KU LEUVEN kulak

Bachelor Informatica
Numerieke Wiskunde
Koen Van Den Abeele / Nithin Govindarajan

Practicum: De Warmtevergelijking

Academiejaar 2021 – 2022

Dieter Demuynck

Inleiding

De warmtevergelijking is een redelijk gekende vergelijking. Hij kan worden geschreven als

$$\frac{\partial u(\vec{x},t)}{\partial t} = \alpha \Delta u(\vec{x},t) \tag{1}$$

waarbij $u(\vec{x},t)$ de temperatuurverdeling op een positie $\vec{x} \in \Omega$ met Ω een domein, een tijdsinterval $t \in [0,T]$, de diffusiviteit en Δ de Laplaciaan is. Deze vergelijking wordt gebruikt om de diffusie van warmte in de ruimte en tijd te berekenen aan de hand van begin- en randvoorwaarden.

1 Warmtevergelijking in 1D

De één-dimensionale warmtevergelijking $u(x,t)$ kan gebruikt worden om de warmte te berekenen in simpele objecten, zoals een staaf. Om deze warmtevergelijking op te stellen, wordt de wet van Fourier gebruikt. De wet van Fourier beweert dat de snelheid van de stroming van warmte per oppervlakte-eenheid $\vec{q}$, een vectorveld, door een oppervlakte proportioneel is met min de gradiënt van de warmteverdeling $u(\vec{x},t)$. Dit geeft de vergelijking

$$\vec{q} = -k\nabla u \tag{2}$$

waarbij k de thermische geleidbaarheid is. In een één-dimensionaal stelsel wordt de positie voorgesteld door 1 coördinaat x, waardoor $q(x,t)$ een scalair veld wordt en de gradiënt $\nabla u(x,t)$ simpelweg een afgeleide naar x wordt. Dus wordt de vergelijking

$$q = -k\frac{\partial u}{\partial x} \tag{3}$$

We definiëren nu ook de functie $Q(x,t)$ dat de interne warmte energie per eenheid volume van de staaf beschrijft op elk punt x op tijdstip t. Wanneer er geen warmte wordt toegevoegd aan het systeem, is de snelheid van de verandering van de interne warmte energie per volume-eenheid Q proportioneel met de snelheid van de verandering van de temperatuur u. Wanneer van een constante dichtheid en warmte capaciteit wordt uitgegaan, geldt dat

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = c\rho\frac{\partial u}{\partial t} \tag{4}$$

waarbij c de specifieke warmte capaciteit en ρ de dichtheid van het materiaal. Wanneer hierop de wet van behoud van energie wordt toegepast op een klein gebied rond elk punt x, concludeert men dat de afgeleide van Q naar t gelijk is aan min de afgeleide van q naar x. In symbolen:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} \tag{5}$$

waaruit volgt dat

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{c\rho}\frac{\partial q}{\partial x} \\ &= -\frac{1}{c\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ &= \frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\end{aligned} \tag{6}$$

Stellen we $\alpha = \frac{k}{c\rho}$ geeft dit de warmtevergelijking in 1 dimensie

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{7}$$

Hierbij noemt α de warmtediffusiviteit.

Besluit

Afsluitende tekst.