Comment Approcher Toute Fonction par un Polynôme ?

Diego Van Overberghe

4 juin 2021

I. Pourquoi avons nous besoin de faire l'approximation de fonctions par des polynômes ? (1 min)

L'exemple en physique : approximation des fonctions trigonométriques sinus et tangente, par le polynôme x.

« Si $\theta < 15°$ On peut dire que $\tan(\theta) \approx \theta$ » – p. 467 Manuel Physique-Chimie

L'effet de remplacer les $\tan(\theta)$ par des θ permet d'alléger grandement la notation, et de plus facilite l'analyse, telle que le calcul de fonction dérivée, par exemple.

NB : Il ne s'agit pas de simplement remplacer les fonctions entières par des simplifications polynomiales, car l'approximation n'est pas valable sur un intervalle large. On utilise donc ce rapprochement uniquement si l'on analyse l'évolution d'une variable sur un domaine restreint.

Ceci mène naturellement à la question de pourquoi et comment développe-t-on des polynômes qui se rapprochent d'une fonction donnée, et pourquoi cette approximation n'est elle valable que sur un petit intervalle ?

II. La recherche d'une approximation pour la fonction sinus (2 min)

On cherche a faire l'approximation de la fonction sinus proche de zéro.

La fonction sinus est une fonction paire (symétrie par rapport a l'origine du repère), 2π-periodique (se répète tout les 2π) et sa représentation graphique est sinusoidale (vague).

Commençons en cherchant quelques polynômes qui dont l'image en zéro est égal à l'image de zéro par la fonction sinus.

$$\sin(0) = 0 \quad \text{donc, on cherche} \quad f : 0 \mapsto 0$$

Plusieurs candidats existent : $g : x \mapsto 0$ (la fonction constante) ou $h : x \mapsto x$, voire même $j : x \mapsto x^2 + x$

Pour sélectionner la meilleure fonction, on évalue la dérivée des candidats. Le nombre dérivé donne des informations sur la rapidité de l'évolution d'une fonction en un point.

On cherche donc un polynôme dont le nombre dérivé en zéro est égal au nombre dérivé de la fonction sinus en zéro $\sin'(0) = 1$. $g'(0) = 0$:

$$h'(0) = 1 \quad \text{et} \quad j'(0) = 1$$

Nous avons donc éliminé la fonction constante. On va répéter ce processus, en cherchant une fonction dont la dérivée seconde en 0 $\sin''(0) = -\sin(0) = 0$:

$$h''(0) = 0 \quad \text{et} \quad j''(0) = 2$$

Nous voyons donc qu'ici que $g : x \mapsto x$ semble être une bonne approximation de $\sin(x)$ près de zéro. Cette fonction est paire, tout comme la fonction sinus.

III. Généralisation : La série de Taylor (2 min)

On peut généraliser la technique utilisée auparavant pour approcher sinus. L'opération consiste en trouvant un polynome dont les nombres dérivés succéssifs sont identiques à ceux de notre fonction cible. Par conséquance, la fonction que l'on souhaite approcher doit etre infiniment dérivable.

La dérivation annule les termes constants d'une expression. On utilise cette propriété de la dérivation pour construire une fonction à partir de nombres dérivés succéssifs.

Soit g une approximation de f, et f^n la n-iéme dérivée de f :

$$g(x) = f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)x^2}{2} + \cdots$$

Ou, avec la notation sigma :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)x^n}{n!}$$