

# Chapitre X

## Limites de Fonctions

### I. LIMITES D'UNE FONCTION EN L'INFINI

#### A. LIMITE EN $+\infty$

##### 1. DÉFINITIONS

Soit une fonction  $f$  définie au moins sur  $[a ; +\infty[$ , où  $a$  est un réel.

— On dit que  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $+\infty$  si pour tout réel  $M$  positif, il existe un réel  $A$ , tel que  $x > A$  implique  $f(x) \geq M$ .

Autrement dit, lorsque  $x$  prend des valeurs de plus en plus grandes,  $f(x)$  peut être aussi grand que l'on veut.

On note :

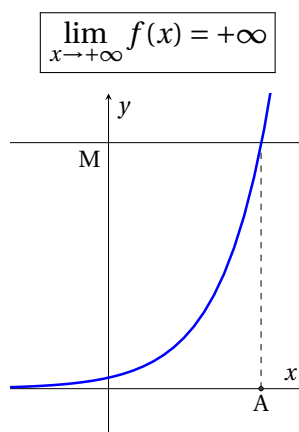


FIGURE 10.1. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers  $+\infty$  en  $+\infty$

- On dit que  $f$  a pour limite  $-\infty$  en  $+\infty$  si pour tout réel  $m$  négatif, il existe un réel  $A$ , tel que  $x > A$ ,  $f(x) \leq m$ .

Autrement dit, lorsque  $x$  prend des valeurs de plus en plus grandes,  $f(x)$  est négatif et peut être aussi grand que l'on veut en valeur absolue.

On note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

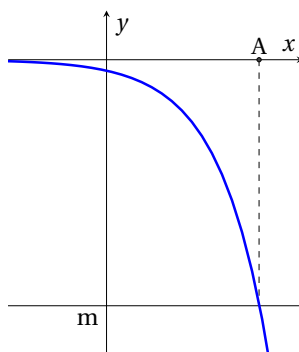


FIGURE 10.2. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers  $-\infty$  en  $+\infty$

- On dit que  $f$  a pour limite  $\ell$  en  $+\infty$  où  $\ell$  est un réel si pour tout intervalle ouvert  $I$  contenant  $\ell$ , il existe un réel  $A$  tel que  $x > A$  implique  $f(x) \in I$ . Autrement dit, lorsque  $x$  prend des valeurs de plus en plus grandes,  $f(x)$  peut être aussi près de  $\ell$  que l'on veut.

On note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$

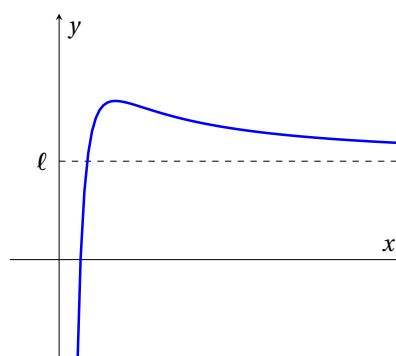


FIGURE 10.3. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers  $\ell$  en  $+\infty$

H.P. :  $\forall \epsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f$

$$(x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon) \text{ ou } (x > A \Rightarrow f(x) \in ]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[)$$

2. DÉFINITION

Soit  $f$  une fonction définie au moins sur  $[A ; +\infty[$ , où  $A$  est un réel, et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère.

Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$  alors  $\mathcal{C}$  admet une *asymptote horizontale* en  $+\infty$  d'équation  $y = \ell$ .

3. REMARQUE

Une fonction n'admet pas forcément de limite en  $+\infty$ , par exemple, les fonctions sinus et cosinus sont bornées et n'admettent pas de limites en l'infini.

B. LIMITE EN  $-\infty$ 1. DÉFINITIONS

Soit  $f$  une fonction définie au moins sur  $] -\infty ; a[$ , où  $a$  est un réel.

— On dit que  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $-\infty$  si pour tout réel  $M$ , positif, il existe un réel  $A$  tel que  $x < A$  implique  $f(x) \geq M$

Autrement dit, lorsque  $x$  prend des valeurs négatives de plus en plus grandes en valeur absolue,  $f(x)$  peut être aussi grand que l'on veut.

On note :

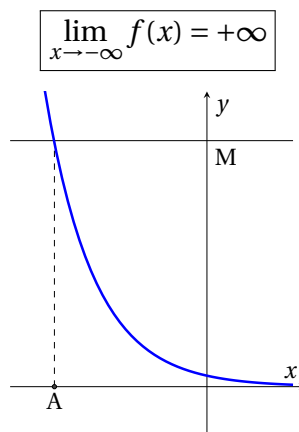


FIGURE 10.4. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers  $+\infty$  en  $-\infty$

- On dit que  $f$  a pour limite  $-\infty$  en  $-\infty$  si pour tout réel  $m$  négatif, il existe un réel  $A$  tel que  $x < A$  implique  $f(x) \leq m$

On note :

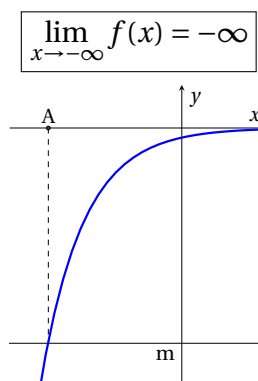


FIGURE 10.5. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers  $-\infty$  en  $-\infty$

- On dit que  $f$  a pour limite  $\ell$  en  $-\infty$  où  $\ell$  est un réel, si pour tout intervalle ouvert  $I$  contenant  $\ell$ , on peut trouver un réel  $A$  tel que si  $x \leq A$ ,  $f(x)$  appartient à  $I$ .

Autrement dit, lorsque  $x$  prend des valeurs négatives, de plus en plus grandes en valeur absolue,  $f(x)$  peut être aussi près de  $\ell$  que l'on veut.

On note :

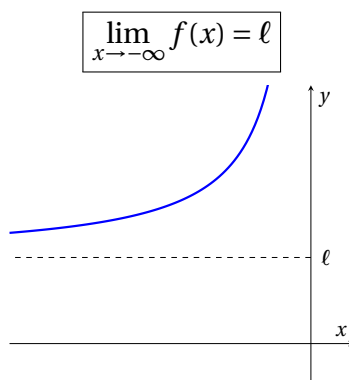


FIGURE 10.6. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers 2 en  $-\infty$

H.P :  $\forall \epsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f$

$$(x < A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon) \text{ ou } (x < A \Rightarrow f(x) \in ]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[)$$

## 2. DÉFINITION

Si  $\mathcal{C}$  est la courbe représentative de  $f$  dans un repère.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$  alors  $\mathcal{C}$  admet une *asymptote horizontale* en  $-\infty$  d'équation  $y = \ell$ .

## II. LIMITE D'UNE FONCTION EN UN RÉEL

### A. DÉFINITIONS

Soit  $a$  un réel et  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  contenant  $a$  ou tel que  $a$  est une borne de  $I$ .

Si, lorsque  $x$  prend des valeurs de plus en plus proches de  $a$  :

- $f(x)$  est aussi grand que l'on veut, on dit que  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $a$ .

On note :

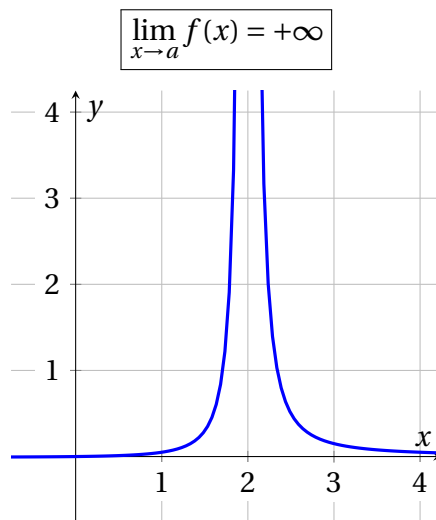


FIGURE 10.7. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers  $+\infty$  en 2

- $f(x)$  est négatif et aussi grand que l'on veut en valeur absolue, on dit que  $f$  a pour limite  $-\infty$  en  $a$ .

On note :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

- $f(x)$  est aussi proche que l'on veut d'un réel  $\ell$ , on dit que  $f$  a pour limite  $\ell$  en  $a$ .

On note :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$

### 1. REMARQUE

Si  $f$  est continue en  $a$ ,  $\ell = f(a)$ .

B. LIMITE À DROITE OU À GAUCHE D'UNE FONCTION EN UN RÉEL1. EXEMPLE

La fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{x}$  n'a pas de limite en 0 car lorsque  $x$  tend vers 0 par des valeurs positives,  $\frac{1}{x}$  tend vers  $+\infty$  et lorsque  $x$  tend vers 0 par valeurs négatives,  $\frac{1}{x}$  tend vers  $-\infty$ .

Cependant, on peut parler de limite à gauche et limite à droite.

On note :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

2. REMARQUE

Une fonction admet une limite en un réel  $a$  si la limite à droite et à gauche de  $f$  en  $a$  existent et sont égales.

C. ASYMPTOTE VERTICALE1. DÉFINITION

Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$ . Dire que  $\mathcal{C}$  admet une asymptote verticale d'équation  $x = a$ , c'est dire que :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \pm\infty$$

### III. FONCTIONS USUELLES

#### A. THÉORÈME

##### 1. FONCTION RACINE CARRÉE

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$  (la fonction racine carrée est continue en 0)

##### 2. FONCTION INVERSE

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

##### 3. FONCTIONS PUISSANCES

Quel que soit  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p = +\infty$ .

Si  $p$  est pair,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^p = +\infty$  et si  $p$  est impair,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^p = -\infty$ .

Quel que soit  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^p} = 0$ , et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^p} = 0$ .

Si  $p$  est pair,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^p} = +\infty$  et si  $p$  est impair,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^p} = +\infty$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^p} = -\infty$ .

##### 4. FONCTION EXPONENTIELLE

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

##### 5. FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$$

#### B. THÉORÈMES DE CROISSANCE COMPARÉE

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

##### 1. DÉMONSTRATION

— On montre que  $e^x > \frac{x^2}{2}$ , pour tout  $x > 0$  en étudiant la différence.

Soit  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ . Étudions les variations de  $f$ .

$f'(x) = e^x - x$  on ne conclut pas directement sur le signe. Dérivons encore :

$$f''(x) = e^x - 1 \quad \text{et} \quad e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$$

Donc,  $f''(x)$  est strictement positive pour  $x > 0$ .

Ainsi on a  $f'(x)$  strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  et comme  $f'(0) = 1 > 0$ ,  $f'$  est strictement positive sur  $]0; +\infty[$  :

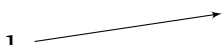

$x$	0	$+\infty$
$f''(x)$	0	+
$f'(x)$	1	
$f(x)$	1	

FIGURE 10.8. – Tableau de Variation de  $f$  et  $f'$

Donc, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $e^x - \frac{x^2}{2} > 0$  et donc  $e^x > \frac{x^2}{2}$

Comme  $x > 0$  on peut diviser par  $x$  :

Donc,  $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$  et comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ , par comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \square$$

— On pose  $X = -x$  et alors,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} X = +\infty$  et  $xe^x = -Xe^x = -\frac{X}{e^X}$

Donc, par passage à l'inverse de la limite précédente :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{X}{e^X} = 0 \quad \square$$

### C. THÉORÈME

Quel que soit l'entier  $n > 0$  :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

### D. THÉORÈMES DE CROISSANCE COMPARÉE (BIS)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$$

#### 1. DÉMONSTRATION

On pose le changement de variable  $X = \ln(x)$  et donc  $x = e^X$ . On a alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} X = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} X = -\infty.$$



## IV. OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

### A. LIMITES DE SOMME, PRODUIT ET QUOTIENT

Dans cette sous-partie, les limites des fonctions  $f$  et  $g$  sont prises soit en  $-\infty$ , soit en  $+\infty$  soit en un réel  $a$ .  $\ell$  et  $\ell'$  sont des nombres réels.

Lorsqu'il n'y a pas de conclusion en général, on dit alors qu'il y a un cas de forme indéterminée. (F.I.)

N.B. :  $\pm\infty$  désigne  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

#### 1. LIMITE DE SOMME

TABLEAU 10.1. – Tableau des Limites de Sommes de Fonctions

$\lim g$	$\lim f$		
	$\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell'$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

#### 2. LIMITE D'UN PRODUIT

TABLEAU 10.2. – Tableau des Limites des Produits de Fonctions

$\lim g$	$\lim f$					
	$\ell$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell'$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell' > 0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell' < 0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	$-\infty$	$+\infty$	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.
0	0	0	0	F.I.	F.I.	0

3. LIMITE D'UN QUOTIENT  $f/g$ 

TABLEAU 10.3. – Tableau des Limites des Quotients de Fonctions

$\lim g$	$\lim f$					
	$\ell$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$0$
$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	$0$
$\ell' > 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	$0$
$\ell' < 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$-\infty$	$+\infty$	$0$
$+\infty$	$0$	$0$	$0$	FI.	FI.	$0$
$-\infty$	$0$	$0$	$0$	FI.	FI.	$0$
$0^+$	$-$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI.
$0^-$	$-$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI.

## 4. EXEMPLES

## A. SOMME

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{x^2} - 1 = +\infty \quad (\text{remarquons qu'on a la même limite quand } x \rightarrow 0)$$

## B. PRODUIT

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-3 + x) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = -\infty \quad \text{En effet, } \lim_{x \rightarrow 0} -3 + x = -3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\text{Par contre, remarquons que } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3 + x) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty.$$

## C. QUOTIENT

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{\sqrt{x}} = +\infty$$

B. LIMITE D'UNE COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS1. RAPPEL

On note  $g \circ f$  la composée de la fonction  $f$  suivie de  $g$ .

$\forall x \in \mathcal{D}_f$  tel que  $f(x) \in \mathcal{D}_g$ ,  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ .

2. THÉORÈME

Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois réels ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ . Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions, définies au bon endroit.

Alors, si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  et  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$ , on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$$

Attention aux limites !

3. EXEMPLE

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2-3} = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2-3 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0.$$

C. COMPARAISON

$a$  désigne un réel ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

1. THÉORÈME

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions telles que pour tout  $x$  voisin de  $a$ ,  $f(x) \leq g(x)$

— Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ .

— Si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ .

2. THÉORÈME DIT « DES GENDARMES »

Soient  $f$ ,  $g$  et  $h$  trois fonctions telles que pour tout  $x$  voisin de  $a$ ,

$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$  et  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$  où  $\ell$  est un réel, alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ .