Chapitre IV

Fonction Logarithme Népérien

I. Définition de la fonction ln

A. Théorème-Définition

Pour tout réel x strictement positif, il existe un unique réel tel que :

$$e^a = x$$

Le nombre a est appelé logarithme népérien de x.

La fonction qui à x associe a est appelée « fonction logarithme népérien », et se note ln.

Ainsi :

$$\boxed{e^a = x \iff a = \ln(x) \quad \text{pour } x > 0}$$

B. Démonstration

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

D'après le corollaire du Théorème des Valeurs Intermédiaires, pour tout nombre $k \in \left]0\,;+\infty\right[$, il existe un unique réel $a \in \mathbb{R}$ tel que $e^a = k$. $\square$

C. Remarques

La fonction ln est la fonction réciproque de exp.

On déduit que :

$$\boxed{\ln(1) = 0 \quad \text{et} \quad \ln(e) = 1}$$

D. Propriétés

$$\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[,\ \boxed{e^{\ln(x)} = x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \boxed{\ln\left(e^x\right) = x}$$

II. Étude de la fonction ln

A. Continuité, dérivabilité

1. Propriété

(1) La fonction ln est *continue* sur $]0\,;+\infty[$

(2) La fonction ln est *dérivable* sur $]0\,;+\infty[$ et $\forall x \in\,]0\,;+\infty[$, $\boxed{\ln'(x) = \dfrac{1}{x}}$

(3) La fonction ln est *strictement croissante* sur $]0\,;+\infty[$

a. Démonstration (2) (facile)

Admettre que si f et u sont dérivables, $f\big(u(x)\big)' = u'(x) \times f(u(x))$.

$$\left(\mathrm{e}^{\ln(x)}\right)' = \ln'(x) \times \mathrm{e}^{\ln(x)} = \ln'(x) \times x$$

$$(x)' = 1$$

$$\ln'(x) \times x = 1 \iff \ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \square$$

b. Démonstration (2) (complète)

On étudie le taux d'accroissement, en admettant que ln est continue :

$$\frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h}$$

Posons :

$$\begin{cases} u = \ln(x+h) & \text{donc} \quad x+h = \mathrm{e}^u \\ v = \ln(x) & \text{donc} \quad x = \mathrm{e}^v \end{cases} \qquad \text{et} \qquad k = u - v$$

$$\begin{aligned} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} &= \frac{k}{\mathrm{e}^u - \mathrm{e}^v} \qquad \text{or} \qquad \lim_{h\to 0} k = 0 \\ &= \frac{1}{\frac{\mathrm{e}^{v+h} - \mathrm{e}^v}{k}} \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{v+h} - \mathrm{e}^v}{h}$ est l'expression de la dérivée de e. La dérivée de e^v est e^v :

$$\frac{1}{\mathrm{e}^v} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \frac{1}{x} \quad \square$$

2. Propriété

Soit u, une fonction dérivable et strictement positive sur I.

Alors, la fonction $f : x \mapsto \ln\big(u(x)\big)$ et $\boxed{f' : x \mapsto \dfrac{u'}{u}}$.

a. Exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = \ln(x^2+1)$.

f est dérivable en $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

B. Limites

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty}$$

1. Démonstration

Soit $\mathrm{M} > 0$, en posant $\mathrm{A} = \mathrm{e}^{\mathrm{M}}$, $\exists \mathrm{A} > 0$ tel que :

$$\forall x \in \left]0 ; +\infty\right[,\ x > \mathrm{A} \implies \ln(x) > \mathrm{M}$$

En effet, $x > \mathrm{A} \iff x > \mathrm{e}^{\mathrm{M}}$.
Comme ln est strictement croissante :

$$\ln(x) > \ln\left(\mathrm{e}^{\mathrm{M}}\right)$$
$$\ln(x) > \mathrm{M} \quad \square$$

C. Représentation Graphique

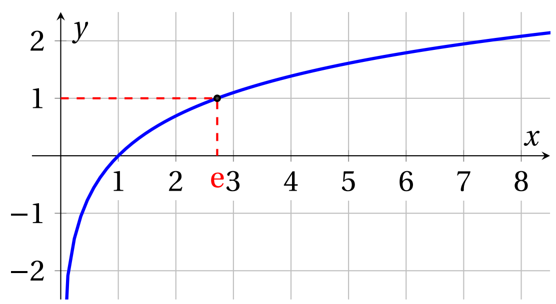

Figure 4.1. – Représentation Graphique de la Fonction ln

III. Propriétés Algébriques de la Fonction ln

A. Propriété Fondamentale

Quels que soient les réels a et b, strictement positifs,

$$\boxed{\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)}$$

1. Démonstration

Rappel :

$$\mathrm{X} = \mathrm{Y} \iff \mathrm{e}^{\mathrm{X}} = \mathrm{e}^{\mathrm{Y}}$$

$$\mathrm{e}^{\ln(ab)} = ab$$

$$\mathrm{e}^{\ln(a)+\ln(b)} = \mathrm{e}^{\ln(a)} \times \mathrm{e}^{\ln(b)} = a \times b$$

Donc :

$$\mathrm{e}^{\ln(ab)} = \mathrm{e}^{\ln(a)+\ln(b)} \iff \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

B. Conséquences

(1) Quels que soient les réels a et b, strictement positifs :

$$\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)}$$

1. Démonstration (1)

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(a) = \ln\left(\frac{a}{b} \times b\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln(b)$$

D'où :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad \square$$

La deuxième égalité est le cas particulier où $a = 1$. $\square$

(2) Quels que soient les réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$, strictement positifs :

$$\boxed{\ln(a_1 a_2 \cdots a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n)}$$

2. Démonstration par Récurrence (2)

a. Initialisation

$$\ln(a_1) = \ln(a_1)$$

b. Hérédité

Supposons que, pour n nombres strictement positifs :

$$\ln(a_1 a_2 \cdots a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \ln(a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}) &= \ln(a_1 a_2 \cdots a_n) + \ln(a_{n+1}) \quad \text{Propriété Fond.} \\ &= \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n) + \ln(a_{n+1}) \quad \square \end{aligned}$$

(3) De plus, $\forall a \in \left]0\,;+\infty\right[$, $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)}$$

3. Démonstration (3)

— Dans le cas où n est positif, c'est le cas particulier :

$$\ln(a_1 a_2 \cdots a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n)$$

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$$

$$\ln(a^n) = \ln(a) + \ln(a) + \cdots + \ln(a) = n\ln(a) \quad \square$$

— Dans le cas où n est négatif, on prend $m = -n$

$$\ln(a^n) = \ln(a^{-m}) = \ln\left(\frac{1}{a^m}\right) = -\ln(a^m) = -m\ln(a) = n\ln(a) \quad \square$$

(4) Finalement, $\forall a,\ a > 0$:

$$\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

4. Démonstration (4)

$$\ln(a) = \ln\left(\sqrt{a^2}\right) = 2\ln\left(\sqrt{a}\right)$$

$$\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a) \quad \square$$

IV. Résolution d'inéquations du type $a^n > M$

A. Exemple

On sait que :

$$\lim_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$$

On cherche le plus petit entier n tel que $3^n > 1\,000$:

$$\begin{aligned} & \ln\left(3^n\right) > \ln(1\,000) \\ \iff \quad & n \ln(3) > \ln(1\,000) \\ \iff \quad & n > \frac{\ln(1000)}{\ln(3)} \approx 6{,}3 \end{aligned}$$

On trouve $n \geqslant 7$, 7 est le plus petit entier n tel que $3^n > 1\,000$.

B. Exemple

On sait que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \qquad \left(\text{car } 0 < \tfrac{1}{2} < 1\right)$$

On veut résoudre $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 0{,}0001$:

$$\begin{aligned} \iff \quad & \ln\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right) \leqslant \ln(0{,}0001) \qquad \text{ln strictement croissante} \\ \iff \quad & n \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) \leqslant \ln(0{,}0001) \\ \iff \quad & n \geqslant \frac{\ln(0{,}0001)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \approx 13{,}3 \end{aligned}$$

Donc, $n \geqslant 14$

V. Logarithme décimal

A. Définition

La fonction logarithme décimal, notée log, est définie sur $]0\,;+\infty[$, par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

B. Propriétés

De part de sa définition, la fonction log a les mêmes propriétés algébriques et analytiques que la fonction ln (dérivable, strictement croissante).

C. Remarque

La fonction log est la fonction réciproque de $f : x \mapsto 10^x$.