Chapitre XVI

Calcul Intégral

I. Notion d'Intégrale

A. Aire sous la Courbe et Intégrale

1. Défintion

Soit f une fonction *continue et positive* sur un intervalle $[a\,;b]$ $(a \leqslant b)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

L'aire délimitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est l'intégrale de f sur $[a\,;b]$, et se note :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Remarques

$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ se lit « intégrale de a à b de f de t dt »
ou « somme de a à b de f de t dt ».

$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ se note indifféremment $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ se mesure en unité d'aire ($u.a.$). Où 1 $u.a.$ est l'aire du rectangle de base (1 sur 1).

3. Remarque

Dans le cas d'une fonction continue de signe quelconque, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une aire algébrique entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Par convention, on compte positivement les aires lorsque $\mathscr{C}$ est au dessus de l'axe des abscisses et négativement lorsqu'elle est en dessous.

B. Dérivabilité de la Fonction Aire

1. Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$ $(a \leqslant b)$

Alors, la fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a\,;b]$ et :

$$\Phi' = f \qquad (\Phi \text{ est une primitive de } f)$$

a. Démonstration (f croissante)

Soit $x_0 \in [a\,;b]$ et $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in [a\,;b]$. Notons $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

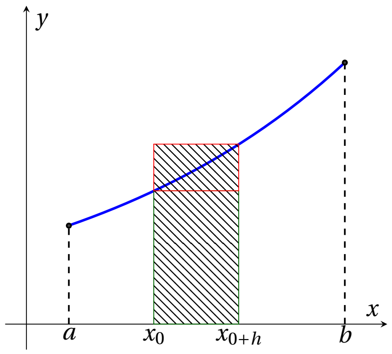

Figure 16.1. – Encadrement de la Fonction Φ

Étudions $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h}$

$\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)$ est l'aire sous la courbe entre x_0 et x_0+h.

On encadre cette aire par les aires des deux rectangles de largeur $|h|$ et de hauteur $f(x_0)$ (en vert) et $f(x_0+h)$ (en rouge)

— Si $h > 0$, et comme f est croissante :

$$h \times f(x_0) \leqslant \Phi(x_0+h) - \Phi(x_0) \leqslant h \times f(x_0+h)$$

$$\iff \quad f(x_0) \leqslant \frac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$$

— Si $h < 0$ alors la largeur est $-h$:

$$-h \times f(x_0+h) \geqslant \Phi(x_0) - \Phi(x_0+h) \geqslant -h \times f(x_0)$$

$$\iff \quad f(x_0+h) \leqslant \frac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} \leqslant f(x_0)$$

Or f est continue, donc $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} = f(x_0) \quad \square$$

Ainsi, Φ est dérivable en x_0 et $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

Ce résultat est vrai pour tout $x_0 \in \mathrm{I}$, donc Φ est dérivable sur I et $\Phi' = f$.

2. Rappel Théorème

Soit f une fonction continue sur I et Φ une primitive de f sur I.

Alors, f admet une infinité de primitives sur I et toute primitive F de f est définie par $\mathrm{F}(x) = \Phi(x) + k,\ k \in \mathbb{R}$.

3. Conséquence

Soit f une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$.

Le premier théorème prouve l'existence d'une primitive Φ de f sur $[a\,;b]$, définie par $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Ainsi, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(b)$

Et d'après le deuxième théorème (lien entre deux primitives), quelle que soit F, la primitive de f, il existe un réel k tel que $\mathrm{F} = \Phi + k$.
Donc, $\mathrm{F}(a) = \Phi(a) + k = k$ car $\Phi(a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Ainsi, $\Phi(b) = \mathrm{F}(b) - k = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$

Or $\Phi(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Donc, quelle que soit la primitive F de f :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

4. Remarque

On note :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{F}(t)\right]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

5. Exemples

— $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x\right]_0^1 = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e} - 1$

— $\displaystyle\int_0^2 t^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$

II. Intégrale d'une Fonction Continue

A. Extension de la Notion d'Intégrale

On a défini l'intégrale d'une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$ ($a \leqslant b$), et on a vu que si F est une primitive de f sur $[a\,;b]$:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

On admet que cette formule peut être étendue au cas d'une fonction continue de signe quelconque, quelles que soient les bornes a et b de l'intégrale.

1. Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit F une primitive de f sur I. Si a et b sont deux réels quelconques de I, l'intégrale de f entre a et b s'écrit :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \big[\mathrm{F}(t)\big]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

2. Exemples

— $$\begin{aligned}\int_{-4}^{-2}\left(\frac{1}{t^2}-3\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{t}-3t\right]_{-4}^{-2} &= \frac{-1}{(-2)} - 3\times(-2) - \left(\frac{-1}{(-4)} - 3\times(-4)\right)\\ &= \frac{1}{2}+6-\frac{1}{4}-12\\ &= \frac{-23}{4}\end{aligned}$$

— $$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{t}-t^2\right)\mathrm{d}t = \left[\ln(t)-\frac{t^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} &= \ln(1) - \frac{1}{3} - \left(\ln\left(\tfrac{1}{2}\right) - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}\right)\\ &= \frac{-1}{3} + \ln(2) + \frac{1}{24}\\ &= \frac{7}{24} + \ln(2)\end{aligned}$$

— $$\begin{aligned}\int_{-2}^{1} t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-2}^{1} &= \frac{1^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

3. Conséquences

— $\displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \big(= \mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(a)\big)$

— $\displaystyle\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(b) = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

B. Linéarité de l'Intégrale

1. Théorème

Soient f et g deux fonctions continues sur I et soit λ un réel. Pour tous réels a et b de I :

$$\int_a^b \big(f+g\big)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_a^b \lambda f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

a. Démonstration

Soient F et G des primitives de f et g. Alors $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ et $\lambda\mathrm{F}$ sont des primitives de $f+g$ et λf respectivement.

— $$\begin{aligned}\int_a^b \big(f+g\big)(t)\,\mathrm{d}t &= (\mathrm{F}+\mathrm{G})\,(t) - (\mathrm{F}+\mathrm{G})\,(t)\\ &= \mathrm{F}(b) + \mathrm{G}(b) - \mathrm{F}(a) - \mathrm{G}(a)\\ &= \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) + \mathrm{G}(b) - \mathrm{G}(a)\\ &= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

— $$\begin{aligned}\int_a^b \lambda f(t)\,\mathrm{d}t &= \lambda\mathrm{F}(b) - \lambda\mathrm{F}(a)\\ &= \lambda\,(\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a))\\ &= \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

C. Relation de Chasles

1. Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Quels que soient les réels a, b et c appartenant à I :

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$$

a. Démonstration

Soit F une primitive de f.

$$\begin{aligned}\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t &= \mathrm{F}(c) - \mathrm{F}(a)\\ &= \mathrm{F}(c) - \mathrm{F}(b) + \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)\\ &= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

2. Remarque

Dans le cas où f est positive et $a \leqslant b \leqslant c$, la relation de Chasles traduit l'additivité des aires de deux domaines adjacents.

3. Exemple

Intégrale d'une fonction définie par morceaux :

$$\int_{-2}^5 f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{où} \quad f : x \mapsto |x| - 2 \qquad |x| \begin{cases} x \geqslant 0 : x \\ x < 0 : -x \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int_{-2}^5 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-2}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{-x^2}{2} - 2x\right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_0^5\\ &= 0 - 2 + \frac{5}{2} - 0 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

D. Positivité et Ordre

1. Théorème

Soit f une fonction continue sur I, et a et b deux réels de I tels que $a \leqslant b$

Si $\forall t \in \mathrm{I},\ f(t) \geqslant 0$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

a. Démonstration

Dans le cas d'une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire sous la courbe représentative de f entre a et b, elle est positive.

2. Théorème

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b deux réels tels que $a \leqslant b$

Si $\forall t \in \mathrm{I},\ f(t) \leqslant g(t)$:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

a. Démonstration

$g - f$ est positive sur I donc :

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \left(g - f\right)(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0 \\
\iff \quad & \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0 \\
\iff \quad & \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

III. Valeur Moyenne d'une Fonction Continue

A. Valeur Moyenne

1. Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$, avec $a < b$, la valeur moyenne de la fonction f sur $[a\,;b]$ est le nombre μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Remarque

Interprétation dans le cas d'une fonction positive :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mu(b-a)$$

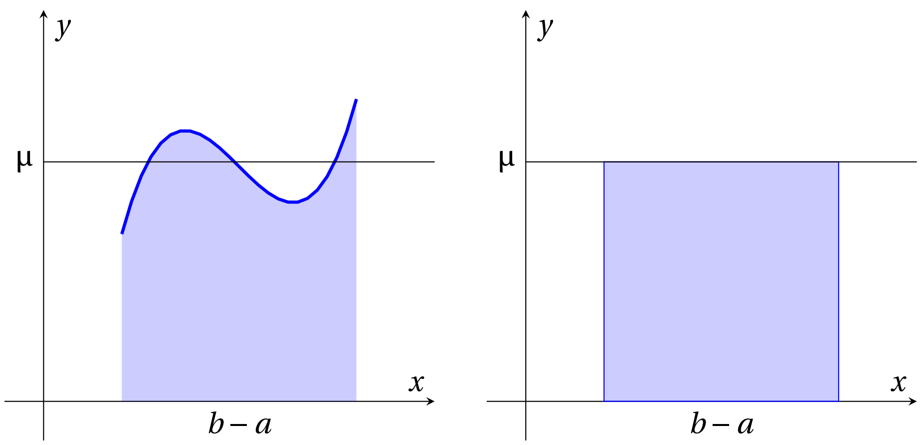

Figure 16.2. – Interprétation Graphique de la Valeur Moyenne pour une Fonction Positive

μ est la hauteur du rectangle de largeur $b-a$ dont l'aire est la même que celle du domaine situé en sous la courbe $\mathscr{C}_f$ entre a et b.

B. Inégalité de la Moyenne (encadrement « grossier » de l'intégrale)

1. Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$, $a<b$ et m et M deux réels tels que $\forall x \in [a\,;b],\ m \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}$

On a donc :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}(b-a)$$

a. Démonstration

$$\begin{aligned} & m \leqslant f(t) \leqslant \mathrm{M} \\ \iff \quad & [mx]_a^b \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant [\mathrm{M}x]_a^b \quad \text{(positivité de l'intégrale)} \\ \iff \quad & m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}(b-a) \quad \square \end{aligned}$$

2. Remarques

Interprétation en cas d'une fonction positive : L'aire de la courbe $\mathscr{C}_f$ est comprise entre les aires des rectangles de longueur $b-a$ et de hauteurs respectives m et M.

Encadrement de la valeur moyenne :

$$\begin{aligned} & m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}(b-a) \\ \iff \quad & m \leqslant \frac{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}{b-a} \leqslant \mathrm{M} \\ \iff \quad & m \leqslant \mu \leqslant \mathrm{M} \end{aligned}$$

IV. INTÉGRATION PAR PARTIES

A. PROPRIÉTÉ

Soient u et v deux fonction dérivables telles que leurs dérivées u' et v' sont continues sur un intervalle $[a\,;b]$. Alors :

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)\,v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)$$

1. DÉMONSTRATION

Pour toute fonction f dérivable dont la dérivée f' est continue sur $[a\,;b]$:

$\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a) = \big[f(x)\big]_a^b$ En effet, f est un primitive de f'.

Ainsi :

$$\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)\,v(x)\big]_a^b$$

Or :

$$\begin{aligned}\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(linéarité)}\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} & \big[u(x)\,v(x)\big]_a^b = \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x \\ \iff \quad & \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)\,v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x \quad \square\end{aligned}$$