Chapitre XIX

Complément sur la Trigonométrie

I. Rappels

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ & \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \\
& \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \\
& \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \\
& \sin(x) = -\sin(-x) \\
& \cos(x) = \cos(-x)
\end{aligned}$$

II. Formules d'Addition et Duplication

A. Formule d'Addition

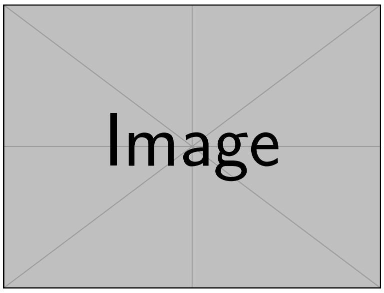

Figure 19.1. – Représentation de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le Cercle Trigonométrique

$||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| = 1$
$\left(\overrightarrow{\mathrm{OI}}\ ;\ \vec{u}\right) = a$
$\left(\overrightarrow{\mathrm{OI}}\ ;\ \vec{v}\right) = b$
$\vec{u}\binom{\cos a}{\sin a}$
$\vec{v}\binom{\cos a}{\sin a}$

Or, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

Mais, $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\ )$ avec $(\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\ ) = a - b$ ou $b - a$

Ainsi :

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

1. EXEMPLE

$$\begin{aligned}\cos\left(\tfrac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{3}-\tfrac{\pi}{4}\right) &= \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

Autres Formules :

$$\cos(a+b) = \cos\big(a-(-b)\big) = \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$$

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-(a+b)\right)\\ &= \cos\left(\left(\tfrac{\pi}{2}-a\right)-b\right)\\ &= \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-a\right)\cos(b)+\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-a\right)\sin(b)\end{aligned}$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$$

$$\begin{aligned}\sin(a-b) &= \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-(a-b)\right)\\ &= \cos\left(\left(\tfrac{\pi}{2}-a\right)-(-b)\right)\\ &= \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-a\right)\cos(-b)+\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-a\right)\sin(-b)\end{aligned}$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$$

B. FORMULE DE DUPLICATION (CAS $b=a$)

$$\begin{aligned}\sin(2a) &= \sin(a)\cos(a)+\cos(a)\sin(a)\\ &= 2\sin(a)\cos(a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos(a)\cos(a)-\sin(a)\sin(a)\\ &= \cos^2(a)-\sin^2(a)\\ &= 2\cos^2(a)-1\\ &= 1-2\sin^2(a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2\cos^2(a) = 1-2\sin^2(a)\\ \iff\quad & \cos^2(a) = \frac{\cos(2a)+1}{2}\\ \iff\quad & \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}\end{aligned}$$

III. Dérivabilité de cosinus et sinus

A. Préambule

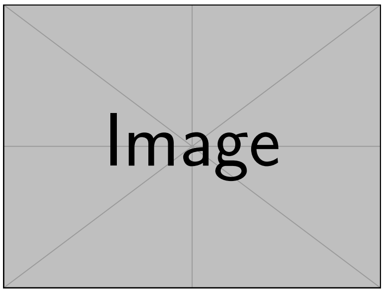

FIGURE 19.2. – Représentation de la Situation

On veut encadrer l'aire entre OHM et OIT.

$M \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ est associé au réel x sur le cercle trigonométrique.

H est le projeté orthogonal de M sur (OI).

T est l'intersection de $[OM)$ et la tangente à $\mathscr{C}$ en I.

On encadre l'aire du secteur angulaire du disque entre les aires des triangles OHM et OIT.

— Secteur Angulaire :

Angle	2π	x
Aire	$\pi \times 1^2$	$\frac{x}{2}$

FIGURE 19.3. – Tableau de l'Aire Angulaire du Disque en Fonction de $\widehat{OHM}$

— OHM :

$$\mathscr{A}_{OHM} = \frac{\cos(x)\sin(x)}{2}$$

— OIT :

On utilise le théorème de Thalès dans les triangles OHM et OIT :

$$\frac{HM}{IT} = \frac{OH}{OI}$$

$$\frac{\sin(x)}{IT} = \frac{\cos(x)}{1}$$

$$IT = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$$

D'où :

$$\mathscr{A}_{\text{OIT}} = \frac{\tan(x)}{2} = \frac{\sin(x)}{2\cos(x)}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
& \mathscr{A}_{\text{OHM}} \leqslant \mathscr{A}_{\text{Secteur}} \leqslant \mathscr{A}_{\text{OIT}} \\
\iff & \tfrac{\cos(x)\sin(x)}{2} \leqslant \tfrac{x}{2} \leqslant \tfrac{\sin(x)}{2\cos(x)} \\
\iff & \cos(x)\sin(x) \leqslant x \leqslant \tfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
\iff & \cos(x) \leqslant \tfrac{x}{\sin(x)} \leqslant \tfrac{1}{\cos(x)} \\
\iff & \tfrac{1}{\cos(x)} \geqslant \tfrac{\sin(x)}{x} \geqslant \cos(x)
\end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1$$

D'après le Théorème des Gendarmes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Cherchons aussi $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x)-1}{x} &= \frac{\cos\left(\frac{2x}{2}\right)-1}{x} \\
&= \frac{1-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)-1}{x} \\
&= -\sin\left(\frac{x}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = 1 \quad \text{(composition)}$$

$$\lim_{x\to 0} -\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

Donc, par produit :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$$

B. DÉRIVABILITÉ

Soit un réel a et h non nul :

$$\begin{aligned}\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} &= \frac{\sin(a)\cos(h)+\cos(a)\sin(h)-\sin(a)}{h}\\ &= \frac{\sin(a)\,(\cos(h)-1)}{h}+\frac{\cos(a)\sin(h)}{h}\end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)-1}{h}=0 \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1$$

Donc :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h}=\cos(a) \iff \sin'=\cos \quad \square$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{cos(a+h)-\cos(a)}{h} &= \frac{\cos(a)\cos(h)-\sin(a)\sin(h)-\cos(a)}{h}\\ &= \frac{\cos(a)(\cos(h)-1)}{h}-\frac{\sin(a)\sin(h)}{h}\end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}=0 \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1$$

Donc :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h}=-\sin(a) \iff \cos'=-\sin \quad \square$$