1 Матричная экспонента, ее свойства и применение к решению нормальных линейных систем

1.1 Матричная экспонента

Необходимо решить ОЛДУ вида:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x},\ \vec{x}(t_0) = \vec{x_0},$$

Если $A(t) = ||a_j^i||$, $a_j^i \in \mathbf{R}$, $i{,}j = 1, \ldots, n$, тогда:

$$\vec{x_0} = E\vec{x_0},\ \vec{x_1} = E\vec{x_0} + \frac{t-t_0}{1!}A\vec{x_0} = \left(E + \frac{t-t_0}{1!}A\right)\vec{x_0},$$

$$\vec{x_n} = \left(E + \frac{t-t_0}{1!}A + \ \ldots \ + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n\right)\vec{x_0},$$

Этот процесс будет сходиться к задаче Коши с решением:

$$\vec{x} = \left(E + \frac{t-t_0}{1!}A + \ \ldots \ + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n + \ \ldots\right)\vec{x_0} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n\right)\vec{x_0},$$

при условии, что $A^0 = E$.

Определение 1.1. *Матричной экспонентой называют следующий степенной ряд:*

$$e^{(t-t_0)A} = E + \frac{t-t_0}{1!}A + \ \ldots \ + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n + \ \ldots \ = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n.$$

1.2 Свойства матричной экспоненты

Это квадратная матрица, по размерам аналогична матрице A, и каждый элемент этой матрицы представляет из себя степенной ряд с радиусом сходимости $+\infty$.

1. Решение задачи Коши для (1.1), если $A = const$:

$$\vec{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{x_0},\ (\vec{x}(t_0) = \vec{x_0}).$$

2. $e^{0A} = E$.

3. $e^{(t_1+t_2)A} = e^{t_1A}e^{t_2A} \Rightarrow e^{t_1A}e^{t_2A} = e^{t_2A}e^{t_1A}$ (коммутативность).

4. $\left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}$.

5. $\left(e^{tA}\right)' = Ae^{tA} = e^{tA}A$.