# Chapitre XVII

# Fonctions Trigonométriques

## I. Définition et Propriétés

### A. Rappel

Soit un réel $x$ et M le point correspondant sur le cercle trigonométrique dans une repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\right)$

Le cosinus de $x$ est noté $\cos(x)$, où $\cos(x)$ est l'abscisse du point M.
Le sinus de $x$ est noté $\sin(x)$, où $\sin(x)$ est l'ordonnée du point M.

Ces deux propriétés permettent de réduire l'intervalle d'étude des fonctions cosinus et sinus à $[0\,;\pi]$

Par parité, on peut déduire $[-\pi\,;0]$, donc $[-\pi\,;\pi]$.

Par périodicité on peut déduire les résultats sur $\mathbb{R}$

## II. Dérivabilité

### A. Étude des Fonctions Sinus et Cosinus

#### 1. Théorème

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel $x$ :

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \cos'(x) = -\sin(x)$$

#### 2. Tableaux de Variation

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $\cos'(x) = -\sin(x)$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $\cos$ | $1$ | $\searrow 0 \searrow$ | $-1$ |

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $\sin'(x) = \cos(x)$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $\sin$ | $0$ | $\nearrow 1 \searrow$ | $0$ |

FIGURE 17.1. – Tableaux de Variation des Fonctions cosinus et sinus

### 3. Courbes Représentatives

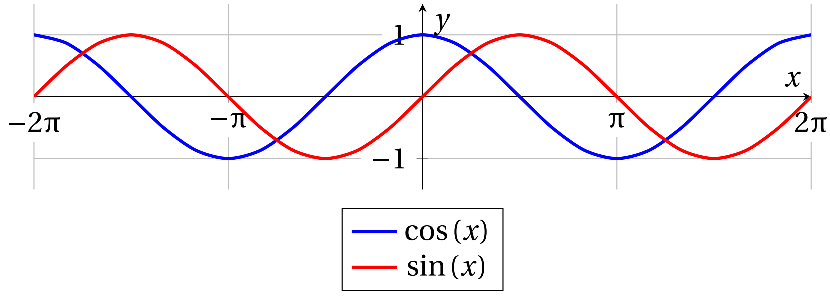


Figure 17.2. – Représentation Graphique des Fonctions cosinus et sinus

## B. Complément

### 1. Théorème

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=0$$

#### a. Démonstration

La fonction sinus est continue et dérivable en 0 :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(0+h)-\sin(0)}{h}=\sin'(0)=\cos(0)=1$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(0+h)-\cos(0)}{h}=\cos'(0)=-\sin(0)=0$$