Exercices Chapitre sur les Variables Aléatoires [*]

Diego Van Overberghe

8 mai 2020

Exercice 33

a) $p = 1 - 0{,}34 - 0{,}26 - 0{,}17 - 0{,}12 = 0{,}11$

b) $p = 1 - 0{,}26 - 0{,}24 - 0{,}14 - 0{,}13 - 0{,}04 = 0{,}19$

Exercice 35

a) On a :

x_i	-1	0	1	3	4	5	6	8
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$

FIGURE 1 – Tableau présentant la loi de probabilité de X

b) $P(1 \leq X \leq 5) = p_1 + p_3 + p_4 + p_5 = 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}25 + 0{,}2 = 0{,}7$
$P(X \geq 4) = p_{-1} + p_0 + p_1 + p_3 + p_4 = 0{,}65$

Exercice 36

a) On a :

x_i	-4	0	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{3}$

FIGURE 2 – Tableau présentant la loi de probabilité de X

b) On a x, le nombre de jetons rouges ou verts et y, le nombre de jetons bleus.

$$\begin{cases} 2x + y = 20 \\ y = 2x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5 \\ y = 10 \end{cases}$$

x_i	-4	0	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

FIGURE 3 – Tableau présentant la loi de probabilité de X

[*] Page 328 du manuel Hatier

Exercice 39

On a $p = 1 - 0{,}12 - 0{,}14 - 0{,}21 - 0{,}32 - 0{,}13 = 0{,}08$

De plus, $\mathrm{P}(\mathrm{U} \leq 13) = 0{,}12 + 0{,}14 + 0{,}21 + 0{,}32 = 0{,}79$

Donc, $q = \mathrm{P}(\mathrm{U} \leq 13) - 0{,}14 - 0{,}10 = 0{,}55$

Et, $r = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{V} \leq 13) - 0{,}10 = 0{,}11$

Exercice 40

a) Faux. $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq 4) = 0{,}15$

b) Faux. $\mathrm{P}(2 \leq \mathrm{X} \leq 3) = 0{,}35$

c) Vrai. $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 2) = 0{,}15$

Exercice 50

a) $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = p_0x_0 + p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4 = 1{,}2$
$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = p_0(x_0 - \mathrm{E}(\mathrm{X}))^2 + \cdots + p_r(x_r - \mathrm{E}(\mathrm{X}))^2 = 1{,}46$
$\sigma(\mathrm{X}) \approx 1{,}21$

b) $\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = p_0y_0 + \cdots + p_ry_r = 1{,}1$
$\mathrm{V}(\mathrm{Y}) = p_0(y_0 - \mathrm{E}(\mathrm{Y}))^2 + \cdots + p_r(y_r - \mathrm{E}(\mathrm{Y}))^2 = 0{,}0184$
$\sigma(\mathrm{Y}) \approx 0{,}14$

c) $\mathrm{E}(\mathrm{Z}) = p_0z_0 + \cdots + p_rz_r = 1{,}01$
$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = p_0(z_0 - \mathrm{E}(\mathrm{Z}))^2 + \cdots + p_r(z_r - \mathrm{E}(\mathrm{Z}))^2 \approx 2{,}05$
$\sigma(\mathrm{Z}) \approx 1{,}43$

Exercice 51

1) $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = p_0x_0 + \cdots + p_rx_r = 4{,}9$
$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = p_0(x_0 - \mathrm{E}(\mathrm{X}))^2 + \cdots + p_r(x_r - \mathrm{E}(\mathrm{X}))^2 = 1{,}81$
$\sigma(\mathrm{X}) \approx 1{,}35$

2) a)

y_j	0	1	2	3	4	5
$\mathrm{P}(\mathrm{Y} = y_j)$	0,05	0,12	0,18	0,3	0,23	0,12

FIGURE 4 – Tableau présentant la loi de probabilité de Y

z_j	2,4	3,6	4,8	6	7,2	8,4
$\mathrm{P}(\mathrm{Z} = z_j)$	0,05	0,12	0,18	0,3	0,23	0,12

FIGURE 5 – Tableau présentant la loi de probabilité de Z

t_j	2,8	3,7	4,6	5,5	6,4	7,3
$\mathrm{P}(\mathrm{T} = t_j)$	0,05	0,12	0,18	0,3	0,23	0,12

FIGURE 6 – Tableau présentant la loi de probabilité de T

b)

$$\begin{array}{lll} \mathrm{E(Y)} = \mathrm{E(X)} - 2 = 2{,}9 & \mathrm{E(Z)} = 5{,}88 & \mathrm{E(T)} = 5{,}41 \\ \mathrm{V(Y)} = 1{,}81 & \mathrm{V(Z)} \approx 2{,}61 & \mathrm{V(T)} \approx 1{,}47 \\ \sigma(\mathrm{Y}) \approx 1{,}35 & \sigma(\mathrm{Z}) = 1{,}62 & \sigma(\mathrm{T}) \approx 1{,}63 \end{array}$$

Exercice 52

a) $\mathrm{E(X)} = p_0 x_0 + \cdots + p_r x_r = 1{,}99$

b) $\mathrm{E(Y)} = p_0 y_0 + \cdots + p_r y_r = 2{,}13$

c) Au centre d'examen B, les candidats font plus d'erreurs en moyenne.

d) $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{V(X)}} = \sqrt{p_0(x_0 - \mathrm{E(X)})^2 + \cdots + p_r(x_r - \mathrm{E(X)})^2} \approx 1{,}24$

$\sigma(\mathrm{Y}) = \sqrt{\mathrm{V(Y)}} = \sqrt{p_0(y_0 - \mathrm{E(Y)})^2 + \cdots + p_r(y_r - \mathrm{E(Y)})^2} \approx 1{,}76$

La centre d'examen B a donc les résultats les plus dispérsés.

Exercice 56

a) Les représentations graphiques peuvent tous etre assimilées à des paraboles dont le sommet se situe à un abscisse de 25. Donc, les espérances des variables seront identiques. Les courbes sont symmétriques par rapport à la doite d'équation $x = 25$.

b) $\sigma(\mathrm{X}) < \sigma(\mathrm{Z}) < \sigma(\mathrm{Y})$

Exercice 60

$\mathrm{E(X)} = p_0 x_0 + \cdots + p_r x_r$; $\mathrm{V(X)} = p_0(x_0 - \mathrm{E(X)})^2 + \cdots + p_r(x_r - \mathrm{E(X)})^2$; $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{V(X)}}$

$$\begin{array}{ll} \mathrm{E(E_1)} = -0{,}21 & \mathrm{E(E_2)} = -0{,}21 \\ \mathrm{V(E_1)} = 2{,}2259 & \mathrm{V(E_2)} = 1{,}8459 \\ \sigma(\mathrm{E_1}) \approx 1{,}49 & \sigma(\mathrm{E_2}) \approx 1{,}36 \end{array}$$

La marque modélisée par $\mathrm{E_2}$ a une espérance identique à celle de $\mathrm{E_1}$, mais l'ecart-type est beacoup plus petit, donc il-y-a moins de risque d'avoir un produit très défectueux.

Exercice 61

a) Vrai. $\mathrm{E}(a\mathrm{X}) = a\mathrm{E(X)}$

b) Faux. $\sigma(\mathrm{X} + b) = \sigma(\mathrm{X})$

c) Vrai. $\mathrm{V}(0{,}9\mathrm{X}) = 0{,}9\mathrm{V(X)}$ $\quad \sigma(0{,}9\mathrm{X}) = 0{,}9\sigma(\mathrm{X})$

Exercice 62

$E(X) = 3{,}105$	$E(Y) = 3{,}045$	$E(Z) = 3{,}28$
$V(X) \approx 0{,}51$	$V(Y) \approx 0{,}38$	$V(Z) \approx 0{,}67$
$\sigma(X) \approx 0{,}72$	$\sigma(Y) \approx 0{,}62$	$\sigma(Z) \approx 0{,}82$

a) La production Z est la plus dispersée.

b) La production Z a la masse moyenne la plus élevée.

c) La production Y est la plus régulière.

Exercice 64

a) Vrai. Les tirages sont indépendants, donc : $P(B\,;R) = P(B) \times P(R) = P(R) \times P(B) = P(R\,;B)$

b) Faux. Les tirages sont indépendants, donc : $P(R\,;R) = P^2(R) = \frac{1}{16}$

c) Vrai. Les tirages sont indépendants, donc : $P(B\,;B) = P^2(B) = \frac{9}{16}$

Exercice 65

a) Il-y-a 36 issues possibles.

b) $P(A) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

$P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - P(\text{“on obtient deux fois 1”}) = \frac{12}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$

$P(C) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

Exercice 66

1.

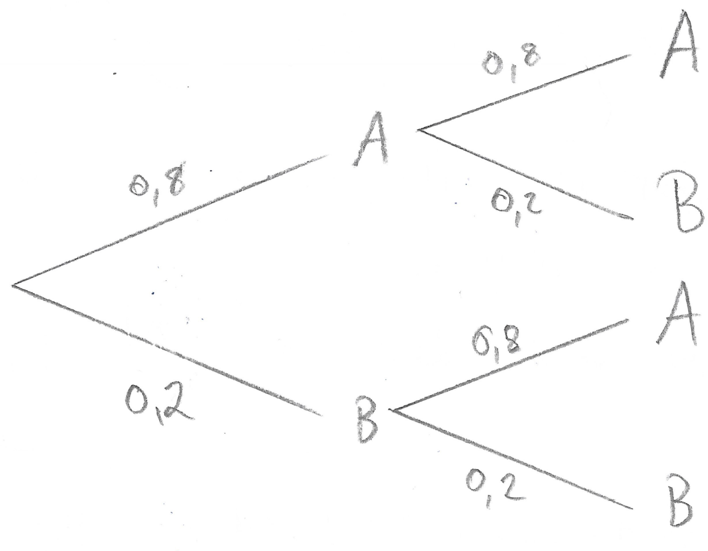

FIGURE 7 – Arbre pondéré

2. a) X prend les valeurs 0 ; 1 ; 2.

b) $P(X=0) = P(\bar{A})^2 = \frac{1}{25}$; $P(X=2) = P(A)^2 = \frac{16}{25}$

$P(X=1) = 1 - P(X=0) - P(X=2) = \frac{8}{25}$

c) $P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{24}{25}$

$P(X \leq 1) = P(X=1) + P(X=0) = \frac{9}{25}$

Exercice 67

a) L'affirmation de Victor est fausse. Chaque lancer est indépendant pusisque le dé n'est pas truqué.
Sa justification est fausse parce que il considère qu'au deuxieme lancer, il n'y a plus que cinq faces, or il y en a toujours six.

b) Valentine, quand à elle a raison. Il n'y a que $\frac{1}{6}$ de chance que l'un des deux joueurs commencent à jouer au premier tour.

Exercice 69

a)

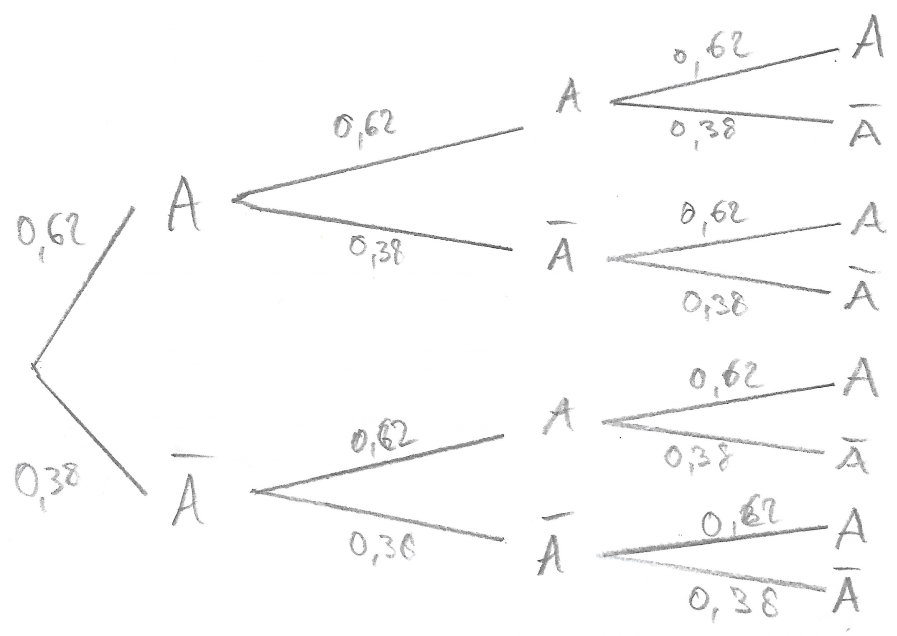

FIGURE 8 – Arbre pondéré

b) On pose la variable aléatoire X, qui représente le nombre d'usagers abonnés. Ses valeurs possibles sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3. On donne sa loi de probabilité par le tableau ci-dessous, avec $\quad P(X = x_i) = P(\bar{A})^{3-x_i} \times P(A)^{x_i} \times$ (Nombre d'issues de l'evenement)

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$0{,}38^3 \times 1 \approx 0{,}0549$	$0{,}38^2 \times 0{,}62 \times 3 \approx 0{,}2686$

x_i	2	3
$P(X = x_i)$	$0{,}38 \times 0{,}62^2 \times 3 \approx 0{,}4382$	$0{,}62^3 \times 1 \approx 0{,}2384$

FIGURE 9 – Tableau présentant la loi de probabilité de X

— P("Deux des usagers sont abonnés.") = $P(X = 2) \approx 0{,}4382$

— P("Au moins deux des usagers sont abonnés.") = $P(X \geq 2) \approx 0{,}6766$

— P("Au plus deux des usagers sont abonnés.") = $P(X \leq 2) \approx 0{,}7617$

c)
```python
import random
def s_abonnes(nbUsagers=10): # Voir Note 1
    X=0
    for ind in range(nbUsagers):
        if random.random()<0.62:
            X+=1
    return X

print(s_abonnes())

# Note 1: Il s'agit ici d'un "default parameter", c'est-à-dire que
# si l'utilisateur ne donne pas d'argument, alors 10 est utilisé.
```

On cherche quelle est la probabilité que sept des usagers sur les dix soient abonnés. J'utilise la méthode décrite dans le "Savoir-Faire" n° 4, Page 323.

Si on imagine l'arbre pondéré qui modélise la situation, on obtient un arbre énorme. La difficulté est de retrouver combien de branches de l'arbre satisfont notre évènement.

$$2^{10} = 1024 \quad \text{branches au niveau de la dernière colonne}$$

$$\sum_{n=1}^{10} (2^n) = 2048 \quad \text{branches en total}$$

Dont seulement une petite partie satisfont P("7 usagers sont abonnés") :

$$\frac{10!}{7! \times 3!} = 120^\dagger$$

Finallement, on a $P(Y = 7) = 0{,}62^7 \times 0{,}38^3 \times 120 \approx 0{,}2319$
Ceci est cohérent avec ce que je retrouve dans mes simualtions ($n = 10\,000$).
Cependant, je suis certain qu'il existe une méthode ∞ment plus simple de résoudre le problème, et que ne demande pas au moins une heure de recherche pour pouvoir calculer le nombre de combinations avec répetition possibles...

†. 10 niveaux dans l'arbre, avec 7 "la personne est abonnée", et 3 "la personne n'est pas abonnée".