Chapitre 1

La Démonstration par Récurrence

I. Exemple

On considère la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n, par $u_n = 4^n - 1$:

$$(u_n) = \{0;3;15;63;255;\dots\}$$

On remarque que tous ces nombres sont des multiples de 3. On se demande si pour tout entier naturel n, $4^n - 1$ est un multiple de 3.

II. Axiome de Récurrence

Soit $\mathrm{P}(n)$, une propriété dépendante de l'entier naturel n.
Si :

$$\begin{cases} \mathrm{P}(0) \text{ est vraie (Initialisation)} \\ \forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(k) \text{ vraie} \implies \mathrm{P}(k+1) \text{ vraie (hérédité)} \end{cases}$$

Alors :

$$\mathrm{P}(n) \text{ est vraie pour tout entier naturel.}$$

Reprenons notre exemple.

Initialisation : La propriété : « $4^n - 1$ est un multiple de 3 », est vraie pour $n = 0$.
La propriété est donc initialisée.
Hérédité : Supposons que la propriété est vraie à un certain rang k, (fixe).
C'est l'hypothèse de la récurrence, et montrons qu'alors, elle est vraie au rang $k+1$.

L'Hypothèse de récurrence est donc : « $4^n - 1$ est un multiple de 3 ». C'est-à-dire qu'il existe un entier p tel que $4^n - 1 = 3p$ et donc $4^n = 3p + 1$.

$$\begin{aligned} 4^{k+1} - 1 &= 4 \times 4^k - 1 \\ &= 4 \times \left(3p+1\right) - 1 \quad \text{(Hypothèse de récurrence)} \\ &= 12p + 4 - 1 \\ &= 12p + 3 \\ &= 3\left(4p+1\right) \quad \text{(Il s'agit bien d'un multiple de 3)} \end{aligned}$$

Donc, la propriété est héréditaire et on a démontré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 4^n - 1$ est un multiple de 3.