Chapitre XVII

Fonctions Trigonométriques

I. Définition et Propriétés

A. Rappel

Soit un réel x et M le point correspondant sur le cercle trigonométrique dans une repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,\right)$

Le cosinus de x est noté $\cos(x)$, où $\cos(x)$ est l'abscisse du point M.
Le sinus de x est noté $\sin(x)$, où $\sin(x)$ est l'ordonnée du point M.

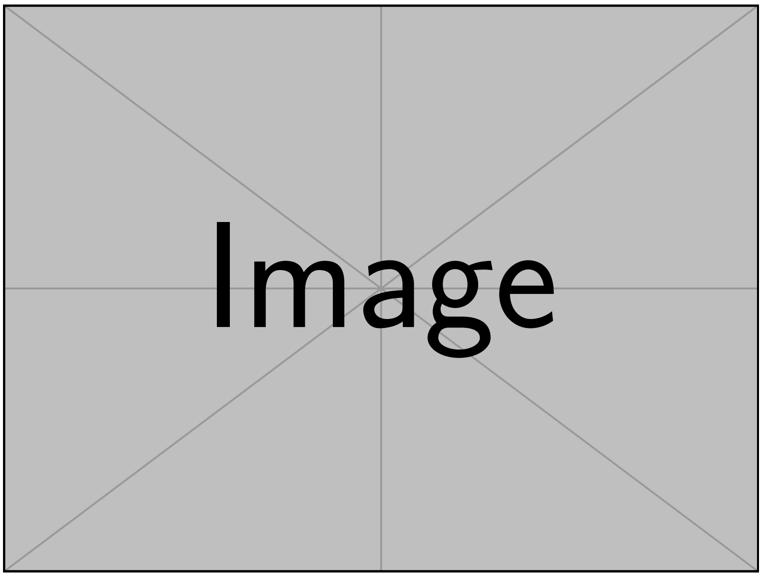

Figure 17.1. – Cercle Trigonométrique

B. Définitions

La fonction qui à tout réel x associe le nombre $\cos(x)$ est appelée fonction cosinus.
La fonction qui à tout réel x associe le nombre $\sin(x)$ est appelée fonction sinus.

C. Propriété

Quel que soit le réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$, la fonction est donc paire.
Quel que soit le réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$, la fonction est donc impaire.

D. Propriété (Periodicité)

Pour tout réel x, $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$

Les fonctions cosinus et sinus sont donc périodiques de période 2π (2π-périodiques)

E. Remarque

Ces deux propriétés permettent de réduire l'intervalle d'étude des fonctions cosinus et sinus à $[\,0\,;\,\pi\,]$

Par parité, on peut déduire $[\,-\pi\,;\,0\,]$, donc $[\,-\pi\,;\,\pi\,]$.

Par périodicité on peut déduire les résultats sur $\mathbb{R}$

II. Dérivabilité

A. Étude des Fonctions Sinus et Cosinus

1. Théorème

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \cos'(x) = -\sin(x)$$

2. Tableaux de Variation

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos'(x) = -\sin(x)$	0	$-$	0
$\cos$	1 ↘	0 ↘	-1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin'(x) = \cos(x)$	$+$	0	$+$
$\sin$	0 ↗	1 ↘	0

Figure 17.2. – Tableaux de Variation des Fonctions cosinus et sinus

3. Courbes Représentatives

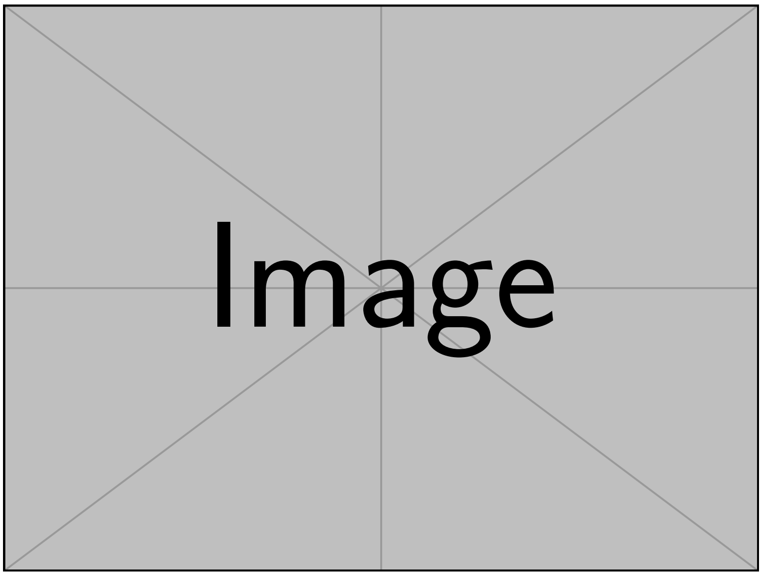

FIGURE 17.3. – Représentation Graphique des Fonctions cosinus et sinus

B. COMPLÉMENT

1. THÉORÈME

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x} = 1$$

A. DÉMONSTRATION

La fonction sinus est continue et dérivable en 0 :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(0+h) - \sin(0)}{h} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2} + h\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{h} = \cos'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$$