Exercices Chapitre sur la Trigonométrie *

Diego Van Overberghe

27 mai 2020

Exercice 45

1. a) $\frac{\pi}{4} \times 8 = 2\pi$ Il faut donc multiplier par 8.
   b) $\frac{\pi}{4} \times 12 = 3\pi$ Il faut donc multiplier par 12.
2. a) $5\pi = \pi + 2 \times 2\pi$
   b) $27\pi = \pi + 13 \times 2\pi$
   c) $59\pi = -\pi + 30 \times 2\pi$

Exercice 46

1. a) $\frac{\pi}{3}$ est associé au point A.
   b) $-\frac{\pi}{2}$ est associé au point Q.
   c) 4π est associé au point I.
   d) $-\pi$ est associé au point P.
   e) $-\frac{\pi}{4}$ est associé au point M.
   f) $\frac{13\pi}{6}$ est associé au point A.
   g) $-\frac{2\pi}{3}$ est associé au point K.
   h) $\frac{5\pi}{4}$ est associé au point H.
2. B : $\dfrac{\pi}{4}$; D : $\dfrac{2\pi}{3}$; E : $\dfrac{3\pi}{4}$; F : $\dfrac{5\pi}{6}$; G : $\dfrac{7\pi}{6}$; H : $\dfrac{5\pi}{4}$; L : $\dfrac{5\pi}{3}$; N : $\dfrac{11\pi}{6}$

Exercice 47

a) Faux. 0 est associé au point $(1;0)$, et π est associé au point $(-1;0)$
b) Vrai. $\dfrac{180}{\pi} \times \dfrac{2\pi}{5} = 72°$
c) Vrai.
d) Faux. $\dfrac{11\pi}{6} < 2\pi$
e) Vrai. Ajoutter $k \times 2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, ne fait que ajoutter une rotation entière, vu que le périmètre du cercle trigonométrique est 2π
f) Faux. 103° est associé au nombre $\dfrac{103\pi}{180}$

*Page 202 du Manuel Hatier

Exercice 50

a) Le périmètre de la bobine est de 2π puisque son rayon est 1. Or $\dfrac{2019\pi}{2} = 1009\pi + \dfrac{\pi}{2}$
Soit $\frac{1014\pi}{2\pi} = 513$ tours complets.

b) La première extremité se situe du côté droite du cercle. Après les 513 tours complets, il reste $\frac{\pi}{2}$ cm de fil. Ceci correspond à un angle de 90° en avant. L'autre éxtrémité du fil se situe donc du côté supérieur du cercle.

Exercice 52

a) Faux. Chaque point du cercle trigonométrique est associé à une infinité de réels. Par exemple, le point 0 est associé au meme point que le point 2π

b) Faux. Le point $\dfrac{\pi}{2}$ est associé au point de coordonnées $(0\,;1)$, le point $-\dfrac{\pi}{2}$ est associé au point de coordonnées $(0\,;-1)$

Exercice 59

a) $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos -\dfrac{\pi}{2} = 0$ et $\sin -\dfrac{\pi}{2} = -1$

c) $\cos\dfrac{7\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\cos -\pi = -1$ et $\sin -\pi = 0$

e) $\cos -\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin -\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\cos\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

g) $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 1$

h) $\cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

i) $\cos\dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

j) $\cos\dfrac{3\pi}{2} = 0$ et $\sin\dfrac{3\pi}{2} = -1$

k) $\cos\dfrac{7\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$

l) $\cos -\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin -\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 60

a) Le point se situera dans le sécteur 4.

b) Le point se situera dans le sécteur 2.

c) Le point se situera dans le sécteur 3.

Exercice 61

1. a) Les points d'abscisse $\frac{1}{2}$ sont les points C et L. Ils sont associés aux réels $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$ réspéctivement. Leurs sinus sont égaux à $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et à $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ réspéctivement.

   b) Les points d'abscisse $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont les points E et H. Ils sont associés aux réels $\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{3\pi}{4}$ réspéctivement. Leurs sinus sont égaux à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et à $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ réspéctivement.

2. a) Les points d'ordonée $\frac{1}{2}$ sont les points B et E. Ils sont associés aux réels $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$ réspéctivement. Leurs cosinus sont égaux à $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et à $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ réspéctivement.

   b) Les points d'ordonée $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont les points K et L. Ils sont associés aux réels $\frac{3\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$ réspéctivement. Leurs cosinus sont égaux à $-\frac{1}{2}$ et à $\frac{1}{2}$ réspéctivement.

Exercice 63

1. La réponse correcte est la b. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. La réponse correcte est la a. -1
3. La réponse correcte est la c. $-\frac{1}{2}$
4. La réponse correcte est la a. $\frac{\pi}{3}$
5. La réponse correcte est la b. Les solutions sont : $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$

Exercice 64

a) $\cos \frac{15\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin \frac{15\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos -\frac{5\pi}{2} = -1$ et $\sin -\frac{5\pi}{2} = 0$

c) $\cos -\frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin -\frac{9\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\cos -\frac{28\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin -\frac{28\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\cos -\frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin -\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

f) $\cos \frac{2018\pi}{4} = 0$ et $\sin \frac{2018\pi}{4} = 1$

Exercice 65

a) $\cos \dfrac{101\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \dfrac{101\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

b) $\cos \dfrac{43\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \dfrac{43\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos \dfrac{19\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \dfrac{19\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

d) $\cos -\dfrac{25\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin -\dfrac{25\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\cos -\dfrac{21\pi}{2} = 0$ et $\sin -\dfrac{21\pi}{2} = -1$

f) $\cos -\dfrac{15\pi}{2} = 0$ et $\sin -\dfrac{15\pi}{2} = 1$

g) $\cos \dfrac{1981\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin \dfrac{1981\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 65

a) $C = 1 + 0 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + 3}{2}$

$S = 0 + 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + 3}{2}$

b) Les deux nombres sont égaux. Ceci est cohérent, vu que $\cos \dfrac{\pi}{2} = \sin 0$, $\cos \dfrac{\pi}{3} = \sin \dfrac{\pi}{6}$ et $\cos \dfrac{\pi}{4} = \sin \dfrac{\pi}{4}$

Exercice 77

Tout d'Abord, $\forall x \in [-2\pi\,;2\pi], -x \in [-2\pi\,;2\pi]$. Ceci est vrai pour chaque fonction qui suit.

a) On peut voir que la droite $x = 0$ est un axe de symmétrie de la courbe $\mathscr{C}_1$.
Donc, $f_1(x) = f_1(-x)$, c'est-à-dire que la fonction est paire.

b) On peut voir que l'origine est un point de symmétrie de la courbe $\mathscr{C}_2$.
Donc, $f_2(-x) = -f_2(x)$, c'est-à-dire que la fonction est impaire.

c) La fonction f_3 est quelconque. Elle est ni paire, ni impaire.

d) On peut voir que la droite $x = 0$ est un axe de symmétrie de la courbe $\mathscr{C}_4$.
Donc, $f_4(x) = f_4(-x)$, c'est-à-dire que la fonction est paire.

Exercice 78

Tout d'Abord, $\forall x \in [-2\pi\,;2\pi], -x \in [-2\pi\,;2\pi]$. Ceci est vrai pour chaque fonction qui suit.

a) On peut voir que l'origine est un point de symmétrie de la courbe $\mathscr{C}_1$.
Donc, $f_1(-x) = -f_1(x)$, c'est-à-dire que la fonction est impaire.

b) On peut voir que la droite $x = 0$ est un axe de symmétrie de la courbe $\mathscr{C}_2$.
Donc, $f_2(x) = f_2(-x)$, c'est-à-dire que la fonction est paire.

c) On peut voir que la droite $x = 0$ est un axe de symmétrie de la courbe $\mathscr{C}_3$.
Donc, $f_3(x) = f_3(-x)$, c'est-à-dire que la fonction est paire.

d) On peut voir que la droite $x = 0$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_4$.
Donc, $f_4(x) = f_4(-x)$, c'est-à-dire que la fonction est paire.

Exercice 80

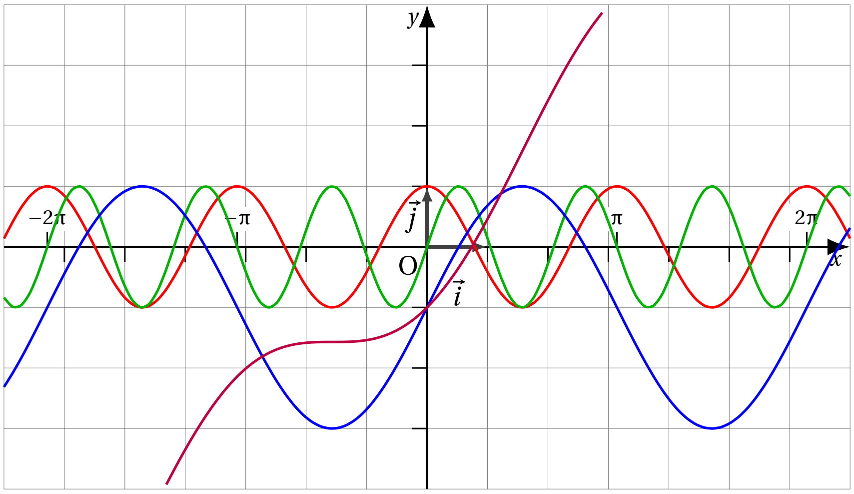

FIGURE 1 – Représentation Graphique des Fonctions f, g, h et k

a) 1) Il s'agit de la courbe rouge.

2) On peut voir que la droite $x = 0$ est un axe de symétrie de la courbe rouge.
Donc, $f(-x) = f(x)$, c'est-à-dire que la fonction semble être paire.

3) $f(-x) = \cos(-2x) \qquad f(x) = \cos(2x) \iff f(x) = \cos(-2x) \iff f(-x) = f(x)$
La fonction est donc bien paire.

b) 1) Il s'agit de la courbe verte.

2) On peut voir que l'origine est un point de symétrie de la courbe verte.
Donc, $g(-x) = -g(x)$, c'est-à-dire que la fonction semble être impaire.

3) $g(-x) = \sin(-3x) \qquad -g(x) = -\sin(3x) \iff -g(x) = \sin(-3x) \iff g(-x) = -g(x)$
la fonction est donc bien impaire

c) 1) Il s'agit de la courbe bleue.

2) On a l'impression que la fonction est ni paire ni impaire.

3) $h(-x) = 2\sin(-x) - 1 = -2\sin(x) - 1 \neq h(x) \neq -h(x)$
La fonction est bien donc ni paire, ni impaire.

d) 1) Il s'agit de la courbe bordeaux.

2) On a l'impression que la fonction est ni paire ni impaire.

3) $k(-x) = -x - cos(-x) = -x - cos(x) \neq k(x) \neq -k(x)$
La fonction est bien donc ni paire, ni impaire.

Exercice 81

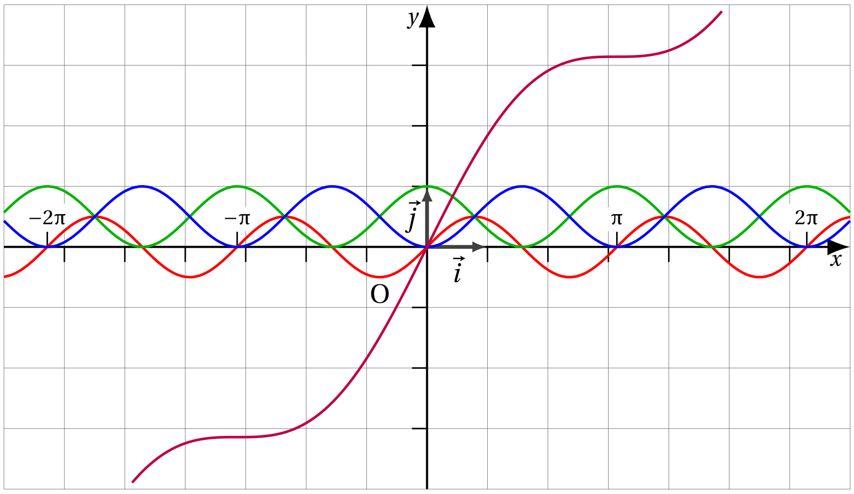

FIGURE 2 – Représentation Graphique des Fonctions f, g, h et k

a) 1) Il s'agit de la courbe rouge.

2) On peut voir que l'origine est un point de symétrie de la courbe rouge. Donc, $f(-x) = -f(x)$, c'est-à-dire que la fonction semble être impaire.

3) $f(-x) = \cos(-x)\sin(-x) \quad -f(x) = -\cos(x)\sin(x) \iff -f(x) = \cos(-x)\sin(-x)$ $\iff f(-x) = -f(x)$ La fonction est bien impaire.

b) 1) Il s'agit de la courbe verte.

2) On peut voir que la droite $x = 0$ est un axe de symétrie de la courbe verte. Donc, $g(-x) = g(x)$, c'est-à-dire que la fonction semble être paire.

3) $g(-x) = (\cos(-x))^2 \quad g(x) = (\cos(x))^2 \iff g(x) = (\cos(-x))^2 \iff g(-x) = g(x)$ La fonction est donc bien paire.

c) 1) Il s'agit de la courbe bleue.

2) On peut voir que la droit $x = 9$ est un axe de symétrie de la courbe bleue. Donc, $h(-x) = h(x)$, c'est-à-dire que la fonction semble être paire.

3) $h(-x) = (\sin(-x))^2 \quad h(x) = (\sin(x))^2 \iff h(x) = (\sin(-x))^2 \iff h(-x) = h(x)$ La fonction est donc bien paire.

d) 1) Il s'agit de la droite bordeaux.

2) On peut voir que l'origine est un point de symétrie de la courbe bordeaux. Donc, $k(-x) = -k(x)$, c'est-à-dire que la fonction semble être impaire.

3) $k(-x) = -x + \sin(-x) \quad -k(x) = -x - \sin(x) \iff -k(x) = -x\sin(-x)$ $\iff k(-x) = -k(x)$ La fonction est bien impaire.

Exercice 82

— $\mathscr{C}_1 \longrightarrow f(x)$

— $\mathscr{C}_2 \longrightarrow h(x)$

— $\mathscr{C}_3 \longrightarrow g(x)$

Exercice 83

1) a) Vrai. $f(x+2k\pi) = f(x)$ avec $\left\{ k \in \mathbb{Z} \right.$

   b) Vrai. Pour la même raison.

2) Vrai. Rajoutter deux à x revient à éffectuer un tour en plus du cercle trigonomérique, et ne change donc pas la valeur de $f(x)$.

Exercice 88

a) Il semble que la période est autour de 6,2. On observe par lecture graphique que $g(x)$ semble compris entre 1 et 7.

b)
$$\begin{aligned}
& g(x+y) = g(x) \\
\iff\ & 4+3\cos(x+y) = 4+3\cos(x) \\
\iff\ & \cos(x+y) = \cos(x) \\
\iff\ & y = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

La période est donc de $2k\pi$, avec $k = 1$, c'est-à-dire $2\pi \approx 6{,}3$

$$\begin{aligned}
& -1 \leq \cos(x) \leq 1 \\
\iff\ & -3 \leq 3\cos(x) \leq 3 \\
\iff\ & 1 \leq 4+3\cos(x) \leq 7
\end{aligned}$$

La conjecture est vérifiée.

Exercice 89

a)

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
Signe de $\tan'(x)$	$\Vert$	$+$	$\Vert$
Variations de $x \mapsto \tan(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	$\Vert$

FIGURE 3 – Tableau de Signes et de Variations de la Fonction $\tan(x)$

b)

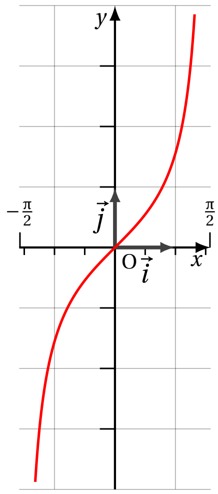

FIGURE 4 – Représentation Graphique de la Fonction $\tan(x)$

Exercice 93

a) Il s'agit d'un triangle équilatéral.

b) Il faut calculer la hauteur du triangle. D'après le théorème de Pythagore, dans le triangle réctangle ABA' de côté a, où A' est le projeté orthogonal de A sur [BC] :

$AA' = \sqrt{AB^2 - BA'^2} = \sqrt{1 - 0{,}25} = \sqrt{0{,}75} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

On a donc $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) Pour en déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$, il faut retourner au triangle réctangle ABA', où on cherche maintenant la valeur de BA'.

$BA' = \sqrt{AB^2 - AA'^2} = \sqrt{1 - 0{,}75} = \sqrt{0{,}25} = \frac{1}{2}$