Chapitre XIX

Complément sur la Trigonométrie

I. RAPPELS

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$
$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$
$$\sin(x) = -\sin(-x)$$
$$\cos(x) = \cos(-x)$$

II. FORMULES D'ADDITION ET DUPLICATION

A. FORMULE D'ADDITION

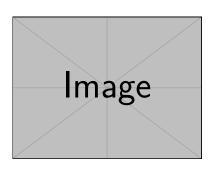


FIGURE 19.1. – Représentation de \vec{u} et \vec{b} dans le Cercle Trigonométrique

$$\begin{aligned} ||\vec{u}|| &= ||\vec{v}|| = 1\\ \left(\overrightarrow{OI}; \vec{u}\right) &= a\\ \left(\overrightarrow{OI}; \vec{v}\right) &= b\\ \vec{u} {\cos a \atop \sin a}\\ \vec{v} {\cos a \atop \sin a} \end{aligned}$$
Or, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos a$

Or, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

Mais,
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$$
 avec $(\vec{u}; \vec{v}) = a - b$ ou $b - a$

Ainsi:

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

1. Exemple

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

Autres Formules:

$$\cos(a+b) = \cos\left(a - (-b)\right) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right)$$

$$= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a-b)\right)$$

$$= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - (-b)\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(-b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(-b)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

B. FORMULE DE DUPLICATION (CAS b = a)

$$\sin(2a) = \sin(a)\cos(a) + \cos(a)\sin(a)$$

$$= 2\sin(a)\cos(a)$$

$$\cos(2a) = \cos(a)\cos(a) - \sin(a)\sin(a)$$

$$= \cos^{2}(a) - \sin^{2}(a)$$

$$= 2\cos^{2}(a) - 1$$

$$= 1 - 2\sin^{2}(a)$$

$$2\cos^{2}(a) = 1 - 2\sin^{2}(a)$$

$$\iff \cos^{2}(a) = \frac{\cos(2a) + 1}{2}$$

$$\iff \sin^{2}(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

III. DÉRIVABILITÉ DE COSINUS ET SINUS

A. Préambule

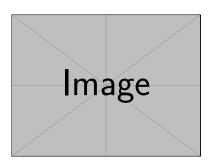


FIGURE 19.2. - Représentation de la Situation

On veut encadrer l'aire entre OHM et OIT.

 $\mathbf{M} \in \left] \; 0 \; ; \; \frac{\pi}{2} \; \right[\; \text{est associ\'e au r\'eel} \; x \; \text{sur le cercle trigonom\'etrique}.$

H est le projeté orthogonal de M sur (OI).

T est l'intersection de [OM) et la tangente à $\mathscr C$ en I.

On encadre l'aire du secteur angulaire du disque entre les aires des triangles OHM et OIT.

— Secteur Angulaire:

Angle	2π	х
 Aire	$\pi \times 1^2$	$\frac{x}{2}$

FIGURE 19.3. – Tableau de l'Aire Angulaire du Disque en Fonction de OHM

— OHM:

$$\mathcal{A}_{\text{OHM}} = \frac{\cos(x)\sin(x)}{2}$$

- OIT:

On utilise le théorème de Thalès dans les triangles OHM et OIT :

$$\frac{HM}{IT} = \frac{OH}{OI}$$

$$\frac{\sin(x)}{IT} = \frac{\cos(x)}{1}$$

$$IT = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$$

$$\mathcal{A}_{OIT} = \frac{\tan(x)}{2} = \frac{\sin(x)}{2\cos(x)}$$

Donc:

$$\mathcal{A}_{OHM} \leq \mathcal{A}_{Secteur} \leq \mathcal{A}_{OIT}$$

$$\iff \frac{\cos(x)\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\sin(x)}{2\cos(x)}$$

$$\iff \cos(x)\sin(x) \leq x \leq \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\iff \cos(x) \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\iff \frac{1}{\cos(x)} \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \cos(x)$$

Or:

$$\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1$$

D'après le Théorème des Gendarmes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Cherchons aussi $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}$:

$$\frac{\cos(x) - 1}{x} = \frac{\cos\left(\frac{2x}{2}\right) - 1}{x}$$
$$= \frac{1 - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1}{x}$$
$$= -\sin\left(\frac{x}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}$$

Or:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = 1 \quad \text{(composition)}$$

$$\lim_{x \to 0} -\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

Donc, par produit:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$$

B. Dérivabilité

Soit un réel a et h non nul :

$$\frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} = \frac{\sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h) - \sin(a)}{h}$$
$$= \frac{\sin(a)(\cos(h) - 1)}{h} + \frac{\cos(a)\sin(h)}{h}$$

Or:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{h} = 0 \qquad \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

Donc:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} = \cos(a) \iff \sin' = \cos \quad \Box$$

D'autre part:

$$\frac{\cos(a+h) - \cos(a)}{h} = \frac{\cos(a)\cos(h) - \sin(a)\sin(h) - \cos(a)}{h}$$
$$= \frac{\cos(a)(\cos(h) - 1)}{h} - \frac{\sin(a)\sin(h)}{h}$$

Or:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}=0\qquad \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1$$

Donc:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(a+h) - \cos(a)}{h} = -\sin(a) \iff \cos' = -\sin \quad \Box$$