0.1 Построение Жорданова базиса

Для характеристического многочлена справедливо разложение:

$$\frac{1}{P_n(\lambda)} = \frac{1}{(\lambda-\lambda_1)^{k_1}...(\lambda-\lambda_m)^{k_m}} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{k_1}\frac{A_l^i}{(\lambda-\lambda_i)^l},\ A_l^i \in \mathbb{R}$$

После сложения по внутренней сумме:

$$\frac{1}{P_n(\lambda)} = \frac{1}{(\lambda-\lambda_1)^{k_1}\cdot...\cdot(\lambda-\lambda_m)^{k_m}} = \frac{f_1(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)^{k_1}} + ... + \frac{f_s(\lambda)}{(\lambda-\lambda_s)^{k_s}} + ... + \frac{f_m(\lambda)}{(\lambda-\lambda_m)^{k_m}}$$

где $f_s(\lambda)$– многочлен степени не выше k_{s-1}, $s = \overline{1,m}$. Умножим на $P_n(\lambda)$:

$$1 = Q_1(\lambda) + ... + Q_m(\lambda)$$

$$Q_s(\lambda) = f_s(\lambda)\cdot\frac{P_n(\lambda)}{(\lambda-\lambda_s)^{k_s}} = f_s(\lambda)\cdot(\lambda-\lambda_1)^{k_1}\cdot...\cdot(\lambda-\lambda_{s-1})^{k_{s-1}}\cdot(\lambda-\lambda_{s+1})^{k_{s+1}}\cdot...\cdot(\lambda-\lambda_m)^{k_m} \quad (1)$$

Рассмотрим множество квадратных матриц одного порядка. Это множество является ассоциативным кольцом с единицей, поэтому

$$A^n \cdot A^m = A^{n+m} = A^m \cdot A^n;\ A^0 \overset{def}{=} E$$

Определено коммутативное и ассоциативное сложение матриц. Нулевую матрицу примем за ноль. Согласно свойствам умножения матриц на числа:

$$A^k \cdot \alpha = \alpha A^k,\ \alpha A^k + \beta A^k = (\alpha+\beta)A^k$$

Таким образом правила приведения подобных членов аналогично правилу для многочленов.

$$A^k + (-1\cdot A^k) = A^k + (-A^k) = 0$$

В качестве символа x в определении многочлена можно взять квадратную матрицу A и получить множество матричных многочленов $\{P_n(A)\}$

$$P_n(A) = a_0E + a_1A + ... + a_nA^n$$

На множестве $\{P_n(A)\}$ сложение и умножение определяются как обычные матричные действия, поэтому $\{P_n(A)\}$ является кольцом.

1. $P_n(A) + P_m(A) = P_m(A) + P_n(A)$
2. $(P_n(A) + P_m(A)) + P_s(A) = P_n(A) + (P_m(A) + P_s(A))$
3. $P_n(A)\cdot P_m(A) = P_m(A)\cdot P_n(A)$
4. $(P_n(A)\cdot P_m(A))\cdot P_s(A) = P_n(A)\cdot(P_m(A)\cdot P_s(A))$
5. $P_n(A)\cdot(P_m(A) + P_s(A)) = P_n(A)\cdot P_m(A) + P_n(A)\cdot P_s(A)$

За ноль в этом множестве принимается нулевая матрица.

Определение 0.1. *Отображение φ кольца K на кольцо K' называется гомоморфизмом, если $\forall a \in K$, $\forall b \in K$:*

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b);\ \varphi(ab) = \varphi(a)\cdot\varphi(b)$$

В отличие от изоморфизма гомоморфизм не обязательно является взаимно однозначным отображением, т.е. не предполагается, что образы K заполняют все кольцо K', и различным элементам из K соответствуют разные элементы из K'.

В силу определения множеств $\{P_n(A)\}$ и $\{P_n(\lambda)\}$, кольца $\{P_n(A)\}$ и $\{P_n(\lambda)\}$ гомоморфны:

$$\varphi : \varphi(P_n(\lambda)) \longrightarrow P_n(A)$$

Неоднозначность отображения φ возникает в силу того, что существуют такие квадратные матрицы $A \neq 0 : \exists n \in \mathbb{N} : A^m = 0 \ \forall m \geq n$.

Теорема 0.1 (Гамильтона-Кэли)**.** *Пусть $P_n(\lambda)-$ характерестический многочлен матрицы A, тогда $P_n(A) = 0$.*

В силу построения гомоморфизма между $\{P_n(A)\}$ и $\{P_n(\lambda)\}$ имеет место разложение:

$$P_n(A) = A^n + a_1 \cdot A^{n-1} + ... + a_o \cdot E = (A - \lambda_1 E)^{k_1} \cdot ... \cdot (A - \lambda_m E)^{k_m}$$

где $\lambda_1, ..., \lambda_m-$ корни $P_n(A)$.

Подействуем гомоморфизмом φ на (1) :

$$E = Q_1(A) + ... + Q_m(A)$$

$$Q_s(A) = f_s(A) \cdot (A - \lambda_1 E)^{k_1} \cdot ... \cdot (A - \lambda_{s-1})^{k_{s-1}} \cdot (A - \lambda_{s+1})^{k_{s+1}} \cdot ... \cdot (A - \lambda_m)^{k_m} \qquad (2)$$

$$Q_s(A) - \text{линейные преобразования}$$

Порядок сомножетелей в (2) не важен, т.к. матрицы $(A - \lambda_s E)$ такого вида перестоновочны между собой.

Рассмотрим $Q_i(A)$. Покажем, что $\forall i,\ j = \overline{1,m} \longmapsto$

$$Q_i(A) \cdot Q_j(A) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ Q_i^2, i = j \end{cases} \quad \text{и } Q_i(A) = Q_i^2(A) \qquad (3)$$

Доказательство. $Q_i(A) \cdot Q_j(A) = f_i(A) \cdot f_j(A) \cdot (A - \lambda_1 E)^{k_1} \cdot ... \cdot (A - \lambda_{i-1} E)^{k_{i-1}} \cdot (A - \lambda_{i+1} E)^{k_{i+1}} \cdot ... \cdot (A - \lambda_m E)^{k_m} \cdot (A - \lambda_1 E)^{k_1} \cdot ... \cdot (A - \lambda_{j-1} E)^{k_{j-1}} \cdot (A - \lambda_{j+1} E)^{k_{j+1}} \cdot ... \cdot (A - \lambda_m E)^{k_m} = M(A) \cdot P_n(A) =$ (Теорема Гамильтона-Кэли) $= 0$

В силу (2):

$$\vec{x} = E\vec{x} = Q_1(\vec{x}) + ... + Q_i(\vec{x}) + ... + Q_m(\vec{x})$$

$$\Rightarrow Q_i(\vec{x}) = (Q_i Q_1)(\vec{x}) + ... + (Q_i^2)(\vec{x}) + ... + (Q_i Q_n)(\vec{x}) = Q_i^2(\vec{x})$$

■

Пусть $R_i = Im Q_i(A)$, $i = \overline{1,m}$ $-$ образ $Q_i(A)$. Из (3) следует, что R_i- инвариантное подпространство A. Тогда, если $\vec{x} \in R_i \to \exists \vec{y} \in A$, $Q_i(\vec{y}) = \vec{x}$, то $A(\vec{x}) = A(Q_i(\vec{y})) = (A \cdot Q_i)(\vec{y}) = (Q_i A)(\vec{y}) = Q_i(A(\vec{y})) \in R_i-$ инвариантное подпространство.

При доказательстве (3) было получено, что:

$$\vec{x} = E\vec{x} = Q_1(\vec{x}) + ... + Q_i(\vec{x}) + ... + Q_m(\vec{x}) = \vec{x_1} + ... + \vec{x_i} + ... + \vec{x_m} \qquad (4)$$

где $\vec{x_i} = Q_i(\vec{x}) \in R_i$, $i = \overline{1,m}$.

(3) означает, что $\vec{R^n}$ является суммой подпространств R_i. Покажем, что такое разложение единственно:

Доказательство. Предположим, что хотя бы для одного $k = \overline{1,m}$ $\exists \vec{y_k} = Q_k(z_k) \neq \vec{x_k}$: $\vec{x} = \sum\limits_{k=1}^{m} Q_k(\vec{z_k}) = \vec{y_1} + ... + \vec{y_i} + ... + \vec{y_m}$. Тогда $Q_i(\vec{x}) = \vec{x_i} = Q_i\left(\sum\limits_{k=1}^{m} Q_k(\vec{z_k})\right) \overset{Th\ \text{Г.К.}}{=} Q_i^2(\vec{z_i}) = Q_i(\vec{z_i}) = \vec{y_i} \Rightarrow \vec{x_i} = \vec{y_i}$ ■

Т.к. единственное разложение эквивалентно тому, что сумма подпространств прямая, то:

$$\vec{R^n} = R_1 \oplus R_2 \oplus ... \oplus R_m$$

Тогда A в таком базисе будет иметь вид:

$$\begin{Vmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_m \end{Vmatrix}$$

Подпространства R_i называются корневыми подпространствами $\vec{R^n}$.

Теорема 0.2. $\forall s = \overline{1,m} : R_s = ker(A - \lambda_s E)^{k_s}$ $\forall \vec{x} \in R_i \longmapsto (A - \lambda_i E)^{k_i}\vec{x} = 0$

Доказательство. Пусть $\vec{x} \in R_s \Rightarrow \exists \vec{y} \in R_s : \vec{x} = Q_i(\vec{y})$ в силу инвариантности R_s. Тогда $(A - \lambda_s E)^{k_s}\vec{x} = (A - \lambda_s E)^{k_s} \cdot f_s(A) \cdot (A - \lambda_1 E)^{k_1} \cdot ... \cdot (A - \lambda_{s-1} E)^{k_{s-1}} \cdot (A - \lambda_{s+1} E)^{k_{s+1}} \cdot ... \cdot (A - \lambda_m E)^{k_m}\vec{y} = f_s(A) \cdot P_n(A)\vec{y} = 0 \Rightarrow R_s \subseteq ker(A - \lambda_s E)^{k_s}$.

Пусть $\vec{x} \in ker(A - \lambda_s E)^{k_s}$. Тогда $\forall j \neq s : Q_j(\vec{x}) = 0$, поскольку множитель $(A - \lambda_s E)^{k_s}$ как множитель входит в представление Q_j. Поэтому из (4) в этом случае: $\vec{x} = 0 + ... + Q_s(\vec{x}) + ... + 0 \Rightarrow \vec{x} \in R_s \Rightarrow ker(A - \lambda_s E)^{k_s} \subseteq R_s$ ■

Рассмотрим структуру корневого подпространства. Покажем, что

$$dim(R_s = ker(A - \lambda_s E)^{k_s}) = k_s$$

Лемма 0.1. *Пусть B является линейным преобразованием $\vec{R^n}$ и $R = ker(B^l)$, $n < l$. Тогда, если $\exists \vec{x} \in R : B^{l-1}\vec{x} \neq 0$, то $dim R \geq l$.*

Доказательство. Рассмотрим систему векторов $\vec{x}, B\vec{x}, ..., B^{l-1}\vec{x} \in R$. Ни один из векторов этой системы не равен нулю. Покажем, что эта система линейно независима. С этой целью рассмотрим нулевую линейную комбинацию этих векторов.

$$a_0\vec{x} + a_1(B\vec{x}) + ... + a_{n-1}(B^{l-1}\vec{x}) = 0 \tag{5}$$

Подействуем последовательно $l - 1$ раз преобразованием B на (5):

$$\begin{cases} a_0(B\vec{x}) + a_1(B^2\vec{x}) + ... + a_{n-2}(B^{l-1}\vec{x}) = 0 \\ ... \\ a_0(B^{l-2}\vec{x}) + a_1(B^{l-1}\vec{x}) + 0 + ... + 0 = 0 \\ a_0(B^{l-1}\vec{x}) = 0 \end{cases}$$

$$(B^{l-1}\vec{x}) \neq 0 \text{ по условию} \Rightarrow a_0 = a_1 = ... = a_{l-1} = 0 \Rightarrow \text{Вектора ЛНЗ}$$

Таким образом в R лежит как минимум l ЛНЗ векторов, а значит базис в R не может содержать меньше, чем l векторов $\Rightarrow dim R \geq l$.

Было доказано, что пространства R_i, $i = \overline{1,s}$ образуют прямую сумму, равную $\vec{R^n}$, поэтому размерность $\vec{R^n}$ является суммой размерностей подпространств, которые составляют эту прямую сумму. Т.к. $k_1 + k_2 + ... + k_s = n$, то $\forall i \longmapsto dim R_i = k_i$, поскольку если $\exists j : dim R_j > k_j$, то тогда должно существовать R_i, у которого размерность меньше, чем k_i, что в силу леммы невозможно. ■

Пусть $\{\vec{e}_1^{\{\lambda_l\}}, ..., \vec{e}_{k_l}^{\{\lambda_l\}}\}$, $l = \overline{1{,}m}$ является базисом в корневом подпространстве $R_l = Ker(A - \lambda_l E)^{k_l}$. Тогда в базисеб образованном из объединения базисов корневых подпространств систем $\vec{x} = A\vec{x}$ имеет вид:

$$\frac{d\overline{x}^5}{dt} = \sum_{j=1}^{k_l} \gamma_j^5 \overline{x}^j,\ l = \overline{1, m}, \tag{6}$$

где $A\vec{e}_j^{(\lambda_l)} = \sum\limits_{s=1}^{kl} \gamma_j^s \vec{e}_s^{(\lambda_l)}$.

Дальнейшее рассмотрение будет связано с выбором базиса (Жорданова) в корневом подпространстве R_i так, чтобы упростить (6).

Рассмотрим сужение преобразования A на подространство R_i. Обозначим $k_l = l$, $\lambda_i = \overline{\lambda}$, а $A - \overline{\lambda}E = B$, тогда $\forall \vec{x} \in R_i : B^l(\vec{x}) = 0$ по определению R_i.

Выполним вложение:

$$0 \subseteq KerB \subseteq KerB^2 \subseteq ... \subseteq KerB^{i-1} \subseteq KerB^i \subseteq ... \subseteq KerB^l.$$

Действительно, $\forall \vec{x} : B^{i-1}(\vec{x}) = 0 \mapsto B^i(\vec{x}) = B(B^{i-1}(\vec{x})) = B(\vec{0}) = 0$

Обозначим $T_i = KerB^i, i = \overline{1{,}l}$ и определим:

$$\nu^i : \nu^i = \{\vec{x} : B^i\vec{x} = 0, B^{i-1}\vec{x} \neq 0\},\ i = \overline{1{,}m} \leq l$$

По построению получаем, что $\nu^i = T_i\ T_{i-1},\ i = 2{,}3{,}...{,}m$.

Теорема 0.3. *Пусть $j \ll i \leq m$, тогда:*

$$\forall \vec{h}_i \in \nu^i \exists \vec{h}_j \in \nu^j : \vec{h}_j = B^{i-j}\vec{h}_i \tag{7}$$

Доказательство. Построим такой $\vec{h}_j$ и покажем, что он лежит в ν_j.

$$B^j\vec{h}_j = B^j(B_{i-j}(\vec{h}_j)) = (B^{i-j} \cdot B^j)(\vec{h}_i) = B^i\vec{h}_i = 0;$$

$$B^{j-1}\vec{h}_j = B^{j-1}(B^{j-1}(\vec{h}_i)) = (B^{i-j} \cdot B^{j-1})(\vec{h}_i) = B^{i-1}\vec{h}_i neq 0,$$

Таким образом $\vec{h}_j \in \nu^j$ по определению ν^j. ■

Определение 0.2. *Система векторов $\{\vec{h}_i^\alpha\} \in \nu^i$, $\alpha = 1{,}...{,}r$ называется линейно независимой относительно T_{i-1}, если $\alpha_1\vec{h}_i^1 + ... + \alpha_r\vec{h}_i^r \in T_{i-1}$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = ... = \alpha_r = 0$*

Доказательство. Из теоремы 10 следует, что если система векторов $\{\vec{h}_i^\alpha\} \in \nu^i$, $\alpha = \overline{1{,}r}$ линейно независима относительно T_{i-1}, то система векторов $\{\vec{h}_j^\alpha = B^{i-j}(\vec{h}_i^\alpha)\} \in \nu^j$, $\alpha = \overline{1{,}r}$ будет линейно независимой относительно T_{j-1}.

Действительно, пусть вектор $\alpha_1\vec{h}_i^1 + ... + \alpha_r\vec{h}_i^r \in T_{i-1}$. Тогда

$$B^{j-1}(\alpha_1\vec{h}_j^1 + ... + \alpha_r\vec{h}_j^r) = 0 = B^{j-1}(B^{i-j}(\alpha_1\vec{h}_i^1 + ... + \alpha_r\vec{h}_i^r)) = B^{i-1}(\alpha_1\vec{h}_i^1 + ... + \alpha_r\vec{h}_i^r)$$

$$\Rightarrow \alpha_1\vec{h}_j^1 + ... + \alpha_r\vec{h}_j^r \in T_{j-1} \Leftrightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_r = 0$$

■

Перейдем к построению Жорданова базиса. Пусть в (7) $i=1, j=0$. $B\overline{h}_1 = 0$. Тогда $\nu = KerB = T_1$ является собственным подпространством преобразования A и векторы $h_1, \alpha = \overline{1,r}$ являются ЛНЗ собственными векторами A, соответсвующими числу $\overline{\lambda}$. Если ранг B (сужение $A-\overline{\lambda}E$ на $Ker(A-\overline{\lambda}E)^l$) равен $m\ leql-1$, тогда $r=l-m\geq 1$, и векторы $\vec{h}_1^1, ..., \vec{h}_1^r$ образуют базис в T_1.

Допустим $rangB = l-1$. Тогда существует только один собственный вектор $\vec{h}_1^1$ и T_1, является одномернам собственным подпространством. Дальнейшее построение будем вести по индукции. При $i=1$ базис в $\nu^1 = T_1$ состоит из одногособственного вектора $\vec{h}_1^1$. Предположим, что при $k=i-1<l$ базис в ν^{i-1} также состоит из одного вектора $\vec{h}_{i-1}^1$. В силу Теоремы 0.3 уравнение $B\vec{h}_i^1 = \vec{h}_{i-1}^1, c^1 \in \Re$.

Утверждение 0.1. *ν^i может быть представлено в виде:*

$$\nu^i = \left\{\vec{h}_i : \vec{h}_i = \alpha_1\vec{h}_i^1 + C^1\vec{h}^1, \alpha_1 \in \Re, \alpha_1 \neq 0\right\} \tag{8}$$

Доказательство. Запишем:

$$\begin{cases} B^i(\alpha_1\vec{h}_i^1 + c^1\vec{h}_1^1) = B^{i-1}(B(\alpha_1\vec{h}_i^1)) = B^{i-1}(\alpha_1\vec{h}_{i-1}^1) = 0 \\ B^{i-1}(\alpha_1\vec{h}_i^1 + c^1\vec{h}_1^1) = B^{i-2}(B(\alpha_1\vec{h}_i^1)) = B^{i-2}(\alpha_1\vec{h}_{i-1}^1) \neq 0 \end{cases}$$

Из этого следует, что $\vec{h}_i \in \nu^i$. В силу равенства:

$$B\vec{h}_i^1 = \vec{h}_{i-1}^1 \mapsto \forall \vec{y} \in \nu^i\ \exists \alpha_1 \in \Re : B\vec{y} = \alpha_1\vec{h}_{i-1}^1 \Rightarrow \vec{y},$$

имеет представление в (8). ■

Система ЛНЗ векторов в ν^i относительно T_{i-1} будет состоять из одного вектора $\vec{h}_i^1$, т.к. $\vec{h}_i \in T_1 \subseteq T_{i-1} \Leftrightarrow \alpha_1 = 0$.

Продолжим описанный выше процесс, построим веторы $\vec{h}_1^1, ..., \vec{h}_i^1, ..., \vec{h}_l^1$. Эти векторы ЛНЗ (Лемма (0.1)) и образуют базис в T_i, т.к. $R_i = \nu^1 \bigoplus ... \bigoplus \nu^i \bigoplus ... \bigoplus \nu^l$ в силу линейной независимости ν^i от T_{i-1}.

Все эти векторы удовлетворяют системе:

$$(A - \overline{\lambda}\vec{h}_1) = 0, (A - \overline{\lambda}\vec{h}_i^1) = \vec{h}_{i-1}^1,\ i = 2,...,l \tag{9}$$

Вектор $\vec{h}_2^1$ называется первым присоединенным к $\vec{h}_1^1$, соответственно $\vec{h}_i^1$ - $i-1$ присоединенный к $\vec{h}_1^1$.

Из (9): $A\vec{h}_1^1 = \overline{\lambda}\vec{h}_1^1$, $A\vec{h}_i = \overline{\lambda}\vec{h}_i^1 + \vec{h}_{i-1}^1$, $i = \overline{2,l}$. Тогда матрица сужения A на R_i в построенном базисе называется Жордановой клеткой и имеет вид:

$$\begin{Vmatrix} \overline{\lambda} & 1 & & & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} & 1 & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & 0 & \overline{\lambda} & 1 \\ 0 & & & 0 & \overline{\lambda} \end{Vmatrix}$$

В случае, если ранг B равен $m < l-1$, то существует $r = l-m > 1$ ЛНЗ собственных вектора, которые образуют базис в $\nu^1 = T_1 :\ \vec{h}_1^1, ..., \vec{h}_1^r$.

Пусть при $i-1 < l$ имеется $\vec{h}_{i-1}^1, ..., \vec{h}_{i-1}^p$, $p \leq r$ векторов образующих базис в ν^{i-1}, т.е. максимальная, линейно независимая относительно T_{i-2}, система векторов из ν^{i-1}. Из теоремы (0.3) следует, что системы уравнений $B\vec{h}_i = \gamma_1\vec{h}_{i-1}^1 + ... + \gamma_p\vec{h}_{i-1}^p$ должна иметь решение, поэтому согласно теореме Кронекера-Капелли, ранг B должен равняться рангу расширенной матрицы системы. При помощи элементарных преобразований сделаем нулевыми последние $r = l - m$ строк матрицы B. Чтобы ранги совпали, числа $\gamma_1, ..., \gamma_p$ должны удовлетворять системе из r однородных линейных уравнений, которая получается из требования обращения в ноль всех последних r элементов дополнительного столбца B. Из теоремы (0.3) следует, что эта система уравнений оносительно $\gamma_1, ...\gamma_p$ будет иметь хотя бы одно ненулевое решение. Тогда ранг этой системы $q \leq p-1$ и будет существовать $p - q$ наборов:

$$\vec{\gamma}^{\,1} = \begin{Vmatrix} \gamma_1^1 \\ ... \\ \gamma_p^1 \end{Vmatrix}, ..., \vec{\gamma}^{\,p-q} = \begin{Vmatrix} \gamma_1^{p-q} \\ ... \\ \gamma_p^{p-q} \end{Vmatrix},$$

при которых уравненя $B\vec{h}_i = \vec{h}_{i-1}^k \equiv \gamma_1^k \vec{h}_{i-1}^1 + ... + \gamma_p^k \vec{h}_{i-1}^p$, $k = \overline{1, p-q}$ будут иметь решения.

Каждый из наборов $\vec{\gamma}^{\,i}$ определени с точностью до константы и столбцы представляющие соответствующие наборы, линейно независимы, как ФСР системы.

Множетсво ν^i в этом случае представимо в виде:

$$\nu^i = \{\vec{h}_i : \vec{h}_i = \sum_{k=1}^{p-q} \alpha_k \vec{h}_i^k + \sum_{k=1}^{r} c_k h_1^k\}, \tag{10}$$

где $\alpha_k \in \Re$, $B\vec{h}_i^k = \vec{h}_{i-1}^k$, $c_k \in \Re$; $k = \overline{1, p-q}$ и все α_k одновременно не равны нулю. Аналогично (7), проверяем корректность (10), то есть ν^i записано в виде из (10). Если $\vec{y} \in \nu^i$, то существуют такие $\alpha_k, k = \overline{1, p-q}$, что:

$$B\vec{y} = \sum_{k=1}^{p-q} \alpha_k \vec{h}_{i-1}^k.$$

Тогда $\vec{y}$ как решение этого уравнения имеет представление (10).

Покажем, что так полученные векторы $\vec{h}_i^1, ..., \vec{h}_i^{p-1}$ ЛНЗ относительно T_{i-1}. Рассмотрим $\alpha_1 \vec{h}_i^1 + ... + \alpha_{p-q} \vec{h}_i^{p-q} = 0$. По предположению индукции $\vec{h}_{i-1}^1, ..., \vec{h}_{i-1}^{p-q}$ ЛНЗ относительно T_{i-2}. Имеем:

$$B(\alpha_1 \vec{h}_i^1 + ... + \alpha_{p-q} \vec{h}_i^{p-q}) = 0 = \alpha_1 \vec{h}_{i-1}^1 + ... + \alpha_{p-q} \vec{h}_{i-1}^{p-q}.$$

Откуда, в силу ЛНЗ векторов $\vec{h}_{i-1}^1, ..., \vec{h}_{i-1}^{p-q}$ относительно T_{i-2}, имеем $\alpha_1 = ... = \alpha_{p-q} = 0$, что доказывает ЛНЗ векторов $\vec{h}_i^1, ..., \vec{h}_i^{p-q}$ относительно T_{i-1}. Из (10) следует, что векторы $\vec{h}_i^1, ..., \vec{h}_i^{p-q}$ образуют базис в ν^i т.к. $\vec{y} \in T_1 \subseteq T_{i-1} \Leftrightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$.

Таким образом, построим базис в ν^i. Из доказательства следует, что $dim\nu^i < dim\nu^{i-1}, \forall i$. Полагая $i = 2, ..., m < l$, строим $R_l = \nu_1 \bigoplus ... \bigoplus \nu^i \bigoplus ... \bigoplus \nu^m$, что возмонжно, поскольку ν^i ЛНЗ относительно T_{i-1}, $i = \overline{2, m}$.