Exercices Chapitre sur le Produit Scalaire *

Diego Van Overberghe

4 Juin 2020

Exercice 34

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \dfrac{\pi}{6} = AB \times AC \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{20\sqrt{3}}{2}$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH = 5$
H étant le projeté orthogonal de AC sur [AB].

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH = 20$
H étant le projeté orthogonal de AC sur la demie-droite [AB)

d) $\widehat{BAC} = 60° = \dfrac{\pi}{3}$ (angles alternes-internes)
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \dfrac{\pi}{3} = 12$

e) Non Traité

Exercice 35

a) $-2\vec{u} \cdot (3\vec{u} + \vec{v}) = -6\vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = -166$

b) $-8\vec{u}^2 + 14\vec{u} \cdot \vec{v} - 3\vec{v}^2 = -155$

c) Demander Correction

d) Demander Correction

Exercice 44

a) La projéction orthogonale de $\overrightarrow{AC}$ sur (AB) est $\overrightarrow{AO}$

b) La projéction orthogonale de $\overrightarrow{BD}$ sur (DC) est $\overrightarrow{DO}$

c) La projéction orthogonale de $\overrightarrow{OC}$ sur (BC) est $\overrightarrow{OC}$

d) La projéction orthogonale de $\overrightarrow{AD}$ sur (CD) est $\overrightarrow{OD}$

e) La projéction orthogonale de $\overrightarrow{OB}$ sur (EF) est $\overrightarrow{OE}$

f) La projéction orthogonale de $\overrightarrow{AB}$ sur (EF) est $\overrightarrow{FE}$

* Page 233 du manuel Hatier

Exercice 45

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 1$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -1$

c) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = -\frac{1}{2}$

d) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

e) $\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}$

f) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}$

Exercice 46

a) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = EF \times EG \times \cos \frac{\pi}{2} = 12\sqrt{2}$

b) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = EF \times EG \times \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{15\sqrt{3}}{2}$

Exercice 48

a) $\vec{u}\binom{2}{-1}$, $\vec{v}\binom{4}{5}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}} = 3$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}} = \frac{-7}{8}$

c) $\vec{u} = 3\overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath}$, et $\vec{v} = 3\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}} = 11$

Exercice 49

a) Faux. Si les deux vecteurs ont un sens opposé, alors le produit scalaire sera l'opposé du produit de leurs normes.

b) Faux. Il suffit d'imaginer deux vecteurs ayant le même projeté orthogonal sur un vecteur. Ces deux derniers sont différents, et pourtant leur produit scalaire est identique.

c) Faux. $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \iff \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 < 0$
Or, un nombre au carré est positif.

d) Vrai. $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos 0$[1] $= \|\vec{u}\|^2$

Exercice 50

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -9$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -12$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8$

d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -10$

---

1. L'angle entre deux vecteurs identiques est 0°

Exercice 51

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$

b) $\vec{t} \cdot \vec{w} = -12$

c) $\vec{m} \cdot \vec{h} = 2$

d) $\vec{w} \cdot \vec{u} = 16$

e) $\vec{v} \cdot \vec{w} = 12$

f) $\vec{m} \cdot \vec{u} = 12$

Exercice 52

1. a) $\|\vec{u}\| = 4 \quad \|\vec{v}\| = 3\sqrt{2}$

   b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$

   c) $cos\,\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \alpha = 45°$

2. a) $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{2} \quad \|\vec{v}\| = 4$

   b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -8$

   c) $cos\,\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \alpha = 135°$

3. a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{5} \quad \|\vec{v}\| = 3$

   b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$

   c) $cos\,\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \quad \alpha \approx 63°$

4. a) $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{2} \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{10}$

   b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$

   c) $cos\,\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \quad \alpha \approx 63°$

Exercice 53

1. a) Ce n'est pas possible. L'angle est inférieur à 90° mais le produit scalaire est négatif.

   b) $AC = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times \cos \dfrac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2}$

2. a) $cos\,\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \alpha = 135°$

   b) Ce n'est pas possible. $AB \times AC = 10$, Or, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 15$

   c) $AB \times AC = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, Donc, $\alpha = 0°$

Exercice 54

a) $5\vec{u}^2 + 9\vec{u}\cdot\vec{v} - 2\vec{v}^2 = 117$

b) $\vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 = 30$

Exercice 57

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = 20$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = 8$

c) Le triangle est réctangle en B. Le projeté orthogonal de C sur [AB] est B.
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AB = 36$

ou

D'Après le théorème de Pythagore : $BC^2 = AC^2 - AB^2 = 64$
Alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 36$

d) $BC = AD = 7$ Donc, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = -4$

Exercice 58

a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = x_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}} = 4$

b) $-4\vec{u}\cdot\vec{v} = -16$

c) $-2\vec{u}\cdot\vec{v} = -8$

d) $\vec{u}+\vec{v} = \binom{2}{-4}$ $\vec{u}-\vec{v} = \binom{0}{-2}$
$\binom{2}{-4}\cdot\binom{0}{-2} = 8$

Exercice 60

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB \times AC \implies$ A,B et C sont alignés.

b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \implies \vec{u} = 0$ ou $\vec{v} = 0$

c) $\vec{u} = 3\vec{v} \implies \vec{u}^2 = 9\vec{v}^2$

d) $\|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \overrightarrow{0}$

Exercice 61

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\, 40° \approx 15{,}3$

b) D'Après le théorème d'Al-Kashi, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos\, \widehat{A}$.
Donc, $cos\,\widehat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \dfrac{6^2 + 4^2 - 3^2}{2 \times 6 \times 4} = 21{,}5$

c) Le triangle est isocèle, donc, le projeté orthogonal de B sur [AC] se situe au centre de ce ségment. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 6 \times 3 = 18$

d) On imagine le point E qui forme le carré ADCE, avec une diagonale de 3, et donc un côté de $\frac{3}{\sqrt{2}}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{15}{\sqrt{2}}$

e) On assume que ADCB est un parallélogramme. On imagine le point E qui forme le réctangle HDCE, [EB] = 1. E est le projeté orthogonal de C sur [AE]. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 30$

f) $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = (\pi - \dfrac{2\pi}{3}) = -\dfrac{\pi}{3})$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 7 \times \cos -\dfrac{-\pi}{3} = \dfrac{7}{2}$

Exercice 63

a) Méthode 1 : On utilise la relation de Chasles.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{ED} &= (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD}) \\ &= \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} \\ &= 9{,}25\end{aligned}$$

Méthode 2 : Posons le repère $(A\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$ où $\begin{pmatrix}\vec{\imath} = \frac{1}{6}\vec{AB} \\ \vec{\jmath} = \frac{1}{4}\vec{AC}\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{EC} \begin{pmatrix} x_C - x_E = -1{,}5 \\ y_C - y_E = 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{ED} \begin{pmatrix} x_D - x_E = 4{,}5 \\ y_D - y_E = 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{ED} = x_{\overrightarrow{EC}} \times x_{\overrightarrow{ED}} + y_{\overrightarrow{EC}} \times y_{\overrightarrow{ED}} = 9{,}25$$

Angle $\widehat{DEC}$: $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{ED} = EC \times ED \times \cos\, \widehat{DEC}$

$$EC = \sqrt{x^2_{\overrightarrow{EC}} + y^2_{\overrightarrow{EC}}} = \sqrt{18{,}25}$$

$$ED = \sqrt{x^2_{\overrightarrow{ED}} + y^2_{\overrightarrow{ED}}} = \sqrt{36{,}25}$$

$$cos\, \widehat{DEC} = \frac{\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{ED}}{EC \times ED} = \frac{9{,}25}{\sqrt{661{,}5625}}$$

$$\widehat{DEC} = cos^{-1}\left(\frac{9{,}25}{\sqrt{661{,}5625}} \right) \approx 68{,}92°$$

b) Méthode 1 : On voit que B est le projeté orthogonal de E sur [DB], donc,

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE} = DB \times DB = 16$$

Méthode 2 : Dans $(A; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath}\,)$: $\overrightarrow{DB}(0\,;-4)$ $\overrightarrow{DE}(-4{,}5\,;-4)$

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DE} = 16$$

Longeur de BF : Aire DBC $= \dfrac{DB \times DE}{2} = \dfrac{DF \times DE}{2}$ donc $DB \times BE = BF \times DE$

$$BF = \frac{DB \times BE}{DE} \approx 2{,}99$$

Exercice 65

a) Faux. Les vecteurs sont colinéaires. $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_{\vec{u}} x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}} y_{\vec{v}} = -13$
$\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0 \iff \neg(\vec{u} \perp \vec{v})$

b) Vrai. $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_{\vec{u}} x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}} y_{\vec{v}} = 0$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$ (Parce que $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$)

c) Faux. Pour $a = 2$, on a $\vec{u}\binom{2}{-1}$ et $\vec{v}\binom{0}{1}$. Or $x_{\vec{u}} x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}} y_{\vec{v}} = -1$
$\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0 \iff \neg(\vec{u} \perp \vec{v})$

d) On a $\vec{u}\binom{2}{-3}$ et $\vec{v}\binom{6}{4}$. $x_{\vec{u}} x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}} y_{\vec{v}} = 0$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$ (Parce que $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$)

Exercice 66

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff x_{\vec{u}} x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}} y_{\vec{v}} = 0$

a) $\vec{u} \perp \vec{v}$ pour $\vec{v}\binom{-2}{1}$

b) $\vec{u} \perp \vec{v}$ pour $\vec{v}\binom{4}{3}$

c) $\vec{u} \perp \vec{v}$ pour $\vec{v}\binom{1}{-2}$

d) $\vec{u} \perp \vec{v}$ pour $\vec{v}\binom{2}{\sqrt{2}}$

e) $\vec{u} \perp \vec{v}$ pour $\vec{v}\binom{-a}{1}$

Exercice 68

a) Vrai. Si les deux vecteurs sont orthogonaux, alors, leur produit scalaire sera nul.

$$\begin{aligned} & (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0 \\ \iff & \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = 0 \\ \iff & \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0 \\ \iff & \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \end{aligned}$$

b) Vrai.

c) Vrai. Il s'agit tout simplement du théorème de Pythagore.

d) Vrai. Ici, il s'agit de la réciproque du théorème de Pythagore.

Exercice 69

Si ABC est réctangle, alors, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A = 2 \\ y_B - y_A = 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} x_C - x_B = 2 \\ y_C - y_B = -3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = x_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{BC}} + y_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{BC}} = 1$ Donc, $\widehat{B} \neq 90°$

Exercice 70

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 15 + m$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff 15 + m = 0 \iff m = -15$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5m - 6$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff 5m - 6 = 0 \iff m = \dfrac{6}{5}$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8 - m^2$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff 8 - m^2 = 0 \iff m = 2\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad m = -2\sqrt{2}$

d) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff m = m$

Exercice 72

a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A = -3 \\ y_B - y_A = 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} x_D - x_A = -1 \\ y_D - y_A = -3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} x_A - x_B = 3 \\ y_A - y_B = -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} x_C - x_B = -2 \\ y_C - y_B = -6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = x_{\overrightarrow{AB}} x_{\overrightarrow{AD}} + y_{\overrightarrow{AB}} y_{\overrightarrow{AD}} = 0$
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = x_{\overrightarrow{BA}} x_{\overrightarrow{BC}} + y_{\overrightarrow{BA}} y_{\overrightarrow{BC}} = 0$

b) $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, puisque ils sont tous les deux orthogonaux avec $\overrightarrow{AB}$. Donc, [AD] et [BC] sont parallèles. Comme AD $\neq$ BC ($\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$), il ne s'agit pas d'un carré ou d'un rectangle, donc le quadrilatère est un trapèze.

Exercice 73

a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A = 1 \\ y_B - y_A = 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x_D - x_C = -5 \\ y_D - y_C = 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = x_{\overrightarrow{AB}} x_{\overrightarrow{CD}} + y_{\overrightarrow{AB}} y_{\overrightarrow{CD}} = -1$

$\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0 \iff \neg(\vec{u} \perp \vec{v})$

On peut donc conclure que (AB) et (CD) ne sont pas perpendiculaires.

b) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A = 2 \\ y_B - y_A = -7 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x_D - x_C = -7 \\ y_D - y_C = -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = x_{\overrightarrow{AB}} x_{\overrightarrow{CD}} + y_{\overrightarrow{AB}} y_{\overrightarrow{CD}} = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \impliedby \vec{u} \perp \vec{v} \quad$ (Parce que $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$)

On peut donc conclure que (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

c) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A = & \sqrt{2}-\sqrt{3} \\ y_B - y_A = & -5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C = & 5 \\ y_D - y_C = & \sqrt{2}-\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = x_{\overrightarrow{AB}}x_{\overrightarrow{CD}} + y_{\overrightarrow{AB}}y_{\overrightarrow{CD}} = 0$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Longleftarrow \vec{u}\perp\vec{v}$ (Parce que $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$)

On peut donc conclure que (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 74

a) On pose le repère $(A;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ où $\begin{pmatrix} \vec{\imath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \\ \vec{\jmath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \end{pmatrix}$

$A(0;0)$, $G(-2;4)$, $H(6;4)$

$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} x_G - x_A = & -2 \\ y_G - y_A = & 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} x_H - x_A = & 6 \\ y_H - y_A = & 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AH} = x_{\overrightarrow{AG}}\times x_{\overrightarrow{AH}} + y_{\overrightarrow{AG}}\times y_{\overrightarrow{AH}} = 4$ Donc, $\widehat{A}\neq 90°$

Exercice 78

1)
```python
def orthogonaux(a,b,c,d):
    p=a*c+b*d
    if p==0:
        return True
    else:
        return False
```

2) a) True

b) False

Exercice 79

1) a) Méthode 1 : $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} x_H - x_A = & x_H \\ y_H - y_A = & y_H - 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} x_B - x_C = & 4 \\ y_B - y_C = & -4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB} = x_{\overrightarrow{AH}}x_{\overrightarrow{CB}} + y_{\overrightarrow{AH}}y_{\overrightarrow{CB}} = 4x_H - 4y_H + 12$

Méthode 2 : La hauteur issue de BC passe par le point H et A.
Donc, $([AH]\perp[CB]) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$

b) On a donc,

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB} = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & 4x_H - 4y_H + 12 = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & 4x_H - 4y_H - 12 \\ \Longleftrightarrow\ & x_H = y_H - 3 \\ \Longleftrightarrow\ & y_H = x_H + 3 \end{aligned}$$

2) Méthode 1 : $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} x_H - x_B = x-2 \\ y_H - y_B = y+1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A = -2 \\ y_C - y_A = 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC} = x_{\overrightarrow{BH}}x_{\overrightarrow{AC}} + y_{\overrightarrow{BH}}y_{\overrightarrow{AC}} = 4 - 2x_H$

Méthode 2 : La hauteur issue de AC passe par le point H et B.
Donc, $([BH] \perp [AC]) \iff \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$

3) $\begin{cases} 4 - 2x_H = 0 \\ y_H = x_H + 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_H = 2 \\ y_H = 5 \end{cases}$ H(2 ;5)

Exercice 81

a) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EA} = CD \times EA \times \cos 0 = ax$
$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AD} = DF \times AD \times \cos 180° = -ax$

b) On pose le repère $\left(D ;\overrightarrow{DC} ;\overrightarrow{DA}\right)$.

$\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix} x_F - x_C = -a \\ y_F - y_C = x \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix} x_D - x_E = -x \\ y_D - y_E = -a \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{ED} = -a \times -x - a \times x = 0$

Or, $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{ED} = 0 \iff (CF) \perp (ED)$

Exercice 83

Tout d'Abord, $(TU) \perp (RS) \implies \overrightarrow{TU}\cdot\overrightarrow{RS} = 0 \iff x_{\overrightarrow{TU}}x_{\overrightarrow{RS}} + y_{\overrightarrow{TU}}y_{\overrightarrow{RS}} = 0$

De plus, $\overrightarrow{RS}\binom{x_S - x_R}{y_S - y_R} \iff \overrightarrow{RS}\binom{6}{2}$, et $x_{\overrightarrow{TU}} = x_U - x_T$, $y_{\overrightarrow{TU}} = y_U - y_T$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{TU}\cdot\overrightarrow{RS} = 0 &\iff 6x_{\overrightarrow{TU}} + 2y_{\overrightarrow{TU}} = 0 \\ &\iff 6(x_U - 3) = -2(y_U + 2) \\ &\iff 6x_U - 18 = -2y_U - 4 \\ &\iff 6x_U + 2y_U = 14 \end{aligned}$$

Tout doublet qui satisfie cette equation représente un point qui se situera sur la droite (TU), mais n'appartiendra pas forcément à la doite (RS).
On définit donc cette droite. $y = \frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$
On cherche donc le doublet qui satisfait les deux équations.

$$\begin{cases} 6x_U + 2y_U = 14 \\ y_U = \dfrac{1}{3}x_U + \dfrac{11}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} 6x_U + \dfrac{2}{3}x_U + \dfrac{22}{3} = 14 \\ y_U = \dfrac{1}{3}x_U + \dfrac{11}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x_U = 1 \\ y_U = 4 \end{cases} \quad U(1 ;4)$$

Exercice 85

D'Après le théorème d'Al-Kashi :
$AC^2 = BC^2 + BA^2 - 2 \times BC \times BA \times \cos \widehat{ABC}$
$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos 30°} \approx 4{,}6$

Exercice 86

D'Après le théorème d'Al-Kashi :

$\mathrm{EF}^2 = \mathrm{DE}^2 + \mathrm{DF}^2 - 2 \times \mathrm{DE} \times \mathrm{DF} \times \cos\, \widehat{\mathrm{EDF}}$

$\mathrm{EF} = \sqrt{\mathrm{DE}^2 + \mathrm{DF}^2 - 2\mathrm{DE} \times \mathrm{DF} \times \cos\, 45°} \approx 3{,}6$

Exercice 87

a) $\mathrm{IJ}^2 + \mathrm{JK}^2 = \mathrm{IK}^2$

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle IJK est un triangle rectangle en J.

b) $\widehat{\mathrm{J}} = 90°$

$$\widehat{\mathrm{I}} = \cos^{-1}\left(\frac{j^2 + k^2 - i^2}{2jk}\right) \approx 41°$$

$$\widehat{\mathrm{K}} = \cos^{-1}\left(\frac{i^2 + j^2 - k^2}{2ij}\right) \approx 49°$$

Exercice 89

a) $\cos\, \widehat{\mathrm{G}} = \dfrac{h^2 + l^2 - g^2}{2hl} = \dfrac{31}{44}$

$\cos\, \widehat{\mathrm{H}} = \dfrac{g^2 + l^2 - h^2}{2gl} = -\dfrac{7}{32}$

b) $\widehat{\mathrm{L}} = 180 - \cos^{-1}\left(\dfrac{31}{44}\right) - \cos^{-1}\left(-\dfrac{7}{32}\right) \approx 32{,}2°$

Exercice 90

$$\begin{aligned} & \mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 = 2\mathrm{MI}^2 + \frac{\mathrm{AB}^2}{2} \\ \iff \quad & \mathrm{MI} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 - \frac{\mathrm{AB}^2}{2}\right)} \\ \iff \quad & \mathrm{MI} = 5 \end{aligned}$$

Exercice 91

$n^2 = q^2 + r^2 - 2pr \times \cos\, \widehat{\mathrm{N}} = 76$

$n = 2\sqrt{19} \approx 8{,}7 \approx 4{,}4\mathrm{NP}$

Exercice 92

D'après le théorème d'Al-Kashi :

$$\begin{aligned}
& r^2 = s^2 + n^2 - 2sn \times \cos \widehat{\mathrm{R}} \\
\iff\quad & \widehat{\mathrm{R}} = \cos^{-1}\left(\frac{s^2+n^2-r^2}{2sn}\right) \approx 123^\circ
\end{aligned}$$

De même, $\widehat{\mathrm{N}} = \cos^{-1}\left(\dfrac{r^2+s^2-n^2}{2rs}\right) \approx 16^\circ$

$$\widehat{\mathrm{S}} = \cos^{-1}\left(\frac{n^2+r^2-s^2}{2nr}\right) \approx 41^\circ$$

Exercice 93

a) D'après le théorème d'Al-Kashi dans le trianlge ABC, et avec $a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{AC}$ et $c = \mathrm{AB}$:

$$\begin{aligned}
& a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos \widehat{\mathrm{A}} \\
\iff\quad & \widehat{\mathrm{A}} = \cos^{-1}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) \approx 26{,}6^\circ
\end{aligned}$$

De même, $\widehat{\mathrm{B}} = \cos^{-1}\left(\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right) \approx 137{,}9^\circ$

$$\widehat{\mathrm{C}} = \cos^{-1}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) \approx 15{,}6^\circ$$

b) D'après le théorème d'Al-Kashi dans le triangle EDF, et avec $d = \mathrm{EF}$, $e = \mathrm{DF}$ et $f = \mathrm{DE}$:

$$\begin{aligned}
d &= \sqrt{e^2 + f^2 - 2ef \times \cos \frac{\pi}{3}} \\
&= \sqrt{79} \\
&\approx 8{,}9
\end{aligned}$$

c) D'après le théorème d'Al-Kashi dans le triangle IJK, et avec $i = \mathrm{JK}$, $j = \mathrm{IK}$ et $k = \mathrm{IJ}$:

$$\begin{aligned}
i &= \sqrt{j^2 + k^2 - 2jk \times \cos \frac{\pi}{6}} \\
&\approx 17{,}8
\end{aligned}$$

d) D'après le théorème d'Al-Kashi dans le triangle GHL, et avec $g = \mathrm{HL}$, $l = \mathrm{GH}$ et $h = \mathrm{GL}$:

$$\begin{aligned}
& h^2 = g^2 + l^2 - 2gl \times \cos \widehat{\mathrm{H}} \\
\iff\quad & \widehat{\mathrm{H}} = \cos^{-1}\left(\frac{g^2+l^2-h^2}{2gl}\right) \approx 71^\circ
\end{aligned}$$

Exercice 95

D'après le théorème de la médiane :

$$\begin{aligned}
& \mathrm{MP}^2+\mathrm{MN}^2=2\mathrm{MM}'^2+\frac{\mathrm{MP}^2}{2}\\
\iff\ & \mathrm{MM}'=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\mathrm{MP}^2+\mathrm{MN}^2-\frac{\mathrm{NP}^2}{2}\right)}\\
\iff\ & \mathrm{MM}'\approx 6{,}2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathrm{MP}^2+\mathrm{NP}^2=2\mathrm{PP}'^2+\frac{\mathrm{NM}^2}{2}\\
\iff\ & \mathrm{PP}'=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\mathrm{MP}^2+\mathrm{NP}^2-\frac{\mathrm{NM}^2}{2}\right)}\\
\iff\ & \mathrm{PP}'\approx 4{,}5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathrm{NM}^2+\mathrm{NP}^2=2\mathrm{NN}'^2+\frac{\mathrm{MP}^2}{2}\\
\iff\ & \mathrm{NN}'=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\mathrm{NM}^2+\mathrm{NP}^2-\frac{\mathrm{MP}^2}{2}\right)}\\
\iff\ & \mathrm{NN}'\approx 7{,}9
\end{aligned}$$

Exercice 96

a) D'après le théorème d'Al-Kashi dans le triangle ABC, avec $a=\mathrm{BC}$, $b=\mathrm{AC}$ et $c=\mathrm{AB}$:

$$\begin{aligned}
& b^2=a^2+c^2-2ac\times\cos\widehat{\mathrm{B}}\\
\iff\ & b=\sqrt{a^2+c^2-2ac\times\cos\widehat{\mathrm{B}}}\\
\iff\ & \mathrm{AC}=\sqrt{19}\approx 4{,}4
\end{aligned}$$

b) De plus,

$$\begin{aligned}
& \widehat{\mathrm{A}}=\cos^{-1}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\\
\iff\ & \widehat{\mathrm{A}}\approx 32°
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \widehat{\mathrm{C}}=180-30-32\\
\iff\ & \widehat{\mathrm{C}}=118°
\end{aligned}$$

Exercice 97

a) D'Après le théorème d'Al-Kashi dans le triangle IMJ,
avec $i = \text{MJ}$, $m = \text{IJ}$ et $j = \text{IM}$. $\widehat{\text{I}} = 30°$:

$$\begin{aligned} & i^2 = m^2 + j^2 - 2mj \times \cos \widehat{\text{I}} \\ \iff \quad & i = \sqrt{m^2 + j^2 - 2mj \times \cos \widehat{\text{I}}} \\ \iff \quad & \text{MJ} \approx 3{,}4 \end{aligned}$$

De même, dans le triangle IML,
avec $i = [\text{ML}]$, $m = [\text{IL}]$ et $l = [\text{IM}]$. $\widehat{\text{I}} = 60°$:

$$\begin{aligned} & i^2 = m^2 + l^2 - 2ml \times \cos \widehat{\text{I}} \\ \iff \quad & i = \sqrt{m^2 + l^2 - 2ml \times \cos \widehat{\text{I}}} \\ \iff \quad & \text{ML} \approx 3{,}5 \end{aligned}$$

b) On cherche d'Abord $\widehat{\text{MLK}}$. $\widehat{\text{MLK}} = 90 - \widehat{\text{ILM}}$
D'après le théorème d'Al-Kashi dans le triangle IML, avec $l = \text{IM}$, $i = \text{ML}$ et $m = \text{IL}$:

c)

$$\begin{aligned} & l^2 = i^2 + m^2 - 2im \times \cos \widehat{\text{ILM}} \\ \iff \quad & \widehat{\text{ILM}} = \cos^{-1}\left(\frac{i^2 + m^2 - l^2}{2im}\right) \\ \iff \quad & \widehat{\text{ILM}} = 30° = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

On conclut que $\widehat{\text{MLK}} = 60° = \frac{\pi}{3}$
D'après le théorème d'Al-Kashi, dans le triangle MLK, avec $l = \text{MK}$, $m = \text{LK}$ et $k = \text{ML}$:

$$\begin{aligned} & l^2 = m^2 + k^2 - 2mk \times \cos \widehat{\text{L}} \\ \iff \quad & l = \sqrt{m^2 + k^2 - 2mk \times \cos \widehat{\text{L}}} \\ \iff \quad & \text{MK} \approx 4{,}4 \end{aligned}$$

Exercice 99

$[\text{AB}] = \cos \dfrac{\pi}{6} \times [\text{AE}] = 7$

D'Après la contraposée du théorème de Pythagore, dans le triangle ABE, rectangle en E :

$[\text{BE}] = \sqrt{\text{AE}^2 - \text{AB}^2} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3} \approx 4$

D'après le théorème d'Al-Kashi, dans le triangle ADB, avec $a = \text{DB}$, $d = \text{AB}$ et $b = \text{AD}$:

$a = \sqrt{d^2 + b^2 - 2db \times \cos \dfrac{\pi}{6}} \approx 3{,}5$

Donc, le chemin a une longeur d'à peu près 7,5

Exercice 101

D'Après le théorème d'Al-Kashi, dans le triangle ABC, avec $a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{AC}$ et $c = \mathrm{AB}$:

$\widehat{\mathrm{I}} = \cos^{-1}\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) \approx 39°$

$[\mathrm{CH}] = \sin 39° \times [\mathrm{AC}] \approx 3{,}7$

$\mathrm{Aire}_{\mathrm{ABC}} = \dfrac{bh}{2} \approx 15$

Exercice 108

On cherche d'abord la longuer de ST.
D'Après le théorème d'Al-Kashi, dans le triangle RST, avec $r = \mathrm{ST}$, $s = \mathrm{RT}$ et $t = \mathrm{RS}$:

$$\begin{aligned}
& r^2 = s^2 + t^2 - 2st \times \cos\widehat{\mathrm{TRS}} \\
\Longleftrightarrow\quad & r = \sqrt{s^2+t^2-2st\times\cos 45°} \\
\Longleftrightarrow\quad & \mathrm{ST} \approx 3{,}6
\end{aligned}$$

On définit le point I tel que TI = IS

$$\begin{aligned}
& \mathrm{RT}^2 + \mathrm{RS}^2 = 2\mathrm{RI}^2 + \frac{\mathrm{TS}^2}{2} \\
\Longleftrightarrow\quad & \mathrm{RI} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\mathrm{RT}^2+\mathrm{RS}^2-\frac{\mathrm{TS}^2}{2}\right)} \\
\Longleftrightarrow\quad & \mathrm{RI} \approx 4{,}2
\end{aligned}$$

Exercice 109

a) Pour BP :

$\widehat{\mathrm{BAP}} = \widehat{\mathrm{BAC}} - 15$

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABC, rectangle en B :
$\mathrm{AC} = \sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2} \approx 10{,}8$

D'après le théorème d'Al-Kashi dans le triangle ABC, avec $a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{AC}$ et $c = \mathrm{AB}$:

$$\begin{aligned}
& a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos\widehat{\mathrm{BAC}} \\
\Longleftrightarrow\quad & \widehat{\mathrm{BAC}} = \cos^{-1}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) \\
\Longleftrightarrow\quad & \widehat{\mathrm{BAC}} \approx 21{,}7°
\end{aligned}$$

Donc, $\widehat{\mathrm{BAP}} \approx 6{,}8°$

D'après le théorème d'Al-Kashi dans le triangle ABP, avec $a = \mathrm{BP}$, $b = \mathrm{AP}$ et $p = \mathrm{AB}$:

$$\begin{aligned}
& a = \sqrt{b^2+p^2-2bp\times\cos 6{,}8°} \\
\Longleftrightarrow\quad & \mathrm{BP} \approx 7{,}0
\end{aligned}$$

Pour DP :

$\widehat{\text{PAD}} = 90 - 6{,}8 = 84{,}2°$

D'après le théorème d'Al-Kashi dans le triangle ADP, avec $a = \text{DP}$, $d = \text{AP}$ et $p = \text{AD}$:

$$a = \sqrt{d^2 + p^2 - 2dp \times \cos\ 83{,}2°}$$
$$\iff \quad \text{DP} \approx 4{,}7$$

b) Pour CP :

D'après le théorème d'Al-Kashi dans le triangle ACP, avec $a = \text{CP}$, $c = \text{AP}$ et $p = \text{AC}$:

$$a = \sqrt{c^2 + p^2 - 2cp \times \cos\ 15°}$$
$$\iff \quad \text{CP} \approx 7{,}9$$

Exercice 112

D'après le théorème d'Al-Kashi dans le triangle IJK, avec $i = \text{JK}$, $j = \text{IK}$ et $k = \text{IJ}$:

$$i^2 = j^2 + k^2 - 2jk \times \cos\widehat{\text{I}}$$
$$\iff \quad i = \sqrt{j^2 + k^2 - 2jk \times \cos\widehat{\text{I}}}$$
$$\iff \quad \text{JK} \approx 15{,}7$$

$$\widehat{\text{J}} = cos^{-1}\left(\frac{i^2 + k^2 - j^2}{2ik}\right)$$
$$\iff \quad \widehat{\text{J}} \approx 9{,}6°$$

Donc, $\widehat{\text{K}} = 50{,}5°$

Exercice 114

a) Le triangle PRR′ est isocèle si et seulement si PR = PR′.

$$\text{PR}^2 + \text{QR}^2 = 2\text{RR}' + \frac{\text{PQ}^2}{2}$$
$$\iff \quad \text{RR}' = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\text{PR}^2 + \text{QR}^2 - \frac{\text{PQ}^2}{2}\right)}$$
$$\iff \quad \text{RR}' = 5$$

[RR′] = [PR], donc PRR′ est bien isocèle.

b) P′ appartient au cercle si et seulement si [QP′] = [QP].

Or, $\quad [\text{QP}'] = \dfrac{\sqrt{97}}{2} \approx 4{,}9 \quad$ et $\quad [\text{QP}] = 12$

Exercice 117

a) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=1$ alors $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{AB^2}\times AB=\frac{1}{AB^2}\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=-4$ alors $\overrightarrow{AP}=-\frac{4}{AB^2}\overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=2{,}5$ alors $\overrightarrow{AP}=-\frac{2{,}5}{AB^2}\times\overrightarrow{AB}$

d) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{2}$ alors $\overrightarrow{AP}=\frac{\sqrt{2}}{AB^2}\overrightarrow{AB}$

e) $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}-AB^2$ d'où $\overrightarrow{AP}=\frac{AB^2-10}{AB^2}\overrightarrow{AB}$

Exercice 118

a) Soit $H\in(AB)$ tel que $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=1$, A, H et B étant trois points alignés. $AH=\frac{1}{5}$
$\mathscr{E}$: La droite perpendiculaire à (AB), passant par le point H.

b) Soit $H\in[BA)\setminus[AB]$ tel que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=-4$, les deux vecteurs ont un sens opposé.
$AH=\frac{4}{5}$
$\mathscr{E}$: La droite perpendiculaires à (AB), passant par le point H.

c) Soit $H\in[BA)\setminus[AB]$ tel que $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=-2{,}5$. $AH=\frac{1}{2}$
$\mathscr{E}$: La droite perpendiculaire à (AB), passant par le point H.

d) Soit $H\in(AB)$ tel que $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{2}$, $AH=\frac{\sqrt{2}}{5}$
$\mathscr{E}$: La droite perpendiculaire à (AB), passant par le point H.

e) Soit $H\in(AB)$ tel que $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AB}=-10$, $\overrightarrow{BH}=-\frac{10}{25}\overrightarrow{AB}$ $BH=2$
$\mathscr{E}$: La droite perpendiculaire à (AB), passant par le point H.

Exercice 119

a) $$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{AB^2}{4}\iff MI^2-\frac{AB^2}{4}=3$$
$$\iff MI^2=\frac{21}{4}$$

b) $MI^2-\dfrac{AB^2}{4}=-3\iff MI^2=-\dfrac{3}{4}$ C'est impossible

c) $$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MB}=-10\iff\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=10$$
$$\iff MI^2-\frac{AB^2}{4}=10$$
$$\iff MI^2=26$$

d) $$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=1\iff\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=1$$
$$\iff MI^2-\frac{AB^2}{4}=1$$
$$\iff MI^2=\frac{5}{4}$$

Exercice 120

a) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = -4 \iff MI^2 - \dfrac{AB^2}{4} = -4$

$\iff MI^2 = 0$

$\mathscr{E}$: Le point I.

b) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = -1 \iff MI^2 - \dfrac{AB^2}{4} = -1$

$\iff MI^2 = 3$

$\mathscr{E}$: Le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{3}$.

c) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 2 \iff MI^2 - \dfrac{AB^2}{4} = 2$

$\iff MI^2 = 6$

$\mathscr{E}$: Le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{6}$.

Exercice 121

1) a) Les deux vecteurs sont colinéaires, donc $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DE} = DA \times DE = 3$, d'où $DA = \frac{3}{DE} = 0{,}6$ et donc $\overrightarrow{DA} = \frac{0{,}6}{5}\overrightarrow{DE} = 0{,}12\overrightarrow{DE}$

b) Si $M \in \mathscr{D}_1$, alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DE} = 0 &\iff \left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}\right)\cdot\overrightarrow{DE} = 0\\ &\iff \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DE} = 0\\ &\iff \overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DE} = AD \times DE\\ &\iff \overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DE} = 3\end{aligned}$$

Donc, $M \in \mathscr{D}_1 \implies \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DE} = 0$

c) $\mathscr{D}_1 \subset$ perpendiculaire (d) de (DE) $\quad (d)$ passe par le point A.
Soit K un point de la droite (d),

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{DE} = 0 &\iff \left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DK}\right)\cdot\overrightarrow{DE} = 0\\ &\iff -3+\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{DE} = 0\\ &\iff \overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{DE} = 3\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{D}_1$ est la droite (d).

2) a) Soit le point B de (DE) tel que $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DE} = 10$.
$\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont de même sens et $DB \times DE = 10$, $DB = 2$, et $\overrightarrow{DB} = \frac{2}{5}\overrightarrow{DE}$.

b)

$$\begin{aligned}P \in \mathscr{D}_2 \iff \overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{DE} = 10 &\iff \left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BP}\right)\cdot\overrightarrow{DE} = 10\\ &\iff 10+\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{DE} = 10\\ &\iff \overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{DE} = 0\\ &\iff P \in \perp \text{(DE) passant par B.}\end{aligned}$$

c) Donc, $\mathscr{D}_2$ est la perpendiculaire à (DE) passant par B.

Exercice 122

1) a) $\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{UM}=3 \iff MT^2-\dfrac{SU^2}{4}=3$

$\iff MT^2=19$

b) Il s'agit d'un cercle de centre T et de rayon $\sqrt{19}$.

2) a) $\overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{UP}=-3 \iff PT^2-\dfrac{SU^2}{4}=-3$

$\iff MT^2=13$

b) Il s'agit d'un cercle de centre T et de rayon $\sqrt{13}$.

Exercice 123

a) On pose I, tel que GI = IH.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MH}=5 &\iff \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IG}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IH}\right)=5\\ &\iff MI^2+\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{IG}\right)-GI^2=5\\ &\iff MI^2-GI^2=5\\ &\iff MI^2-\tfrac{GH^2}{4}=5\\ &\iff MI^2=30\end{aligned}$$

Il s'agit bien d'un cercle, de centre I, et de rayon $\sqrt{30}$.

b) $\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MH}=x \iff MI^2=x+\frac{GH^2}{4}$

$$\begin{aligned}\mathscr{E}:\ \text{Cercle} &\iff MI^2>0\\ &\iff x+\tfrac{GH^2}{4}>0\\ &\iff x>-25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{E}:\ \text{Point} &\iff MI=0\\ &\iff x+\tfrac{GH^2}{4}=0\\ &\iff x=-25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{E}:\ \emptyset &\iff MI^2<0\\ &\iff x<-25\end{aligned}$$

Exercice 125

a) Soit $H\in[CD]$ tel que $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CD}=12$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{CD}=12 &\iff CH\times CD=12 \iff CH=2\\ &\iff \overrightarrow{CH}=\tfrac{1}{3}\overrightarrow{CD}\end{aligned}$$

$\mathscr{D}_1$: La droite perpendiculaire à [CD], passant par H. Soit $G\in[CD]$ tel que $\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{CD}=3$.

$\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{CD} = 3 \iff CG \times CD = 3 \iff CG = 0{,}5$

$\iff \overrightarrow{CG} = \frac{1}{12}\overrightarrow{CD}$

$\mathscr{D}_2$: La droite perpendiculaire à [CD], passant par G.

b) Soit $I \in [CD]$ tel que $3 \leq \overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CD} \leq 12$.

$3 \leq \overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CD} \leq 12 \iff 3 \leq CI \times CD \leq 12 \iff 0{,}5 \leq CI \leq 2$

$\iff \frac{1}{12}\overrightarrow{CD} \leq \overrightarrow{CI} \leq \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

$\mathscr{E}$: Une droite perpendiculaire à [CD], passant par I.

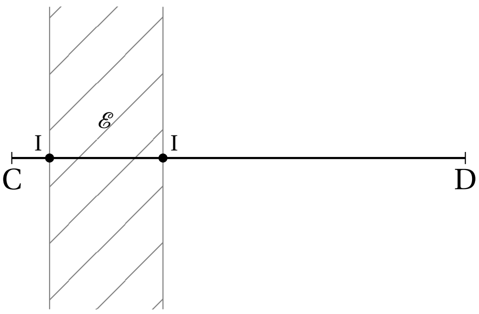

FIGURE 1 – Représentation Graphique de l'Ensemble $\mathscr{E}$

Exercice 128

1) a) $M \in \mathscr{E} \iff GM^2 + HM^2 = 56$

$\iff 2MI^2 + \frac{GH^2}{2} = 56$

$\iff MI^2 = \frac{1}{2}\left(56 - \frac{10^2}{2}\right)$

$\iff MI = \sqrt{3}$

b) L'ensemble $\mathscr{E}$ est un cercle de centre I, de rayon $\sqrt{3}$.

2) $GM^2 + HM^2 = k \iff MI^2 = \frac{1}{2}\left(k - \frac{10^2}{2}\right)$

$\mathscr{C}_k : \emptyset \iff MI^2 < 0$

$\iff \frac{1}{2}(k - 50) < 0$

$\iff k < 50$

Exercice 133

a) $\overrightarrow{GE} + 5\left(\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EF}\right) = \vec{0} \iff 6\overrightarrow{GE} + 5\overrightarrow{EF} = \vec{0}$

$\iff \overrightarrow{EG} = \frac{5}{6}\overrightarrow{EF}$

b) $GE = \frac{5}{6} \quad EF = \frac{10}{3}$

c) $ME^2 + 5MF^2 = 400 \iff \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GE}\right)^2 + 5\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GF}\right)^2 = 400$

$\iff MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GE} + GE^2 + 5MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\cdot 5\overrightarrow{GF} + 5GF^2 = 400$

$\iff 6MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\underbrace{\left(\overrightarrow{GE} + 5\overrightarrow{GF}\right)}_{\vec{0}} + \frac{40}{3} = 400$

$\iff 6MG^2 + \frac{40}{3} = ME^2 + 5MF^2$

d) Il s'agit d'un cercle de centre G, et de rayon $MG = \sqrt{MG^2} = \sqrt{\frac{400-\frac{40}{3}}{6}} = \sqrt{\frac{580}{9}} = \frac{2\sqrt{145}}{3}$

Exercice 135

a)
$$\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right\| = PA &\iff \left\|\overrightarrow{PI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{PI}+\overrightarrow{IB}\right\| = PA\\
&\iff \left\|2\overrightarrow{PI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right\| = PA\\
&\iff \left\|2\overrightarrow{PI}\right\| = PA\\
&\iff 2PI = PA
\end{aligned}$$

Donc $\left\|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right\| = 2PI$

b)
$$\begin{aligned}
P \in \mathscr{F} &\iff \left\|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right\| - 2PI = 0\\
&\iff \left\|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right\|^2 - 4\left(\left\|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right\| \times PI\right) + 4PI^2 = 0\\
&\iff PA^2 - 4PI^2 = 0
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0} &\implies \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CI}\\
&\implies \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{CI}\right\|\\
&\implies 2CI = CA\\
&\implies C \in \mathscr{F}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{0} &\implies \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{ID}\\
&\implies 2DI = DA\\
&\implies D \in \mathscr{F}
\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PI} &= \overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{PC}+2\overrightarrow{CI}\\
&= 3\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CI}\\
&= 3\overrightarrow{PC}-\left(\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{IC}\right)\\
&= 3\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{0}\\
&= 3\overrightarrow{PC}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PA}-2\overrightarrow{PI} &= \overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{PD}-2\overrightarrow{DI}\\
&= -\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{DI}\\
&= -\overrightarrow{PD}-\left(-\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DI}\right)\\
&= -\overrightarrow{PD}-\left(\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{ID}\right)\\
&= -\overrightarrow{PD}
\end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD} = 0 &\iff 3\overrightarrow{PC}\cdot\left(-\overrightarrow{PD}\right) = 0\\
&\iff \left(\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PI}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PA}-2\overrightarrow{PI}\right) = 0\\
&\iff PA^2 \underbrace{-2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PI}+2\overrightarrow{PI}\cdot\overrightarrow{PA}}_{0} - 4PI^2 = 0\\
&\iff PA^2 - 4PI^2 = 0\\
&\iff P \in \mathscr{F}
\end{aligned}$$

f) $P \in \mathscr{F} \iff \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD} = 0 \iff$ P est sur le cercle de diametre [CD]

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0} &\iff \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0} \\
&\iff 3\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{IA} \\
&\iff \overrightarrow{AC} = \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AI} \\
&\iff \overrightarrow{AC} = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{0} &\iff -\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{0} \\
&\iff \overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{IA} \\
&\iff \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

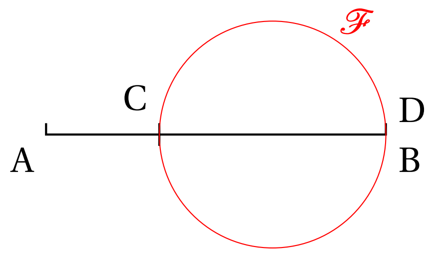

FIGURE 2 – Représentation Graphique de l'Ensemble $\mathscr{F}$

Exercice 136

1) a) $$\begin{aligned}
\overrightarrow{BG} - 2\overrightarrow{BH} + 3\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{0} &\iff \overrightarrow{BG} - 2\left(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GH}\right) + 3\left(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GK}\right) = \overrightarrow{0} \\
&\iff 2\overrightarrow{BG} - 2\overrightarrow{GH} + 3\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{0} \\
&\iff -2\overrightarrow{BG} = -2\overrightarrow{GH} + 3\overrightarrow{GK} \\
&\iff \overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{GH} + \tfrac{3}{2}\overrightarrow{GK}
\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}
MG^2 - 2MH^2 + 3MK^2 &= \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BG}\right)^2 - 2\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BH}\right)^2 + 3\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BK}\right)^2 \\
&= MB^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BG} + BG^2 - 2MB^2 - 2\overrightarrow{MB} \cdot 2\overrightarrow{BH} - 2BH^2 \\
&\qquad + 3MB^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot 3\overrightarrow{BK} + 3BK^2 \\
&= 2MB^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \underbrace{\left(\overrightarrow{BG} - 2\overrightarrow{BH} + 3\overrightarrow{BK}\right)}_{\vec{0}} + BG^2 - 2BH^2 + 4BK^2 \\
&= 2MB^2 + BG^2 - 2BH^2 + 3BK^2
\end{aligned}$$

c) $\mathscr{C}$ est l'ensemble de points M tels que :

$$\begin{aligned}
2MB^2 + BG^2 - 2BH^2 + 3BK^2 = 50 &\iff MB^2 = -\tfrac{1}{2}BG^2 + BH^2 - \tfrac{3}{2}BK^2 + 50 \\
&\iff MB^2 = -\tfrac{1}{2} \times 32{,}5 + 154 - \tfrac{3}{2} \times 41{,}5 + 50 \\
&\iff MB^2 = 125{,}5 \\
&\iff MB = \sqrt{125{,}5}
\end{aligned}$$

Donc, $\mathscr{C}$ est le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{125{,}5}$.

2) $\mathrm{MG}^2 - 2\mathrm{MH}^2 + 3\mathrm{MK}^2 = k \iff \mathrm{MB}^2 = k + 75{,}5$
Donc, si $k \geq -75{,}5$, $\mathscr{C}$ n'est pas l'ensemble vide.

Exercice 142

1. D'Après le théorème d'Al-Kashi dans le triangle QNZ, avec $q = \mathrm{NZ}$, $n = \mathrm{QZ}$ et $z = \mathrm{QN}$.

$$\begin{aligned} & q^2 = n^2 + z^2 - 2nz \times \cos\widehat{\mathrm{NQZ}} \\ \iff \quad & q = \sqrt{n^2 + z^2 - 2nz \times \cos\widehat{\mathrm{NQZ}}} \\ \iff \quad & \mathrm{NZ} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

2. a) Dans un triangle isocèle, la hauteur coupe la base en son milieu, de plus,

$$\begin{aligned} & \widehat{\mathrm{HQZ}} = \sin^{-1}\left(\frac{\mathrm{HZ}}{\mathrm{QZ}}\right) \\ \iff \quad & \widehat{\mathrm{HQZ}} = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right) \\ \iff \quad & \widehat{\mathrm{HQZ}} = 15° \end{aligned}$$

b) $\sin 15° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

c) $\mathrm{HQ} = \cos 15° = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

Exercice 144

a) D'après la loi des Sinus dans le triangle DEF,
$\dfrac{\sin\widehat{\mathrm{D}}}{d} = \dfrac{\sin\widehat{\mathrm{E}}}{e} = \dfrac{\sin\widehat{\mathrm{F}}}{f}$ De plus, $\widehat{\mathrm{F}} = 97°$

D'où $e = \dfrac{\sin\widehat{\mathrm{E}} \times f}{\sin\widehat{\mathrm{F}}} \approx 3{,}0$ $d = \dfrac{\sin\widehat{\mathrm{D}} \times f}{\sin\widehat{\mathrm{F}}} \approx 2{,}3$

b) D'après la loi des Sinus dans le triangle GHK,
$\dfrac{\sin\widehat{\mathrm{K}}}{k} = \dfrac{\sin\widehat{\mathrm{G}}}{g} = \dfrac{\sin\widehat{\mathrm{H}}}{h}$ De plus, $\widehat{\mathrm{G}} = 105°$

D'où $k = \dfrac{\sin\widehat{\mathrm{K}} \times g}{\sin\widehat{\mathrm{G}}} \approx 7{,}3$ $h = \dfrac{\sin\widehat{\mathrm{H}} \times g}{\sin\widehat{\mathrm{G}}} \approx 5{,}2$

Exercice 146

On trouve $\widehat{R} = 180 - 30 - 45 = 105°$

D'après la loi des Sinus : $\dfrac{\sin\widehat{A}}{a} = \dfrac{\sin\widehat{R}}{r} = \dfrac{\sin\widehat{B}}{b}$

D'où : $a = \dfrac{\sin\widehat{A} \times r}{\sin\widehat{R}} \approx 2{,}6$ et $b = \dfrac{\sin B \times r}{\sin R} \approx 3{,}7$

Exercice 149

1) a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$

$$\iff 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$$

$$\iff \overrightarrow{AG} = \tfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$

b) $\overrightarrow{AG} = \tfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \iff \overrightarrow{AG} = \tfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C}\right)$

$$\iff \overrightarrow{AG} = \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$$

2) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \iff 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}$

$$\iff \overrightarrow{BG} = \tfrac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$$

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \iff 3\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}$

$$\iff \overrightarrow{CG} = \tfrac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$$

3) $\overrightarrow{AG} = \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ donc $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont colinéaires et $G \in (AA')$

$\overrightarrow{BG} = \tfrac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ donc $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BB'}$ sont colinéaires et $G \in (BB')$

$\overrightarrow{CG} = \tfrac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$ donc $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CC'}$ sont colinéaires et $G \in (CC')$

G est sur les trois médianes, c'est donc leur point de concours.

Exercice 152

1) a) $\overrightarrow{\Omega H} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C}$

$$= \overrightarrow{\Omega G} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{\Omega G} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{\Omega G} + \overrightarrow{GC}$$

$$= 3\overrightarrow{\Omega G} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$$

$$= 3\overrightarrow{\Omega G}$$

b) Les deux vecteurs sont colinéaires et partagent une extrémité. On peut donc conclure que les trois points sont alignés.

2) Le cercle d'Euler d'un triangle est l'unique cercle, qui, passe par les trois milieux des côtés du triangle, par les trois pieds des hauteurs du triangle, et les milieux des ségments reliant l'orthocentre à un sommet du triangle.