Chapitre X

Limites de Fonctions

I. Limites d'une Fonction en l'Infini

A. Limite en $+\infty$

1. Définitions

Soit une fonction f définie au moins sur $[a\,;+\infty[$, où a est un réel.

— On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si pour tout réel M positif, il existe un réel A, tel que $x > \text{A}$ implique $f(x) \geqslant \text{M}$.
Autrement dit, lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, $f(x)$ peut être aussi grand que l'on veut.
On note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

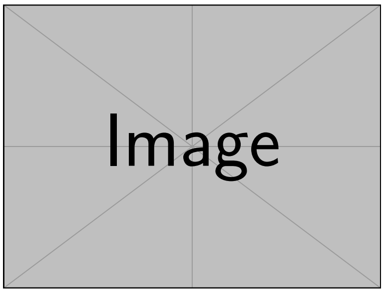


FIGURE 10.1. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers $+\infty$ en $+\infty$

— On dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si pout tout réel m négatif, il existe un réel A, tel que $x > \text{A}$, $f(x) \leqslant m$.
Autrement dit, lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, $f(x)$ est négatif et peut être aussi grand que l'on veut en valeur absolue.
On note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

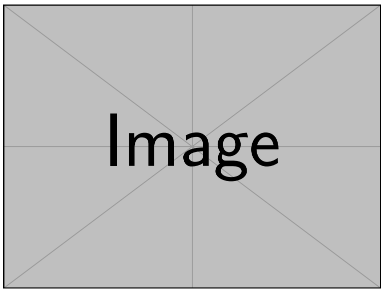


FIGURE 10.2. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers $-\infty$ en $+\infty$

— On dit que f a pour limite l en $+\infty$ où l est un réel si pour tout intervalle ouvert I contenant l, il existe un réel A tel que $x > \mathrm{A}$ implique $f(x) \in \mathrm{I}$
Autrement dit, lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, $f(x)$ peut être aussi près de l que l'on veut.

On note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

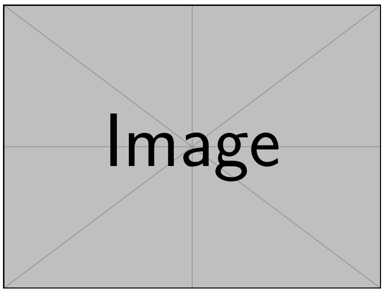


FIGURE 10.3. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers l en $+\infty$

H.P. : $\forall \epsilon > 0,\ \exists \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathscr{D}_f$

$$\left(x > \mathrm{A} \implies \left|f(x) - l\right| < \epsilon\right) \text{ ou } \left(x > \mathrm{A} \implies f(x) \in \left]l - \epsilon\,;l + \epsilon\right[\right)$$

2. DÉFINITION

Soit f une fonction définie au moins sur $[\mathrm{A}\,;+\infty[$, où A est un réel, et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ alors $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = l$.

3. REMARQUE

Une fonction n'admet pas forcément de limite en $+\infty$, par exemple, les fonctions sin et cos sont bornées et n'admettent pas de limites en l'infini.

B. Limite en $-\infty$

1. Définitions

Soit f une fonction définie au moins sur $]-\infty\,;a[$, où a est un réel.

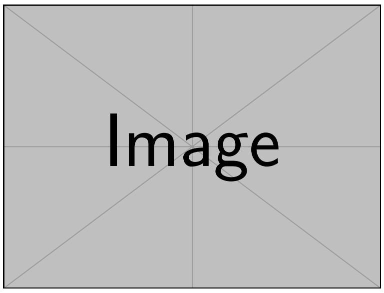
— On dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ si pour tout réel M, positif, il existe un réel A tel que $x < \mathrm{A}$ implique $f(x) \geqslant \mathrm{M}$
Autrement dit, lorsque x prend des valeurs négatives de plus en plus grandes en valeur absolue, $f(x)$ peut être aussi grand que l'on veut.
On note :
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$


FIGURE 10.4. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers $+\infty$ en $-\infty$

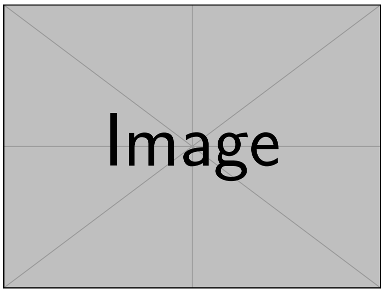
— On dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ si pour tout réel m négatif, il existe un réel A tel que $x < \mathrm{A}$ implique $f(x) \leqslant m$
On note :
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$


FIGURE 10.5. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers $-\infty$ en $-\infty$

— On dit que f a pour limite ℓ en $-\infty$ où ℓ est un réel, si pour tout intervalle ouvert I contenant l, on peut trouver un réel A tel que si $x \leqslant A$, $f(x)$ appartient à I.
Autrement dit, lorsque x prend des valeurs négatives, de plus en plus grandes en valeur absolue, $f(x)$ peut être aussi près de ℓ que l'on veut.
On note :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$

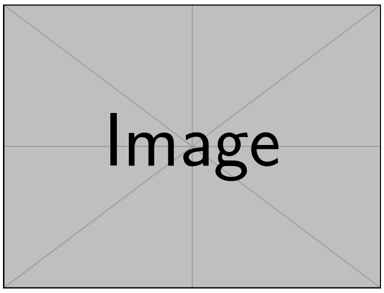


FIGURE 10.6. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers l en $+\infty$

H.P. : $\forall \epsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathcal{D}_f$

$$\left(x < A \implies \left|f(x) - \ell\right| < \epsilon\right) \text{ ou } \left(x < A \implies f(x) \in \left]\ell - \epsilon\,;\ell + \epsilon\right[\right)$$

2. DÉFINITION

Si $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ alors $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = \ell$.

II. Limite d'une Fonction en un Réel

A. Définitions

Soit a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I contenant a ou tel que a est une borne de I.

Si, lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a :

— $f(x)$ est aussi grand que l'on veut, on dit que f a pour limite $+\infty$ en a.
On note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

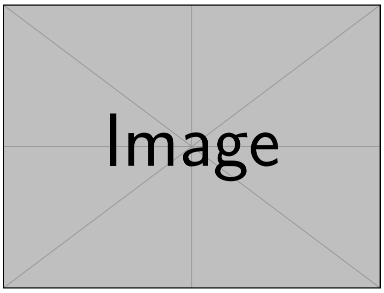


FIGURE 10.7. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers $+\infty$ en a

— $f(x)$ est négatif et aussi grand que l'on veut en valeur absolue, on dit que f a pour limite $-\infty$ en a.
On note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

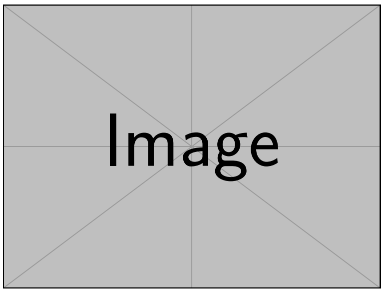


FIGURE 10.8. – Représentation Graphique d'une Fonction qui Semble Tendre vers $-\infty$ en a

— $f(x)$ est aussi proche que l'on veut d'un réel l, on dit que f a pour limite l en a.
On note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

1. Remarque

Si f est continue en a, $l = f(a)$.

B. Limite à Droite ou à Gauche d'une Fonction en un Réel

1. Exemple

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 car lorsque x tend vers 0 par des valeurs positives, $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers 0 par valeurs négatives, $\frac{1}{x}$ tend vers $-\infty$.

Cependant, on peut parler de limite à gauche et limite à droite.

On note :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

2. Remarque

Une fonction admet une limite en un réel a si la limite à droite et à gauche de f en a existent et sont égales.

C. Asymptote Verticale

1. Définition

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f. Dire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = a$, c'est dire que :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \pm\infty$$

III. Fonctions Usuelles

A. Théorème

1. Fonction Racine Carrée

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$ (la fonction racine carrée est continue en 0)

2. Fonction Inverse

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$

3. Fonctions Puissances

Quel que soit $p \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p = +\infty$

Si p est pair, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^p = +\infty$ et si p est impair, $\lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty$

Quel que soit $p \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p} = 0$, et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^p} = 0$

Si p est pair, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^p} = +\infty$ et si p est impair, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x^p} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{x^p} = -\infty$

4. Fonction Exponentielle

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

5. Fontion Logarithme Népérien

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$

B. Théorèmes de Croissance Comparée

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

1. Démonstration

— On montre que $e^x > \frac{x^2}{2}$, pour tout $x > 0$ en étudiant la différence.
Soit f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$. Étudions les variations de f.
$f'(x) = e^x - x$ on ne conclut pas directement sur le signe. Dérivons encore :
$f''(x) = e^x - 1$ et $e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$

Donc, $f''(x)$ est strictement positive pour $x > 0$

Ainsi on a $f'(x)$ strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et comme $f'(0) = 1 > 0$, f' est strictement positive sur $]0\,;+\infty[$:

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	0 +	
$f'(x)$	1 $\nearrow$	
$f(x)$	1 $\nearrow$	

FIGURE 10.9. – Tableau de Variation de f

Donc, pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$, $\mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2} > 0$ et donc $\mathrm{e}^x > \frac{x^2}{2}$

Comme $x > 0$ on peut diviser par x :

Donc, $\frac{\mathrm{e}^x}{x} > \frac{x}{2}$ et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, par comparaison :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty \quad \square$$

— On pose $\mathrm{X} = -x$ et alors, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{X} = +\infty$ et $x\mathrm{e}^x = -\mathrm{X}\mathrm{e}^x = -\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{e}^{\mathrm{X}}}$

Donc, par passage à l'inverse de la limite précédente :

$$\lim_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = \lim_{\mathrm{X} \to +\infty} -\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{e}^{\mathrm{X}}} = 0 \quad \square$$

C. Théorème

Quel que soit l'entier $n > 0$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0$$

D. Théorèmes de Croissance Comparée (bis)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$$

1. Démonstration

On pose le changement de variable $\mathrm{X} = \ln(x)$ et donc $x = \mathrm{e}^{\mathrm{X}}$. On a alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{X} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \mathrm{X} = -\infty$.

IV. Opérations sur les Limites

A. Limites de Somme, Produit et Quotient

Dans cette sous-partie, les limites des fonctions f et g sont prises soit en $-\infty$, soit en $+\infty$ soit en un réel a. ℓ et ℓ' sont des nombres réels.
Lorsqu'il n'y a pas de conclusion en général, on dit alors qu'il y a un cas de forme indéterminée. (F.I.)
N.B. : $\pm\infty$ désigne $+\infty$ ou $-\infty$.

1. Limite de Somme

Si $\lim f$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si $\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(f+g)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Figure 10.10. – Tableau des Limites de Sommes de Fonctions

2. Limite d'un Produit

Si $\lim f$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Si $\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim(fg)$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I.

Figure 10.11. – Tableau des Limites des Produits de Fonctions

3. Limite d'un Quotient f/g dans le cas où la limite de g n'est pas nulle

Si $\lim f$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Si $\lim g$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\pm\infty$
$\lim(f/g)$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Figure 10.12. – Tableau des Limites des Quotients de Fonctions, où la Limite de g n'est pas nulle

4. Limite d'un Quotient f/g dans le cas où la limite de g est nulle

Si $\lim f$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	0
Si $\lim g$	0^+	0^-	0^+	0^-	0
$\lim(f/g)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Figure 10.13. – Tableau des Limites des Quotients de Fonctions, où la Limite de g est nulle

5. Exemples

a. Somme

$$\lim_{x\to+\infty} x+\frac{1}{x^2}-1=+\infty$$ (remarquons qu'on a la même limite quand $x\to 0$)

b. Produit

$\lim\limits_{x\to 0}(-3+x)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$ En effet, $\lim\limits_{x\to 0}-3+x=-3$ et $\lim\limits_{x\to 0}1+\frac{1}{x^2}=+\infty$

Par contre, remarquons que $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3+x)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$

c. Quotient

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x}{\sqrt{x}}=+\infty$$

B. Limite d'une Composée de Deux Fonctions

1. Rappel

On note $g \circ f$ la composée de la fonction f suivie de g.

$\forall x \in \mathscr{D}_f$ tel que $f(x) \in \mathscr{D}_g$, $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$

2. Théorème

Soient a, b et c trois réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. Soient f et g deux fonctions, définies au bon endroit.

Alors, si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \boldsymbol{b}$ et $\lim\limits_{x \to \boldsymbol{b}} g(x) = c$, on a :

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$$

Attention aux limites !

3. Exemple

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x^2-3} = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x \to +\infty} -x^2 - 3 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X \to -\infty} \mathrm{e}^{X} = 0$$

C. Comparaison

a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

1. Théorème

Si f et g sont deux fonctions telles que pour tout x voisin de a, $f(x) \leqslant g(x)$

- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

2. Théorème

Soient f, g et h trois fonctions telles que pour tout x voisin de a,
$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$

Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$ où ℓ est un réel, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$