

Chapitre 10

Limites de Fonctions

I. LIMITES D'UNE FONCTION EN L'INFINI

A. LIMITE EN $+\infty$

1. DÉFINITIONS

Soit une fonction f définie au moins sur $[a; +\infty[$, où a est un réel.

— On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si pour tout réel M positif, il existe un réel A , tel que $x > A$ implique $f(x) \geq M$.

Autrement dit, lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, $f(x)$ peut être aussi grand que l'on veut.

On note :

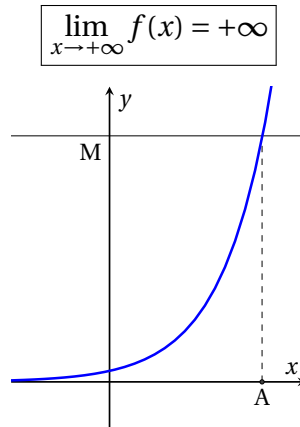


FIGURE 10.1. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble
Tendre vers $+\infty$ en $+\infty$

- On dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si pour tout réel m négatif, il existe un réel A , tel que $x > A$, $f(x) \leq m$.

Autrement dit, lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, $f(x)$ est négatif et peut être aussi grand que l'on veut en valeur absolue.

On note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

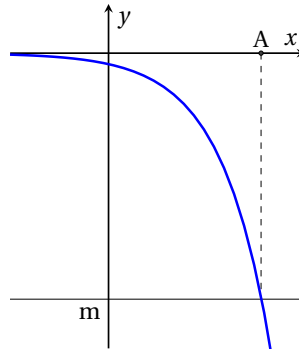


FIGURE 10.2. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers $-\infty$ en $+\infty$

- On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ où ℓ est un réel si pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ , il existe un réel A tel que $x > A$ implique $f(x) \in I$.

Autrement dit, lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, $f(x)$ peut être aussi près de ℓ que l'on veut.

On note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$

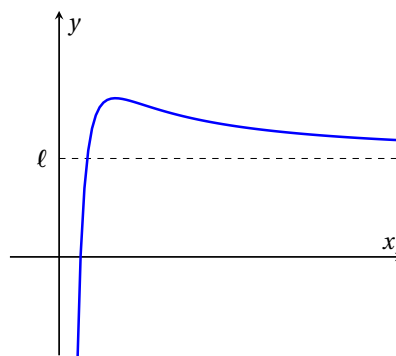


FIGURE 10.3. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers ℓ en $+\infty$

H.P. : $\forall \epsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f$

$$(x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon) \text{ ou } (x > A \Rightarrow f(x) \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[)$$

2. DÉFINITION

Soit f une fonction définie au moins sur $[A; +\infty[$, où A est un réel, et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ alors \mathcal{C} admet une *asymptote horizontale* en $+\infty$ d'équation $y = \ell$.

3. REMARQUE

Une fonction n'admet pas forcément de limite en $+\infty$, par exemple, les fonctions sinus et cosinus sont bornées et n'admettent pas de limites en l'infini.

B. LIMITE EN $-\infty$

1. DÉFINITIONS

Soit f une fonction définie au moins sur $] -\infty; a[$, où a est un réel.

— On dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ si pour tout réel M , positif, il existe un réel A tel que $x < A$ implique $f(x) \geq M$.

Autrement dit, lorsque x prend des valeurs négatives de plus en plus grandes en valeur absolue, $f(x)$ peut être aussi grand que l'on veut.

On note :

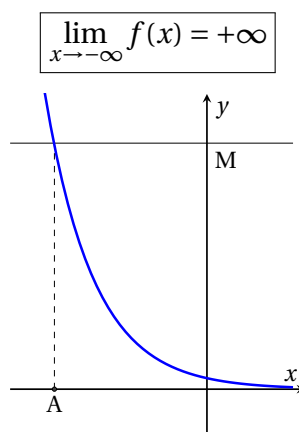


FIGURE 10.4. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers $+\infty$ en $-\infty$

- On dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ si pour tout réel m négatif, il existe un réel A tel que $x < A$ implique $f(x) \leq m$.

On note :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

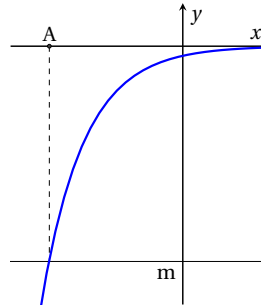


FIGURE 10.5. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers $-\infty$ en $-\infty$

- On dit que f a pour limite ℓ en $-\infty$ où ℓ est un réel, si pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ , on peut trouver un réel A tel que si $x \leq A$, $f(x)$ appartient à I .

Autrement dit, lorsque x prend des valeurs négatives, de plus en plus grandes en valeur absolue, $f(x)$ peut être aussi près de ℓ que l'on veut.

On note :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$$

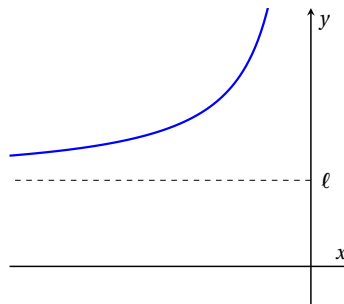


FIGURE 10.6. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers ℓ en $-\infty$

$$\text{H.P. : } \forall \epsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f \\ \left(x < A \implies |f(x) - \ell| < \epsilon \right) \text{ ou } \left(x < A \implies f(x) \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[\right)$$

2. DÉFINITION

Si \mathcal{C} est la courbe représentative de f dans un repère. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ alors \mathcal{C} admet une *asymptote horizontale* en $-\infty$ d'équation $y = \ell$.

II. LIMITE D'UNE FONCTION EN UN RÉEL

A. DÉFINITIONS

Soit a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I contenant a ou tel que a est une borne de I .

Si, lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a :

- $f(x)$ est aussi grand que l'on veut, on dit que f a pour limite $+\infty$ en a .

On note :

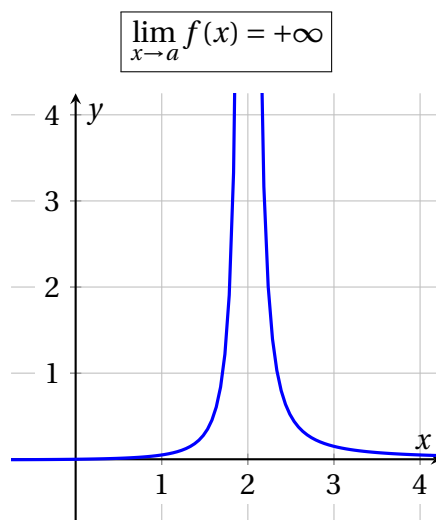


FIGURE 10.7. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers $+\infty$ en a

- $f(x)$ est négatif et aussi grand que l'on veut en valeur absolue, on dit que f a pour limite $-\infty$ en a .

On note :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

- $f(x)$ est aussi proche que l'on veut d'un réel ℓ , on dit que f a pour limite ℓ en a .

On note :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

1. REMARQUE

Si f est *continue* en a , $\ell = f(a)$.

B. LIMITE À DROITE OU À GAUCHE D'UNE FONCTION EN UN RÉEL

1. EXEMPLE

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 car lorsque x tend vers 0 par des valeurs positives, $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers 0 par valeurs négatives, $\frac{1}{x}$ tend vers $-\infty$.

Cependant, on peut parler de limite à gauche et limite à droite.

On note :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

2. REMARQUE

Une fonction admet une limite en un réel a si la limite à droite et à gauche de f en a existent et sont égales.

C. ASYMPTOTE VERTICALE

1. DÉFINITION

Soit \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f . Dire que \mathcal{C} admet une asymptote verticale d'équation $x = a$, c'est dire que :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \pm\infty$$

III. FONCTIONS USUELLES

A. THÉORÈME

1. FONCTION RACINE CARRÉE

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ (la fonction racine carrée est continue en 0)

2. FONCTION INVERSE

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

3. FONCTIONS PUISSANCES

Quel que soit $p \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p = +\infty$.

Si p est pair, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^p = +\infty$ et si p est impair, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^p = -\infty$.

Quel que soit $p \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^p} = 0$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^p} = 0$.

Si p est pair, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^p} = +\infty$ et si p est impair, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^p} = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^p} = -\infty$.

4. FONCTION EXPONENTIELLE

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

5. FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$

B. THÉORÈMES DE CROISSANCE COMPARÉE

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

1. DÉMONSTRATION

- On montre que $e^x > \frac{x^2}{2}$, pour tout $x > 0$ en étudiant la différence.
 Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$. Étudions les variations de f .
 $f'(x) = e^x - x$ on ne conclut pas directement sur le signe. Dérivons encore :
 $f''(x) = e^x - 1$ et $e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$
 Donc, $f''(x)$ est strictement positive pour $x > 0$.
 Ainsi on a $f'(x)$ strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et comme $f'(0) = 1 > 0$,
 f' est strictement positive sur $]0; +\infty[$:



x	0	$+\infty$
$f''(x)$	0	+
$f'(x)$	1	
$f(x)$	1	

FIGURE 10.8. – Tableau de Variation de f et f'

- Donc, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $e^x - \frac{x^2}{2} > 0$ et donc $e^x > \frac{x^2}{2}$.
 Comme $x > 0$ on peut diviser par x :
 Donc, $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, par comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \square$$

- On pose $X = -x$ et alors, $\lim_{x \rightarrow -\infty} X = +\infty$ et $x e^x = -X e^x = -\frac{X}{e^X}$.
 Donc, par passage à l'inverse de la limite précédente :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{X}{e^X} = 0 \quad \square$$

C. THÉORÈME

Quel que soit l'entier $n > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

D. THÉORÈMES DE CROISSANCE COMPARÉE (BIS)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$$

1. DÉMONSTRATION

On pose le changement de variable $X = \ln(x)$ et donc $x = e^X$. On a alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} X = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} X = -\infty$$

IV. OPÉRATIONS SUR LES LIMITESA. LIMITES DE SOMME, PRODUIT ET QUOTIENT

Dans cette sous-partie, les limites des fonctions f et g sont prises soit en $-\infty$, soit en $+\infty$ soit en un réel a . ℓ et ℓ' sont des nombres réels.

Lorsqu'il n'y a pas de conclusion en général, on dit alors qu'il y a un cas de forme indéterminée. (F.I.)

N.B. : $\pm\infty$ désigne ici $+\infty$ ou $-\infty$.

1. LIMITE DE SOMME

TABLEAU 10.1. – Tableau des Limites de Sommes de Fonctions

$\lim g$	$\lim f$		
	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	El.
$-\infty$	$-\infty$	El.	$-\infty$

2. LIMITE D'UN PRODUIT

TABLEAU 10.2. – Tableau des Limites des Produits de Fonctions

$\lim g$	$\lim f$					
	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
ℓ'	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell' > 0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell' < 0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	$-\infty$	$+\infty$	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	El.
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	El.
0	0	0	0	El.	El.	0

3. LIMITE D'UN QUOTIENT f/g

TABLEAU 10.3. – Tableau des Limites des Quotients de Fonctions

$\lim g$	$\lim f$					
	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell' > 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell' < 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$-\infty$	$+\infty$	0
$+\infty$	0	0	0	FI.	FI.	0
$-\infty$	0	0	0	FI.	FI.	0
0^+	$-$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI.
0^-	$-$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI.

4. EXEMPLES

A. SOMME

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{x^2} - 1 = +\infty \quad (\text{remarquons qu'on a la même limite quand } x \rightarrow 0)$$

B. PRODUIT

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-3 + x) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = -\infty \quad \text{En effet, } \lim_{x \rightarrow 0} -3 + x = -3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

$$\text{Par contre, remarquons que } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3 + x) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty.$$

C. QUOTIENT

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{\sqrt{x}} = +\infty$$

B. LIMITE D'UNE COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS

1. RAPPEL

On note $g \circ f$ la composée de la fonction f suivie de g .

$\forall x \in \mathcal{D}_f$ tel que $f(x) \in \mathcal{D}_g$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

2. THÉORÈME

Soient a , b et c trois réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. Soient f et g deux fonctions, définies au bon endroit.

Alors, si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \boxed{b}$ et $\lim_{x \rightarrow \boxed{b}} g(x) = c$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$$

Attention aux limites !

3. EXEMPLE

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2-3} = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 - 3 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0.$$

C. COMPARAISON

a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

1. THÉORÈME

Si f et g sont deux fonctions telles que pour tout x voisin de a , $f(x) \leq g(x)$:

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

2. THÉORÈME DIT « DES GENDARMES »

Soient f , g et h trois fonctions telles que pour tout x voisin de a ,
 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$ où ℓ est un réel, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.