1 Билет номер 7

1.1 Функционалы, зависящие от высших производных

Рассмотрим функционал
$$\mathcal{J}(y) = \int_a^b F(x,y(x),y'(x),\ldots,y^{(n)}(x))dx \tag{2.3}$$
с условием
$$y(a) = A_0,\ldots,y^{(n-1)}(a) = A_{n-1};\;\; y(b) = B_0,\ldots,y^{(n-1)}(b) = B_{n-1} \tag{2.4}$$
Будем считать, что $F(x,z_0,\ldots,z_n)$ n раз дифференцируема по совокупности всех переменных на $a \leqslant x \leqslant b$; $-\infty < z_0,\ldots,z_n < \infty$. Пусть $y(x) \in C^n_{[a;b]}$. Норму на этом множестве функций определим как

$$||y|| = \sum_{k=0}^{n} \max_{x\in[a;b]} |y^{(k)}(x)|$$

Пусть $y_0(x)$ является слабым минимумом $2.3 \wedge 2.4$.

Множество допустимых вариаций: $H_\delta(y_0) = \{\delta y(x) \in C^n_{[a;b]}, \delta y^{(i)}(a) = \delta y^i(b) = 0,\;\; i = \overline{1,n-1}\} \Rightarrow \mathcal{D} = \{y_0(x) + t\delta y(x) : \delta y(x) \in H_\delta(y_0)$ (доказательство аналогично).

$$\mathcal{J}(y_0(x)+t\delta y(x)) = \int_a^b F(x, y_0(x)+t\delta y(x);\ldots;y_0^{(n)}(x)+t(\delta y(x))^{(n)})dx = \mathcal{J}(t) = \mathcal{J}(0) + \delta\mathcal{J}t + o(t)$$

, где $\delta\mathcal{J} = \int\limits_a^b (\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n)})$, где $\frac{\partial F}{\partial y^{(i)}} = \frac{\partial F(x,y_0(x),\ldots,y_0^{(n)})}{\partial y^{(i)}};\quad i = \overline{0,n}$

Определение слабого максимума 2.3 аналогично пределено в пункте 1.

Аналогично доказывается, что если $y_0(x) -$ слабый минимум $2.3 \wedge 2.4$, то $\forall \delta y(x) \in H_\delta(y_0) \rightarrow \mathcal{J} = 0$.

Доказательство. Если $\delta y(x) \in H_\delta(y_0)$, то

$$\forall k = \overline{1,n} \rightarrow \int\limits_a^b \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}(\delta y)^{(k)}dx = \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}(b)(\delta y(b))^{(k-1)}(=0) - \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}(a)(\delta y(a))^{(k-1)}(=0) - \int\limits_a^b \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}(\delta y)^{(k-1)}dx =$$

$$= [\text{аналогично}] = \int\limits_a^b \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}(\delta y)^{(k-2)}dx = \cdots = \int\limits_a^b (-\frac{d}{dx})^k \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\delta y dx$$

. Тогда, если $y_0(x)$ слабый минимум $2.3 \wedge 2.4$, то имеем:

$$\delta\mathcal{J} = \int_a^b (\sum_{k=0}^{n}(-\frac{d}{dx})^k \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\delta y)dx = \int_a^b (\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} + \cdots + (-\frac{d}{dx})^k \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}) = 0 \tag{2.5}$$

■

Тогда, если $y_0(x) \in C^{n+1}_{[a;b]} -$ слабый экстремум $2.3 \wedge 2.4$, то из 2.5 и из основной леммы следует, что $y_0(x)$ удовлетворяет **уравнению Эйлера**:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} + \cdots + (-\frac{d}{dx})^n \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0 \tag{2.6}$$

2 Условные вариационные принципы. Изопериметрическая задача.

Среди функций $y(x) \in C^1_{[a;b]}$ найти такую, что $y(a) = A,\;\; y(b) = B$, которая дает экстремум функционалу

$$\mathcal{J}(y) = \int\limits_a^b F(x,y(x),y'(x))dx \tag{3.1}$$

и на которой функционалы $\mathcal{G}(y) = \int\limits_a^b g(x,y(x)my'(x))dx$ принимет заданное значение l:

$$\mathcal{G}(y) = \int\limits_a^b g(x,y(x),y'(x))dx = l \tag{3.2}$$

Пусть F и g дважды непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных $D = \{y(x) \in C^1_{[a;b]} : y(a) = A \;\; y(b) = B, G(y(x)) = l\}$ $H_\delta(y_0) = \{\delta y \in C^1_{[a;b]} : \delta y(a) = \delta y(b) = 0\}$

Теорема 2.1. *Пусть* $y_0(x) \in C^2_{[a;b]}$ *и является слабым экстремумом* 3.1 *на множестве* D *и* $\exists \delta y_0 \in H_\delta(y_0(x)) :$ $\delta\mathcal{G}(y_0,\delta y_0) \neq 0$.

Положим $\Phi = \mathcal{J} + \lambda\mathcal{G}$. *Тогда* $\exists \lambda \in R : \delta\Phi(y_0,\delta y) = 0 \quad \forall \delta y \in H_\delta(y_0)$

Доказательство. Пусть $y_0(x) \in D$ является слабым экстремумом 3.1 на D и по условию теоремы $\exists \delta_0 \in H_\delta(y_0) : \delta\mathcal{G}(y_0,\delta y_0) \neq 0$. Рассмотрим числа t_1, t_2 и $y(x) = y_0(x) + t_1\delta y_0 + t_2\delta y \in D$, где δy_0 зафиксированно. При фиксировании $\delta y : \mathcal{J}(y_0(x) + t_1\delta y_0 + t_2\delta y) = \mathcal{J}(t_1,t_2)$ и

$$\mathcal{G}(y_0(x) + t_1\delta y_0 + t_2\delta y) = \mathcal{G}(t_1,t_2) = l \tag{3.3}$$

По условию $y_0(x) -$ экстремум $\mathcal{J}(y(x)) \Rightarrow$ при $t_1 = t_2 = 0 \;\; \mathcal{J}(t_1,t_2)$ имеет экстремум при условии 3.2.

Из 3.2 и условия теоремы: в

$$y(x) = y_0 + t_1\delta y_0 + t_2\delta y \Rightarrow \delta\mathcal{G}(y_0,\delta y_0) = \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t_1}$$

$$\delta\mathcal{G}(y_0,\delta y_0) = \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t_1}\,|_{t_1=t_2=0} = \int\limits_a^b (\frac{\partial g}{\partial y}\delta y_0 + \frac{\partial g}{\partial y'}(\delta y_0)')dx \neq 0 = \frac{\partial\mathcal{G}}{\overline{\partial t_1}}$$

$$\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t_2}\,|_{t_1=t_2=0} = \int\limits_a^b (\frac{\partial g}{\partial y}\delta y + \frac{\partial g}{\partial y'}(\delta y)')dx \neq 0 = \frac{\partial\mathcal{G}}{\overline{\partial t_2}} \tag{3.4}$$

Так как в 3.4 $\frac{\partial\mathcal{G}}{\overline{\partial t_1}} \neq 0$, то по теореме о неявно заданной функции можно сказать, что 3.3 определяет неявную функцию $t_1 = t_1(t_2)$. По теореме о неявной функции эта функция непрерывно дифференцируема в окрестности точки $(0;0)$ и

$$\frac{dt_1}{dt_2}\,|_{t_2=0} = -\frac{\frac{\partial\mathcal{G}}{\overline{\partial t_2}}}{\frac{\partial\mathcal{G}}{\overline{\partial t_1}}} \tag{3.5}$$

Функция $\mathcal{J}(t_1(t_2);t_2) = \overline{\mathcal{J}}(t_2)$ при $t_2 = 0$ имеет экстремум по условию. Тогда

$$\frac{d\mathcal{J}(t_1(t_2);t_2)}{dt_2}\,|_{t_2=0} = \frac{\partial\mathcal{J}}{\overline{\partial t_2}} + \frac{\partial\mathcal{J}}{\overline{\partial t_1}} \cdot \frac{dt_1}{dt_2}\,|_{t_2=0} = 0 \tag{3.6}$$

В силу 3.5 продолжим 3.6: $\frac{d\mathcal{J}}{dt_2}\,|_{t_2=0} = \frac{\partial\mathcal{J}}{\overline{\partial t_2}} - \frac{\partial\mathcal{J}}{\overline{\partial t_1}} \cdot \frac{\frac{\partial\mathcal{G}}{\overline{\partial t_2}}}{\frac{\partial\mathcal{G}}{\overline{\partial t_1}}} = 0$

Оюозначим через $\lambda = -\frac{\frac{\partial\mathcal{J}}{\overline{\partial t_1}}}{\frac{\partial\mathcal{G}}{\overline{\partial t_1}}} \overset{3.6}{\Rightarrow}$

$$\frac{\partial\mathcal{J}}{\overline{\partial t_2}} + \lambda\frac{\partial\mathcal{G}}{\overline{\partial t_2}} = 0 \;\; \forall \delta y \tag{3.8}$$

В 3.6 :

$$\frac{\partial\mathcal{J}}{\overline{\partial t_1}} = \frac{\partial\mathcal{J}}{\partial t_1}\,|_{t_1=t_2=0} = \int\limits_a^b (\frac{\partial F}{\partial y}\delta y_0 + \frac{\partial F}{\partial y'}(\delta y_0)')dx, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial\mathcal{J}}{\overline{\partial t_2}} = \frac{\partial\mathcal{J}}{\partial t_2}\,|_{t_1=t_2=0} = \int\limits_a^b (\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}(\delta y)')dx$$

Введем $\Phi \mathcal{J} + \lambda\mathcal{G} \Rightarrow \delta\Phi\mid_{t_2=0} = \frac{d\mathcal{J}}{dt_2} + \lambda\frac{d\mathcal{G}}{dt_2} = 0(3.8)$, тогда в силу 3.4 и 3.7

$$\int\limits_a^b \Big(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}(\delta y)'\Big)dx + \lambda\int\limits_a^b \Big(\frac{\partial g}{\partial y}\delta y + \frac{\partial g}{\partial y'}(\delta y)'\Big)dx = 0 \Rightarrow$$

$$\delta\Phi = \int\limits_a^b \Big[\Big(\frac{\partial F}{\partial y} + \lambda\frac{\partial g}{\partial y}\Big)\delta y + \Big(\frac{\partial F}{\partial y'} + \lambda\frac{\partial g}{\partial y'}\Big)\delta y'\Big]dx = 0 \quad \forall \delta y \in h_\delta(y_0) \Rightarrow$$

аналогично получаем уравнение Эйлера

$$\frac{\partial(\mathcal{F} + \lambda\mathcal{G})}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial(\mathcal{F} + \lambda\mathcal{G})}{\partial y'} = 0$$

В силу произвольности $\delta y \in H_\delta(y_0)$ теорема доказана ■

3 Задача Лагранжа

Среди всех кривых $y = y(x)$, $z = z(x)$, лежащих на поверхности $g(x,y,z) = 0$ $(g(x,y(x),z(x)) = 0)$ найти те, которые дают экстремум функционалу $\mathcal{J} = \int\limits_a^b F(x,y(x),y'(x),z(x),z'(x))dx$. Концы кривых закреплены, т.е. $y(a) = A_1$, $y(b) = B_1$, $z(a) = A_2$, $z(b) = B_2$. Должно выполняться $g(a,A_1,A_2) = g_(b,B_1,B_2) = 0$. К обычным условиям на F, $y(x)$, $z(x)$ добавляется условие, что $g(x,y,z)$ должна быть непрерывно дифференцируемой по совокупности переменных и $(g'_y)^2 + (g'_x)^2 \neq 0$ $\forall x \in [a;b]$, т.е $g -$ простая гладкая поверхность без особых точек, назовем ее S;

Среди всех кривых, лежащих на S и имеющих заданные концы, найти те, которые дают минимум $\mathcal{J}$

Теорема 3.1. *Пусть кривая $j : a \leqslant x \leqslant b$, $y_0 = y_0(x)$, $z_0 = z_0(x)$ является слабым экстремумом Лагранжа. ТОгда $\exists\lambda = \lambda(x)$: первая вариация $F + \lambda g$, т.е. $\delta(F + \lambda g) = 0$ $\forall \delta y, \delta z$ (y является стационарной кривой для $\int\limits_a^b (F + \lambda g)dx$), т.е.*

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \lambda(x)g'_y = 0 \ - \ \textit{для} \ \ y(x) \\ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'} + \lambda(x)g'_y = 0 \ - \ \textit{для} \ \ z(x) \end{cases}$$

Доказательство. $y(x) = y_0(x) + y\delta y$; $z(x) = z_0(x) + \delta z$. Рассматриваем кривые, лежащие на поверхности, т.е. $g(x; y_0 + t\delta y; z_0 + t\delta z) = 0 \Rightarrow \underbrace{g(x,y_0(x), z_0(x))}_{=0,\text{т.к. экстремаль леит на } S} + g'_y\delta yt + g'_z\delta zt + o(t^2) = 0 \underset{t\to\infty}{\Rightarrow}$

$$g'_y\delta ytg'_z\delta z = 0 \tag{3.9}$$

Таким образом в задаче Лагранжа допустимые вариации δy,δz всегда связаны условием 3.9. Пусть $g'_z \neq 0$. Тогда

$$\forall x : \delta z = -\frac{g'_y}{g'_z}\delta y \neq 0 \Rightarrow (\delta z)' = -\Big(\frac{g'_y}{g'_z}\Big)\delta y - \Big(\frac{g'_y}{g'_z}\Big)(\delta y)'$$

В таком случае:

$$\delta\mathcal{J} = \int\limits_a^b (F'_y\delta y + F'_{y'}(\delta y)' + F'_z\delta z + F'_{z'}(\delta z)')dx = \int\limits_a^b \Big[\Big(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{g'_y}{g'_z}\frac{\partial F}{\partial z} - \Big(\frac{g'_y}{g'_z}\Big)'\frac{\partial F}{\partial z'}\Big)\delta y + \Big(\frac{\partial F}{\partial y'} - \Big(\frac{g'_y}{g'_z}\Big)\frac{\partial F}{\partial z'}\Big)\delta y'\Big]dx =$$

интегрируем по частям и учитываем закрепленные концы

$$= \int\limits_a^b \Big(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \Big(\frac{g'_y}{g'_z}\Big)\Big(\frac{\partial F}{\partial z}\Big) - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'}\Big)\delta y dx = 0, \text{ так как слабый экстремум } \forall \delta y, \delta z, 3.9 \ \underset{\Rightarrow}{\text{осн. лемма}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \Big(\frac{g'_y}{g'_z}\Big)\Big(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'}\Big) = 0$$

Обозначим $\lambda(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'}}{y'_z} \Rightarrow$ уравнение для $y(x)$ принимает вид из условия

Аналогично, выражая $\delta, y(\delta y)'$

$$-\lambda(x) g'_z - \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = 0 \text{ -- уравнение для } z(x)$$

■