Chapitre 9

Loi Binomiale

I. Succession d'Épreuves Indépendantes

A. Rappel

Deux épreuves successives sont indépendantes lorsque le résultat de la première n'influe pas sur le résultat de la deuxième.

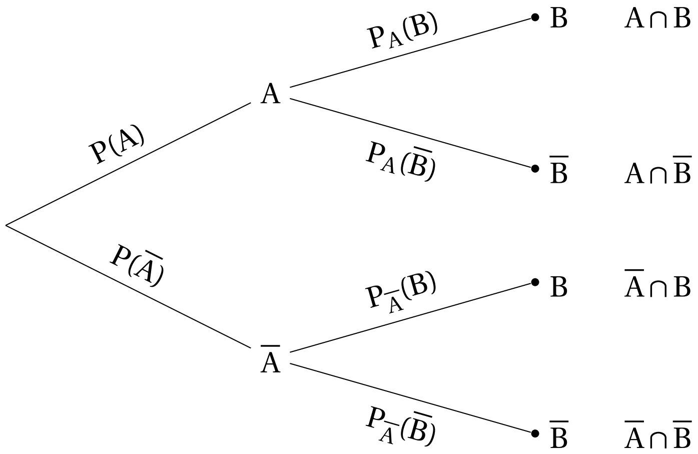

FIGURE 9.1. – Arbre de Probabilité qui Présente l'Indépendance des Épreuves

Ainsi, A et B sont deux événements indépendants si et seulement si :

— $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B) = P(B)$

— $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

B. Modélisations

On peut représenter une succession de n épreuves indépendantes par un arbre pondéré (une issue de cette succession d'épreuves est alors un chemin sur l'arbre).

Si les n épreuves indépendantes ont pour univers respectifs $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_n$, les issues de ces n épreuves sont les éléments du produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$.

C. Exemple

Un restaurant propose deux entrées e_1 et e_2, trois plats p_1, p_2, et p_3 et un dessert d.

Un client prend au hasard une entrée, un plat, et un dessert.

L'ensemble des issues de cette expérience est $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$ où
$\Omega_1 = \{e_1 ; e_2\}$, $\Omega_2 = \{p_1 ; p_2 ; p_3\}$, et $\Omega_3 = \{d\}$.

Ainsi, $\Omega = \Big\{(e_1, p_1, d) ; (e_1, p_2, d) ; \dots\Big\}$.

On peut aussi représenter la situation par un arbre :

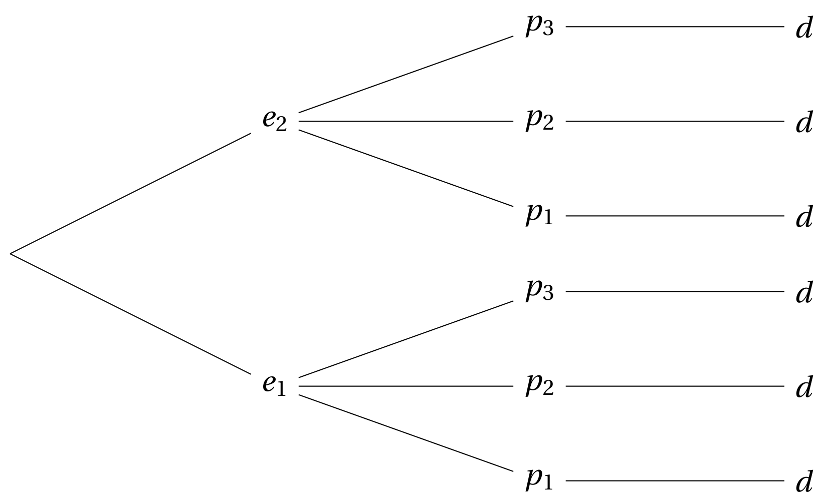

Figure 9.2. – Arbre Pondéré Représentant la Situation

II. LOI BINOMIALE

A. ÉPREUVE DE BERNOULLI

1. DÉFINITION

Une *épreuve de* BERNOULLI est un expérience aléatoire possédant deux issues qu'on appelle généralement « succès » et « échec ». La probabilité du succès p est appelée paramètre de la loi de BERNOULLI.

k_i	0	1
$P(X = k_i)$	$1-p$	p

FIGURE 9.3. – Loi de la Variable Aléatoire X

X est une variable aléatoire donnant le nombre de succès (il n'y a que deux possibilités : 0 ou 1). On dit que X suit la loi de BERNOULLI.
Penser à un jeu de pile ou face.

2. PROPRIÉTÉ

Si X est une variable aléatoire suivant la loi de BERNOULLI de paramètre p, alors, l'espérance de X est $E(X) = p$ et sa variance est $V(X) = p(1-p)$.

B. SCHÉMA DE BERNOULLI

1. DÉFINITION

Un *schéma de* BERNOULLI est une répétition de n épreuves *identiques* et *indépendantes* à deux issues (n épreuves de BERNOULLI).

Une issue de cette expérience aléatoire est un élément (n-uplet) de $\Omega = \left\{S\,;\overline{S}\right\}^n$.

2. EXEMPLE

On tire successivement 4 fois à pile ou face avec une pièce (truquée peut-être) dont la probabilité de tomber sur « pile » est p.

Les tirages obtenus sont des 4-uplets composés de P et de F (si l'on note P l'événement « tomber sur pile » et F « tomber sur face »).

Un exemple de tirage est (P, F, F, F). On peut aussi noter S et $\overline{S}$ au lieu de P et F.

C. Loi Binomiale

1. Définition

On considère une expérience aléatoire qui suit un schéma de Bernoulli, autrement dit, une répétition de n épreuves *identiques* et *indépendantes* à deux issues (succès et échec) dont la probabilité de succès est p.

La variable aléatoire donnant le nombre de succès suit la *loi binomiale* de paramètres n et p, notée $\mathscr{B}\left(n,p\right)$. Cette loi est aussi parfois appelée loi du nombre de succès.

2. Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p, on peut aussi noter $X \sim \mathscr{B}\left(n,p\right)$.

Pour tout entier k compris entre 0 et n :

$$\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

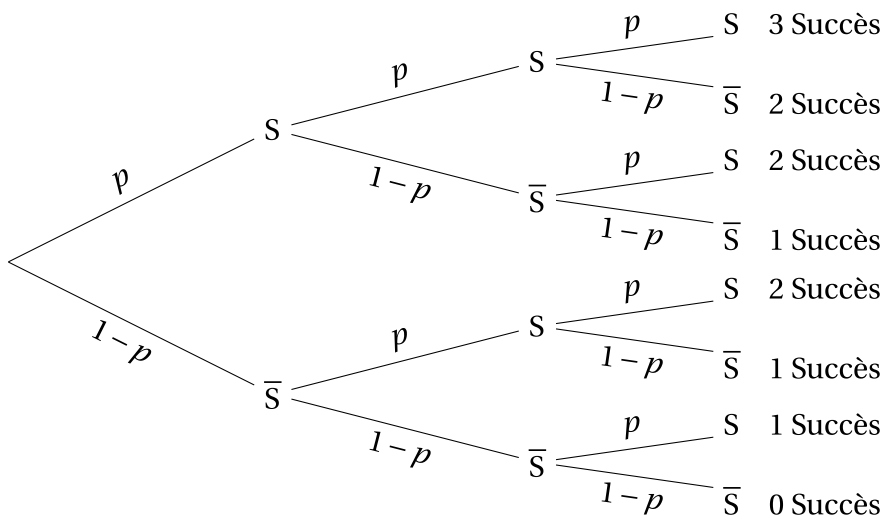

Figure 9.4. – Illustration de la Loi Binomiale

A. Démonstration

Dans l'arbre, chaque chemin contenant exactement k succès passe par k branches de probabilité p et $n-k$ branches de probabilité $1-p$. Ainsi la probabilité d'un tel chemin est $p^k(1-p)^{n-k}$.

On compte ensuite le nombre de chemins contenant k succès :
il y en a $\binom{n}{k}$.

On peut aussi considérer qu'un tirage est un n-uplet contenant des S et des $\overline{\text{S}}$.

Ainsi, un tirage contenant k succès comporte k fois la lettre S et $n-k$ fois la lettre $\overline{\text{S}}$. Le nombre de façons de disposer les k « S » parmi les n éléments est $\binom{n}{k}$.

B. Exemple

Avec nos 4 tirages de pièce truquée, si on a $p=\frac{2}{3}$ (la probabilité de tirer « pile » est $\frac{2}{3}$) et si on note X la variable aléatoire donnant le nombre de « pile », on a :

$$\text{P}(\text{X}=1)=\binom{4}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(1-\frac{2}{3}\right)^{4-1}=4\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\approx 0{,}099$$

3. Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

L'Espérance de X est $\boxed{\text{E}(\text{X})=np}$.
La variance de X est $\boxed{\text{V}(\text{X})=np(1-p)}$.
L'Écart-type de X est $\boxed{\sigma(\text{X})=\sqrt{np(1-p)}}$.
Démonstration dans chapitre sur les opérations sur les Variables Aléatoires.

A. Exemple

On reprend la pièce truquée précédente, qu'on lance quatre fois. X est toujours la variable aléatoire donnant le nombre de « pile ».

$\text{E}(\text{X})=4\times\frac{2}{3}\approx 2{,}67$ (On peut espérer d'obtenir 2,67 piles sur 4 tirages)

$\sigma(\text{X})=\sqrt{4\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}}\approx 0{,}94$ (Dont l'interprétation est moins intéressante)