Chapitre IV

Fonction Logarithme Népérien

I. Définition de la Fonction ln

A. Théorème-Définition

Pour tout réel x strictement positif, il existe un unique réel tel que :

$$e^a = x$$

Le nombre a est appelé logarithme népérien de x. La fonction qui à x associe a est appelée “fonction logarithme népérien” et se note ln.

Ainsi,

$$e^a = x \iff a = \ln(x), \quad \text{pour } x > 0$$

B. Démonstration

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus,

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

D’après le corollaire du Théorème des Valeurs Intermédiaires, pour tout nombre $k \in \left]0;+\infty\right]$, il existe un unique réel $a \in \mathbb{R}$ tel que $e^a = k \quad \square$

C. Remarques

La fonction ln est la fonction réciproque de exp.

On déduit que : $\ln(1) = 0 \quad \ln(e) = 1$

D. Propriétés

$$\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ e^{\ln(x)} = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln\left(e^x\right) = x$$

II. Étude de la fonction ln

A. Continuité, Dérivabilité

1. Propriété

— La fonction ln est continue sur $]0;+\infty]$
— La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty]$ et $\forall x \in]0;+\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
— La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

a. Démonstration (facile)

Admettre que si f et u sont dérivables, $f\big(u(x)\big)' = u'(x) \times f(u(x))$

$$\left(e^{\ln(x)}\right)' = \ln'(x) \times e^{\ln(x)} = \ln'(x) \times x$$

$$(x)' = 1$$

$$\ln'(x) \times x = 1 \iff \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

b. Démonstration (complète)

On étudie le taux d'accroissement, en admettant que ln est continue :

$$\frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h}$$

Posons :

$$\begin{cases} u = \ln(x+h) & \text{donc} \quad x + h = e^u \\ v = \ln(x) & \text{donc} \quad x = e^v \end{cases} \qquad \text{et} \qquad k = u - v$$

$$\begin{aligned} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} &= \frac{k}{e^u - e^v} \qquad \text{or} \qquad \lim_{h\to 0} k = 0 \\ &= \frac{1}{\frac{e^{v+h} - e^v}{k}} \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{v+h} - e^v}{h}$ est l'équation de la dérivée de e. La dérivée de e^v est e^v.

$$\frac{1}{e^v} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x} \quad \square$$

2. Propriété

Soit u, une fonction dérivable et strictement positive sur I

Alors, la fonction $f : x \mapsto \ln\big(u(x)\big)$ et $f' = \frac{u'}{u}$

a. Exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = \ln(x^2+1)$

f est dérivable en $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

B. Limites

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$$

C. Représentation Graphique

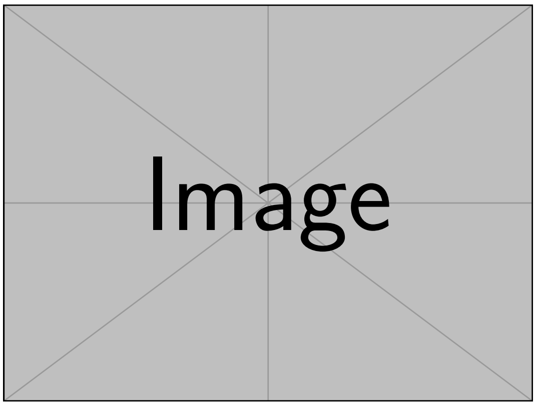

Figure 4.1. – Représentation Graphique de la Fonction ln

III. Propriétés Algébriques de la Fonction ln

A. Propriété Fondamentale

Quels que soient les réels a et b, strictement positifs,

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

1. Démonstration

Rappel :

$$\mathrm{X} = \mathrm{Y} \iff e^{\mathrm{X}} = e^{\mathrm{Y}}$$

$$e^{\ln(ab)} = ab$$
$$e^{\ln(a)+\ln(b)} = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = a \times b$$

Donc :

$$e^{\ln(ab)} = e^{\ln(a)+\ln(b)} \iff \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

B. Conséquences

— Quels que soient les réels a et b, strictement positifs,

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$$

— Quels que soient les réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$, strictement positifs,

$$\ln(a_1 a_2 \cdots a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n)$$

1. Démonstration par Récurrence

a. Initialisation

$$\ln(a_1) = \ln(a_1)$$

b. Hérédité

Supposons que, pour n nombres strictement positifs,

$$\ln(a_1 a_2 \cdots a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \ln(a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}) &= \ln(a_1 a_2 \cdots a_n) + \ln(a_{n+1}) \quad \text{Propriété Fond.} \\ &= \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n) + \ln(a_{n+1}) \quad \square \end{aligned}$$

— De plus,

$$\forall a \in \left]0;+\infty\right[,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \ln(a^n) = n\ln(a)$$

2. Démonstration

— Dans le cas où n est positif, c'est le cas particulier :

$$\ln(a_1 a_2 \cdots a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n)$$

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$$

$$\ln(a^n) = \ln(a) + \ln(a) + \cdots + \ln(a) = n\ln(a) \quad \square$$

— Dans le cas où n est négatif, on prend $m = -n$

$$\ln(a^n) = \ln(a^{-m}) = \ln\left(\frac{1}{a^m}\right) = -\ln(a^m) = -m\ln(a) = n\ln(a) \quad \square$$

— Finalement,

$$\forall a,\ a > 0, \quad \ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

3. Démonstration

$$\ln(a) = \ln\left(\sqrt{a^2}\right) = 2\ln\left(\sqrt{a}\right)$$

$$\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a) \quad \square$$

IV. Résolution d'Inéquations du type $a^n > \mathrm{M}$

A. Exemple

On sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$$

On cherche le plus petit entier n tel que $3^n > 1\,000$:

$$\begin{aligned} & \ln(3^n) > \ln(1\,000) \\ \iff \quad & n\ln(3) > \ln(1\,000) \\ \iff \quad & n > \frac{\ln(1000)}{\ln(3)} \approx 6{,}3 \end{aligned}$$

On trouve $n \geq 7$, 7 est le plus petit entier n tel que $3^n > 1\,000$

B. Exemple

On sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \qquad \left(\text{car } 0 < \tfrac{1}{2} < 1\right)$$

On veut résoudre : $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0{,}0001$

$$\begin{aligned} \iff \quad & \ln\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right) \leq \ln(0{,}0001) \qquad \text{ln strictement croissante} \\ \iff \quad & n\ln\left(\tfrac{1}{2}\right) \leq \ln(0{,}0001) \\ \iff \quad & n \geq \frac{\ln(0{,}0001)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \approx 13{,}3 \end{aligned}$$

Donc, $n \geq 14$

V. Logarithme Décimal

A. Définition

La fonction logarithme décimal, notée log, est définie sur $]0\,;+\infty[$, par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

B. Propriétés

De part de sa définition, la fonction log a les mêmes propriétés algébriques et analytiques que la fonction ln (dérivable, strictement croissante)

C. Remarque

La fonction log est la fonction réciproque de $f : x \mapsto 10^x$