Chapitre III

Dénombrement et Combinatoire

I. Parties d'un Ensemble

A. Définition

E étant un ensemble, la notation $\subset$ signifie « inclus dans ».

$$\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$$

C'est-à-dire que tout élément de A appartient à E.
On dit alors que A est une partie, ou sous-ensemble de E.
L'Ensemble vide, noté $\varnothing$ est une *partie* de tout ensemble.
L'Ensemble des parties de E est noté $\mathscr{P}(\mathrm{E})$.

1. Exemple

Si $\mathrm{E} = \left\{ x\,;\, y \right\}$ est un ensemble de deux éléments :

$$\mathscr{P}(\mathrm{E}) = \left\{ \varnothing\,,\, \left\{ x \right\},\, \left\{ y \right\},\, \left\{ x\,;\, y \right\} \right\}$$

B. Définition

Un ensemble fini est un ensemble dont le nombre d'éléments est fini.

C. Définition

On appelle cardinal, noté « Card », le nombre d'éléments d'un ensemble fini d'une partie (ou sous-ensemble).

1. Exemple

Si un ensemble E possède n éléments, alors on peut noter $\mathrm{Card}\,(\mathrm{E}) = n$.
Pour toute partie $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, $\mathrm{Card}\,(\mathrm{A}) \leqslant \mathrm{Card}\,(\mathrm{E})$.

D. Propriété (Principe Additif)

Si A et B sont deux parties quelconques d'un ensemble fini E, alors :

$$\mathrm{Card}\,(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{Card}\,(\mathrm{A}) + \mathrm{Card}\,(\mathrm{B}) - \mathrm{Card}\,(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

De plus, si A_1 , A_2 ,..., A_p sont p parties *deux à deux disjointes* d'un ensemble fini, alors :

$$\text{Card}\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p\right) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \cdots + \text{Card}\left(A_p\right)$$

E. Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}$, et E un ensemble tel que Card(E) $= n$. Alors, E possède 2^n parties.
Autrement dit :

$$\text{Card}\left(\mathscr{P}(E)\right) = 2^n$$

1. Démonstration par Récurrence

a. Initialisation

Pour $n = 0$, $E = \varnothing$, donc la seule partie de E est $\{\varnothing\}$ et $1 = 2^0$.

b. Hérédité

Supposons que tout ensemble à k éléments, où k est un certain entier naturel, admet 2^k parties.

Alors, soit E, un ensemble à $k+1$ éléments.

Soit x, un élément de E.

Alors, il y a deux familles de parties de E, celles qui contiennent x et celles qui ne le contiennent pas.

Or $E \setminus \{x\}$ est un ensemble à k éléments, il y a donc 2^k parties de E qui ne contiennent pas x.

En adjoignant x à toutes ces parties, on obtient toutes les parties qui contiennent x, donc il y en a également 2^k.

Ainsi, le nombre de parties de E est de $2^k + 2^k = 2^{k+1}$. $\square$

II. Produit Cartésien d'Ensembles

A. Définition

- E et F étant deux ensembles, le *produit cartésien* $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ est l'ensemble de couples $(a\,;b)$, où $a \in \mathrm{E}$ et $b \in \mathrm{F}$.
- E, F et G étant trois ensembles, le *produit cartésien* $\mathrm{E} \times \mathrm{F} \times \mathrm{G}$ est l'ensemble des triplets $(a\,;b\,;c)$ où $a \in \mathrm{E}$, $b \in \mathrm{F}$ et $c \in \mathrm{G}$.

1. Cas Général

- Le *produit cartésien* $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \cdots \times \mathrm{E}_n$ des ensembles $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_n$ est l'ensemble des *n-uplets* $(a_1\,;a_2\,;\ldots\,;a_n)$ où $a_1 \in \mathrm{E}_1$, $a_2 \in \mathrm{E}_2$, …, $a_n \in \mathrm{E}_n$.

B. Notations

$\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ se note E^2, $\overbrace{\mathrm{E} \times \mathrm{E} \times \cdots \times \mathrm{E}}^{k \text{ fois}}$ se note E^k.

C. Exemples

Soit $\mathrm{E} = \{a\,;b\,;c\}$ et $\mathrm{F} = \{1\,;2\}$.

- $\mathrm{E} \times \mathrm{F} = \{(a\,;1)\,;(a\,;2)\,;(b\,;1)\,;(b\,;2)\,;(c\,;1)\,;(c\,;2)\}$
- $\mathrm{F} \times \mathrm{F} = \{(1\,;1)\,;(1\,;2)\,;(2\,;1)\,;(2\,;2)\}$
- $(a\,;b\,;b\,;a\,;c)$ est un 5-uplet d'élément de E, il appartient à E^5.

D. Propriété

Si $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_n$ sont n ensembles finis :

$$\mathrm{Card}\,(\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \cdots \times \mathrm{E}_n) = \mathrm{Card}\,(\mathrm{E}_1) \times \mathrm{Card}\,(\mathrm{E}_2) \times \cdots \times \mathrm{Card}\,(\mathrm{E}_n)$$

1. Cas Particulier

Si E est un ensemble fini, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{Card}\left(\mathrm{E}^k\right) = \left(\mathrm{Card}\,(\mathrm{E})\right)^k$$

2. Exemples

Dans les exemples précédents :

- $\text{Card}\,(E \times F) = 6 = \text{Card}\,(E) \times \text{Card}\,(F)$
- $\text{Card}\,\left(F^2\right) = 4 = 2^2 = \left(\text{Card}\,(F)\right)^2$

III. Permutations

A. Définition

Soit E, un ensemble à n éléments, une *permutation* est un n-uplet d'éléments distincts de E.

Autrement dit, une permutation est une façon d'ordonner les n éléments de E.

1. Exemple

On considère l'ensemble $G = \{a\,;b\,;c\}$.
Ses permutations sont :

$$(a\,;b\,;c)\,,(a\,;c\,;b),(b\,;a\,;c)\,,(b\,;c\,;a)\,,(c\,;a\,;b)\,,(c\,;b\,;a)$$

G admet donc 6 permutations.

B. Propriété

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$

1. Remarque

$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$
$n!$ est le produit de tous les entiers de 1 à n.
$n!$ se lit “factorielle de n”.

2. Explication

On peut considérer que faire une permutation c'est faire un tirage sans remise des n éléments de E. Il y n choix pour le premier élément, $n-1$ pour le deuxième et ainsi de suite.

3. Démonstration par Récurrence

a. Initialisation

Un ensemble à un élément admet une permutation, et $1! = 1$.

b. Hérédité

Supposons que tout ensemble à n élément (n fixe) admette
$n!$ permutations.

Soit E, un ensemble à $n+1$ éléments.
On choisit un élément x de E.
Dans chacune des permutations des n éléments restants, il y $n+1$ positions où insérer x.

Ainsi, le nombre de permutations de E est $(n+1) \times n! = (n+1)!$. $\square$

IV. Combinaisons

Dans tout ce sous-chapitre, E est un ensemble à n éléments et p est un entier naturel tel que $p \leqslant n$.

A. Définition

Une combinaison de p éléments de E est une partie de E possédant p éléments.

1. Remarque

L'ordre des éléments n'a pas d'importance, les éléments sont distincts.

B. Propriété

Le nombre de combinaisons à p éléments de E est égal à $\binom{n}{p}$, où :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}$$

$\binom{n}{p}$ est appelé *coefficient binomial* et il se lit « p parmi n ».

1. Explication

Lorsqu'on choisit p éléments dans un ensemble à n éléments, on a n choix pour le premier, $n-1$ choix pour le deuxième, etc. mais ainsi, les p éléments sont ordonnés.

On divise donc par le nombre de permutations de p éléments, c'est-à-dire $p!$.

2. Cas Particuliers

$\binom{n}{0} = 1$ La seule partie de E à 0 élément est $\varnothing$.

$\binom{n}{n} = 1$ La seule partie de E à n éléments est E.

$\binom{n}{1} = n$ Il y à n parties de E à 1 élément.

C. Propriété : Symétrie

Choisir p, c'est ne pas choisir $n-p$:

$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$$

Démonstration Alternative :

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$$

D. Propriété : Relation de Pascal

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

1. Démonstration

Soit E, un ensemble à $n+1$ éléments (on va compter le nombre de parties de E à $p+1$ éléments).

Soit x un élément de E.

Alors il y a deux « familles » de parties : celles qui contiennent x et celles qui ne le contiennent pas.

Or $E \setminus \{x\}$ contient n éléments.

Donc il y a $\binom{n}{p}$ à p éléments de $E \setminus \{x\}$.

En leur adjoignant x, on obtient toutes les parties à $p+1$ éléments qui contiennent x.

Il y a $\binom{n}{p+1}$ parties de E qui ne contiennent pas x. (On choisit $p+1$ éléments dans $E \setminus \{x\}$ qui contient n éléments). $\square$

E. Triangle de Pascal

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

FIGURE 3.1. – Représentation du Triangle de Pascal

F. Propriété

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$