Chapitre II

Continuité des Fonctions d'une Variable Réelle

I. Définition

Soit f, définie sur un intervalle I, et soit a, un réel de I. La fonction f est *continue* si et seulement si :

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

f est continue sur l'intervalle I, si et seulement si, quel que soit le réel $x \in \mathrm{I}$, f est continue en x.

H.P. : $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \left] a - \alpha \,;\, a + \alpha \right[, \; f(x) \in \left] f(a) - \epsilon \,;\, f(a) + \epsilon \right[$

A. Exemple

La fonction inverse est continue sur $\left] -\infty \,;\, 0 \right[$, et sur $\left] 0 \,;\, +\infty \right[$.

La fonction « Partie Entière » est définie sur $\mathbb{R}$, mais pas continue sur $\mathbb{R}$.

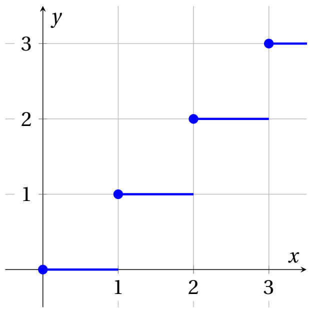

FIGURE 2.1. – Représentation Graphique de la Fonction « Partie Entière », continue sur $\left[n \,;\, n+1 \right[$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

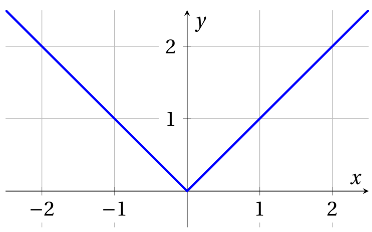

FIGURE 2.2. – Représentation Graphique de la Fonction Absolue, continue sur $\mathbb{R}$

B. Propriété

La somme, le produit et la composée de deux fonctions continues est continue.
L'inverse d'une fonction continue est continue sur tout intervalle où elle ne s'annule pas.

$$f : x \mapsto x^2 \quad \text{continue}$$

$$g : x \mapsto \frac{1}{x^2} \quad \text{Définie sur } \mathbb{R}^*\text{, continue sur } \left]-\infty\ ;\ 0\right[\text{ et } \left]0\ ;\ +\infty\right[$$

II. Théorème des Valeurs Intermédiaires

A. Théorème

Si une fonction f est continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ alors, pour tout réel $k \in \left[\min\left(f(a)\ ;\ f(b)\right)\ ;\ \max\left(f(a)\ ;\ f(b)\right)\right]$, il existe *au moins* un réel $c \in [a\ ;\ b]$, tel que $f(c) = k$.

C'est-à-dire, pour tout réel k, compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in [a\ ;\ b]$, tel que $f(c) = k$.

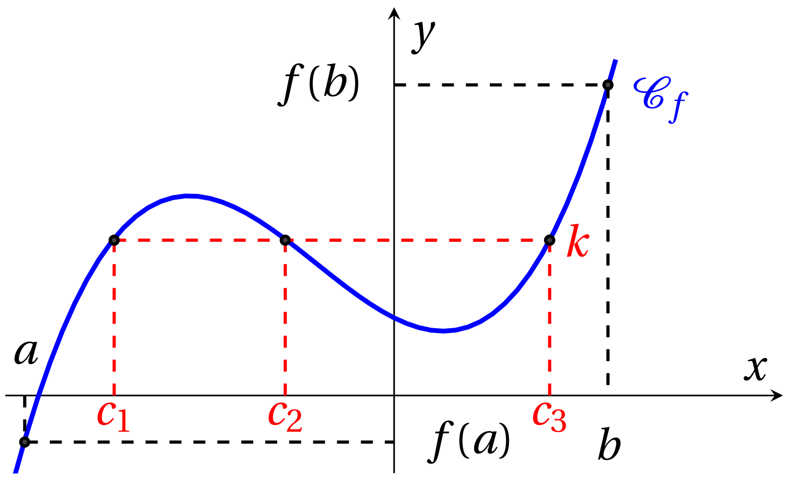

Figure 2.3. – Présentation du Théorème des Valeurs Intermédiaires

Pour tout k appartenant à $[f(b)\ ;\ f(a)]$, il existe au moins un réel $c \in [a\ ;\ b]$, tel que $f(c) = k$.

B. Corollaire

Si une fonction f est *continue* et *strictement monotone* sur un intervalle $\left[a\ ;\ b\right]$, alors, pour tout $k \in \Big[\min\big(f(a)\ ;\ f(b)\big)\ ;\ \max\big(f(a)\ ;\ f(b)\big)\Big]$, il existe un *unique* réel $c \in \left[a\ ;\ b\right]$, tel que $f(c) = k$.

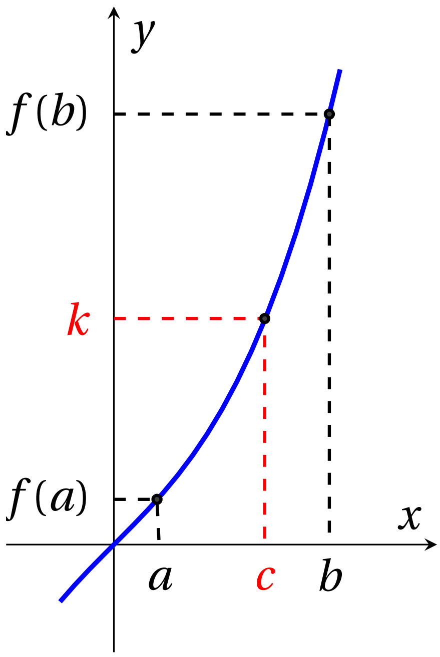

Figure 2.4. – Illustration du Corollaire du Théorème des Valeurs Intermédiaires

1. Cas Particulier

Si une fonction f est continue sur un intervalle $\left[a\ ;\ b\right]$, et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, il existe au moins une solution à $f(x) = 0$, sur $\left[a\ ;\ b\right]$.