Cours de Spécialité Mathématique

Terminale, Année 2021

Nathalie Sibert Diego Van Overberghe

27 mai 2021

Table des matières

Chapitre 1

Suites : La Démonstration par Récurrence

I. Exemple

On considère la suite (u_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 4^n - 1$:

$$(u_n) = \{\, 0\, ;\, 3\, ;\, 15\, ;63\, ;\, 255\, ;\ldots\, \}$$

On remarque que tous ces nombres sont des multiples de 3. On se demande si $\forall n \in \mathbb{N},\ 4^n - 1$ est un multiple de 3.

II. Axiome de Récurrence

Soit $\mathrm{P}(n)$, une propriété dépendante de l'entier naturel n.
Si :

$$\begin{cases} \mathrm{P}(0) \text{ est vraie (Initialisation)} \\ \forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(k) \text{ vraie} \implies \mathrm{P}(k+1) \text{ vraie (hérédité)} \end{cases}$$

Alors : $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel.

Reprenons notre exemple. La propriété : « $4^n - 1$ est un multiple de 3 », est vraie pour $n = 0$. La propriété est donc initialisée.

Hérédité : Supposons que la propriété est vraie à un certain rang k, (fixe). C'est l'hypothèse de la récurrence, et montrons qu'alors, elle est vraie au rang $k+1$.

L'Hypothèse de récurrence est donc : « $4^n - 1$ est un multiple de 3 ». C'est-à-dire qu'il existe un entier p tel que $\quad 4^n - 1 = 3p \quad$ et donc $\quad 4^n = 3p + 1$.

$$\begin{aligned} &= 12p + 4 - 1 \\ &= 12p + 3 \\ &= 3\left(4p + 1\right) \quad \text{(Il s'agit bien d'un multiple de 3)} \end{aligned}$$

Donc, la propriété est héréditaire.

On a démontré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 4^n - 1$ est un multiple de 3.

Chapitre 2

Continuité des Fonctions d'une Variable Réelle

I. Définition

Soit f, définie sur un intervalle I, et soit a, un réel de I. La fonction f est *continue* si et seulement si :

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

f est continue sur l'intervalle I, si et seulement si, quel que soit le réel $x \in \mathrm{I}$, f est continue en x.

H.P. : $\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \left]a - \alpha\,; a + \alpha\right[,\ f(x) \in \left]f(a) - \epsilon\,; f(a) + \epsilon\right[$

A. Exemple

La fonction inverse est continue sur $\left]-\infty\ ;\ 0\right[$, et sur $\left]0\ ;\ +\infty\right[$.

La fonction « Partie Entière » est définie sur $\mathbb{R}$, mais pas continue sur $\mathbb{R}$.

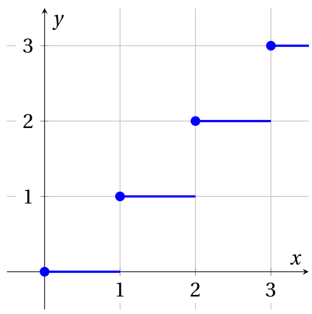


FIGURE 2.1. – Représentation Graphique de la Fonction « Partie Entière », continue sur $\left[n\ ;\ n+1\right[$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

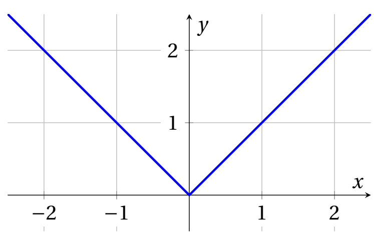


FIGURE 2.2. – Représentation Graphique de la Fonction Absolue, continue sur $\mathbb{R}$

B. Propriété

La somme, le produit et la composée de deux fonctions continues est continue. L'inverse d'une fonction continue est continue sur tout intervalle où elle ne s'annule pas.

$$f : x \mapsto x^2 \quad \text{continue}$$

$$g : x \mapsto \frac{1}{x^2} \quad \text{Définie sur } \mathbb{R}^*, \text{ continue sur }]-\infty\ ;\ 0[\text{ et }]0\ ;\ +\infty[$$

II. Théorème des Valeurs Intermédiaires

A. Théorème

Si une fonction f est continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ alors, pour tout réel $k \in \left[\min(f(a)\ ;\ f(b))\ ;\ \max(f(a)\ ;\ f(b))\right]$, il existe *au moins* un réel $c \in [a\ ;\ b]$, tel que $f(c) = k$.

C'est-à-dire, pour tout réel k, compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in [a\ ;\ b]$, tel que $f(c) = k$.

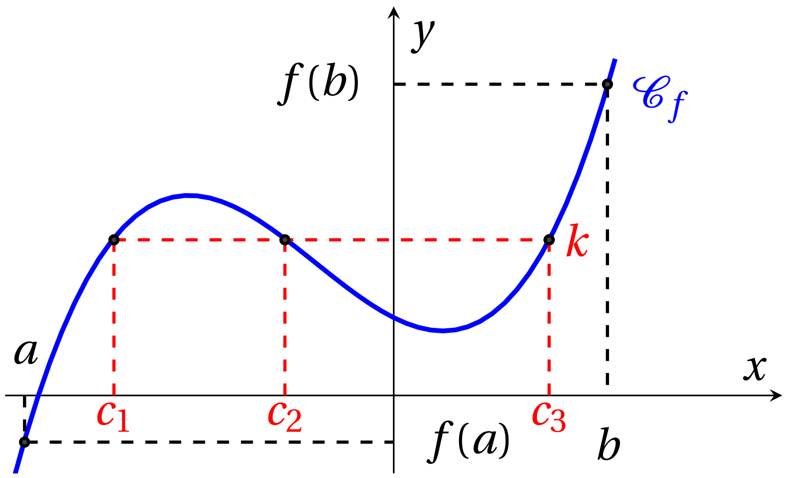


Figure 2.3. – Présentation du Théorème des Valeurs Intermédiaires

Pour tout k appartenant à $[f(b)\ ;\ f(a)]$, il existe au moins un réel $c \in [a\ ;\ b]$, tel que $f(c) = k$.

B. Corollaire

Si une fonction f est *continue* et *strictement monotone* sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors, pour tout $k \in \Big[\min\big(f(a)\ ;\ f(b)\big)\ ;\ \max\big(f(a)\ ;\ f(b)\big)\Big]$, il existe un *unique* réel $c \in [a\ ;\ b]$, tel que $f(c) = k$.

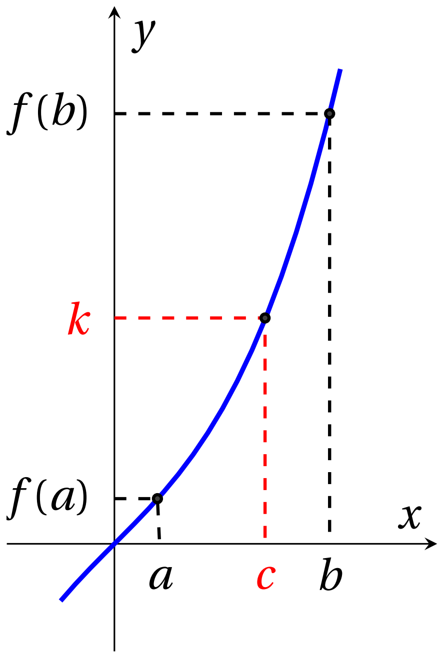


Figure 2.4. – Illustration du Corollaire du Théorème des Valeurs Intermédiaires

1. Cas Particulier

Si une fonction f est continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, il existe au moins une solution à $f(x) = 0$, sur $[a\ ;\ b]$.

Chapitre 3

Dénombrement et Combinatoire

I. Parties d'un Ensemble

A. Définition

E étant un ensemble, la notation $\subset$ signifie « inclus dans ».

$$A \subset E$$

C'est-à-dire que tout élément de A appartient à E.
On dit alors que A est une partie, ou sous-ensemble de E.
L'Ensemble vide, noté $\varnothing$ est une *partie* de tout ensemble.
L'Ensemble des parties de E est noté $\mathscr{P}(E)$.

1. Exemple

Si $E = \left\{ x \,;\, y \right\}$ est un ensemble de deux éléments :

$$\mathscr{P}(E) = \left\{ \varnothing \,,\, \{ x \} \,,\, \{ y \} \,,\, \{ x \,;\, y \} \right\}$$

B. Définition

Un ensemble fini est un ensemble dont le nombre d'éléments est fini.

C. Définition

On appelle cardinal, noté « Card », le nombre d'éléments d'un ensemble fini d'une partie (ou sous-ensemble).

1. Exemple

Si un ensemble E possède n éléments, alors on peut noter $\text{Card}(E) = n$.
Pour toute partie $A \subset E$, $\text{Card}(A) \leqslant \text{Card}(E)$.

D. Propriété (Principe additif)

Si A et B sont deux parties quelconques d'un ensemble fini E, alors :

$$\mathrm{Card}\,(A \cup B) = \mathrm{Card}\,(A) + \mathrm{Card}\,(B) - \mathrm{Card}\,(A \cap B)$$

De plus, si A_1 , A_2 , ..., A_p sont p parties *deux à deux disjointes* d'un ensemble fini, alors :

$$\mathrm{Card}\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p\right) = \mathrm{Card}\,(A_1) + \mathrm{Card}\,(A_2) + \cdots + \mathrm{Card}\left(A_p\right)$$

E. Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}$, et E un ensemble tel que $\mathrm{Card}\,(E) = n$. Alors, E possède 2^n parties. Autrement dit :

$$\mathrm{Card}\left(\mathscr{P}(E)\right) = 2^n$$

1. Démonstration par récurrence

a. Initialisation

Pour $n = 0$, $E = \varnothing$, donc la seule partie de E est $\{\varnothing\}$ et $1 = 2^0$.

b. Hérédité

Supposons que tout ensemble à k éléments, où k est un certain entier naturel, admet 2^k parties.

Alors, soit E, un ensemble à $k+1$ éléments.

Soit x, un élément de E.

Alors, il y a deux familles de parties de E, celles qui contiennent x et celles qui ne le contiennent pas.

Or $E \setminus \{x\}$ est un ensemble à k éléments, il y a donc 2^k parties de E qui ne contiennent pas x.

En adjoignant x à toutes ces parties, on obtient toutes les parties qui contiennent x, donc il y en a également 2^k.

Ainsi, le nombre de parties de E est de $2^k + 2^k = 2^{k+1}$. $\square$

II. Produit Cartésien d'Ensembles

A. Définition

- E et F étant deux ensembles, le *produit cartésien* $E \times F$ est l'ensemble de couples $(a ; b)$, où $a \in E$ et $b \in F$.
- E, F et G étant trois ensembles, le *produit cartésien* $E \times F \times G$ est l'ensemble des triplets $(a ; b ; c)$ où $a \in E$, $b \in F$ et $c \in G$.

1. Cas Général

- Le *produit cartésien* $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ est l'ensemble des *n-uplets* $(a_1 ; a_2 ; \ldots ; a_n)$ où $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2, \ldots, a_n \in E_n$.

B. Notations

$E \times E$ se note E^2, $\overbrace{E \times E \times \cdots \times E}^{k \text{ fois}}$ se note E^k.

C. Exemples

Soit $E = \{a ; b ; c\}$ et $F = \{1 ; 2\}$.

- $E \times F = \{(a ; 1) ; (a ; 2) ; (b ; 1) ; (b ; 2) ; (c ; 1) ; (c ; 2)\}$
- $F \times F = \{(1 ; 1) ; (1 ; 2) ; (2 ; 1) ; (2 ; 2)\}$
- $(a ; b ; b ; a ; c)$ est un 5-uplet d'élément de E, il appartient à E^5.

D. Propriété

Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont n ensembles finis :

$$\mathrm{Card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) = \mathrm{Card}(E_1) \times \mathrm{Card}(E_2) \times \cdots \times \mathrm{Card}(E_n)$$

1. Cas Particulier

Si E est un ensemble fini, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{Card}\left(E^k\right) = \left(\mathrm{Card}(E)\right)^k$$

2. Exemples

Dans les exemples précédents :

- $\mathrm{Card}(E \times F) = 6 = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F)$
- $\mathrm{Card}\left(F^2\right) = 4 = 2^2 = \left(\mathrm{Card}(F)\right)^2$

III. Permutations

A. Définition

Soit E, un ensemble à n éléments, une *permutation* est un n-uplet d'éléments distincts de E.

Autrement dit, une permutation est une façon d'ordonner les n éléments de E.

1. Exemple

On considère l'ensemble $G = \{a\,;b\,;c\}$.
Ses permutations sont :

$$(a\,;b\,;c)\,,(a\,;c\,;b),(b\,;a\,;c)\,,(b\,;c\,;a)\,,(c\,;a\,;b)\,,(c\,;b\,;a)$$

G admet donc 6 permutations.

B. Propriété

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$

1. Remarque

$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$
$n!$ est le produit de tous les entiers de 1 à n.
$n!$ se lit "factorielle de n".

2. Explication

On peut considérer que faire une permutation c'est faire un tirage sans remise des n éléments de E. Il y n choix pour le premier élément, $n-1$ pour le deuxième et ainsi de suite.

3. Démonstration par Récurrence

a. Initialisation

Un ensemble à un élément admet une permutation, et $1! = 1$.

b. Hérédité

Supposons que tout ensemble à n élément (n fixe) admette $n!$ permutations.

Soit E, un ensemble à $n+1$ éléments.
On choisit un élément x de E.
Dans chacune des permutations des n éléments restants, il y a $n+1$ positions où insérer x.

Ainsi, le nombre de permutations de E est $(n+1)\times n! = (n+1)!$. □

IV. Combinaisons

Dans tout ce sous-chapitre, E est un ensemble à n éléments et p est un entier naturel tel que $p \leqslant n$.

A. Définition

Une combinaison de p éléments de E est une partie de E possédant p éléments.

1. Remarque

L'ordre des éléments n'a pas d'importance, les éléments sont distincts.

B. Propriété

Le nombre de combinaisons à p éléments de E est égal à $\binom{n}{p}$, où :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\times\cdots\times(n-p+1)}{p!}$$

$\binom{n}{p}$ est appelé *coefficient binomial* et il se lit « p parmi n ».

1. Explication

Lorsqu'on choisit p éléments dans un ensemble à n éléments, on a n choix pour le premier, $n-1$ choix pour le deuxième, etc. mais ainsi, les p éléments sont ordonnés.

On divise donc par le nombre de permutations de p éléments, c'est-à-dire $p!$.

2. Cas Particuliers

$\binom{n}{0} = 1$ La seule partie de E à 0 élément est $\varnothing$.

$\binom{n}{n} = 1$ La seule partie de E à n éléments est E.

$\binom{n}{1} = n$ Il y à n parties de E à 1 élément.

C. Propriété : Symétrie

Choisir p, c'est ne pas choisir $n-p$:

$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$$

Démonstration Alternative :

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$$

D. Propriété : Relation de Pascal

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

1. Démonstration

Soit E, un ensemble à $n+1$ éléments (on va compter le nombre de parties de E à $p+1$ éléments).

Soit x un élément de E.

Alors il y a deux « familles » de parties : celles qui contiennent x et celles qui ne le contiennent pas.

Or $E \setminus \{x\}$ contient n éléments.

Donc il y a $\binom{n}{p}$ à p éléments de $E \setminus \{x\}$.

En leur adjoignant x, on obtient toutes les parties à $p+1$ éléments qui contiennent x.

Il y a $\binom{n}{p+1}$ parties de E qui ne contiennent pas x. (On choisit $p+1$ éléments dans $E \setminus \{x\}$ qui contient n éléments). $\square$

E. Triangle de Pascal

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

FIGURE 3.1. – Représentation du Triangle de Pascal

F. Propriété

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Chapitre 4

Fonction Logarithme Népérien

I. Définition de la fonction ln

A. Théorème-Définition

Pour tout réel x strictement positif, il existe un unique réel tel que :

$$e^a = x$$

Le nombre a est appelé logarithme népérien de x.

La fonction qui à x associe a est appelée « fonction logarithme népérien », et se note ln.

Ainsi :

$$\boxed{e^a = x \iff a = \ln(x) \quad \text{pour } x > 0}$$

B. Démonstration

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

D'après le corollaire du Théorème des Valeurs Intermédiaires, pour tout nombre $k \in \left]0\,;+\infty\right[$, il existe un unique réel $a \in \mathbb{R}$ tel que $e^a = k$. □

C. Remarques

La fonction ln est la fonction réciproque de exp.

On déduit que :

$$\boxed{\ln(1) = 0 \quad \text{et} \quad \ln(e) = 1}$$

D. Propriétés

$$\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[,\ \boxed{e^{\ln(x)} = x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \boxed{\ln\left(e^x\right) = x}$$

II. Étude de la fonction ln

A. Continuité, dérivabilité

1. Propriété

(1) La fonction ln est *continue* sur $]0\,;+\infty]$

(2) La fonction ln est *dérivable* sur $]0\,;+\infty]$ et $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $\boxed{\ln'(x) = \dfrac{1}{x}}$

(3) La fonction ln est *strictement croissante* sur $]0\,;+\infty[$

a. Démonstration (2) (Facile)

Admettre que si f et u sont dérivables, $f\big(u(x)\big)' = u'(x) \times f(u(x))$.

$$\left(\mathrm{e}^{\ln(x)}\right)' = \ln'(x) \times \mathrm{e}^{\ln(x)} = \ln'(x) \times x$$

$$(x)' = 1$$

$$\ln'(x) \times x = 1 \iff \ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \square$$

b. Démonstration (2) (Complète)

On étudie le taux d'accroissement, en admettant que ln est continue :

$$\frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h}$$

Posons :

$$\begin{cases} u = \ln(x+h) & \text{donc} \quad x+h = \mathrm{e}^u \\ v = \ln(x) & \text{donc} \quad x = \mathrm{e}^v \end{cases} \quad \text{et} \quad k = u - v$$

$$\frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \frac{k}{\mathrm{e}^u - \mathrm{e}^v} \quad \text{or} \quad \lim_{h\to 0} k = 0$$
$$= \frac{1}{\frac{\mathrm{e}^{v+h} - \mathrm{e}^v}{k}}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{v+h} - \mathrm{e}^v}{h}$ est l'expression de la dérivée de e. La dérivée de e^v est e^v :

$$\frac{1}{\mathrm{e}^v} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \frac{1}{x} \quad \square$$

2. Propriété

Soit u, une fonction dérivable et strictement positive sur I.

Alors, la fonction $f : x \mapsto \ln\big(u(x)\big)$ et $\boxed{f' : x \mapsto \dfrac{u'}{u}}$.

a. Exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = \ln(x^2+1)$.
f est dérivable en $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

B. Limites

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty}$$

1. Démonstration

Soit $\mathrm{M} > 0$, en posant $\mathrm{A} = \mathrm{e}^{\mathrm{M}}$, $\exists \mathrm{A} > 0$ tel que :

$$\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[,\ x > \mathrm{A} \implies \ln(x) > \mathrm{M}$$

En effet, $x > \mathrm{A} \iff x > \mathrm{e}^{\mathrm{M}}$.
Comme ln est strictement croissante :

$$\ln(x) > \ln\left(\mathrm{e}^{\mathrm{M}}\right)$$
$$\ln(x) > \mathrm{M} \quad \square$$

C. Représentation Graphique

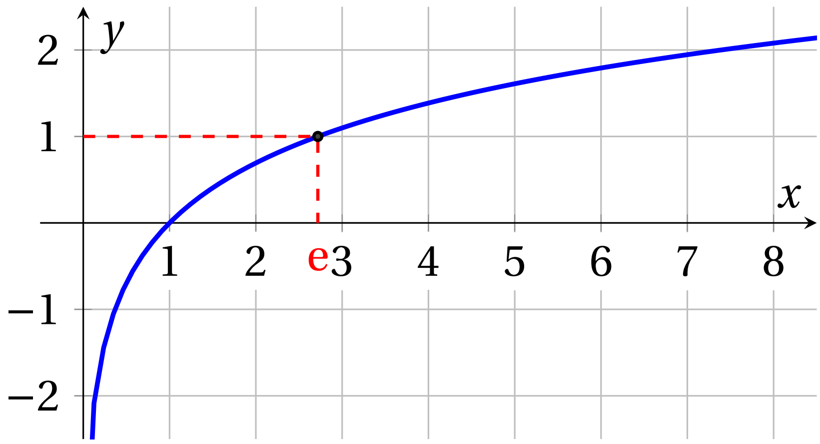


Figure 4.1. – Représentation Graphique de la Fonction ln

III. Propriétés Algébriques de la Fonction ln

A. Propriété Fondamentale

Quels que soient les réels a et b, strictement positifs,

$$\boxed{\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)}$$

1. Démonstration

Rappel :

$$\mathrm{X} = \mathrm{Y} \iff \mathrm{e}^{\mathrm{X}} = \mathrm{e}^{\mathrm{Y}}$$

$$\mathrm{e}^{\ln(ab)} = ab$$

$$\mathrm{e}^{\ln(a)+\ln(b)} = \mathrm{e}^{\ln(a)} \times \mathrm{e}^{\ln(b)} = a \times b$$

Donc :

$$\mathrm{e}^{\ln(ab)} = \mathrm{e}^{\ln(a)+\ln(b)} \iff \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

B. Conséquences

(1) Quels que soient les réels a et b, strictement positifs :

$$\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)} \quad \text{et} \quad \boxed{\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)}$$

1. Démonstration (1)

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(a) = \ln\left(\frac{a}{b} \times b\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln(b)$$

D'où :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad \square$$

La deuxième égalité est le cas particulier où $a = 1$. $\square$

(2) Quels que soient les réels $a_1, a_2, \dots, a_n$, strictement positifs :

$$\boxed{\ln(a_1 a_2 \cdots a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n)}$$

2. Démonstration par Récurrence (2)

a. Initialisation

$$\ln(a_1) = \ln(a_1)$$

b. Hérédité

Supposons que, pour n nombres strictement positifs :

$$\ln(a_1 a_2 \cdots a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n)$$

Alors :

$$\begin{aligned}\ln(a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}) &= \ln(a_1 a_2 \cdots a_n) + \ln(a_{n+1}) \quad \text{Propriété Fond.}\\ &= \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n) + \ln(a_{n+1}) \quad \square\end{aligned}$$

(3) De plus, $\forall a \in \left]0\,;+\infty\right[$, $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)}$$

3. Démonstration (3)

— Dans le cas où n est positif, c'est le cas particulier :

$$\ln(a_1 a_2 \cdots a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n)$$

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$$

$$\ln(a^n) = \ln(a) + \ln(a) + \cdots + \ln(a) = n\ln(a) \quad \square$$

— Dans le cas où n est négatif, on prend $m = -n$

$$\ln(a^n) = \ln(a^{-m}) = \ln\left(\frac{1}{a^m}\right) = -\ln(a^m) = -m\ln(a) = n\ln(a) \quad \square$$

(4) Finalement, $\forall a,\ a > 0$:

$$\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

4. Démonstration (4)

$$\ln(a) = \ln\left(\sqrt{a^2}\right) = 2\ln\left(\sqrt{a}\right)$$

$$\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a) \quad \square$$

IV. Résolution d'Inéquations du type $a^n > M$

A. Exemple

On sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$$

On cherche le plus petit entier n tel que $3^n > 1\,000$:

$$\begin{aligned} & \ln\left(3^n\right) > \ln(1\,000) \\ \Longleftrightarrow\quad & n\ln(3) > \ln(1\,000) \\ \Longleftrightarrow\quad & n > \frac{\ln(1000)}{\ln(3)} \approx 6{,}3 \end{aligned}$$

On trouve $n \geqslant 7$, 7 est le plus petit entier n tel que $3^n > 1\,000$.

B. Exemple

On sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \qquad \left(\text{car } 0 < \tfrac{1}{2} < 1\right)$$

On veut résoudre $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 0{,}0001$:

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow\quad & \ln\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right) \leqslant \ln(0{,}0001) \qquad \text{ln strictement croissante} \\ \Longleftrightarrow\quad & n\ln\left(\tfrac{1}{2}\right) \leqslant \ln(0{,}0001) \\ \Longleftrightarrow\quad & n \geqslant \frac{\ln(0{,}0001)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \approx 13{,}3 \end{aligned}$$

Donc, $n \geqslant 14$

V. Logarithme Décimal

A. Définition

La fonction logarithme décimal, notée log, est définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$, par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

B. Propriétés

De part de sa définition, la fonction log a les mêmes propriétés algébriques et analytiques que la fonction ln (dérivable, strictement croissante).

C. Remarque

La fonction log est la fonction réciproque de $f : x \mapsto 10^x$.

Chapitre 5

Fonction Composée

I. Définiton

Soient u une fonction définie sur un intervalle I et f une fonction définie sur un intervalle J, I étant tel que pour tout réel x de I, $u(x) \in \mathrm{J}$.

La fonction *composée* de u par f, notée $f \circ u$ est la fonction définie sur I par :

$$\boxed{(f \circ u)(x) = f\big(u(x)\big)}$$

$$\begin{array}{lccccc} & & u & & f & \\ \text{Intervalles :} & \mathrm{I} & \to & \mathrm{J} & \to & \mathbb{R} \\ \text{Variables :} & x & \to & u(x) & \to & f\big(u(x)\big) \end{array}$$

Figure 5.1. – Schéma de la Fonction Composée

A. Exemples

La fonction $u : x \mapsto u(x) = x^2 + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$, et $f : x \mapsto f(x) = \ln(x)$ est définie sur $\left]0\ ;\ +\infty\right[$, la fonction $f \circ u$ est définie sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) \in \left]0\ ;\ +\infty\right[$, et $(f \circ u)(x) = \ln\left(x^2+1\right)$.

La fonction $g : x \mapsto g(x) = \sqrt{5x-3}$ est la fonction composée de la fonction affine $x \mapsto 5x-3$ et de la fonction racine carrée. Elle est définie sur $\left[\frac{3}{5} ; +\infty\right[$, intervalle sur lequel $5x - 3 \in \mathbb{R}^+$.

II. Dérivée d'une Fonction Composée

A. Théorème

Si u est dérivable en un réel a et f est dérivable en $u(a)$ alors $f \circ u$ est dérivable en a et $(f \circ u)'(a) = u'(a) \times f'\big(u(a)\big)$.

Si u est dérivable sur I et f est dérivable sur J, I étant tel que, pour tout réel x de I,

$u(x) \in \mathrm{J}$ alors $f \circ u$ est dérivable sur I, et pour tout réel $x \in \mathrm{I}$:

$$\boxed{(f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'\big(u(x)\big)}$$

B. Exemples

Si on appelle h la fonction par $h : x \mapsto h(x) = \ln(x^2+1)$, alors h est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $h'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

La fonction g ci-dessus, définie par $g : x \mapsto g(x) = \sqrt{5x-3}$, est dérivable sur $\left]\frac{3}{5}\,;+\infty\right[$, et pour tout $x \in \left]\frac{3}{5}\,;+\infty\right[$, $g'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x-3}}$.

III. Limites d'une Fonction Composée

A. Théorème

Soient a, b et c sont trois réels, ou $\pm\infty$

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \boldsymbol{b}$ et $\lim\limits_{\mathrm{X} \to \boldsymbol{b}} f(\mathrm{X}) = c$ alors, $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f\big(u(x)\big) = c}$

B. Exemple

Soit $g : x \mapsto g(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{\mathrm{X} \to -\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{X}} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

Chapitre 6

Équations Différentielles et Primitives

I. Notion d'Équation Différentielle

A. Définition

Une équation liant une fonction et ses dérivées est appelée *équation différentielle*. En général, on note y la fonction, y' sa dérivée, y'' sa dérivée seconde.

B. Exemples

— $y' = 2x$ est une équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ dont *une* solution est $y = x^2$.

— $y' = y$ est une équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ dont une solution est exp.

1. Remarque

Ce ne sont pas les seules solutions !

C. Remarques

(1) L'équation est dite de *premier ordre* ou *d'ordre 1* lorsque seule intervient la dérivée première d'une fonction (et éventuellement la fonction).
Par exemple : $y' = 3y - 5$.

(2) Plutôt que d'écrire l'équation $f'(x) = 3f(x) - 5$, on note $f(x)$ à l'aide de la variable y, qui joue le rôle d'inconnue, ou plutôt de « fonction inconnue », car un point $(x\,;\,y)$ appartient à la courbe représentative de f si et seulement si $y = f(x)$.
y étant la variable utilisée pour les ordonnées et les images, il est cohérent de l'utiliser pour symboliser une fonction.

II. Primitives d'une Fonction Continue $\left(\text{Solutions de } y' = f(x)\right)$

A. Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Une primitive de f sur I est une fonction F telle que :

$$F' = f$$

B. Exemple

La fonction $F : x \mapsto \frac{1}{x}$ est une primitive de $f : x \mapsto \frac{-1}{x^2}$, sur $\mathbb{R}^{+*}$.

C. Théorème (Démontré dans le Chapitre sur l'Intégration)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.

D. Remarque

Il arrive qu'on ne puisse pas exprimer cette primitive avec les fonctions classiques.

1. Exemple

$f : x \mapsto e^{x^2}$

E. Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F est une primitive de f sur I.

Alors, f admet une infinité de primitives sur I① et toute primitive G de f sur I est définie par $G(x) = F(x) + k$② où k est une constante réelle.

1. Démonstration

1. Si F est une primitive de f, quel que soit le réel k, la fonction $G : x \mapsto F(x) + k$ est une primitive de f. En effet, $G'(x) = F'(x) = f(x)$, donc, il y a une infinité de primitives.
2. Si F et G sont deux primitives d'une même fonction f, alors :

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

La dérivée de $F - G$ est nulle, donc $F - G$ est une constante.

Donc, $\forall x \in I,\ F(x) - G(x) = k$

$$F(x) = G(x) + k \quad \square$$

On a montré que deux primitives d'une même fonction sont différents d'une constante.

III. Calcul des Primitives

A. Primitives des Fonctions usuelles

Tableau 6.1. – Tableau des Primitives des Fonctions Usuelles

Fonction $f : x \mapsto$	Primitive $\mathrm{F} : x \mapsto$	Intervalle
k (constante)	kx	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}}$ ou $\frac{x^{-n+1}}{-n+1}$	$]-\infty\,;\,0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{+*}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$

B. Primitives de Fonctions Composées

Les primitives se déduisent des formules de dérivation. u désigne une fonction continue sur I

Tableau 6.2. – Tableau des Primitives de Fonctions Composées

Fonction f du type	Primitive F	Conditions
$u'u^n$ $(n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1} \times u^{n+1}$	–
$\frac{u'}{u^n} = u'u^{-n}$ $(n \geqslant 2, n \in \mathbb{N})$	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{u^{n-1}}$ ou $\frac{u^{-n+1}}{-n+1}$	$\forall x \in \mathrm{I},\ u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$	$\forall x \in \mathrm{I},\ u(x) > 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$\forall x \in \mathrm{I},\ u(x) > 0$
$u'\mathrm{e}^u$	e^u	–
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$	–
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$	–

C. Primitives et Opérations sur les Fonctions

1. Théorème

Si F et G sont des primitives respectivement des fonctions f et g et si k est une constante réelle, $F+G$ est une primitive de $f+g$ et kF est une primitive de kf.

2. Propriété

Si f est une fonction continue sur un intervalle tel que $ax+b \in I$, et F est une primitive de f, alors : $g : x \mapsto g(x) = f(ax+b)$ admet une primitive :

$$G(x) = \frac{1}{a}F(ax+b)$$

a. Exemple

$$f(x) = (3x-2)^4 \qquad \begin{aligned} F(x) &= \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{5}(3x-2)^5 \\ &= \tfrac{1}{15}(3x-2)^5 \end{aligned}$$

IV. Équation Différentielle $y' - ay = 0$

A. Théorème

Posons (E) : $y' = ay$

Soit $a \in \mathbb{R}$, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax}$, où C est une constante réelle :

$$y' - ay = 0 \qquad \mathscr{S} = \left\{ x \mapsto Ce^{ax},\ C \in \mathbb{R} \right\}$$

1. Démonstration

— Toute fonction $f : x \mapsto f(x) = Ce^{ax}$ vérifie $f'(x) = aCe^{ax} = a \times f(x)$.
f est donc solution de (E).

— Montrons que toute solution de (E) est sous la forme $x \mapsto Ce^{ax}$
Soit g, une solution de (E). On a $g' = ag$, or $f : x \mapsto f(x) = e^{ax}$ est solution de (E).
f ne s'annulant pas, on peut définir $h : x \mapsto \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(x)}{e^{ax}}$.

On peut écrire $h(x) = g(x)e^{-ax}$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(x)e^{-ax} - ae^{-ax}g(x) \\ &= e^{-ax}\big(g'(x) - ag(x)\big) \qquad \text{or} \qquad g'(x) = ag(x) \\ &= e^{-ax} \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, h est une fonction constante, $\exists C,\ h(x) = C = \frac{g(x)}{e^{ax}}$.

$$g(x) = Ce^{ax},\ C \in \mathbb{R} \quad \square$$

B. Exemple

Soit l'équation $y' + 5y = 0 \iff y' = -5y$.

Les solutions de l'équation sont les fonctions f définies par $f(x) = Ce^{-5x}$, $C \in \mathbb{R}$.

V. Équations Différentielles $y' - ay = k(x)$, k étant Continue

A. Méthode

Supposons qu'on a deux fonctions f et g, solutions de l'équation (E) : $y' - ay = k(x)$.

Alors la fonction $h(x)$, définie par $h(x) = g(x) - f(x)$ est solution de l'équation $y' - ay = 0$.

1. Vérification

$$\begin{aligned} h'(x) - ah(x) &= g'(x) - f'(x) - a\big(g(x) - f(x)\big) \\ &= g'(x) - ag(x) - \big(f'(x) - af(x)\big) \\ &= k(x) - k(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout x (sur un ensemble de définition que l'on n'a pas étudié) :

$$h(x) = Ce^{ax},\ C \in \mathbb{R} \quad \text{(d'après §IV)}$$

Donc, si l'on trouve une solution particulière f de l'équation (E) toute solution s'écrit sous la forme :

$$g(x) = f(x) + Ce^{ax},\ C \in \mathbb{R}$$

$$\text{car} \quad g(x) - f(x) = h(x) = Ce^{ax}$$

B. Exemple

Soit l'équation différentielle $y' + y = \frac{x-1}{x^2}$. (E)

1. Vérifier que la fonction inverse est solution de (E).
2. En déduire toutes les solutions de (E).

1. Soit $f_0 : x \mapsto \frac{1}{x}$ alors $f_0' = \frac{-1}{x^2}$.
   $f_0' + f_0 = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$, la fonction inverse est solution de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. D'après la démonstration précédente, toute solution f de (E) est de la forme
   $f : x \mapsto f_0(x) + \mathrm{C}e^{ax}$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.
   On résout $y' + u = 0$: ici $a = -1$.
   Ainsi, les solutions sont :

$$\mathscr{S} = \left\{ x \mapsto \frac{1}{x} + \mathrm{C}e^{ax},\ \mathrm{C} \in \mathbb{R} \right\}$$

C. Exemple

Soit l'équation $y' - 2y = 5$. (E)

1. Trouvons une fonction constante solution (E).
   La fonction $x \mapsto \frac{-5}{2}$ convient.
2. On résout $y' - 2y = 0$:

$$\left\{ x \mapsto \mathrm{C}e^{2x},\ \mathrm{C} \in \mathbb{R} \right\}$$

Les solutions de (E) sont les fonctions du type :

$$\mathscr{S} = \left\{ x \mapsto \frac{-5}{2} + \mathrm{C}e^{2x},\ \mathrm{C} \in \mathbb{R} \right\}$$

Chapitre 7

Limites de Suites

I. Suites Majorées, Minorées et Bornées

A. Définitions

— Une suite (u_n) est *majorée* s'il existe un réel M tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \mathrm{M}$

— Une suite (u_n) est *minorée* s'il existe un réel m tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$

— Une suite est *bornée* si elle est majorée *et* bornée

B. Exemple

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est minorée par 0, mais aussi par tout nombre négatif.

Elle est majorée par 1 (qui est aussi son maximum) et par tout nombre supérieur à 1. Elle est donc bornée.

II. Définitions

A. Limite Infinie

1. Définition

Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ si, quel que soit le réel M, l'intervalle $\left]\mathrm{M}\,;\,+\infty\right[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Autrement dit, pour tout réel M, on peut trouver un rang n tel que :

$$\forall n \geqslant \mathrm{N}, \quad u_n > \mathrm{M}$$

A partir du rang N, tous les termes sont supérieurs à M.

On note :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

On peut dire que la suite diverge vers $+\infty$.

H.P. : $\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant \mathrm{N} \implies u_n > \mathrm{M})$

2. Définition

Une suite (u_n) a pour limite $-\infty$, si, quel que soit le réel m, l'intervalle $]-\infty\,; m[$ contient tous les termes de le suite à partir d'un certain rang.

Autrement dit, pour tout réel m, on peut trouver un rang N tel que :

$$\forall n \geqslant \mathrm{N}, \quad u_n < m$$

A partir du rang N, tous les termes sont inférieurs à m.

On note :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty}$$

On peut dire que la suite diverge vers $-\infty$.

H.P. : $\forall m \in \mathbb{R}, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant \mathrm{N} \implies u_n < m)$

3. Théorème

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \ln(n) = +\infty \qquad p \in \mathbb{N}^*, \lim_{n \to +\infty} n^p = +\infty$$

$$\lim + n \to +\infty - n^2 = -\infty \qquad \lim_{n \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty$$

4. Rappels

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \dots$ signe

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n}$ on compare à 1

Cas où $u_n = f(n)$, par exemple : $u_n = \sqrt{n^2 + n - 3}$ on étudie f.

a. Arithmétique

$u_{n+1} = u_n + r$ alors $u_n = u_0 + nr \quad \left(u_n = u_p + (n-p)r\right)$

$\mathrm{S} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1)$

b. Géométrique

$u_{n+1} = q u_n$ alors $u_n = u_0 \times q^n \quad \left(u_n = u_p \times q^{n-p}\right)$

$\mathrm{S} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

B. Limites Finies / Suites Convergentes

1. Définition

Une suite (u_n) *converge* vers un réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Autrement dit, on peut trouver un rang N à partir duquel tous les termes de la suite sont aussi près que l'on veut de l.

On dit que l est la *limite* de la suite (u_n) et que la suite est *convergente*.

On note :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell}$$

H.P. : $\forall \epsilon > 0,\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geqslant \mathrm{N} \implies u_n \in \left]\ell-\epsilon\,;\,\ell+\epsilon\right[\right)$

2. Théorème

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad p \in \mathbb{N}^*,\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

3. Définition

Une suite qui n'est pas convergente est *divergente*.

4. Exemple

La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ est divergente.

III. Propriétés sur les Limites

A. Théorèmes de Comparaison

1. Théorème

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$:

— Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

— Si $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

2. Démonstration

On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Soit M > 0, il existe un rang N, à partir duquel si $n \geqslant N_1$, alors $u_n \geqslant M$.

Or, il existe un rang N_2, à partir duquel $n > N_2$, $v_n \geqslant u_n$.

Donc, il existe un rang $N = \max(N_1\ ;\ N_2)$ à partir duquel $v_n \geqslant u_n > M$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \quad \square$$

3. Théorème dit « des Gendarmes » (Théorème d'Encadrement)

Soient (u_n), (v_n), et (w_n) trois suites telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$:

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$ où ℓ est un réel alors :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$$

4. Exemple

Soit (u_n) définie par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$

$$\iff \quad \frac{-1}{n} \leqslant \frac{(-1)^n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

D'après le Théorème des Gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

B. Convergence Monotone

1. Théorème Admis

Toute suite croissante et majorée converge vers une limite finie.

Toute suite décroissante et minorée converge vers une limite finie.

2. Théorème

Soit une suite (u_n) croissante et qui converge vers un réel ℓ, alors (u_n) est majorée par ℓ.

a. Démonstration par l'Absurde

On suppose que (u_n) est croissante.

1. Lemme

Si (u_n) est croissante, si p et n sont deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$.

Alors, $u_p \leqslant u_n$.

2. Démonstration de la Lemme par Récurrence

— Initialisation : On fixe p donc $u_p \leqslant u_{p+1}$.

— Hérédité : On suppose que $k \geqslant 1$, $u_p \leqslant u_{p+k}$.
$u_p \leqslant u_{p+k} \Longrightarrow u_p \leqslant u_{p+k} \leqslant u_{p+k+1}$ □

On suppose $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $u_{n_0} > \ell$.

Or tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Prenons l'intervalle ouvert $]\,a\,;\,b\,[$ tel que $\ell < b < u_{n_0}$.

Il existe un indice $p > n_0$ tel que $u_p \in\,]\,a\,;\,b\,[$
(Ils y sont tous à partir d'un certain rang !)

Donc, $u_p < b < u_{n_0}$, ce qui impossible car (u_n) est croissante et d'après la lemme, $p > n_0 \Longrightarrow u_p \geqslant u_{n_0}$.

C'est absurde, donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$. □

3. Théorème

Toute suite croissante et non-majorée diverge vers $+\infty$

Toute suite décroissante et non-minorée diverge vers $-\infty$

a. Démonstration

Soit M un réel, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite croissante, non-majorée.

Il existe un rang N tel que $u_{\mathrm{N}} > \mathrm{M}$

Donc, (u_n) diverge vers $+\infty$

— Si (u_n) admettait une limite finie, d'après le théorème de croissance,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell$$

(u_n) est majorée par ℓ, c'est une contradiction. □

— Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite non-majorée, donc, $\exists n_0$, $u_{n_0} > \mathrm{M}$
D'après la lemme : (u_n) croissante, p, $n \in \mathbb{N}$, $p \leqslant n \Longrightarrow u_p \leqslant u_n$
$\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0} > \mathrm{M}$

Donc, tous les termes à partir de n_0 sont supérieurs à M. D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

C. Rappel : Limite de (q^n) où $q \in \mathbb{R}$

1. Théorème

- Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$
- Si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Si $q < -1$, la suite diverge.

IV. Opérations sur les Limites

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettant des limites finies ou infinies.
F.I. : Forme Indéterminée, il faut faire un calcul pour lever l'indétermination

A. Somme

Tableau 7.1. – Tableau des Limites de Sommes de Suites

	$\lim u_n$		
$\lim v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

1. Exemple

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n^2 - n$ F.I.

$= n(n-1)$ On a levé l'indétermination

$\underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \quad \lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty}_{\text{F.I.}}$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \quad \lim\limits_{n\to+\infty} n-1 = +\infty$

Donc, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} n(n+1) = +\infty$

et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

B. Produit

Tableau 7.2. – Tableau des Limites de Produits de Suites

	$\lim u_n$			
$\lim v_n$	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\ell \times \ell'$	0	$\pm\infty$ selon signe ℓ'	$\pm\infty$ selon signe ℓ'
0	0	0	F.I.	F.I.
$+\infty$	$\pm\infty$ selon signe ℓ	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$ selon signe ℓ	F.I.	$-\infty$	$+\infty$

1. Exemple

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_n = n$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

$u_n \times v_n = n \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = +\infty$

2. Exemple 2

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_n = n^2$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $v_n = \frac{1}{n} - 4$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -4$ (Somme)

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = -\infty$

C. Quotient

TABLEAU 7.3. – Tableau des Limites de Quotients de Suites

	$\lim u_n$			
$\lim v_n$	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$ selon signe ℓ'	$\pm\infty$ selon signe ℓ'
0	$\pm\infty$ selon signe ℓ et 0	F.I.	$\pm\infty$ selon signe 0	$\pm\infty$ selon signe 0
$+\infty$	0	0	F.I.	F.I.
$-\infty$	0	0	F.I.	F.I.

1. Exemple

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_n = \frac{1}{n^2-3}$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (Somme)

Donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

V. Limite de Suite et Continuité

A. Théorème

Soit f une fonction *continue* sur un intervalle I et $(u_n)_{n\in \text{I}}$, une suite qui converge vers un réel ℓ, telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \text{I},\ \ell \in \text{I}$, alors, la suite $\left(f(u_n)\right)$ converge vers $f(\ell)$.

1. Exemple

Soit le suite (u_n), définie par $u_n = \frac{4n}{n+1}$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$

Donc, la suite (v_n), définie par $v_n = \sqrt{u_n}$ converge vers $\sqrt{4} = 2$.

B. Théorème

Soit f une fonction *continue* sur un intervalle I, telle que $f(\text{I}) \subset \text{I}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in \text{I}$

Si la suite (u_n) *converge vers un réel* ℓ, alors l est solution de l'équation $f(x) = x$
On peut dire que ℓ est un point fixe de f.

1. Démonstration

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = f(\ell)$$

2. Remarque

Graphiquement, les termes de la suite se rapprochent du point d'intersection $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = x$. Uniquement si la suite converge !

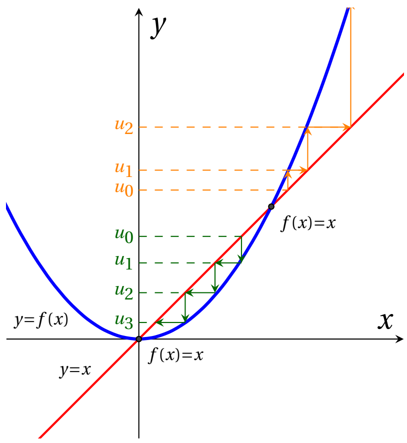


Figure 7.1. – Représentation Graphique de la Convergence d'une Suite

Ici, lorsque u_0 est supérieur au deuxième point fixe de f, le suite diverge.

Chapitre 8

Géométrie Vectorielle dans l'Espace

I. Vecteurs de l'Espace

La notion de vecteur se généralise à l'espace.

Le vecteur $\vec{u}$ est caractérisé par un sens, une direction, et une norme, notée $||\vec{u}||$.

A. Théorème

A, B, et C étant quatre points de l'espace, les propositions suivantes sont équivalentes :

— $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

— Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

— Les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.

B. Définition

Deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires* si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

C. Propriété

Toutes les opérations sur les vecteurs, en particulier la relation de Chasles sont identiques dans l'espace comme dans le plan.

D. Theorème

A et B étant deux points distincts de l'espace, (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB},\ t \in \mathbb{R}$

$(AB) = \left\{ M \in \mathscr{E},\ \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB},\ t \in \mathbb{R} \right\}$

E. Définition

Un vecteur $\vec{k}$ est une *combinaison linéaire* des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ s'il existe des réels a, b et c tels que $\vec{k} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$

II. Vecteurs Coplanaires

A. Définition

Des vecteurs sont *coplanaires* s'ils admettent des représentants dont les extrémités sont dans un même plan.

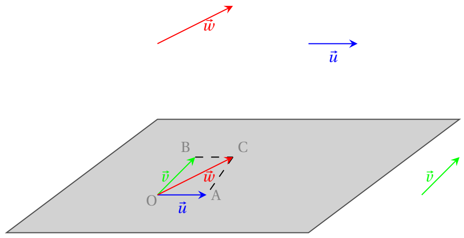


FIGURE 8.1. – Illustration de la Définition

Si O est un point quelconque et A, B et C sont tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$

$\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{s}$ coplanaires $\iff$ O, A, B, et C coplanaires

B. Théorème

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ étant trois vecteurs de l'espace avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. $\left(\vec{w}\right.$ est une *combinaison linéaire* de $\vec{u}$ et $\left.\vec{v}\right)$

1. Démonstration

Soient O, A, B, et C quatre points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non-colinéaires donc, O, A et B sont non alignés, et (OAB) est un plan de base $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$

" $\Longrightarrow$ " On suppose que $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ sont coplanaires. Alors, $C \in (OAB)$.
C admet donc des coordonnées $(\alpha ; \beta)$ dans la base $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$. C'est-à-dire $\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ ou encore $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. □

" $\Longleftarrow$ " On suppose que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$
Soit D le point de (OAB) de coordonnées $(\alpha ; \beta)$
Alors,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} \\ &= \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{w} = \overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

Donc, D = C, les points sont confondus, et comme $C \in (OAB)$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ sont coplanaires. □

2. Théorème : Caracterisation Vectorielle d'un Espace

Si A, B, et C sont trois points non-alignés de l'espace, le plan (ABC) est l'ensemble des M tels que :

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t'\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad (\, t,\ t' \in \mathbb{R}\,)$$

III. Repèrage dans l'Espace

A. Définition

Un repère de l'espace est constitué d'un point appelé origine du repère (en général O) et d'un triplet de vecteurs non-coplanaires (en général $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$)

On le note $\left(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$

B. Vocabulaire

La droite $\left(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}\right)$ est appelée axe des *abscisses.*

La droite $\left(\mathrm{O}\,; \vec{\jmath}\right)$ est appelée axe des *ordonnées.*

La droite $\left(\mathrm{O}\,; \vec{k}\right)$ est appelée axe des *cotes.*

Lorsque ces trois axes sont perpendiculaires deux à deux, le repère est *orthogonal.* Si de plus $||\vec{\imath}|| = ||\vec{\jmath}|| = ||\vec{k}|| = 1$, le repère est *orthonormé.*

C. Coordonnées dans l'Espace

1. Théorème

Si $\left(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ est un repère, pour tout point M, il existe un unique triplet $(x\,; y\,; z)$ de réels tels que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$, appelés coordonnées de M.

On note M $(x\,; y\,; z)$

a. Démonstration

$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM'}} + \overrightarrow{\mathrm{M'M}}$
Or M $\in \left(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath}\right)$ donc il a des coordonnées $(x\,; y)$ dans le repère $\left(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath}\right)$.

$\overrightarrow{\mathrm{OM'}} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{\mathrm{M'M}}$ est colinéaire à $\vec{k}$ (on a projeté dans sa direction). Il existe un réel z

tek que $\overrightarrow{\mathrm{M'M}} = z\vec{k}$

Donc, $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ $\square$
(On admet l'unicité)

B. Remarque

On définit de même les coordonnées d'un vecteur de l'espace. Tout vecteur de l'espace est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$.

2. Théorème

Si dans un repère A $(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A}\,;z_\mathrm{A})$ et B $(x_\mathrm{B}\,;y_\mathrm{B}\,;z_\mathrm{B})$ sont deux points, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \begin{pmatrix} x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A} \\ y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A} \\ z_\mathrm{B}-z_\mathrm{A} \end{pmatrix}$$

Et I, le point du milieu de $[\mathrm{AB}]$:

$$\mathrm{I}\left(\frac{x_\mathrm{A}+x_\mathrm{B}}{2}\,;\frac{y_\mathrm{A}+y_\mathrm{B}}{2}\,;\frac{z_\mathrm{A}+z_\mathrm{B}}{2}\right)$$

Dans un repère orthonormé, un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ a pour norme :

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

A. Démonstration

Passer par M′, le projeté orthogonal de M sur $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, puis appliquer le théorème de Pythagore deux fois.

3. Théorème

Si I est le milieu de $[\mathrm{AB}]$, pour tout M :

$$\overrightarrow{\mathrm{MI}} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{MB}}$$

A. Démonstration

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{MI}} &= \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{AI}} \\
&= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{MB}} \quad \text{(Chasles)}
\end{aligned}$$

Chapitre 9

Succession d'Épreuves Indépendantes Loi Binomiale

I. Succession d'Épreuves Indépendantes

A. Rappel

Deux épreuves successives sont indépendantes lorsque le résultat de la première n'influe pas sur le résultat de la deuxième.

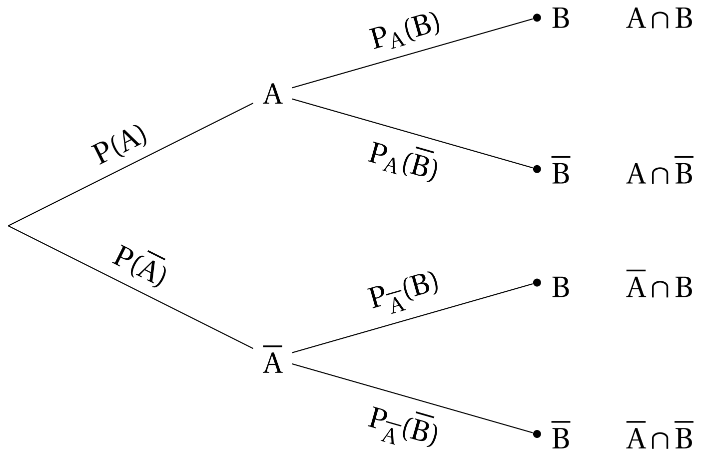


FIGURE 9.1. – Arbre de Probabilité qui Présente l'Indépendance des Épreuves

Ainsi, A et B sont deux événements indépendants si et seulement si :

— $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B) = P(B)$

— $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

B. Modélisations

On peut représenter une succession de n épreuves indépendantes par un arbre pondéré (une issue de cette succession d'épreuves est alors un chemin sur l'arbre).

Si les n épreuves indépendantes ont pour univers respectifs $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_n$, les issues de ces n épreuves sont les éléments du produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$.

C. Exemple

Un restaurant propose deux entrées e_1 et e_2, trois plats p_1, p_2, et p_3 et un dessert d.

Un client prend au hasard une entrée, un plat, et un dessert.

L'ensemble des issues de cette expérience est $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$ où
$\Omega_1 = \{e_1 ; e_2\}$, $\Omega_2 = \{p_1 ; p_2 ; p_3\}$, et $\Omega_3 = \{d\}$.

Ainsi, $\Omega = \Big\{(e_1, p_1, d) ; (e_1, p_2, d) ; \ldots\Big\}$.

On peut aussi représenter la situation par un arbre :

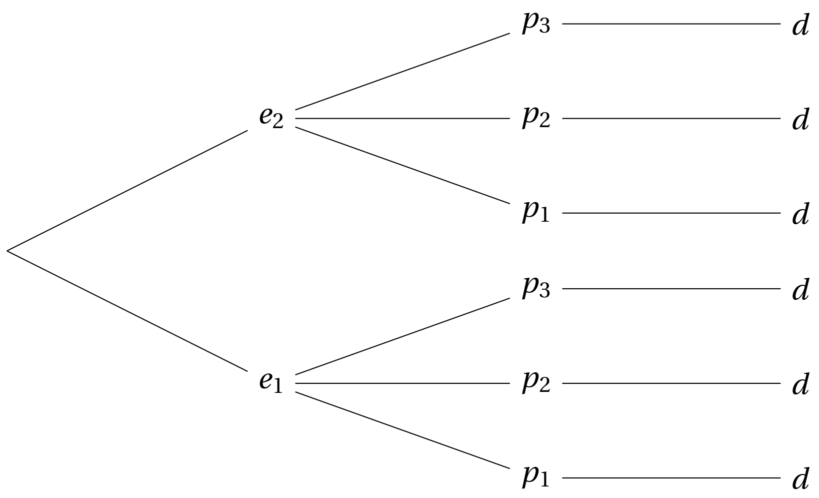


Figure 9.2. – Arbre Pondéré Représentant la Situation

II. Loi Binomiale

A. Épreuve de Bernoulli

1. Définition

Une *épreuve de* Bernoulli est un expérience aléatoire possédant deux issues qu'on appelle généralement « succès » et « échec ». La probabilité du succès p est appelée paramètre de la loi de Bernoulli.

k_i	0	1
$P(X = k_i)$	$1 - p$	p

Figure 9.3. – Loi de la Variable Aléatoire X

X est une variable aléatoire donnant le nombre de succès (il n'y a que deux possibilités : 0 ou 1). On dit que X suit la loi de Bernoulli.
Penser à un jeu de pile ou face.

2. Propriété

Si X est une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p, alors, l'espérance de X est $E(X) = p$ et sa variance est $V(X) = p(1 - p)$.

B. Schéma de Bernoulli

1. Définition

Un *schéma de* Bernoulli est une répétition de n épreuves *identiques* et *indépendantes* à deux issues (n épreuves de Bernoulli).

Une issue de cette expérience aléatoire est un élément (n-uplet) de $\Omega = \{S;\overline{S}\}^n$.

2. Exemple

On tire successivement 4 fois à pile ou face avec une pièce (truquée peut-être) dont la probabilité de tomber sur « pile » est p.

Les tirages obtenus sont des 4-uplets composés de P et de F (si l'on note P l'événement « tomber sur pile » et F « tomber sur face »).

Un exemple de tirage est (P, F, F, F). On peut aussi noter S et $\overline{S}$ au lieu de P et F.

C. Loi Binomiale

1. Définition

On considère une expérience aléatoire qui suit un schéma de Bernoulli, autrement dit, une répétition de n épreuves *identiques* et *indépendantes* à deux issues (succès et échec) dont la probabilité de succès est p.

La variable aléatoire donnant le nombre de succès suit la *loi binomiale* de paramètres n et p, notée $\mathscr{B}(n, p)$. Cette loi est aussi parfois appelée loi du nombre de succès.

2. Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p, on peut aussi noter $X \sim \mathscr{B}(n, p)$.

Pour tout entier k compris entre 0 et n :

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

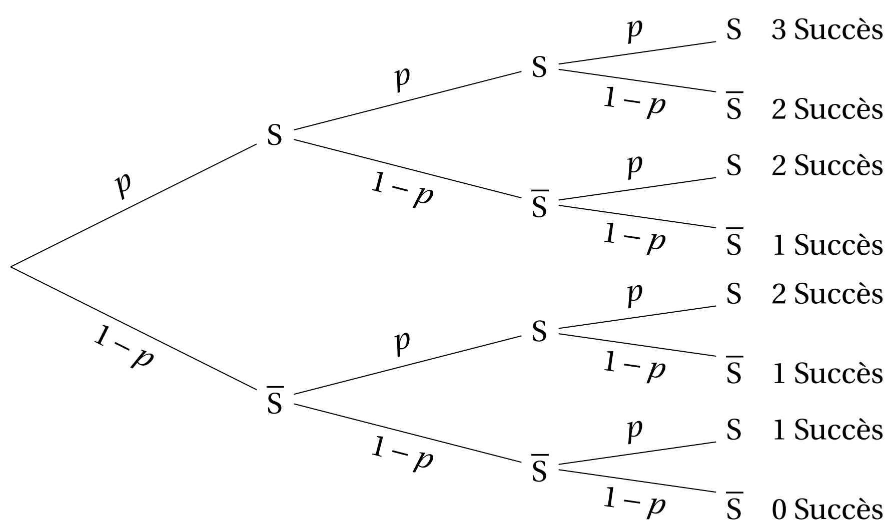


Figure 9.4. – Illustration de la Loi Binomiale

a. Démonstration

Dans l'arbre, chaque chemin contenant exactement k succès passe par k branches de probabilité p et $n-k$ branches de probabilité $1-p$. Ainsi la probabilité d'un tel chemin est $p^k(1-p)^{n-k}$.

On compte ensuite le nombre de chemins contenant k succès : il y en a $\binom{n}{k}$.

On peut aussi considérer qu'un tirage est un n-uplet contenant des S et des $\overline{\mathrm{S}}$.

Ainsi, un tirage contenant k succès comporte k fois la lettre S et $n-k$ fois la lettre $\overline{\mathrm{S}}$. Le nombre de façons de disposer les k « S » parmi les n éléments est $\binom{n}{k}$.

B. Exemple

Avec nos 4 tirages de pièce truquée, si on a $p = \frac{2}{3}$ (la probabilité de tirer « pile » est $\frac{2}{3}$) et si on note X la variable aléatoire donnant le nombre de « pile », on a :

$$P(X=1) = \binom{4}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(1-\frac{2}{3}\right)^{4-1} = 4\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)^3 \approx 0{,}099$$

3. Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

L'Espérance de X est $\boxed{E(X) = np}$

La variance de X est $\boxed{V(X) = np(1-p)}$

L'Écart-type de X est $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}}$

Démonstration dans chapitre sur les opérations sur les Variables Aléatoires.

A. Exemple

On reprend la pièce truquée précédente, qu'on lance quatre fois. X est toujours la variable aléatoire donnant le nombre de « pile ».

$E(X) = 4\times\frac{2}{3} \approx 2{,}67$ (On peut espérer d'obtenir 2,67 piles sur 4 tirages).

$\sigma(X) = \sqrt{4\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}} \approx 0{,}94$ (Dont l'interprétation est moins intéressante).

Chapitre 10

Limites de Fonctions

I. Limites d'une Fonction en l'Infini

A. Limite en $+\infty$

1. Définitions

Soit une fonction f définie au moins sur $[a\,;+\infty[$, où a est un réel.

— On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si pour tout réel M positif, il existe un réel A, tel que $x > \mathrm{A}$ implique $f(x) \geqslant \mathrm{M}$.
Autrement dit, lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, $f(x)$ peut être aussi grand que l'on veut.

On note :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

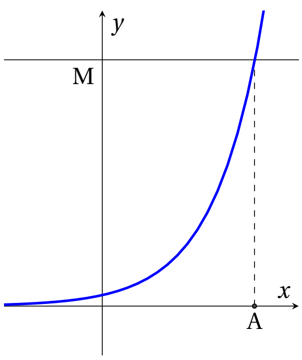


FIGURE 10.1. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers $+\infty$ en $+\infty$

— On dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si pout tout réel m négatif, il existe un réel A, tel que $x > \mathrm{A}$, $f(x) \leqslant m$.
Autrement dit, lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, $f(x)$ est négatif et peut être aussi grand que l'on veut en valeur absolue.

On note :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

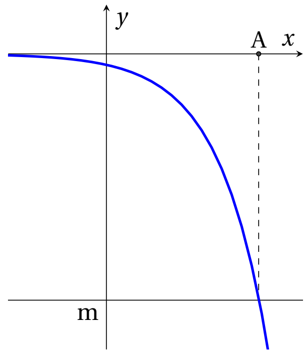


FIGURE 10.2. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers $-\infty$ en $+\infty$

— On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ où ℓ est un réel si pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, il existe un réel A tel que $x > \mathrm{A}$ implique $f(x) \in \mathrm{I}$
Autrement dit, lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, $f(x)$ peut être aussi près de ℓ que l'on veut.

On note :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell}$$

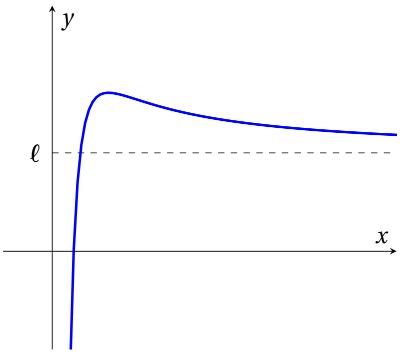


FIGURE 10.3. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers ℓ en $+\infty$

H.P. : $\forall \epsilon > 0,\ \exists \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathscr{D}_f$

$$\left(x > \mathrm{A} \implies \left|f(x) - l\right| < \epsilon\right) \text{ ou } \left(x > \mathrm{A} \implies f(x) \in \left]l - \epsilon\,; l + \epsilon\right[\right)$$

2. Définition

Soit f une fonction définie au moins sur $[A\,;+\infty[$, où A est un réel, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ alors $\mathscr{C}$ admet une *asymptote horizontale* en $+\infty$ d'équation $y=\ell$.

3. Remarque

Une fonction n'admet pas forcément de limite en $+\infty$, par exemple, les fonctions sinus et cosinus sont bornées et n'admettent pas de limites en l'infini.

B. Limite en $-\infty$

1. Définitions

Soit f une fonction définie au moins sur $]-\infty\,;a[$, où a est un réel.

— On dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ si pour tout réel M, positif, il existe un réel A tel que $x<A$ implique $f(x)\geqslant M$
Autrement dit, lorsque x prend des valeurs négatives de plus en plus grandes en valeur absolue, $f(x)$ peut être aussi grand que l'on veut.

On note :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$$

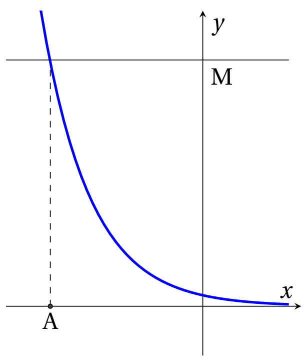


Figure 10.4. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers $+\infty$ en $-\infty$

— On dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ si pour tout réel m négatif, il existe un réel A tel que $x < \mathrm{A}$ implique $f(x) \leqslant m$
On note :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

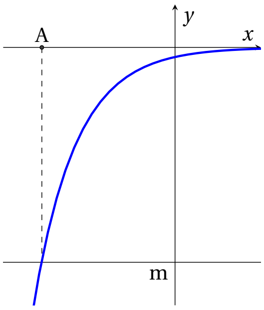


FIGURE 10.5. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers $-\infty$ en $-\infty$

— On dit que f a pour limite ℓ en $-\infty$ où ℓ est un réel, si pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, on peut trouver un réel A tel que si $x \leqslant \mathrm{A}$, $f(x)$ appartient à I.
Autrement dit, lorsque x prend des valeurs négatives, de plus en plus grandes en valeur absolue, $f(x)$ peut être aussi près de ℓ que l'on veut.
On note :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell}$$

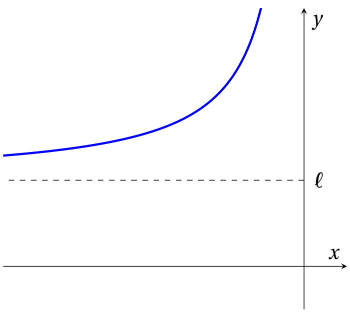


FIGURE 10.6. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers 2 en $-\infty$

H.P. : $\forall \epsilon > 0,\ \exists \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathscr{D}_f$

$$\Big(x < \mathrm{A} \implies \big|f(x) - \ell\big| < \epsilon\Big) \text{ ou } \Big(x < \mathrm{A} \implies f(x) \in \big]\ell - \epsilon\,;\ell + \epsilon\big[\Big)$$

2. DÉFINITION

Si $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ alors $\mathscr{C}$ admet une *asymptote horizontale* en $-\infty$ d'équation $y = \ell$.

II. Limite d'une Fonction en un Réel

A. Définitions

Soit a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I contenant a ou tel que a est une borne de I.

Si, lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a :

— $f(x)$ est aussi grand que l'on veut, on dit que f a pour limite $+\infty$ en a.

On note :

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = +\infty}$$

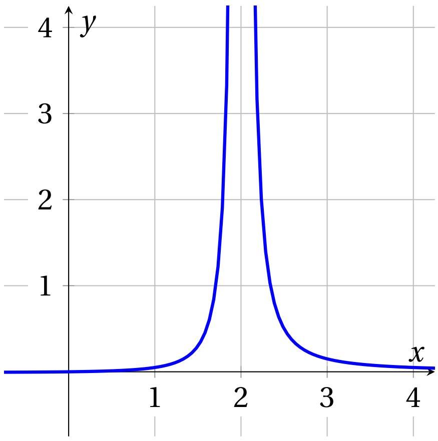


Figure 10.7. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers $+\infty$ en 2

— $f(x)$ est négatif et aussi grand que l'on veut en valeur absolue, on dit que f a pour limite $-\infty$ en a.

On note :

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = -\infty}$$

— $f(x)$ est aussi proche que l'on veut d'un réel ℓ, on dit que f a pour limite ℓ en a.

On note :

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \ell}$$

1. Remarque

Si f est *continue* en a, $\ell = f(a)$.

B. Limite à Droite ou à Gauche d'une Fonction en un Réel

1. Exemple

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 car lorsque x tend vers 0 par des valeurs positives, $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers 0 par valeurs négatives, $\frac{1}{x}$ tend vers $-\infty$.

Cependant, on peut parler de limite à gauche et limite à droite.

On note :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

2. Remarque

Une fonction admet une limite en un réel a si la limite à droite et à gauche de f en a existent et sont égales.

C. Asymptote Verticale

1. Définition

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f. Dire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = a$, c'est dire que :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \pm\infty$$

III. Fonctions Usuelles

A. Théorème

1. Fonction Racine Carrée

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$ (la fonction racine carrée est continue en 0)

2. Fonction Inverse

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

3. Fonctions Puissances

Quel que soit $p \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p = +\infty$.

Si p est pair, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^p = +\infty$ et si p est impair, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^p = -\infty$.

Quel que soit $p \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^p} = 0$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^p} = 0$.

Si p est pair, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^p} = +\infty$ et si p est impair, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^p} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^p} = -\infty$.

4. Fonction Exponentielle

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

5. Fontion Logarithme Népérien

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, $\quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$

B. Théorèmes de Croissance Comparée

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

1. Démonstration

— On montre que $e^x > \frac{x^2}{2}$, pour tout $x > 0$ en étudiant la différence.

Soit f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$. Étudions les variations de f.

$f'(x) = e^x - x$ on ne conclut pas directement sur le signe. Dérivons encore :

$f''(x) = e^x - 1 \quad$ et $\quad e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$

Donc, $f''(x)$ est strictement positive pour $x > 0$.

Ainsi on a $f'(x)$ strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et comme $f'(0) = 1 > 0$, f' est strictement positive sur $]0\,;+\infty[$:

x	0		$+\infty$
$f''(x)$	0	$+$	
$f'(x)$	1	$\nearrow$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	

Figure 10.8. – Tableau de Variation de f et f'

Donc, pour tout $x \in \left]0\,;+\infty\right[$, $e^x - \frac{x^2}{2} > 0$ et donc $e^x > \frac{x^2}{2}$
Comme $x > 0$ on peut diviser par x :
Donc, $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, par comparaison :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \square$$

— On pose $X = -x$ et alors, $\lim\limits_{x\to-\infty} X = +\infty$ et $xe^x = -Xe^x = -\frac{X}{e^X}$
Donc, par passage à l'inverse de la limite précédente :

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{X\to+\infty} -\frac{X}{e^X} = 0 \quad \square$$

C. Théorème

Quel que soit l'entier $n > 0$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$

D. Théorèmes de Croissance Comparée (bis)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x) = 0$$

1. Démonstration

On pose le changement de variable $X = \ln(x)$ et donc $x = e^X$. On a alors $\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} X = -\infty$.

IV. Opérations sur les Limites

A. Limites de Somme, Produit et Quotient

Dans cette sous-partie, les limites des fonctions f et g sont prises soit en $-\infty$, soit en $+\infty$ soit en un réel a. ℓ et ℓ' sont des nombres réels.
Lorsqu'il n'y a pas de conclusion en général, on dit alors qu'il y a un cas de forme indéterminée. (F.I.)
N.B. : $\pm\infty$ désigne $+\infty$ ou $-\infty$.

1. Limite de Somme

Tableau 10.1. – Tableau des Limites de Sommes de Fonctions

	$\lim f$		
$\lim g$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

2. Limite d'un Produit

Tableau 10.2. – Tableau des Limites des Produits de Fonctions

	$\lim f$					
$\lim g$	ℓ	$\ell>0$	$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$	0
ℓ'	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell'>0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell'<0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	$-\infty$	$+\infty$	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.
0	0	0	0	F.I.	F.I.	0

3. Limite d'un quotient f/g

Tableau 10.3. – Tableau des Limites des Quotients de Fonctions

	$\lim f$					
$\lim g$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell' > 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell' < 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$-\infty$	$+\infty$	0
$+\infty$	0	0	0	F.I.	F.I.	0
$-\infty$	0	0	0	F.I.	F.I.	0
0^+	–	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.
0^-	–	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

4. Exemples

a. Somme

$$\lim_{x \to +\infty} x + \frac{1}{x^2} - 1 = +\infty \quad \text{(remarquons qu'on a la même limite quand } x \to 0\text{)}$$

b. Produit

$\lim_{x \to 0} (-3 + x)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$ En effet, $\lim_{x \to 0} -3 + x = -3$ et $\lim_{x \to 0} 1 + \frac{1}{x^2} = +\infty$

Par contre, remarquons que $\lim_{x \to +\infty} (-3 + x)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$.

c. Quotient

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + x}{\sqrt{x}} = +\infty$$

B. Limite d'une composée de deux fonctions

1. Rappel

On note $g \circ f$ la composée de la fonction f suivie de g.

$\forall x \in \mathscr{D}_f$ tel que $f(x) \in \mathscr{D}_g$, $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

2. Théorème

Soient a, b et c trois réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. Soient f et g deux fonctions, définies au bon endroit.

Alors, si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \boldsymbol{b}$ et $\lim\limits_{x \to \boldsymbol{b}} g(x) = c$, on a :

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$$

Attention aux limites !

3. Exemple

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x^2-3} = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x \to +\infty} -x^2 - 3 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\mathrm{X} \to -\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{X}} = 0.$$

C. Comparaison

a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

1. Théorème

Si f et g sont deux fonctions telles que pour tout x voisin de a, $f(x) \leqslant g(x)$

— Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.

— Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

2. Théorème dit « des Gendarmes »

Soient f, g et h trois fonctions telles que pour tout x voisin de a, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$.

Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$ où ℓ est un réel, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Chapitre 11

Géométrie dans l’Espace

I. Positions Relatives de Droites et de Plans

A. Positions Relatives de Deux Plans

Deux plans de l’espace non parallèles sont sécants. Leur intersection est une *droite*.

Plans strictement parallèles

Plans Confondus

C’est deux types de plans parallèles.

Plans sécants

Figure 11.1. – Illustration des Positions Relatives de Deux Plans

1. PROPRIÉTÉ

Deux plans sont parallèles si et seulement si *deux* droites *sécantes* incluses dans le premier sont parallèles à deux droites sécantes dans le deuxième.

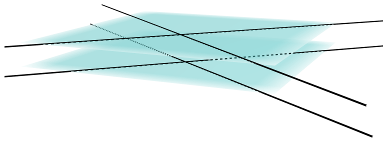


FIGURE 11.2. – Illustration de la Propriété

2. PROPRIÉTÉ

Si deux plans sont parallèles, tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

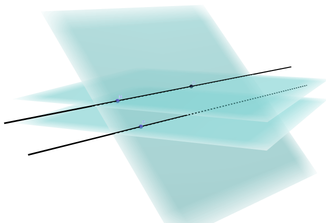


FIGURE 11.3. – Illustration de la Propriété

3. THÉORÈME DIT “DU TOIT”

Si deux plans sécants $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ contiennent respectivement deux droites d_1 et d_2 parallèles, alors la droite d'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ est parallèle à d_1 et d_2.

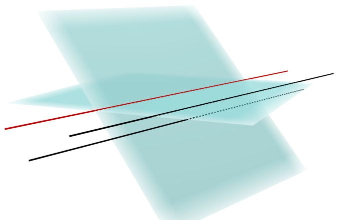
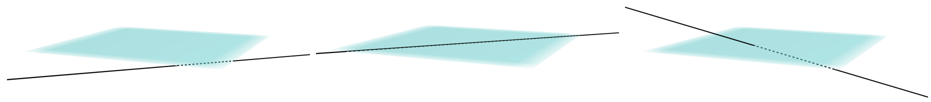


FIGURE 11.4. – Illustration du Théorème

B. Positions Relatives d'une Droite et un Plan

Une droite non parallèle à un plan est sécante à ce plan. Leur intersection est un *point*.



Droite strictement parallèle à un plan | Droite incluse dans un plan | Droite sécante à un plan

C'est deux droites parallèles à un plan

FIGURE 11.5. – Illustration des Positions Relatives d'un Plan et une Droite

1. Propriété

Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.

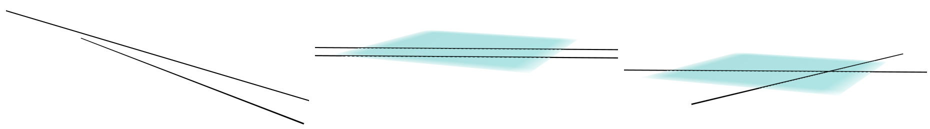
C. Position Relative de Deux Droites

1. Définition

Deux droites sont coplanaires si elles appartiennent à un même plan.

2. Propriété

Deux droites sont coplanaires si et seulement si elles sont sécantes ou parallèles.



Droites non coplanaires | Droites strictement parallèles | Droites sécantes

FIGURE 11.6. – Illustration de la Propriété

3. Remarque

Deux droites confondues sont parallèles (au sens large)

4. Remarque

En général, deux droites de l'espace sont non coplanaires.

Chapitre 12

Orthogonalité dans l'Espace

I. Différentes Expressions du Produit Scalaire

A. Définitions

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs de l'espace, soit un point A de l'espace, et les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

Alors, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ (Produit Scalaire de deux vecteurs dans le plan (ABC))

Ainsi, toutes les définitions et propriétés du produit scalaire dans le plan sont conservées dans l'espace.

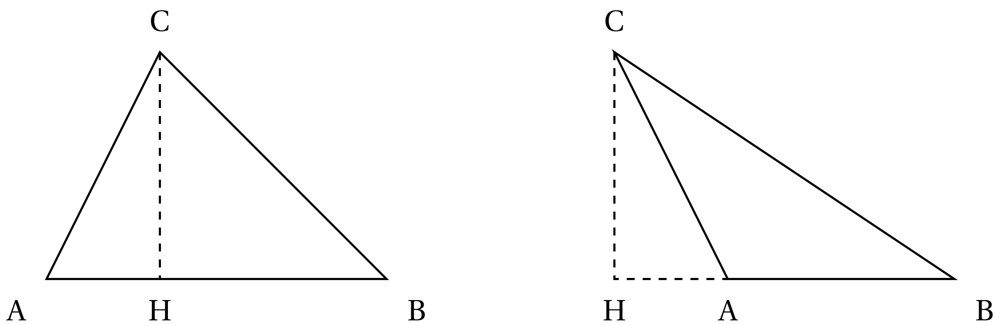
Les trois définitions suivantes sont équivalentes :

1. Définition avec le Projeté Orthogonal

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs de l'espace, soit un point A de l'espace, et les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB),

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraire.



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

$$= AB \times AH \qquad \text{ou} \qquad = -AB \times AH$$

Figure 12.1. – Illustration du Produit Scalaire par Projeté Orthogonal

2. Définitions avec les Normes

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right) = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2\right)$$

Ainsi, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - CB^2\right)$.

3. Définition avec l'Angle

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}\,,\vec{v})$$

B. Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et pour tout réel λ :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u} \qquad \text{(symétrie du produit scalaire)}$$

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \lambda\times(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}) \\ \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}\end{array}\right\}\text{(bilinéarité du produit scalaire)}$$

C. Expression Analytique du Produit Scalaire

Dans un repère orthonormé de l'espace, $\vec{u}\ (x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}\ (x'\,;y'\,;z')$ étant deux vecteurs, alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

1. Démonstration

On rappelle que $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$:

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\left(x+x'\right)^2 + \left(y+y'\right)^2 + \left(z+z'\right)^2 - \left(x^2+y^2+z^2\right) - \left(x'^2+y'^2+z'^2\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(2xx' + 2yy' + 2zz'\right)\\ &= xx' + yy' + zz'\end{aligned}$$

II. Orthogonalité

A. Vecteurs Orthogonaux

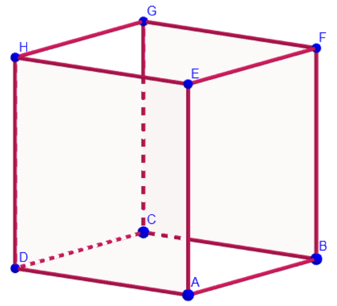
1. Définition

Deux vecteurs de l'espace non nuls sont orthogonaux si deux droites qu'ils dirigent sont orthogonales.

Par convention le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

a. Exemple

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.



$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont orthogonaux.

Figure 12.2. – Illustration de deux Vecteurs Orthogonaux

2. Théorème

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

3. Théorème

Dans un repère orthonormé, deux vecteurs $\vec{u}$ $\left(x\,;y\,;z\right)$ et $\vec{v}$ $\left(x'\,;y'\,;z'\right)$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' + zz' = 0$ (par définition analytique)

B. Vecteur Normal à un Plan

1. Définition

Un vecteur *normal* à un plan est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à un plan.

Un vecteur normal est par définition *non nul*.

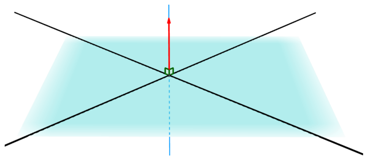


FIGURE 12.3. – Illustration de la Définition

2. Caractérisation d'un Plan

Un plan est caractérisé par *un point* et *un vecteur normal*.

FIGURE 12.4. – Caractérisation d'un Plan

Sur ce dessin, les deux plans ont le meme vecteur normal $\vec{n}$, donc la meme direction. La position d'un plan sera déterminée par un point.

On en déduit que deux plans parallèles admettent le meme vecteur normal, c'est-à-dire des vecteurs normaux colinéaires.

a. Rappel

On peut aussi définir un plan par trois points non alignés, ou par deux droites sécantes (c'est-à-dire un point et deux vecteurs directeurs), ou, beaucoup plus rare, par deux droites parallèles non confondues.

3. Théorème

Le plan $\mathscr{P}$ qui passe par un point A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des point M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. (admis ou définition d'un plan)

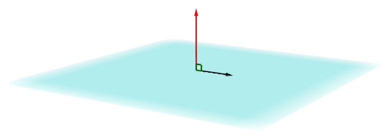


FIGURE 12.5. – Illustration du Théorème

C. APPLICATION (APPROFONDISSEMENT)

1. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

« Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. »

" $\Longrightarrow$ " Si une droite est orthogonale à un plan, elle est orthogonale à toute droite de ce plan, en particulier deux droites sécantes de ce plan.

" $\Longleftarrow$ " Supposons qu'une droite (d) est orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 du plan $\mathscr{P}$. Notons A le point d'intersection de d_1 et d_2, et $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ deux vecteurs directeurs de d_1 et d_2.

Ainsi $(\mathrm{A}\,;\, \vec{u}_1\,,\, \vec{u}_2)$ est un repère du plan $\mathscr{P}$, car $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires.

Notons $\vec{n}$ un vecteur directeur de (d). (on trace ci-dessous uniquement les vecteurs directeurs)

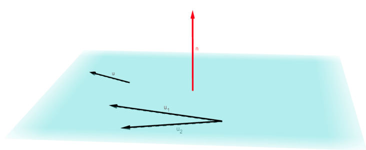


FIGURE 12.6. – Représentation de la Situation

Alors, $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

Soit une droite du plan $\mathscr{P}$, dont le vecteur directeur est $\vec{u}$.

Alors, il existe deux réels α et β tels que $\vec{u} = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2$ ($\vec{u}$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ coplanaires)

Donc, $\vec{n}\cdot\vec{u} = \alpha\vec{n}\cdot\vec{u}_1 + \beta\vec{n}\cdot\vec{u}_2 = 0$ (car $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$)

Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$, et donc (d) est orthogonale à toute droite du plan $\mathscr{P}$. □

D. Plans Perpendiculaires

Deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ admettant pour vecteurs normaux respectivement $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.

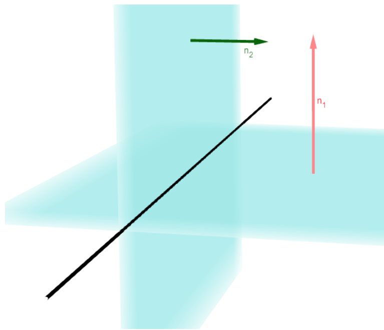


Figure 12.7. – Illustration de deux Plans Perpendiculaires

III. Projection Orthogonale d'un Point

A. Projeté Orthogonal d'un Point sur un Plan

a. Définition

Le projeté orthogonal d'un point A sur un plan $\mathscr{P}$ est l'intersection de $\mathscr{P}$ et de la droite orthogonale à $\mathscr{P}$ passant par A.

b. Remarque

Il existe une unique droite orthogonale (perpendiculaire) à $\mathscr{P}$ passant par A.

c. Propriété

Si H est le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$, le point H est le point de $\mathscr{P}$ le plus proche de A. On l'appelle distance du point A au plan $\mathscr{P}$.

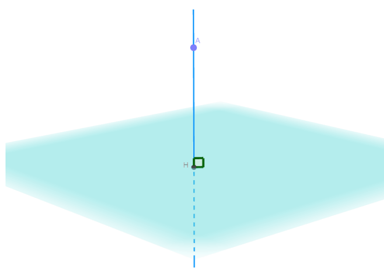


Figure 12.8. – Illustration de la Propriété

1. Démonstration

Soit M un point de $\mathscr{P}$, comme (AH) $\perp \mathscr{P}$, (AH) est orthogonale à toute droite de ce plan.
Donc AMH est un triangle rectangle en H et $AH^2 = AM^2 - MH^2 \leqslant AM^2$

Donc, pour tout point M du plan, $AH \leqslant AM$.

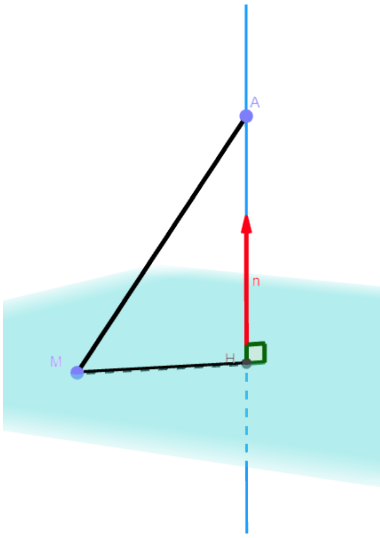


FIGURE 12.9. – Illustration de la Démonstration

D. Propriété

Pour tout point M du plan $\mathscr{P}$:

$$AH = \frac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}\right|}{||\vec{n}||} = d\ (A\,,\mathscr{P})$$

1. Démonstration

$AH = AM \times \cos\left(\widehat{MAH}\right)$ (triangle rectangle AMH)

Or $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = AM \times ||\vec{n}|| \times \cos\left(\overrightarrow{AM}\,,\ \vec{n}\right)$

Donc $\left|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}\right| = AM \times ||\vec{n}|| \times \left|\cos\left(\overrightarrow{AM}\,,\ \vec{n}\right)\right| = AM \times ||\vec{n}|| \times \cos\left(\widehat{MAH}\right)$

Et donc, $\dfrac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}\right|}{||\vec{n}||} = AH$

B. Projeté Orthogonal d'un Point sur une Droite

1. Définition

Le projeté orthogonal d'un point A sur une droite (d) est l'intersection de (d) et du plan orthogonal à (d) passant par A.

2. Remarque

Il existe un unique plan orthogonal (perpendiculaire) à (d) passant par A.

3. Propriété

Si H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (d), le point H est le point de (d) le plus proche de A. On l'appelle distance du point A à la droite (d).

Chapitre 13

Équations dans l'Espace

I. Représentation Paramétrique d'une Droite

Dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$, soit (d) la droite passant par un point A $\left(x_{\mathrm{A}}\,;y_{\mathrm{A}}\,;z_{\mathrm{A}}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(a\,;b\,;c\right)$

Un point M $\left(x\,;y\,;z\right)$ appartient à (d) si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=t\vec{u}$

C'est-à-dire : $(\mathrm{S})\begin{cases} x=x_{\mathrm{A}}+ta \\ y=y_{\mathrm{A}}+tb \\ z=z_{\mathrm{A}}+tc \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

A. Définition

Le système (S) est une représentation paramétrique de la droite (d). t est le paramètre de cette représentation.

1. Démonstration

Reprenons la situation précédente.

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix} x_{\mathrm{M}}-x_{\mathrm{A}} = x-x_{\mathrm{A}} \\ y_{\mathrm{M}}-y_{\mathrm{A}} = y-y_{\mathrm{A}} \\ z_{\mathrm{M}}-z_{\mathrm{A}} = z-z_{\mathrm{A}} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}\in(d) &\iff \overrightarrow{\mathrm{AM}}=t\vec{u} \\
&\iff \begin{pmatrix} x-x_{\mathrm{A}} \\ y-y_{\mathrm{A}} \\ z-z_{a} \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x-x_{\mathrm{A}}=ta \\ y-y_{\mathrm{A}}=tb \\ z-z_{\mathrm{A}}=tc \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x=x_{\mathrm{A}}+ta \\ y=y_{\mathrm{A}}+tb \\ z=z_{\mathrm{A}}+tc \end{cases}
\end{aligned}$$

B. Exemple

La droite (d) passant par A $(2\,;0\,;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ a pour représentation paramétrique :

$$(d)\begin{cases} x = 2+t \\ y = -3t \\ z = -1+2t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Les points M $(0\,;\,6\,;\,-5)$ et N $(1\,;\,3\,;\,2)$ appartiennent-ils à (d) ?

— M : $\begin{cases} 0 = 2+t \\ 6 = -3t \\ -5 = -1+2t \end{cases}$ $\quad$ M $\in (d)$, car -2 est solution du système.

— N : $\begin{cases} 1 = 2+t \\ 3 = -3t \\ 2 = -1+2t \end{cases}$ $\quad$ N $\notin (d)$, car -1 est solution de (1) et (2) mais pas (3).

II. Équation Cartésienne de Plan

A. Rappel

La plan $\mathscr{P}$ qui passe par un point A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$

B. Théorème

(1) L'ensemble des points M $(x\,;y\,;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$, où a, b, c et d sont quatre réels tels que a, b et c sont non nuls, est un plan de vecteur normal $\vec{n}\ (a\,,b\,,c)$.

(2) Réciproquement : si $\vec{n}\ (a\,,b\,,c)$ est un vecteur normal d'un plan $\mathscr{P}$, une équation cartésienne de ce plan est $ax+by+cz+d=0$ où d est un réel.
Autrement dit, pour tout point M $(x\,;y\,;z)$ de $\mathscr{P}$ vérifie $ax+by+cz+d=0$

1. Démonstration

(1) Appelons $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M $(x\,;y\,;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ (on ne sait pas que c'est un plan)
Soit le vecteur $\vec{n}\ (a\,,b\,,c)$

Supposons $a \neq 0$, prenons le point A $\left(\frac{-d}{a} ; 0 ; 0\right)$
Vérifions que A $\in \mathscr{E}$:
$$\begin{aligned} A \in \mathscr{E} &\iff a \times \frac{-d}{a} + b \times 0 + c \times 0 + \left(-a \times \frac{-d}{a} - b \times 0 - c \times 0\right) = 0 \\ &\iff a \times \frac{-d}{a} - a \times \frac{-d}{a} = 0 \end{aligned}$$
C'est identique pour les points $\left(0 ; \frac{-d}{b} ; 0\right)$ ou $\left(0 ; 0 ; \frac{-d}{c}\right)$
Quel que soit M $(x ; y ; z) \in \mathscr{E}$, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff \begin{pmatrix} x - \frac{-d}{a} \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$
$$\iff ax + by + cz + d = 0$$
Donc, tout point M de $\mathscr{E}$ vérifie $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, donc appartient au plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. (c'est la caractérisation d'un plan) □
Ainsi, $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}$

(2) Soit A $(x_A ; y_A ; z_A) \in \mathscr{P}$. Pour tout point M $(x ; y ; z)$ du plan $\mathscr{P}$ on calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$ qui est nul par définition (voir le rappel) d'un plan de vecteur normal $\vec{n}$ $(a ; b ; c)$.
On trouve $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$ et donc $ax + by + cz + d = 0$, où $d = -ax_A - by_A - cz_A$ □
Ainsi $\mathscr{P} \subset \mathscr{E}$

Comme $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}$ et $\mathscr{P} \subset \mathscr{E}$, $\mathscr{P} = \mathscr{E}$

Chapitre 14

Convexité

I. Fonction Convexe et Fonction Concave

A. Définitions

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

f est *convexe* sur I si quels que soient les points A et B de la courbe $\mathscr{C}$ sur I, le segment $[AB]$ est au dessus de $\mathscr{C}$ entre A et B.

f est *concave* sur I si quels que soient les points A et B de la courbe $\mathscr{C}$ sur I, le segment $[AB]$ est en dessous de $\mathscr{C}$ entre A et B.

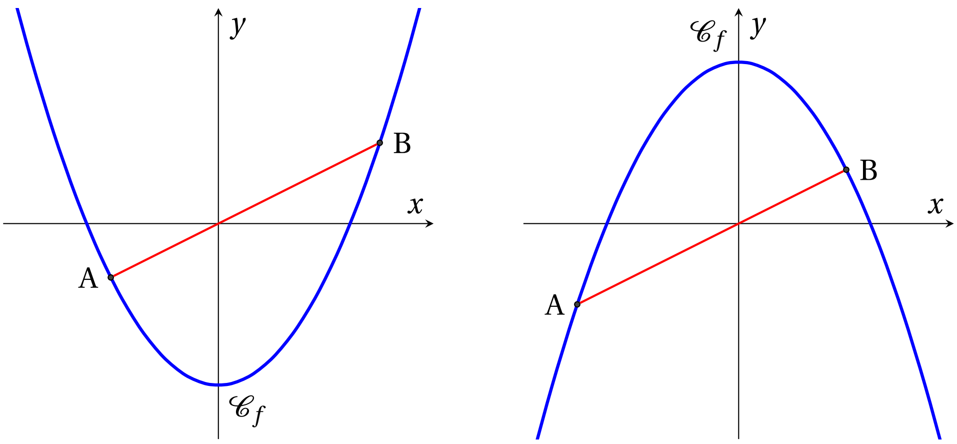


Figure 14.1. – Illustration de la Définition

B. Propriété

Si f est convexe sur I, pour tous réels a et b de I, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

Si f est concave sur I, pour tous réels a et b de I, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

1. Démonstration

Supposons f convexe.

Soit A $\left(a\,;f(a)\right)$ et B $\left(b\,;f(b)\right)$ deux points de $\mathscr{C}$, alors $[\mathrm{AB}]$ est au dessus de $\mathscr{C}$, en particulier, le milieu de $[\mathrm{AB}]$ d'abscisse $\frac{a+b}{2}$ et d'ordonnée $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ est au dessus de l'image de $\frac{a+b}{2}$ par f.

C. Propriété (admise)

f est convexe sur I si et seulement si $\mathscr{C}$ est située au dessus de chacune de ses tangentes sur I

f est concave sur I si et seulement si $\mathscr{C}$ est située en dessous de chacune de ses tangentes sur I

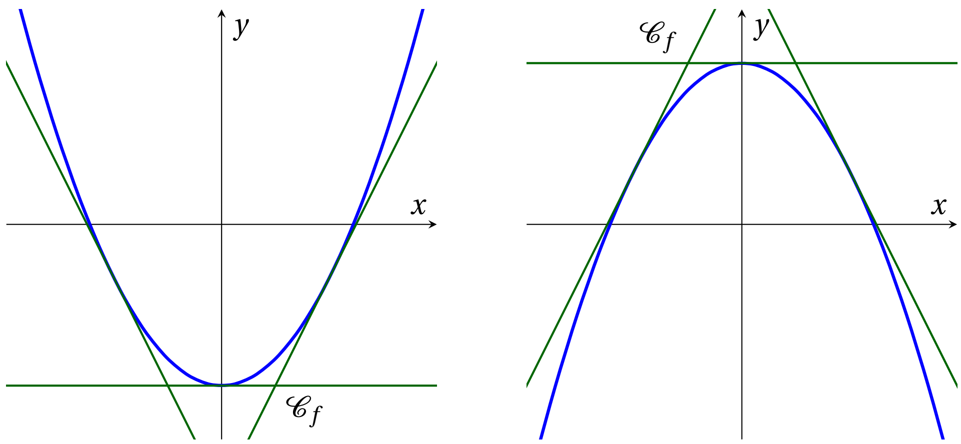


Figure 14.2. – Illustration de la Propriété

D. Définition

A est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$ si au point A, la courbe traverse sa tangente.

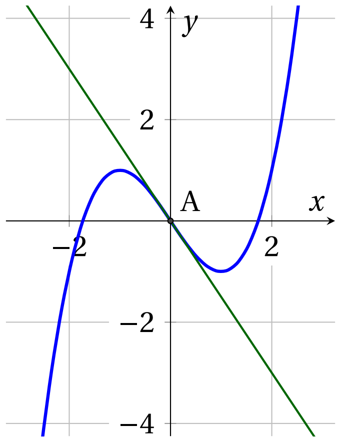


Figure 14.3. – Exemple d'un Point d'Inflexion

E. Remarque

Lorsque f change de convexité, sa courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion.

II. Lien avec la Dérivée

A. Définition

Soit f une fonction dérivable sur I dont la fonction dérivée f' est dérivable sur I. La dérivée de f' se nomme la dérivée seconde de f et se note f''.

B. Propriété

Soit f une fonction dérivable deux fois sur un intervalle I.

f est convexe sur I si et seulement si :

- f' est croissante sur I
- f'' est positive sur I
- La courbe représentative est située au dessus de ses tangentes sur I

C. Propriété

f est concave sur I si et seulement si :

- f' est décroissante sur I

— f'' est négative sur I

— La courbe représentative est située en dessous de ses tangentes sur I

D. Propriété

Si $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère, $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse a si et seulement si f'' s'annule et change de signe en a.

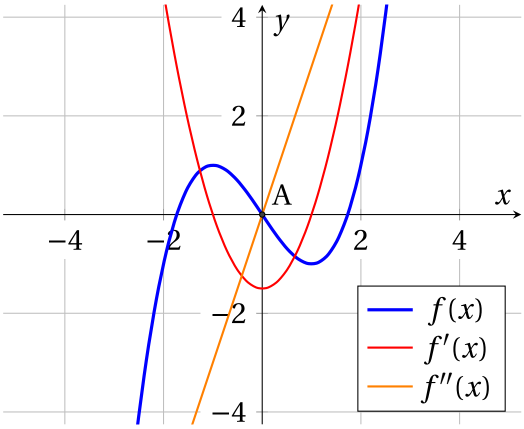


FIGURE 14.4. – Illustration de l'Évolution de la Convexité en Fonction de la Dérivée Seconde

Chapitre 15

Opérations sur les Variables Aléatoires

I. Rappels

Soit Ω l'univers d'une experience aléatoire.

Une variable aléatoire X est une fonction qui à tout élément de Ω associe un nombre réel.

A. Exemple

On tire deux fois une pièce : $\Omega = \{ PP , PF , FP , FF \}$.

Soit X la variable aléatoire définie sur Ω qui donne le nombre de « pile » obtenus.

Soit G la variable aléatoire égale au gain suivant :
- Deux faces identiques (PP et FF) font gagner £ 2.
- Deux faces différentes (PF et FP) font perdre £ 2.

Les lois de probabilités des variables aléatoires X et G sont :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

g_i	-2	2
$P(G = g_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

FIGURE 15.1. – Lois de Probabilité de X et G

B. Définition

L'espérance de la variable aléatoire X est le réel :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P\,(X = x_i)$$

L'espérance est une moyenne, les probabilités jouent le role de fréquences.

Dans notre exemple, $E(X) = 1$ et $E(G) = 0$.

C. Définition

La variance de la variable aléatoire X est le réel :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2\, P(X = x_i)$$

C'est la moyenne des écarts au carré.

D. Définition

L'écart-type de la variable aléatoire X est le réel :

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{V(X)}}$$

E. Théorème

$$\mathrm{V(X)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i) - (\mathrm{E(X)})^2 = \mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right) - (\mathrm{E(X)})^2$$

La variance est aussi la moyenne des valeurs au carré moins la moyenne au carré.

1. Démonstration

$$\begin{aligned}
\mathrm{V(X)} &= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \mathrm{E(X)}^2\right) p_i \qquad \left(\mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i) = p_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - 2x_i\mathrm{E(X)} + (\mathrm{E(X)})^2\right) p_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 p_i\right) - 2\mathrm{E(X)} \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + (\mathrm{E(X)})^2 \sum_{i=1}^{n} p_i \\
&= \mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right) - 2\left(\mathrm{E(X)} \times \mathrm{E(X)}\right) + (\mathrm{E(X)})^2 \times 1 \\
&= \mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right) - (\mathrm{E(X)})^2 \quad \square
\end{aligned}$$

II. Opérations sur les Variables Aléatoires

A. Changement affine

1. Théorème

Si X est une variable aléatoire et a et b sont deux réels :

$$(1) \quad \mathrm{E}(a\mathrm{X} + b) = a\mathrm{E(X)} + b$$

$$(2) \quad \mathrm{V}(a\mathrm{X} + b) = a^2\mathrm{V(X)}$$

a. Démonstrations

On note p_i la probabilité $\mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$ pour alléger les notations.

$$\begin{aligned}(1)\quad \mathrm{E}(a\mathrm{X}+b) &= \sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)\,p_i\\ &= a\sum_{i=1}^{n}x_i p_i + b\sum_{i=1}^{n}p_i\\ &= a\mathrm{E}(\mathrm{X})+b \quad \square\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)\quad \mathrm{V}(a\mathrm{X}+b) &= \mathrm{E}\left((a\mathrm{X}+b)^2\right)-(\mathrm{E}(a\mathrm{X}+b))^2\\ &= \mathrm{E}\left(a^2\mathrm{X}^2+2a\mathrm{X}b+b^2\right)-(\mathrm{E}(a\mathrm{X}+b))^2\\ &= a^2\mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right)+2ab\mathrm{E}(\mathrm{X})+b^2-a^2(\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2-2ab\mathrm{E}(\mathrm{X})-b^2\\ &= a^2\left(\mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right)-(\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2\right)\\ &= a^2\mathrm{V}(\mathrm{X}) \quad \square\end{aligned}$$

2. Théorème

Si X est une variable aléatoire et a et b sont deux réels :

$$\sigma(a\mathrm{X}+b) = |a|\sigma(\mathrm{X})$$

a. Démonstration

$$\begin{aligned}\sigma(a\mathrm{X}+b) &= \sqrt{\mathrm{V}(a\mathrm{X}+b)}\\ &= \sqrt{a^2\mathrm{V}(\mathrm{X})}\\ &= |a|\sigma(\mathrm{X}) \quad \square\end{aligned}$$

3. Exemple

Dans le jeu précédent (deux tirages de pièce), si X' est la variable aléatoire qui donne le triple de nombre de « pile », $\mathrm{X}' = 3\mathrm{X}$ et donc $\mathrm{E}\left(\mathrm{X}'\right) = 3\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 3$.

B. Somme de Variables Aléatoires

Dans cette sous-partie, X et Y sont deux variables aléatoires prenant respectivement les valeurs $\{\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ \dots\ ,\ a_n\ \}$ et $\{\ b_1\ ,\ b_2\ ,\ \dots\ ,\ b_m\ \}$, où n et m sont des entiers naturels non nuls.

1. Définition

La variable aléatoire $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$ prend tous les valeurs a_i+b_j possibles (où $1 \leqslant i \leqslant n$ et $q \leqslant j \leqslant m$).

Pour toute valeur de w, $\mathrm{P}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}=w) = \sum_{a_i+b_j=w}\mathrm{P}\left(\{\mathrm{X}=a_i\}\cap\{\mathrm{Y}=b_j\}\right)$ c'est-à-dire la somme des probabilités $\mathrm{P}\left(\{\mathrm{X}=a_i\}\cap\{\mathrm{Y}=b_j\}\right)$ telles que $a_i+b_j=w$ (toutes les sommes égales à w).

2. Théorème (admis)

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

3. Rappel

A et B sont deux événements indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

4. Définition

Deux variables aléatoires sont indépendantes si elles donnent des résultats de deux expériences aléatoires indépendantes.

5. Propriété

Si X et Y indépendantes :

$$P\left(\{X = a_i\} \cap \{Y = b_j\}\right) = P(X = a_i) \times P(Y = b_j)$$

6. Théorème (admis)

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même univers :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

III. Applications

A. Loi Binomiale

1. Propriété

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n\,;p\right)$:

$$E(X) = np \qquad V(X) = np\left(1-p\right) \qquad \sigma(X) = \sqrt{np\left(1-p\right)}$$

a. Démonstration

X est la somme de n variables aléatoires indépendantes X_1, X_2, …, X_n, suivant la loi de Bernoulli.

Pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $E(X_i) = p$ et $V(X_i) = p\left(1-p\right)$.

Ainsi, $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = np$ et idem pour $V(X)$.
Enfin, $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

B. Somme et Moyenne d'un Échantillon (généralisation)

1. Définition

Un échantillon de taille n d'une loi de probabilité est une liste $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ de n variables aléatoires identiques et indépendantes qui suivent toutes cette loi.

2. Propriété

Si on note X une variable aléatoire suivant la loi de probabilité de cet échantillon, la variable aléatoire « somme » de cet échantillon $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ vérifie :

$$(1)\ E(S_n) = nE(X) \qquad (2)\ V(S_n) = nV(X) \qquad (3)\ \sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X)$$

a. Démonstration

$$\begin{aligned}(1)\quad E(S_n) &= E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\\ &= E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)\\ &= nE(X) \quad \text{Car les variables sont identiques}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)\quad V(S_n) &= V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\\ &= V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)\\ &= nV(X)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3)\quad \sigma(S_n) &= \sqrt{V(S_n)}\\ &= \sqrt{nV(X)}\\ &= \sqrt{n}\sigma(X)\end{aligned}$$

3. Propriété

Si X est une variable aléatoire suivant la loi de probabilité de cet échantillon, la variable aléatoire « moyenne » de cet échantillon $M_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} = \frac{S_n}{n}$ vérifie :

$$(1)\ E(M_n) = E(X) \qquad (2)\ V(M_n) = \frac{V(X)}{n} \qquad (3)\ \sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$$

A. DÉMONSTRATION

(1) $$\begin{aligned} \mathrm{E}(\mathrm{M}_n) &= \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) \\ &= n\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{X}}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \times n\mathrm{E}(\mathrm{X}) \qquad \text{changement affine de } \tfrac{1}{n} \\ &= \mathrm{E}(\mathrm{X}) \end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned} \mathrm{V}(\mathrm{M}_n) &= \mathrm{V}\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right) \\ &= n\mathrm{V}\left(\frac{\mathrm{X}}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \times n\mathrm{V}(\mathrm{X}) \\ &= \frac{\mathrm{V}(\mathrm{X})}{n} \end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned} \sigma(\mathrm{M}_n) &= \sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{M}_n)} \\ &= \frac{\sigma(\mathrm{X})}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Chapitre 16

Calcul Intégral

I. Notion d'intégrale

A. Aire sous la courbe et intégrale

1. Défintion

Soit f une fonction *continue et positive* sur un intervalle $\left[a\,;b\right]$ $(a \leqslant b)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

L'aire délimitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est l'intégrale de f sur $\left[a\,;b\right]$, et se note :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Remarques

$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ se lit « intégrale de a à b de f de t dt »
ou « somme de a à b de f de t dt ».

$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ se note indifféremment $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ se mesure en unité d'aire ($u.a.$). Où 1 $u.a.$ est l'aire du rectangle de base (1 sur 1).

3. Remarque

Dans le cas d'une fonction continue de signe quelconque, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une aire algébrique entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Par convention, on compte positivement les aires lorsque $\mathscr{C}$ est au dessus de l'axe des abscisses et négativement lorsqu'elle est en dessous.

B. Dérivabilité de la Fonction Aire

1. Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$ $(a \leqslant b)$

Alors, la fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a\,;b]$ et :

$$\Phi' = f \qquad (\Phi \text{ est une primitive de } f)$$

a. Démonstration (f croissante)

Soit $x_0 \in [a\,;b]$ et $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in [a\,;b]$. Notons $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

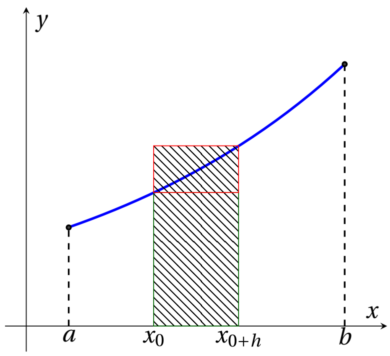


Figure 16.1. – Encadrement de la Fonction Φ

Étudions $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h}$

$\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)$ est l'aire sous la courbe entre x_0 et x_0+h.

On encadre cette aire par les aires des deux rectangles de largeur $|h|$ et de hauteur $f(x_0)$ (en vert) et $f(x_0+h)$ (en rouge)

— Si $h > 0$, et comme f est croissante :

$$h \times f(x_0) \leqslant \Phi(x_0+h)-\Phi(x_0) \leqslant h \times f(x_0+h)$$
$$\iff \quad f(x_0) \leqslant \frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$$

— Si $h < 0$ alors la largeur est $-h$:

$$-h \times f(x_0+h) \geqslant \Phi(x_0)-\Phi(x_0+h) \geqslant -h \times f(x_0)$$
$$\iff \quad f(x_0+h) \leqslant \frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h} \leqslant f(x_0)$$

Or f est continue, donc $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h} = f(x_0) \quad \square$$

Ainsi, Φ est dérivable en x_0 et $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

Ce résultat est vrai pour tout $x_0 \in \mathrm{I}$, donc Φ est dérivable sur I et $\Phi' = f$.

2. Rappel Théorème

Soit f une fonction continue sur I et Φ une primitive de f sur I.

Alors, f admet une infinité de primitives sur I et toute primitive F de f est définie par $\mathrm{F}(x) = \Phi(x) + k,\ k \in \mathbb{R}$.

3. Conséquence

Soit f une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$.

Le premier théorème prouve l'existence d'une primitive Φ de f sur $[a\,;b]$, définie par $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Ainsi, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(b)$

Et d'après le deuxième théorème (lien entre deux primitives), quelle que soit F, la primitive de f, il existe un réel k tel que $\mathrm{F} = \Phi + k$.
Donc, $\mathrm{F}(a) = \Phi(a) + k = k$ car $\Phi(a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Ainsi, $\Phi(b) = \mathrm{F}(b) - k = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$

Or $\Phi(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Donc, quelle que soit la primitive F de f :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

4. Remarque

On note :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \big[\mathrm{F}(t)\big]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

5. Exemples

— $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x\right]_0^1 = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e} - 1$

— $\displaystyle\int_0^2 t^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$

II. Intégrale d'une Fonction Continue

A. Extension de la Notion d'Intégrale

On a défini l'intégrale d'une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$ $(a \leqslant b)$, et on a vu que si F est une primitive de f sur $[a\,;b]$:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

On admet que cette formule peut être étendue au cas d'une fonction continue de signe quelconque, quelles que soient les bornes a et b de l'intégrale.

1. Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit F une primitive de f sur I. Si a et b sont deux réels quelconques de I, l'intégrale de f entre a et b s'écrit :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{F}(t)\right]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

2. Exemples

— $$\begin{aligned}\int_{-4}^{-2} \left(\frac{1}{t^2} - 3\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{t} - 3t\right]_{-4}^{-2} &= \frac{-1}{(-2)} - 3\times(-2) - \left(\frac{-1}{(-4)} - 3\times(-4)\right)\\ &= \frac{1}{2} + 6 - \frac{1}{4} - 12\\ &= \frac{-23}{4}\end{aligned}$$

— $$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{t} - t^2\right)\mathrm{d}t = \left[\ln(t) - \frac{t^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} &= \ln(1) - \frac{1}{3} - \left(\ln\left(\tfrac{1}{2}\right) - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}\right)\\ &= \frac{-1}{3} + \ln(2) + \frac{1}{24}\\ &= \frac{7}{24} + \ln(2)\end{aligned}$$

— $$\begin{aligned}\int_{-2}^{1} t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-2}^{1} &= \frac{1^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

3. Conséquences

— $\displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \big(= \mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(a)\big)$

— $\displaystyle\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(b) = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

B. Linéarité de l'Intégrale

1. Théorème

Soient f et g deux fonctions continues sur I et soit λ un réel. Pour tous réels a et b de I :

$$\int_a^b \big(f+g\big)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_a^b \lambda f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

a. Démonstration

Soient F et G des primitives de f et g. Alors $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ et $\lambda\mathrm{F}$ sont des primitives de $f+g$ et λf respectivement.

— $$\begin{aligned}\int_a^b \big(f+g\big)(t)\,\mathrm{d}t &= (\mathrm{F}+\mathrm{G})\,(t) - (\mathrm{F}+\mathrm{G})\,(t)\\ &= \mathrm{F}(b) + \mathrm{G}(b) - \mathrm{F}(a) - \mathrm{G}(a)\\ &= \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) + \mathrm{G}(b) - \mathrm{G}(a)\\ &= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

— $$\begin{aligned}\int_a^b \lambda f(t)\,\mathrm{d}t &= \lambda\mathrm{F}(b) - \lambda\mathrm{F}(a)\\ &= \lambda\,(\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a))\\ &= \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

C. Relation de Chasles

1. Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Quels que soient les réels a, b et c appartenant à I :

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$$

A. Démonstration

Soit F une primitive de f.

$$\begin{aligned}\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t &= \mathrm{F}(c)-\mathrm{F}(a)\\ &= \mathrm{F}(c)-\mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)\\ &= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

2. Remarque

Dans le cas où f est positive et $a \leqslant b \leqslant c$, la relation de Chasles traduit l'additivité des aires de deux domaines adjacents.

3. Exemple

Intégrale d'une fonction définie par morceaux :

$$\int_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{où} \quad f : x \longmapsto |x|-2 \qquad |x| \begin{cases} x \geqslant 0 : x \\ x < 0 : -x \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{-x^2}{2}-2x\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_{0}^{5}\\ &= 0-2+\frac{5}{2}-0=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

D. Positivité et Ordre

1. Théorème

Soit f une fonction continue sur I, et a et b deux réels de I tels que $a \leqslant b$

Si $\forall t \in \mathrm{I},\ f(t) \geqslant 0$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

A. Démonstration

Dans le cas d'une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire sous la courbe représentative de f entre a et b, elle est positive.

2. Théorème

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b deux réels tels que $a \leqslant b$

Si $\forall t \in \mathrm{I},\ f(t) \leqslant g(t)$:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

a. Démonstration

$g - f$ est positive sur I donc :

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left(g-f\right)(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0 \\ \iff \quad & \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0 \\ \iff \quad & \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

III. Valeur Moyenne d'une Fonction Continue

A. Valeur Moyenne

1. Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$, avec $a < b$, la valeur moyenne de la fonction f sur $[a\,;b]$ est le nombre μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Remarque

Interprétation dans le cas d'une fonction positive :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mu(b-a)$$

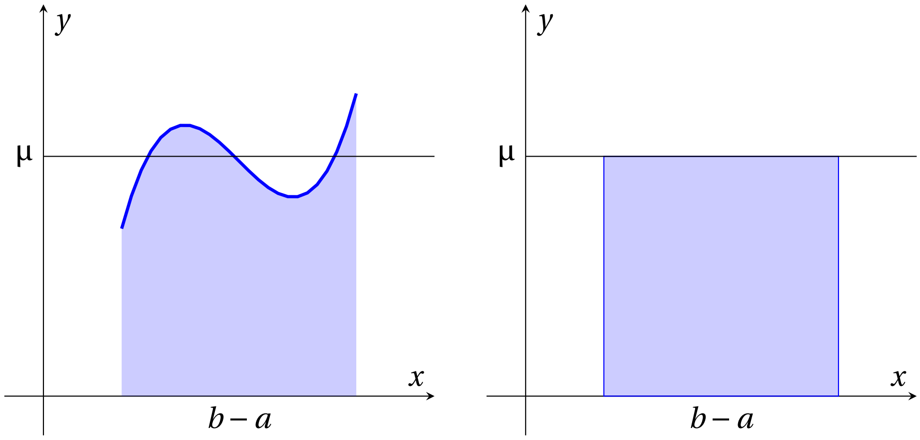


FIGURE 16.2. – Interprétation Graphique de la Valeur Moyenne pour une Fonction Positive

μ est la hauteur du rectangle de largeur $b-a$ dont l'aire est la même que celle du domaine situé en sous la courbe $\mathscr{C}_f$ entre a et b.

B. Inégalité de la Moyenne (encadrement « grossier » de l'intégrale)

1. Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$, $a<b$ et m et M deux réels tels que $\forall x \in [a\,;b],\ m \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}$

On a donc :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}(b-a)$$

a. Démonstration

$$\begin{aligned} & m \leqslant f(t) \leqslant \mathrm{M} \\ \iff\quad & [mx]_a^b \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant [\mathrm{M}x]_a^b \quad \text{(positivité de l'intégrale)} \\ \iff\quad & m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}(b-a) \quad \square \end{aligned}$$

2. Remarques

Interprétation en cas d'une fonction positive : l'aire de la courbe $\mathscr{C}_f$ est comprise entre les aires des rectangles de longueur $b-a$ et de hauteurs respectives m et M. Encadrement de la valeur moyenne :

$$\begin{aligned} & m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}(b-a) \\ \iff \quad & m \leqslant \frac{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}{b-a} \leqslant \mathrm{M} \\ \iff \quad & m \leqslant \mu \leqslant \mathrm{M} \end{aligned}$$

IV. Intégration par Parties

A. Propriété

Soient u et v deux fonction dérivables telles que leurs dérivées u' et v' sont continues sur un intervalle $[a\,;b]$. Alors :

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \left[u(x)\,v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)$$

1. Démonstration

Pour toute fonction f dérivable dont la dérivée f' est continue sur $[a\,;b]$:

$\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a) = \left[f(x)\right]_a^b$ En effet, f est un primitive de f'.

Ainsi :

$$\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = \left[u(x)\,v(x)\right]_a^b$$

Or :

$$\begin{aligned} \int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(linéarité)} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} & \left[u(x)\,v(x)\right]_a^b = \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x \\ \iff \quad & \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \left[u(x)\,v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x \quad \square \end{aligned}$$

Chapitre 17

Fonctions Trigonométriques

I. Définition et Propriétés

A. Rappel

Soit un réel x et M le point correspondant sur le cercle trigonométrique dans une repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\right)$.

Le cosinus de x est noté $\cos(x)$, où $\cos(x)$ est l'abscisse du point M.
Le sinus de x est noté $\sin(x)$, où $\sin(x)$ est l'ordonnée du point M.

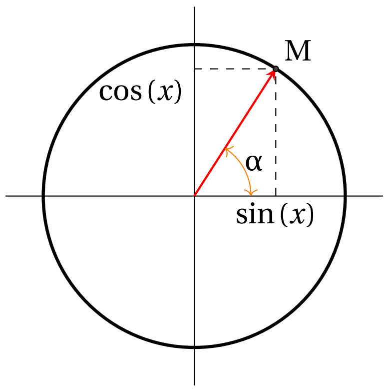


Figure 17.1. – Cercle Trigonométrique

B. Définitions

La fonction qui à tout réel x associe le nombre $\cos(x)$ est appelée fonction cosinus.
La fonction qui à tout réel x associe le nombre $\sin(x)$ est appelée fonction sinus.

C. Propriété

Quel que soit le réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$, la fonction est donc *paire*.
Quel que soit le réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$, la fonction est donc *impaire*.

D. Propriété (Periodicité)

Pour tout réel x, $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$.

Les fonctions cosinus et sinus sont donc *périodiques de période* 2π (2π-périodiques).

E. Remarque

Ces deux propriétés permettent de réduire l'intervalle d'étude des fonctions cosinus et sinus à $[0\,;\pi]$.

Par parité, on peut déduire $[-\pi\,;0]$, donc $[-\pi\,;\pi]$.

Par périodicité on peut déduire les résultats sur $\mathbb{R}$.

II. Dérivabilité

A. Étude des Fonctions Sinus et Cosinus

1. Théorème

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$\boxed{\sin'(x) = \cos(x)} \quad \text{et} \quad \boxed{\cos'(x) = -\sin(x)}$$

2. Tableaux de Variation

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos'(x) = -\sin(x)$	0	$-$	0
$\cos$	1	$\searrow 0 \searrow$	-1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin'(x) = \cos(x)$	$+$	0	$+$
$\sin$	0	$\nearrow 1 \searrow$	0

Figure 17.2. – Tableaux de Variation des Fonctions cosinus et sinus

3. Courbes Représentatives

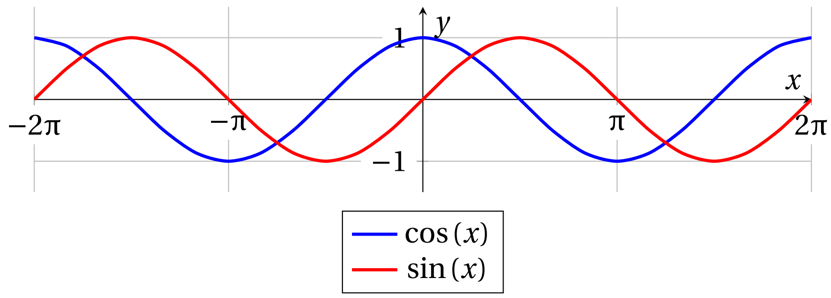


Figure 17.3. – Représentation Graphique des Fonctions cosinus et sinus

B. Complément

1. Théorème

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$$

a. Démonstration

La fonction sinus est continue et dérivable en 0 :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(0+h) - \sin(0)}{h} = \sin'(0) = \cos(0) = 1 \quad \square$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(0+h) - \cos(0)}{h} = \cos'(0) = -\sin(0) = 0 \quad \square$$

Chapitre 18

Loi des Grands Nombres

I. Inégalités Probabilitstes

A. Inégalité de Markov

Pour toute variable aléatoire X à valeurs positives, et pour tout nombre réel δ strictement positif :

$$P\big(X \geqslant \delta\big) \leqslant \frac{E(X)}{\delta}$$

1. Démonstration

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) \\
&= \overbrace{\sum_{x_i<\delta} x_i P(X = x_i)}^{\geqslant 0} + \sum_{x_i\geqslant\delta} x_i P(X = x_i) \\
&\geqslant \sum_{x_i\geqslant\delta} x_i P(X = x_i) \quad \text{on minore} \\
&\geqslant \sum_{x_i\geqslant\delta} \delta P(X = x_i) = \delta \overbrace{\sum_{x_i\geqslant\delta} P(X = x_i)}^{P(X\geqslant\delta)} \quad \text{car } x_i \geqslant \delta \text{ on minore encore} \\
& E(X) \geqslant \delta P(X \geqslant \delta) \\
\iff \quad & P(X \geqslant \delta) \leqslant \frac{E(X)}{\delta}
\end{aligned}$$

B. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Pour toute variable aléatoire X, et pour tout nombre réel δ strictement positif :

$$\boxed{P\big(|X - E(X)| \geqslant \delta\big) \leqslant \frac{V(X)}{\delta^2}}$$

1. Démonstration

$$P\big(|X - E(X)| \geqslant \delta\big) = P\left((X - E(X))^2 \geqslant \delta^2\right)$$

D'après l'inégalité de MARKOV :

$$P\left((X-E(X))^2 \geqslant \delta^2\right) \leqslant \frac{\overbrace{E\left((X-E(X))^2\right)}^{V(X)}}{\delta^2} \quad \square$$

C. REMARQUE

Souvent, on prend $\delta = \sigma$ ou $k\sigma$ car l'écart type σ d'une variable aléatoire X est l'unité naturelle pour étudier la dispersion de X autour de sons espérance.

L'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV montre notamment que des écarts de X à E(X) de quelques σ deviennent improbables.

D. REMARQUE

L'Inégalité de Bienaymé-Tchebychev est loin de donner le meilleur majorant.

Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n\,;p\right)$, on a $P\left(|X-E(X)| \geqslant 2\sigma\right) \approx 0,05$ ce qui est bien meilleur que le $0,25$ obtenu avec l'inégalité.

En effet, si $\delta = 2\sigma$ et $X \sim \mathscr{B}(\,n\,;\;p\,)$:

$$\frac{V(X)}{\delta^2} = \frac{np(1-p)}{\left(4\sqrt{np(1-p)}\right)^2} = \frac{1}{4}$$

II. LOI DES GRANDS NOMBRES

A. PROPRIÉTÉ

Soit une variable aléatoire X associée à un échantillon $\left(X_1\,,\,X_2\,,\ldots,\,X_n\right)$, c'est-à-dire que $\left(X_1\,,\,X_2\,,\ldots,\,X_n\right)$ est un échantillon de n variables aléatoires identiques et indépendantes qui suivent toutes la loi de probabilité suivie par X.
On note M_n la moyenne de cet échantillon.

Alors, pour tout réel $\delta > 0$:

$$P\left(|M_n - E(X)| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V(X)}{n\delta^2} \quad \text{(c'est l'inégalité de concentration)}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P\left(|M_n - E(X)| \geqslant \delta\right) = 0} \quad \text{(c'est la loi des grands nombres)}$$

Autrement dit, plus la taille n d'un échantillon d'une variable aléatoire X est grande, plus l'écart entre la moyenne de cet échantillon et l'espérance de X est faible.

1. Démonstration

a. Rappels

Si X et Y sont deux variables aléatoires avec Y telle que $Y = aX + b$ alors :

- $E(Y) = aE(X) + b$ et $V(Y) = a^2 V(X)$
- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ et, si X et Y indépendantes $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

Pour un échantillon $\{X_1 ; X_2 ; \cdots ; X_n\}$ où X_i sont indépendantes, et suivent une loi X :

- $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ $E(S_n) = nE(X)$ $V(S_n) = nV(X)$
- $M_n = \frac{S_n}{n}$ $E(M_n) = E(X)$ $V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$

Suite Démonstration :

$$P(|X - E(X)| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(X)}{n\delta^2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad P(|M_n - E(M_n)| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(M_n)}{\delta} \quad \text{Inégalité de Bienaymé-Tchébychev}$$

$$\Longleftrightarrow \quad P(|M_n - E(X)| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(X)}{n\delta^2}$$

On a donc, pour un δ fixe :

$$0 \leqslant P(|M_n - E(X)| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(X)}{n\delta^2}$$

Et, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{V(X)}{n\delta^2} = 0$, donc, d'après le théorème des Gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} P(|M_n - E(X)| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(X)}{n\delta^2} = 0$$

Chapitre 19

Complément sur la Trigonométrie

I. Rappels

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$
$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$
$$\sin(x) = -\sin(-x)$$
$$\cos(x) = \cos(-x)$$

II. Formules d'Addition et de Duplication

A. Formule d'Addition

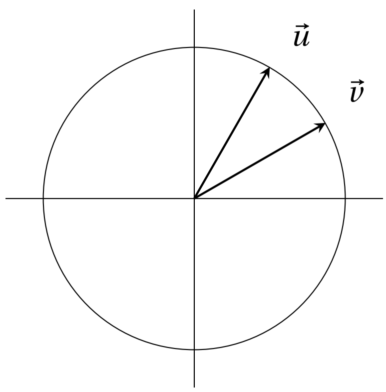


Figure 19.1. – Représentation de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le Cercle Trigonométrique

$$||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| = 1 \quad \left(\overrightarrow{\mathrm{OI}}\,;\vec{u}\right) = a \quad \left(\overrightarrow{\mathrm{OI}}\,;\vec{v}\right) = b \quad \vec{u}\binom{\cos a}{\sin a} \quad \vec{v}\binom{\cos a}{\sin a}$$

Or, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

Mais, $\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\ )$ avec $(\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\ ) = a - b$ ou $b - a$

Ainsi :

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

1. Exemple

$$\begin{aligned}\cos\left(\tfrac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{3}-\tfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

Autres Formules :

$$\cos(a+b) = \cos\big(a-(-b)\big) = \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$$

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-(a+b)\right)\\ &= \cos\left(\left(\tfrac{\pi}{2}-a\right)-b\right)\\ &= \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-a\right)\cos(b)+\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-a\right)\sin(b)\end{aligned}$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$$

$$\begin{aligned}\sin(a-b) &= \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-(a-b)\right)\\ &= \cos\left(\left(\tfrac{\pi}{2}-a\right)-(-b)\right)\\ &= \left(\tfrac{\pi}{2}-a\right)\cos(-b)+\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-a\right)\sin(-b)\end{aligned}$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$$

B. Formule de Duplication (cas $b=a$)

$$\begin{aligned}\sin(2a) &= \sin(a)\cos(a)+\cos(a)\sin(a)\\ &= 2\sin(a)\cos(a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos(a)\cos(a)-\sin(a)\sin(a)\\ &= \cos^2(a)-\sin^2(a)\\ &= 2\cos^2(a)-1\\ &= 1-2\sin^2(a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2\cos^2(a) = 1-2\sin^2(a)\\ \iff\quad & \cos^2(a) = \frac{\cos(2a)+1}{2}\\ \iff\quad & \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}\end{aligned}$$

III. Dérivabilité de cosinus et sinus

A. Préambule

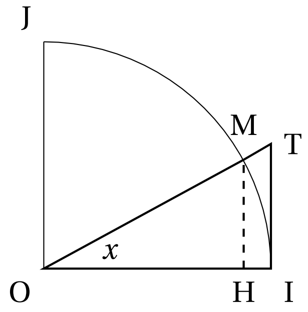


Figure 19.2. – Représentation de la Situation

On veut encadrer l'aire entre OHM et OIT.

$M \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ est associé au réel x sur le cercle trigonométrique.

H est le projeté orthogonal de M sur (OI).

T est l'intersection de $[OM]$ et la tangente à $\mathscr{C}$ en I.

On encadre l'aire du secteur angulaire du disque entre les aires des triangles OHM et OIT.

— Secteur Angulaire :

Angle	2π	x
Aire	$\pi \times 1^2$	$\frac{x}{2}$

Figure 19.3. – Tableau de l'Aire Angulaire du Disque en Fonction de $\widehat{OHM}$

— OHM :

$$\mathscr{A}_{OHM} = \frac{\cos(x)\sin(x)}{2}$$

— OIT :

On utilise le théorème de Thalès dans les triangles OHM et OIT :

$$\frac{HM}{IT} = \frac{OH}{OI}$$

$$\frac{\sin(x)}{IT} = \frac{\cos(x)}{1}$$

$$IT = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$$

D'où :

$$\mathscr{A}_{\text{OIT}} = \frac{\tan(x)}{2} = \frac{\sin(x)}{2\cos(x)}$$

Donc :

$$\begin{array}{rccccc} & \mathscr{A}_{\text{OHM}} & \leqslant & \mathscr{A}_{\text{Secteur}} & \leqslant & \mathscr{A}_{\text{OIT}} \\ \Longleftrightarrow & \frac{\cos(x)\sin(x)}{2} & \leqslant & \frac{x}{2} & \leqslant & \frac{\sin(x)}{2\cos(x)} \\ \Longleftrightarrow & \cos(x)\sin(x) & \leqslant & x & \leqslant & \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ \Longleftrightarrow & \cos(x) & \leqslant & \frac{x}{\sin(x)} & \leqslant & \frac{1}{\cos(x)} \\ \Longleftrightarrow & \frac{1}{\cos(x)} & \geqslant & \frac{\sin(x)}{x} & \geqslant & \cos(x) \end{array}$$

Or :

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1$$

D'après le Théorème des Gendarmes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Cherchons aussi $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}$:

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x)-1}{x} &= \frac{\cos\left(\frac{2x}{2}\right)-1}{x} \\ &= \frac{1-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)-1}{x} \\ &= -\sin\left(\frac{x}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = 1 \quad \text{(composition)}$$

$$\lim_{x\to 0} -\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

Donc, par produit :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$$

B. Dérivabilité

Soit un réel a et h non nul :

$$\begin{aligned}\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} &= \frac{\sin(a)\cos(h)+\cos(a)\sin(h)-\sin(a)}{h}\\ &= \frac{\sin(a)\,(\cos(h)-1)}{h}+\frac{\cos(a)\sin(h)}{h}\end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)-1}{h}=0 \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1$$

Donc :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h}=\cos(a) \iff \sin' = \cos \quad \square$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{cos(a+h)-\cos(a)}{h} &= \frac{\cos(a)\cos(h)-\sin(a)\sin(h)-\cos(a)}{h}\\ &= \frac{\cos(a)(\cos(h)-1)}{h}-\frac{\sin(a)\sin(h)}{h}\end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}=0 \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1$$

Donc :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h}=-\sin(a) \iff \cos' = -\sin \quad \square$$

Chapitre 20

Remerciements

J'espère que ce petit livret peut vous servir comme un souvenir de cette année et que nos chemins se croiseront dans le futur proche !

Merci a vous, a Florian et Valentin qui m'ont aidé dans la relecture (faite *très* rapidement), ainsi qu'à la classe entière pour l'atmosphère excellent tout au long de l'année.

À bientôt !