

LÓGICA

ENUNCIADO.- Se llama enunciado a toda frase u oración. Algunos enunciados son mandatos o interrogaciones o son expresiones de emoción; otros en cambio son afirmaciones o negaciones que tienen las características de ser verdaderos o falsa

EJEMPLO

01. ¿Qué asignatura te has matriculado?

02. ¡Vaya rápido!

03. ¡Viva el Perú!

04. Prohibido hacer bulla

05. Todas las gallinas son aves

06. París es capital de Francia

07. $5 > 8$

08. $x^2 + y^2 < 9$

09. $x^2 < 4y$

OBSERVACIÓN: Los enunciados que expresan una exclamación, una interrogante, una emoción; con expresiones no proposicionales, tales como los ejemplos 1, 2, 3 y 4.

PROPOSICIÓN: Llamamos proposición a todo enunciado que tiene la cualidad de ser VERDADERA (V) o de ser FALSA (F), pero nunca puede ser V y F a la vez. La proposición es un elemento fundamental de la lógica matemática.

Los ejemplos: 5, 6 y 7 son proposiciones.

Los ejemplos: 8 y 9 son enunciados abiertos

NOTACIÓN:

- Denotaremos a las proposiciones con las letras minúsculas. p, q, r, s, t . Si son muchas proposiciones, entonces usaremos subíndices, tales como:

- $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$

- $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$

- $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$

EJEMPLO DE PROPOSICIONES:

p: dos mas tres, es igual a cinco

q: ocho es menor que tres

r: cinco es diferente de cero

s: cuatro multiplicado por tres, es igual a doce.

t: cuatro y diez son múltiplos de dos

u: 2 de menor que 3 y 3 es múltiplo de 5

Como podemos observar:

p es V

q es F

r es V

s es V

t es V

u es F

ENUNCIADOS ABIERTOS:

Son expresiones que contienen variables y que no tienen la propiedad de ser verdadero o falso.

Ejemplo 1.

$P(x) : "x < 6"$ es un enunciado abierto porque no podemos afirmar que es V o F, sólo cuando la variable “x” toma un valor numérico se hace V o F

Ejemplo 2

$y = \sqrt{x - 2}$ es un número real, si el número real $x - 2$ es positivo o cero.

Es decir, el recorrido de “x” es $x \geq 2$

Ejemplo 3

En la ecuación: $x^2 + y^2 = 25$

El recorrido de x es: $-5 \leq x \leq 5$

El recorrido de y es: $-5 \leq y \leq 5$

Tabla de verdad

Una tabla de verdad, es la representación de los posibles valores de verdad que podría tomar una proposición.

Las tablas de verdad sirven para mostrar los valores, las relaciones y los resultados posibles al realizar operaciones lógicas.

PROPOSICIONES Y VALOR DE VERDAD

| p |
|---|
| V |
| F |

2^1

| p | q |
|---|---|
| V | V |
| V | F |
| F | V |
| F | F |

2^2

| p | q | r |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | V | F |
| V | F | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | V | F |
| F | F | V |
| F | F | F |

2^3

Las tablas de verdad son representaciones gráficas, en forma de arreglos, que sirven para analizar los posibles valores de verdad que puede tener una proposición simple o compuesta.

En general para “n” proposiciones, se pueden presentar 2^n posibilidades

Construcción de tablas de verdad

¿Cuántas filas tiene la tabla?

- | | | |
|------------------------------|---|---------------------|
| – 1 proposición | → | 2 valores (V o F) |
| – 2 proposiciones | → | 4 valores de verdad |
| – 3 proposiciones | → | 8 valores de verdad |
| – | | |
| – n proposiciones verdad. | → | 2^n valores de |

TIPOS DE PROPOSICIONES

```
graph TD; A[TIPOS DE PROPOSICIONES] --> B[Proposición simple:]; A --> C[Proposiciones compuestas:]; B --> D[Ej. Perú es un país latinoamericano.]; B --> E[Ej. No fui al trabajo.]; C --> F[Fui a clase y di la prueba.]; C --> G[El libro de lógica o es blanco o es azul.]; C --> H[Si gano el concurso, entonces trabajo.]; C --> I[Estudio en IESTPA si y solo si me esfuerzo.];
```

Proposición simple:

Ej. Perú es un país latinoamericano.

Ej. **No** fui al trabajo.

Proposiciones compuestas:

Fui a clase **y** di la prueba.

El libro de lógica **o** es blanco **o** es azul.

Si gano el concurso, **entonces** trabajo.

Estudio en IESTPA **si y solo si** me esfuerzo.

Formalización Lógica

Letras

p, q, r, s

Conectores

\wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow

**Signos de
agrupación**

(), [], { }

Letras

Perú está en latinoamérica **y** Lima es capital de Perú.

Perú está en latinoamérica : **p**

Lima es capital de Perú : **q**

Conectores u operadores lógicos. ?

- Principales conectores u operadores lógicos.
 - ☑ Negación
 - ☑ Conjunción
 - ☑ Disyunción
 - ☑ Condicional
 - ☑ Bicondicional

LA NEGACIÓN.- Es un tipo de proposición compuesta en la que se afirma que algo no existe, que no es verdad, o que no es como alguien cree o afirma. Para negar una proposición se le antecede el conectivo **no**, o equivalentes a él, cuyo símbolo es “ \sim ” ó \neg , y se llama *negador*.

Ejemplo: “Todo número elevado al cuadrado es positivo”
 p

Negación: “No todo número elevado al cuadrado es positivo”
 $\sim p$

Nota: Cuando se niega una proposición compuesta, se niega al operador de mayor jerarquía en dicha proposición.

Ejemplo: **No es cierto que** Pablo fue al banco **y** retiró el dinero
 q r

Simbología: $\sim(q \wedge r)$

TABLA DE VALORES DE VERDAD DE LA NEGACIÓN

| p | $\sim p$ |
|----------|----------|
| V | F |
| F | V |

Definición de Algunos Enunciados Compuestos

LA CONJUNCIÓN. - Es un enunciado compuesto en el que dos proposiciones se relacionan con el conectivo “ y “, cuyo símbolo es “ \wedge ” y se llama *conjuntor*.

Ejemplo: “ $\underbrace{\text{Jorge viajó a Madrid}}_p$ \wedge $\underbrace{\text{Luis viajó a Lima}}_q$ ”

p : Jorge viajó a Madrid

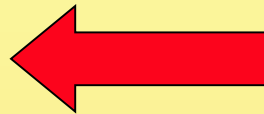
q : Luis viajó a Lima

Simbología: “ $p \wedge q$ ”

NOTA: También equivalen al conectivo conjunción las palabras: **pero, sin embargo, aunque, además, no obstante, etc.**

TABLA DE VALORES DE VERDAD DE LA CONJUNCIÓN

| p | \wedge | q |
|---|----------|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | F | V |
| F | F | F |



La conjunción sólo es verdadera cuando las dos proposiciones son verdaderas.

LA DISYUNCIÓN DÉBIL O INCLUSIVA. - Es un enunciado compuesto en el que dos proposiciones se relacionan con el conector “o”, cuyo símbolo es “ \vee ” y se llama *disyuntor*.

Ejemplo: “ $\underbrace{\text{Eliana viajará a Lima}}_{\mathbf{r}} \quad \mathbf{o} \quad \underbrace{\text{a Cusco}}_{\mathbf{s}}$ ”

\mathbf{r} : Eliana viajará a Lima

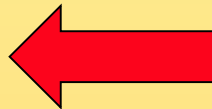
\mathbf{s} : Eliana viajará a Cusco

Simbología: “ $\mathbf{r} \vee \mathbf{s}$ ”

TABLA DE VALORES DE VERDAD DE LA DISYUNCIÓN DÉBIL

| p | v | q |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | V | F |
| F | V | V |
| F | F | F |

La disyunción es falsa, sólo si ambas proposiciones son falsas



LA DISYUNCIÓN FUERTE O EXCLUSIVA.- Es un enunciado compuesto en el que dos proposiciones se relacionan con el conectivo “**O.....o.....**”, cuyo símbolo es “ **Δ** ” y se llama *disyuntor fuerte*.

Ejemplo: “**O** Ricardo radica en Abancay **o** en Tamburco”

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\mathbf{p}} \qquad \underbrace{\hspace{15em}}_{\mathbf{q}}$

p : Ricardo radica en Abancay

q : Ricardo radica en Tamburco

Simbología: “ **$p \Delta q$** ”

“ **$p \vee q$** ”

TABLA DE VALORES DE VERDAD DE LA DISYUNCIÓN FUERTE

| p | Δ | q |
|---|----------|---|
| V | F | V |
| V | V | F |
| F | V | V |
| F | F | F |

La disyunción fuerte es verdadera, sólo si ambas proposiciones tienen diferentes valores de verdad

La disyunción fuerte es falsa, sólo si ambas proposiciones tienen idénticos valores de verdad

EL CONDICIONAL.- Es un enunciado compuesto en el que dos proposiciones se relacionan con el conector “Si.....entonces.....”, cuyo símbolo es “ \rightarrow ” y se llama *implicador*.

Ejemplo: “Si $\underbrace{12 \text{ es un número par}}_p$ **entonces** $\underbrace{\text{es divisible entre 2}}_q$ ”

p : 12 es un número par (antecedente)

q : 12 es un número divisible entre 2(consecuente)

Simbología: “**p** \rightarrow **q**”

Notas:

- Existen otras formas de presentarse el condicional:
 p *por consiguiente* q ;
 p *luego* q ;
 p *de manera* q ; etc.
- También son expresiones condicionales:
 q *ya que* p ; q *puesto que* p ; q *siempre que* p ; q *porque* p ; etc.

Ejemplo

La suma de las cifras de 426 es múltiplo de 3, *por consiguiente* es divisible entre 3
(antecedente) p (consecuente) q

426 es divisible entre 3 *porque* la suma de sus cifras es múltiplo de 3
(consecuente) q (antecedente) p

La simbología para ambos casos es: $p \rightarrow q$

TABLA DE VALORES DE VERDAD DEL CONDICIONAL

| p | \rightarrow | q |
|---|---------------|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | V | F |



El condicional sólo es falso, cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

Hasta aquí

Proposiciones relacionadas con la condicional

$$p \rightarrow q$$

Variaciones de la condicional

➤ La **Recíproca**, es representada simbólicamente por:

$$q \rightarrow p$$

➤ La **Inversa**, es representada simbólicamente por:

$$\sim p \rightarrow \sim q$$

➤ La **Contrarrecíproca**, es representada simbólicamente por:

$$\sim q \rightarrow \sim p$$

Variaciones de la condicional

Una proposición puede ser reemplazada por su contrarrecíproca, sin que se afecte su valor de verdad, lo cual no se cumple con la recíproca o la inversa.

Variaciones de la condicional

A partir de la proposición:

“Si un número es divisible para 8, entonces es divisible para 2”.

La **Recíproca** sería:

“Si un número es divisible para 2, entonces es divisible para 8”.

La **Inversa** sería:

“Si un número no es divisible para 8, entonces no es divisible para 2”.

La **Contrarrecíproca** sería:

“Si un número no es divisible para 2, entonces no es divisible para 8”.

EL BICONDITIONAL. - Es un enunciado compuesto en el que dos proposiciones se relacionan con el conectivo “.....si y sólo si.....”, cuyo símbolo es “ \leftrightarrow ” llamado *doble implicador*.

Ejemplo: “Cuba es una isla **si y sólo si** está rodeada de agua”

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{p}} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{q}}$

p : Cuba es una isla

q : Cuba está rodeada de agua

Simbología: “**p** \leftrightarrow **q**”

TABLA DE VALORES DE VERDAD DEL BICONDICIONAL

| p | \leftrightarrow | q |
|---|-------------------|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | F | V |
| F | V | F |

El bicondicional es verdadero, sólo si ambas proposiciones poseen idénticos valores de verdad

El bicondicional es falso, sólo si ambas proposiciones poseen diferentes valores de verdad

TABLA RESUMEN

| Conector | Valor de verdad | Condición |
|-------------------|-----------------|--|
| \leftrightarrow | V | Si ambos tienen igual valor de verdad. |
| Δ | V | Si tienen valores diferentes de verdad. |
| \rightarrow | F | Si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso |
| \vee | F | Si ambos son falsos |
| \wedge | V | Si ambos son verdaderos |
| \sim | V | Si la proposición es falsa. |

Ejemplo

*Si llegas después de las ocho,
entonces encontrarás la puerta
cerrada **y** no podrás entrar al salón
de clases.*

$$p \rightarrow (q \wedge r)$$

Bicondicional

Se llama **bicondicional** de dos proposiciones p y q a la proposición “ p si y sólo si q ” representada por “ $p \leftrightarrow q$ ”

- Ejemplo :

p : “ Juan ingresa a la universidad”

q : “Juan estudia mucho”

Entonces:

$p \leftrightarrow q$: “Juan ingresa a la universidad si y sólo si estudia mucho”

TABLA DE VERDAD

“ $p \leftrightarrow q$ es verdadera si p y q son ambas verdaderas o ambas falsas”

| p | q | $p \leftrightarrow q$ |
|-----|-----|-----------------------|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

EJERCICIOS

Negación

Dada una proposición **p**, se llama negación de p a la proposición “no p” que se representa por **$\sim p$**

- Ejemplo :

Dado p : “el hombre es mortal”

Podemos decir:

$\sim p$: “no es cierto que el hombre es mortal”

Lo que equivale a decir :

$\sim p$: “el hombre no es mortal”

TABLA DE VERDAD

“Si p es verdadera $\sim p$ es falsa; si p es falsa , $\sim p$ es verdadera”

| p | $\sim p$ |
|---|----------|
| V | F |
| F | V |

Conjunción

Dadas las proposiciones p y q , se llama **conjunción** de p y q a la proposición “ p y q ” representada por $p \wedge q$

- Ejemplo :

Si p : “2 es mayor que 5”

y q : “todo número impar es primo”,

Entonces:

$p \wedge q$: “2 es mayor que 5 y todo número impar es primo”

TABLA DE VERDAD

“ $p \wedge q$ es verdadera si p y q son verdaderas simultáneamente”

| p | q | $p \wedge q$ |
|-----|-----|--------------|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

Disyunción

Dadas las proposiciones p y q , se llama disyunción de p y q a la proposición “ p o q ” que se representa por $p \vee q$.

- Ejemplo :

Si p : “hace frío en invierno”

y q : “Napoleón invadió Rusia”

Entonces :

$p \vee q$: “Hace frío en invierno o Napoleón invadió Rusia”

TABLA DE VERDAD

“ $p \vee q$ es verdadera si p es verdadera o q es verdadera”

| p | q | $p \vee q$ |
|-----|-----|------------|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

Condicional

Se llama **condicional** de p y q a la proposición “si p entonces q ” y se representa por “ $p \rightarrow q$ ”, p se llama antecedente y q consecuente del condicional $p \rightarrow q$

TABLA DE VERDAD

$p \rightarrow q$ es verdadera si p es falsa o q es verdadera “

- Ejemplo:

Si p : “2 es número primo”

y q : “5 es menor que 4”

Entonces:

$p \rightarrow q$: “si 2 es número primo entonces 5 es menor que 4”

| p | q | $p \rightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

Condicional o Implicación

Se lee:

Si P entonces Q

P implica Q

P es suficiente para Q

P sólo si Q

Q si P

Q siempre que P

Q es necesario para P

$$P \rightarrow Q$$

EVALUACION de una FORMULA LOGICA

- La *característica tabular de una fórmula lógica* es la columna de valores de verdad debajo del operador de mayor jerarquía. Esta columna puede presentar los siguientes casos:
 1. Cuando todos los valores de verdad son **verdaderos**, el esquema es una **TAUTOLOGÍA**.
 2. Cuando todos los valores de verdad son **falsos**, el esquema es una **CONTRADICCIÓN**.
 3. Cuando algunos valores de verdad son **verdaderos** y otros **falsos** el esquema es una **CONTINGENCIA**.

PRACTICA

EVALUACIÓN DE UNA FÓRMULA LÓGICA

Evaluar el siguiente esquema molecular: $(p \wedge q) \vee \sim(p \rightarrow \sim r)$

Solución

| p | q | r | (p ∧ q) ∨ ~ (p → ~ r) |
|---|---|---|--------------------------|
| V | V | V | V V V V V F F |
| V | V | F | V V V V F V V |
| V | F | V | V F F V V F F |
| V | F | F | V F F F F V V |
| F | V | V | F F V F F V F |
| F | V | F | F F V F F V V |
| F | F | V | F F F F F V F |
| F | F | F | F F F F F V V |

EJERCICIO de PRACTICA

Si se conoce que: $(q \wedge \sim r) \rightarrow p$ es FALSA

Determinar el valor de verdad de: $(\sim r \vee \sim p) \rightarrow (p \wedge \sim r)$

SOLUCIÓN

Primero analizamos la condición

| $(q \wedge \sim r)$ | \rightarrow | p |
|---------------------|---------------|-----|
| V V V F | F | F |

Luego de conocer los valores de verdad de cada variable, se evalúa la fórmula planteada

| $(\sim r \vee \sim p)$ | \rightarrow | $(p \wedge \sim r)$ |
|------------------------|---------------|---------------------|
| V V V | F | F F V |

El valor de verdad de la fórmula planteada es **FALSO**

PAUSA

Expresión en el lenguaje natural

Ejemplo

Símbolo para el curso

no

No está lloviendo.

$\sim p$

Y , ni, pero, que

Está lloviendo **y** está nublado.

\wedge

o

Está lloviendo **o** está soleado.

\vee

si... Entonces,
...luego..

Si está soleado,
entonces es de día.

\rightarrow

si y sólo si

Está nublado **si y sólo si** hay nubes visibles.

\leftrightarrow

ni... ni

Ni está soleado **ni** está nublado.

\downarrow

o bien... o bien

O bien está soleado, **o bien** está nublado.

\neq