

# Chapitre VIII

## Géométrie Vectorielle dans l'Espace

### I. VECTEURS DE L'ESPACE

La notion de vecteur se généralise à l'espace.

Le vecteur  $\vec{u}$  est caractérisé par un sens, une direction, et une norme, notée  $||\vec{u}||$ .

#### A. THÉORÈME

A, B, et C étant quatre points de l'espace, les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\vec{AB} = \vec{CD}$
- Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
- Les segments  $[AD]$  et  $[BC]$  ont le même milieu.

#### B. DÉFINITION

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si il existe un réel  $k$  tel que  $\vec{u} = k\vec{v}$  ou  $\vec{v} = k\vec{u}$  (Deux vecteurs colinéaires ont la même direction)

#### C. PROPRIÉTÉ

Toutes les opérations sur les vecteurs, en particulier la relation de Chasles sont identiques dans l'espace comme dans le plan.

#### D. THEOREME

A et B étant deux points distincts de l'espace,  $(AB)$  est l'ensemble des points M de l'espace tels que  $\vec{AM} = t\vec{AB}$ ,  $t \in \mathbb{R}$

$$(AB) = \{ M \in \mathcal{E}, \vec{AM} = t\vec{AB}, t \in \mathbb{R} \}$$

#### E. DÉFINITION

Le vecteur  $\vec{w}$  est une combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ , et  $\vec{s}$  s'il existe trois réels  $a$ ,  $b$ , et  $c$  tels que  $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{s}$

## II. VECTEURS COPLANAIRES

### A. DÉFINITION

Des vecteurs sont coplanaires s'ils admettent des représentants dont les extrémités sont dans un même plan.

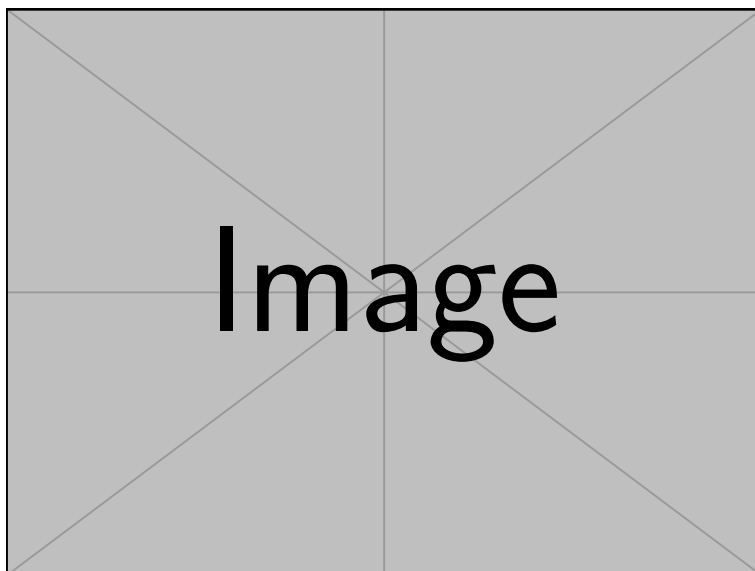


FIGURE 8.1. – Illustration de la Définition

Si  $O$  est un point quelconque et  $A$ ,  $B$ , et  $C$  sont tels que  $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ , et  $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$   
 $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ , et  $\vec{w}$  coplanaires  $\iff O, A, B$ , et  $C$  coplanaires

### B. THÉORÈME

$\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ , et  $\vec{w}$  étant trois vecteurs de l'espace avec  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non colinéaires,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ , et  $\vec{w}$  sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

On dit alors que  $\vec{w}$  est une combinaison linéaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$

1. DÉMONSTRATION

Soient O, A, B, et C quatre points tels que  $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$  et  $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non-colinéaires donc, O, A, et B sont non alignés, et (OAB) est un plan de base  $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

“  $\Rightarrow$  ” On suppose que  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ , et  $\vec{w}$  sont coplanaires. Alors,  $C \in (OAB)$ .

C admet donc des coordonnées  $(\alpha; \beta)$  dans la base  $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ .

C'est-à-dire  $\overrightarrow{OC} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}$  ou encore  $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$

“  $\Leftarrow$  ” On suppose que  $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$

Soit D le point de (OAB) de coordonnées  $(\alpha; \beta)$

Alors,  $\overrightarrow{OD} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}$

$$= \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{w} = \overrightarrow{OC}$$

Donc, D = C, les points sont confondus, et comme  $C \in (OAB)$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ , et  $\vec{w}$  sont coplanaires.

2. THÉORÈME : CARACTERISATION VECTORIELLE D'UN ESPACE

Si A, B, et C sont trois points non-alignés de l'espace, le plan (ABC) est l'ensemble des M tels que :

$$\overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB} + t' \overrightarrow{AC} \quad (t, t' \in \mathbb{R})$$

III. REPÈRE DANS L'ESPACEA. DÉFINITION

Un repère de l'espace est constitué d'un point appelé origine du repère (en général O) et d'un triplet de vecteurs non-coplanaires (en général  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ , et  $\vec{k}$ )

On le note  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

B. VOCABULAIRE

La droite  $(O; \vec{i})$  est appelée axe des abscisses.

La droite  $(O; \vec{j})$  est appelée axe des ordonnées.

La droite  $(O; \vec{k})$  est appelée axe des cotes.

C. COORDONNÉES DANS L'ESPACE1. THÉORÈME

Si  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est un repère, pour tout point M, il existe un unique triplet  $(x; y; z)$  de réels tels que  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , appelés coordonnées de M.

On note  $M(x; y; z)$

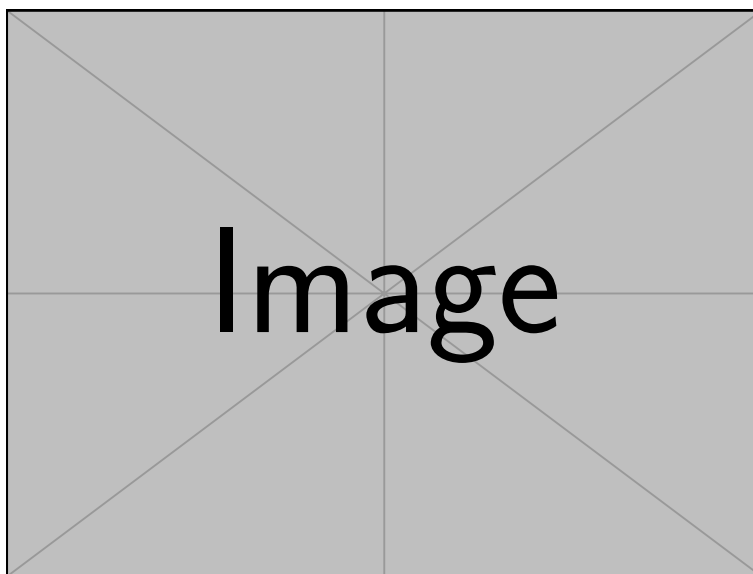
A. DÉMONSTRATION

FIGURE 8.2. – Démonstration du Théorème

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$$

Or  $M \in (O; \vec{i}; \vec{j})$  donc il a des coordonnées  $(x; y)$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

$$\overrightarrow{OM'} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$\overrightarrow{M'M}$  est colinéaire à  $\vec{k}$  (on a projeté dans sa direction). Il existe un réel  $z$  tel que  $\overrightarrow{M'M} = z\vec{k}$

$$\text{Donc, } \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \square$$

(On admet l'unicité)

2. THÉORÈME

Si dans un repère  $A(x_A; y_A; z_A)$  et  $B(x_B; y_B; z_B)$  sont deux points, le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Et I, le point du milieu de  $[AB]$  :

$$I \left( \frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

Dans un repère orthonormé, un vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  a pour norme :

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

3. THÉORÈME

Si I est le milieu de  $[AB]$ , pour tout M :

$$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$$

A. DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MI} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AI} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} \quad (\text{Chasles}) \end{aligned}$$