

Practicum: De Warmtevergelijking

Academiejaar 2021 – 2022

Dieter Demuynck

Inleiding

De warmtevergelijking is een redelijk gekende vergelijking in de fysica. Hij kan worden geschreven als

$$\frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial t} = \alpha \Delta u(\vec{x}, t) \quad (1)$$

waarbij $u(\vec{x}, t)$ de temperatuurverdeling op een positie $\vec{x} \in \Omega$ met Ω een domein, een tijdsinterval $t \in [0, T]$, de diffusiviteit en Δ de Laplaciaan is. Deze vergelijking wordt gebruikt om de diffusie van warmte in de ruimte en tijd te berekenen aan de hand van begin- en randvoorwaarden.

1 Warmtevergelijking in 1D

1.1 De vergelijking opstellen

De één-dimensionale warmtevergelijking $u(x, t)$ kan gebruikt worden om de warmte te berekenen in simpele objecten, zoals een staaf. Om deze warmtevergelijking op te stellen, wordt de wet van Fourier gebruikt. De wet van Fourier beweert dat de snelheid van de stroming van warmte per oppervlakte-eenheid \vec{q} , een vectorveld, door een oppervlakte proportioneel is met min de gradiënt van de warmteverdeling $u(\vec{x}, t)$. Dit geeft de vergelijking

$$\vec{q} = -k \nabla u \quad (2)$$

waarbij k de warmtegeleidingscoëfficiënt is. In een één-dimensionaal stelsel wordt de positie voorgesteld door 1 coördinaat x , waardoor $q(x, t)$ een scalair veld wordt en de gradiënt $\nabla u(x, t)$ simpelweg een afgeleide naar x wordt. Dus wordt de vergelijking

$$q = -k \frac{\partial u}{\partial x}$$

We definiëren nu ook de functie $Q(x, t)$ dat de interne warmte energie per eenheid volume van de staaf beschrijft op elk punt x op tijdstip t . Wanneer er geen warmte wordt toegevoegd aan het systeem, is de snelheid van de verandering van de interne warmte energie per volume-eenheid Q proportioneel met de snelheid van de verandering van de temperatuur u . Wanneer van een constante dichtheid en warmte capaciteit wordt uitgegaan, geldt dat

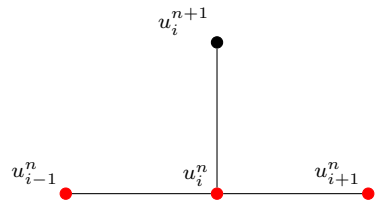
$$\frac{\partial Q}{\partial t} = c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3)$$

waarbij c de specifieke warmte capaciteit en ρ de dichtheid van het materiaal. Wanneer hierop de wet van behoud van energie wordt toegepast op een klein gebied rond elk punt x , concludeert men dat de afgeleide van Q naar t gelijk is aan min de afgeleide van q naar x . In symbolen:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}$$

waaruit volgt dat

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{c\rho} \frac{\partial q}{\partial x} \\ &= -\frac{1}{c\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= \frac{k}{c\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned}$$



Figuur 1: Stencil voor het berekenen van een waarde u_i^{n+1} op een volgend tijdstip met index $n+1$

Stellen we $\alpha = \frac{k}{c\rho}$ geeft dit de warmtevergelijking in 1 dimensie

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (4)$$

Hierbij noemt α de warmtediffusiviteit.

1.2 Expliciete numerieke simulatie

Om de één-dimensionale warmtevergelijking numeriek op te lossen zullen we gebruik maken van de formules voor voorwaartse differenties, en centrale differenties voor equidistante punten, elk voor de afgeleide in de tijd respectievelijk voor de (tweede) afgeleide in de ruimte. We gebruiken de notatie $u_i^n = u(x_i, t_n)$ waarbij $x_i = i\Delta x$ voor $i = 0, 1, \dots, N_x - 1$ en $t_n = n\Delta t$ waarbij $n = 0, 1, \dots, N_t - 1$. Hierbij is N_x en N_t het aantal waarden voor x resp. t . Dan geldt:

$$\partial_t u_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (5)$$

$$\partial_{xx} u_i^n = \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (6)$$

Deze formules zullen benaderend gelijk zijn na het weglaten van de termen binnenin de O-notatie. Die benaderende formules invullen in de warmtevergelijking 4 geeft dan:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} &\approx \alpha \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2} \\ \Leftrightarrow u_i^{n+1} &\approx \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} u_{i-1}^n + \left(1 - \frac{2\alpha \Delta t}{\Delta x^2}\right) u_i^n + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} u_{i+1}^n \end{aligned}$$

Stel $r = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$, dan is deze vergelijking makkelijker te schrijven als

$$u_i^{n+1} \approx r u_{i-1}^n + (1 - 2r) u_i^n + r u_{i+1}^n \quad (7)$$

Dit is een formule om de warmte op een punt x op volgend tijdstip te berekenen aan de hand van de warmte in het punt x , links van x en recht van x op het huidige tijdstip. Figuur 1.2 geeft een grafische voorstelling van deze bewerking onder de vorm van een stencil.

Deze recursieve formule kan worden genoteerd als een matrix matrixvermenigvuldiging

$$\begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0^n \\ \vdots \\ u_{N_x-1}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N_x-1}^{n+1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Hierbij is T een matrix waarbij de diagonaalelementen gelijk zijn aan $1 - 2r$ en alle elementen net

boven en onder de diagonaal zijn dan gelijk aan r . Alle andere elementen zijn gelijk aan nul.

$$\begin{bmatrix} T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2r & r & 0 & \dots & 0 \\ r & 1-2r & r & \dots & 0 \\ 0 & r & 1-2r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-2r \end{bmatrix} \quad (9)$$

Merk op dat er een probleem optreedt bij de randwaarden, waar $i = 0$ en $i = N_x - 1$. Om bijvoorbeeld u_0^{n+1} te berekenen, hebben we waarden nodig die buiten het toegelaten interval voor x liggen. Echter is dit geen probleem, aangezien deze elementen gekend zijn door de opgelegde randvoorwaarden en dus hoeven ze niet berekend te worden a.d.h.v. de recursieformule.

Besluit

Afsluitende tekst.