

Devoir Maison de Mathématiques Expertes

Diego Van Overberghe

8 février 2021

Partie A et B

À partir des informations de l'énoncé, nous avons, dans GéoGébra, pu conjecturer l'ensemble \mathcal{E} comme étant le cercle centré sur le point d'affixe $0,5i$ de rayon $0,5$.

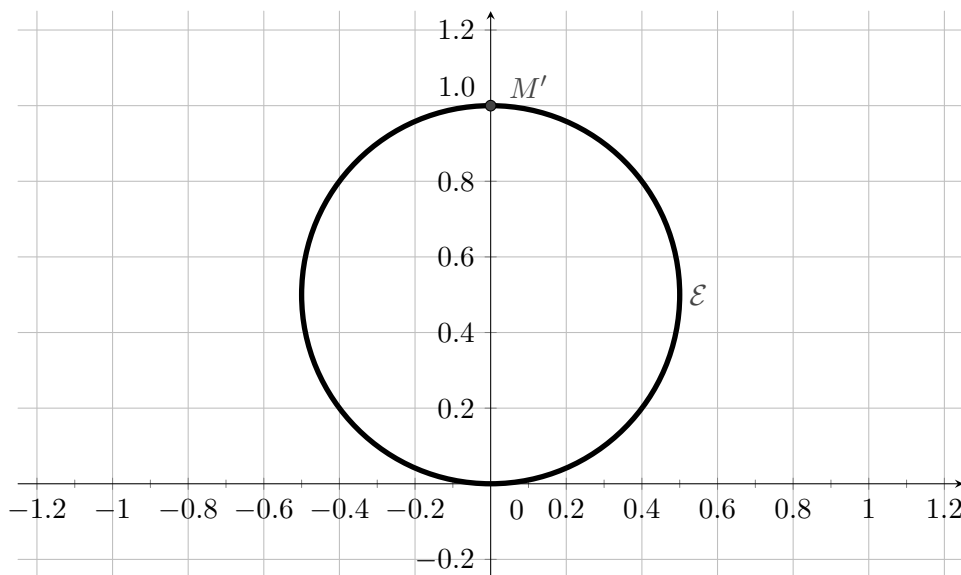


FIGURE 1 – Conjecture de la Représentation Graphique de l'Ensemble \mathcal{E}

Partie C

① a. $z_M = 10i + x \quad x \in \mathbb{R}$

b. $z_{M'} = \frac{10}{x-10i} = \frac{10(x+10i)}{(x-10i)(x+10i)} = \frac{10x}{x^2+100} + \frac{100i}{x^2+100}$
 $z_{M'} - \frac{1}{2}i = \frac{10x}{x^2+100} + \frac{200i-x^2i-100i}{2(x^2+100)} = \frac{10x}{x^2+100} + \frac{(100-x^2)i}{2(x^2+100)}$

Posons $z_A = \frac{1}{2}i$.

$$\begin{aligned} |AM'| &= \left| \frac{10x}{x^2+100} + \frac{(100-x^2)i}{2(x^2+100)} \right| = \sqrt{\left(\frac{10x}{x^2+100} \right)^2 + \left(\frac{(100-x^2)}{2(x^2+100)} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{400x^2 + (100-x^2)^2}{4(x^2+100)^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x^4 + 200x^2 + 10\,000}{x^4 + 200x^2 + 10\,000}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

c. Vu que le module est une constante, l'ensemble est un cercle de rayon $\frac{1}{2}$ et de centre A

Donc, $M \in d \implies M' \in \mathcal{E}$

② a. $|AM'|^2 = \left| \frac{10}{z_M} - \frac{1}{2}i \right|^2 = \left| \frac{20 - \overline{z_M}i}{2z_M} \right|^2 = \left| \frac{20z_M - (Im(z_M)^2 + Re(z_M)^2)i}{2(Im(z_M)^2 + Re(z_M)^2)} \right|^2$
 $= \left| \frac{20z_M}{2|z_M|^2} - \frac{1}{2}i \right|^2 = \left| \frac{20Re(z_M)}{2|z_M|^2} + \frac{20Im(z_M) - |z_M|^2}{2|z_M|^2}i \right|^2$
 $= \frac{400Re(z_M)^2 + 400Im(z_M)^2 - 40Im(z_M)|z_M|^2 + |z_M|^4}{4|z_M|^4}$
 $= \frac{100 - 10Im(z_M)}{|z_M|^2} + \frac{1}{4}$

Donc, $Im(z_M) = 10 \iff M \in d$ validant notre calcul.

b. $\left| z_{N'} - \frac{1}{2}i \right| = \frac{1}{2} \iff \left| \frac{10}{z_N} - \frac{1}{2}i \right| = \frac{1}{4}$
 $\iff \left| \frac{20Re(z_N)}{2|z_N|^2} + \frac{20Im(z_N) - |z_N|^2}{2|z_N|^2}i \right|^2 = \frac{1}{4}$
 $\iff \frac{400|z_N|^2 - 40Im(z_N)|z_N|^2 + |z_N|^4}{4|z_N|^4} = \frac{1}{4}$
 $\iff Im(z_N) = 10$

c. On a montré que $N' \in \mathcal{E} \implies N \in d$

d. Finalement, $M \in d \iff M' \in \mathcal{E}$