Chapitre V

Fonction Composée

I. Définiton

Soient u une fonction définie sur un intervalle I et f une fonction définie sur un intervalle J, I étant tel que pour tout réel x de I, $u(x) \in$ J.

La fonction *composée* de u par f, notée $f \circ u$ est la fonction définie sur I par :

$$\boxed{(f \circ u)(x) = f\big(u(x)\big)}$$

$$\begin{array}{llcccc} & & \overset{u}{} & & \overset{f}{} & \\ \text{Intervalles :} & \mathrm{I} & \xrightarrow{u} & \mathrm{J} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \text{Variables :} & x & \rightarrow & u(x) & \rightarrow & f\big(u(x)\big) \end{array}$$

Figure 5.1. – Schéma de la Fonction Composée

A. Exemples

La fonction $u : x \mapsto u(x) = x^2 + 1$ est définie sur $\mathbb{R}$, et $f : x \mapsto f(x) = \ln(x)$ est définie sur $]0 ; +\infty[$, la fonction $f \circ u$ est définie sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) \in]0 ; +\infty[$, et $(f \circ u)(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$.

La fonction $g : x \mapsto g(x) = \sqrt{5x - 3}$ est la fonction composée de la fonction affine $x \mapsto 5x - 3$ et de la fonction racine carrée. Elle est définie sur $\left[\frac{3}{5} ; +\infty\right]$, intervalle sur lequel $5x - 3 \in \mathbb{R}^+$.

II. Dérivée d'une Fonction Composée

A. Théorème

Si u est dérivable en un réel a et f est dérivable en $u(a)$ alors $f \circ u$ est dérivable en a et $(f \circ u)'(a) = u'(a) \times f'\big(u(a)\big)$.

Si u est dérivable sur I et f est dérivable sur J, I étant tel que, pour tout réel x de I, $u(x) \in \mathrm{J}$ alors $f \circ u$ est dérivable sur I, et pour tout réel $x \in \mathrm{I}$:

$$\boxed{(f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'\big(u(x)\big)}$$

B. Exemples

Si on appelle h la fonction par $h : x \mapsto h(x) = \ln(x^2+1)$, alors h est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $h'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

La fonction g ci-dessus, définie par $g : x \mapsto g(x) = \sqrt{5x-3}$, est dérivable sur $\left]\frac{3}{5}\,;+\infty\right[$, et pour tout $x \in \left]\frac{3}{5}\,;+\infty\right[$, $g'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x-3}}$.

III. Limites d'une Fonction Composée

A. Théorème

Soient a, b et c sont trois réels, ou $\pm\infty$

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \boldsymbol{b}$ et $\lim\limits_{\mathrm{X} \to \boldsymbol{b}} f(\mathrm{X}) = c$ alors, $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f\big(u(x)\big) = c}$

B. Exemple

Soit $g : x \mapsto g(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{\mathrm{X} \to -\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{X}} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$