Université de Strasbourg
M1 - Optimisation
Année 2022-2023

TP 1 : Optimisation sans contrainte

Exercice 1 (énergie rayonnante d'un corps noir)**.** L'énergie rayonnante d'un corps noir dans l'intervalle d'émission $[\lambda, \lambda + d\lambda]$, par unité de surface et de temps, est appelée émittance monochromatique maximale du corps noir et est notée $M(\lambda)$. Sa valeur, exprimée en Wb/m^2, est donnée par la loi de Planck :

$$M(\lambda) = \frac{2\pi h C_0^2}{n^2 \lambda^5} \frac{1}{\exp(\frac{hC_0}{nkT\lambda}) - 1}.$$

Les constantes intervenant dans cette loi sont

- $C_0 \approx 2.997 \times 10^8 m/s$: vitesse de la lumière dans le vide.
- $h \approx 6.625 \times 10^{-34} J.s$: constante de Planck.
- $k \approx 1.380 \times 10^{-23} J/K$: constante de Boltzmann.
- λ : longueur d'onde (m).
- T : température absolue de la surface du corps noir (K).
- $n = 1$: indice de réfraction du milieu (ici le vide).

1. Tracer sur un même graphique la fonction $\lambda \mapsto M(\lambda)$ pour les valeurs suivantes de T (K) : $300, 350, 400, 450, 500, 550, 600, 650, 700, 750, 800$. Associer chaque courbe tracée à la valeur de T correspondante. On prendra $\lambda \in [10^{-7}, 2 \times 10^{-5}]$.
2. On souhaite trouver la valeur λ^* de λ qui maximise l'émittance monochromatique pour une température de surface T donnée. À quelle contrainte est-on soumis si l'on souhaite utiliser la méthode de la section dorée ?
   Programmer alors cette méthode pour déterminer λ^* suivant les différentes valeurs de T.
3. Vérifier les lois de Wien : $\lambda T = A$ et $M(\lambda) = RT^5$, où A et B désignent des constantes.

Exercice 2 (méthodes de type gradient pour des fonctions quadratiques)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans tout l'exercice, on désignera par $\langle\, , \rangle_{\mathbb{R}^n}$ le produit scalaire associé à la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$. On considère la matrice $A \in \mathbb{S}^n(\mathbb{R})$ et le vecteur $b \in \mathbb{R}^n$ définis par

$$A_n = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & & \\ -2 & 4 & -2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -2 & 4 & -2 \\ & & & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad b_n = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

On cherche à minimiser la fonction

$$J_n(x) = \frac{1}{2}\langle A_n x, x\rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle b_n, x\rangle_{\mathbb{R}^n}$$

définie sur $\mathbb{R}^n$, à l'aide de méthodes du gradient.

1. Représenter J_n dans le cas $n = 2$ sur le pavé $[-10, 10]$. On pourra créer une fonction `A(n)`, `b(n)`, une fonction `Jn(A,b,x)` puis une fonction `gradJn(A,b,x)`. Il sera intéressant d'exploiter le format creux de la matrice A afin de diminuer les temps de calcul (utiliser la fonction `scipy.sparse.diags` pour assembler la matrice).

2. Vérifier numériquement, pour certaines valeurs de n que A_n est définie positive, puis déterminer la solution du problème dans le cas $n = 2$.

3. Nous allons étudier deux méthodes de type gradient.

   a) La méthode du gradient à pas constant. Écrire une fonction dont les arguments sont la fonction `J`, son gradient `gradJ`, `s` (le pas de la méthode) et `x0` (l'initialisation), mettant en oeuvre l'algorithme du gradient à pas fixe. Expliquer brièvement pourquoi il est important de choisir le pas fixe, ni trop grand, ni trop petit.

   b) La méthode du gradient à pas optimal. Écrire une fonction dont les arguments sont la fonction `J`, son gradient `gradJ` et `x0` (l'initialisation), mettant en oeuvre l'algorithme du gradient à pas optimal. On pourra, au choix, utiliser la formule du pas optimal calculée en cours ou la méthode de la section dorée pour déterminer le pas optimal.

4. Appliquer les deux méthodes précédentes (on pourra utiliser `J=lambda x:Jn(A,b,x)` et `gradJ=lambda x:gradJn(A,b,x)` pour particuliser les fonction précédentes). Présentation des résultats :

   a) pour $n = 2$, afficher sur une même figure les courbes de niveau de Jn et son gradient (champ de vecteur). Tracer sur la même figure les lignes qui relient les itérés x_k des méthodes de gradient à pas constant et à pas optimal.

   b) pour n prenant les valeurs $10, 20, 30, 50, 100$, tester chacune des deux méthodes et comparer à l'aide d'un graphique et/ou d'un tableau, la rapidité de convergence de chacune de ces méthodes. Commenter les résultats obtenus.

Exercice 3 (Fonction de Rosenbrock)**.** On définit la fonction de Rosenbrock, également appelée Rosenbrock banana, par

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + 10(x^2 - y)^2.$$

1. Étude théorique.

   a) Trouver les points critiques de f et démontrer que f admet un unique minimum global qu'elle atteint en $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$.

   b) Déterminer $\nabla^2 f(\bar{x}, \bar{y})$, puis calculer son conditionnement (on pourra utiliser `np.linalg.cond`). Rappeler la signification de cette quantité.

2. Étude Numérique. Programmer la recherche du minimum de la fonction f dans $\mathbb{R}^2$ à l'aide de la méthode de gradient à pas constant puis à pas optimal développé dans l'exercice précédent. Tracer les lignes de niveaux de f, les itérés pour chaque méthode et commenter les résultats obtenus.