

Chapitre XVI

Calcul Intégral

I. NOTION D'INTÉGRALE

A. AIRE SOUS LA COURBE ET INTÉGRALE

1. DÉFINITION

Soit f une fonction *continue et positive* sur un intervalle $[a ; b]$ ($a \leq b$) et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

L'aire délimitée par \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est l'intégrale de f sur $[a ; b]$, et se note :

$$\int_a^b f(t) dt$$

2. REMARQUES

$\int_a^b f(t) dt$ se lit « intégrale de a à b de f de $t dt$ »
ou « somme de a à b de f de $t dt$ ».

$\int_a^b f(t) dt$ se note indifféremment $\int_a^b f(x) dx$

$\int_a^b f(t) dt$ se mesure en unité d'aire ($u.a.$). Où 1 $u.a.$ est l'aire du rectangle de base (1 sur 1).

3. REMARQUE

Dans le cas d'une fonction continue de signe quelconque, $\int_a^b f(t) dt$ est une aire algébrique entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Par convention, on compte positivement les aires lorsque \mathcal{C} est au dessus de l'axe des abscisses et négativement lorsqu'elle est en dessous.

B. DÉRIVABILITÉ DE LA FONCTION AIRE

1. THÉORÈME

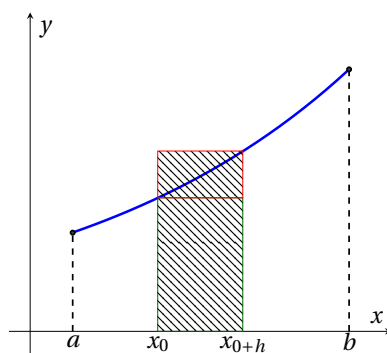
Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$ ($a \leq b$)

Alors, la fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et :

$$\Phi' = f \quad (\Phi \text{ est une primitive de } f)$$

A. DÉMONSTRATION (f CROISSANTE)

Soit $x_0 \in [a; b]$ et $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in [a; b]$. Notons \mathcal{C} la courbe représentative de f .

FIGURE 16.1. – Encadrement de la Fonction Φ

Étudions $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h}$

$\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)$ est l'aire sous la courbe entre x_0 et $x_0 + h$.

On encadre cette aire par les aires des deux rectangles de largeur $|h|$ et de hauteur $f(x_0)$ (en vert) et $f(x_0 + h)$ (en rouge)

— Si $h > 0$, et comme f est croissante :

$$h \times f(x_0) \leq \Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) \leq h \times f(x_0 + h)$$

$$\iff f(x_0) \leq \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$$

— Si $h < 0$ alors la largeur est $-h$:

$$-h \times f(x_0 + h) \geq \Phi(x_0) - \Phi(x_0 + h) \geq -h \times f(x_0)$$

$$\iff f(x_0 + h) \leq \frac{\Phi(x_0) - \Phi(x_0 + h)}{-h} \leq f(x_0)$$

Or f est continue, donc $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} = f(x_0) \quad \square$$

Ainsi, Φ est dérivable en x_0 et $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

Ce résultat est vrai pour tout $x_0 \in I$, donc Φ est dérivable sur I et $\Phi' = f$.

2. RAPPEL THÉORÈME

Soit f une fonction continue sur I et Φ une primitive de f sur I .

Alors, f admet une infinité de primitives sur I et toute primitive F de f est définie par $F(x) = \Phi(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$.

3. CONSÉQUENCE

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$.

Le premier théorème prouve l'existence d'une primitive Φ de f sur $[a; b]$, définie par $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Ainsi, $\int_a^b f(t) dt = \Phi(b)$

Et d'après le deuxième théorème (lien entre deux primitives), quelle que soit F , la primitive de f , il existe un réel k tel que $F = \Phi + k$.

Donc, $F(a) = \Phi(a) + k = k$ car $\Phi(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$.

Ainsi, $\Phi(b) = F(b) - k = F(b) - F(a)$

Or $\Phi(b) = \int_a^b f(t) dt$

Donc, quelle que soit la primitive F de f :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

4. REMARQUE

On note :

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

5. EXEMPLES

$$- \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

$$- \int_0^2 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$

II. INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

A. EXTENSION DE LA NOTION D'INTÉGRALE

On a défini l'intégrale d'une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ ($a \leq b$), et on a vu que si F est une primitive de f sur $[a; b]$:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

On admet que cette formule peut être étendue au cas d'une fonction continue de signe quelconque, quelles que soient les bornes a et b de l'intégrale.

1. DÉFINITION

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit F une primitive de f sur I . Si a et b sont deux réels quelconques de I , l'intégrale de f entre a et b s'écrit :

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

2. EXEMPLES

$$\begin{aligned} - \int_{-4}^{-2} \left(\frac{1}{t^2} - 3 \right) dt &= \left[\frac{-1}{t} - 3t \right]_{-4}^{-2} = \frac{-1}{(-2)} - 3 \times (-2) - \left(\frac{-1}{(-4)} - 3 \times (-4) \right) \\ &= \frac{1}{2} + 6 - \frac{1}{4} - 12 \\ &= \frac{-23}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{t} - t^2 \right) dt &= \left[\ln(t) - \frac{t^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \ln(1) - \frac{1}{3} - \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} \right) \\ &= \frac{-1}{3} + \ln(2) + \frac{1}{24} \\ &= \frac{7}{24} + \ln(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \int_{-2}^1 t dt &= \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-2}^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

3. CONSÉQUENCES

$$— \int_a^a f(t) dt = 0 \quad (= F(a) - F(a))$$

$$— \int_b^a f(t) dt = F(a) - F(b) = - \int_a^b f(t) dt$$

B. LINÉARITÉ DE L'INTÉGRALE1. THÉORÈME

Soient f et g deux fonctions continues sur I et soit λ un réel. Pour tous réels a et b de I :

$$\int_a^b (f + g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$$

$$\int_a^b \lambda f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$$

A. DÉMONSTRATION

Soient F et G des primitives de f et g . Alors $F + G$ et λF sont des primitives de $f + g$ et λf respectivement.

$$\begin{aligned} — \int_a^b (f + g)(t) dt &= (F + G)(b) - (F + G)(a) \\ &= F(b) + G(b) - F(a) - G(a) \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} — \int_a^b \lambda f(t) dt &= \lambda F(b) - \lambda F(a) \\ &= \lambda (F(b) - F(a)) \\ &= \lambda \int_a^b f(t) dt \end{aligned}$$

C. RELATION DE CHASLES1. THÉORÈME

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Quels que soient les réels a , b et c appartenant à I :

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt$$

A. DÉMONSTRATION

Soit F une primitive de f .

$$\begin{aligned} \int_a^c f(t) dt &= F(c) - F(a) \\ &= F(c) - F(b) + F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt \end{aligned}$$

2. REMARQUE

Dans le cas où f est positive et $a \leq b \leq c$, la relation de Chasles traduit l'additivité des aires de deux domaines adjacents.

3. EXEMPLE

Intégrale d'une fonction définie par morceaux :

$$\int_{-2}^5 f(x) dx \quad \text{où} \quad f: x \mapsto |x| - 2 \quad |x| \begin{cases} x \geq 0 : x \\ x < 0 : -x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^5 f(x) dx &= \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^5 f(x) dx \\ &= \left[\frac{-x^2}{2} - 2x \right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_0^5 \\ &= 0 - 2 + \frac{5}{2} - 0 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

D. POSITIVITÉ ET ORDRE1. THÉORÈME

Soit f une fonction continue sur I , et a et b deux réels de I tels que $a \leq b$

Si $\forall t \in I, f(t) \geq 0$:

$$\int_a^b f(x) dt \geq 0$$

A. DÉMONSTRATION

Dans le cas d'une fonction continue et positive sur $[a; b]$, $\int_a^b f(t) dt$ est l'aire sous la courbe représentative de f entre a et b , elle est positive.

2. THÉORÈME

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b deux réels tels que $a \leq b$

Si $\forall t \in I, f(t) \leq g(t)$:

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$$

A. DÉMONSTRATION

$g - f$ est positive sur I donc :

$$\begin{aligned} & \int_a^b (g - f)(t) dt \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \int_a^b g(t) dt - \int_a^b f(t) dt \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt \end{aligned}$$

III. VALEUR MOYENNE D'UNE FONCTION CONTINUE

A. VALEUR MOYENNE

1. DÉFINITION

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, avec $a < b$, la valeur moyenne de la fonction f sur $[a; b]$ est le nombre μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

2. REMARQUE

Interprétation dans le cas d'une fonction positive :

$$\int_a^b f(t) dt = \mu(b-a)$$

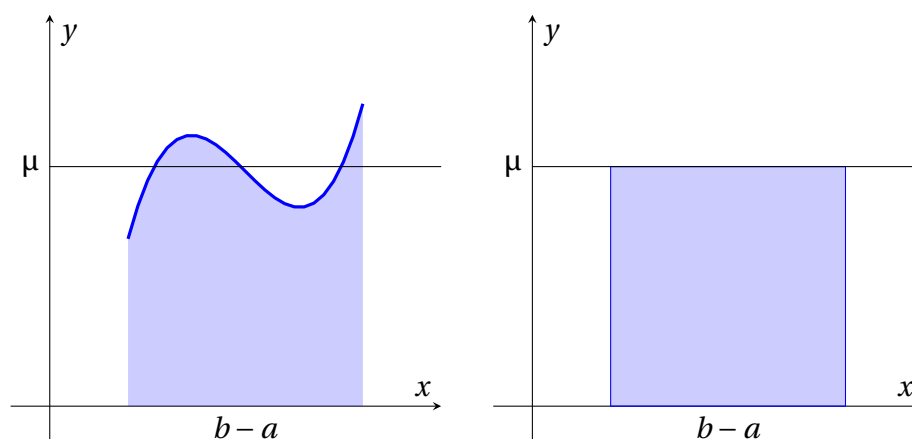


FIGURE 16.2. – Interprétation Graphique de la Valeur Moyenne pour une Fonction Positive

μ est la hauteur du rectangle de largeur $b - a$ dont l'aire est la même que celle du domaine situé en sous la courbe \mathcal{C}_f entre a et b .

B. INÉGALITÉ DE LA MOYENNE (ENCADREMENT « GROSSIER » DE L'INTÉGRALE)1. THÉORÈME

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, $a < b$ et m et M deux réels tels que $\forall x \in [a; b], m \leq f(x) \leq M$

On a donc :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a)$$

A. DÉMONSTRATION

$$m \leq f(t) \leq M$$

$$\iff [mx]_a^b \leq \int_a^b f(t) dt \leq [Mx]_a^b \quad (\text{positivité de l'intégrale})$$

$$\iff m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a) \quad \square$$

2. REMARQUES

Interprétation en cas d'une fonction positive : L'aire de la courbe \mathcal{C}_f est comprise entre les aires des rectangles de longueur $b-a$ et de hauteurs respectives m et M .

Encadrement de la valeur moyenne :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a)$$

$$\iff m \leq \frac{\int_a^b f(t) dt}{b-a} \leq M$$

$$\iff m \leq \mu \leq M$$

IV. INTÉGRATION PAR PARTIES

A. PROPRIÉTÉ

Soient u et v deux fonction dérivables telles que leurs dérivées u' et v' sont continues sur un intervalle $[a; b]$. Alors :

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

1. DÉMONSTRATION

Pour toute fonction f dérivable dont la dérivée f' est continue sur $[a; b]$:

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) = [f(x)]_a^b \quad \text{En effet, } f \text{ est une primitive de } f'.$$

Ainsi :

$$\int_a^b (uv)'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b$$

Or :

$$\begin{aligned} \int_a^b (uv)'(x) dx &= \int_a^b u'(x) v(x) + u(x) v'(x) dx \\ &= \int_a^b u'(x) v(x) dx + \int_a^b u(x) v'(x) dx \quad (\text{linéarité}) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} [u(x) v(x)]_a^b &= \int_a^b u'(x) v(x) dx + \int_a^b u(x) v'(x) dx \\ \Leftrightarrow \int_a^b u(x) v'(x) dx &= [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx \quad \square \end{aligned}$$