

# Chapitre V

## Fonction Composée

### I. DÉFINITION

Soient  $u$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $J$ ,  $I$  étant tel que pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $u(x) \in J$

La fonction composée de  $u$  par  $f$ , notée  $f \circ u$  est la fonction définie sur  $I$  par :

$$(f \circ u)(x) = f(u(x))$$

Schéma : Intervalles :  $I \rightarrow J \rightarrow \mathbb{R}$

Variables :  $x \rightarrow u(x) \rightarrow f(u(x))$

#### A. EXEMPLES

La fonction  $u : x \mapsto u(x) = x^2 + 1$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , et  $f : x \mapsto f(x) = \ln(x)$  est définie sur  $]0; +\infty[$ , la fonction  $f \circ u$  est définie sur  $\mathbb{R}$  car  $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) \in ]0; +\infty[$ , et  $(f \circ u)(x) = \ln(x^2 + 1)$ .

La fonction  $g : x \mapsto g(x) = \sqrt{5x - 3}$  est la fonction composée de la fonction affine  $x \mapsto 5x - 3$  et de la fonction racine carrée. Elle est définie sur  $\left[\frac{3}{5}; +\infty\right]$ , intervalle sur lequel  $5x - 3 \in \mathbb{R}^+$

### II. DÉRIVÉE D'UNE FONCTION COMPOSÉE

#### A. THÉORÈME

Si  $u$  est dérivable en un réel  $a$  et  $f$  est dérivable en  $u(a)$  alors  $f \circ u$  est dérivable en  $a$  et  $(f \circ u)'(a) = u'(a) \times f'(u(a))$

Si  $u$  est dérivable sur  $I$  et  $f$  est dérivable sur  $J$ ,  $I$  étant tel que, pour tout réel  $x$  de  $I$ ,  $u(x) \in J$  alors  $f \circ u$  est dérivable sur  $I$ , et pour tout réel  $x \in I$  :

$$(f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$$

B. EXEMPLES

Si on appelle  $h$  la fonction par  $h : x \mapsto h(x) = \ln(x^2 + 1)$ , alors  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout réel  $x$ ,  $h'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

La fonction  $g$  ci-dessus, définie par  $g : x \mapsto g(x) = \sqrt{5x-3}$ , est dérivable sur  $\left] \frac{3}{5}; +\infty \right[$ , et pour tout  $x \in \left] \frac{3}{5}; +\infty \right[$ ,  $g'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x-3}}$

III. LIMITES D'UNE FONCTION COMPOSÉEA. THÉORÈME

Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont trois réels, ou  $\pm\infty$

Si  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$  et  $\lim_{X \rightarrow b} f(X) = c$  alors,  $\lim_{x \rightarrow a} f(u(x)) = c$

B. EXEMPLE

Soit  $g : x \mapsto g(x) = e^{-x^2}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$  et  $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$