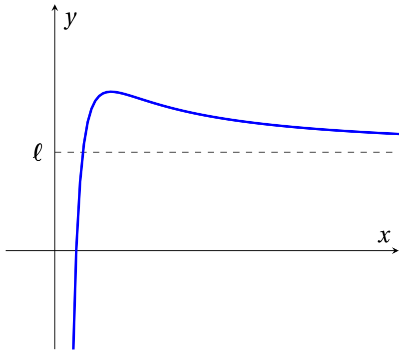

FIGURE 10.3. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers ℓ en $+\infty$

H.P. : $\forall \epsilon > 0$, $\exists \text{A} \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathscr{D}_f$

$$\left(x > \text{A} \implies \left|f(x) - l\right| < \epsilon\right) \text{ ou } \left(x > \text{A} \implies f(x) \in \left]l - \epsilon\,; l + \epsilon\right[\right)$$

2. Définition

Soit f une fonction définie au moins sur $[A\,;+\infty[$, où A est un réel, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ alors $\mathscr{C}$ admet une *asymptote horizontale* en $+\infty$ d'équation $y=\ell$.

3. Remarque

Une fonction n'admet pas forcément de limite en $+\infty$, par exemple, les fonctions sinus et cosinus sont bornées et n'admettent pas de limites en l'infini.

B. Limite en $-\infty$

1. Définitions

Soit f une fonction définie au moins sur $]-\infty\,;a[$, où a est un réel.

— On dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ si pour tout réel M, positif, il existe un réel A tel que $x<A$ implique $f(x)\geqslant M$
Autrement dit, lorsque x prend des valeurs négatives de plus en plus grandes en valeur absolue, $f(x)$ peut être aussi grand que l'on veut.
On note :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$$

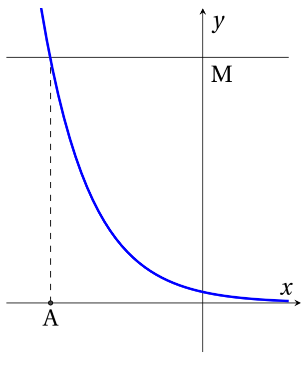

Figure 10.4. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers $+\infty$ en $-\infty$

— On dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ si pour tout réel m négatif, il existe un réel A tel que $x < \mathrm{A}$ implique $f(x) \leqslant m$
On note :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

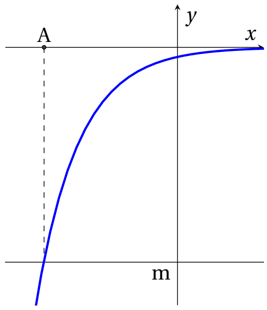

FIGURE 10.5. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers $-\infty$ en $-\infty$

— On dit que f a pour limite ℓ en $-\infty$ où ℓ est un réel, si pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, on peut trouver un réel A tel que si $x \leqslant \mathrm{A}$, $f(x)$ appartient à I.
Autrement dit, lorsque x prend des valeurs négatives, de plus en plus grandes en valeur absolue, $f(x)$ peut être aussi près de ℓ que l'on veut.
On note :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell}$$

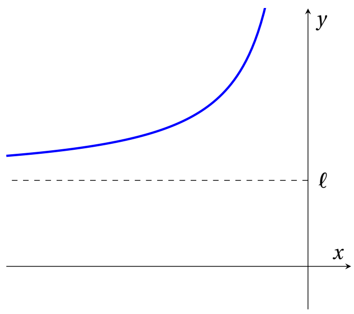

FIGURE 10.6. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers 2 en $-\infty$

H.P. : $\forall \epsilon > 0,\ \exists \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathscr{D}_f$

$$\left(x < \mathrm{A} \implies \left|f(x) - \ell\right| < \epsilon\right) \text{ ou } \left(x < \mathrm{A} \implies f(x) \in \left]\ell - \epsilon\,;\ell + \epsilon\right[\right)$$

2. Définition

Si $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ alors $\mathscr{C}$ admet une *asymptote horizontale* en $-\infty$ d'équation $y = \ell$.

II. Limite d'une Fonction en un Réel

A. Définitions

Soit a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I contenant a ou tel que a est une borne de I.

Si, lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a :

— $f(x)$ est aussi grand que l'on veut, on dit que f a pour limite $+\infty$ en a.

On note :

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = +\infty}$$

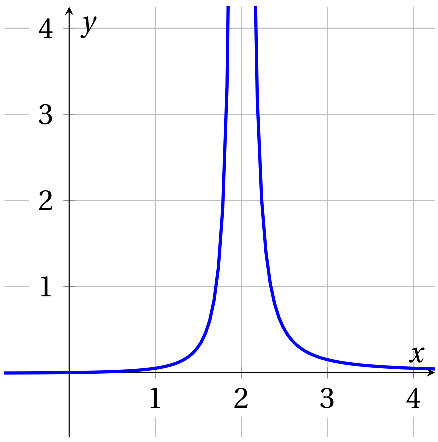

Figure 10.7. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers $+\infty$ en 2

— $f(x)$ est négatif et aussi grand que l'on veut en valeur absolue, on dit que f a pour limite $-\infty$ en a.

On note :

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = -\infty}$$

— $f(x)$ est aussi proche que l'on veut d'un réel ℓ, on dit que f a pour limite ℓ en a.

On note :

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \ell}$$

1. Remarque

Si f est *continue* en a, $\ell = f(a)$.

B. Limite à Droite ou à Gauche d'une Fonction en un Réel

1. Exemple

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 car lorsque x tend vers 0 par des valeurs positives, $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers 0 par valeurs négatives, $\frac{1}{x}$ tend vers $-\infty$.

Cependant, on peut parler de limite à gauche et limite à droite.

On note :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

2. Remarque

Une fonction admet une limite en un réel a si la limite à droite et à gauche de f en a existent et sont égales.

C. Asymptote Verticale

1. Définition

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f. Dire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = a$, c'est dire que :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \pm\infty$$

III. Fonctions Usuelles

A. Théorème

1. Fonction Racine Carrée

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$ (la fonction racine carrée est continue en 0)

2. Fonction Inverse

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

3. Fonctions Puissances

Quel que soit $p \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p = +\infty$.

Si p est pair, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^p = +\infty$ et si p est impair, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^p = -\infty$.

Quel que soit $p \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^p} = 0$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^p} = 0$.

Si p est pair, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^p} = +\infty$ et si p est impair, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^p} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^p} = -\infty$.

4. Fonction Exponentielle

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

5. Fontion Logarithme Népérien

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$$

B. Théorèmes de Croissance Comparée

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$$

1. Démonstration

— On montre que $\mathrm{e}^x > \frac{x^2}{2}$, pour tout $x > 0$ en étudiant la différence.
Soit f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2}$. Étudions les variations de f.
$f'(x) = \mathrm{e}^x - x$ on ne conclut pas directement sur le signe. Dérivons encore :
$f''(x) = \mathrm{e}^x - 1 \quad$ et $\quad \mathrm{e}^x - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^x > 1 \iff x > 0$

Donc, $f''(x)$ est strictement positive pour $x > 0$.

Ainsi on a $f'(x)$ strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et comme $f'(0) = 1 > 0$, f' est strictement positive sur $]0\,;+\infty[$:

x	0		$+\infty$
$f''(x)$	0	$+$	
$f'(x)$	1	$\nearrow$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	

FIGURE 10.8. – Tableau de Variation de f et f'

Donc, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $e^x - \frac{x^2}{2} > 0$ et donc $e^x > \frac{x^2}{2}$

Comme $x > 0$ on peut diviser par x :

Donc, $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, par comparaison :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \square$$

— On pose $X = -x$ et alors, $\lim\limits_{x\to-\infty} X = +\infty$ et $xe^x = -Xe^x = -\frac{X}{e^X}$

Donc, par passage à l'inverse de la limite précédente :

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{X\to+\infty} -\frac{X}{e^X} = 0 \quad \square$$

C. Théorème

Quel que soit l'entier $n > 0$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$

D. Théorèmes de Croissance Comparée (bis)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x) = 0$$

1. Démonstration

On pose le changement de variable $X = \ln(x)$ et donc $x = e^X$. On a alors $\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} X = -\infty$.

IV. Opérations sur les Limites

A. Limites de Somme, Produit et Quotient

Dans cette sous-partie, les limites des fonctions f et g sont prises soit en $-\infty$, soit en $+\infty$ soit en un réel a. ℓ et ℓ' sont des nombres réels.
Lorsqu'il n'y a pas de conclusion en général, on dit alors qu'il y a un cas de forme indéterminée. (F.I.)
N.B. : $\pm\infty$ désigne $+\infty$ ou $-\infty$.

1. Limite de Somme

Tableau 10.1. – Tableau des Limites de Sommes de Fonctions

	$\lim f$		
$\lim g$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

2. Limite d'un Produit

Tableau 10.2. – Tableau des Limites des Produits de Fonctions

	$\lim f$					
$\lim g$	ℓ	$\ell>0$	$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$	0
ℓ'	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell'>0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell'<0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	$-\infty$	$+\infty$	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.
0	0	0	0	F.I.	F.I.	0

3. Limite d'un quotient f/g

Tableau 10.3. – Tableau des Limites des Quotients de Fonctions

	$\lim f$					
$\lim g$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell' > 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell' < 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$-\infty$	$+\infty$	0
$+\infty$	0	0	0	F.I.	F.I.	0
$-\infty$	0	0	0	F.I.	F.I.	0
0^+	–	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.
0^-	–	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

4. Exemples

a. Somme

$$\lim_{x\to+\infty} x+\frac{1}{x^2}-1=+\infty \quad \text{(remarquons qu'on a la même limite quand } x\to 0)$$

b. Produit

$$\lim_{x\to 0}(-3+x)\left(1+\tfrac{1}{x^2}\right)=-\infty \qquad \text{En effet, } \lim_{x\to 0} -3+x=-3 \text{ et } \lim_{x\to 0} 1+\tfrac{1}{x^2}=+\infty$$

Par contre, remarquons que $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3+x)\left(1+\tfrac{1}{x^2}\right)=+\infty$.

c. Quotient

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x}{\sqrt{x}}=+\infty$$

B. Limite d'une Composée de Deux Fonctions

1. Rappel

On note $g \circ f$ la composée de la fonction f suivie de g.

$\forall x \in \mathscr{D}_f$ tel que $f(x) \in \mathscr{D}_g$, $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

2. Théorème

Soient a, b et c trois réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. Soient f et g deux fonctions, définies au bon endroit.

Alors, si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \boldsymbol{b}$ et $\lim\limits_{x \to \boldsymbol{b}} g(x) = c$, on a :

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$$

Attention aux limites !

3. Exemple

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x^2-3} = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x \to +\infty} -x^2 - 3 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \to -\infty} \mathrm{e}^{X} = 0.$$

C. Comparaison

a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

1. Théorème

Si f et g sont deux fonctions telles que pour tout x voisin de a, $f(x) \leqslant g(x)$

— Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.

— Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

2. Théorème dit « des Gendarmes »

Soient f, g et h trois fonctions telles que pour tout x voisin de a,
$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$.

Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$ où ℓ est un réel, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.