Chapitre XII

Orthogonalité dans l'Espace

I. Différentes Expressions du Produit Scalaire

A. Définitions

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs de l'espace, soit un point A de l'espace, et les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

Alors, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ (Produit Scalaire de deux vecteurs dans le plan (ABC))

Ainsi, toutes les définitions et propriétés du produit scalaire dans le plan sont conservées dans l'espace.

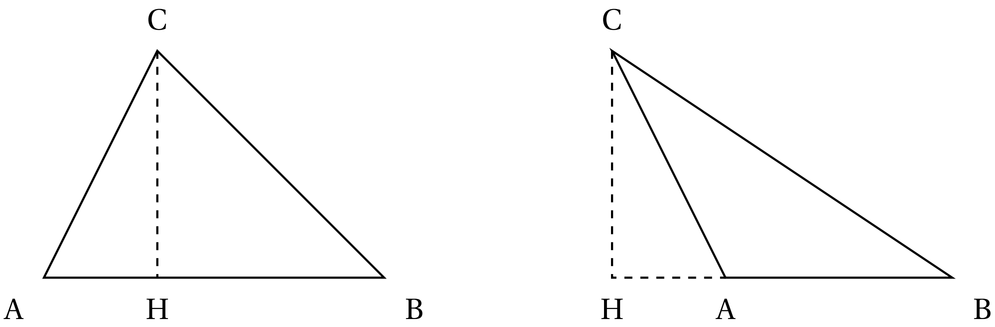
Les trois définitions suivantes sont équivalentes :

1. Définition avec le Projeté Orthogonal

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs de l'espace, soit un point A de l'espace, et les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB),

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraire.



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

$$= AB \times AH \qquad \text{ou} \qquad = -AB \times AH$$

Figure 12.1. – Illustration du Produit Scalaire par Projeté Orthogonal

2. Définitions avec les Normes

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right) = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2\right)$$

Ainsi, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - CB^2\right)$.

3. Définition avec l'Angle

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos\left(\vec{u}\,,\vec{v}\right)$$

B. Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et pour tout réel λ :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u} \qquad \text{(symmétrie du produit scalaire)}$$

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \lambda\times(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}) \\ \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}\end{array}\right\}\text{(bilinéarité du produit scalaire)}$$

C. Expressions Analytique du Produit Scalaire

Dans un repère orthonormé de l'espace, $\vec{u}\,\left(x\,;\,y\,;\,z\right)$ et $\vec{v}\,\left(x'\,;y'\,;\,z'\right)$ étant deux vecteurs, alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

1. Démonstration

On rappelle que $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$:

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\left(x+x'\right)^2 + \left(y+y'\right)^2 + \left(z+z'\right)^2 - \left(x^2+y^2+z^2\right) - \left(x'^2+y'^2+z'^2\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(2xx' + 2yy' + 2zz'\right)\\ &= xx' + yy' + zz'\end{aligned}$$

II. Orthogonalité

A. Vecteurs Orthogonaux

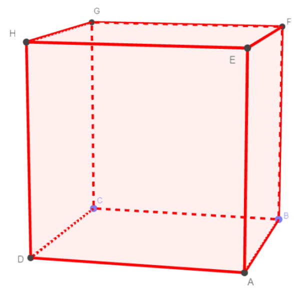
1. Définition

Deux vecteurs de l'espace non nuls sont orthogonaux si deux droites qu'ils dirigent sont orthogonales.

Par convention le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

a. Exemple

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.



$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont orthogonaux.

Figure 12.2. – Illustration de deux Vecteurs Orthogonaux

2. Théorème

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

3. Théorème

Dans un repère orthonormé, deux vecteurs $\vec{u}\left(x\,;\,y\,;\,z\right)$ et $\vec{v}\left(x'\,;\,y'\,;\,z'\right)$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' + zz' = 0$ (par définition analytique)

B. Vecteur Normal à un Plan

1. Définition

Un vecteur *normal* à un plan est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à un plan.

Un vecteur normal est par définition *non nul*.

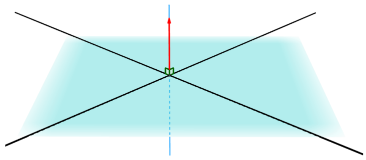


FIGURE 12.3. – Illustration de la Définition

2. Caractérisation d'un Plan

Un plan est caractérisé par *un point* et un *vecteur normal*.

FIGURE 12.4. – Caractérisation d'un Plan

Sur ce dessin, les deux plans ont le meme vecteur normal $\vec{n}$, donc la meme direction. La position d'un plan sera déterminée par un point.

On en déduit que deux plans parallèles admettent le meme vecteur normal, c'est-à-dire des vecteurs normaux colinéaires.

a. Rappel

On peut aussi définir un plan par trois points non alignés, ou par deux droites sécantes (c'est-à-dire un point et deux vecteurs directeurs), ou, beaucoup plus rare, par deux droites parallèles non confondues.

3. Théorème

Le plan $\mathscr{P}$ qui passe par un point A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des point M tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} = 0$. (admis ou définition d'un plan)

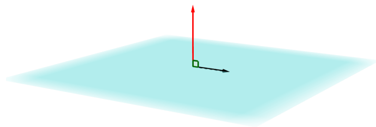


Figure 12.5. – Illustration du Théorème

C. Application (approfondissement)

1. Démonstration du Théorème

« Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. »

" $\Longrightarrow$ " Si une droite est orthogonale à un plan, elle est orthogonale à toute droite de ce plan, en particulier deux droites sécantes de ce plan.

" $\Longleftarrow$ " Supposons qu'une droite (d) est orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 du plan $\mathscr{P}$. Notons A le point d'intersection de d_1 et d_2, et $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ deux vecteurs directeurs de d_1 et d_2.

Ainsi (A ; $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$) est un repère du plan $\mathscr{P}$, car $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires.

Notons $\vec{n}$ un vecteur directeur de (d). (on trace ci-dessous uniquement les vecteurs directeurs)

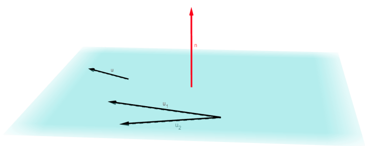


Figure 12.6. – Représentation de la Situation

Alors, $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

Soit une droite du plan $\mathscr{P}$, dont le vecteur directeur est $\vec{u}$.

Alors, il existe deux réels α et β tels que $\vec{u} = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2$ ($\vec{u}$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ coplanaires)

Donc, $\vec{n} \cdot \vec{u} = \alpha\vec{n} \cdot \vec{u}_1 + \beta\vec{n} \cdot \vec{u}_2 = 0$ (car $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$)

Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$, et donc (d) est orthogonale à toute droite du plan $\mathscr{P}$. $\square$

D. Plans Perpendiculaires

Deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ admettant pour vecteurs normaux respectivement $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.

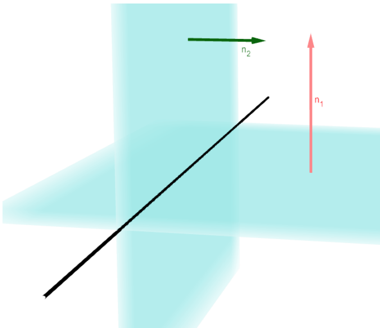


FIGURE 12.7. – Illustration de deux Plans Perpendiculaires

III. Projection Orthogonale d'un Point

A. Projeté Orthogonal d'un Point sur un Plan

a. Définition

Le projeté orthogonal d'un point A sur un plan $\mathscr{P}$ est l'intersection de $\mathscr{P}$ et de la droite orthogonale à $\mathscr{P}$ passant par A.

b. Remarque

Il existe une unique droite orthogonale (perpendiculaire) à $\mathscr{P}$ passant par A.

c. Propriété

Si H est le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$, le point H est le point de $\mathscr{P}$ le plus proche de A. On l'appelle distance du point A au plan $\mathscr{P}$.

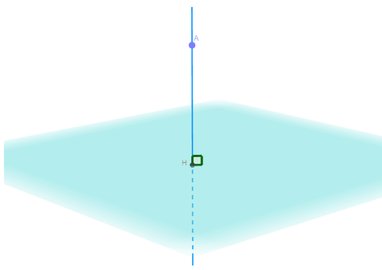


FIGURE 12.8. – Illustration de la Propriété

1. Démonstration

Soit M un point de $\mathscr{P}$, comme (AH) $\perp \mathscr{P}$, (AH) est orthogonale à toute droite de ce plan.
Donc AMH est un triangle rectangle en H et $AH^2 = AM^2 - MH^2 \leqslant AM^2$

Donc, pour tout point M du plan, $AH \leqslant AM$.

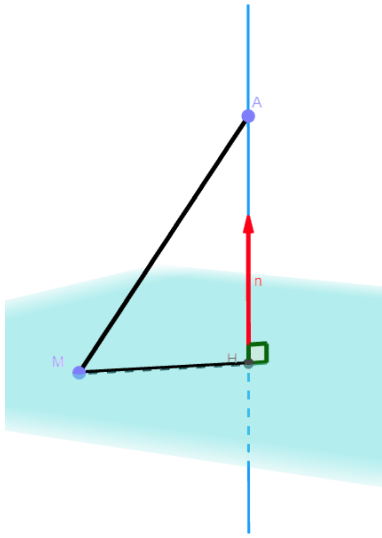


Figure 12.9. – Illustration de la Démonstration

D. Propriété

Pour tout point M du plan $\mathscr{P}$:

$$AH = \frac{\left|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}\right|}{||\vec{n}||} = d\ (A\,,\mathscr{P}\,)$$

1. Démonstration

$AH = AM \times \cos\left(\widehat{MAH}\right)$ (triangle rectangle AMH)

Or $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = AM \times ||\vec{n}|| \times \cos\left(\overrightarrow{AM}\,,\ \vec{n}\right)$

Donc $\left|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}\right| = AM \times ||\vec{n}|| \times \left|\cos\left(\overrightarrow{AM}\,,\ \vec{n}\right)\right| = AM \times ||\vec{n}|| \times \cos\left(\widehat{MAH}\right)$

Et donc, $\dfrac{\left|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}\right|}{||\vec{n}||} = AH$

B. Projeté Orthogonal d'un Point sur une Droite

1. DÉFINITION

Le projeté orthogonal d'un point A sur une droite (d) est l'intersection de (d) et du plan orthogonal à (d) passant par A.

2. REMARQUE

Il existe un unique plan orthogonal (perpendiculaire) à (d) passant par A.

3. PROPRIÉTÉ

Si H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (d), le point H est le point de (d) le plus proche de A. On l'appelle distance du point A à la droite (d).