1 Билет 5. Автономные системы дифференциальных уравнений

1.1 Основные определения

Система ДУ вида:

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, ..., x^n); \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}); \quad \dot{x}^i = f^i(\vec{x}) \qquad i = \overline{1, n} \tag{1}$$

Называется автономной системой ДУ, если $\vec{f} = \{f_i(x^1, ..., x^n)\}$, $i = \overline{1, n}$ не зависит явно от аргумента t; $x^j = x^j(t)$, $j = \overline{1, n}$ являются интегральными кривыми (1).
$\vec{x}(t) = \{x^j(t)\} \in \mathbb{R}^{n+1} = t \times \mathbb{R}^n$

Определение 1.1. *Пусть $\vec{x}(t)$ является решением* (1)*. Кривая γ в $\mathbb{R}^n$ называется фазовой траекторией* (1)*. Само $\mathbb{R}^n$ называется фазовым пространством* (1)*.*

$$\gamma = \begin{cases} x^1 = x^1(t) \\ x^2 = x^2(t) \\ .... \\ x^n = x^n(t) \end{cases} \tag{2}$$

Будем предполагать, что $\vec{f} = \{f^i(x^1, ..., x^n)\} \in \mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n, i = \overline{1, n}$ непрерывно дифференцируемые функции по всей совокупности переменных.

Теорема 1.1. *Если $\varphi(t)$ решение* (1)*, то $\varphi(t + \tau)$ $\forall \tau = const \in \mathbb{R}$ тоже решение* (1)

Доказательство.
Пусть $u = t + \tau : \dfrac{d(\varphi(t + \tau))}{dt} = |t + \tau = u| = \dfrac{d\varphi(u)}{du}\dfrac{du}{dt} = \dfrac{d\varphi(u)}{dt} = f(\varphi(u)) = f(\varphi(t + \tau)) -$
$-$ т.е. $\varphi(t + \tau)$ – решение ■

Следствие 1.1.1. *Пусть $\vec{\varphi}(t_0, \vec{x}_0)$ – решение* (1)*, такое что $\vec{\varphi}(t, t_0, \vec{x}_0) = \vec{x}_0$. В силу доказанной теоремы $\vec{\varphi}(t + \tau, t_0 + \tau, \vec{x}_0)$ тоже решение* (1)*. (Формально заменяем $t + \tau$ на u, $t_0 + \tau$ на u_0), причём $\vec{\varphi}(t_0 + \tau, t_0 + \tau, \vec{x}_0) = \vec{x}_0$. Тогда, если $\vec{f}(x^1, ..., x^n)$ является непрерывной функцией n переменных вместе с $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}$, то показанные решения совпадают по основной теореме.*
$\vec{\varphi}(t + \tau, t_0 + \tau, \vec{x}_0) \equiv \vec{\varphi}(t, t_0, \vec{x}_0)$. Положим, в силу произвольности τ, $\tau = -t_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{\varphi}(t, t_0, \vec{x}_0) = \vec{\varphi}(t - t_0, 0, \vec{x}_0) = \vec{\varphi}(t - t_0, \vec{x}_0)$
Т.о. положение движущейся по фазовой траектории точки определяется начальным положением $\vec{x}_0$ в момент времени t_0 и длительностью $t - t_0$, отсчитываемого от начального момента времени t_0, но не самим этим моментом. (Т.е. начальный момент не существенен и можно положить его равным нулю).

Теорема 1.2. *Фазовые траектории либо не имеют общих точек, либо совпадают*

Доказательство.
Пусть $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – решения (1), причём $x_0 = \varphi(t_1) = \psi(t_2)$ Рассмотрим $\chi(t) = \psi(t + (t_2 - t_1))$, согласно предыдущей теореме $\chi(t)$ тоже явл. реш. (1), причём $\chi(t_1) \overset{\text{по постр.}}{=\!=\!=} x_0 = \psi(t_2) =$
$= \varphi(t_1) \Rightarrow$ По основной теореме $\varphi(t) \equiv \chi(t) \overset{def}{=} \psi(t + (t_2 - t_1)) \Rightarrow$ траектории $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ совпали. ■

Согласно доказаному можно считать, что фазовое пространство (1) "склеено"из фазовых траекторий.

1.2 Типы фазовых траекторий

Определение 1.2. *Точка* $\vec{a} \in \vec{\mathbb{R}}^n$ *называется положением равновесия* (1), *если* $\vec{f}(\vec{a}) = 0 \quad (f^i(a^1, ..., a^n) = 0,\ i = \overline{1, n})$

Утверждение 1.1. *Если* $\vec{a} \in \vec{\mathbb{R}}^n$ *– положение равновесия* (1), *то* $\vec{x}(t) = \vec{a}, -\infty < t < +\infty$ *является решением* (1)

Доказательство.
$\vec{x}(t) \equiv \vec{a} \overset{(1)}{\Rightarrow} 0 = \dfrac{d\vec{x}}{dt} = \dfrac{d\vec{a}}{dt} = f(\vec{a}) = 0 \Rightarrow$ удовлетворяет (1) ■

Т.о. точка равновесия $\vec{a} \in \vec{\mathbb{R}}^n$ является фазовой траекторией (1)

Следствие 1.2.1. *Решение* (1) *не может прийти в положение равновесия за конечное время.*

Доказательство.
Пусть это не так и фазовая траектория пришла в положение равновесия за конечное время. Т.о., т.к. положение равновесия тоже является фазовой траекторией, то они пересекаются, что невозможно $\Rightarrow$ противоречие ■

Теорема 1.3. *Фазовые траектории принадлежат одному из трёх типов:*

1. *Точка (равновесия)*
2. *Фазовая траектория, отличная от точки, есть гладкая кривая*
3. *Замкнутая кривая(цикл) – периодическая*

1.3 Групповые свойства автономных систем

1. $\vec{\varphi}(t_1 + t_2, \vec{x}_0) = \varphi(t_2, \vec{\varphi}(t_1, \vec{x}_0)) = \vec{\varphi}(t_1, \vec{\varphi}(t_2, \vec{x}_0))$

   Доказательство.
   Рассмотрим $\vec{\varphi}(t, \vec{\varphi}(t_1, \vec{x}_0))$ – решение (1); $\vec{\varphi}(t + t_1; \vec{x}_0)$ – тоже решение (1)

$$\left.\begin{aligned} \vec{\varphi}(0, \vec{\varphi}(t_1, \vec{x}_0)) = \vec{\varphi}(t_1, \vec{x}_0) \\ \vec{\varphi}(0 + t_1, \vec{x}_0) = \vec{\varphi}(t_1, \vec{x}_0) \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{основная теорема}} \vec{\varphi}(t + t_1; \vec{x}_0) \equiv \vec{\varphi}(t, \vec{\varphi}(t_1, \vec{x}_0))$$

   Аналогично, $\vec{\varphi}(t + t_2, \vec{x}_0) \equiv \vec{\varphi}(t, \vec{\varphi}(t_2, \vec{x}_0))$ ■

2. $\vec{\varphi}(-t; \vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)) = \vec{x}_0$

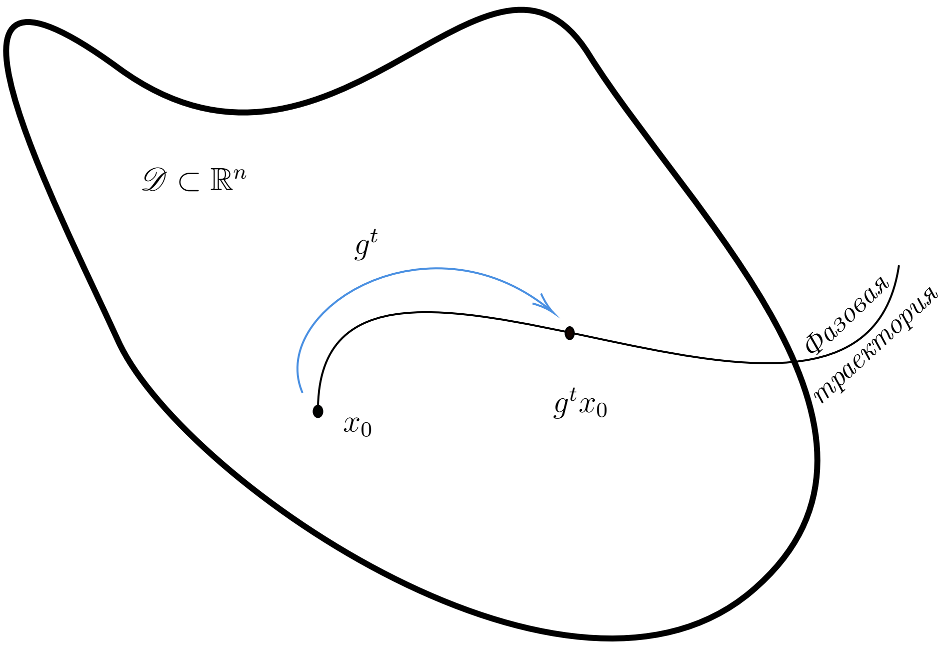
   Доказательство.
   Из 1): $\vec{\varphi}(t + \tau, \vec{x}_0) = \vec{\varphi}(\tau, \vec{\varphi}(t, \vec{x}_0))$. В силу произвольности τ при $\tau = -t$:
   $\vec{\varphi}(-t, \vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)) \overset{1)}{=} \vec{\varphi}(0, \vec{x}_0) = \vec{x}_0$ ■

1.4 Понятия фазового потока и фазового объема

Определение 1.3. *Рассматриваем давно привычную нам систему* $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$.

Пусть $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n$ *– это область в ее фазовом пространстве. Возьмем произвольную точку* $\vec{x}_0 \in \mathscr{D}$ *и выпустим из нее фазовую траекторию. Таким образом, с течением времени* t *мы будем двигаться по этой траектории. Обозначим точку на данной траектории в момент времени* t *как* $g^t\vec{x}_0$.

Теперь можно определить преобразование области $\mathscr{D}$: $\forall \vec{x}_0 \in \mathscr{D}$ *сделаем отображение* $\vec{x}_0 \to g^t\vec{x}_0$. *Получаем* $\mathscr{D} \to g^t\mathscr{D}$. *Другими словами, каждую точку* $\mathscr{D}$ *сносим по фазовой траектории на время* t.



Так вот преобразование g^t *и называется фазовым потоком.*

Перечислим несколько полезных свойств введенного нами фазового потока:

- $g^{t_1+t_2} = g^{t_1} \cdot g^{t_2} = g^{t_2} \cdot g^{t_1}$;
- $g^t \cdot g^{-t} = g^{-t} \cdot g^t = \mathrm{Id}$ – тождественное преобразование;
- Фазовый поток является группой;
- И еще сильнее, фазовый поток – однопараметрическая группа, то есть каждому числу $t \in \mathbb{R}$ соответствует единственное преобразование $g^t:\ \mathscr{D} \to g^t\mathscr{D}$.

Определение 1.4. *Пусть у нас опять есть область* $\mathscr{D}$ *фазового пространства* $\mathbb{R}^n$. *Подействуем на* $\mathscr{D}$ *фазовым потоком* g^t. *Тогда* $\mathscr{D}(t) = g^t\mathscr{D}$ *и* $\vec{x} = g^t\vec{x}_0$. *Определим следующую величину как фазовый объем:*

$$V_{\mathscr{D}}(t) = \int\limits_{\mathscr{D}(t)} d\vec{x} = \int\limits_{g^t\mathscr{D}} d(g^t\vec{x}_0).$$

1.5 Теорема Лиувилля

Теорема 1.4. *В автономной системе дифференциальных уравнений* $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$ *производная фазового объема* $V_{\mathscr{D}}(t)$ *области* $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n$ *фазового пространства может быть вычислена по формуле:*

$$\frac{dV_{\mathscr{D}}(t)}{dt} = \int\limits_{\mathscr{D}} \operatorname{div} \vec{f} \cdot d\vec{y},$$

где $\operatorname{div} \vec{f} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f^i}{\partial x^i}$ *– дивергенция* $\vec{f}$*, а* $\vec{y} = \vec{x}(0)$.

Доказательство.
Докажем, что производная равна этому при $t = 0$, а в силу автономности системы это будет верно в каждой точке.

Пишем производную по определению: $\dfrac{dV_{\mathscr{D}}}{dt}(0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{V_{\mathscr{D}}(t) - V_{\mathscr{D}}(0)}{t}$.

Из системы имеем $\vec{x} = \vec{y} + \int\limits_0^t \vec{f}(\tau)d\tau$.

При малых значениях t получаем следующее: $x^i = y^i + f^i(\vec{y})t + o(t), t \to 0$.

На все это дело можно смотреть как на замену координат $x^i \longrightarrow y^i$. Тогда получаем следующее выражение для фазового объема:

$$V_{\mathscr{D}}(t) = \int\limits_{\mathscr{D}(t)} d\vec{x} \overset{\mathscr{D}(0)=\mathscr{D}}{=\!=\!=} \int\limits_{\mathscr{D}} |J| d\vec{y},$$

где $J = \dfrac{\partial(x^1, x^2, \dots, x^n)}{\partial(y^1, y^2, \dots, y^n)}$ – якобиан преобразования.

Посчитаем этот якобиан:

$$J = \begin{vmatrix} 1 + \dfrac{\partial f^1}{\partial y^1}t & \dfrac{\partial f^1}{\partial y^2}t & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial y^n}t \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial y^1}t & 1 + \dfrac{\partial f^2}{\partial y^2}t & \cdots & \dfrac{\partial f^2}{\partial y^n}t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial y^1}t & \dfrac{\partial f^n}{\partial y^2}t & \cdots & 1 + \dfrac{\partial f^n}{\partial y^n}t \end{vmatrix} = \left(1 + \frac{\partial f^1}{\partial y^1}t\right)\left(1 + \frac{\partial f^2}{\partial y^2}t\right)\dots\left(1 + \frac{\partial f^n}{\partial y^n}t\right) + o(t).$$

Здесь мы все, что имеет множители $t^2, t^3, \dots, t^n$, завернули в $o(t)$. Однако если раскрыть скобки, то такие слагаемые все еще остаются. Раскроем эти скобки и опять впихнем все ненужное в $o(t)$:

$$J = 1 + \left(\frac{\partial f^1}{\partial y^1} + \frac{\partial f^2}{\partial y^2} + \dots + \frac{\partial f^n}{\partial y^n}\right)t + o(t) = 1 + t \operatorname{div} \vec{f} + o(t).$$

Ну, а теперь считаем эту производную:

$$\frac{dV_{\mathscr{D}}}{dt} = \lim_{t\to 0} \frac{V_{\mathscr{D}}(t) - V_{\mathscr{D}}(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\int_{\mathscr{D}} \left(1 + t \operatorname{div} \vec{f} + o(t)\right) d\vec{y} - \int_{\mathscr{D}} d\vec{y}}{t} = \int\limits_{\mathscr{D}} \operatorname{div} \vec{f} \cdot d\vec{y}.$$

■

1.6 Теорема Пуанкаре

Теорема 1.5. *Пускай g^t – непрерывное взаимнооднозначное отображение, сохраняющее фазовый объем и переводящее ограниченную область $\mathscr{D}$ саму в себя, то есть $g^t\mathscr{D} = \mathscr{D}$. Тогда:*

$$\forall x_0 \in \mathscr{D} \longmapsto \forall U(x_0)\ \ \exists \overline{x} \in U(x_0):\ g^n\overline{x} \in U(x_0) \quad (n = t_0),$$

где $U(x_0)$ – некоторая окрестность точки x_0.

Другими словами, для любой окрестности U любой точки x_0 области $\mathscr{D}$ найдется точка $\overline{x}$, возвращающаяся обратно в эту же окрестность.