Chapitre 1

Suites : La Démonstration par Récurrence

Exemple :

On considère la suite (u_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 4^n - 1$.

$$(u_n) = \{0\,;3\,;15\,;63\,;255\,;\dots\}$$

On remarque que tous ces nombres sont des multiples de 3. On se demande si $\forall n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est un multiple de 3.

Axiome de la récurrence :

Soit $P(n)$, une propriété dépendante de l'entier naturel n.

$$\text{Si : } \begin{cases} P(0) \text{ est vraie (Initialisation)} \\ \forall k \in \mathbb{N}, P(k) \text{ vraie} \implies P(k+1) \text{ vraie (hérédité)} \end{cases}$$

Alors : $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel.

Reprenons notre exemple. La propriété : "$4^n - 1$ est un multiple de 3", est vraie pour $n = 0$. La propriété est donc initialisée.

Hérédité : Supposons que la propriété est vraie à un certain rang k, (fixe). C'est l'hypothèse de la récurrence, et montrons qu'alors, elle est vraie au rang $k + 1$.

L'Hypothèse de récurrence est donc : "$4^n - 1$ est un multiple de 3". C'est-à-dire qu'il existe un entier p tel que $4^n - 1 = 3p$ et donc $4^n = 3p + 1$.

$$\begin{aligned} 4^{k+1} - 1 &= 4 \times 4^k - 1 \\ &= 4 \times (3p+1) - 1 \quad \text{(Hypothèse de récurrence)} \\ &= 12p + 4 - 1 \\ &= 12p + 3 \\ &= 3\,(4p+1) \quad \text{(Il s'agit bien d'un multiple de 3)} \end{aligned}$$

Donc, la propriété est héréditaire.
On a démontré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 4^n - 1$ est un multiple de 3.