Chapitre VIII

Géométrie Vectorielle dans l'Espace

I Vecteurs de l'Espace

La notion de vecteur se généralise à l'espace.

Le vecteur $\vec{u}$ est caractérisé par un sens, une direction, et une norme, notée $||\vec{u}||$.

A Théorème

A, B, et C étant quatre points de l'espace, les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
- Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
- Les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.

B Définition

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$ (Deux vecteurs colinéaires ont la même direction)

C Propriété

Toutes les opérations sur les vecteurs, en particulier la relation de Chasles sont identiques dans l'espace comme dans le plan.

D Theorème

A et B étant deux points distincts de l'espace, (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB},\ t \in \mathbb{R}$

$(AB) = \left\{ M \in \mathscr{E}, \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}, t \in \mathbb{R} \right\}$

E Définition

Le vecteur $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{s}$
s'il existe trois réels a, b, et c tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{s}$

II Vecteurs Coplanaires

A Définition

Des vecteurs sont coplanaires s'ils admettent des représentants dont les extrémités sont dans un même plan.

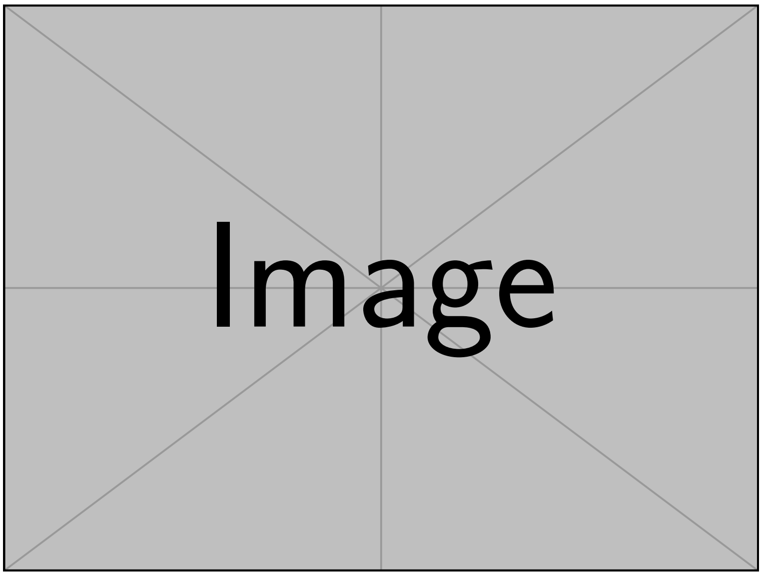

FIGURE 8.1 – Illustration de la Définition

Si O est un point quelconque et A, B, et C sont tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$

$\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{s}$ coplanaires $\iff$ O, A, B, et C coplanaires

B Théorème

$\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ étant trois vecteurs de l'espace avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires, $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

On dit alors que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

1 Démonstration

Soient O, A, B, et C quatre points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non-colinéaires donc, O, A, et B sont non alignés, et (OAB) est un plan de base $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$

" $\Longrightarrow$ " On suppose que $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ sont coplanaires. Alors, $C \in (OAB)$.
C admet donc des coordonnées $(\alpha;\beta)$ dans la base $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.
C'est-à-dire $\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ ou encore $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

" $\Longleftarrow$ " On suppose que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$
Soit D le point de (OAB) de coordonnées $(\alpha;\beta)$
Alors, $\overrightarrow{OD} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$

$$= \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{w} = \overrightarrow{OC}$$

Donc, D = C, les points sont confondus, et comme $C \in (OAB)$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ sont coplanaires.

2 Théorème : Caracterisation Vectorielle d'un Espace

Si A, B, et C sont trois points non-alignés de l'espace, le plan (ABC) est l'ensemble des M tels que :

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t'\overrightarrow{AC} \quad (t,\ t' \in \mathbb{R})$$

III Repèrage dans l'Espace

A Définition

Un repère de l'espace est constitué d'un point appelé origine du repère (en général O) et d'un triplet de vecteurs non-coplanaires (en général $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, et $\vec{k}$)

On le note $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$

B Vocabulaire

La droite $(O;\vec{\imath})$ est appelée axe des abscisses.

La droite $(O;\vec{\jmath})$ est appelée axe des ordonnées.

La droite $(O;\vec{k})$ est appelée axe des cotes.

C Coordonnées dans l'Espace

1 Théorème

Si $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ est un repère, pour tout point M, il existe un unique triplet $\left(x;y;z\right)$ de réels tels que $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$, appelés coordonnées de M.

On note $\mathrm{M}\left(x;y;z\right)$

a Démonstration

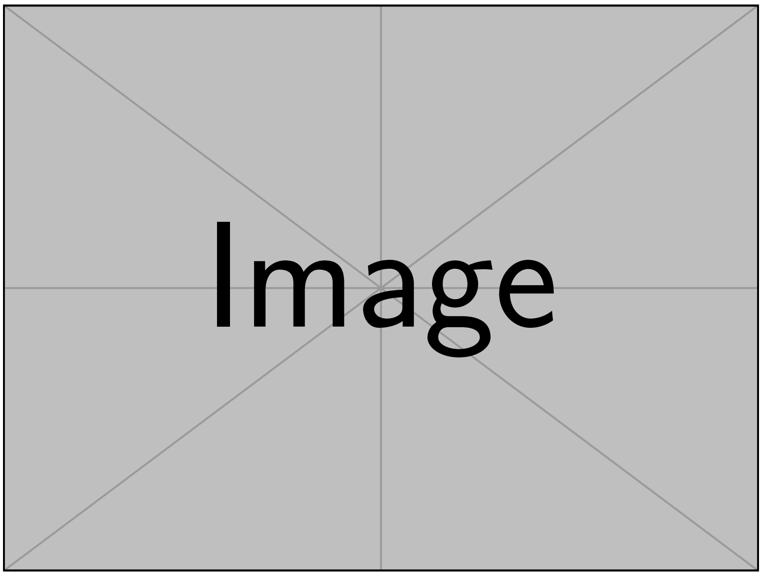

Figure 8.2 – Démonstration du Théorème

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM'}}+\overrightarrow{\mathrm{M'M}}$
Or $\mathrm{M}\in\left(\mathrm{O};\vec{\imath};\vec{\jmath}\right)$ donc il a des coordonnées $\left(x;y\right)$ dans le repère $(\mathrm{O};\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

$\overrightarrow{\mathrm{OM'}}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{\mathrm{M'M}}$ est colinéaire à $\vec{k}$ (on a projeté dans sa direction). Il existe un réel z tek que $\overrightarrow{\mathrm{M'M}}=z\vec{k}$

Donc, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$ $\square$
(On admet l'unicité)

2 Théorème

Si dans un repère $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$ sont deux points, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Et I, le point du milieu de $[AB]$:

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} ; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

Dans un repère orthonormé, un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ a pour norme :

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

3 Théorème

Si I est le milieu de $[AB]$, pour tout M :

$$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$$

A Démonstration

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MI} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AI} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} \quad \text{(Chasles)} \end{aligned}$$