

1 Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений

1.1 Основные понятия

Определение 1.1. Уравнение вида

$$F(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением, где x – аргумент, $y(x)$ – неизвестная функция, F – известная функция.

Определение 1.2. Если это уравнение удастся разрешить относительно старшей производной, такое дифференциальное уравнение называется разрешённым относительно старшей производной и записывается в виде

$$y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

Порядок уравнения определяется порядком старшей производной от y .

Определение 1.3. Функция $y = \varphi(x)$ называется решением ДУ, если она n раз дифференцируема и

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0 \quad \forall x,$$

где определена функция $\varphi(x)$ с её производными.

Определение 1.4. Система n уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f_1(t, x^1(t), \dots, x^n(t)) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f_n(t, x^1(t), \dots, x^n(t)) \end{cases}$$

где $x^1(t), \dots, x^n(t)$ – искомые функции, называется нормальной системой ДУ n -го порядка.

Утверждение 1.1. Рассмотрим ДУ $y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$ n -ого порядка. Это уравнение эквивалентно следующей нормальной системе ДУ:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = v_2 \\ \dot{v}_2 = v_3 \\ \dots \\ \dot{v}_{n-1} = v_n \\ \dot{v}_n = f_n(x, v_1, v_2, \dots, v_n) \end{cases} \Leftrightarrow y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

Доказательство. Введем обозначения: $y = v_1(x)$, $y' = v_2(x)$, $y'' = v_3(x)$, \dots , $y^{(n-1)} = v_n(x)$. Тогда имеем $\dot{v}_1 = v_2$, $\dot{v}_2 = v_3$, \dots , $\dot{v}_n = f(x, v_1, v_2, \dots, v_n)$, то есть получилась нормальная система дифференциальных уравнений n -ого порядка с неизвестными v_i .

Обратными заменами системы уравнений можно получить исходное дифференциальное уравнение $y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$. ■

Определение 1.5. Рассмотрим уравнение 1-ого порядка $y' = f(x, y(x))$. Тогда задача решить это уравнение с условием $y(x_0) = y_0$ называется задачей Коши.

Определение 1.6. Пусть $\varphi(x)$ – решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y(x))$. График решения $\varphi(x)$ называется интегральной кривой. В силу определения функции $f(x, y)$ на множестве Ω , вся интегральная кривая будет лежать в Ω .

Определение 1.7. Проведём через каждую точку интегральной кривой $(x_0, y_0) \in \Omega$ малый отрезок с углом наклона по отношению к оси x равным α , причём $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0, y_0)$. Получим так называемое поле направлений.

Из построения интегральной кривой следует, что интегральная кривая в каждой своей точке касается поля направлений. Верно и обратное: кривая, касающаяся в каждой своей точке поля направлений, является интегральной кривой.

1.2 Простейшие типы уравнений первого порядка

1.2.1 Уравнения в полных дифференциалах

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$. Тогда кривая

$$\gamma = \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

называется интегральной кривой рассматриваемого уравнения, если $\forall t : t \in [t_1; t_2]$ выполнено

$$P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'_t + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'_t = 0.$$

Определение 1.8. Дифференциальное уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если $\exists F(x, y) : P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y)$.

Тогда $dF(x, y) = 0 \Rightarrow F(x, y) = \text{const}$, то есть $F(x, y)$ определяет неявную функцию $y(x)$.

Теорема 1.1. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в области D . Для того, чтобы уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ являлось уравнением в полных дифференциалах, необходимо выполнение условия $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $(x, y) \in D$. Если же область D ещё и одновязна, то условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ является достаточным.

Доказательство. Пусть $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ – уравнение в полных дифференциалах, тогда $\exists F(x, y) : P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y) \Rightarrow P = \frac{\partial F}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$. По условию P и Q – непрерывно дифференцируемы, тогда $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ – непрерывные функции, значит

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (x, y) \in D.$$

Пусть теперь D – односвязная область. Рассмотрим значение интеграла

$$F = \int_{(x_0, y_0)}^{(x; y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

который берётся по кривой γ , лежащей в D и соединяющей точки (x_0, y_0) и $(x; y)$. Пусть $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда по теореме о независимости интеграла от пути интегрирования выходит, что значение интеграла не зависит от пути интегрирования γ , а является функцией от (x, y) , значит $F = F(x, y)$ – функция и $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y)$. ■

Определение 1.9. Непрерывно дифференцируемая функция $\mu(x, y) \neq 0$ в области G называется интегрирующим множителем для уравнения в полных дифференциалах $\mu(x, y)(P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = 0$, если исходное уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ не является уравнением в полных дифференциалах.

Если $\mu(x, y)$ – интегрирующий множитель, то для достаточного условия имеем

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \Leftrightarrow P \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \frac{\partial P}{\partial y} = Q \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Полученное уравнение не легче исходного, так как теперь задача свелась к нахождению μ . Обычно интегрирующий множитель ищут в виде $\mu(x)$, $\mu(y)$, $\mu(x^2 + y^2)$, $\mu(x^\alpha, y^\beta)$.

1.2.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим ДУ вида $P(y)dx + Q(x)dy = 0$, где $P(y) \in C^1_{[y_1; y_2]}$, $Q(x) \in C^1_{[x_1; x_2]}$. Если $\exists y_0 : P(y_0) = 0$ или $\exists x_0 : Q(x_0) = 0$, тогда

$$\begin{cases} x = t \\ y = y_0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_0 \\ y = t \end{cases} \quad (1)$$

являются интегральными кривыми рассматриваемого ДУ соответственно. Если же выполняется $P(x, y) \neq 0$ и $Q(x, y) \neq 0$, то применим к уравнению интегрирующий множитель

$$\mu(x, y) = \frac{1}{P(x, y)Q(x, y)},$$

получив уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{dx}{Q(x)} + \frac{dy}{P(y)} = 0.$$

Значение $\mu(x, y)$ действительно является интегрирующим множителем, так как выполняется

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{Q(x)} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{P(y)} \right) = 0.$$

Тогда

$$dF(x, y) = \frac{dx}{Q(x)} + \frac{dy}{P(y)} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{Q(x)} \Rightarrow F(x, y) = \int_{x_1}^x \frac{dt}{Q(t)} + C(y),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{P(y)} = C'(y) \Rightarrow C(y) = \int_{y_1}^y \frac{dt}{P(t)} + C_1 \Rightarrow F(x, y) = \int_{x_1}^x \frac{dt}{Q(t)} + \int_{y_1}^y \frac{dt}{P(t)} + C_1 = \text{const.}$$

Определение 1.10. Если дифференциальное уравнение вида $P_1(x, y)dx + Q_1(x, y)dy = 0$ может быть сведено к виду $P(y)dx + Q(x)dy = 0$, то такое уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными.

Утверждение 1.2. Задача Коши уравнения с разделяющимися переменными $P(y)dx + Q(x)dy = 0$ задаётся в виде $y(x_1) = y_1$, а её решение в виде

$$\int_{x_1}^x \frac{dt}{Q(t)} + \int_{y_1}^y \frac{dt}{P(t)} = 0.$$

1.2.3 Однородные уравнения

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$y' = y \left(\frac{y}{x} \right),$$

которое назовём уравнением с однородной правой частью. Сделаем замену $v(x) = \frac{y}{x}$, тогда $y(x) = v(x) \cdot x$, $y'_x = x \cdot v'_x + v = g(v)$, откуда имеем $x \frac{dv}{dx} = g(v) - v$. Если $\exists g(v_0) = v_0$, то v_0 – решение уравнения $x \frac{dv}{dx} = g(v) - v$. Если же $v \neq g(v)$, тогда

$$\frac{dv}{g(v) - v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |x| + C = \int_{v_0}^v \frac{dt}{g(t) - t}.$$

Таким образом, найдено решение исходного уравнения с однородной правой частью в квадратурах.

Определение 1.11. Функция $F(x^1, x^2, \dots, x^n)$ называется однородной степени m , если $\forall \lambda > 0 \rightarrow F(\lambda x^1, \lambda x^2, \dots, \lambda x^n) = \lambda^m F(x^1, x^2, \dots, x^n)$.

Пример 1.1. Рассмотрим уравнение $P(x, y)dx = Q(x, y)dy$. Если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции степени m , тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = \frac{x^m P(1, \frac{y}{x})}{x^m Q(1, \frac{y}{x})} = \frac{P(1, \frac{y}{x})}{Q(1, \frac{y}{x})} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

Таким образом исходное уравнение свелось к уравнению с однородной правой частью.

1.2.4 Линейные уравнения первого порядка

Определение 1.12. Дифференциальное уравнение вида $y' + a(x)y = f(x)$ – линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Дифференциальное уравнение вида $y' + a(x)y = 0$ – линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка. При этом $a(x) \in C^1_{I(x)}$, $f(x) \in C_{I(x)}$, где $I(x)$ – область, на которой определены функции $a(x)$ и $f(x)$.

Введём оператор $L = \frac{d}{dx} + a(x)$, который действует на множество непрерывно дифференцируемых функций $\varphi \in C^1_{I(x)}$. Тогда уравнение $y' + a(x)y = f(x)$ переписывается в виде $L(y) = f(x)$, а уравнение $y' + a(x)y = 0$ переписывается в виде $L(y) = 0$.

Теорема 1.2. Введённый оператор $L = \frac{d}{dx} + a(x)$ – линейный оператор.

Доказательство. Рассмотрим линейную комбинацию $c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$:

$$L(c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)) = (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)' + a(x)(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1L(\varphi_1) + c_2L(\varphi_2)$$

Таким образом, $L(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1L(\varphi_1) + c_2L(\varphi_2)$, то есть L – линейный оператор. ■

Утверждение 1.3. Решением уравнения $y' + a(x)y = 0$ является

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Найдём решение уравнения $y' + a(x)y = 0$:

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx \Rightarrow \ln |y| = - \int_{x_0}^x a(t)dt + \ln C \Rightarrow |y| = Ce^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}, \quad C > 0$$

Раскрывая модуль и объединяя полученное решение с нулевым ($y \equiv 0$), имеем

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

■

Утверждение 1.4. Решением уравнения $y' + a(x)y = f(x)$ является

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Найдём решение уравнения $y' + a(x)y = f(x)$: воспользуемся уже найденным решением однородного уравнения, применяя метод вариации постоянной. То есть будем искать решение в виде

$$y = C(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}.$$

Подставим это решение в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} C'(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} - a(x)C(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} + a(x)C(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} &= f(x) \\ C'(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} = f(x) &\Rightarrow C(x) = \int_{x_0}^x f(t)e^{\int_{x_0}^t a(s)ds} + C_0 \end{aligned}$$

Таким образом найден вид $C(x)$. Теперь подставим эту функцию:

$$\begin{aligned} y &= C_0 e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} + e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} \int_{x_0}^x f(t)e^{\int_{x_0}^t a(s)ds} \\ y &= C_0 e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} + \int_{x_0}^x f(t)e^{-\int_{x_0}^t a(s)ds} \end{aligned}$$

Из полученного решения видно, что оно является суммой решения однородного уравнения и частного решения. ■

Утверждение 1.5. Если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – некоторые решения уравнения $y' + a(x)y = f(x)$, то $z(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ – решение однородного уравнения $y' + a(x)y = 0$.

Доказательство. По условию $\varphi_1' + a(x)\varphi_1 = f(x)$, $\varphi_2' + a(x)\varphi_2 = f(x)$, откуда очевидно, что $(\varphi_1 - \varphi_2)' + a(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$. Обозначив $z = \varphi_1 - \varphi_2$, получим $z' + a(x)z = 0$, то есть z – решение однородного уравнения. ■