# Exercices Chapitre sur la Trigonométrie [*]

Diego Van Overberghe

26 mai 2021

## Exercice 45

1. a) $\frac{\pi}{4} \times 8 = 2\pi$ Il faut donc multiplier par 8.
   b) $\frac{\pi}{4} \times 12 = 3\pi$ Il faut donc multiplier par 12.
2. a) $5\pi = \pi + 2 \times 2\pi$
   b) $27\pi = \pi + 13 \times 2\pi$
   c) $59\pi = -\pi + 30 \times 2\pi$

## Exercice 46

1. a) $\frac{\pi}{3}$ est associé au point A.
   b) $-\frac{\pi}{2}$ est associé au point Q.
   c) $4\pi$ est associé au point I.
   d) $-\pi$ est associé au point P.
   e) $-\frac{\pi}{4}$ est associé au point M.
   f) $\frac{13\pi}{6}$ est associé au point A.
   g) $-\frac{2\pi}{3}$ est associé au point K.
   h) $\frac{5\pi}{4}$ est associé au point H.
2. B : $\dfrac{\pi}{4}$ ; D : $\dfrac{2\pi}{3}$ ; E : $\dfrac{3\pi}{4}$ ; F : $\dfrac{5\pi}{6}$ ; G : $\dfrac{7\pi}{6}$ ; H : $\dfrac{5\pi}{4}$ ; L : $\dfrac{5\pi}{3}$ ; N : $\dfrac{11\pi}{6}$

## Exercice 47

a) Faux. 0 est associé au point $(1;0)$, et $\pi$ est associé au point $(-1;0)$

b) Vrai. $\dfrac{180}{\pi} \times \dfrac{2\pi}{5} = 72°$

c) Vrai.

d) Faux. $\dfrac{11\pi}{6} < 2\pi$

e) Vrai. Ajoutter $k \times 2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, ne fait que ajoutter une rotation entière, vu que le périmètre du cercle trigonométrique est $2\pi$

f) Faux. 103° est associé au nombre $\dfrac{103\pi}{180}$

[*] Page 202 du Manuel Hatier

## Exercice 50

a) Le périmètre de la bobine est de $2\pi$ puisque son rayon est 1. Or $\dfrac{2019\pi}{2} = 1009\pi + \dfrac{\pi}{2}$
Soit $\frac{1014\pi}{2\pi} = 513$ tours complets.

b) La première extremité se situe du côté droite du cercle. Après les 513 tours complets, il reste $\frac{\pi}{2}$ cm de fil. Ceci correspond à un angle de 90° en avant. L'autre éxtrémité du fil se situe donc du côté supérieur du cercle.

## Exercice 52

a) Faux. Chaque point du cercle trigonométrique est associé à une infinité de réels. Par exemple, le point 0 est associé au meme point que le point $2\pi$

b) Faux. Le point $\dfrac{\pi}{2}$ est associé au point de coordonnées $(0\,;1)$, le point $-\dfrac{\pi}{2}$ est associé au point de coordonnées $(0\,;-1)$

## Exercice 59

a) $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos -\dfrac{\pi}{2} = 0$ et $\sin -\dfrac{\pi}{2} = -1$

c) $\cos\dfrac{7\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\cos -\pi = -1$ et $\sin -\pi = 0$

e) $\cos -\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin -\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\cos\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

g) $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 1$

h) $\cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

i) $\cos\dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

j) $\cos\dfrac{3\pi}{2} = 0$ et $\sin\dfrac{3\pi}{2} = -1$

k) $\cos\dfrac{7\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$

l) $\cos -\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin -\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

## Exercice 60

a) Le point se situera dans le sécteur 4.

b) Le point se situera dans le sécteur 2.

c) Le point se situera dans le sécteur 3.

## Exercice 61

1. a) Les points d'abscisse $\frac{1}{2}$ sont les points C et L. Ils sont associés aux réels $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$ réspéctivement. Leurs sinus sont égaux à $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et à $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ réspéctivement.

   b) Les points d'abscisse $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont les points E et H. Ils sont associés aux réels $\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{3\pi}{4}$ réspéctivement. Leurs sinus sont égaux à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et à $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ réspéctivement.

2. a) Les points d'ordonée $\frac{1}{2}$ sont les points B et E. Ils sont associés aux réels $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$ réspéctivement. Leurs cosinus sont égaux à $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et à $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ réspéctivement.

   b) Les points d'ordonée $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont les points K et L. Ils sont associés aux réels $\frac{3\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$ réspéctivement. Leurs cosinus sont égaux à $-\frac{1}{2}$ et à $\frac{1}{2}$ réspéctivement.

## Exercice 63

1. La réponse correcte est la b. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. La réponse correcte est la a. $-1$
3. La réponse correcte est la c. $-\frac{1}{2}$
4. La réponse correcte est la a. $\frac{\pi}{3}$
5. La réponse correcte est la b. Les solutions sont : $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$

## Exercice 64

a) $\cos \frac{15\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin \frac{15\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos -\frac{5\pi}{2} = -1$ et $\sin -\frac{5\pi}{2} = 0$

c) $\cos -\frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin -\frac{9\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\cos -\frac{28\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin -\frac{28\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\cos -\frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin -\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

f) $\cos \frac{2018\pi}{4} = 0$ et $\sin \frac{2018\pi}{4} = 1$

## Exercice 65

a) $\cos\dfrac{101\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\dfrac{101\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

b) $\cos\dfrac{43\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\dfrac{43\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos\dfrac{19\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\dfrac{19\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

d) $\cos -\dfrac{25\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin -\dfrac{25\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\cos -\dfrac{21\pi}{2} = 0$ et $\sin -\dfrac{21\pi}{2} = -1$

f) $\cos -\dfrac{15\pi}{2} = 0$ et $\sin -\dfrac{15\pi}{2} = 1$

g) $\cos\dfrac{1981\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\dfrac{1981\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

## Exercice 65

a) $C = 1 + 0 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + 3}{2}$
   $S = 0 + 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + 3}{2}$

b) Les deux nombres sont égaux. Ceci est cohérent, vu que $\cos\dfrac{\pi}{2} = \sin 0$, $\cos\dfrac{\pi}{3} = \sin\dfrac{\pi}{6}$ et $\cos\dfrac{\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{4}$

## Exercice 77

Tout d'Abord, $\forall x \in [-2\pi\,;2\pi], -x \in [-2\pi\,;2\pi]$. Ceci est vrai pour chaque fonction qui suit.

a) On peut voir que la droite $x = 0$ est un axe de symmétrie de la courbe $\mathscr{C}_1$.
   Donc, $f_1(x) = f_1(-x)$, c'est-à-dire que la fonction est paire.

b) On peut voir que l'origine est un point de symmétrie de la courbe $\mathscr{C}_2$.
   Donc, $f_2(-x) = -f_2(x)$, c'est-à-dire que la fonction est impaire.

c) La fonction $f_3$ est quelconque. Elle est ni paire, ni impaire.

d) On peut voir que la droite $x = 0$ est un axe de symmétrie de la courbe $\mathscr{C}_4$.
   Donc, $f_4(x) = f_4(-x)$, c'est-à-dire que la fonction est paire.

## Exercice 78

Tout d'Abord, $\forall x \in [-2\pi\,;2\pi], -x \in [-2\pi\,;2\pi]$. Ceci est vrai pour chaque fonction qui suit.

a) On peut voir que l'origine est un point de symmétrie de la courbe $\mathscr{C}_1$.
   Donc, $f_1(-x) = -f_1(x)$, c'est-à-dire que la fonction est impaire.

b) On peut voir que la droite $x = 0$ est un axe de symmétrie de la courbe $\mathscr{C}_2$.
   Donc, $f_2(x) = f_2(-x)$, c'est-à-dire que la fonction est paire.

c) On peut voir que la droite $x = 0$ est un axe de symmétrie de la courbe $\mathscr{C}_3$.
   Donc, $f_3(x) = f_3(-x)$, c'est-à-dire que la fonction est paire.

d) On peut voir que la droite $x = 0$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_4$.
Donc, $f_4(x) = f_4(-x)$, c'est-à-dire que la fonction est paire.

## Exercice 80

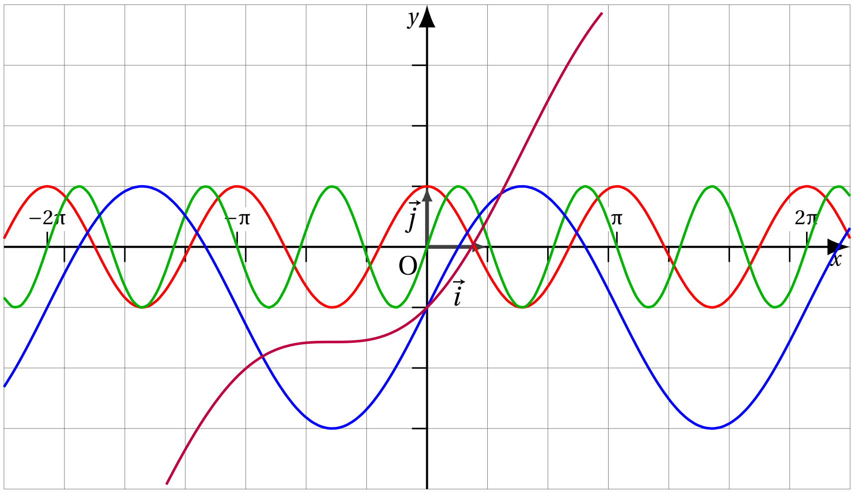


FIGURE 1 – Représentation Graphique des Fonctions $f$, $g$, $h$ et $k$

a) 1) Il s'agit de la courbe rouge.

2) On peut voir que la droite $x = 0$ est un axe de symétrie de la courbe rouge.
Donc, $f(-x) = f(x)$, c'est-à-dire que la fonction semble être paire.

3) $f(-x) = \cos(-2x) \qquad f(x) = \cos(2x) \iff f(x) = \cos(-2x) \iff f(-x) = f(x)$
La fonction est donc bien paire.

b) 1) Il s'agit de la courbe verte.

2) On peut voir que l'origine est un point de symétrie de la courbe verte.
Donc, $g(-x) = -g(x)$, c'est-à-dire que la fonction semble être impaire.

3) $g(-x) = \sin(-3x) \qquad -g(x) = -\sin(3x) \iff -g(x) = \sin(-3x) \iff g(-x) = -g(x)$
la fonction est donc bien impaire

c) 1) Il s'agit de la courbe bleue.

2) On a l'impression que la fonction est ni paire ni impaire.

3) $h(-x) = 2\sin(-x) - 1 = -2\sin(x) - 1 \neq h(x) \neq -h(x)$
La fonction est bien donc ni paire, ni impaire.

d) 1) Il s'agit de la courbe bordeaux.

2) On a l'impression que la fonction est ni paire ni impaire.

3) $k(-x) = -x - cos(-x) = -x - cos(x) \neq k(x) \neq -k(x)$
La fonction est bien donc ni paire, ni impaire.

## Exercice 81

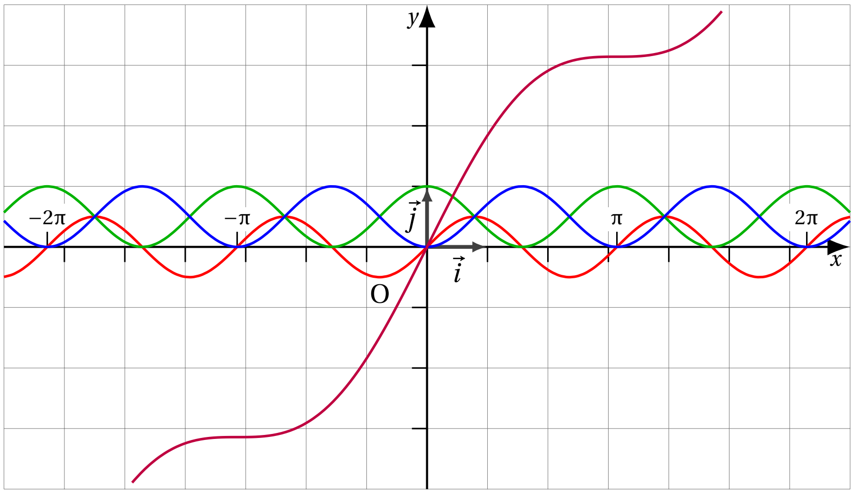


FIGURE 2 – Représentation Graphique des Fonctions $f$, $g$, $h$ et $k$

a) 1) Il s'agit de la courbe rouge.

2) On peut voir que l'origine est un point de symétrie de la courbe rouge. Donc, $f(-x) = -f(x)$, c'est-à-dire que la fonction semble être impaire.

3) $f(-x) = \cos(-x)\sin(-x) \quad -f(x) = -\cos(x)\sin(x) \iff -f(x) = \cos(-x)\sin(-x)$ $\iff f(-x) = -f(x)$ La fonction est bien impaire.

b) 1) Il s'agit de la courbe verte.

2) On peut voir que la droite $x = 0$ est un axe de symétrie de la courbe verte. Donc, $g(-x) = g(x)$, c'est-à-dire que la fonction semble être paire.

3) $g(-x) = (\cos(-x))^2 \quad g(x) = (\cos(x))^2 \iff g(x) = (\cos(-x))^2 \iff g(-x) = g(x)$ La fonction est donc bien paire.

c) 1) Il s'agit de la courbe bleue.

2) On peut voir que la droit $x = 9$ est un axe de symétrie de la courbe bleue. Donc, $h(-x) = h(x)$, c'est-à-dire que la fonction semble être paire.

3) $h(-x) = (\sin(-x))^2 \quad h(x) = (\sin(x))^2 \iff h(x) = (\sin(-x))^2 \iff h(-x) = h(x)$ La fonction est donc bien paire.

d) 1) Il s'agit de la droite bordeaux.

2) On peut voir que l'origine est un point de symétrie de la courbe bordeaux. Donc, $k(-x) = -k(x)$, c'est-à-dire que la fonction semble être impaire.

3) $k(-x) = -x + \sin(-x) \quad -k(x) = -x - \sin(x) \iff -k(x) = -x\sin(-x)$ $\iff k(-x) = -k(x)$ La fonction est bien impaire.

## Exercice 82

— $\mathscr{C}_1 \longrightarrow f(x)$

— $\mathscr{C}_2 \longrightarrow h(x)$

— $\mathscr{C}_3 \longrightarrow g(x)$

## Exercice 83

1) a) Vrai. $f(x+2k\pi) = f(x) \quad \text{avec } \left\{ k \in \mathbb{Z} \right.$

   b) Vrai. Pour la même raison.

2) Vrai. Rajoutter deux à $x$ revient à éffectuer un tour en plus du cercle trigonomérique, et ne change donc pas la valeur de $f(x)$.

## Exercice 88

a) Il semble que la période est autour de 6,2. On observe par lecture graphique que $g(x)$ semble compris entre 1 et 7.

b)
$$\begin{aligned} & g(x+y) = g(x) \\ \iff\ & 4+3\cos(x+y) = 4+3\cos(x) \\ \iff\ & \cos(x+y) = \cos(x) \\ \iff\ & y = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

La période est donc de $2k\pi$, avec $k = 1$, c'est-à-dire $2\pi \approx 6{,}3$

$$\begin{aligned} & -1 \leq \cos(x) \leq 1 \\ \iff\ & -3 \leq\ 3\cos(x) \leq 3 \\ \iff\ & 1 \leq\ 4+3\cos(x) \leq 7 \end{aligned}$$

La conjecture est vérifiée.

## Exercice 89

a)

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $\tan'(x)$ | $\Vert$ | $+$ | $\Vert$ |
| Variations de $x \mapsto \tan(x)$ | $\Vert$ | $\nearrow$ | $\Vert$ |

FIGURE 3 – Tableau de Signes et de Variations de la Fonction $\tan(x)$

b)

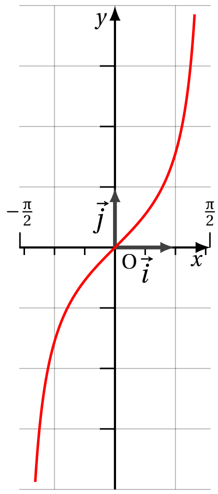


FIGURE 4 – Représentation Graphique de la Fonction $\tan(x)$

## Exercice 93

a) Il s'agit d'un triangle équilatéral.

b) Il faut calculer la hauteur du triangle. D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle rectangle $ABA'$ de côté $a$, où $A'$ est le projeté orthogonal de A sur [BC] :

$$AA' = \sqrt{AB^2 - BA'^2} = \sqrt{1 - 0{,}25} = \sqrt{0{,}75} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

On a donc $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) Pour en déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$, il faut retourner au triangle rectangle $ABA'$, où on cherche maintenant la valeur de $BA'$.

$$BA' = \sqrt{AB^2 - AA'^2} = \sqrt{1 - 0{,}75} = \sqrt{0{,}25} = \frac{1}{2}$$