

Exercices Chapitre sur les Variables Aléatoires *

Diego Van Overberghe

8 mai 2020

Exercice 33

- a) $p = 1 - 0,34 - 0,26 - 0,17 - 0,12 = 0,11$
b) $p = 1 - 0,26 - 0,24 - 0,14 - 0,13 - 0,04 = 0,19$

Exercice 35

- a) On a :

x_i	-1	0	1	3	4	5	6	8
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$

- b) $P(1 \leq X \leq 5) = p_1 + p_3 + p_4 + p_5 = 0,1 + 0,15 + 0,25 + 0,2 = 0,7$
 $P(X \geq 4) = p_{-1} + p_0 + p_1 + p_3 + p_4 = 0,65$

Exercice 36

- a) On a :

x_i	-4	0	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{3}$

- b) On a x , le nombre de jetons rouges ou verts et y , le nombre de jetons bleus.

$$\begin{cases} 2x + y = 20 \\ y = 2x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5 \\ y = 10 \end{cases}$$

x_i	-4	0	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Exercice 39

On a $p = 1 - 0,12 - 0,14 - 0,21 - 0,32 - 0,13 = 0,08$

De plus, $P(U \leq 13) = 0,12 + 0,14 + 0,21 + 0,32 = 0,79$

Donc, $q = P(U \leq 13) - 0,14 - 0,10 = 0,55$

Et, $r = 1 - P(V \leq 13) - 0,10 = 0,11$

Exercice 40

- a) Faux. $P(X \geq 4) = 0,15$
- b) Faux. $P(2 \leq X \leq 3) = 0,35$
- c) Vrai. $P(X \leq 2) = 0,15$

Exercice 50

- a) $E(X) = p_0 x_0 + p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4 = 1,2$
 $V(X) = p_0 (x_0 - E(X))^2 + \dots + p_r (x_r - E(X))^2 = 1,46$
 $\sigma(X) \approx 1,21$
- b) $E(Y) = p_0 y_0 + \dots + p_r y_r = 1,1$
 $V(Y) = p_0 (y_0 - E(Y))^2 + \dots + p_r (y_r - E(Y))^2 = 0,0184$
 $\sigma(Y) \approx 0,14$
- c) $E(Z) = p_0 z_0 + \dots + p_r z_r = 1,01$
 $V(X) = p_0 (z_0 - E(Z))^2 + \dots + p_r (z_r - E(Z))^2 \approx 2,05$
 $\sigma(Z) \approx 1,43$

Exercice 51

- 1) $E(X) = p_0 x_0 + \dots + p_r x_r = 4,9$
 $V(X) = p_0 (x_0 - E(X))^2 + \dots + p_r (x_r - E(X))^2 = 1,81$
 $\sigma(X) \approx 1,35$
- 2) a)

y_j	0	1	2	3	4	5
$P(Y = y_j)$	0,05	0,12	0,18	0,3	0,23	0,12

z_j	2,4	3,6	4,8	6	7,2	8,4
$P(Z = z_j)$	0,05	0,12	0,18	0,3	0,23	0,12

t_j	2,8	3,7	4,6	5,5	6,4	7,3
$P(T = t_j)$	0,05	0,12	0,18	0,3	0,23	0,12

b)

$$E(Y) = E(X) - 2 = 2,9$$

$$E(Z) = 5,88$$

$$E(T) = 5,41$$

$$V(Y) = 1,81$$

$$V(Z) \approx 2,61$$

$$V(T) \approx 1,47$$

$$\sigma(Y) \approx 1,35$$

$$\sigma(Z) = 1,62$$

$$\sigma(T) \approx 1,63$$

Exercice 52

a) $E(X) = p_0 x_0 + \dots + p_r x_r = 1,99$

b) $E(Y) = p_0 y_0 + \dots + p_r y_r = 2,13$

c) Au centre d'examen B, les candidats font plus d'erreurs en moyenne.

d) $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p_0(x_0 - E(X))^2 + \dots + p_r(x_r - E(X))^2} \approx 1,24$

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{p_0(y_0 - E(Y))^2 + \dots + p_r(y_r - E(Y))^2} \approx 1,76$$

La centre d'examen B a donc les résultats les plus dispersés.

Exercice 56

a) Les représentations graphiques peuvent tous être assimilées à des paraboles dont le sommet se situe à une abscisse de 25. Donc, les espérances des variables seront identiques. Les courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = 25$.

b) $\sigma(X) < \sigma(Z) < \sigma(Y)$

Exercice 60

$$E(X) = p_0 x_0 + \dots + p_r x_r; \quad V(X) = p_0(x_0 - E(X))^2 + \dots + p_r(x_r - E(X))^2; \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$E(E_1) = -0,21$$

$$E(E_2) = -0,21$$

$$V(E_1) = 2,2259$$

$$V(E_2) = 1,8459$$

$$\sigma(E_1) \approx 1,49$$

$$\sigma(E_2) \approx 1,36$$

La marque modélisée par E_2 a une espérance identique à celle de E_1 , mais l'écart-type est beaucoup plus petit, donc il y a moins de risque d'avoir un produit très défectueux.

Exercice 61

a) Vrai. $E(aX) = aE(X)$

b) Faux. $\sigma(X + b) = \sigma(X)$

c) Vrai. $V(0,9X) = 0,9V(X) \quad \sigma(0,9X) = 0,9\sigma(X)$

Exercice 62

$$E(X) = 3,105$$

$$E(Y) = 3,045$$

$$E(Z) = 3,28$$

$$V(X) \approx 0,51$$

$$V(Y) \approx 0,38$$

$$V(Z) \approx 0,67$$

$$\sigma(X) \approx 0,72$$

$$\sigma(Y) \approx 0,62$$

$$\sigma(Z) \approx 0,82$$

- a) La production Z est la plus dispersée.
- b) La production Z a la masse moyenne la plus élevée.
- c) La production Y est la plus régulière.

Exercice 64

- a) Vrai. Les tirages sont indépendants, donc : $P(B ; R) = P(B) \times P(R) = P(R) \times P(B) = P(R ; B)$
- b) Faux. Les tirages sont indépendants, donc : $P(R ; R) = P^2(R) = \frac{1}{16}$
- c) Vrai. Les tirages sont indépendants, donc : $P(B ; B) = P^2(B) = \frac{9}{16}$

Exercice 65

- a) Il-y-a 36 issues possibles.
- b) $P(A) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
 $P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - P(\text{"on obtient deux fois 1"}) = \frac{12}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$
 $P(C) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

Exercice 66

1.

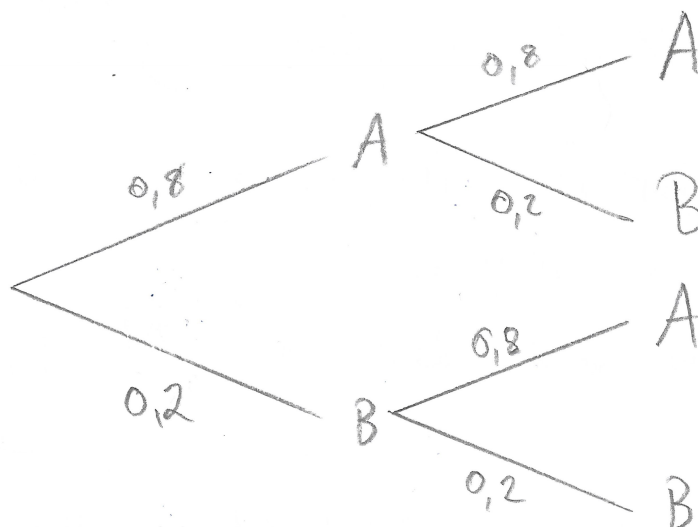


FIGURE 1 – Arbre pondéré

- 2. a) X prend les valeurs 0 ; 1 ; 2.
- b) $P(X = 0) = P(\bar{A})^2 = \frac{1}{25}$; $P(X = 2) = P(A)^2 = \frac{16}{25}$
 $P(X = 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 2) = \frac{8}{25}$
- c) $P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{24}{25}$
 $P(X \leq 1) = P(X = 1) + P(X = 0) = \frac{9}{25}$

Exercice 67

- a) L'affirmation de Victor est fausse. Chaque lancer est indépendant puisque le dé n'est pas truqué.
Sa justification est fausse parce que il considère qu'au deuxieme lancer, il n'y a plus que cinq faces, or il y en a toujours six.
- b) Valentine, quand à elle a raison. Il n'y a que $\frac{1}{6}$ de chance que l'un des deux joueurs commencent à jouer au premier tour.

Exercice 69

- a)

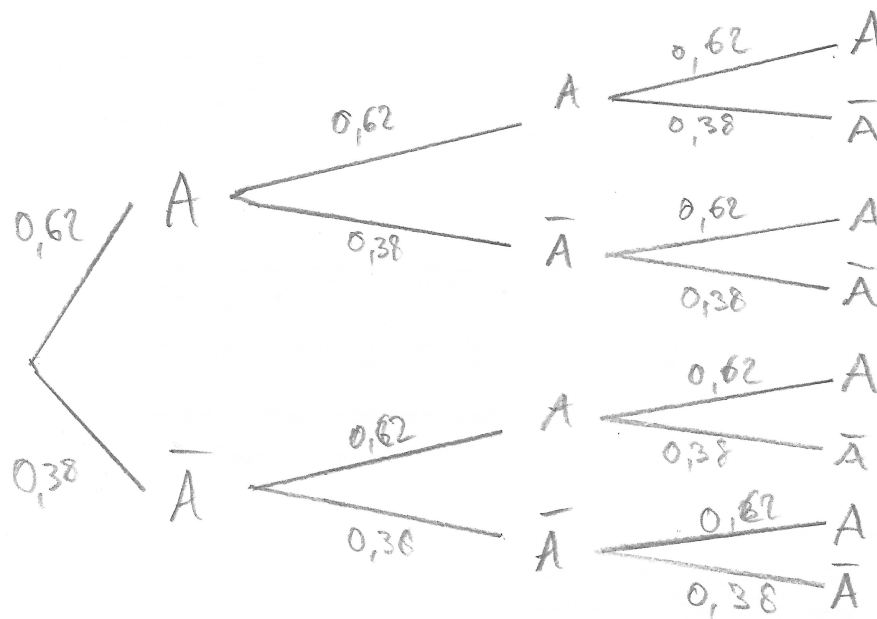


FIGURE 2 – Arbre pondéré

- b) On pose la variable aléatoire X , qui représente le nombre d'usagers abonnés. Ses valeurs possibles sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3. On donne sa loi de probabilité par le tableau ci-dessous, avec $P(X = x_i) = P(\bar{A})^{3-x_i} \times P(A)^{x_i} \times (\text{Nombre d'issues de l'événement})$

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$0,38^3 \times 1 \approx 0,0549$	$0,38^2 \times 0,62 \times 3 \approx 0,2686$
x_i	2	3
$P(X = x_i)$	$0,38 \times 0,62^2 \times 3 \approx 0,4382$	$0,62^3 \times 1 \approx 0,2384$

- $P(\text{“Deux des usagers sont abonnés.”}) = P(X = 2) \approx 0,1461$
- $P(\text{“Au moins deux des usagers sont abonnés.”}) = P(X \geq 2) \approx 0,3845$
- $P(\text{“Au plus deux des usagers sont abonnés.”}) = P(X \leq 2) \approx 0,2905$

```
c) import random
def s_abonnes(nbUsagers=10): # Voir Note 1
    X=0
    for ind in range(nbUsagers):
        if random.random()<0.62:
            X+=1
    return X

print(s_abonnes())
```

*# Note 1: Il s'agit ici d'un "default parameter", c'est-à-dire que
si l'utilisateur ne donne pas d'argument, alors 10 est utilisé.*

$P(\text{"7 Usagers sont abonnés."}) = 0,62^7 \times 0,38^3 \approx 0,0001932$

Cependant, je pense que c'est faux. Mes simulations indiquent une probabilité plus proche de 0,23 ($n = 10\,000$).