Chapitre III

Dénombrement et Combinatoire

I. Parties d'un Ensemble

A. Définition

E étant un ensemble, la notation $\subset$ signifie "Inclus Dans".

$$A \subset E$$

C'est-à-dire que tout élément de A appartient à E.
On dit alors que A est une partie, ou sous-ensemble de E.
L'Ensemble vide, noté $\varnothing$ est une partie de tout ensemble.
L'Ensemble des parties de E est noté $\mathscr{P}(E)$.

1. Exemple

Si $E = \{x; y\}$ est un ensemble de deux éléments :

$$\mathscr{P}(E) = \Big\{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{x; y\}\Big\}$$

B. Définition

Un ensemble fini est un ensemble dont le nombre d'éléments est fini.

C. Définition

On appelle cardinal, noté "Card", le nombre d'éléments d'un ensemble fini ou d'une partie / sous-ensemble.

1. Exemple

Si un ensemble E possède n éléments, alors on peut noter $\mathrm{Card}(E) = n$.
Pour toute partie $A \subset E$, $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(E)$.

D. Propriété (Principe Additif)

Si A et B sont deux parties quelconques d'un ensemble fini, E, alors :

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$$

De plus, si $A_1, A_2, \dots, A_p$ sont p parties deux à deux disjointes d'un ensemble fini, alors :

$$\mathrm{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p) = \mathrm{Card}(A_1) + \mathrm{Card}(A_2) + \dots + \mathrm{Card}(A_p)$$

E. Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}$, et E un ensemble tel que $\mathrm{Card}(E) = n$. Alors, E possède 2^n parties. Autrement dit :

$$\mathrm{Card}(\mathscr{P}(E)) = 2^n$$

1. Démonstration par Récurrence

a. Initialisation

Pour $n = 0$, $E = \varnothing$, donc la seule partie de E est $\{\varnothing\}$ et $1 = 2^0$.

b. Hérédité

Supposons que tout ensemble à k élément, où k est un certain entier naturel, admet 2^k parties.

Alors, soit E, un ensemble à $k+1$ éléments.

Soit x, un élément de E.

Alors, il y a deux familles de parties de E, celles qui contiennent x et celles qui ne le contiennent pas.

Or $E \setminus \{x\}$ est un ensemble à k éléments, il y a donc 2^k parties de E qui ne contiennent pas x.

En adjoignant x à toutes ces parties, on obtient toutes les parties qui contiennent x, donc il y en a également 2^k.

Ainsi, le nombre de parties de E est de $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ $\square$

II. Produit Cartésien d'Ensembles

A. Définition

- E et F étant deux ensembles, le produit cartésien $E \times F$ est l'ensemble de couples $(a;b)$, où $a \in E$ et $b \in F$.
- E, F et G étant trois ensembles, le produit cartésien $E \times F \times G$ est l'ensemble des triplets $(a;b;c)$ où $a \in E$, $b \in F$ et $c \in G$.

1. Cas Général

- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ est l'ensemble des n-uplets $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ où $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$, …, $a_n \in E_n$.

B. Notations

$E \times E$ se note E^2, $\overbrace{E \times E \times \cdots \times E}^{k \text{ fois}}$ se note E^k.

C. Exemples

Soit $E = \{a;b;c\}$ et $F = \{1;2\}$
- $E \times F = \{(a;1);(a;2);(b;1);(b;2);(c;1);(c;2)\}$
- $F \times F = \{(1;1);(1;2);(2;1);(2;2)\}$
- $(a;b;b;a;c)$ est un 5-uplet d'élément de E, il appartient à E^5

D. Propriété

Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont n ensembles finis :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \cdots \times \text{Card}(E_n)$$

1. Cas Particulier

Si E est un ensemble fini, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\text{Card}(E^k) = \big(\text{Card}(E)\big)^k$$

2. Exemples

Dans les exemples précédents :
- $\text{Card}(E \times F) = 6 = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$
- $\text{Card}(F^2) = 4 = 2^2 = \big(\text{Card}(F)\big)^2$

III. Permutations

A. Définition

Soit E, un ensemble à n éléments, une permutation est un n-uplet d'éléments distincts de E.

Autrement dit, une permutation est une façon d'ordonner les n éléments de E.

1. Exemple

On considère l'ensemble $G = \{a\,;b\,;c\}$
Ses permutations sont :

$$(a\,;b\,;c),\ (a\,;c\,;b),\ (b\,;a\,;c),\ (b\,;c\,;a),\ (c\,;a\,;b),\ (c\,;b\,;a)$$

G admet donc 6 permutations.

B. Propriété

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$

1. Remarque

$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$
$n!$ est le produit de tous les entiers de 1 à n.
$n!$ se lit "factorielle de n".

2. Explication

On peut considérer que faire une permutation c'est faire un tirage sans remise des n éléments de E. Il y n choix pour le premier élément, $n-1$ pour le deuxième et ainsi de suite.

3. Démonstration par Récurrence

a. Initialisation

Un ensemble à un élément admet une permutation, et $1! = 1$.

b. Hérédité

Supposons que tout ensemble à n élément (n fixé) admette $n!$ permutations.

Soit E, un ensemble à $n+1$ éléments.
On choisit un élément x de E.
Dans chacune des permutations des n éléments restants, il y $n+1$ positions où insérer x.

Ainsi, le nombre de permutations de E est $(n+1) \times n! = (n+1)!$ $\square$

IV. Combinaisons

Dans tout ce sous-chapitre, E est un ensemble à n éléments et p est un entier naturel tel que $p \leq n$.

A. Définition

Une combinaison de p éléments de E est une partie de E possédant p éléments.

1. Remarque

L'Ordre des éléments n'a pas d'importance, les éléments sont distincts.

B. Propriété

Le nombre de combinaisons à p éléments de E est égal à $\binom{n}{p}$, où :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}$$

$\binom{n}{p}$ est appelé coefficient binomial et il se lit "p parmi n".

1. Explication

Lorsqu'on choisit p éléments dans un ensemble à n éléments, on a n choix pour le premier, $n-1$ choix pour le deuxième, etc. mais ainsi, les p éléments sont ordonnés.

On divise donc par le nombre de permutations de p éléments, c'est-à-dire $p!$

2. Cas Particuliers

$\binom{n}{0} = 1$ La seule partie de E à 0 élément est $\varnothing$.

$\binom{n}{n} = 1$ La seule partie de E à n éléments est E.

$\binom{n}{1} = n$ Il y à n parties de E à 1 élément.

C. Propriété : Symétrie

Choisir p, c'est ne pas choisir $n-p$:

$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$$

Démonstration Alternative :

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$$

D. Propriété : Relation de Pascal

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

1. Démonstration

Soit E, un ensemble à $n+1$ éléments (on va compter le nombre de parties de E à $p+1$ éléments).

Soit x un élément de E.

Alors il y a deux "familles" de parties : celles qui contiennent x et celles qui ne le contiennent pas.

Or $E \setminus \{x\}$ contient n éléments.

Donc il y a $\binom{n}{p}$ à p éléments de $\mathrm{E} \setminus \{x\}$.

En leur adjoignant x, on obtient toutes les parties à $p+1$ éléments qui contiennent x.

Il y a $\binom{n}{p+1}$ parties de E qui ne contiennent pas x. (On choisit $p+1$ éléments dans $\mathrm{E} \setminus \{x\}$ qui contient n éléments).

E. Triangle de Pascal

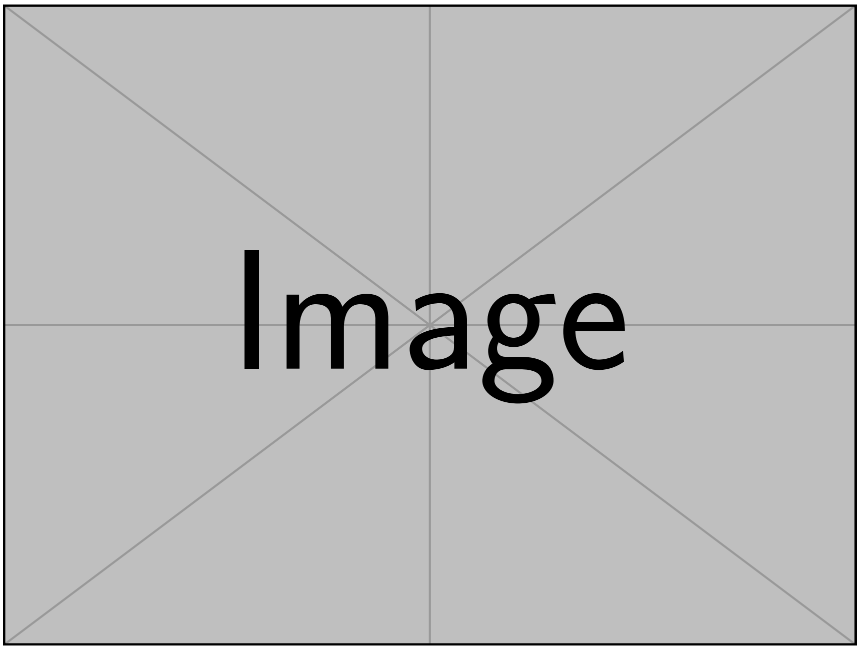

Figure 3.1. – Représentation du Triangle de Pascal

F. Propriété

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$