

# Chapitre X

## Limites de Fonctions

### I. LIMITES D'UNE FONCTION EN L'INFINI

#### A. LIMITE EN $+\infty$

##### 1. DÉFINITIONS

Soit une fonction  $f$  définie au moins sur  $[a ; +\infty[$ , où  $a$  est un réel.

- On dit que  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $+\infty$  si pour tout réel  $M$  positif, il existe un réel  $A$ , tel que  $x > A$  implique  $f(x) \geq M$ .

Autrement dit, lorsque  $x$  prend des valeurs de plus en plus grandes,  $f(x)$  peut être aussi grand que l'on veut.

On note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

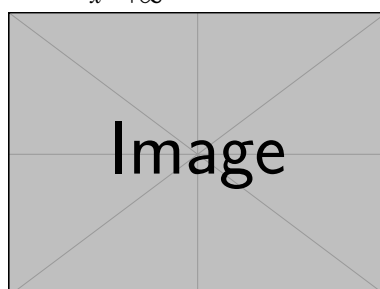


FIGURE 10.1. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers  $+\infty$  en  $+\infty$

- On dit que  $f$  a pour limite  $-\infty$  en  $+\infty$  si pour tout réel  $m$  négatif, il existe un réel  $A$ , tel que  $x > A$ ,  $f(x) \leq m$ .

Autrement dit, lorsque  $x$  prend des valeurs de plus en plus grandes,  $f(x)$  est négatif et peut être aussi grand que l'on veut en valeur absolue.

On note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

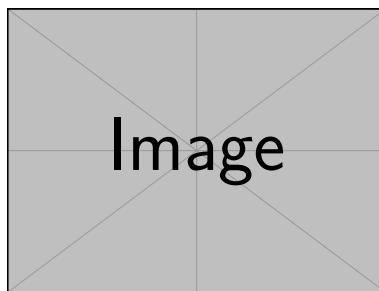


FIGURE 10.2. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble  
Tendre vers  $-\infty$  en  $+\infty$

- On dit que  $f$  a pour limite  $l$  en  $+\infty$  où  $l$  est un réel si pour tout intervalle ouvert  $I$  contenant  $l$ , il existe un réel  $A$  tel que  $x > A$  implique  $f(x) \in I$ . Autrement dit, lorsque  $x$  prend des valeurs de plus en plus grandes,  $f(x)$  peut être aussi près de  $l$  que l'on veut.

On note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

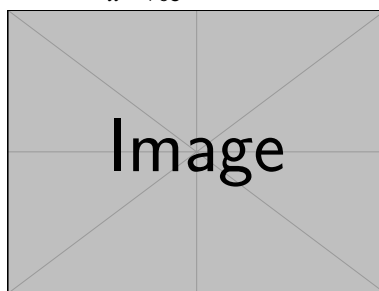


FIGURE 10.3. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble  
Tendre vers  $l$  en  $+\infty$

$$\text{H.P. : } \forall \epsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f$$

$$(x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon) \text{ ou } (x > A \Rightarrow f(x) \in ]l - \epsilon; l + \epsilon[)$$

## 2. DÉFINITION

Soit  $f$  une fonction définie au moins sur  $[A; +\infty[$ , où  $A$  est un réel, et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère.

Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  alors  $\mathcal{C}$  admet une asymptote horizontale en  $+\infty$  d'équation  $y = l$ .

## 3. REMARQUE

Une fonction n'admet pas forcément de limite en  $+\infty$ , par exemple, les fonctions sin et cos sont bornées et n'admettent pas de limites en l'infini.

B. LIMITE EN  $-\infty$ 1. DÉFINITIONS

Soit  $f$  une fonction définie au moins sur  $] -\infty ; a[$ , où  $a$  est un réel.

- On dit que  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $-\infty$  si pour tout réel  $M$ , positif, il existe un réel  $A$  tel que  $x < A$  implique  $f(x) \geq M$

Autrement dit, lorsque  $x$  prend des valeurs négatives de plus en plus grandes en valeur absolue,  $f(x)$  peut être aussi grand que l'on veut.

On note :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

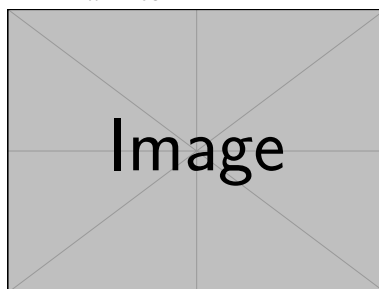


FIGURE 10.4. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble  
Tendre vers  $+\infty$  en  $-\infty$

- On dit que  $f$  a pour limite  $-\infty$  en  $-\infty$  si pour tout réel  $m$  négatif, il existe un réel  $A$  tel que  $x < A$  implique  $f(x) \leq m$

On note :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

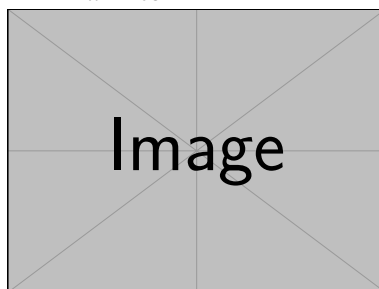


FIGURE 10.5. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble  
Tendre vers  $-\infty$  en  $-\infty$

- On dit que  $f$  a pour limite  $l$  en  $-\infty$  où  $l$  est un réel, si pour tout intervalle ouvert  $I$  contenant  $l$ , on peut trouver un réel  $A$  tel que si  $x \leq A$ ,  $f(x)$  appartient à  $I$ .

Autrement dit, lorsque  $x$  prend des valeurs négatives, de plus en plus grandes en valeur absolue,  $f(x)$  peut être aussi près de  $l$  que l'on veut.

On note :

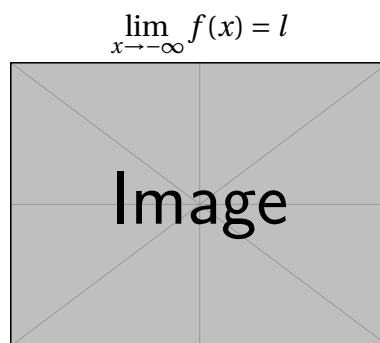


FIGURE 10.6. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers  $l$  en  $+\infty$

H.P. :  $\forall \epsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f$

$$(x < A \implies |f(x) - l| < \epsilon) \text{ ou } (x < A \implies f(x) \in ]l - \epsilon; l + \epsilon[)$$

## 2. DÉFINITION

Si  $\mathcal{C}$  est la courbe représentative de  $f$  dans un repère.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$  alors  $\mathcal{C}$  admet une asymptote horizontale en  $-\infty$  d'équation  $y = l$ .

## II. LIMITE D'UNE FONCTION EN UN RÉEL

### A. DÉFINITIONS

Soit  $a$  un réel et  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  contenant  $a$  ou tel que  $a$  est une borne de  $I$ .

Si, lorsque  $x$  prend des valeurs de plus en plus proches de  $a$  :

—  $f(x)$  est aussi grand que l'on veut, on dit que  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $a$ .

On note :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

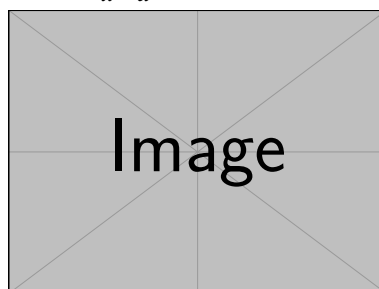


FIGURE 10.7. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers  $+\infty$  en  $a$

—  $f(x)$  est négatif et aussi grand que l'on veut en valeur absolue, on dit que  $f$  a pour limite  $-\infty$  en  $a$ .

On note :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

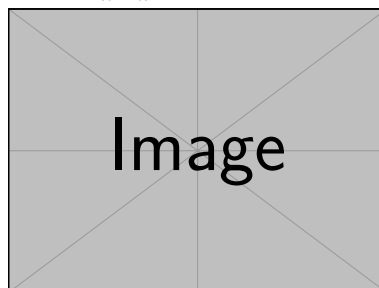


FIGURE 10.8. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers  $-\infty$  en  $a$

—  $f(x)$  est aussi proche que l'on veut d'un réel  $l$ , on dit que  $f$  a pour limite  $l$  en  $a$ .

On note :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

1. REMARQUE

Si  $f$  est continue en  $a$ ,  $l = f(a)$ .

B. LIMITE À DROITE OU À GAUCHE D'UNE FONCTION EN UN RÉEL1. EXEMPLE

La fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{x}$  n'a pas de limite en 0 car lorsque  $x$  tend vers 0 par des valeurs positives,  $\frac{1}{x}$  tend vers  $+\infty$  et lorsque  $x$  tend vers 0 par valeurs négatives,  $\frac{1}{x}$  tend vers  $-\infty$ .

Cependant, on peut parler de limite à gauche et limite à droite.

On note :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

2. REMARQUE

Une fonction admet une limite en un réel  $a$  si la limite à droite et à gauche de  $f$  en  $a$  existent et sont égales.

C. ASYMPTOTE VERTICALE1. DÉFINITION

Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$ . Dire que  $\mathcal{C}$  admet une asymptote verticale d'équation  $x = a$ , c'est dire que :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \pm\infty$$

### III. FONCTIONS USUELLES

#### A. THÉORÈME

##### 1. FONCTION RACINE CARRÉE

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0 \text{ (la fonction racine carrée est continue en 0)}$$

##### 2. FONCTION INVERSE

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

##### 3. FONCTIONS PUISSANCES

$$\text{Quel que soit } p \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^p = +\infty$$

$$\text{Si } p \text{ est pair, } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^p = +\infty \text{ et si } p \text{ est impair, } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^p = -\infty$$

$$\text{Quel que soit } p \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^p} = 0, \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^p} = 0$$

$$\text{Si } p \text{ est pair, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^p} = +\infty \text{ et si } p \text{ est impair, } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^p} = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^p} = -\infty$$

##### 4. FONCTION EXPONENTIELLE

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

##### 5. FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$$

#### B. THÉORÈMES DE CROISSANCE COMPARÉE

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

##### 1. DÉMONSTRATION

— On montre que  $e^x > \frac{x^2}{2}$ , pour tout  $x > 0$  en étudiant la différence.

Soit  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ . Étudions les variations de  $f$ .

$f'(x) = e^x - x$  on ne conclut pas directement sur le signe. Dérivons encore :

$$f''(x) = e^x - 1 \quad \text{et} \quad e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$$

Donc,  $f''(x)$  est strictement positive pour  $x > 0$

Ainsi on a  $f'(x)$  strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  et comme  $f'(0) = 1 > 0$ ,  
 $f'$  est strictement positive sur  $]0; +\infty[$  :



$x$	0	$+\infty$
$f''(x)$	0	+
$f'(x)$	1	
$f(x)$	1	

FIGURE 10.9. – Tableau de Variation de  $f$

Donc, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $e^x - \frac{x^2}{2} > 0$  et donc  $e^x > \frac{x^2}{2}$

Comme  $x > 0$  on peut diviser par  $x$  :

Donc,  $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$  et comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ , par comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \square$$

— On pose  $X = -x$  et alors,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} X = +\infty$  et  $xe^x = -Xe^x = -\frac{X}{e^X}$

Donc, par passage à l'inverse de la limite précédente :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{X}{e^X} = 0 \quad \square$$

### C. THÉORÈME

Quel que soit l'entier  $n > 0$  :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

### D. THÉORÈMES DE CROISSANCE COMPARÉE (BIS)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$$

#### 1. DÉMONSTRATION

On pose le changement de variable  $X = \ln(x)$  et donc  $x = e^X$ . On a alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} X = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} X = -\infty.$$



## IV. OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

### A. LIMITES DE SOMME, PRODUIT ET QUOTIENT

Dans cette sous-partie, les limites des fonctions  $f$  et  $g$  sont prises soit en  $-\infty$ , soit en  $+\infty$  soit en un réel  $a$ .  $l$  et  $l'$  sont des nombres réels.

Lorsqu'il n'y a pas de conclusion en général, on dit alors qu'il y a un cas de forme indéterminée. (F.I.)

N.B. :  $\pm\infty$  désigne  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

#### 1. LIMITE DE SOMME

Si $\lim f$	$l$	$l$	$l$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si $\lim g$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(f + g)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

FIGURE 10.10. – Tableau des Limites de Sommes de Fonctions

#### 2. LIMITE D'UN PRODUIT

Si $\lim f$	$l$	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Si $\lim g$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim(f \times g)$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I.

FIGURE 10.11. – Tableau des Limites des Produits de Fonctions

#### 3. LIMITE D'UN QUOTIENT $f/g$ DANS LE CAS OÙ LA LIMITE DE $g$ N'EST PAS NULLE

Si $\lim f$	$l$	$l$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Si $\lim g$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$\pm\infty$
$\lim(f/g)$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

FIGURE 10.12. – Tableau des Limites des Quotients de Fonctions, où la Limite de  $g$  n'est pas nulle

#### 4. LIMITE D'UN QUOTIENT $f/g$ DANS LE CAS OÙ LA LIMITE DE $g$ EST NULLE

Si $\lim f$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0
Si $\lim g$	$0^+$	$0^-$	$0^+$	$0^-$	0
$\lim(f/g)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

FIGURE 10.13. – Tableau des Limites des Quotients de Fonctions, où la Limite de  $g$  est nulle

#### 5. EXEMPLES

##### A. SOMME

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{x^2} - 1 = +\infty \quad (\text{remarquons qu'on a la même limite quand } x \rightarrow 0)$$

##### B. PRODUIT

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-3 + x) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = -\infty \quad \text{En effet, } \lim_{x \rightarrow 0} -3 + x = -3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\text{Par contre, remarquons que } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3 + x) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

##### C. QUOTIENT

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{\sqrt{x}} = +\infty$$

B. LIMITE D'UNE COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS1. RAPPEL

On note  $g \circ f$  la composée de la fonction  $f$  suivie de  $g$ .

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \text{ tel que } f(x) \in \mathcal{D}_g, (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

2. THÉORÈME

Soient  $a, b$  et  $c$  trois réels ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ . Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions, définies au bon endroit.

Alors, si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  et  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$ , on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$$

Attention aux limites!

3. EXEMPLE

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2-3} = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 - 3 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$$

C. COMPARAISON

$a$  désigne un réel ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

1. THÉORÈME

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions telles que pour tout  $x$  voisin de  $a$ ,  $f(x) \leq g(x)$

$$\begin{aligned} \text{— Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty & \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty \\ \text{— Si } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty & \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \end{aligned}$$

2. THÉORÈME

Soient  $f, g$  et  $h$  trois fonctions telles que pour tout  $x$  voisin de  $a$ ,

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

Si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$  et  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$  où  $l$  est un réel, alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$