

# Chapitre III

## Dénombrement et Combinatoire

### I. PARTIES D'UN ENSEMBLE

#### A. DÉFINITION

E étant un ensemble, la notation  $\subset$  signifie « inclus dans ».

$$A \subset E$$

C'est-à-dire que tout élément de A appartient à E.

On dit alors que A est une partie, ou sous-ensemble de E.

L'ensemble vide, noté  $\emptyset$  est une *partie* de tout ensemble.

L'ensemble des parties de E est noté  $\mathcal{P}(E)$ .

#### 1. EXEMPLE

Si  $E = \{x; y\}$  est un ensemble de deux éléments :

$$\mathcal{P}(E) = \left\{ \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x; y\} \right\}$$

#### B. DÉFINITION

Un ensemble fini est un ensemble dont le nombre d'éléments est fini.

#### C. DÉFINITION

On appelle cardinal, noté « Card », le nombre d'éléments d'un ensemble fini d'une partie (ou sous-ensemble).

#### 1. EXEMPLE

Si un ensemble E possède  $n$  éléments, alors on peut noter  $\text{Card}(E) = n$ .

Pour toute partie  $A \subset E$ ,  $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(E)$ .

#### D. PROPRIÉTÉ (PRINCIPE ADDITIF)

Si A et B sont deux parties quelconques d'un ensemble fini E, alors :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

De plus, si  $A_1, A_2, \dots, A_p$  sont  $p$  parties *deux à deux disjointes* d'un ensemble fini, alors :

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \dots + \text{Card}(A_p)$$

### E. PROPRIÉTÉ

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , et  $E$  un ensemble tel que  $\text{Card}(E) = n$ . Alors,  $E$  possède  $2^n$  parties.  
Autrement dit :

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$$

### 1. DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCE

#### A. INITIALISATION

Pour  $n = 0$ ,  $E = \emptyset$ , donc la seule partie de  $E$  est  $\{\emptyset\}$  et  $1 = 2^0$ .

#### B. HÉRÉDITÉ

Supposons que tout ensemble à  $k$  éléments, où  $k$  est un certain entier naturel, admet  $2^k$  parties.

Alors, soit  $E$ , un ensemble à  $k + 1$  éléments.

Soit  $x$ , un élément de  $E$ .

Alors, il y a deux familles de parties de  $E$ , celles qui contiennent  $x$  et celles qui ne le contiennent pas.

Or  $E \setminus \{x\}$  est un ensemble à  $k$  éléments, il y a donc  $2^k$  parties de  $E$  qui ne contiennent pas  $x$ .

En adjoignant  $x$  à toutes ces parties, on obtient toutes les parties qui contiennent  $x$ , donc il y en a également  $2^k$ .

Ainsi, le nombre de parties de  $E$  est de  $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ .  $\square$

## II. PRODUIT CARTÉSIEN D'ENSEMBLES

### A. DÉFINITION

- E et F étant deux ensembles, le *produit cartésien*  $E \times F$  est l'ensemble de couples  $(a; b)$ , où  $a \in E$  et  $b \in F$ .
- E, F et G étant trois ensembles, le *produit cartésien*  $E \times F \times G$  est l'ensemble des triplets  $(a; b; c)$  où  $a \in E$ ,  $b \in F$  et  $c \in G$ .

### 1. CAS GÉNÉRAL

- Le *produit cartésien*  $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$  des ensembles  $E_1, E_2, \dots, E_n$  est l'ensemble des *n-uplets*  $(a_1; a_2; \dots; a_n)$  où  $a_1 \in E_1, a_2 \in E_2, \dots, a_n \in E_n$ .

### B. NOTATIONS

$E \times E$  se note  $E^2$ ,  $\overbrace{E \times E \times \cdots \times E}^{k \text{ fois}}$  se note  $E^k$ .

### C. EXEMPLES

Soit  $E = \{a; b; c\}$  et  $F = \{1; 2\}$ .

- $E \times F = \{(a; 1); (a; 2); (b; 1); (b; 2); (c; 1); (c; 2)\}$
- $F \times F = \{(1; 1); (1; 2); (2; 1); (2; 2)\}$
- $(a; b; b; a; c)$  est un 5-uplet d'élément de  $E$ , il appartient à  $E^5$ .

### D. PROPRIÉTÉ

Si  $E_1, E_2, \dots, E_n$  sont  $n$  ensembles finis :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \cdots \times \text{Card}(E_n)$$

### 1. CAS PARTICULIER

Si E est un ensemble fini, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$\text{Card}(E^k) = (\text{Card}(E))^k$$

2. EXEMPLES

Dans les exemples précédents :

$$— \text{Card}(E \times F) = 6 = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$$

$$— \text{Card}(F^2) = 4 = 2^2 = (\text{Card}(F))^2$$

III. PERMUTATIONSA. DÉFINITION

Soit  $E$ , un ensemble à  $n$  éléments, une *permutation* est un  $n$ -uplet d'éléments distincts de  $E$ .

Autrement dit, une permutation est une façon d'ordonner les  $n$  éléments de  $E$ .

1. EXEMPLE

On considère l'ensemble  $G = \{a; b; c\}$ .

Ses permutations sont :

$$(a; b; c), (a; c; b), (b; a; c), (b; c; a), (c; a; b), (c; b; a)$$

$G$  admet donc 6 permutations.

B. PROPRIÉTÉ

Le nombre de permutations d'un ensemble à  $n$  éléments est  $n!$

1. REMARQUE

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

$n!$  est le produit de tous les entiers de 1 à  $n$ .

$n!$  se lit "factorielle de  $n$ ".

2. EXPLICATION

On peut considérer que faire une permutation c'est faire un tirage sans remise des  $n$  éléments de  $E$ . Il y a  $n$  choix pour le premier élément,  $n-1$  pour le deuxième et ainsi de suite.

3. DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCEA. INITIALISATION

Un ensemble à un élément admet une permutation, et  $1! = 1$ .

B. HÉRÉDITÉ

Supposons que tout ensemble à  $n$  élément ( $n$  fixe) admette  $n!$  permutations.

Soit  $E$ , un ensemble à  $n + 1$  éléments.

On choisit un élément  $x$  de  $E$ .

Dans chacune des permutations des  $n$  éléments restants, il y a  $n + 1$  positions où insérer  $x$ .

Ainsi, le nombre de permutations de  $E$  est  $(n + 1) \times n! = (n + 1)!$ .  $\square$

IV. COMBINAISONS

Dans tout ce sous-chapitre,  $E$  est un ensemble à  $n$  éléments et  $p$  est un entier naturel tel que  $p \leq n$ .

A. DÉFINITION

Une combinaison de  $p$  éléments de  $E$  est une partie de  $E$  possédant  $p$  éléments.

1. REMARQUE

L'ordre des éléments n'a pas d'importance, les éléments sont distincts.

B. PROPRIÉTÉ

Le nombre de combinaisons à  $p$  éléments de  $E$  est égal à  $\binom{n}{p}$ , où :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}$$

$\binom{n}{p}$  est appelé *coefficient binomial* et il se lit «  $p$  parmi  $n$  ».

1. EXPLICATION

Lorsqu'on choisit  $p$  éléments dans un ensemble à  $n$  éléments, on a  $n$  choix pour le premier,  $n - 1$  choix pour le deuxième, etc. mais ainsi, les  $p$  éléments sont ordonnés.

On divise donc par le nombre de permutations de  $p$  éléments, c'est-à-dire  $p!$ .

2. CAS PARTICULIERS

$\binom{n}{0} = 1$  La seule partie de  $E$  à 0 élément est  $\emptyset$ .

$\binom{n}{n} = 1$  La seule partie de  $E$  à  $n$  éléments est  $E$ .

$\binom{n}{1} = n$  Il y a  $n$  parties de  $E$  à 1 élément.

C. PROPRIÉTÉ : SYMÉTRIE

Choisir  $p$ , c'est ne pas choisir  $n - p$  :

$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$$

Démonstration Alternative :

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$$

D. PROPRIÉTÉ : RELATION DE PASCAL

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

1. DÉMONSTRATION

Soit  $E$ , un ensemble à  $n + 1$  éléments (on va compter le nombre de parties de  $E$  à  $p + 1$  éléments).

Soit  $x$  un élément de  $E$ .

Alors il y a deux « familles » de parties : celles qui contiennent  $x$  et celles qui ne le contiennent pas.

Or  $E \setminus \{x\}$  contient  $n$  éléments.

Donc il y a  $\binom{n}{p}$  à  $p$  éléments de  $E \setminus \{x\}$ .

En leur adjoignant  $x$ , on obtient toutes les parties à  $p + 1$  éléments qui contiennent  $x$ .

Il y a  $\binom{n}{p+1}$  parties de  $E$  qui ne contiennent pas  $x$ . (On choisit  $p + 1$  éléments dans  $E \setminus \{x\}$  qui contient  $n$  éléments).  $\square$

#### E. TRIANGLE DE PASCAL

$\begin{smallmatrix} p \\ n \end{smallmatrix}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

FIGURE 3.1. – Représentation du Triangle de Pascal

#### F. PROPRIÉTÉ

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$