

Chapitre VI

Équations Différentielles et Primitives

I. NOTION D'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

A. DÉFINITION

Une équation liant une fonction et ses dérivées est appelée *équation différentielle*.
En général, on note y la fonction, y' sa dérivée, y'' sa dérivée seconde.

B. EXEMPLES

- $y' = 2x$ est une équation différentielle définie sur \mathbb{R} dont *une* solution est $y = x^2$.
- $y' = y$ est une équation différentielle définie sur \mathbb{R} dont une solution est \exp .

1. REMARQUE

Ce ne sont pas les seules solutions !

C. REMARQUES

- (1) L'équation est dite de *premier ordre* ou *d'ordre 1* lorsque seule intervient la dérivée première d'une fonction (et éventuellement la fonction).
Par exemple : $y' = 3y - 5$.
- (2) Plutôt que d'écrire l'équation $f'(x) = 3f(x) - 5$, on note $f(x)$ à l'aide de la variable y , qui joue le rôle d'inconnue, ou plutôt de « fonction inconnue », car un point $(x ; y)$ appartient à la courbe représentative de f si et seulement si $y = f(x)$.
 y étant la variable utilisée pour les ordonnées et les images, il est cohérent de l'utiliser pour symboliser une fonction.

II. PRIMITIVES D'UNE FONCTION CONTINUE (SOLUTIONS DE $y' = f(x)$)

A. DÉFINITION

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Une primitive de f sur I est une fonction F telle que :

$$F' = f$$

B. EXEMPLE

La fonction $F : x \mapsto \frac{1}{x}$ est une primitive de $f : x \mapsto \frac{-1}{x^2}$, sur \mathbb{R}^{+*} .

C. THÉORÈME (DÉMONTRÉ DANS LE CHAPITRE SUR L'INTÉGRATION)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I .

D. REMARQUE

Il arrive qu'on ne puisse pas exprimer cette primitive avec les fonctions classiques.

1. EXEMPLE

$$f : x \mapsto e^{x^2}$$

E. THÉORÈME

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F est une primitive de f sur I .

Alors, f admet une infinité de primitives sur I ^① et toute primitive G de f sur I est définie par $G(x) = F(x) + k$ ^② où k est une constante réelle.

1. DÉMONSTRATION

1. Si F est une primitive de f , quel que soit le réel k , la fonction $G : x \mapsto F(x) + k$ est une primitive de f . En effet, $G'(x) = F'(x) = f(x)$, donc, il y a une infinité de primitives.
2. Si F et G sont deux primitives d'une même fonction f , alors :

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

La dérivée de $F - G$ est nulle, donc $F - G$ est une constante.

Donc, $\forall x \in I, F(x) - G(x) = k$

$$F(x) = G(x) + k \quad \square$$

On a montré que deux primitives d'une même fonction sont différents d'une constante.

III. CALCUL DES PRIMITIVES

A. PRIMITIVES DES FONCTIONS USUELLES

Fonction $f : x \mapsto$	Primitive $F : x \mapsto$	Intervalle
k (constante)	kx	\mathbb{R}
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	\mathbb{R}
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}$)	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}}$ ou $\frac{x^{-n+1}}{-n+1}$	$] -\infty ; 0[$ ou $] 0 ; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	\mathbb{R}^{+*}
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	\mathbb{R}^{+*}
e^x	e^x	\mathbb{R}
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	\mathbb{R}
$\cos(x)$	$\sin(x)$	\mathbb{R}

FIGURE 6.1. – Tableau des Primitives des Fonctions Usuelles

B. PRIMITIVES DE FONCTIONS COMPOSÉES

Les primitives se déduisent des formules de dérivation. u désigne une fonction continue sur I

Fonction f du type	Primitive F	Conditions
$u' u^n$ ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{1}{n+1} \times u^{n+1}$	–
$\frac{u'}{u^n} = u' u^{-n}$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$)	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{u^{n-1}}$ ou $\frac{u^{-n+1}}{-n+1}$	$\forall x \in I, u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$	$\forall x \in I, u(x) > 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$\forall x \in I, u(x) > 0$
$u' e^u$	e^u	–
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$	–
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$	–

FIGURE 6.2. – Tableau des Primitives de Fonctions Composées

C. PRIMITIVES ET OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS

1. THÉORÈME

Si F et G sont des primitives respectivement des fonctions f et g et si k est une constante réelle, $F + G$ est une primitive de $f + g$ et kF est une primitive de kf .

2. PROPRIÉTÉ

Si f est une fonction continue sur un intervalle tel que $ax + b \in I$, et F est une primitive de f , alors : $g : x \mapsto g(x) = f(ax + b)$ admet une primitive :

$$G(x) = \frac{1}{a}F(ax + b)$$

A. EXEMPLE

$$\begin{aligned} f(x) &= (3x - 2)^4 & F(x) &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} (3x - 2)^5 \\ & & &= \frac{1}{15} (3x - 2)^5 \end{aligned}$$

IV. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $y' - ay = 0$

A. THÉORÈME

Posons (E) : $y' = ay$

Soit $a \in \mathbb{R}$, les solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle (E) sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par $f(x) = Ce^{ax}$, où C est une constante réelle :

$$y' - ay = 0 \quad \mathcal{S} = \{x \mapsto Ce^{ax}, C \in \mathbb{R}\}$$

1. DÉMONSTRATION

- Toute fonction $f : x \mapsto f(x) = Ce^{ax}$ vérifie $f'(x) = aCe^{ax} = a \times f(x)$.
 f est donc solution de (E).
- Montrons que toute solution de (E) est sous la forme $x \mapsto Ce^{ax}$
Soit g , une solution de (E). On a $g' = ag$, or $f : x \mapsto f(x) = e^{ax}$ est solution de (E).
 f ne s'annulant pas, on peut définir $h : x \mapsto \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(x)}{e^{ax}}$.

On peut écrire $h(x) = g(x)e^{-ax}$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(x)e^{-ax} - ae^{-ax}g(x) \\ &= e^{-ax}(g'(x) - ag(x)) \quad \text{or} \quad g'(x) = ag(x) \\ &= e^{-ax} \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, h est une fonction constante, $\exists C$, $h(x) = C = \frac{g(x)}{e^{ax}}$.

$$g(x) = Ce^{ax}, C \in \mathbb{R} \quad \square$$

B. EXEMPLE

Soit l'équation $y' + 5y = 0 \iff y' = -5y$.

Les solutions de l'équation sont les fonctions f définies par

$$f(x) = Ce^{-5x}, C \in \mathbb{R}.$$

V. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES $y' - ay = k(x)$, k ÉTANT CONTINUE

A. MÉTHODE

Supposons qu'on a deux fonctions f et g , solutions de l'équation

$$(E) : y' - ay = k(x).$$

Alors la fonction $h(x)$, définie par $h(x) = g(x) - f(x)$ est solution de l'équation $y' - ay = 0$.

1. VÉRIFICATION

$$\begin{aligned} h'(x) - ah(x) &= g'(x) - f'(x) - a(g(x) - f(x)) \\ &= g'(x) - ag(x) - (f'(x) - af(x)) \\ &= k(x) - k(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout x (sur un ensemble de définition que l'on n'a pas étudié) :

$$h(x) = Ce^{ax}, C \in \mathbb{R} \quad (\text{d'après §IV})$$

Donc, si l'on trouve une solution particulière f de l'équation (E) toute solution s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) + Ce^{ax}, C \in \mathbb{R} \\ \text{car } g(x) - f(x) &= h(x) = Ce^{ax} \end{aligned}$$

B. EXEMPLE

Soit l'équation différentielle $y' + y = \frac{x-1}{x^2}$. (E)

1. Vérifier que la fonction inverse est solution de (E).

2. En déduire toutes les solutions de (E).

1. Soit $f_0 : x \mapsto \frac{1}{x}$ alors $f_0' = -\frac{1}{x^2}$.

$f_0' + f_0 = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$, la fonction inverse est solution de (E) sur \mathbb{R}^{+*} .

2. D'après la démonstration précédente, toute solution f de (E) est de la forme

$f : x \mapsto f_0(x) + Ce^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$.

On résout $y' + u = 0$: ici $a = -1$.

Ainsi, les solutions sont :

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto \frac{1}{x} + Ce^{ax}, C \in \mathbb{R} \right\}$$

C. EXEMPLE

Soit l'équation $y' - 2y = 5$. (E)

1. Trouvons une fonction constante solution (E).

La fonction $x \mapsto \frac{-5}{2}$ convient.

2. On résout $y' - 2y = 0$:

$$\left\{ x \mapsto Ce^{2x}, C \in \mathbb{R} \right\}$$

Les solutions de (E) sont les fonctions du type :

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto \frac{-5}{2} + Ce^{2x}, C \in \mathbb{R} \right\}$$