

Chapitre II

Continuité des Fonctions d'une Variable Réelle

I. DÉFINITION

Soit f , définie sur un intervalle I , et soit a , un réel de I . La fonction f est *continue* si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

f est continue sur l'intervalle I , si et seulement si, quel que soit le réel $x \in I$, f est continue en x .

H.P. : $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in]a - \alpha ; a + \alpha[, f(x) \in]f(a) - \epsilon ; f(a) + \epsilon[$

A. EXEMPLE

La fonction inverse est continue sur $] -\infty ; 0[$, et sur $] 0 ; +\infty[$.

La fonction « Partie Entière » est définie sur \mathbb{R} , mais pas continue sur \mathbb{R} .

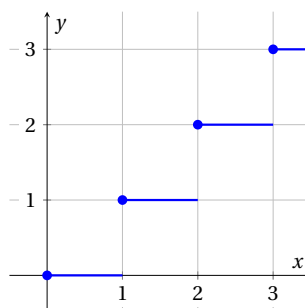


FIGURE 2.1. – Représentation Graphique de la Fonction « Partie Entière », continue sur $[n ; n + 1[$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

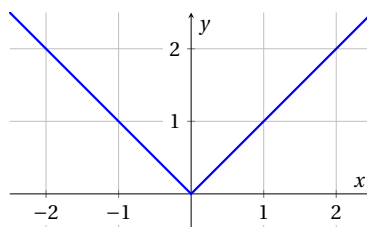


FIGURE 2.2. – Représentation Graphique de la Fonction Absolue, continue sur \mathbb{R}

B. PROPRIÉTÉ

La somme, le produit et la composée de deux fonctions continues est continue.
L'inverse d'une fonction continue est continue sur tout intervalle où elle ne s'annule pas.

$$f : x \mapsto x^2 \text{ continue}$$

$$g : x \mapsto \frac{1}{x^2} \text{ Définie sur } \mathbb{R}^*, \text{ continue sur }]-\infty ; 0[\text{ et }]0 ; +\infty[$$

II. THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

A. THÉORÈME

Si une fonction f est continue sur un intervalle $[a ; b]$ alors, pour tout réel $k \in [\min(f(a) ; f(b)) ; \max(f(a) ; f(b))]$, il existe *au moins* un réel $c \in [a ; b]$, tel que $f(c) = k$.

C'est-à-dire, pour tout réel k , compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in [a ; b]$, tel que $f(c) = k$.

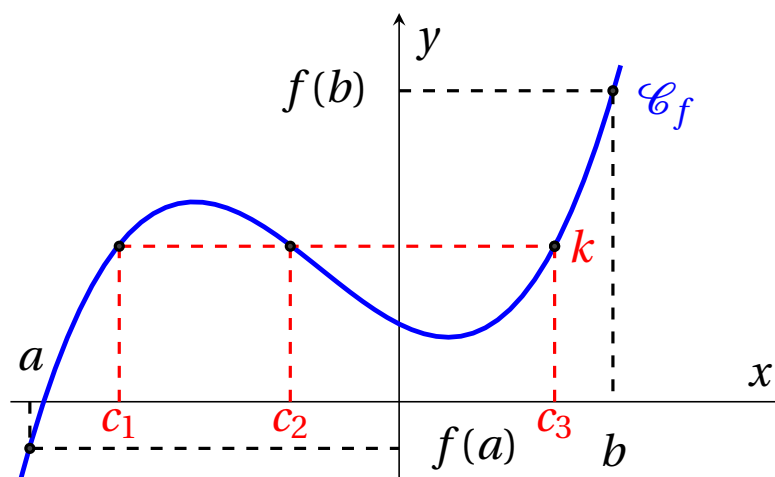


FIGURE 2.3. – Présentation du Théorème des Valeurs Intermédiaires

Pour tout k appartenant à $[f(b) ; f(a)]$, il existe au moins un réel $c \in [a ; b]$, tel que $f(c) = k$.

B. COROLLAIRE

Si une fonction f est *continue* et *strictement monotone* sur un intervalle $[a ; b]$, alors, pour tout $k \in [\min(f(a) ; f(b)) ; \max(f(a) ; f(b))]$, il existe un *unique* réel $c \in [a ; b]$, tel que $f(c) = k$.

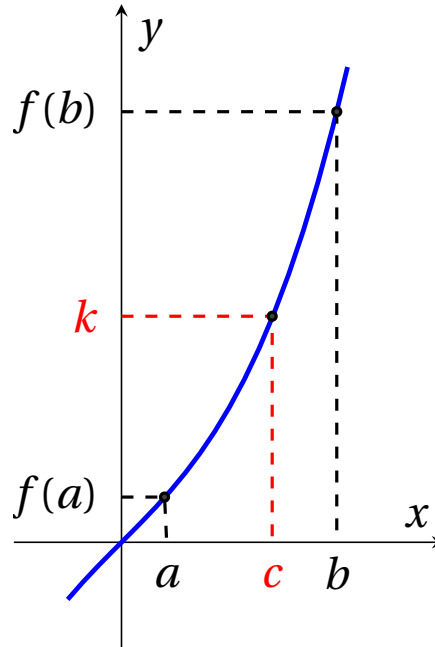


FIGURE 2.4. – Illustration du Corollaire du Théorème des Valeurs Intermédiaires

1. CAS PARTICULIER

Si une fonction f est continue sur un intervalle $[a ; b]$, et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, il existe au moins une solution à $f(x) = 0$, sur $[a ; b]$.