Chapitre XIII

Équations dans l'Espace

I. Représentation Paramétrique d'une Droite

Dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$, soit (d) la droite passant par un point $\mathrm{A}\left(x_{\mathrm{A}}\,;\,y_{\mathrm{A}}\,;\,z_{\mathrm{A}}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(a\,;\,b\,;\,c\right)$

Un point $\mathrm{M}\left(x\,;\,y\,;\,z\right)$ appartient à (d) si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\vec{u}$

C'est-à-dire : $(\mathrm{S})\begin{cases} x = x_{\mathrm{A}} + ta \\ y = y_{\mathrm{A}} + tb \\ z = z_{\mathrm{A}} + tc \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

A. Définition

Le système (S) est une représentation paramétrique de la droite (d). t est le paramètre de cette représentation.

1. Démonstration

Reprenons la situation précédente.

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix} x_{\mathrm{M}}-x_{\mathrm{A}} = x-x_{\mathrm{A}} \\ y_{\mathrm{M}}-y_{\mathrm{A}} = y-y_{\mathrm{A}} \\ z_{\mathrm{M}}-z_{\mathrm{A}} = z-z_{\mathrm{A}} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in (d) &\iff \overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\vec{u} \\ &\iff \begin{pmatrix} x - x_{\mathrm{A}} \\ y - y_{\mathrm{A}} \\ z - z_a \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x - x_{\mathrm{A}} = ta \\ y - y_{\mathrm{A}} = tb \\ z - z_{\mathrm{A}} = tc \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = x_{\mathrm{A}} + ta \\ y = y_{\mathrm{A}} + tb \\ z = z_{\mathrm{A}} + tc \end{cases} \end{aligned}$$

B. Exemple

La droite (d) passant par A $(2\,;0\,;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ a pour représentation paramétrique :

$$(d)\begin{cases} x = 2+t \\ y = -3t \\ z = -1+2t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Les points M $(0\,;\,6\,;\,-5)$ et N $(1\,;\,3\,;\,2)$ appartiennent-ils à (d) ?

— M : $\begin{cases} 0 = 2+t \\ 6 = -3t \\ -5 = -1+2t \end{cases}$ M $\in (d)$, car -2 est solution du système.

— N : $\begin{cases} 1 = 2+t \\ 3 = -3t \\ 2 = -1+2t \end{cases}$ N $\notin (d)$, car -1 est solution de (1) et (2) mais pas (3).

II. Équation Cartésienne de Plan

A. Rappel

La plan $\mathscr{P}$ qui passe par un point A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

B. Théorème

(1) L'ensemble des points M $\left(x\,;\,y\,;\,z\right)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$, où a, b, c et d sont quatre réels tels que a, b et c sont non nuls, est un plan de vecteur normal $\vec{n}$ $(a\,,\,b\,,\,c)$.

(2) Réciproquement : si $\vec{n}$ $(a\,,\,b\,,\,c)$ est un vecteur normal d'un plan $\mathscr{P}$, une équation cartésienne de ce plan est $ax + by + cz + d = 0$ où d est un réel.
Autrement dit, pour tout point M $\left(x\,;\,y\,;\,z\right)$ de $\mathscr{P}$ vérifie $ax + by + cz + d = 0$

1. DÉMONSTRATION

(1) Appelons $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M $\left(x\,;\ y\,;\ z \right)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ (on ne sait pas que c'est un plan)

Soit le vecteur $\vec{n}$ $(a\ ,\ b\ ,\ c)$

Supposons $a \neq 0$, prenons le point A $\left(\frac{-d}{a}\ ;\ 0\ ;\ 0 \right)$

Vérifions que $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$:

$$\mathrm{A} \in \mathscr{E} \iff a \times \frac{-d}{a} + b \times 0 + c \times 0 + \left(-a \times \frac{-d}{a} - b \times 0 - c \times 0 \right) = 0$$

$$\iff a \times \frac{-d}{a} - a \times \frac{-d}{a} = 0$$

C'est identique pour les points $\left(0\ ;\ \frac{-d}{b}\ ;\ 0 \right)$ ou $\left(0\ ;\ 0\ ;\ \frac{-d}{c} \right)$

Quel que soit M $\left(x\,;\ y\,;\ z \right) \in \mathscr{E}$, $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} = 0 \iff \begin{pmatrix} x-\frac{-d}{a} \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\iff ax+by+cz+d=0$$

Donc, tout point M de $\mathscr{E}$ vérifie $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} = 0$, donc appartient au plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. (c'est la caractérisation d'un plan) □

Ainsi, $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}$

(2) Soit A $\left(x_{\mathrm{A}}\ ;\ y_{\mathrm{A}}\ ;\ z_{\mathrm{A}} \right) \in \mathscr{P}$. Pour tout point M $\left(x\,;\ y\,;\ z \right)$ du plan $\mathscr{P}$ on calcule le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n}$ qui est nul par définition (voir le rappel) d'un plan de vecteur normal $\vec{n}$ $(a\,;\ b\,;\ c)$.

On trouve $a\left(x - x_{\mathrm{A}}\right) + b\left(y - y_{\mathrm{A}}\right) + c\left(z - z_{\mathrm{A}}\right) = 0$ et donc $ax+by+cz+d=0$, où $d = -ax_{\mathrm{A}} - by_{\mathrm{A}} - cz_{\mathrm{A}}$ □

Ainsi $\mathscr{P} \subset \mathscr{E}$

Comme $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}$ et $\mathscr{P} \subset \mathscr{E}$, $\mathscr{P} = \mathscr{E}$