Chapitre I

Suites: La Démonstration par Récurrence

I. EXEMPLE

On considère la suite (u_n) , définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 4^n - 1$.

$$(u_n) = \{0; 3; 15; 63; 255; \ldots\}$$

On remarque que tous ces nombres sont des multiples de 3. On se demande si $\forall n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est un multiple de 3.

II. AXIOME DE RÉCURRENCE

Soit P(n), une propriété dépendante de l'entier naturel n.

Si:

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie (Initialisation)} \\ \forall k \in \mathbb{N}, P(k) \text{ vraie} \implies P(k+1) \text{ vraie (hérédité)} \end{cases}$$

Alors : P(n) est vraie pour tout entier naturel.

Reprenons notre exemple. La propriété : " $4^n - 1$ est un multiple de 3", est vraie pour n = 0. La propriété est donc initialisée.

Hérédité : Supposons que la propriété est vraie à un certain rang k, (fixe). C'est l'hypothèse de la récurrence, et montrons qu'alors, elle est vraie au rang k+1.

L'Hypothèse de récurrence est donc : " $4^n - 1$ est un multiple de 3". C'est-à-dire qu'il existe un entier p tel que $4^n - 1 = 3p$ et donc $4^n = 3p + 1$.

$$4^{k+1} - 1 = 4 \times 4^k - 1$$

= $4 \times (3p+1) - 1$ (Hypothèse de récurrence)
= $12p+4-1$
= $12p+3$
= $3(4p+1)$ (Il s'agit bien d'un multiple de 3)

Donc, la propriété est héréditaire.

On a démontré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 4^n - 1$ est un multiple de 3.