Chapitre III

Dénombrement et Combinatoire

I. Parties d'un Ensemble

I.1. Définition

E étant un ensemble, la notation $\subset$ signifie "Inclus Dans".

$$A \subset E$$

C'est-à-dire que tout élément de A appartient à E.
On dit alors que A est une partie, ou sous-ensemble de E.
L'Ensemble vide, noté $\varnothing$ est une partie de tout ensemble.
L'Ensemble des parties de E est noté $\mathscr{P}(E)$.

I.1.a. Exemple

Si $E = \{x; y\}$ est un ensemble de deux éléments :

$$\mathscr{P}(E) = \left\{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{x; y\}\right\}$$

I.2. Définition

Un ensemble fini est un ensemble dont le nombre d'éléments est fini.

I.3. Définition

On appelle cardinal, noté "Card", le nombre d'éléments d'un ensemble fini ou d'une partie / sous-ensemble.

I.3.a. Exemple

Si un ensemble E possède n éléments, alors on peut noter $\mathrm{Card}(E) = n$.
Pour toute partie $A \subset E$, $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(E)$.

I.4. Propriété (Principe Additif)

Si A et B sont deux parties quelconques d'un ensemble fini, E, alors :

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$$

De plus, si $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sont p parties deux à deux disjointes d'un ensemble fini, alors :

$$\mathrm{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p) = \mathrm{Card}(A_1) + \mathrm{Card}(A_2) + \cdots + \mathrm{Card}(A_p)$$

I.5. Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}$, et E un ensemble tel que Card(E) = n. Alors, E possède 2^n parties. Autrement dit :

$$\mathrm{Card}(\mathscr{P}(E)) = 2^n$$

I.5.a. Démonstration par Récurrence

I.5.a.i. Initialisation

Pour $n = 0$, $E = \varnothing$, donc la seule partie de E est $\{\varnothing\}$ et $1 = 2^0$.

I.5.a.ii. Hérédité

Supposons que tout ensemble à k élément, où k est un certain entier naturel, admet 2^k parties.

Alors, soit E, un ensemble à $k+1$ éléments.

Soit x, un élément de E.

Alors, il y a deux familles de parties de E, celles qui contiennent x et celles qui ne le contiennent pas.

Or $E \setminus \{x\}$ est un ensemble à k éléments, il y a donc 2^k parties de E qui ne contiennent pas x.

En adjoignant x à toutes ces parties, on obtient toutes les parties qui contiennent x, donc il y en a également 2^k.

Ainsi, le nombre de parties de E est de $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ $\square$

II. Produit Cartésien d'Ensembles

II.1. Définition

— E et F étant deux ensembles, le produit cartésien $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ est l'ensemble de couples $(a;b)$, où $a \in \mathrm{E}$ et $b \in \mathrm{F}$.
— E, F et G étant trois ensembles, le produit cartésien $\mathrm{E} \times \mathrm{F} \times \mathrm{G}$ est l'ensemble des triplets $(a;b;c)$ où $a \in \mathrm{E}$, $b \in \mathrm{F}$ et $c \in \mathrm{G}$.

II.1.a. Cas Général

— Le produit cartésien $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \cdots \times \mathrm{E}_n$ des ensembles $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_n$ est l'ensemble des n-uplets $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ où $a_1 \in \mathrm{E}_1$, $a_2 \in \mathrm{E}_2$, $\ldots$, $a_n \in \mathrm{E}_n$.

II.2. Notations

$\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ se note E^2, $\overbrace{\mathrm{E} \times \mathrm{E} \times \cdots \times \mathrm{E}}^{k \text{ fois}}$ se note E^k.

II.3. Exemples

Soit $\mathrm{E} = \{a;b;c\}$ et $\mathrm{F} = \{1;2\}$
— $\mathrm{E} \times \mathrm{F} = \{(a;1);(a;2);(b;1);(b;2);(c;1);(c;2)\}$
— $\mathrm{F} \times \mathrm{F} = \{(1;1);(1;2);(2;1);(2;2)\}$
— $(a;b;b;a;c)$ est un 5-uplet d'élément de E, il appartient à E^5

II.4. Propriété

Si $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_n$ sont n ensembles finis :

$$\mathrm{Card}(\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \cdots \times \mathrm{E}_n) = \mathrm{Card}(\mathrm{E}_1) \times \mathrm{Card}(\mathrm{E}_2) \times \cdots \times \mathrm{Card}(\mathrm{E}_n)$$

II.4.a. Cas Particulier

Si E est un ensemble fini, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{Card}(\mathrm{E}^k) = \left(\mathrm{Card}(\mathrm{E})\right)^k$$

II.4.b. Exemples

Dans les exemples précédents :

— $\text{Card}(E \times F) = 6 = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$

— $\text{Card}(F^2) = 4 = 2^2 = \big(\text{Card}(F)\big)^2$

III. Permutations

III.1. Définition

Soit E, un ensemble à n éléments, une permutation est un n-uplet d'éléments distincts de E.

Autrement dit, une permutation est une façon d'ordonner les n éléments de E.

III.1.a. Exemple

On considère l'ensemble $G = \{a; b; c\}$
Ses permutations sont :

$$(a;b;c),\ (a;c;b),\ (b;a;c),\ (b;c;a),\ (c;a;b),\ (c;b;a)$$

G admet donc 6 permutations.

III.2. Propriété

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$

III.2.a. Remarque

$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$
$n!$ est le produit de tous les entiers de 1 à n.
$n!$ se lit "factorielle de n".

III.2.b. Explication

On peut considérer que faire une permutation c'est faire un tirage sans remise des n éléments de E. Il y n choix pour le premier élément, $n-1$ pour le deuxième et ainsi de suite.

III.2.c. Démonstration par Récurrence

III.2.c.i. Initialisation

Un ensemble à un élément admet une permutation, et $1! = 1$.

III.2.c.ii. Hérédité

Supposons que tout ensemble à n élément (n fixé) admette $n!$ permutations.

Soit E, un ensemble à $n+1$ éléments.
On choisit un élément x de E.
Dans chacune des permutations des n éléments restants, il y $n+1$ positions où insérer x.

Ainsi, le nombre de permutations de E est $(n+1) \times n! = (n+1)!$ $\square$

IV. Combinaisons

Dans tout ce sous-chapitre, E est un ensemble à n éléments et p est un entier naturel tel que $p \leq n$.

IV.1. Définition

Une combinaison de p éléments de E est une partie de E possédant p éléments.

IV.1.a. Remarque

L'Ordre des éléments n'a pas d'importance, les éléments sont distincts.

IV.2. Propriété

Le nombre de combinaisons à p éléments de E est égal à $\binom{n}{p}$, où :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}$$

$\binom{n}{p}$ est appelé coefficient binomial et il se lit "p parmi n".

IV.2.a. Explication

Lorsqu'on choisit p éléments dans un ensemble à n éléments, on a n choix pour le premier, $n-1$ choix pour le deuxième, etc. mais ainsi, les p éléments sont ordonnés.

On divise donc par le nombre de permutations de p éléments, c'est-à-dire $p!$

IV.2.b. Cas particuliers

$\binom{n}{0} = 1$ La seule partie de E à 0 élément est $\varnothing$.

$\binom{n}{n} = 1$ La seule partie de E à n éléments est E.

$\binom{n}{1} = n$ Il y à n parties de E à 1 élément.

IV.3. Propriété : Symétrie

Choisir p, c'est ne pas choisir $n-p$:

$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$$

Démonstration Alternative :

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$$

IV.4. Propriété : Relation de Pascal

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

IV.4.a. Démonstration

Soit E, un ensemble à $n+1$ éléments (on va compter le nombre de parties de E à $p+1$ éléments).

Soit x un élément de E.

Alors il y a deux "familles" de parties : celles qui contiennent x et celles qui ne le contiennent pas.

Or $E \setminus \{x\}$ contient n éléments.

Donc il y a $\binom{n}{p}$ à p éléments de $\mathrm{E} \setminus \{x\}$.

En leur adjoignant x, on obtient toutes les parties à $p+1$ éléments qui contiennent x.

Il y a $\binom{n}{p+1}$ parties de E qui ne contiennent pas x. (On choisit $p+1$ éléments dans $\mathrm{E} \setminus \{x\}$ qui contient n éléments).

IV.5. Triangle de Pascal

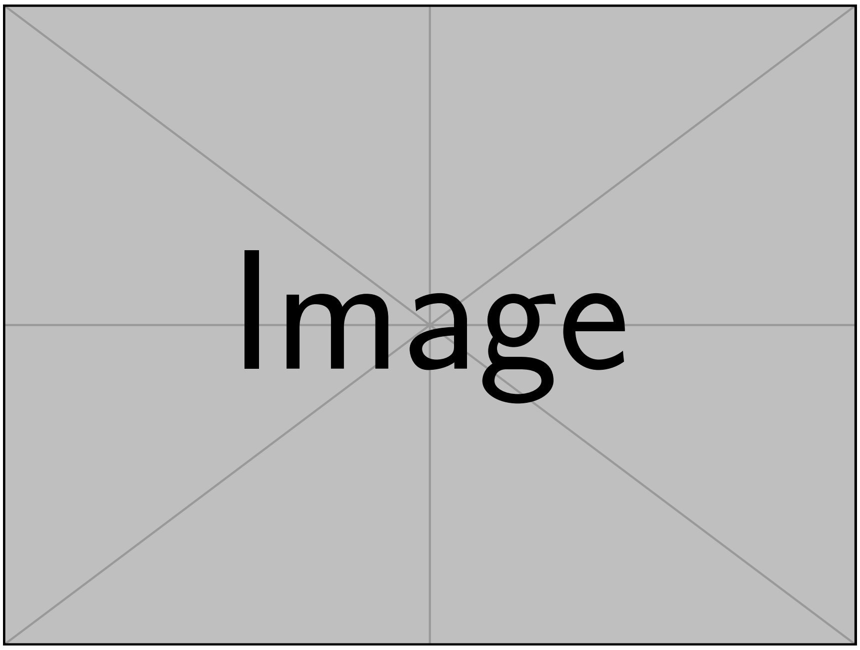

FIGURE 3.1. – Représentation du Triangle de Pascal

IV.6. Propriété

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$