

# Exercices Chapitre sur la Trigonométrie \*

Diego Van Overberghe

26 mai 2020

## Exercice 45

1. a)  $\frac{\pi}{4} \times 8 = 2\pi$  Il faut donc multiplier par 8.  
b)  $\frac{\pi}{4} \times 12 = 3\pi$  Il faut donc multiplier par 12.
2. a)  $5\pi = \pi + 2 \times 2\pi$   
b)  $27\pi = \pi + 13 \times 2\pi$   
c)  $59\pi = -\pi + 30 \times 2\pi$

## Exercice 46

1. a)  $\frac{\pi}{3}$  est associé au point A.  
b)  $-\frac{\pi}{2}$  est associé au point Q.  
c)  $4\pi$  est associé au point I.  
d)  $-\pi$  est associé au point P.  
e)  $-\frac{\pi}{4}$  est associé au point M.  
f)  $\frac{13\pi}{6}$  est associé au point A.  
g)  $-\frac{2\pi}{3}$  est associé au point K.  
h)  $\frac{5\pi}{4}$  est associé au point H.
2. B :  $\frac{\pi}{4}$  ; D :  $\frac{2\pi}{3}$  ; E :  $\frac{3\pi}{4}$  ; F :  $\frac{5\pi}{6}$  ; G :  $\frac{7\pi}{6}$  ; H :  $\frac{5\pi}{4}$  ; L :  $\frac{5\pi}{3}$  ; N :  $\frac{11\pi}{6}$

## Exercice 47

- a) Faux. 0 est associé au point (1;0), et  $\pi$  est associé au point (-1;0)
- b) Vrai.  $\frac{180}{\pi} \times \frac{2\pi}{5} = 72^\circ$
- c) Vrai.
- d) Faux.  $\frac{11\pi}{6} < 2\pi$
- e) Vrai. Ajouter  $k \times 2\pi$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ , ne fait que ajouter une rotation entière, vu que le périmètre du cercle trigonométrique est  $2\pi$
- f) Faux.  $103^\circ$  est associé au nombre  $\frac{103\pi}{180}$

---

\*Page 202 du Manuel Hatier

### Exercice 50

- a) Le périmètre de la bobine est de  $2\pi$  puisque son rayon est 1. Or  $\frac{2019\pi}{2} = 1009\pi + \frac{\pi}{2}$   
Soit  $\frac{1014\pi}{2\pi} = 513$  tours complets.
- b) La première extrémité se situe du côté droite du cercle. Après les 513 tours complets, il reste  $\frac{\pi}{2}$  cm de fil. Ceci correspond à un angle de  $90^\circ$  en avant. L'autre extrémité du fil se situe donc du côté supérieur du cercle.

### Exercice 52

- a) Faux. Chaque point du cercle trigonométrique est associé à une infinité de réels. Par exemple, le point 0 est associé au même point que le point  $2\pi$
- b) Faux. Le point  $\frac{\pi}{2}$  est associé au point de coordonnées (0 ; 1), le point  $-\frac{\pi}{2}$  est associé au point de coordonnées (0 ; -1)

### Exercice 59

- a)  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$  et  $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- b)  $\cos -\frac{\pi}{2} = 0$  et  $\sin -\frac{\pi}{2} = -1$
- c)  $\cos \frac{7\pi}{3} = \frac{1}{2}$  et  $\sin \frac{7\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- d)  $\cos -\pi = -1$  et  $\sin -\pi = 0$
- e)  $\cos -\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$  et  $\sin -\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- f)  $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$
- g)  $\cos 0 = 1$  et  $\sin 0 = 0$
- h)  $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- i)  $\cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$  et  $\sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- j)  $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$  et  $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$
- k)  $\cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$
- l)  $\cos -\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$  et  $\sin -\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

### Exercice 60

- a) Le point se situera dans le secteur 4.
- b) Le point se situera dans le secteur 2.
- c) Le point se situera dans le secteur 3.

### Exercice 61

1. a) Les points d'abscisse  $\frac{1}{2}$  sont les points C et L. Ils sont associés aux réels  $\frac{\pi}{3}$  et  $-\frac{\pi}{3}$  respectivement. Leurs sinus sont égaux à  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  et à  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  respectivement.
- b) Les points d'abscisse  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  sont les points E et H. Ils sont associés aux réels  $\frac{3\pi}{4}$  et  $-\frac{3\pi}{4}$  respectivement. Leurs sinus sont égaux à  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  et à  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  respectivement.
2. a) Les points d'ordonnée  $\frac{1}{2}$  sont les points B et E. Ils sont associés aux réels  $\frac{\pi}{4}$  et  $\frac{3\pi}{4}$  respectivement. Leurs cosinus sont égaux à  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  et à  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  respectivement.
- b) Les points d'ordonnée  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  sont les points K et L. Ils sont associés aux réels  $\frac{3\pi}{3}$  et  $\frac{5\pi}{3}$  respectivement. Leurs cosinus sont égaux à  $-\frac{1}{2}$  et à  $\frac{1}{2}$  respectivement.

### Exercice 63

1. La réponse correcte est la b.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. La réponse correcte est la a.  $-1$
3. La réponse correcte est la c.  $-\frac{1}{2}$
4. La réponse correcte est la a.  $\frac{\pi}{3}$
5. La réponse correcte est la b. Les solutions sont :  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$

### Exercice 64

- a)  $\cos \frac{15\pi}{3} = \frac{1}{2}$  et  $\sin \frac{15\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- b)  $\cos -\frac{5\pi}{2} = -1$  et  $\sin -\frac{5\pi}{2} = 0$
- c)  $\cos -\frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\sin -\frac{9\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- d)  $\cos -\frac{28\pi}{3} = \frac{1}{2}$  et  $\sin -\frac{28\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- e)  $\cos -\frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\sin -\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$
- f)  $\cos \frac{2018\pi}{4} = 0$  et  $\sin \frac{2018\pi}{4} = 1$

### Exercice 65

- a)  $\cos \frac{101\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\sin \frac{101\pi}{6} = \frac{1}{2}$   
b)  $\cos \frac{43\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\sin \frac{43\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$   
c)  $\cos \frac{19\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\sin \frac{19\pi}{6} = \frac{1}{2}$   
d)  $\cos -\frac{25\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\sin -\frac{25\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$   
e)  $\cos -\frac{21\pi}{2} = 0$  et  $\sin -\frac{21\pi}{2} = -1$   
f)  $\cos -\frac{15\pi}{2} = 0$  et  $\sin -\frac{15\pi}{2} = 1$   
g)  $\cos \frac{1981\pi}{3} = \frac{1}{2}$  et  $\sin \frac{1981\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

### Exercice 65

- a)  $C = 1 + 0 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + 3}{2}$   
 $S = 0 + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + 3}{2}$   
b) Les deux nombres sont égaux. Ceci est cohérent, vu que  $\cos \frac{\pi}{2} = \sin 0$ ,  $\cos \frac{\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{6}$   
et  $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$

### Exercice 77

Tout d'Abord,  $\forall x \in [-2\pi; 2\pi]$ ,  $-x \in [-2\pi; 2\pi]$ . Ceci est vrai pour chaque fonction qui suit.

- a) On peut voir que la droite  $x = 0$  est un axe de symétrie de la courbe  $\mathcal{C}_1$ .  
Donc,  $f_1(x) = f_1(-x)$ , c'est-à-dire que la fonction est paire.  
b) On peut voir que l'origine est un point de symétrie de la courbe  $\mathcal{C}_2$ .  
Donc,  $f_2(-x) = -f_2(x)$ , c'est-à-dire que la fonction est impaire.  
c) La fonction  $f_3$  est quelconque. Elle est ni paire, ni impaire.  
d) On peut voir que la droite  $x = 0$  est un axe de symétrie de la courbe  $\mathcal{C}_4$ .  
Donc,  $f_4(x) = f_4(-x)$ , c'est-à-dire que la fonction est paire.

### Exercice 78

Tout d'Abord,  $\forall x \in [-2\pi; 2\pi]$ ,  $-x \in [-2\pi; 2\pi]$ . Ceci est vrai pour chaque fonction qui suit.

- a) On peut voir que l'origine est un point de symétrie de la courbe  $\mathcal{C}_1$ .  
Donc,  $f_1(-x) = -f_1(x)$ , c'est-à-dire que la fonction est impaire.  
b) On peut voir que la droite  $x = 0$  est un axe de symétrie de la courbe  $\mathcal{C}_2$ .  
Donc,  $f_2(x) = f_2(-x)$ , c'est-à-dire que la fonction est paire.  
c) On peut voir que la droite  $x = 0$  est un axe de symétrie de la courbe  $\mathcal{C}_3$ .  
Donc,  $f_3(x) = f_3(-x)$ , c'est-à-dire que la fonction est paire.

- d) On peut voir que la droite  $x = 0$  est un axe de symétrie de la courbe  $\mathcal{C}_4$ .  
Donc,  $f_4(x) = f_4(-x)$ , c'est-à-dire que la fonction est paire.

## Exercice 80

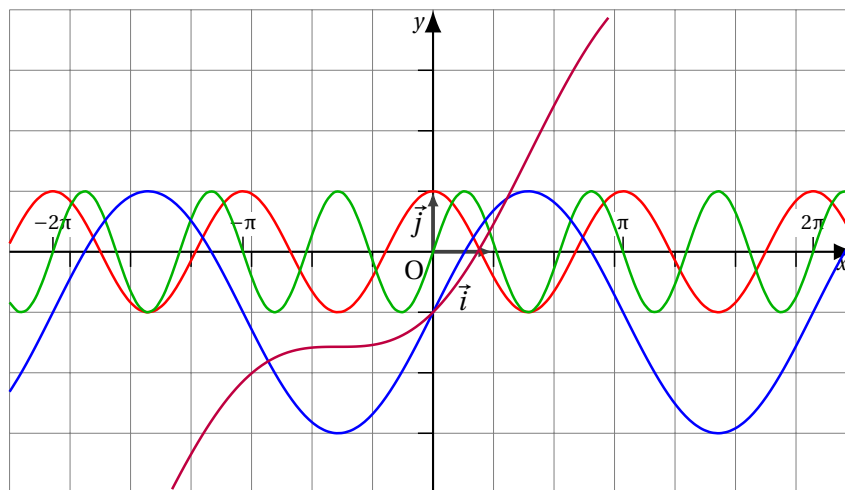


FIGURE 1 – Représentation Graphique des Fonctions  $f$ ,  $g$ ,  $h$  et  $k$

- a) 1) Il s'agit de la courbe rouge.  
2) On peut voir que la droite  $x = 0$  est un axe de symétrie de la courbe rouge.  
Donc,  $f(-x) = f(x)$ , c'est-à-dire que la fonction semble être paire.  
3)  $f(-x) = \cos(-2x) \quad f(x) = \cos(2x) \iff f(x) = \cos(-2x) \iff f(-x) = f(x)$   
La fonction est donc bien paire.
- b) 1) Il s'agit de la courbe verte.  
2) On peut voir que l'origine est un point de symétrie de la courbe verte.  
Donc,  $g(-x) = -g(x)$ , c'est-à-dire que la fonction semble être impaire.  
3)  $g(-x) = \sin(-3x) \quad -g(x) = -\sin(3x) \iff -g(x) = \sin(-3x) \iff g(-x) = -g(x)$   
la fonction est donc bien impaire
- c) 1) Il s'agit de la courbe bleue.  
2) On a l'impression que la fonction est ni paire ni impaire.  
3)  $h(-x) = 2\sin(-x) - 1 = -2\sin(x) - 1 \neq h(x) \neq -h(x)$   
La fonction est bien donc ni paire, ni impaire.
- d) 1) Il s'agit de la courbe bordeaux.  
2) On a l'impression que la fonction est ni paire ni impaire.  
3)  $k(-x) = -x - \cos(-x) = -x - \cos(x) \neq k(x) \neq -k(x)$   
La fonction est bien donc ni paire, ni impaire.

## Exercice 81

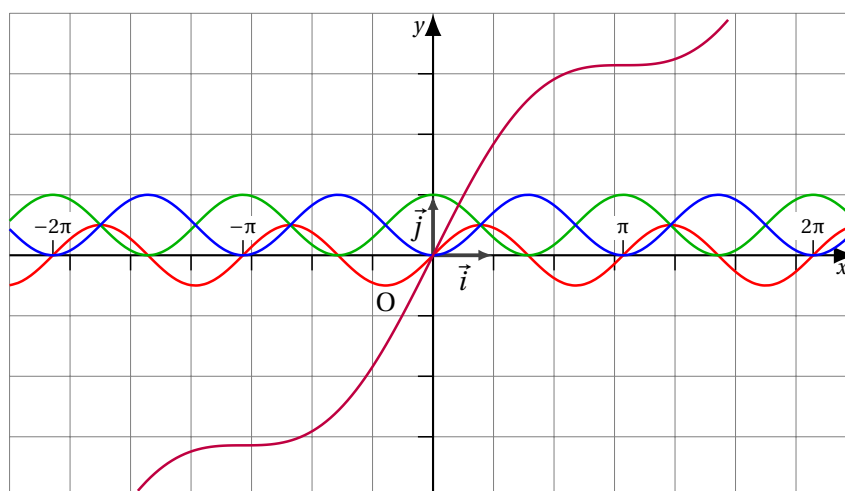


FIGURE 2 – Représentation Graphique des Fonctions  $f$ ,  $g$ ,  $h$  et  $k$

- a)
  - 1) Il s'agit de la courbe rouge.
  - 2) On peut voir que l'origine est un point de symétrie de la courbe rouge.  
Donc,  $f(-x) = -f(x)$ , c'est-à-dire que la fonction semble être impaire.
  - 3)  $f(-x) = \cos(-x) \sin(-x) \quad -f(x) = -\cos(x) \sin(x) \iff -f(x) = \cos(-x) \sin(-x)$   
 $\iff f(-x) = -f(x)$  La fonction est bien impaire.
- b)
  - 1) Il s'agit de la courbe verte.
  - 2) On peut voir que la droite  $x = 0$  est un axe de symétrie de la courbe verte.  
Donc,  $g(-x) = g(x)$ , c'est-à-dire que la fonction semble être paire.
  - 3)  $g(-x) = (\cos(-x))^2 \quad g(x) = (\cos(x))^2 \iff g(x) = (\cos(-x))^2 \iff g(-x) = g(x)$   
La fonction est donc bien paire.
- c)
  - 1) Il s'agit de la courbe bleue.
  - 2) On peut voir que la droite  $x = 9$  est un axe de symétrie de la courbe bleue.  
Donc,  $h(-x) = h(x)$ , c'est-à-dire que la fonction semble être paire.
  - 3)  $h(-x) = (\sin(-x))^2 \quad h(x) = (\sin(x))^2 \iff h(x) = (\sin(-x))^2 \iff h(-x) = h(x)$   
La fonction est donc bien paire.
- d)
  - 1) Il s'agit de la droite bordeaux.
  - 2) On peut voir que l'origine est un point de symétrie de la courbe bordeaux.  
Donc,  $k(-x) = -k(x)$ , c'est-à-dire que la fonction semble être impaire.
  - 3)  $k(-x) = -x + \sin(-x) \quad -k(x) = -x - \sin(x) \iff -k(x) = -x \sin(-x)$   
 $\iff k(-x) = -k(x)$  La fonction est bien impaire.

## Exercice 82

- $\mathcal{C}_1 \longrightarrow f(x)$
- $\mathcal{C}_2 \longrightarrow h(x)$
- $\mathcal{C}_3 \longrightarrow g(x)$

### Exercice 83

- 1) a) Vrai.  $f(x + 2k\pi) = f(x)$  avec  $\{k \in \mathbb{Z}\}$   
 b) Vrai. Pour la même raison.
- 2) Vrai. Rajouter deux à  $x$  revient à effectuer un tour en plus du cercle trigonométrique, et ne change donc pas la valeur de  $f(x)$ .

### Exercice 88

- a) Il semble que la période est autour de 6,2. On observe par lecture graphique que  $g(x)$  semble compris entre 1 et 7.

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & g(x + y) = g(x) \\
 \iff & 4 + 3\cos(x + y) = 4 + 3\cos(x) \\
 \iff & \cos(x + y) = \cos(x) \\
 \iff & y = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

La période est donc de  $2k\pi$ , avec  $k = 1$ , c'est-à-dire  $2\pi \approx 6,3$

$$\begin{aligned}
 & -1 \leq \cos(x) \leq 1 \\
 \iff & -3 \leq 3\cos(x) \leq 3 \\
 \iff & 1 \leq 4 + 3\cos(x) \leq 7
 \end{aligned}$$

La conjecture est vérifiée.

### Exercice 89

- a)


$x$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
Signe de $\tan(x)$		+
Variations de $x \mapsto \tan(x)$		

FIGURE 3 – Tableau de Signes et de Variations de la fonction  $\tan(x)$

b)

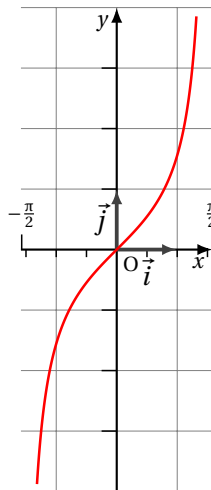


FIGURE 4 – Représentation Graphique de la Fonction  $\tan(x)$

### Exercice 93

- a) Il s'agit d'un triangle équilatéral.  
 b) Il faut calculer la hauteur du triangle. D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle rectangle  $ABA'$  de côté  $a$ , où  $A'$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur  $[BC]$  :

$$AA' = \sqrt{AB^2 - BA'^2} = \sqrt{1 - 0,25} = \sqrt{0,75} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

On a donc  $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- c) Pour en déduire la valeur de  $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ , il faut retourner au triangle rectangle  $ABA'$ , où on cherche maintenant la valeur de  $BA'$ .

$$BA' = \sqrt{AB^2 - AA'^2} = \sqrt{1 - 0,75} = \sqrt{0,25} = \frac{1}{2}$$