Chapitre VIII

Géométrie Vectorielle dans l'Espace

I. Vecteurs de l'Espace

La notion de vecteur se généralise à l'espace.

Le vecteur $\vec{u}$ est caractérisé par un sens, une direction, et une norme, notée $||\vec{u}||$.

A. Théorème

A, B, et C étant quatre points de l'espace, les propositions suivantes sont équivalentes :

— $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

— Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

— Les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.

B. Définition

Deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

C. Propriété

Toutes les opérations sur les vecteurs, en particulier la relation de Chasles sont identiques dans l'espace comme dans le plan.

D. Theorème

A et B étant deux points distincts de l'espace, (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB},\ t \in \mathbb{R}$

$(AB) = \left\{ M \in \mathscr{E},\ \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB},\ t \in \mathbb{R} \right\}$

E. Définition

Un vecteur $\vec{k}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ s'il existe des réels a, b et c tels que $\vec{k} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$

II. Vecteurs Coplanaires

A. Définition

Des vecteurs sont coplanaires s'ils admettent des représentants dont les extrémités sont dans un même plan.

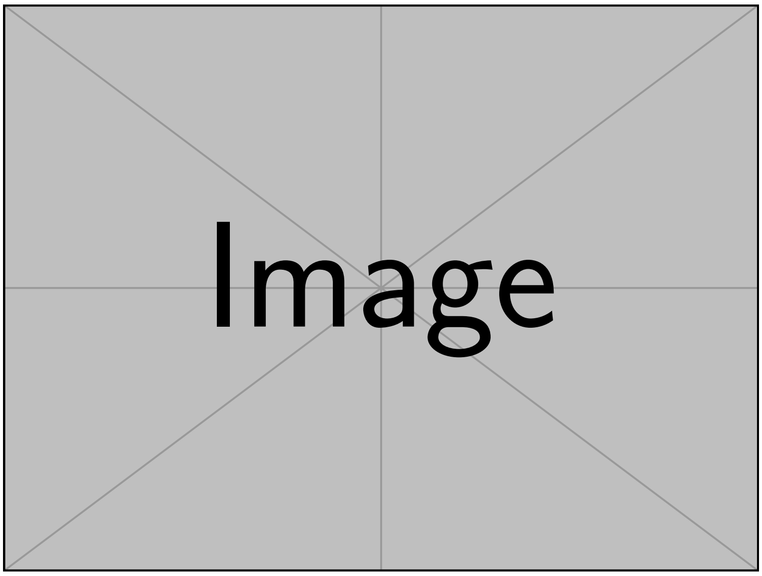

Figure 8.1. – Illustration de la Définition

Si O est un point quelconque et A, B et C sont tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u},\ \overrightarrow{OB} = \vec{v},$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$

$\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{s}$ coplanaires $\iff$ O, A, B, et C coplanaires

B. Théorème

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ étant trois vecteurs de l'espace avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. $\quad \left(\vec{w}\right.$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\left.\vec{v}\right)$

1. Démonstration

Soient O, A, B, et C quatre points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non-colinéaires donc, O, A et B sont non alignés, et (OAB) est un plan de base $\left(\text{O}\ ,\ \overrightarrow{OA}\ ,\ \overrightarrow{OB}\right)$

" $\Longrightarrow$ " On suppose que $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ sont coplanaires. Alors, $\text{C} \in (\text{OAB})$.
C admet donc des coordonnées $(\alpha\ ;\ \beta)$ dans la base $\left(\text{O}\ ,\ \overrightarrow{OA}\ ,\ \overrightarrow{OB}\right)$.
C'est-à-dire $\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ ou encore $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

" $\Longleftarrow$ " On suppose que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$
Soit D le point de (OAB) de coordonnées $(\alpha\ ;\ \beta)$
Alors,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}\\ &= \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{w} = \overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

Donc, D = C, les points sont confondus, et comme $\text{C} \in (\text{OAB})$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ sont coplanaires.

2. Théorème : Caracterisation Vectorielle d'un Espace

Si A, B, et C sont trois points non-alignés de l'espace, le plan (ABC) est l'ensemble des M tels que :

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t'\overrightarrow{AC} \quad (t,\ t' \in \mathbb{R})$$

III. Repèrage dans l'Espace

A. Définition

Un repère de l'espace est constitué d'un point appelé origine du repère (en général O) et d'un triplet de vecteurs non-coplanaires (en général $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$)

On le note $\left(\text{O}\ ;\vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k}\right)$

B. Vocabulaire

La droite $(\text{O}\ ;\ \vec{\imath})$ est appelée axe des abscisses.

La droite $(\text{O}\ ;\ \vec{\jmath})$ est appelée axe des ordonnées.

La droite $(\text{O}\ ;\ \vec{k})$ est appelée axe des cotes.

Lorsque ces trois axes sont perpendiculaires deux à deux, le repère est orthogonal. Si de plus $||\vec{\imath}|| = ||\vec{\jmath}|| = ||\vec{k}|| = 1$, le repère est orthonormé.

C. Coordonnées dans l'Espace

1. Théorème

Si $\left(\text{O} ; \vec{\imath}\,, \vec{\jmath}\,, \vec{k} \right)$ est un repère, pour tout point M, il existe un unique triplet $(x ; y ; z)$ de réels tels que $\overrightarrow{\text{OM}} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$, appelés coordonnées de M.

On note M $(x ; y ; z)$

a. Démonstration

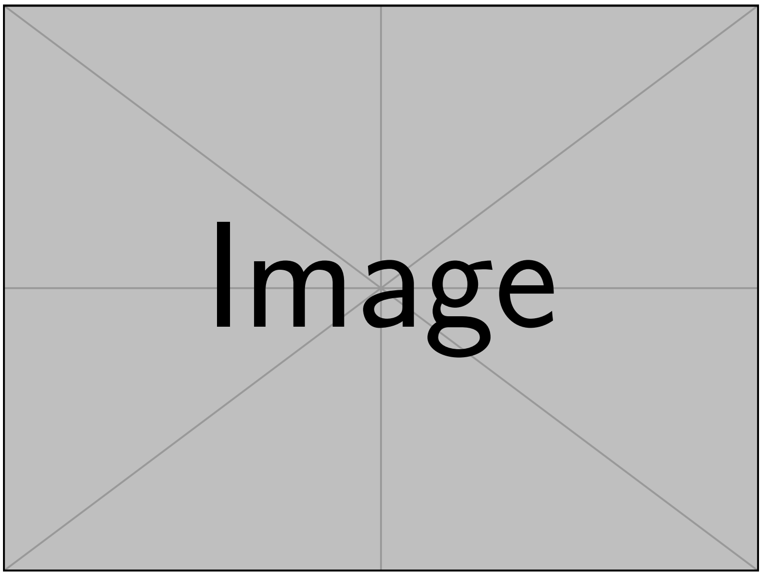

Figure 8.2. – Démonstration du Théorème

$\overrightarrow{\text{OM}} = \overrightarrow{\text{OM}'} + \overrightarrow{\text{M}'\text{M}}$
Or M $\in (\text{O} ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$ donc il a des coordonnées $(x ; y)$ dans
le repère $(\text{O} ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$.

$\overrightarrow{\text{OM}'} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{\text{M}'\text{M}}$ est colinéaire à $\vec{k}$ (on a projeté dans sa direction). Il existe un réel z tek que $\overrightarrow{\text{M}'\text{M}} = z\vec{k}$

Donc, $\overrightarrow{\text{OM}} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ □
(On admet l'unicité)

B. Remarque

On définit de même les coordonnées d'un vecteur de l'espace. Tout vecteur de l'espace est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$.

2. Théorème

Si dans un repère A $\left(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A \right)$ et B $\left(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B \right)$ sont deux points, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Et I, le point du milieu de $[AB]$:

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A + y_B}{2}\ ;\ \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

Dans un repère orthonormé, un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ a pour norme :

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

A. Démonstration

Passer par M′, le projeté orthogonal de M sur $\left(O\ ;\vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ \right)$, puis appliquer le théorème de Pythagore deux fois.

3. Théorème

Si I est le milieu de $[AB]$, pour tout M :

$$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$$

A. Démonstration

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MI} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AI} \\ &= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{MB} \quad \text{(Chasles)} \end{aligned}$$