

Exercices Chapitre sur le Produit Scalaire

Diego Van Overberghe

28 Avril 2020

Exercice 34

- a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \frac{\pi}{6} = AB \times AC \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{20\sqrt{3}}{2}$
- b) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH = 5$
H étant le projeté orthogonal de AC sur [AB].
- c) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH = 20$
H étant le projeté orthogonal de AC sur la demie-droite [AB)
- d) $\widehat{BAC} = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$ (angles alternes-internes)
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \frac{\pi}{3} = 12$
- e) Non Traité

Exercice 35

- a) $-2\vec{u} \cdot (3\vec{u} + \vec{v}) = -6\vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = -166$
- b) $-8\vec{u}^2 + 14\vec{u} \cdot \vec{v} - 3\vec{v}^2 = -155$
- c) Demander Correction
- d) Demander Correction

Exercice 44

- a) La projection orthogonale de \vec{AC} sur (AB) est \vec{AO}
- b) La projection orthogonale de \vec{BD} sur (DC) est \vec{DO}
- c) La projection orthogonale de \vec{OC} sur (BC) est \vec{OC}
- d) La projection orthogonale de \vec{AD} sur (CD) est \vec{OD}
- e) La projection orthogonale de \vec{OB} sur (EF) est \vec{OE}
- f) La projection orthogonale de \vec{AB} sur (EF) est \vec{FE}

*pp233-244

Exercice 45

- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 1$
- b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -1$
- c) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = -\frac{1}{2}$
- d) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
- e) $\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}$
- f) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}$

Exercice 46

- a) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = EF \times EG \times \cos \frac{\pi}{2} = 12\sqrt{2}$
- b) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = EF \times EG \times \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{15\sqrt{3}}{2}$

Exercice 48

- a) $\vec{u} \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix} \right), \quad \vec{v} \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 5 \end{smallmatrix} \right) : \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = x_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}} = 3$
- b) $\vec{u} \left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} \\ -3 \end{smallmatrix} \right), \quad \vec{v} \left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} \end{smallmatrix} \right) : \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = x_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}} = \frac{-7}{8}$
- c) $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, et $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j} : \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = x_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}} = 11$

Exercice 49

- a) Faux. Si les deux vecteurs ont un sens opposé, alors le produit scalaire sera l'opposé du produit de leurs normes.
- b) Faux. Il suffit d'imaginer deux vecteurs ayant le même projeté orthogonal sur un vecteur. Ces deux derniers sont différents, et pourtant leur produit scalaire est identique.
- c) Faux. $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \iff \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 < 0$
Or, un nombre au carré est positif.
- d) Vrai. $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos 0^1 = \|\vec{u}\|^2$

Exercice 50

- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -9$
- b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -12$
- c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8$
- d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -10$

1. L'angle entre deux vecteurs identiques est 0°

Exercice 51

- a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$
- b) $\vec{t} \cdot \vec{w} = -12$
- c) $\vec{m} \cdot \vec{h} = 2$
- d) $\vec{w} \cdot \vec{u} = 16$
- e) $\vec{v} \cdot \vec{w} = 12$
- f) $\vec{m} \cdot \vec{u} = 12$

Exercice 52

- 1. a) $\|\vec{u}\| = 4 \quad \|\vec{v}\| = 3\sqrt{2}$
b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$
c) $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \alpha = 45^\circ$
- 2. a) $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{2} \quad \|\vec{v}\| = 4$
b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -8$
c) $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \alpha = 135^\circ$
- 3. a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{5} \quad \|\vec{v}\| = 3$
b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$
c) $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \alpha \approx 63^\circ$
- 4. a) $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{2} \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{10}$
b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$
c) $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \alpha \approx 63^\circ$

Exercice 53

- 1. a) Ce n'est pas possible. L'angle est inférieur à 90° mais le produit scalaire est négatif.
b) $AC = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times \cos \frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2}$
- 2. a) $\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \alpha = 135^\circ$
b) Ce n'est pas possible. $AB \times AC = 10$, Or, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 15$
c) $AB \times AC = \vec{AB} \cdot \vec{AC}$, Donc, $\alpha = 0^\circ$

Exercice 54

- a) $5\vec{u}^2 + 9\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{v}^2 = 117$
- b) $\vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = 30$

Exercice 57

- a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = 20$
- b) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = 8$
- c) Le triangle est rectangle en B. Le projeté orthogonal de C sur [AB] est B.
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AB = 36$

ou

D'après le théorème de Pythagore : $BC^2 = AC^2 - AB^2 = 64$

Alors $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 36$

- d) $BC = AD = 7$ Donc, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = -4$

Exercice 58

- a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}} = 4$
- b) $-4\vec{u} \cdot \vec{v} = -16$
- c) $-2\vec{u} \cdot \vec{v} = -8$
- d) $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 8$

Exercice 60

- a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AC \implies A, B \text{ et } C \text{ sont alignés.}$
- b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \implies \vec{u} = 0 \text{ ou } \vec{v} = 0$
- c) $\vec{u} = 3\vec{v} \implies \vec{u}^2 = 9\vec{v}^2$
- d) $\|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

Exercice 61

- a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos 40^\circ \approx 15,3$
- b) D'après le théorème d'Al-Kashi, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos \hat{A}$.
Donc, $\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \frac{6^2 + 4^2 - 3^2}{2 \times 6 \times 4} = 21,5$
- c) Le triangle est isocèle, donc, le projeté orthogonal de B sur [AC] se situe au centre de ce segment. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 6 \times 3 = 18$

- d) On imagine le point E qui forme le carré ADCE, avec une diagonale de 3, et donc un côté de $\frac{3}{\sqrt{2}}$
 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 5 \times \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{15}{\sqrt{2}}$
- e) On assume que ADCB est un parallélogramme. On imagine le point E qui forme le rectangle HDCE, [EB] = 1. E est le projeté orthogonal de C sur [AE]. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 30$
- f) $(\vec{AB}; \vec{AC}) = (\pi - \frac{2\pi}{3}) = -\frac{\pi}{3}$ et $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 7 \times \cos -\frac{\pi}{3} = \frac{7}{2}$

Exercice 63

- a) Méthode 1 : On utilise la relation de Chasles.

$$\begin{aligned}\vec{EC} \cdot \vec{ED} &= (\vec{EA} + \vec{AC}) \cdot (\vec{EB} + \vec{BD}) \\ &= \vec{EA} \cdot \vec{EB} + \vec{EA} \cdot \vec{BD} + \vec{AC} \cdot \vec{EB} + \vec{AC} \cdot \vec{BD} \\ &= 9,25\end{aligned}$$

Méthode 2 : Posons le repère (A; $\vec{i}; \vec{j}$) où $\begin{pmatrix} \vec{i} = \frac{1}{6}\vec{AB} \\ \vec{j} = \frac{1}{4}\vec{AC} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\begin{cases} \vec{EC} \begin{pmatrix} x_C - x_E \\ y_C - y_E \end{pmatrix} \\ \vec{ED} \begin{pmatrix} x_D - x_E \\ y_D - y_E \end{pmatrix} \end{cases} &\iff \begin{cases} \vec{EC} \begin{pmatrix} -1,5 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \vec{ED} \begin{pmatrix} 4,5 \\ 4 \end{pmatrix} \end{cases} \\ \vec{EC} \cdot \vec{ED} &= x_{\vec{EC}} \times x_{\vec{ED}} + y_{\vec{EC}} \times y_{\vec{ED}} = 9,25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Angle } \widehat{DEC} : \vec{EC} \cdot \vec{ED} &= EC \times ED \times \cos \widehat{DEC} \\ EC &= \sqrt{x_{\vec{EC}}^2 + y_{\vec{EC}}^2} = \sqrt{18,25} \\ ED &= \sqrt{x_{\vec{ED}}^2 + y_{\vec{ED}}^2} = \sqrt{36,25} \\ \cos \widehat{DEC} &= \frac{\vec{EC} \cdot \vec{ED}}{EC \times ED} = \frac{9,25}{\sqrt{661,5625}} \\ \widehat{DEC} &= \cos^{-1} \left(\frac{9,25}{\sqrt{661,5625}} \right) \approx 68,92^\circ\end{aligned}$$

- b) Méthode 1 : On voit que B est le projeté orthogonal de E sur [DB], donc,

$$\vec{DB} \cdot \vec{DE} = DB \times DB = 16$$

Méthode 2 : Dans (A; $\vec{i}; \vec{j}$) : $\vec{DB}(0; -4)$ $\vec{DE}(-4,5; -4)$
 $\vec{DB} \cdot \vec{DE} = 16$

$$\text{Longueur de BF : Aire DBC} = \frac{DB \times DE}{2} = \frac{DF \times DE}{2} \text{ donc } DB \times BE = BF \times DE$$

$$BF = \frac{DB \times BE}{DE} \approx 2,99$$

Exercice 65

- a) Faux. Les vecteurs sont colinéaires. $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_{\vec{u}}x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}}y_{\vec{v}} = -13$
 $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0 \iff \neg(\vec{u} \perp \vec{v})$
- b) Vrai. $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_{\vec{u}}x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}}y_{\vec{v}} = 0$
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$ (Parce que $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$)
- c) Faux. Pour $a = 2$, on a $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Or $x_{\vec{u}}x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}}y_{\vec{v}} = -1$
 $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0 \iff \neg(\vec{u} \perp \vec{v})$
- d) On a $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$. $x_{\vec{u}}x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}}y_{\vec{v}} = 0$
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$ (Parce que $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$)

Exercice 66

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff x_{\vec{u}}x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}}y_{\vec{v}} = 0$$

- a) $\vec{u} \perp \vec{v}$ pour $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- b) $\vec{u} \perp \vec{v}$ pour $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
- c) $\vec{u} \perp \vec{v}$ pour $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- d) $\vec{u} \perp \vec{v}$ pour $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$
- e) $\vec{u} \perp \vec{v}$ pour $\vec{v} \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 68

- a) Vrai. Si les deux vecteurs sont orthogonaux, alors, leur produit scalaire sera nul.

$$\begin{aligned} & (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0 \\ \iff & \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = 0 \\ \iff & \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0 \\ \iff & \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \end{aligned}$$

- b) Vrai.
- c) Vrai. Il s'agit tout simplement du théorème de Pythagore.
- d) Vrai. Ici, il s'agit de la réciproque du théorème de Pythagore.

Exercice 69

Si ABC est rectangle, alors, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} \end{cases} \iff \begin{cases} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = x_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{BC}} + y_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{BC}} = 1 \quad \text{Donc, } \hat{B} \neq 90^\circ$$

Exercice 70

- a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 15 + m$
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff 15 + m = 0 \iff m = -15$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5m - 6$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff 5m - 6 = 0 \iff m = \frac{6}{5}$$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8 - m^2$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff 8 - m^2 = 0 \iff m = 2\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad m = -2\sqrt{2}$$

d) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff m = m$$

Exercice 72

a)
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} \end{cases} \iff \begin{cases} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = x_{\overrightarrow{AB}} x_{\overrightarrow{AD}} + y_{\overrightarrow{AB}} y_{\overrightarrow{AD}} = 0$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = x_{\overrightarrow{BA}} x_{\overrightarrow{BC}} + y_{\overrightarrow{BA}} y_{\overrightarrow{BC}} = 0$$

- b) \overrightarrow{AD} et \overrightarrow{BC} sont colinéaires, puisque ils sont tous les deux orthogonaux avec \overrightarrow{AB} . Donc, $[AD]$ et $[BC]$ sont parallèles. Comme $AD \neq BC$ ($\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$), il ne s'agit pas d'un carré ou d'un rectangle, donc le quadrilatère est un trapèze.

Exercice 73

a)
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} \end{cases} \iff \begin{cases} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = x_{\overrightarrow{AB}} x_{\overrightarrow{CD}} + y_{\overrightarrow{AB}} y_{\overrightarrow{CD}} = -1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0 \iff \neg(\vec{u} \perp \vec{v})$$

On peut donc conclure que (AB) et (CD) ne sont pas perpendiculaires.

b)
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} \end{cases} \iff \begin{cases} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = x_{\overrightarrow{AB}} x_{\overrightarrow{CD}} + y_{\overrightarrow{AB}} y_{\overrightarrow{CD}} = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v} \quad (\text{Parce que } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0})$$

On peut donc conclure que (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

c)
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} \end{cases} \iff \begin{cases} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} \sqrt{2} - \sqrt{3} \\ -5 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 5 \\ \sqrt{2} - \sqrt{3} \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = x_{\overrightarrow{AB}} x_{\overrightarrow{CD}} + y_{\overrightarrow{AB}} y_{\overrightarrow{CD}} = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v} \quad (\text{Parce que } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0})$$

On peut donc conclure que (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 74

a) On pose le repère $(A; \vec{i}; \vec{j})$ où $\begin{cases} \vec{i} = \frac{1}{4}\vec{AB} \\ \vec{j} = \frac{1}{4}\vec{AD} \end{cases}$

$A(0;0), G(-2;4), H(6;4)$

$$\begin{cases} \vec{AG} \begin{pmatrix} x_G - x_A \\ y_G - y_A \end{pmatrix} \\ \vec{AH} \begin{pmatrix} x_H - x_A \\ y_H - y_A \end{pmatrix} \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{AG} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \vec{AH} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\vec{AG} \cdot \vec{AH} = x_{\vec{AG}} \times x_{\vec{AH}} + y_{\vec{AG}} \times y_{\vec{AH}} = 4 \quad \text{Donc, } \hat{A} \neq 90^\circ$$

Exercice 78

1) `def orthogonaux(a,b,c,d):`

`p=a*c+b*d`

`if p==0:`

`return True`

`else:`

`return False`

2) a) True

b) False

Exercice 79

1) a) Méthode 1 : $\begin{cases} \vec{AH} \begin{pmatrix} x_H - x_A \\ y_H - y_A \end{pmatrix} \\ \vec{CB} \begin{pmatrix} x_B - x_C \\ y_B - y_C \end{pmatrix} \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{AH} \begin{pmatrix} x_H \\ y_H - 3 \end{pmatrix} \\ \vec{CB} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$\vec{AH} \cdot \vec{CB} = x_{\vec{AH}} x_{\vec{CB}} + y_{\vec{AH}} y_{\vec{CB}} = 4x_H - 4y_H + 12$$

Méthode 2 : La hauteur issue de BC passe par le point H et A.

$$\text{Donc, } ([AH] \perp [CB]) \iff \vec{AH} \cdot \vec{CB} = 0$$

b) On a donc,

$$\vec{AH} \cdot \vec{CB} = 0$$

$$\iff 4x_H - 4y_H + 12 = 0$$

$$\iff 4x_H - 4y_H - 12 = 0$$

$$\iff x_H = y_H - 3$$

$$\iff y_H = x_H + 3$$

2) Méthode 1 : $\begin{cases} \vec{BH} \begin{pmatrix} x_H - x_B \\ y_H - y_B \end{pmatrix} \\ \vec{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{BH} \begin{pmatrix} x - 2 \\ y + 1 \end{pmatrix} \\ \vec{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$\vec{BH} \cdot \vec{AC} = x_{\vec{BH}} x_{\vec{AC}} + y_{\vec{BH}} y_{\vec{AC}} = 4 - 2x_H$$

Méthode 2 : La hauteur issue de AC passe par le point H et B.

$$\text{Donc, } ([BH] \perp [AC]) \iff \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$3) \begin{cases} 4 - 2x_H = 0 \\ y_H = x_H + 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_H = 2 \\ y_H = 5 \end{cases} \quad H(2; 5)$$

Exercice 81

$$\begin{aligned} \text{a) } \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{EA} &= CD \times EA \times \cos 0 = ax \\ \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{AD} &= DF \times AD \times \cos 180^\circ = -ax \end{aligned}$$

b) On pose le repère $(D; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA})$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{CF} \begin{pmatrix} x_F - x_C \\ y_F - y_C \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{ED} \begin{pmatrix} x_D - x_E \\ y_D - y_E \end{pmatrix} \end{cases} \iff \begin{cases} \overrightarrow{CF} \begin{pmatrix} -a \\ x \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{ED} \begin{pmatrix} -x \\ -a \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{ED} = -a \times -x - a \times x = 0$$

$$\text{Or, } \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{ED} = 0 \iff (CF) \perp (ED)$$

Exercice 83

$$\text{Tout d'abord, } (TU) \perp (RS) \implies \overrightarrow{TU} \cdot \overrightarrow{RS} = 0 \iff x_{\overrightarrow{TU}} x_{\overrightarrow{RS}} + y_{\overrightarrow{TU}} y_{\overrightarrow{RS}} = 0$$

$$\text{De plus, } \overrightarrow{RS} \begin{pmatrix} x_S - x_R \\ y_S - y_R \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{RS} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{et } x_{\overrightarrow{TU}} = x_U - x_T, \quad y_{\overrightarrow{TU}} = y_U - y_T$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{TU} \cdot \overrightarrow{RS} = 0 &\iff 6x_{\overrightarrow{TU}} + 2y_{\overrightarrow{TU}} = 0 \\ &\iff 6(x_U - 3) = -2(y_U + 2) \\ &\iff 6x_U - 18 = -2y_U - 4 \\ &\iff 6x_U + 2y_U = 14 \end{aligned}$$

Tout doublet qui satisfait cette equation représente un point qui se situera sur la droite (TU), mais n'appartiendra pas forcément à la droite (RS).

On définit donc cette droite. $y = \frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$

On cherche donc le doublet qui satisfait les deux équations.

$$\begin{cases} 6x_U + 2y_U = 14 \\ y_U = \frac{1}{3}x_U + \frac{11}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} 6x_U + \frac{2}{3}x_U + \frac{22}{3} = 14 \\ y_U = \frac{1}{3}x_U + \frac{11}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x_U = 1 \\ y_U = 4 \end{cases} \quad U(1; 4)$$

Exercice 85

D'Après le théorème d'Al-Kashi :

$$AC^2 = BC^2 + BA^2 - 2 \times BC \times BA \times \cos \widehat{ABC}$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos 30^\circ} \approx 4,6$$

Exercice 86

D'Après le théorème d'Al-Kashi :

$$EF^2 = DE^2 + DF^2 - 2 \times DE \times DF \times \cos \widehat{EDF}$$

$$EF = \sqrt{DE^2 + DF^2 - 2DE \times DF \times \cos 45^\circ} \approx 3,6$$

Exercice 87

a) $IJ^2 + JK^2 = IK^2$

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle IJK est un triangle rectangle en J.

b) $\widehat{J} = 90^\circ$

$$\widehat{I} = \cos^{-1} \left(\frac{j^2 + k^2 - i^2}{2jk} \right) \approx 41^\circ$$

$$\widehat{K} = \cos^{-1} \left(\frac{i^2 + j^2 - k^2}{2ij} \right) \approx 49^\circ$$

Exercice 89

a) $\cos \widehat{G} = \frac{h^2 + l^2 - g^2}{2hl} = \frac{31}{44}$

$$\cos \widehat{H} = \frac{g^2 + l^2 - h^2}{2gl} = -\frac{7}{32}$$

b) $\widehat{L} = 180 - \cos^{-1} \left(\frac{31}{44} \right) - \cos^{-1} \left(-\frac{7}{32} \right) \approx 32,2^\circ$

Exercice 90

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow MI = \sqrt{\frac{1}{2} \left(MA^2 + MB^2 - \frac{AB^2}{2} \right)}$$

$$\Leftrightarrow MI = 5$$

Exercice 91

$$n^2 = q^2 + r^2 - 2pr \times \cos \widehat{N} = 76$$

$$n = 2\sqrt{19} \approx 8,7 \approx 4,4NP$$

Exercice 92

D'après le théorème d'Al-Kashi :

$$r^2 = s^2 + n^2 - 2sn \times \cos \hat{R}$$

$$\Leftrightarrow \hat{R} = \cos^{-1} \left(\frac{s^2 + n^2 - r^2}{2sn} \right) \approx 123^\circ$$

De même, $\hat{N} = \cos^{-1} \left(\frac{r^2 + s^2 - n^2}{2rs} \right) \approx 16^\circ$

$$\hat{S} = \cos^{-1} \left(\frac{n^2 + r^2 - s^2}{2nr} \right) \approx 41^\circ$$

Exercice 93

a) D'après le théorème d'Al-Kashi dans le triangle ABC, et avec $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos \hat{A}$$

$$\Leftrightarrow \hat{A} = \cos^{-1} \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \approx 26,6^\circ$$

De même, $\hat{B} = \cos^{-1} \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \right) \approx 137,9^\circ$

$$\hat{C} = \cos^{-1} \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) \approx 15,6^\circ$$

b) D'après le théorème d'Al-Kashi dans le triangle EDF, et avec $d = EF$, $e = DF$ et $f = DE$:

$$d = \sqrt{e^2 + f^2 - 2ef \times \cos \frac{\pi}{3}}$$

$$= \sqrt{79}$$

$$\approx 8,9$$

c) D'après le théorème d'Al-Kashi dans le triangle IJK, et avec $i = JK$, $j = IK$ et $k = IJ$:

$$i = \sqrt{j^2 + k^2 - 2jk \times \cos \frac{\pi}{6}}$$

$$\approx 17,8$$

d) D'après le théorème d'Al-Kashi dans le triangle GHL, et avec $g = HL$, $l = GH$ et $h = GL$:

$$h^2 = g^2 + l^2 - 2gl \times \cos \hat{H}$$

$$\Leftrightarrow \hat{H} = \cos^{-1} \left(\frac{g^2 + l^2 - h^2}{2gl} \right) \approx 71^\circ$$

Exercice 95

D'après le théorème de la médiane :

$$\begin{aligned}MP^2 + MN^2 &= 2MM'^2 + \frac{MP^2}{2} \\ \Leftrightarrow MM' &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(MP^2 + MN^2 - \frac{NP^2}{2} \right)} \\ \Leftrightarrow MM' &\approx 6,2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}MP^2 + NP^2 &= 2PP'^2 + \frac{NM^2}{2} \\ \Leftrightarrow PP' &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(MP^2 + NP^2 - \frac{NM^2}{2} \right)} \\ \Leftrightarrow PP' &\approx 4,5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}NM^2 + NP^2 &= 2NN'^2 + \frac{MP^2}{2} \\ \Leftrightarrow NN' &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(NM^2 + NP^2 - \frac{MP^2}{2} \right)} \\ \Leftrightarrow NN' &\approx 7,9\end{aligned}$$

Exercice 96

a) D'après le théorème d'Al-Kashi dans le triangle ABC, avec $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$:

$$\begin{aligned}b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \times \cos \hat{B} \\ \Leftrightarrow b &= \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \times \cos \hat{B}} \\ \Leftrightarrow AC &= \sqrt{19} \approx 4,4\end{aligned}$$

b) De plus,

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \cos^{-1} \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \\ \Leftrightarrow \hat{A} &\approx 32^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{C} &= 180 - 30 - 32 \\ \Leftrightarrow \hat{C} &= 118^\circ\end{aligned}$$

Exercice 97

- a) D'Après le théorème d'Al-Kashi dans le triangle IMJ, avec $i = MJ$, $m = IJ$ et $j = IM$. $\hat{I} = 30^\circ$:

$$\begin{aligned} i^2 &= m^2 + j^2 - 2mj \times \cos \hat{I} \\ \Leftrightarrow i &= \sqrt{m^2 + j^2 - 2mj \times \cos \hat{I}} \\ \Leftrightarrow MJ &\approx 3,4 \end{aligned}$$

De même, dans le triangle IML, avec $i = [ML]$, $m = [IL]$ et $l = [IM]$. $\hat{I} = 60^\circ$:

$$\begin{aligned} i^2 &= m^2 + l^2 - 2ml \times \cos \hat{I} \\ \Leftrightarrow i &= \sqrt{m^2 + l^2 - 2ml \times \cos \hat{I}} \\ \Leftrightarrow ML &\approx 3,5 \end{aligned}$$

- b) On cherche d'abord \widehat{MLK} . $\widehat{MLK} = 90 - \widehat{ILM}$
D'après le théorème d'Al-Kashi dans le triangle IML, avec $l = IM$, $i = ML$ et $m = IL$:

c)

$$\begin{aligned} l^2 &= i^2 + m^2 - 2im \times \cos \widehat{ILM} \\ \Leftrightarrow \widehat{ILM} &= \cos^{-1} \left(\frac{i^2 + m^2 - l^2}{2im} \right) \\ \Leftrightarrow \widehat{ILM} &= 30^\circ = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

On conclut que $\widehat{MLK} = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$

D'après le théorème d'Al-Kashi, dans le triangle MLK, avec $l = MK$, $m = LK$ et $k = ML$:

$$\begin{aligned} l^2 &= m^2 + k^2 - 2mk \times \cos \hat{L} \\ \Leftrightarrow l &= \sqrt{m^2 + k^2 - 2mk \times \cos \hat{L}} \\ \Leftrightarrow MK &\approx 4,4 \end{aligned}$$

Exercice 99

$$[AB] = \cos \frac{\pi}{6} \times [AE] = 7$$

D'Après la contraposée du théorème de Pythagore, dans le triangle ABE, rectangle en E :

$$[BE] = \sqrt{AE^2 - AB^2} = \frac{7\sqrt{3}}{3} \approx 4$$

D'après le théorème d'Al-Kashi, dans le triangle ADB, avec $a = DB$, $d = AB$ et $b = AD$:

$$a = \sqrt{d^2 + b^2 - 2db \times \cos \frac{\pi}{6}} \approx 3,5$$

Donc, le chemin a une longueur d'à peu près 7,5

Exercice 101

D'Après le théorème d'Al-Kashi, dans le triangle ABC, avec $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$:

$$\widehat{I} = \cos^{-1} \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \approx 39^\circ$$

$$[CH] = \sin 39^\circ \times [AC] \approx 3,7$$

$$\text{Aire}_{ABC} = \frac{bh}{2} \approx 15$$

Exercice 108

On cherche d'abord la longueur de ST.

D'Après le théorème d'Al-Kashi, dans le triangle RST, avec $r = ST$, $s = RT$ et $t = RS$:

$$r^2 = s^2 + t^2 - 2st \times \cos \widehat{TRS}$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt{s^2 + t^2 - 2st \times \cos 45^\circ}$$

$$\Leftrightarrow ST \approx 3,6$$

On définit le point I tel que $TI = IS$

$$RT^2 + RS^2 = 2RI^2 + \frac{TS^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow RI = \sqrt{\frac{1}{2} \left(RT^2 + RS^2 - \frac{TS^2}{2} \right)}$$

$$\Leftrightarrow RI \approx 4,2$$

Exercice 109

a) Pour BP :

$$\widehat{BAP} = \widehat{BAC} - 15$$

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABC, rectangle en B :

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} \approx 10,8$$

D'après le théorème d'Al-Kashi dans le triangle ABC, avec $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos \widehat{BAC}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{BAC} = \cos^{-1} \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)$$

$$\Leftrightarrow \widehat{BAC} \approx 21,7^\circ$$

$$\text{Donc, } \widehat{BAP} \approx 6,8^\circ$$

D'après le théorème d'Al-Kashi dans le triangle ABP, avec $a = BP$, $b = AP$ et $p = AB$:

$$a = \sqrt{b^2 + p^2 - 2bp \times \cos 6,8^\circ}$$

$$\Leftrightarrow BP \approx 7,0$$

Pour DP :

$$\widehat{PAD} = 90 - 6,8 = 83,2^\circ$$

D'après le théorème d'Al-Kashi dans le triangle ADP, avec $a = DP$, $d = AP$ et $p = AD$:

$$a = \sqrt{d^2 + p^2 - 2dp \times \cos 83,2^\circ}$$

$$\Leftrightarrow DP \approx 4,7$$

b) Pour CP :

D'après le théorème d'Al-Kashi dans le triangle ACP, avec $a = CP$, $c = AP$ et $p = AC$:

$$a = \sqrt{c^2 + p^2 - 2cp \times \cos 15^\circ}$$

$$\Leftrightarrow CP \approx 7,9$$

Exercice 112

D'après le théorème d'Al-Kashi dans le triangle IJK, avec $i = JK$, $j = IK$ et $k = IJ$:

$$i^2 = j^2 + k^2 - 2jk \times \cos \hat{I}$$

$$\Leftrightarrow i = \sqrt{j^2 + k^2 - 2jk \times \cos \hat{I}}$$

$$\Leftrightarrow JK \approx 15,7$$

$$\hat{J} = \cos^{-1} \left(\frac{i^2 + k^2 - j^2}{2ik} \right)$$

$$\Leftrightarrow \hat{J} \approx 9,6^\circ$$

Donc, $\hat{K} = 50,5^\circ$

Exercice 114

a) Le triangle PRR' est isocèle si et seulement si $PR = PR'$.

$$PR^2 + QR^2 = 2RR' + \frac{PQ^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow RR' = \sqrt{\frac{1}{2} \left(PR^2 + QR^2 - \frac{PQ^2}{2} \right)}$$

$$\Leftrightarrow RR' = 5$$

$[RR'] = [PR]$, donc PRR' est bien isocèle.

b) P' appartient au cercle si et seulement si $[QP'] = [QP]$.

$$\text{Or, } [QP'] = \frac{\sqrt{97}}{2} \approx 4,9 \quad \text{et} \quad [QP] = 12$$

Exercice 142

1. D'Après le théorème d'Al-Kashi dans le triangle QNZ, avec $q = NZ$, $n = QZ$ et $z = QN$.

$$\begin{aligned} q^2 &= n^2 + z^2 - 2nz \times \cos \widehat{NQZ} \\ \Leftrightarrow q &= \sqrt{n^2 + z^2 - 2nz \times \cos \widehat{NQZ}} \\ \Leftrightarrow NZ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

2. a) Dans un triangle isocèle, la hauteur coupe la base en son milieu, de plus,

$$\begin{aligned} \widehat{HQZ} &= \sin^{-1} \left(\frac{HZ}{QZ} \right) \\ \Leftrightarrow \widehat{HQZ} &= \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right) \\ \Leftrightarrow \widehat{HQZ} &= 15^\circ \end{aligned}$$

$$\text{b) } \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{c) } HQ = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Exercice 144

- a) D'après la loi des Sinus dans le triangle DEF,

$$\frac{\sin \widehat{D}}{d} = \frac{\sin \widehat{E}}{e} = \frac{\sin \widehat{F}}{f} \quad \text{De plus, } \widehat{F} = 97^\circ$$

$$\text{D'où } e = \frac{\sin \widehat{E} \times f}{\sin \widehat{F}} \approx 3,0 \quad d = \frac{\sin \widehat{D} \times f}{\sin \widehat{F}} \approx 2,3$$

- b) D'après la loi des Sinus dans le triangle GHK,

$$\frac{\sin \widehat{K}}{k} = \frac{\sin \widehat{G}}{g} = \frac{\sin \widehat{H}}{h} \quad \text{De plus, } \widehat{G} = 105^\circ$$

$$\text{D'où } k = \frac{\sin \widehat{K} \times g}{\sin \widehat{G}} \approx 7,3 \quad h = \frac{\sin \widehat{H} \times g}{\sin \widehat{G}} \approx 5,2$$

Exercice 146

Je ne sais pas résoudre le problème sans faire recours à la loi des Sinus, vue en Enseignement Scientifique.^a

On trouve $\widehat{R} = 180 - 30 - 45 = 105^\circ$

$$\text{D'après la loi des Sinus : } \frac{\sin \widehat{A}}{a} = \frac{\sin \widehat{R}}{r} = \frac{\sin \widehat{B}}{b}$$

$$\text{D'où : } a = \frac{\sin \widehat{A} \times r}{\sin \widehat{R}} \approx 2,6 \quad \text{et} \quad b = \frac{\sin \widehat{B} \times r}{\sin \widehat{R}} \approx 3,7$$

a. je viens de voir que l'on peut utiliser la loi des sinus, démontrée dans l'exercice 143