Chapitre XV

Opérations sur les Variables Aléatoires

I. Rappels

Soit Ω l'univers d'une experience aléatoire.

Une variable aléatoire X est une fonction qui à tout élément de Ω associe un nombre réel.

A. Exemple

On tire deux fois une pièce : $\Omega = \{ \text{PP}, \text{PF}, \text{FP}, \text{FF} \}$.

Soit X la variable aléatoire définie sur Ω qui donne le nombre de « pile » obtenus.

Soit G la variable aléatoire égale au gain suivant :

— Deux faces identiques (PP et FF) font gagner £ 2.

— Deux faces différentes (PF et FP) font perdre £ 2.

Les lois de probabilités des variables aléatoires X et G sont :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

g_i	-2	2
$P(G = g_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

FIGURE 15.1. – Lois de Probabilité de X et G

B. Définition

L'espérance de la variable aléatoire X est le réel :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

L'espérance est une moyenne, les probabilités jouent le role de fréquences.

Dans notre exemple, $E(X) = 1$ et $E(G) = 0$.

C. DÉFINITION

La variance de la variable aléatoire X est le réel :

$$\mathrm{V(X)} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathrm{E(X)})^2 \, \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$$

C'est la moyenne des écarts au carré.

D. DÉFINITION

L'écart-type de la variable aléatoire X est le réel :

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{V(X)}}$$

E. THÉORÈME

$$\mathrm{V(X)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i) - (\mathrm{E(X)})^2 = \mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right) - (\mathrm{E(X)})^2$$

La variance est aussi la moyenne des valeurs au carré moins la moyenne au carré.

1. DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned}
\mathrm{V(X)} &= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \mathrm{E(X)}^2\right) p_i \qquad \left(\mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i) = p_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - 2x_i \mathrm{E(X)} + (\mathrm{E(X)})^2\right) p_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 p_i\right) - 2\mathrm{E(X)} \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + (\mathrm{E(X)})^2 \sum_{i=1}^{n} p_i \\
&= \mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right) - 2\,(\mathrm{E(X)} \times \mathrm{E(X)}) + (\mathrm{E(X)})^2 \times 1 \\
&= \mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right) - (\mathrm{E(X)})^2 \quad \square
\end{aligned}$$

II. Opérations sur les Variables Aléatoires

A. Changement affine

1. Théorème

Si X est une variable aléatoire et a et b sont deux réels :

$$(1) \quad \mathrm{E}(a\mathrm{X}+b) = a\mathrm{E}(\mathrm{X})+b$$

$$(2) \quad \mathrm{V}(a\mathrm{X}+b) = a^2\mathrm{V}(\mathrm{X})$$

a. Démonstrations

On note p_i la probabilité $\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_i)$ pour alléger les notations.

$$\begin{aligned}
(1)\ \mathrm{E}(a\mathrm{X}+b) &= \sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)\,p_i \\
&= a\sum_{i=1}^{n}x_i p_i + b\sum_{i=1}^{n}p_i \\
&= a\mathrm{E}(\mathrm{X})+b \quad \square \\
(2)\ \mathrm{V}(a\mathrm{X}+b) &= \mathrm{E}\left((a\mathrm{X}+b)^2\right) - (\mathrm{E}(a\mathrm{X}+b))^2 \\
&= \mathrm{E}\left(a^2\mathrm{X}^2+2a\mathrm{X}b+b^2\right) - (\mathrm{E}(a\mathrm{X}+b))^2 \\
&= a^2\mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right)+2ab\mathrm{E}(\mathrm{X})+b^2-a^2\left(\mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^2-2ab\mathrm{E}(\mathrm{X})-b^2 \\
&= a^2\left(\mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right)-(\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2\right) \\
&= a^2\mathrm{V}(\mathrm{X}) \quad \square
\end{aligned}$$

2. Théorème

Si X est une variable aléatoire et a et b sont deux réels :

$$\sigma(a\mathrm{X}+b) = |a|\sigma(\mathrm{X})$$

a. Démonstration

$$\begin{aligned}
\sigma(a\mathrm{X}+b) &= \sqrt{\mathrm{V}(a\mathrm{X}+b)} \\
&= \sqrt{a^2\mathrm{V}(\mathrm{X})} \\
&= |a|\sigma(\mathrm{X}) \quad \square
\end{aligned}$$

3. Exemple

Dans le jeu précédent (deux tirages de pièce), si X' est la variable aléatoire qui donne le triple de nombre de « pile », $\mathrm{X}' = 3\mathrm{X}$ et donc $\mathrm{E}\left(\mathrm{X}'\right) = 3\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 3$.

B. Somme de Variables Aléatoires

Dans cette sous-partie, X et Y sont deux variables aléatoires prenant respectivement les valeurs $\{\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ \dots\ ,\ a_n\ \}$ et $\{\ b_1\ ,\ b_2\ ,\ \dots\ ,\ b_m\ \}$, où n et m sont des entiers naturels non nuls.

1. Définition

La variable aléatoire $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$ prend tous les valeurs $a_i + b_j$ possibles (où $1 \leqslant i \leqslant n$ et $q \leqslant j \leqslant m$).

Pour toute valeur de w, $\mathrm{P}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}=w) = \sum_{a_i+b_j=w} \mathrm{P}\left(\{\mathrm{X}=a_i\} \cap \{\mathrm{Y}=b_j\}\right)$ c'est-à-dire la somme des probabilités $\mathrm{P}\left(\{\mathrm{X}=a_i\} \cap \{\mathrm{Y}=b_j\}\right)$ telles que $a_i + b_j = w$ (toutes les sommes égales à w).

2. Théorème (admis)

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}) + \mathrm{E}(\mathrm{Y})$$

3. Rappel

A et B sont deux événements indépendants si et seulement si $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{B})$.

4. Définition

Deux variables aléatoires sont indépendantes si elles donnent des résultats de deux expériences aléatoires indépendantes.

5. Propriété

Si X et Y indépendantes :

$$\mathrm{P}\left(\{\mathrm{X}=a_i\} \cap \{\mathrm{Y}=b_j\}\right) = \mathrm{P}(\mathrm{X}=a_i) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y}=b_j)$$

6. Théorème (admis)

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même univers :

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}) = \mathrm{V}(\mathrm{X}) + \mathrm{V}(\mathrm{Y})$$

III. Applications

A. Loi Binomiale

1. Propriété

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$:

$$\mathrm{E(X)} = np \qquad \mathrm{V(X)} = np(1-p) \qquad \sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{np(1-p)}$$

a. Démonstration

X est la somme de n variables aléatoires indépendantes X_1 , X_2 ,..., X_n , suivant la loi de Bernoulli.

Pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\mathrm{E}(\mathrm{X}_i) = p$ et $\mathrm{V}(\mathrm{X}_i) = p(1-p)$.

Ainsi, $\mathrm{E(X)} = \mathrm{E}(\mathrm{X}_1) + \mathrm{E}(\mathrm{X}_2) + \cdots + \mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = np$ et idem pour V(X).
Enfin, $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{V(X)}}$

B. Somme et Moyenne d'un Échantillon (généralisation)

1. Définition

Un échantillon de taille n d'une loi de probabilité est une liste $\{\mathrm{X}_1 , \mathrm{X}_2 , \ldots , \mathrm{X}_n\}$ de n variables aléatoires identiques et indépendantes qui suivent toutes cette loi.

2. Propriété

Si on note X une variable aléatoire suivant la loi de probabilité de cet échantillon, la variable aléatoire « somme » de cet échantillon $\mathrm{S}_n = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \cdots + \mathrm{X}_n$ vérifie :

$$(1)\ \mathrm{E}(\mathrm{S}_n) = n\mathrm{E(X)} \qquad (2)\ \mathrm{V}(\mathrm{S}_n) = n\mathrm{V(X)} \qquad (3)\ \sigma(\mathrm{S}_n) = \sqrt{n}\,\sigma(\mathrm{X})$$

a. Démonstration

$$\begin{aligned}(1)\quad \mathrm{E}(\mathrm{S}_n) &= \mathrm{E}(\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \cdots + \mathrm{X}_n)\\ &= \mathrm{E}(\mathrm{X}_1) + \mathrm{E}(\mathrm{X}_2) + \cdots + \mathrm{E}(\mathrm{X}_n)\\ &= n\mathrm{E(X)} \quad \text{Car les variables sont identiques}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(2)\quad V(S_n) &= V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\\
&= V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)\\
&= nV(X)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3)\quad \sigma(S_n) &= \sqrt{V(S_n)}\\
&= \sqrt{nV(X)}\\
&= \sqrt{n}\,\sigma(X)
\end{aligned}
$$

3. Propriété

Si X est une variable aléatoire suivant la loi de probabilité de cet échantillon, la variable aléatoire « moyenne » de cet échantillon
$M_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} = \frac{S_n}{n}$ vérifie :

$$(1)\ E(M_n) = E(X) \qquad (2)\ V(M_n) = \frac{V(X)}{n} \qquad (3)\ \sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$$

a. Démonstration

$$
\begin{aligned}
(1)\quad E(M_n) &= E\left(\frac{S_n}{n}\right)\\
&= nE\left(\frac{X}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n} \times nE(X) \qquad \text{changement affine de } \tfrac{1}{n}\\
&= E(X)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)\quad V(M_n) &= V\left(\frac{S_n}{n}\right)\\
&= nV\left(\frac{X}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n^2} \times nV(X)\\
&= \frac{V(X)}{n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3)\quad \sigma(M_n) &= \sqrt{V(M_n)}\\
&= \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}
\end{aligned}
$$