

Chapitre XIX

Complément sur la Trigonométrie

I. RAPPELS

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin(x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos(x) \\ \cos^2(x) + \sin^2(x) &= 1 \\ \sin(x) &= -\sin(-x) \\ \cos(x) &= \cos(-x)\end{aligned}$$

II. FORMULES D'ADDITION ET DUPLICATION

A. FORMULE D'ADDITION

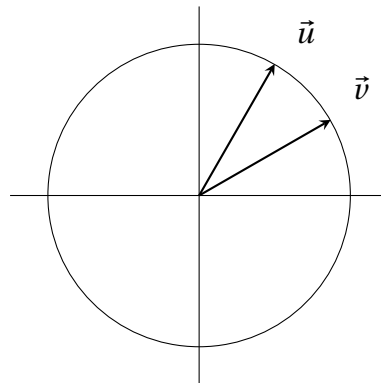


FIGURE 19.1. – Représentation de \vec{u} et \vec{v} dans le Cercle Trigonométrique

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1 \quad \left(\vec{OI}; \vec{u}\right) = a \quad \left(\vec{OI}; \vec{v}\right) = b \quad \vec{u} \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}$$

$$\text{Or, } \vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

$$\text{Mais, } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) \quad \text{avec } (\vec{u}; \vec{v}) = a - b \text{ ou } b - a$$

Ainsi :

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

1. EXEMPLE

$$\begin{aligned}
 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}
 \end{aligned}$$

Autres Formules :

$$\cos(a + b) = \cos(a - (-b)) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\begin{aligned}
 \sin(a + b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a + b)\right) \\
 &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) \\
 &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(b)
 \end{aligned}$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\begin{aligned}
 \sin(a - b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a - b)\right) \\
 &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - (-b)\right) \\
 &= \left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(-b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(-b)
 \end{aligned}$$

$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

B. FORMULE DE DUPLICATION (CAS $b = a$)

$$\begin{aligned}
 \sin(2a) &= \sin(a)\cos(a) + \cos(a)\sin(a) \\
 &= 2\sin(a)\cos(a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos(2a) &= \cos(a)\cos(a) - \sin(a)\sin(a) \\
 &= \cos^2(a) - \sin^2(a) \\
 &= 2\cos^2(a) - 1 \\
 &= 1 - 2\sin^2(a)
 \end{aligned}$$

$$2\cos^2(a) = 1 - 2\sin^2(a)$$

$$\iff \cos^2(a) = \frac{\cos(2a) + 1}{2}$$

$$\iff \sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

III. DÉRIVABILITÉ DE COSINUS ET SINUS

A. PRÉAMBULE

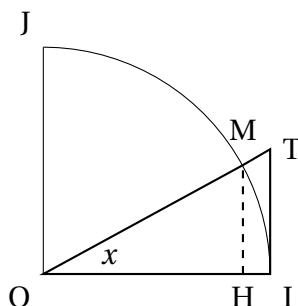


FIGURE 19.2. – Représentation de la Situation

On veut encadrer l'aire entre OHM et OIT.

$M \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$ est associé au réel x sur le cercle trigonométrique.

H est le projeté orthogonal de M sur (OI).

T est l'intersection de [OM) et la tangente à \mathcal{C} en I.

On encadre l'aire du secteur angulaire du disque entre les aires des triangles OHM et OIT.

— Secteur Angulaire :

Angle	2π	x
Aire	$\pi \times 1^2$	$\frac{x}{2}$

FIGURE 19.3. – Tableau de l'Aire Angulaire du Disque en Fonction de \widehat{OHM}

— OHM :

$$\mathcal{A}_{OHM} = \frac{\cos(x) \sin(x)}{2}$$

— OIT :

On utilise le théorème de Thalès dans les triangles OHM et OIT :

$$\begin{aligned} \frac{HM}{IT} &= \frac{OH}{OI} \\ \frac{\sin(x)}{IT} &= \frac{\cos(x)}{1} \\ IT &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x) \end{aligned}$$

D'où :

$$\mathcal{A}_{\text{OIT}} = \frac{\tan(x)}{2} = \frac{\sin(x)}{2\cos(x)}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{OHM}} &\leq \mathcal{A}_{\text{Secteur}} \leq \mathcal{A}_{\text{OIT}} \\ \Leftrightarrow \frac{\cos(x)\sin(x)}{2} &\leq \frac{x}{2} \leq \frac{\sin(x)}{2\cos(x)} \\ \Leftrightarrow \cos(x)\sin(x) &\leq x \leq \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ \Leftrightarrow \cos(x) &\leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\cos(x)} &\geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \cos(x) \end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1$$

D'après le Théorème des Gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Cherchons aussi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)-1}{x}$:

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x)-1}{x} &= \frac{\cos\left(\frac{2x}{2}\right)-1}{x} \\ &= \frac{1 - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1}{x} \\ &= -\sin\left(\frac{x}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} &= 1 \quad (\text{composition}) \\ \lim_{x \rightarrow 0} -\sin\left(\frac{x}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Donc, par produit :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$$

B. DÉRIVABILITÉ

Soit un réel a et h non nul :

$$\begin{aligned}\frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} &= \frac{\sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h) - \sin(a)}{h} \\ &= \frac{\sin(a)(\cos(h) - 1)}{h} + \frac{\cos(a)\sin(h)}{h}\end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

Donc :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} = \cos(a) \iff \sin' = \cos \quad \square$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{\cos(a+h) - \cos(a)}{h} &= \frac{\cos(a)\cos(h) - \sin(a)\sin(h) - \cos(a)}{h} \\ &= \frac{\cos(a)(\cos(h) - 1)}{h} - \frac{\sin(a)\sin(h)}{h}\end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

Donc :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos(a)}{h} = -\sin(a) \iff \cos' = -\sin \quad \square$$