Exercices Chapitre sur les Variables Aléatoires *

Diego Van Overberghe

8 mai 2020

Exercice 33

a) $p = 1 - 0{,}34 - 0{,}26 - 0{,}17 - 0{,}12 = 0{,}11$

b) $p = 1 - 0{,}26 - 0{,}24 - 0{,}14 - 0{,}13 - 0{,}04 = 0{,}19$

Exercice 35

a) On a :

x_i	-1	0	1	3	4	5	6	8
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$

FIGURE 1 – Tableau présentant la loi de probabilité de X

b) $P(1 \leq X \leq 5) = p_1 + p_3 + p_4 + p_5 = 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}25 + 0{,}2 = 0{,}7$
$P(X \geq 4) = p_{-1} + p_0 + p_1 + p_3 + p_4 = 0{,}65$

Exercice 36

a) On a :

x_i	-4	0	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{3}$

FIGURE 2 – Tableau présentant la loi de probabilité de X

b) On a x, le nombre de jetons rouges ou verts et y, le nombre de jetons bleus.

$$\begin{cases} 2x + y = 20 \\ y = 2x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5 \\ y = 10 \end{cases}$$

x_i	-4	0	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

FIGURE 3 – Tableau présentant la loi de probabilité de X

*Page 328 du manuel Hatier

Exercice 39

On a $p = 1 - 0{,}12 - 0{,}14 - 0{,}21 - 0{,}32 - 0{,}13 = 0{,}08$

De plus, $P(U \leq 13) = 0{,}12 + 0{,}14 + 0{,}21 + 0{,}32 = 0{,}79$

Donc, $q = P(U \leq 13) - 0{,}14 - 0{,}10 = 0{,}55$

Et, $r = 1 - P(V \leq 13) - 0{,}10 = 0{,}11$

Exercice 40

a) Faux. $P(X \geq 4) = 0{,}15$

b) Faux. $P(2 \leq X \leq 3) = 0{,}35$

c) Vrai. $P(X \leq 2) = 0{,}15$

Exercice 50

a) $E(X) = p_0x_0 + p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4 = 1{,}2$
$V(X) = p_0(x_0 - E(X))^2 + \cdots + p_r(x_r - E(X))^2 = 1{,}46$
$\sigma(X) \approx 1{,}21$

b) $E(Y) = p_0y_0 + \cdots + p_ry_r = 1{,}1$
$V(Y) = p_0(y_0 - E(Y))^2 + \cdots + p_r(y_r - E(Y))^2 = 0{,}0184$
$\sigma(Y) \approx 0{,}14$

c) $E(Z) = p_0z_0 + \cdots + p_rz_r = 1{,}01$
$V(X) = p_0(z_0 - E(Z))^2 + \cdots + p_r(z_r - E(Z))^2 \approx 2{,}05$
$\sigma(Z) \approx 1{,}43$

Exercice 51

1) $E(X) = p_0x_0 + \cdots + p_rx_r = 4{,}9$
$V(X) = p_0(x_0 - E(X))^2 + \cdots + p_r(x_r - E(X))^2 = 1{,}81$
$\sigma(X) \approx 1{,}35$

2) a)

y_j	0	1	2	3	4	5
$P(Y = y_j)$	0,05	0,12	0,18	0,3	0,23	0,12

FIGURE 4 – Tableau présentant la loi de probabilité de Y

z_j	2,4	3,6	4,8	6	7,2	8,4
$P(Z = z_j)$	0,05	0,12	0,18	0,3	0,23	0,12

FIGURE 5 – Tableau présentant la loi de probabilité de Z

t_j	2,8	3,7	4,6	5,5	6,4	7,3
$P(T = t_j)$	0,05	0,12	0,18	0,3	0,23	0,12

FIGURE 6 – Tableau présentant la loi de probabilité de T

b)

$E(Y) = E(X) - 2 = 2{,}9$	$E(Z) = 5{,}88$	$E(T) = 5{,}41$
$V(Y) = 1{,}81$	$V(Z) \approx 2{,}61$	$V(T) \approx 1{,}47$
$\sigma(Y) \approx 1{,}35$	$\sigma(Z) = 1{,}62$	$\sigma(T) \approx 1{,}63$

Exercice 52

a) $E(X) = p_0x_0 + \cdots + p_r x_r = 1{,}99$

b) $E(Y) = p_0 y_0 + \cdots + p_r y_r = 2{,}13$

c) Au centre d'examen B, les candidats font plus d'erreurs en moyenne.

d) $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p_0(x_0 - E(X))^2 + \cdots + p_r(x_r - E(X))^2} \approx 1{,}24$

$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{p_0(y_0 - E(Y))^2 + \cdots + p_r(y_r - E(Y))^2} \approx 1{,}76$

La centre d'examen B a donc les résultats les plus dispérsés.

Exercice 56

a) Les représentations graphiques peuvent tous etre assimilées à des paraboles dont le sommet se situe à un abscisse de 25. Donc, les espérances des variables seront identiques. Les courbes sont symmétriques par rapport à la doite d'équation $x = 25$.

b) $\sigma(X) < \sigma(Z) < \sigma(Y)$

Exercice 60

$E(X) = p_0x_0 + \cdots + p_r x_r$; $V(X) = p_0(x_0 - E(X))^2 + \cdots + p_r(x_r - E(X))^2$; $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

$E(E_1) = -0{,}21$	$E(E_2) = -0{,}21$
$V(E_1) = 2{,}2259$	$V(E_2) = 1{,}8459$
$\sigma(E_1) \approx 1{,}49$	$\sigma(E_2) \approx 1{,}36$

La marque modélisée par E_2 a une espérance identique à celle de E_1, mais l'ecart-type est beacoup plus petit, donc il-y-a moins de risque d'avoir un produit très défectueux.

Exercice 61

a) Vrai. $E(aX) = aE(X)$

b) Faux. $\sigma(X + b) = \sigma(X)$

c) Vrai. $V(0{,}9X) = 0{,}9V(X) \quad \sigma(0{,}9X) = 0{,}9\sigma(X)$

Exercice 62

$E(X) = 3{,}105$	$E(Y) = 3{,}045$	$E(Z) = 3{,}28$
$V(X) \approx 0{,}51$	$V(Y) \approx 0{,}38$	$V(Z) \approx 0{,}67$
$\sigma(X) \approx 0{,}72$	$\sigma(Y) \approx 0{,}62$	$\sigma(Z) \approx 0{,}82$

a) La production Z est la plus dispersée.

b) La production Z a la masse moyenne la plus élevée.

c) La production Y est la plus régulière.

Exercice 64

a) Vrai. Les tirages sont indépendants, donc : $P(B\,;R) = P(B) \times P(R) = P(R) \times P(B) = P(R\,;B)$

b) Faux. Les tirages sont indépendants, donc : $P(R\,;R) = P^2(R) = \frac{1}{16}$

c) Vrai. Les tirages sont indépendants, donc : $P(B\,;B) = P^2(B) = \frac{9}{16}$

Exercice 65

a) Il-y-a 36 issues possibles.

b) $P(A) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

$P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - P(\text{“on obtient deux fois 1”}) = \frac{12}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$

$P(C) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

Exercice 66

1.

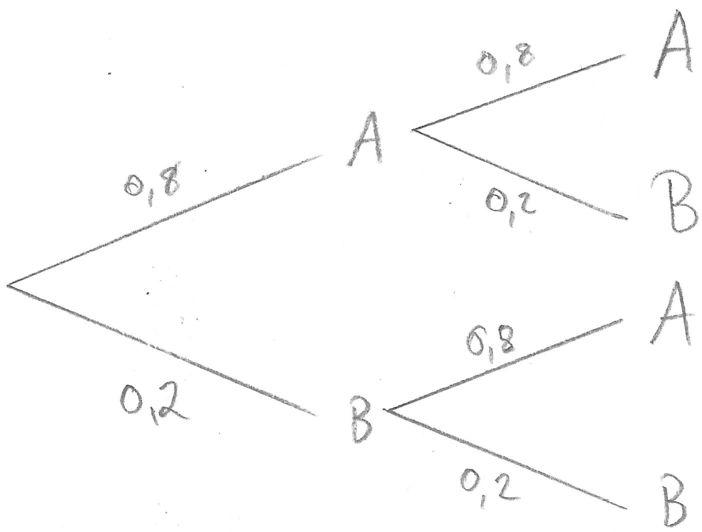

FIGURE 7 – Arbre pondéré

2. a) X prend les valeurs 0 ; 1 ; 2.

b) $P(X=0) = P(\bar{A})^2 = \frac{1}{25}$; $P(X=2) = P(A)^2 = \frac{16}{25}$

$P(X=1) = 1 - P(X=0) - P(X=2) = \frac{8}{25}$

c) $P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{24}{25}$

$P(X \leq 1) = P(X=1) + P(X=0) = \frac{9}{25}$

Exercice 67

a) L'affirmation de Victor est fausse. Chaque lancer est indépendant pusisque le dé n'est pas truqué.
Sa justification est fausse parce que il considère qu'au deuxieme lancer, il n'y a plus que cinq faces, or il y en a toujours six.

b) Valentine, quand à elle a raison. Il n'y a que $\frac{1}{6}$ de chance que l'un des deux joueurs commencent à jouer au premier tour.

Exercice 69

a)

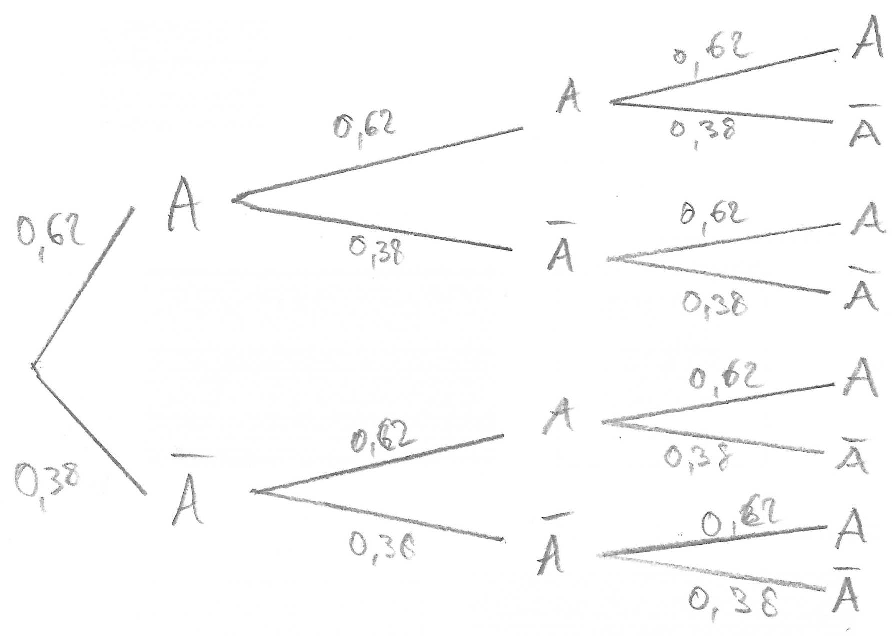

FIGURE 8 – Arbre pondéré

b) On pose la variable aléatoire X, qui représente le nombre d'usagers abonnés. Ses valeurs possibles sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3. On donne sa loi de probabilité par le tableau ci-dessous, avec $P(X = x_i) = P(\bar{A})^{3-x_i} \times P(A)^{x_i} \times$ (Nombre d'issues de l'evenement)

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$0{,}38^3 \times 1 \approx 0{,}0549$	$0{,}38^2 \times 0{,}62 \times 3 \approx 0{,}2686$

x_i	2	3
$P(X = x_i)$	$0{,}38 \times 0{,}62^2 \times 3 \approx 0{,}4382$	$0{,}62^3 \times 1 \approx 0{,}2384$

FIGURE 9 – Tableau présentant la loi de probabilité de X

— P("Deux des usagers sont abonnés.") $= P(X = 2) \approx 0{,}4382$

— P("Au moins deux des usagers sont abonnés.") $= P(X \geq 2) \approx 0{,}6766$

— P("Au plus deux des usagers sont abonnés.") $= P(X \leq 2) \approx 0{,}7617$

c)
```python
import random
def s_abonnes(nbUsagers=10): # Voir Note 1
    X=0
    for ind in range(nbUsagers):
        if random.random()<0.62:
            X+=1
    return X

print(s_abonnes())

# Note 1: Il s'agit ici d'un "default parameter", c'est-à-dire que
# si l'utilisateur ne donne pas d'argument, alors 10 est utilisé.
```

Si on imagine l'arbre pondéré de cette situation, on obtient un arbre énorme.

$$\sum_{n=1}^{10} (2^n) = 2048 \quad \text{branches en total}$$

$$2^{10} = 1024 \quad \text{branches au niveau de la dernière colonne}$$

Dont seulement une petite partie satisfont P("7 Usagers sont abonnés") :

$$\frac{10!}{7! \times 3!} = 120^{\dagger}$$

Finallement, on a $P(X = 7) = 0{,}62^7 \times 0{,}38^3 \times 120 \approx 0{,}2319$
Ceci est cohérent avec ce que je retrouve dans mes simualtions ($n = 10\,000$).
Cependant, je suis certain qu'il existe une méthode ∞ment plus simple de résoudre le problème.

†. 10 niveaux dans l'arbre, avec 7 "la personne est abonnée", et 3 "la personne n'est pas abonnée".