Chapitre XVIII

Loi des Grands Nombres

I. Inégalités Probabilitstes

A. Inégalité de Markov

Pour toute variable aléatoire X à valeurs positives, et pour tout nombre réel δ strictement positif :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq \delta) \leq \frac{\mathrm{E}(\mathrm{X})}{\delta}$$

B. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Pour toute variable aléatoire X, et pour tout nombre réel δ strictement positif :

$$\mathrm{P}\big(|\mathrm{X} - \mathrm{E}(\mathrm{X})| \geq \delta\big) \leq \frac{\mathrm{V}(\mathrm{X})}{\delta^2}$$

C. Remarque

Souvent, on prendre $\delta = \sigma$ ou $k\sigma$ car l'écart type σ d'une variable aléatoire X est l'unité naturelle pour étudier la dispersion de X autour de sons espérance.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev montre notamment que des écarts de X à E(X) de quelques σ deviennent improbables.

D. Remarque

L'Inégalité de Bienaymé-Tchebychev est loin de donner le meilleur majorant.

Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}\left(\,n\,;\,p\,\right)$, on a $\mathrm{P}\left(|\mathrm{X} - \mathrm{E}(\mathrm{X})| \geq 2\sigma\right) \approx 0,05$ ce qui est bien meilleur que le 0,25 obtenu avec l'inégalité.

En effet, si $\delta = 2\sigma$ et $\mathrm{X} \sim \mathscr{B}(\,n\,;\,p\,)$:

$$\frac{\mathrm{V}(\mathrm{X})}{\delta^2} = \frac{np(1-p)}{4\sqrt{np(1-p)}^2} = \frac{1}{4}$$

II. Loi des Grands Nombres

A. Propriété

Soit une variable aléatoire X associée à un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, c'est-à-dire que $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est un échantillon de n variables aléatoires identiques et indépendantes qui suivent toutes la loi de probabilité suivie par X. On note M_n la moyenne de cet échantillon.

Alors, pour tout réel $\delta > 0$:

$$P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2} \quad \text{(c'est l'inégalité de concentration)}$$

Et :

$$\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq \delta) = 0 \quad \text{(c'est la loi des grands nombres)}$$

Autrement dit, plus la taille n d'un échantillon d'une variable aléatoire X est grande, plus l'écart entre la moyenne de cet échantillon et l'espérance de X est faible.