Chapitre VIII

Géométrie Vectorielle dans l'Espace

I. Vecteurs de l'Espace

La notion de vecteur se généralise à l'espace.

Le vecteur $\vec{u}$ est caractérisé par un sens, une direction, et une norme, notée $||\vec{u}||$.

A. Théorème

A, B, et C étant quatre points de l'espace, les propositions suivantes sont équivalentes :

— $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

— Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

— Les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.

B. Définition

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$ (Deux vecteurs colinéaires ont la même direction)

C. Propriété

Toutes les opérations sur les vecteurs, en particulier la relation de Chasles sont identiques dans l'espace comme dans le plan.

D. Theorème

A et B étant deux points distincts de l'espace, (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB},\ t \in \mathbb{R}$

$(AB) = \left\{ M \in \mathscr{E}, \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}, t \in \mathbb{R} \right\}$

E. Définition

Le vecteur $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{s}$
s'il existe trois réels a, b, et c tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{s}$

II. Vecteurs Coplanaires

A. Définition

Des vecteurs sont coplanaires s'ils admettent des représentants dont les extrémités sont dans un même plan.

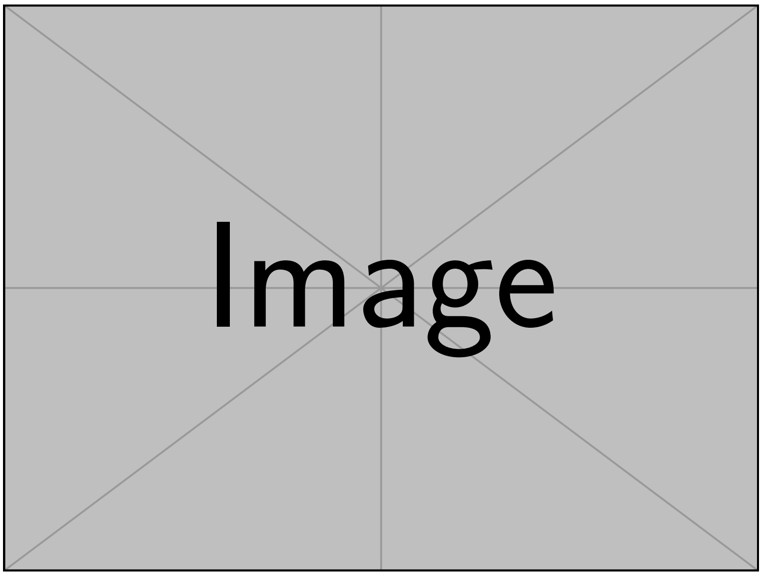

Figure 8.1. – Illustration de la Définition

Si O est un point quelconque et A, B, et C sont tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$

$\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{s}$ coplanaires $\iff$ O, A, B, et C coplanaires

B. Théorème

$\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ étant trois vecteurs de l'espace avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires, $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

On dit alors que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

1. Démonstration

Soient O, A, B, et C quatre points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non-colinéaires donc, O, A, et B sont non alignés, et (OAB) est un plan de base $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$

" $\Longrightarrow$ " On suppose que $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ sont coplanaires. Alors, $C \in (OAB)$.
C admet donc des coordonnées $(\alpha;\beta)$ dans la base $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.
C'est-à-dire $\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ ou encore $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

" $\Longleftarrow$ " On suppose que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$
Soit D le point de (OAB) de coordonnées $(\alpha;\beta)$
Alors, $\overrightarrow{OD} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$
$= \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{w} = \overrightarrow{OC}$
Donc, D = C, les points sont confondus, et comme $C \in (OAB)$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ sont coplanaires.

2. Théorème : Caracterisation Vectorielle d'un Espace

Si A, B, et C sont trois points non-alignés de l'espace, le plan (ABC) est l'ensemble des M tels que :

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t'\overrightarrow{AC} \quad (t,\ t' \in \mathbb{R})$$

III. Repèrage dans l'Espace

A. Définition

Un repère de l'espace est constitué d'un point appelé origine du repère (en général O) et d'un triplet de vecteurs non-coplanaires (en général $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, et $\vec{k}$)

On le note $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$

B. Vocabulaire

La droite $(O;\vec{\imath})$ est appelée axe des abscisses.

La droite $(O;\vec{\jmath})$ est appelée axe des ordonnées.

La droite $(O;\vec{k})$ est appelée axe des cotes.

C. Coordonnées dans l'Espace

1. Théorème

Si $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ est un repère, pour tout point M, il existe un unique triplet $\left(x;y;z\right)$ de réels tels que $\overrightarrow{OM}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$, appelés coordonnées de M.

On note $M\left(x;y;z\right)$

a. Démonstration

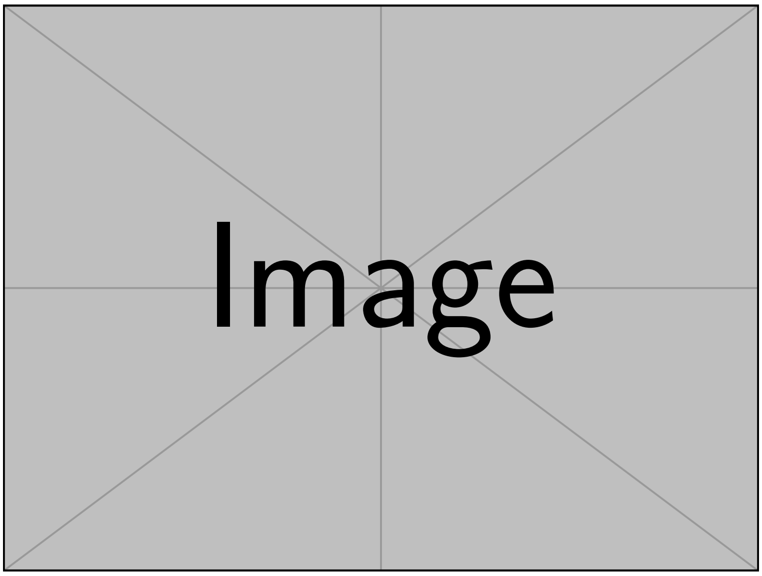

Figure 8.2. – Démonstration du Théorème

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{M'M}$

Or $M\in\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath}\right)$ donc il a des coordonnées $\left(x;y\right)$ dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

$\overrightarrow{OM'}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{M'M}$ est colinéaire à $\vec{k}$ (on a projeté dans sa direction). Il existe un réel z tek que $\overrightarrow{M'M}=z\vec{k}$

Donc, $\overrightarrow{OM}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$ $\square$

(On admet l'unicité)

2. THÉORÈME

Si dans un repère $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$ sont deux points, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Et I, le point du milieu de $[AB]$:

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}\,;\frac{y_A + y_B}{2}\,;\frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

Dans un repère orthonormé, un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ a pour norme :

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

3. THÉORÈME

Si I est le milieu de $[AB]$, pour tout M :

$$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$$

A. DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MI} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AI} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} \quad \text{(Chasles)}\end{aligned}$$