Correction Bac 2021 Sujet 0

N. Sibert

12 mai 2021

Exercice 1

1. $\boxed{\text{Réponse b)}}$
   On a $u_n \leq w_n \leq v_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$ car $0 < \frac{1}{4} < 1$
   Donc, d'après le théorème des gendarmes, w_n converge vers 1.

2. $\boxed{\text{Réponse c)}}$
   $f'(x) = \exp\left(x^2\right) + x \times 2x \exp\left(x^2\right) = \left(1 + 2x^2\right) \exp\left(x^2\right)$

3. $\boxed{\text{Réponse c)}}$
   $\dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - 2x + 1} = \dfrac{1 - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}$ la limite vaut donc $\frac{1}{2}$

4. $\boxed{\text{Réponse c)}}$
   C'est le théorème des valeurs intermédiaires (cas général, on n'a pas d'information sur la monotonie de h)

5. $\boxed{\text{Réponse c)}}$
   g' est croissante sur $\left[1\,;2\right]$ donc g convexe sur $\left[1\,;2\right]$

Exercice 2

1. a) $\boxed{I\left(\frac{1}{2};0;1\right)}$ et $\boxed{J(2;0;1)}$

   b) $D(0;1;1)$ donc $\boxed{\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}}$ $B(1;0;0)$ $\boxed{\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}}$ et $\boxed{\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}$

   c) $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont deux vecteurs **non colinéaires** de (BGI)
   $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BI} = 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+(-1)\times 0+1\times 1=0$ donc $\overrightarrow{DJ}\perp\overrightarrow{BI}$
   $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BG} = 2\times 0+(-1)\times 1+1\times 1=0$ donc $\overrightarrow{DJ}\perp\overrightarrow{BG}$
   donc, $\boxed{\overrightarrow{DJ}\perp(BGI)}$, $\overrightarrow{DJ}$ vecteur normal à (BGI)

   d) $\overrightarrow{DJ}$ étant un vecteur normal de (BGI), tout point $M(x;y;z)\in(BGI)$ vérifie $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{DJ}=0$ où $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-1\\y\\z\end{pmatrix}$ donc $2(x-1)-y+z=0$
   $\boxed{(BGI) : 2x-y+z-2=0}$

2. a) d passe par $F(1;0;1)$ et admet $\overrightarrow{DJ}$ comme vecteur directeur. Donc :

$$\boxed{d : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -t \\ z = 1+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})}$$

   b) On peut vérifier que $L\in d$ et $L\in(BGI)$, donc trouver L dont les coordonnées vérifient 1d) et 2a).
   Ou on peut trouver les coordonnées de L en cherchant le réel t tel que :

$$2(1+2t)-(-t)+1+t-2=0 \iff t=-\frac{1}{6}$$

$$\text{et : } \begin{cases} x = 1-\frac{2}{6}=\frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{6} \\ z = 1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6} \end{cases}$$

   On retrouve $\boxed{L\left(\frac{2}{3};\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)}$ c'est bien $d\cap(BGI)$

3. a) On prend pour base FBG et pour hauteur FI.

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{1\times 1}{2}\times\frac{1}{2} \qquad \boxed{V=\frac{1}{12}}$$

b) Si on prend pour base BGI, la hauteur est alors FL car L est le projeté orthogonal de F sur (BGI) et on a :

$$FL = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{6} - 0\right)^2 + \left(\frac{5}{6} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\text{Donc, } \frac{1}{12} = V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{BGI} \times \frac{\sqrt{6}}{6}, \quad \text{d'où } \boxed{\mathcal{A}_{BGI} = \frac{\sqrt{6}}{4}}$$

Exercice 3

1.

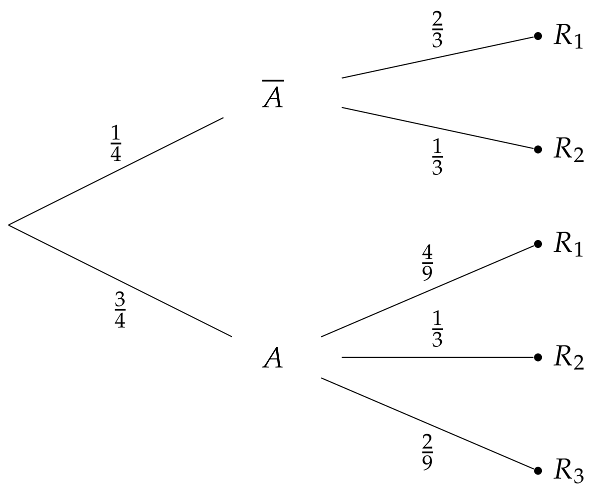

FIGURE 1 – Arbre de Probabilité Modélisant la Situation

2. a) $P(A \cap R_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{12}}$

b) D'après la loi des probabilités totales, A et $\overline{A}$ étant une partition de l'univers :

$$\begin{aligned} P(R_2) &= P(A \cap R_2) + P(\overline{A} \cap R_2) \\ &= \frac{1}{12} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{12} = \boxed{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

c) $P_{R_2}(A) = \dfrac{P(A \cap R_2)}{P(R_2)} = \boxed{\dfrac{1}{4}}$

3. a)

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

FIGURE 2 – Tableau présentant la loi de probabilité de X

b) $E(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$ $\boxed{E(X) \approx 1{,}7}$
En moyenne, il faut donc 1,7 essais pour réussir son permis.

4. a) Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de personnes ayant eu besoin de 3 essais pour réussir leur permis (sur un échantillon de n personnes).

$$1 - \left(1 - \frac{1}{6}\right)^n = 1 - P(Y = 0) = \boxed{P(Y \geq 1)}$$

Donc, c'est la probabilité que sur les n personnes, au moins une a eu son permis à la 3^{e} tentative.
Ici, comme on nous dit qu'on assimile la situation à un tirage avec remise (c'est-à-dire une succession de n épreuves identiques et indépendantes à 2 issues). Ainsi, Y suit la loi binomiale suivante :

$$Y \sim \mathcal{B}\left(n\,;\frac{1}{6}\right)$$

b)

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0{,}9 &\iff \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0{,}1 \\ &\iff n > \frac{\ln(0{,}1)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 12{,}6 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'algorithme renvoie 13}}$
Dans un échantillon de 13 personnes ou plus, la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles a eu besoin de 3 essais pour réussir son permis est supérieure à 90%.

Exercice A

Partie I

1. $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ (tangente horizontale en A)
$f'(1) = -1$ (coéfficient directeur de la tangente B)

2. $T_B : y = -x + p$ où p est un réel et T_B passe par $(0\,;3)$
D'où :

$\boxed{T_B : y = -x + 3}$ on peut aussi faire $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

Partie II

1. $f\left(\frac{1}{e}\right) = \dfrac{2+\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\frac{1}{e}} = 2e + e\ln\left(\frac{1}{e}\right) = e(2-1) = e$ $\quad \boxed{C_f \text{ passe par } A\ \left(\frac{1}{e}\,;e\right)}$

   $f(1) = \dfrac{2+\ln(1)}{1} = 2 \quad \boxed{C_f \text{ passe par } B\ (1\,;2)}$

   $$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff \frac{2+\ln(x)}{x} = 0 \\ &\iff 2+\ln(x) = 0 \quad (\text{et } x \neq 0) \\ &\iff \ln(x) = -2 \\ &\iff x = e^{-2} \end{aligned}$$

   $\boxed{C_f \text{ coupe l'axe des abscisses en } \left(e^{-2}\,;0\right)}$ (point unique)

2. Etudions la limite lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures :

   $$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2+\ln(x) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0^+ \end{array}\right\} \text{ par quotient, } \boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty}$$

   Etudions la limite lorsque x tend vers $+\infty$:

   $$f(x) = \frac{2}{x} + \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \text{(théorème)}$$

   Donc, par somme, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3. $\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[,\ f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times x - \left(2+\ln(x)\right)}{x^2} = \dfrac{1-2-\ln(x)}{x^2}$

   $$\boxed{f'(x) = \frac{-1-\ln(x)}{x^2}}$$

4.
$$\begin{aligned} -1-\ln(x) \geq 0 &\iff -1 \geq \ln(x) \\ &\iff e^{-1} \geq x \quad \text{et} \quad x^2 > 0 \quad \text{sur} \quad \left]0\,;+\infty\right[\end{aligned}$$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

FIGURE 3 – Tableau de Signes $f'(x)$ et de Variations de f

5. f est convexe si et seulement si $f''(x) \geq 0$
$1+2\ln(x) \geq 0 \iff x \geq e^{-\frac{1}{2}}$
$\boxed{f \text{ convexe sur } \left[e^{-\frac{1}{2}}\,;+\infty\right[}$

Exercice B

1. a) $f(0) = 225$

b) Cherchons d'abord la solution particulière (constante) :

$$\{f : t \mapsto 25\}$$

Et maintenant résolvons l'équation sans second membre :

$$y' + 6y = 0$$

$$\{f : t \mapsto Ce^{-6t},\ C \in \mathbb{R}\}$$

Ainsi, les solutions sont :

$$\boxed{\{f : t \mapsto 25 + Ce^{-6t},\ C \in \mathbb{R}\}}$$

c) On a $f(0) = 225$ et $f(0) = 25 + C$ d'où $C = 200$ et :

$$\boxed{f(t) = 200e^{-6t} + 25}$$

2. a) On a $f'(t) = -1\,200\mathrm{e}^{-6t} < 0$ $\boxed{f \text{ est strictement décroissante}}$

et $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-6t} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 25}$

$\boxed{f \text{ fournit donc bien un modèle adéquat}}$

3. On a f continue et strictement décroissante sur $\left[0\,;+\infty\right[$.
$f(0) = 225 > 40$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 25 < 40$
D'après le corollaire du Théorème des Valeurs Intermédiaires,
$\boxed{\text{l'équation } f(t) = 40 \text{ admet une unique solution dans } \left[0\,;+\infty\right[}$

4. $T_0 \approx 0{,}43$ h $\boxed{T_0 \approx 26 \text{ min}}$

5. a) $D_0 = f(0) - f\left(\frac{1}{60}\right) = 225 - \left(200\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}} + 25\right) \approx 19{,}03$

$\boxed{\text{Donc, après la première minute, la température de la baguette aura diminué de 19°C.}}$

b) $D_n = 200\mathrm{e}^{-\frac{n}{10}} + 25 - \left(200\mathrm{e}^{-\frac{n+1}{10}} + 25\right) = 200\mathrm{e}^{-\frac{n}{10}} - 200\mathrm{e}^{\frac{-n-1}{10}}$

$$\boxed{D_n = 200\mathrm{e}^{-\frac{n}{10}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{10}}\right)}$$

Posons $D_n = g(n)$, où $g : t \mapsto 200\mathrm{e}^{-\frac{t}{10}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{10}}\right)$
g est strictement décroissante, donc D_n est décroissante.
$\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{n}{10}} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} D_n = 0$

$\boxed{\text{Oui, une fois que la baguette atteint le niveau de temperature ambient, il n'y a plus d'échange d'énergie thérmique.}}$