

Chapitre VII

Limites de Suites

I. SUITES MAJORÉES, MINORÉES ET BORNÉES

A. DÉFINITIONS

- Une suite (u_n) est *majorée* s'il existe un réel M tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$
- Une suite (u_n) est *minorée* s'il existe un réel m tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$
- Une suite est *bornée* si elle est majorée et bornée

B. EXEMPLE

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ est minorée par 0, mais aussi par tout nombre négatif.

Elle est majorée par 1 (qui est aussi son maximum) et par tout nombre supérieur à 1. Elle est donc bornée.

II. DÉFINITIONS

A. LIMITE INFINIE

1. DÉFINITION

Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ si, quel que soit le réel M , l'intervalle $]M; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Autrement dit, pour tout réel M , on peut trouver un rang n tel que :

$$\forall n \geq N, \quad u_n > M$$

A partir du rang N , tous les termes sont supérieurs à M .

On note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

On peut dire que la suite diverge vers $+\infty$.

H.P. : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n > M)$

2. DÉFINITION

Une suite (u_n) a pour limite $-\infty$, si, quel que soit le réel m , l'intervalle $] -\infty ; m [$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Autrement dit, pour tout réel m , on peut trouver un rang N tel que :

$$\forall n \geq N, \quad u_n < m$$

A partir du rang N , tous les termes sont inférieurs à m .

On note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

On peut dire que la suite diverge vers $-\infty$.

$$\text{H.P. : } \forall m \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies u_n < m)$$

3. THÉORÈME

$$\begin{array}{ll} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty & \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty & p \in \mathbb{N}^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n - n^2 = -\infty & \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty \end{array}$$

4. RAPPELS

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \dots \quad \text{signe}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0 \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \text{on compare à 1}$$

$$\text{Cas où } u_n = f(n), \text{ par exemple : } u_n = \sqrt{n^2 + n - 3} \quad \text{on étudie } f.$$

A. ARITHMÉTIQUE

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \text{alors} \quad u_n = u_0 + nr \quad (u_n = u_p + (n - p)r)$$

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n + 1)$$

B. GÉOMÉTRIQUE

$$u_{n+1} = qu_n \quad \text{alors} \quad u_n = u_0 \times q^n \quad (u_n = u_p \times q^{n-p})$$

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

B. LIMITES FINIES / SUITES CONVERGENTES1. DÉFINITION

Une suite (u_n) *converge* vers un réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Autrement dit, on peut trouver un rang N à partir duquel tous les termes de la suite sont aussi près que l'on veut de ℓ .

On dit que ℓ est la *limite* de la suite (u_n) et que la suite est *convergente*.

On note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

$$\text{H.P. : } \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[)$$

2. THÉORÈME

$$\begin{array}{ll} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 & p \in \mathbb{N}^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0 & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \end{array}$$

3. DÉFINITION

Une suite qui n'est pas convergente est *divergente*.

4. EXEMPLE

La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ est divergente.

III. PROPRIÉTÉS SUR LES LIMITES

A. THÉORÈMES DE COMPARAISON

1. THÉORÈME

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$:

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

2. DÉMONSTRATION

On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Soit $M > 0$, il existe un rang N , à partir duquel si $n \geq N_1$, alors $u_n \geq M$.

Or, il existe un rang N_2 , à partir duquel $n > N_2$, $v_n \geq u_n$.

Donc, il existe un rang $N = \max(N_1 ; N_2)$ à partir duquel $v_n \geq u_n > M$ donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \quad \square$$

3. THÉORÈME DIT « DES GENDARMES » (THÉORÈME D'ENCADREMENT)

Soient (u_n) , (v_n) , et (w_n) trois suites telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$:

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$ où ℓ est un réel alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$$

4. EXEMPLE

Soit (u_n) définie par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$\iff \frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

D'après le Théorème des Gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

B. CONVERGENCE MONOTONE1. THÉORÈME ADMIS

Toute suite croissante et majorée converge vers une limite finie.

Toute suite décroissante et minorée converge vers une limite finie.

2. THÉORÈME

Soit une suite (u_n) croissante et qui converge vers un réel ℓ , alors (u_n) est majorée par ℓ .

A. DÉMONSTRATION PAR L'ABSURDE

On suppose que (u_n) est croissante.

1. LEMME

Si (u_n) est croissante, si p et n sont deux entiers naturels tels que $p \leq n$.

Alors, $u_p \leq u_n$.

2. DÉMONSTRATION DE LA LEMME PAR RÉCURRENCE

— Initialisation : On fixe p donc $u_p \leq u_{p+1}$.

— Hérédité : On suppose que $k \geq 1$, $u_p \leq u_{p+k}$.

$$u_p \leq u_{p+k} \implies u_p \leq u_{p+k} \leq u_{p+k+1} \quad \square$$

On suppose $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $u_{n_0} > \ell$.

Or tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Prenons l'intervalle ouvert $]a; b[$ tel que $\ell < b < u_{n_0}$.

Il existe un indice $p > n_0$ tel que $u_p \in]a; b[$

(Ils y sont tous à partir d'un certain rang !)

Donc, $u_p < b < u_{n_0}$, ce qui impossible car (u_n) est croissante et d'après la lemme, $p > n_0 \implies u_p \geq u_{n_0}$.

C'est absurde, donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell$. \square

3. THÉORÈME

Toute suite croissante et non-majorée diverge vers $+\infty$

Toute suite décroissante et non-minorée diverge vers $-\infty$

A. DÉMONSTRATION

Soit M un réel, et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite croissante, non-majorée.

Il existe un rang N tel que $u_N > M$

Donc, (u_n) diverge vers $+\infty$

— Si (u_n) admettait une limite finie, d'après le théorème de croissance,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \implies \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell$$

(u_n) est majorée par ℓ , c'est une contradiction. \square

— Soit $M \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite non-majorée, donc, $\exists n_0, u_{n_0} > M$

D'après la lemme : (u_n) croissante, $p, n \in \mathbb{N}, p \leq n \implies u_p \leq u_n$

$\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0} > M$

Donc, tous les termes à partir de n_0 sont supérieurs à M . D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

C. RAPPEL : LIMITE DE (q^n) OÙ $q \in \mathbb{R}$ 1. THÉORÈME

— Si $q > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

— Si $q = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$

— Si $-1 < q < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

— Si $q < -1$, la suite diverge.

IV. OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admettant des limites finies ou infinies.

A. SOMME

$\lim v_n$	$\lim u_n$		
	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI.
$-\infty$	$-\infty$	FI.	$-\infty$

FIGURE 7.1. – Tableau des Limites de Sommes de Suites

FI. : Forme Indéterminée, il faut faire un calcul pour lever l'indétermination

1. EXEMPLE

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = n^2 - n$ FI.

$= n(n-1)$ On a levé l'indétermination

$$\underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} -n = -\infty}_{\text{FI.}} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n-1 = +\infty$$

Donc, par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(n+1) = +\infty$

et donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

B. PRODUIT

$\lim v_n$	$\lim u_n$			
	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\ell \times \ell'$	0	$\pm\infty$ selon signe ℓ'	$\pm\infty$ selon signe ℓ'
0	0	0	FI.	FI.
$+\infty$	$\pm\infty$ selon signe ℓ	FI.	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$ selon signe ℓ	FI.	$-\infty$	$+\infty$

FIGURE 7.2. – Tableau des Limites de Produits de Suites

1. EXEMPLE

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $u_n = n$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

$u_n \times v_n = n \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$ or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = +\infty$

2. EXEMPLE 2

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $u_n = n^2$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $v_n = \frac{1}{n} - 4$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -4$ (Somme)

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = -\infty$

C. QUOTIENT

$\lim v_n$	$\lim u_n$			
	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$ selon signe ℓ'	$\pm\infty$ selon signe ℓ'
0	$\pm\infty$ selon signe ℓ et 0	FI.	$\pm\infty$ selon signe 0	$\pm\infty$ selon signe 0
$+\infty$	0	0	FI.	FI.
$-\infty$	0	0	FI.	FI.

FIGURE 7.3. – Tableau des Limites de Quotients de Suites

1. EXEMPLE

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $u_n = \frac{1}{n^2-3}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (Somme)

Donc, par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

V. LIMITE DE SUITE ET CONTINUITÉ

A. THÉORÈME

Soit f une fonction *continue* sur un intervalle I et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite qui converge vers un réel ℓ , telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$, $\ell \in I$, alors, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

1. EXEMPLE

Soit la suite (u_n) , définie par $u_n = \frac{4n}{n+1}$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$

Donc, la suite (v_n) , définie par $v_n = \sqrt{u_n}$ converge vers $\sqrt{4} = 2$.

B. THÉORÈME

Soit f une fonction *continue* sur un intervalle I , telle que $f(I) \subset I$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$

Si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ , alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
On peut dire que ℓ est un point fixe de f .

1. DÉMONSTRATION

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = f(\ell)$$

2. REMARQUE

Graphiquement, les termes de la suite se rapprochent du point d'intersection \mathcal{C}_f et la droite d'équation $y = x$. Uniquement si la suite converge !

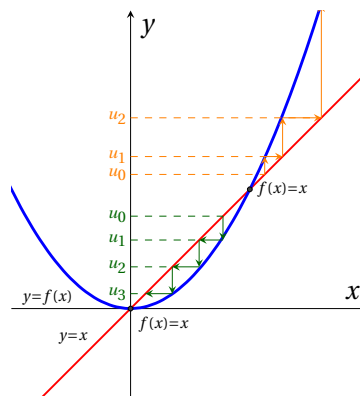


FIGURE 7.4. – Représentation Graphique de la Convergence d'une Suite

Ici, lorsque u_0 est supérieur au deuxième point fixe de f , la suite diverge.