

Chapitre III

Dénombrement et Combinatoire

I. PARTIES D'UN ENSEMBLE

A. DÉFINITION

E étant un ensemble, la notation \subset signifie « inclus dans ».

$$A \subset E$$

C'est-à-dire que tout élément de A appartient à E.

On dit alors que A est une partie, ou sous-ensemble de E.

L'ensemble vide, noté \emptyset est une *partie* de tout ensemble.

L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

1. EXEMPLE

Si $E = \{x; y\}$ est un ensemble de deux éléments :

$$\mathcal{P}(E) = \left\{ \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x; y\} \right\}$$

B. DÉFINITION

Un ensemble fini est un ensemble dont le nombre d'éléments est fini.

C. DÉFINITION

On appelle cardinal, noté « Card », le nombre d'éléments d'un ensemble fini d'une partie (ou sous-ensemble).

1. EXEMPLE

Si un ensemble E possède n éléments, alors on peut noter $\text{Card}(E) = n$.

Pour toute partie $A \subset E$, $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(E)$.

D. PROPRIÉTÉ (PRINCIPE ADDITIF)

Si A et B sont deux parties quelconques d'un ensemble fini E, alors :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

De plus, si A_1, A_2, \dots, A_p sont p parties *deux à deux disjointes* d'un ensemble fini, alors :

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \dots + \text{Card}(A_p)$$

E. PROPRIÉTÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$, et E un ensemble tel que $\text{Card}(E) = n$. Alors, E possède 2^n parties.
Autrement dit :

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$$

1. DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCE

A. INITIALISATION

Pour $n = 0$, $E = \emptyset$, donc la seule partie de E est $\{\emptyset\}$ et $1 = 2^0$.

B. HÉRÉDITÉ

Supposons que tout ensemble à k éléments, où k est un certain entier naturel, admet 2^k parties.

Alors, soit E , un ensemble à $k + 1$ éléments.

Soit x , un élément de E .

Alors, il y a deux familles de parties de E , celles qui contiennent x et celles qui ne le contiennent pas.

Or $E \setminus \{x\}$ est un ensemble à k éléments, il y a donc 2^k parties de E qui ne contiennent pas x .

En adjoignant x à toutes ces parties, on obtient toutes les parties qui contiennent x , donc il y en a également 2^k .

Ainsi, le nombre de parties de E est de $2^k + 2^k = 2^{k+1}$. \square

II. PRODUIT CARTÉSIEN D'ENSEMBLES

A. DÉFINITION

- E et F étant deux ensembles, le *produit cartésien* $E \times F$ est l'ensemble de couples $(a; b)$, où $a \in E$ et $b \in F$.
- E, F et G étant trois ensembles, le *produit cartésien* $E \times F \times G$ est l'ensemble des triplets $(a; b; c)$ où $a \in E$, $b \in F$ et $c \in G$.

1. CAS GÉNÉRAL

- Le *produit cartésien* $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ des ensembles E_1, E_2, \dots, E_n est l'ensemble des *n-uplets* $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ où $a_1 \in E_1, a_2 \in E_2, \dots, a_n \in E_n$.

B. NOTATIONS

$E \times E$ se note E^2 , $\overbrace{E \times E \times \cdots \times E}^{k \text{ fois}}$ se note E^k .

C. EXEMPLES

Soit $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{1; 2\}$.

- $E \times F = \{(a; 1); (a; 2); (b; 1); (b; 2); (c; 1); (c; 2)\}$
- $F \times F = \{(1; 1); (1; 2); (2; 1); (2; 2)\}$
- $(a; b; b; a; c)$ est un 5-uplet d'élément de E, il appartient à E^5 .

D. PROPRIÉTÉ

Si E_1, E_2, \dots, E_n sont n ensembles finis :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \cdots \times \text{Card}(E_n)$$

1. CAS PARTICULIER

Si E est un ensemble fini, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\text{Card}(E^k) = (\text{Card}(E))^k$$

2. EXEMPLES

Dans les exemples précédents :

$$— \text{Card}(E \times F) = 6 = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$$

$$— \text{Card}(F^2) = 4 = 2^2 = (\text{Card}(F))^2$$

III. PERMUTATIONSA. DÉFINITION

Soit E , un ensemble à n éléments, une *permutation* est un n -uplet d'éléments distincts de E .

Autrement dit, une permutation est une façon d'ordonner les n éléments de E .

1. EXEMPLE

On considère l'ensemble $G = \{a; b; c\}$.

Ses permutations sont :

$$(a; b; c), (a; c; b), (b; a; c), (b; c; a), (c; a; b), (c; b; a)$$

G admet donc 6 permutations.

B. PROPRIÉTÉ

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$

1. REMARQUE

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

$n!$ est le produit de tous les entiers de 1 à n .

$n!$ se lit "factorielle de n ".

2. EXPLICATION

On peut considérer que faire une permutation c'est faire un tirage sans remise des n éléments de E . Il y a n choix pour le premier élément, $n-1$ pour le deuxième et ainsi de suite.

3. DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCEA. INITIALISATION

Un ensemble à un élément admet une permutation, et $1! = 1$.

B. HÉRÉDITÉ

Supposons que tout ensemble à n élément (n fixe) admette $n!$ permutations.

Soit E , un ensemble à $n + 1$ éléments.

On choisit un élément x de E .

Dans chacune des permutations des n éléments restants, il y a $n + 1$ positions où insérer x .

Ainsi, le nombre de permutations de E est $(n + 1) \times n! = (n + 1)!$. \square

IV. COMBINAISONS

Dans tout ce sous-chapitre, E est un ensemble à n éléments et p est un entier naturel tel que $p \leq n$.

A. DÉFINITION

Une combinaison de p éléments de E est une partie de E possédant p éléments.

1. REMARQUE

L'ordre des éléments n'a pas d'importance, les éléments sont distincts.

B. PROPRIÉTÉ

Le nombre de combinaisons à p éléments de E est égal à $\binom{n}{p}$, où :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}$$

$\binom{n}{p}$ est appelé *coefficient binomial* et il se lit « p parmi n ».

1. EXPLICATION

Lorsqu'on choisit p éléments dans un ensemble à n éléments, on a n choix pour le premier, $n - 1$ choix pour le deuxième, etc. mais ainsi, les p éléments sont ordonnés.

On divise donc par le nombre de permutations de p éléments, c'est-à-dire $p!$.

2. CAS PARTICULIERS

$\binom{n}{0} = 1$ La seule partie de E à 0 élément est \emptyset .

$\binom{n}{n} = 1$ La seule partie de E à n éléments est E .

$\binom{n}{1} = n$ Il y a n parties de E à 1 élément.

C. PROPRIÉTÉ : SYMÉTRIE

Choisir p , c'est ne pas choisir $n - p$:

$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$$

Démonstration Alternative :

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$$

D. PROPRIÉTÉ : RELATION DE PASCAL

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

1. DÉMONSTRATION

Soit E , un ensemble à $n + 1$ éléments (on va compter le nombre de parties de E à $p + 1$ éléments).

Soit x un élément de E .

Alors il y a deux « familles » de parties : celles qui contiennent x et celles qui ne le contiennent pas.

Or $E \setminus \{x\}$ contient n éléments.

Donc il y a $\binom{n}{p}$ à p éléments de $E \setminus \{x\}$.

En leur adjoignant x , on obtient toutes les parties à $p + 1$ éléments qui contiennent x .

Il y a $\binom{n}{p+1}$ parties de E qui ne contiennent pas x . (On choisit $p + 1$ éléments dans $E \setminus \{x\}$ qui contient n éléments). \square

E. TRIANGLE DE PASCAL

$\begin{smallmatrix} p \\ n \end{smallmatrix}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

FIGURE 3.1. – Représentation du Triangle de Pascal

F. PROPRIÉTÉ

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$