

Chapitre IV

Fonction Logarithme Népérien

I. DÉFINITION DE LA FONCTION LN

A. THÉORÈME-DÉFINITION

Pour tout réel x strictement positif, il existe un unique réel tel que :

$$e^a = x$$

Le nombre a est appelé logarithme népérien de x .

La fonction qui à x associe a est appelée « fonction logarithme népérien », et se note \ln .

Ainsi :

$$e^a = x \iff a = \ln(x) \quad \text{pour } x > 0$$

B. DÉMONSTRATION

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} .

De plus :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

D'après le corollaire du Théorème des Valeurs Intermédiaires, pour tout nombre $k \in]0 ; +\infty[$, il existe un unique réel $a \in \mathbb{R}$ tel que $e^a = k$. \square

C. REMARQUES

La fonction \ln est la fonction réciproque de \exp .

On déduit que :

$$\ln(1) = 0 \quad \text{et} \quad \ln(e) = 1$$

D. PROPRIÉTÉS

$$\forall x \in]0 ; +\infty[, \quad e^{\ln(x)} = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(e^x) = x$$

II. ÉTUDE DE LA FONCTION LN

A. CONTINUITÉ, DÉRIVABILITÉ

1. PROPRIÉTÉ

- (1) La fonction \ln est *continue* sur $]0; +\infty[$
- (2) La fonction \ln est *dérivable* sur $]0; +\infty[$ et $\forall x \in]0; +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
- (3) La fonction \ln est *strictement croissante* sur $]0; +\infty[$

A. DÉMONSTRATION (2) (FACILE)

Admettre que si f et u sont dérivables, $f(u(x))' = u'(x) \times f(u(x))$.

$$(e^{\ln(x)})' = \ln'(x) \times e^{\ln(x)} = \ln'(x) \times x$$

$$(x)' = 1$$

$$\ln'(x) \times x = 1 \iff \ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \square$$

B. DÉMONSTRATION (2) (COMPLÈTE)

On étudie le taux d'accroissement, en admettant que \ln est continue :

$$\frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h}$$

Posons :

$$\begin{cases} u = \ln(x+h) & \text{donc} & x+h = e^u \\ v = \ln(x) & \text{donc} & x = e^v \end{cases} \quad \text{et} \quad k = u - v$$

$$\begin{aligned} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} &= \frac{k}{e^u - e^v} \quad \text{or} \quad \lim_{h \rightarrow 0} k = 0 \\ &= \frac{1}{\frac{e^{v+h} - e^v}{k}} \end{aligned}$$

Or, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{v+h} - e^v}{h}$ est l'expression de la dérivée de e . La dérivée de e^v est e^v :

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^v} &= \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} &= \frac{1}{x} \quad \square \end{aligned}$$

2. PROPRIÉTÉ

Soit u , une fonction dérivable et strictement positive sur I .

Alors, la fonction $f : x \mapsto \ln(u(x))$ et $f' : x \mapsto \frac{u'}{u}$.

A. EXEMPLE

Soit f définie sur \mathbb{R} , par $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

f est dérivable en \mathbb{R} et $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

B. LIMITES

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$$

1. DÉMONSTRATION

Soit $M > 0$, en posant $A = e^M$, $\exists A > 0$ tel que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, x > A \Rightarrow \ln(x) > M$$

En effet, $x > A \iff x > e^M$.

Comme \ln est strictement croissante :

$$\ln(x) > \ln(e^M)$$

$$\ln(x) > M \quad \square$$

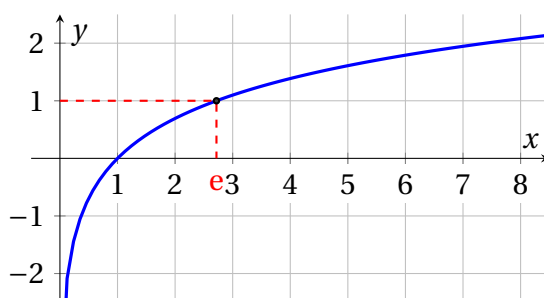
C. REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

FIGURE 4.1. – Représentation Graphique de la Fonction \ln

III. PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DE LA FONCTION LN

A. PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE

Quels que soient les réels a et b , strictement positifs,

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

1. DÉMONSTRATION

Rappel :

$$X = Y \iff e^X = e^Y$$

$$e^{\ln(ab)} = ab$$

$$e^{\ln(a) + \ln(b)} = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = a \times b$$

Donc :

$$e^{\ln(ab)} = e^{\ln(a) + \ln(b)} \iff \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

B. CONSÉQUENCES

(1) Quels que soient les réels a et b , strictement positifs :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$$

1. DÉMONSTRATION (1)

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(a) = \ln\left(\frac{a}{b} \times b\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln(b)$$

D'où :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad \square$$

La deuxième égalité est le cas particulier où $a = 1$. \square

(2) Quels que soient les réels a_1, a_2, \dots, a_n , strictement positifs :

$$\ln(a_1 a_2 \cdots a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n)$$

2. DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCE (2)A. INITIALISATION

$$\ln(a_1) = \ln(a_1)$$

B. HÉRÉDITÉ

Supposons que, pour n nombres strictement positifs :

$$\ln(a_1 a_2 \cdots a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \ln(a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}) &= \ln(a_1 a_2 \cdots a_n) + \ln(a_{n+1}) \quad \text{Propriété Fond.} \\ &= \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n) + \ln(a_{n+1}) \quad \square \end{aligned}$$

(3) De plus, $\forall a \in]0; +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{\ln(a^n) = n \ln(a)}$$

3. DÉMONSTRATION (3)

— Dans le cas où n est positif, c'est le cas particulier :

$$\ln(a_1 a_2 \cdots a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n)$$

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$$

$$\ln(a^n) = \ln(a) + \ln(a) + \cdots + \ln(a) = n \ln(a) \quad \square$$

— Dans le cas où n est négatif, on prend $m = -n$

$$\ln(a^n) = \ln(a^{-m}) = \ln\left(\frac{1}{a^m}\right) = -\ln(a^m) = -m \ln(a) = n \ln(a) \quad \square$$

(4) Finalement, $\forall a, a > 0$:

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$$

4. DÉMONSTRATION (4)

$$\ln(a) = \ln(\sqrt{a^2}) = 2 \ln(\sqrt{a})$$

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a) \quad \square$$

IV. RÉSOLUTION D'INÉQUATIONS DU TYPE $a^n > M$ A. EXEMPLE

On sait que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$$

On cherche le plus petit entier n tel que $3^n > 1\,000$:

$$\begin{aligned} \ln(3^n) &> \ln(1\,000) \\ \Leftrightarrow n \ln(3) &> \ln(1\,000) \\ \Leftrightarrow n &> \frac{\ln(1\,000)}{\ln(3)} \approx 6,3 \end{aligned}$$

On trouve $n \geq 7$, 7 est le plus petit entier n tel que $3^n > 1\,000$.

B. EXEMPLE

On sait que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad (\text{car } 0 < \frac{1}{2} < 1)$$

On veut résoudre $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0,0001$:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) &\leq \ln(0,0001) \quad \ln \text{ strictement croissante} \\ \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{1}{2}\right) &\leq \ln(0,0001) \\ \Leftrightarrow n &\geq \frac{\ln(0,0001)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \approx 13,3 \end{aligned}$$

Donc, $n \geq 14$

V. LOGARITHME DÉCIMALA. DÉFINITION

La fonction logarithme décimal, notée \log , est définie sur $]0 ; +\infty[$, par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

B. PROPRIÉTÉS

De part de sa définition, la fonction \log a les mêmes propriétés algébriques et analytiques que la fonction \ln (dérivable, strictement croissante).

C. REMARQUE

La fonction \log est la fonction réciproque de $f : x \mapsto 10^x$.