Devoir Maison de Mathématiques Expertes

Diego Van Overberghe

8 février 2021

Partie A et B

À partir des informations de l'énoncé, nous avons, dans GéoGébra, pu conjecturer l'ensemble $\mathcal{E}$ comme étant le cercle centré sur le point d'affixe $0{,}5i$ de rayon $0{,}5$.

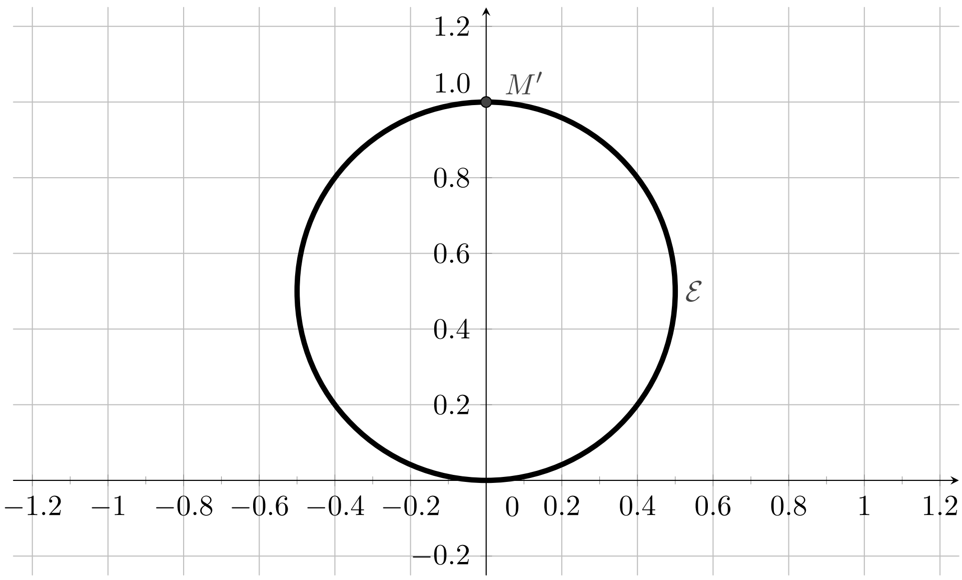

Figure 1 – Conjecture de la Représentation Graphique de l'Ensemble $\mathcal{E}$

Partie C

1. a. $z_M = 10i + x \quad x \in \mathbb{R}$

b. $z_{M'} = \frac{10}{x-10i} = \frac{10(x+10i)}{(x-10i)(x+10i)} = \frac{10x}{x^2+100} + \frac{100i}{x^2+100}$

$z_{M'} - \frac{1}{2}i = \frac{10x}{x^2+100} + \frac{200i-x^2i-100i}{2(x^2+100)} = \frac{10x}{x^2+100} + \frac{(100-x^2)i}{2(x^2+100)}$

Posons $z_A = \frac{1}{2}i$.

$$|AM'| = \left|\frac{10x}{x^2+100} + \frac{(100-x^2)i}{2(x^2+100)}\right| = \sqrt{\left(\frac{10x}{x^2+100}\right)^2 + \left(\frac{(100-x^2)}{2(x^2+100)}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{400x^2+(100-x^2)^2}{4(x^2+100)^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^4+200x^2+10\,000}{x^4+200x^2+10\,000}}$$
$$= \frac{1}{2}$$

c. Vu que le module est une constante, l'ensemble est un cercle de rayon $\frac{1}{2}$ et de centre A

Donc, $M \in d \implies M' \in \mathcal{E}$

2. a. $$|AM'|^2 = \left|\frac{10}{\overline{z_M}} - \frac{1}{2}i\right|^2 = \left|\frac{20-\overline{z_M}i}{2\overline{z_M}}\right|^2 = \left|\frac{20z_M - (Im(z_M)^2 + Re(z_M)^2)i}{2(Im(z_M)^2+Re(z_M)^2)}\right|^2$$
$$= \left|\frac{20z_M}{2|z_M|^2} - \frac{1}{2}i\right|^2 = \left|\frac{20Re(z_M)}{2|z_M|^2} + \frac{20Im(z_M) - |z_M|^2 i}{2|z_M|^2}\right|^2$$
$$= \frac{400Re(z_M)^2 + 400Im(z_M)^2 - 40Im(z_M)|z_M|^2 + |z_M|^4}{4|z_M|^4}$$
$$= \frac{100-10Im(z_M)}{|z_M|^2} + \frac{1}{4}$$

Donc, $\quad Im(z_M) = 10 \iff M \in d \quad$ validant notre calcul.

b. $$\left|z_{N'} - \frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2} \iff \left|\frac{10}{\overline{z_N}} - \frac{1}{2}i\right|^2 = \frac{1}{4}$$
$$\iff \left|\frac{20Re(z_N)}{2|z_N|^2} + \frac{20Im(z_N) - |z_N|^2 i}{2|z_N|^2}\right|^2 = \frac{1}{4}$$
$$\iff \frac{400|z_N|^2 - 40Im(z_N)|z_N|^2 + |z_N|^4}{4|z_N|^4} = \frac{1}{4}$$
$$\iff Im(z_N) = 10$$

c. On a montré que $\quad N' \in \mathcal{E} \implies N \in d$

d. Finalement, $\quad M \in d \iff M' \in \mathcal{E}$