Chapitre I

Suites: La Démonstration par Récurrence

I. EXEMPLE

On considère la suite (u_n) , définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 4^n - 1$.

$$(u_n) = \{0; 3; 15; 63; 255; \ldots\}$$

On remarque que tous ces nombres sont des multiples de 3. On se demande si $\forall n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est un multiple de 3.

II. AXIOME DE RÉCURRENCE

Soit P(n), une propriété dépendante de l'entier naturel n.

Si:

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie (Initialisation)} \\ \forall k \in \mathbb{N}, P(k) \text{ vraie} \implies P(k+1) \text{ vraie (hérédité)} \end{cases}$$

Alors : P(n) est vraie pour tout entier naturel.

Reprenons notre exemple. La propriété : " $4^n - 1$ est un multiple de 3", est vraie pour n = 0. La propriété est donc initialisée.

Hérédité : Supposons que la propriété est vraie à un certain rang k, (fixe). C'est l'hypothèse de la récurrence, et montrons qu'alors, elle est vraie au rang k+1.

L'Hypothèse de récurrence est donc : " $4^n - 1$ est un multiple de 3". C'est-à-dire qu'il existe un entier p tel que $4^n - 1 = 3p$ et donc $4^n = 3p + 1$.

$$4^{k+1}-1=4\times 4^k-1$$

$$=4\times \left(3p+1\right)-1 \quad \text{(Hypothèse de récurrence)}$$

$$=12p+4-1$$

$$=12p+3$$

$$=3\left(4p+1\right) \quad \text{(Il s'agit bien d'un multiple de 3)}$$

Donc, la propriété est héréditaire.

On a démontré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 4^n - 1$ est un multiple de 3.