

# Chapitre I

## Suites : La Démonstration par Récurrence

### I. EXEMPLE

On considère la suite  $(u_n)$ , définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par  $u_n = 4^n - 1$  :

$$(u_n) = \{ 0 ; 3 ; 15 ; 63 ; 255 ; \dots \}$$

On remarque que tous ces nombres sont des multiples de 3. On se demande si  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $4^n - 1$  est un multiple de 3.

### II. AXIOME DE RÉCURRENCE

Soit  $P(n)$ , une propriété dépendante de l'entier naturel  $n$ .

Si :

$$\begin{cases} P(0) \text{ est vraie (Initialisation)} \\ \forall k \in \mathbb{N}, P(k) \text{ vraie} \implies P(k+1) \text{ vraie (hérédité)} \end{cases}$$

Alors :  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel.

Reprenons notre exemple. La propriété : «  $4^n - 1$  est un multiple de 3 », est vraie pour  $n = 0$ . La propriété est donc initialisée.

Hérédité : Supposons que la propriété est vraie à un certain rang  $k$ , (fixe).

C'est l'hypothèse de la récurrence, et montrons qu'alors, elle est vraie au rang  $k + 1$ .

L'Hypothèse de récurrence est donc : «  $4^n - 1$  est un multiple de 3 ». C'est-à-dire qu'il existe un entier  $p$  tel que  $4^n - 1 = 3p$  et donc  $4^n = 3p + 1$ .

$$\begin{aligned} 4^{k+1} - 1 &= 4 \times 4^k - 1 \\ &= 4 \times (3p + 1) - 1 \quad (\text{Hypothèse de récurrence}) \\ &= 12p + 4 - 1 \\ &= 12p + 3 \\ &= 3(4p + 1) \quad (\text{Il s'agit bien d'un multiple de 3}) \end{aligned}$$

Donc, la propriété est héréditaire.

On a démontré par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $4^n - 1$  est un multiple de 3.