Chapitre VII

Limites de Suites

I. Suites Majorées, Minorées et Bornées

I.1. Définitions

- Une suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \mathrm{M}$
- Une suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$
- Une suite est bornée si elle est majorée et bornée

I.2. Exemple

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ est minorée par 0, mais aussi par tout nombre négatif.

Elle est majorée par 1 (qui est aussi son maximum) et par tout nombre superieur à 1. Elle est donc bornée.

II. Définitions

II.1. Limite Infinie

II.1.a. Définition

Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ si, quel que soit le réel M, l'intervalle $]\mathrm{M};+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Autrement dit, pour tout réel M, on peut trouver un rang n tel que :

$$\forall n \geq \mathrm{N}, \quad u_n > \mathrm{M}$$

(A partir du rang N, tous les termes sont supérieurs à M)

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, On peut dire que la suite diverge vers $+\infty$

H.P. : $\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R},\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq \mathrm{N} \implies u_n > \mathrm{M})$

II.1.B. Définition

Une suite (u_n) a pour limite $-\infty$, si, quel que soit le réel m, l'intervalle $]-\infty ; m[$ contient tous les termes de le suite à partir d'un certain rang.

Autrement dit, pour tout réel m, on peut trouver un rang N tel que :

$$\forall n \geq \mathrm{N}, \quad u_n < m$$

(A partir du rang N, tous les termes sont inférieurs à m)

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, On peut dire que la suite diverge vers $-\infty$

H.P. : $\forall m \in \mathbb{R}, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq \mathrm{N} \implies u_n < m)$

II.1.C. Théorème

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty \qquad p \in \mathbb{N}^*, \ \lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty$$

$$\lim +n \to +\infty - n^2 = -\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty$$

II.1.D. Rappels

$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} - u_n = \ldots$ signe

$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n > 0 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n}$ on compare à 1

Cas où $u_n = f(n)$, par exemple : $u_n = \sqrt{n^2 + n - 3}$, on étudie f.

II.1.D.I. Arithmétique

$u_{n+1} = u_n + r$ alors $u_n = u_0 + nr \quad \left(u_n = u_p + (n-p)r\right)$

$\mathrm{S} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1)$

II.1.D.II. Géométrique

$u_{n+1} = q u_n$ alors $u_n = u_0 \times q^n \quad \left(u_n = u_p \times q^{n-p}\right)$

$\mathrm{S} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

II.2. Limites Finies / Suites Convergentes

II.2.a. Définition

Une suite (u_n) converge vers un réel l si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Autrement dit, on peut trouver un rang N à partir duquel tous les termes de la suite sont aussi près que l'on veut de l.

On dit que l est la limite de la suite (u_n) et que la suite est convergente.

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

H.P. : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \iff \forall\epsilon>0,\ \exists \mathrm{N}\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N}, \left(n\geq \mathrm{N} \implies u_n \in \left]l-\epsilon\,;l+\epsilon\right[\right)$

II.2.b. Théorème

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0 \qquad p\in\mathbb{N}^*,\ \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^p}=0$$
$$\lim_{n\to+\infty}e^{-n}=0 \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$$

II.2.c. Définition

Une suite qui n'est pas convergente est divergente

II.2.d. Exemple

La suite (u_n) définie par $u_n=(-1)^n$ est divergente.

III. Propriétés sur les Limites

III.1. Théorèmes de Comparaison

III.1.a. Théorème

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$

— Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$

— Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$

III.1.b. Démonstration

On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

Soit $\mathrm{M}>0$, il existe un rang N, à partir duquel si $n\geq \mathrm{N}_1$, alors $u_n\geq \mathrm{M}$

Or, il existe un rang N_2, à partir duquel $n > N_2,\ v_n \geq u_n$

Donc, il existe un rang $N = \max(N_1\,;N_2)$ à partir duquel $v_n \geq u_n > M$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \quad \square$$

III.1.c. Théorème dit des Gendarmes (Théorème d'Encadrement)

Soient (u_n), (v_n), et (w_n) trois suites telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ où l est un réel alors :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = l$$

III.1.d. Exemple

Soit (u_n) définie par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leq (-1)^n \leq 1$

$$\iff \quad \frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

D'après le Théorème des Gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

III.2. Convergence Monotone

III.2.a. Théorème Admis

Toute suite croissante et majorée converge vers une limite finie.

Toute suite décroissante et minorée converge vers une limite finie.

III.2.b. Théorème

Soit une suite (u_n) croissante et qui converge vers un réel l, alors (u_n) est majorée par l.

III.2.c. Démonstration par l'Absurde

On suppose que (u_n) est croissante.

III.2.c.i. Lemme

Si (u_n) est croissante, si p et n sont deux entiers naturels tels que $p \leq n$

Alors, $u_p \leq u_n$

Démonstration par Récurrence