

Chapitre III

Dénombrement et Combinatoire

I. PARTIES D'UN ENSEMBLE

I.1. DÉFINITION

E étant un ensemble, la notation \subset signifie "Inclus Dans".

$$A \subset E$$

C'est-à-dire que tout élément de A appartient à E.

On dit alors que A est une partie, ou sous-ensemble de E.

L'Ensemble vide, noté \emptyset est une partie de tout ensemble.

L'Ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

I.1.A. EXEMPLE

Si $E = \{x; y\}$ est un ensemble de deux éléments :

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x; y\}\}$$

I.2. DÉFINITION

Un ensemble fini est un ensemble dont le nombre d'éléments est fini.

I.3. DÉFINITION

On appelle cardinal, noté "Card", le nombre d'éléments d'un ensemble fini ou d'une partie / sous-ensemble.

I.3.A. EXEMPLE

Si un ensemble E possède n éléments, alors on peut noter $\text{Card}(E) = n$.

Pour toute partie $A \subset E$, $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(E)$.

I.4. PROPRIÉTÉ (PRINCIPE ADDITIF)

Si A et B sont deux parties quelconques d'un ensemble fini, E , alors :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

De plus, si A_1, A_2, \dots, A_p sont p parties deux à deux disjointes d'un ensemble fini, alors :

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \dots + \text{Card}(A_p)$$

I.5. PROPRIÉTÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$, et E un ensemble tel que $\text{Card}(E) = n$. Alors, E possède 2^n parties.

Autrement dit :

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$$

I.5.A. DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCEI.5.A.I. INITIALISATION

Pour $n = 0$, $E = \emptyset$, donc la seule partie de E est $\{\emptyset\}$ et $1 = 2^0$.

I.5.A.II. HÉRÉDITÉ

Supposons que tout ensemble à k élément, où k est un certain entier naturel, admet 2^k parties.

Alors, soit E , un ensemble à $k + 1$ éléments.

Soit x , un élément de E .

Alors, il y a deux familles de parties de E , celles qui contiennent x et celles qui ne le contiennent pas.

Or $E \setminus \{x\}$ est un ensemble à k éléments, il y a donc 2^k parties de E qui ne contiennent pas x .

En adjoignant x à toutes ces parties, on obtient toutes les parties qui contiennent x , donc il y en a également 2^k .

Ainsi, le nombre de parties de E est de $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ \square

II. PRODUIT CARTÉSIEN D'ENSEMBLES

II.1. DÉFINITION

- E et F étant deux ensembles, le produit cartésien $E \times F$ est l'ensemble de couples $(a; b)$, où $a \in E$ et $b \in F$.
- E, F et G étant trois ensembles, le produit cartésien $E \times F \times G$ est l'ensemble des triplets $(a; b; c)$ où $a \in E$, $b \in F$ et $c \in G$.

II.1.A. CAS GÉNÉRAL

- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ des ensembles E_1, E_2, \dots, E_n est l'ensemble des n-uplets $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ où $a_1 \in E_1, a_2 \in E_2, \dots, a_n \in E_n$.

II.2. NOTATIONS

$E \times E$ se note E^2 , $\overbrace{E \times E \times \dots \times E}^{k \text{ fois}}$ se note E^k .

II.3. EXEMPLES

- Soit $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{1; 2\}$
- $E \times F = \{(a; 1); (a; 2); (b; 1); (b; 2); (c; 1); (c; 2)\}$
 - $F \times F = \{(1; 1); (1; 2); (2; 1); (2; 2)\}$
 - $(a; b; b; a; c)$ est un 5-uplet d'élément de E, il appartient à E^5

II.4. PROPRIÉTÉ

Si E_1, E_2, \dots, E_n sont n ensembles finis :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \dots \times \text{Card}(E_n)$$

II.4.A. CAS PARTICULIER

Si E est un ensemble fini, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\text{Card}(E^k) = (\text{Card}(E))^k$$

II.4.B. EXEMPLES

Dans les exemples précédents :

- $\text{Card}(E \times F) = 6 = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$
- $\text{Card}(F^2) = 4 = 2^2 = (\text{Card}(F))^2$

III. PERMUTATIONS

III.1. DÉFINITION

Soit E , un ensemble à n éléments, une permutation est un n -uplet d'éléments distincts de E .

Autrement dit, une permutation est une façon d'ordonner les n éléments de E .

III.1.A. EXEMPLE

On considère l'ensemble $G = \{a; b; c\}$

Ses permutations sont :

$$(a; b; c), (a; c; b), (b; a; c), (b; c; a), (c; a; b), (c; b; a)$$

G admet donc 6 permutations.

III.2. PROPRIÉTÉ

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$

III.2.A. REMARQUE

$$n! = n \times (n - 1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

$n!$ est le produit de tous les entiers de 1 à n .

$n!$ se lit "factorielle de n ".

III.2.B. EXPLICATION

On peut considérer que faire une permutation c'est faire un tirage sans remise des n éléments de E . Il y a n choix pour le premier élément, $n - 1$ pour le deuxième et ainsi de suite.

III.2.C. DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCEIII.2.C.I. INITIALISATION

Un ensemble à un élément admet une permutation, et $1! = 1$.

III.2.C.II. HÉRÉDITÉ

Supposons que tout ensemble à n élément (n fixé) admette $n!$ permutations.

Soit E , un ensemble à $n + 1$ éléments.

On choisit un élément x de E .

Dans chacune des permutations des n éléments restants, il y a $n + 1$ positions où insérer x .

Ainsi, le nombre de permutations de E est $(n + 1) \times n! = (n + 1)!$ \square

IV. COMBINAISONS

Dans tout ce sous-chapitre, E est un ensemble à n éléments et p est un entier naturel tel que $p \leq n$.

IV.1. DÉFINITION

Une combinaison de p éléments de E est une partie de E possédant p éléments.

IV.1.A. REMARQUE

L'Ordre des éléments n'a pas d'importance, les éléments sont distincts.

IV.2. PROPRIÉTÉ

Le nombre de combinaisons à p éléments de E est égal à $\binom{n}{p}$, où :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}$$

$\binom{n}{p}$ est appelé coefficient binomial et il se lit " p parmi n ".

IV.2.A. EXPLICATION

Lorsqu'on choisit p éléments dans un ensemble à n éléments, on a n choix pour le premier, $n - 1$ choix pour le deuxième, etc. mais ainsi, les p éléments sont ordonnés.

On divise donc par le nombre de permutations de p éléments, c'est-à-dire $p!$

IV.2.B. CAS PARTICULIERS

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{La seule partie de E à 0 élément est } \emptyset.$$

$$\binom{n}{n} = 1 \quad \text{La seule partie de E à } n \text{ éléments est E.}$$

$$\binom{n}{1} = n \quad \text{Il y a } n \text{ parties de E à 1 élément.}$$

IV.3. PROPRIÉTÉ : SYMÉTRIE

Choisir p , c'est ne pas choisir $n - p$:

$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$$

Démonstration Alternative :

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$$

IV.4. PROPRIÉTÉ : RELATION DE PASCAL

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

IV.4.A. DÉMONSTRATION

Soit E, un ensemble à $n + 1$ éléments (on va compter le nombre de parties de E à $p + 1$ éléments).

Soit x un élément de E.

Alors il y a deux "familles" de parties : celles qui contiennent x et celles qui ne le contiennent pas.

Or $E \setminus \{x\}$ contient n éléments.

Donc il y a $\binom{n}{p}$ à p éléments de $E \setminus \{x\}$.

En leur adjoignant x , on obtient toutes les parties à $p + 1$ éléments qui contiennent x .

Il y a $\binom{n}{p+1}$ parties de E qui ne contiennent pas x . (On choisit $p + 1$ éléments dans $E \setminus \{x\}$ qui contient n éléments).

IV.5. TRIANGLE DE PASCAL

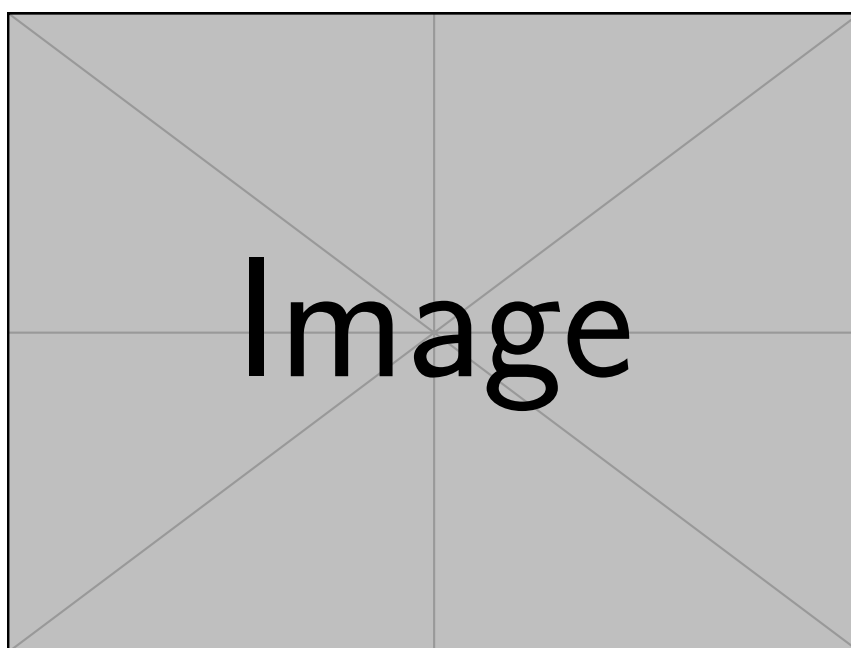


FIGURE 3.1. – Représentation du Triangle de Pascal

IV.6. PROPRIÉTÉ

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$