

Chapitre 1

La Démonstration par Récurrence

I. EXEMPLE

On considère la suite (u_n) , définie pour tout entier naturel n , par $u_n = 4^n - 1$:

$$(u_n) = \{0; 3; 15; 63; 255; \dots\}$$

On remarque que tous ces nombres sont des multiples de 3. On se demande si pour tout entier naturel n , $4^n - 1$ est un multiple de 3.

II. AXIOME DE RÉCURRENCE

Soit $P(n)$, une propriété dépendante de l'entier naturel n .

Si :

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie (Initialisation)} \\ \forall k \in \mathbb{N}, P(k) \text{ vraie} \implies P(k+1) \text{ vraie (hérédité)} \end{cases}$$

Alors :

$P(n)$ est vraie pour tout entier naturel.

Reprenons notre exemple.

Initialisation : La propriété : « $4^n - 1$ est un multiple de 3 », est vraie pour $n = 0$.

La propriété est donc initialisée.

Hérédité : Supposons que la propriété est vraie à un certain rang k , (fixe).

C'est l'hypothèse de la récurrence, et montrons qu'alors, elle est vraie au rang $k + 1$.

L'Hypothèse de récurrence est donc : « $4^n - 1$ est un multiple de 3 ». C'est-à-dire qu'il existe un entier p tel que $4^n - 1 = 3p$ et donc $4^n = 3p + 1$.

$$\begin{aligned} 4^{k+1} - 1 &= 4 \times 4^k - 1 \\ &= 4 \times (3p + 1) - 1 \quad (\text{Hypothèse de récurrence}) \\ &= 12p + 4 - 1 \\ &= 12p + 3 \\ &= 3(4p + 1) \quad (\text{Il s'agit bien d'un multiple de 3}) \end{aligned}$$

Donc, la propriété est héréditaire et on a démontré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est un multiple de 3.