

# Chapitre XIV

## Convexité

### I. FONCTION CONVEXE ET FONCTION CONCAVE

#### A. DÉFINITIONS

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère.

$f$  est *convexe* sur  $I$  si quels que soient les points  $A$  et  $B$  de la courbe  $\mathcal{C}$  sur  $I$ , le segment  $[AB]$  est au dessus de  $\mathcal{C}$  entre  $A$  et  $B$ .

$f$  est *concave* sur  $I$  si quels que soient les points  $A$  et  $B$  de la courbe  $\mathcal{C}$  sur  $I$ , le segment  $[AB]$  est en dessous de  $\mathcal{C}$  entre  $A$  et  $B$ .

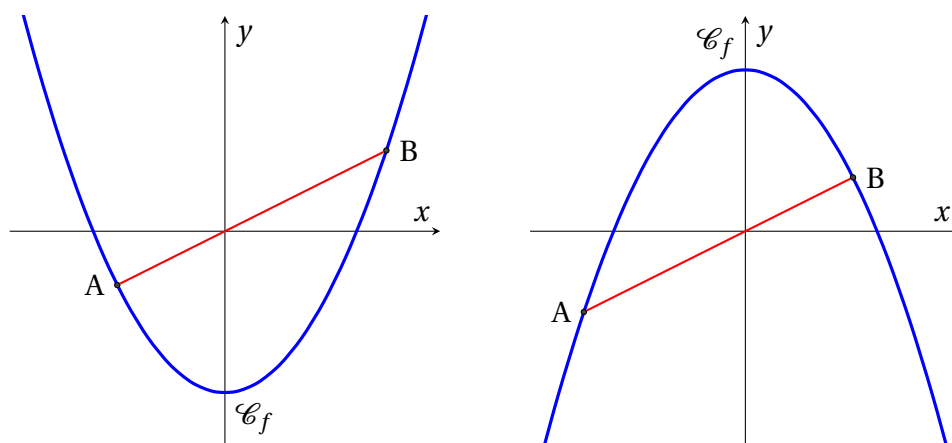


FIGURE 14.1. – Illustration de la Définition

#### B. PROPRIÉTÉ

Si  $f$  est convexe sur  $I$ , pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $I$ ,  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$ .

Si  $f$  est concave sur  $I$ , pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $I$ ,  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}$ .

#### 1. DÉMONSTRATION

Supposons  $f$  convexe.

Soit  $A(a; f(a))$  et  $B(b; f(b))$  deux points de  $\mathcal{C}$ , alors  $[AB]$  est au dessus de  $\mathcal{C}$ ,

en particulier, le milieu de  $[AB]$  d'abscisse  $\frac{a+b}{2}$  et d'ordonnée  $\frac{f(a)+f(b)}{2}$  est au dessus de l'image de  $\frac{a+b}{2}$  par  $f$ .

### C. PROPRIÉTÉ (ADMISE)

$f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si  $\mathcal{C}$  est située au dessus de chacune de ses tangentes sur  $I$

$f$  est concave sur  $I$  si et seulement si  $\mathcal{C}$  est située en dessous de chacune de ses tangentes sur  $I$

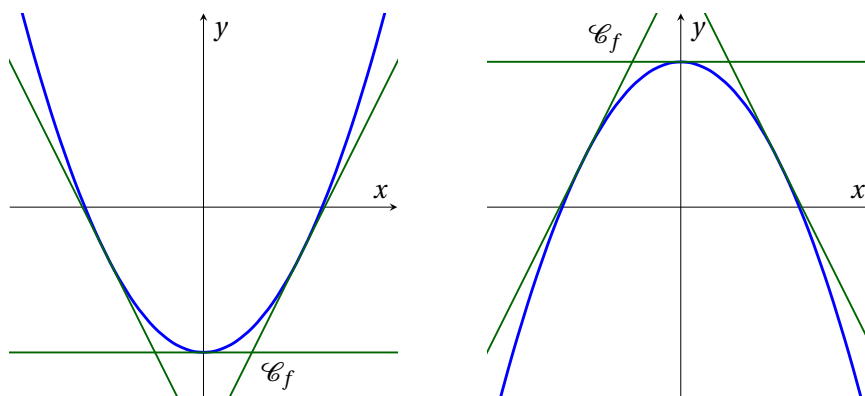


FIGURE 14.2. – Illustration de la Propriété

### D. DÉFINITION

$A$  est un point d'inflexion de  $\mathcal{C}$  si au point  $A$ , la courbe traverse sa tangente.

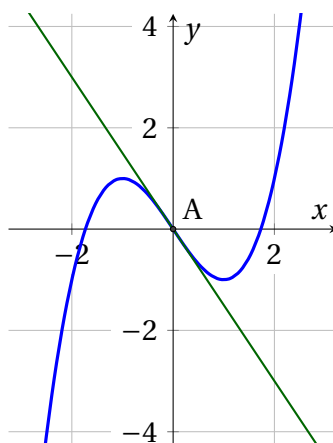


FIGURE 14.3. – Exemple d'un Point d'Inflexion

### E. REMARQUE

Lorsque  $f$  change de convexité, sa courbe  $\mathcal{C}$  admet un point d'inflexion.

## II. LIEN AVEC LA DÉRIVÉE

### A. DÉFINITION

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $I$  dont la fonction dérivée  $f'$  est dérivable sur  $I$ . La dérivée de  $f'$  se nomme la dérivée seconde de  $f$  et se note  $f''$ .

### B. PROPRIÉTÉ

Soit  $f$  une fonction dérivable deux fois sur un intervalle  $I$ .

$f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si :

- $f'$  est croissante sur  $I$
- $f''$  est positive sur  $I$
- La courbe représentative est située au dessus de ses tangentes sur  $I$

### C. PROPRIÉTÉ

$f$  est concave sur  $I$  si et seulement si :

- $f'$  est décroissante sur  $I$
- $f''$  est négative sur  $I$
- La courbe représentative est située en dessous de ses tangentes sur  $I$

### D. PROPRIÉTÉ

Si  $\mathcal{C}$  est la courbe représentative de  $f$  dans un repère,  $\mathcal{C}$  admet un point d'inflexion au point d'abscisse  $a$  si et seulement si  $f''$  s'annule et change de signe en  $a$ .

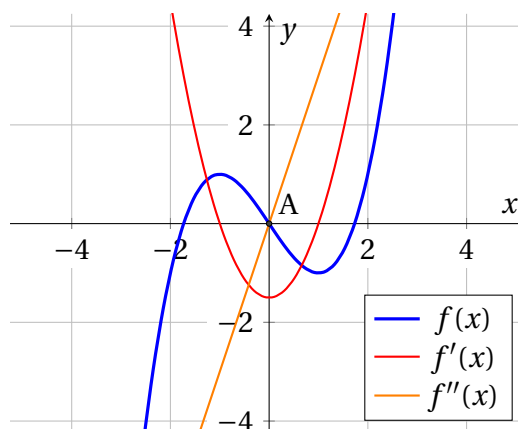


FIGURE 14.4. – Illustration de l'Évolution de la Convexité en Fonction de la Dérivée Seconde