1 Билет 6. Первые интегралы автономных систем. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

1.1 Общее решение линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка

Определение 1.1. *Рассмотрим уравнение*

$$\sum_{i=1}^{n} f^i\left(\overrightarrow{x}, u\right) \frac{\partial u}{\partial x^i} = F\left(\overrightarrow{x}, u\right) \tag{1}$$

Функция $u\left(\overrightarrow{x}\right)$ называется решением уравнения (1), если $u\left(\overrightarrow{x}\right) \in C^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ и после подстановки в (1) получается тождество, причём $f^i\left(\overrightarrow{x}, u\right) \in C^1\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\right)$ – некоторые заданные функции. Уравнение (1) называется квазилинейным уравнением в частных производных первого порядка.

Определение 1.2. *Рассмотрим систему ДУ:*

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1\left(\overrightarrow{x}, u\right) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f^n\left(\overrightarrow{x}, u\right) \end{cases} \tag{2}$$

Система (2) называется характеристической системой уравнения (1), а $\overrightarrow{x}\left(t\right)$ – фазовые кривые (2) – называются характеристиками (1).

Основное свойство характеристик состоит в том, что уравнение для $u\left(\overrightarrow{x}\right)$ в силу (2) имеет вид

$$\frac{du}{dt} = F\left(\overrightarrow{x}\left(t\right), u\right) \ -$$

обыкновенное ДУ. Действительно, пусть u – решение (1), тогда

$$\frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x^i} f^i = F\left(\overrightarrow{x}\left(t\right), u\right)$$

Будем рассматривать уравнения вида

$$\sum_{i=1}^{n} f^i\left(\overrightarrow{x}, u\right) \frac{\partial u}{\partial x^i} = F\left(\overrightarrow{x}, u\right) \tag{3}$$

Определение 1.3. *Уравнения вида (3) называются линейными однородными уравнениями первого порядка в частных производных. Характеристической системой для (3) будем называть систему вида*

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1\left(\overrightarrow{x}\right) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f^n\left(\overrightarrow{x}\right) \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 1.1. *Пусть $\nu_1\left(\overrightarrow{x}\right) = C_1, \dots, \nu_k\left(\overrightarrow{x}\right) = C_k$ являются независимыми первыми интегралами системы (4). Тогда функция $u\left(\overrightarrow{x}\right) = F\left(\nu_1\left(\overrightarrow{x}\right), \dots, \nu_k\left(\overrightarrow{x}\right)\right)$ является решением уравнения (3).*

Доказательство. Запишем уравнение (3) следующим способом:

$$\sum_{i=1}^{n} f^i\left(\overrightarrow{x}\right)\frac{\partial u}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{n} f^i\left(\overrightarrow{x}\right)\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial u}{\partial \nu_l}\frac{\partial \nu_l}{\partial x^i} = \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial \nu_l}\sum_{i=1}^{k} f^i\left(\overrightarrow{x}\right)\frac{\partial \nu_l}{\partial x^i} = 0$$

Получили тождество, значит $u\left(\overrightarrow{x}\right) = F\left(\nu_1\left(\overrightarrow{x}\right),\ldots,\nu_k\left(\overrightarrow{x}\right)\right)$ действительно решение уравнения (3). ■

Теорема 1.2. *Пусть функция* $u\left(\overrightarrow{x}\right) = F\left(\nu_1\left(\overrightarrow{x}\right),\ldots,\nu_k\left(\overrightarrow{x}\right)\right)$ *является решением уравнения* (3)*. Тогда* $\nu_1\left(\overrightarrow{x}\right) = C_1,\ldots,\nu_k\left(\overrightarrow{x}\right) = C_k$ *являются независимыми первыми интегралами системы* (4)*.*

Доказательство. Так как $u\left(\overrightarrow{x}\right)$ – решение, то

$$\sum_{i=1}^{n} f^i\frac{\partial u}{\partial x^i} = 0$$

Значит $u\left(\overrightarrow{x}\right)$ – первый интеграл системы (4) по критерию первого интеграла. Этот первый интеграл может зависеть только от независимых переменных $\nu_1\left(\overrightarrow{x}\right),\ldots,\nu_k\left(\overrightarrow{x}\right)$, причём $u\left(\nu_1\left(\overrightarrow{x}\right),\ldots,\nu_k\left(\overrightarrow{x}\right)\right) = C_0$, где $\nu_1\left(\overrightarrow{x}\right),\ldots,\nu_k\left(\overrightarrow{x}\right)$ – первые интегралы системы (4). ■

1.2 Задача Коши для уравнения в частных производных первого порядка

Пусть $S:\ g\left(\overrightarrow{x}\right) = 0$ – гладкая поверхность в $\mathbb{R}^n$ и

$$\nabla g = \left\|\frac{\partial g}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial g}{\partial x^n}\right\| \neq \overrightarrow{0}$$

Определение 1.4. *Точка* $\overrightarrow{a} \in S$ *называется некритической точкой поверхности, если в системе* (4) $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{a}\right) \neq \overrightarrow{0}$ *и* $\left(\nabla g\left(\overrightarrow{a}\right), \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{a}\right)\right) \neq 0$ *(фазовые траектории не лежат на* S*).*

Пусть на S задана функция $U_0\left(\overrightarrow{x}\right)$ и $U_0\left(\overrightarrow{x}\right) \in C^1\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Задача Коши: найти такое решение $u\left(\overrightarrow{x}\right)$ уравнения (3), что $u\left(\overrightarrow{x}\right) = U_0\left(\overrightarrow{x}\right)\ \forall\overrightarrow{x} \in S$.

Теорема 1.3. *Пусть на гладкой поверхности* S *задана непрерывно дифференцируемая функция* $U_0\left(\overrightarrow{x}\right)$*. Тогда если точка* $\overrightarrow{a_0} \in S$ *является некритической, то существует окрестность этой точки, в которой решение задачи Коши* $u\left(\overrightarrow{x}\right) = U_0\left(\overrightarrow{x}\right)$ *для уравнения* (3) *существует и единственно.*

Доказательство. Запишем параметризацию поверхности S в $\mathbb{R}^n$: $x^i = \varphi^i\left(u_1,\ldots,u_{n-1}\right),\ i = \overline{1,n}$. Поверхность S может быть параметризована, поскольку требование $\nabla g \neq \overrightarrow{0}$ означает, что

$$rank\left\|\frac{\partial g}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial g}{\partial x^n}\right\| = 1 \neq 0.$$

Значит по теореме о неявной функции параметризация поверхности S задаётся следующим образом:

$$\begin{cases} x^1 = \varphi\left(x^2,\ldots,x^n\right) \\ x^2 = x^2 \\ \ldots \\ x^n = x^n \end{cases}$$

Значит $u\left(\overrightarrow{x}\right) = u\left(x^1, \ldots, x^n\right) = u\left(\varphi\left(x^2, \ldots, x^n\right), \ldots, x^n\right) = U_0\left(x^2, \ldots, x^n\right)$.

Так как $\overrightarrow{a_0} \in S$ является некритической по условию, то существует такая окрестность этой точки $\mathcal{U}\left(\overrightarrow{a_0}\right)$, где существуют $n-1$ независимых первых интегралов системы (4): $\nu_1\left(\overrightarrow{x}\right) = C_1, \ldots, \nu_{n-1}\left(\overrightarrow{x}\right) = C_{n-1}$, а общее решение уравнения (3) $u = u\left(\nu_1\left(\overrightarrow{x}\right), \ldots, \nu_{n-1}\left(\overrightarrow{x}\right)\right)$.

Рассмотрим систему уравнений относительно $x^1, \ldots, x^n$:

$$\begin{cases} \nu_1\left(\overrightarrow{x}\right) = C_1 \\ \ldots \\ \nu_{n-1}\left(\overrightarrow{x}\right) = C_{n-1} \\ g\left(\overrightarrow{x}\right) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Допустим, что систему удалось разрешить и была получена параметризация поверхности S $g\left(\overrightarrow{x}\right) = 0$:

$$\begin{cases} x_S^1 = x_S^1\left(C_1, \ldots, C^{n-1}\right) \\ \ldots \\ x_S^n = x_S^n\left(C_1, \ldots, C^{n-1}\right) \end{cases}$$

Рассмотрим

$$J\left(\overrightarrow{a_0}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \nu_1}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial \nu_1}{\partial x^n} \\ \ldots & & \\ \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^n} \\ \frac{\partial g}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial g}{\partial x^n} \end{vmatrix} \left(\overrightarrow{a_0}\right)$$

Так как $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{a_0}\right) \neq 0$, то умножим i-ый столбец определителя $J\left(\overrightarrow{a_0}\right)$ на $r^i = f^i\left(\overrightarrow{a_0}\right)$ и прибавим к первому столбцу все те столбцы, которые умножились $r^i = f^i\left(\overrightarrow{a_0}\right) \neq 0$. Учтём, что $\forall i = \overline{1, n-1}$:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \nu_i}{\partial x^j}\left(\overrightarrow{a_0}\right) f^j\left(\overrightarrow{a_0}\right) = 0$$

так как ν_i – первый интеграл. Преобразованный определитель будет выглядеть следующим образом:

$$J'\left(\overrightarrow{a_0}\right) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \nu_1}{\partial x^2} r^2 & \ldots & \frac{\partial \nu_1}{\partial x^n} r^n \\ \ldots & & & \\ 0 & \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^2} r^2 & \ldots & \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^n} r^n \\ \left(\nabla g, \overrightarrow{f}\right) & \frac{\partial g}{\partial x^2} r^2 & \ldots & \frac{\partial g}{\partial x^n} r^n \end{vmatrix} \left(\overrightarrow{a_0}\right) = (-1)^{n+1} \left(\nabla g, \overrightarrow{f}\right) \begin{vmatrix} \frac{\partial \nu_1}{\partial x^2} r^2 & \ldots & \frac{\partial \nu_1}{\partial x^n} r^n \\ \ldots & & \\ \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^2} r^2 & \ldots & \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^n} r^n \end{vmatrix} \neq 0$$

Утверждение справедливо, так как $\left(\nabla g, \overrightarrow{f}\right) \neq 0$ в нехарактеристической точке $\overrightarrow{a_0}$ и

$$rank \begin{Vmatrix} \frac{\partial \nu_1}{\partial x^2} & \ldots & \frac{\partial \nu_1}{\partial x^n} \\ \ldots & & \\ \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^2} & \ldots & \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^n} \end{Vmatrix} = n - 1$$

так как первые интегралы функционально независимы.

Таким образом в силу непрерывности рассматриваемых функций существует окрестность $\mathcal{U}\left(a_0\right)$ в которой исходный определитель

$$J\left(\overrightarrow{a_0}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \nu_1}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial \nu_1}{\partial x^n} \\ \ldots & & \\ \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^n} \\ \frac{\partial g}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial g}{\partial x^n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то есть определитель матрицы Якоби исходной системы (5) не равен нулю. Тогда по теореме о системе неявных функций система однозначно разрешима и существуют единственным образом определённные функции $x_S^1 = x_S^1\left(C_1, \ldots, C^{n-1}\right), \ldots, x_S^2 = x_S^2\left(C_1, \ldots, C^{n-1}\right)$, а значит $u = u\left(x_S^1\left(C_1, \ldots, C^{n-1}\right), \ldots, x_S^n\left(C_1, \ldots, C^{n-1}\right)\right)$ является решением уравнения (3) и $u\left(\overrightarrow{x_S}\right) = U_0\left(\overrightarrow{x}\right) \forall \overrightarrow{x} \in S$. Единственноость следует из однозначности решения.

■

Рассмотрим уравнение

$$a(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} + c(x,y)z = f(x,y) \tag{6}$$

Функция $z(x,y)$ – искомая функция, а функции $a(x,y),\ b(x,y),\ c(x,y)$ непрерывно дифференцируемы в некоторой области D. Имеется кривая

$$\gamma = \begin{cases} x = \varphi(s) \\ y = \psi(s) \end{cases}, \ s \in I = [s_1, s_2],$$

которая является непрерывно дифференцируемой в I и $(\varphi'(s), \psi'(s)) \neq (0,0)\ \forall s \in I$. На кривой γ задано значение функции $z\big|_\gamma = h(s)$, то есть $z(\varphi(s), \psi(s)) = h(s)$ и $h(s)$ непрерывно дифференцируемая функция при $s \in I$.

Характеристическая система для уравнения (6) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x,y) \\ \dot{y} = b(x,y) \end{cases} \tag{7}$$

Теорема 1.4. *Пусть кривая γ в каждой своей точке не касается характеристик. Тогда задача Коши для* (6) *и* (7) *однозначно разрешима в некоторой окрестности кривой γ.*

Доказательство. Касательным вектором к фазовым траекторям (7) является вектор $\overrightarrow{\varphi} = (a(x,y), b(x,y))$, поэтому если кривая γ в каждой своей точке не касается фазовых характеристик, то $\overrightarrow{\varphi} \nparallel \overrightarrow{\tau} = (\varphi'(s), \psi`(s))$, а значит

$$\begin{vmatrix} a(\varphi(s), \psi(s)) & \varphi'(s) \\ b(\varphi(s), \psi(s)) & \psi'(s) \end{vmatrix} \neq 0\ \forall s \in I \tag{8}$$

Выпустим из каждой точки кривой γ характеристику, то есть решим систему (7) с начальными условиями $x\big|_{t=0} = \varphi(s), y\big|_{t=0} = \psi(s)$. Пусть $x = x(t,s),\ y = y(t,s)$ – некоторые решения системы.

Уравнение (6) в силу системы (7) имеет вид $\frac{dz}{dt} + cz = f$. Поставим задачу Коши для этого уравнения с $z\big|_{t=0} = h(s)$. По основной теореме и теореме о непрерывной зависимости решения от параметра (от начальных данных) существует решение поставленной задачи $z = \omega(t,s)$ – непрерывно дифференцируемая функция в $G \subset D$. На соотношения $x = x(t,s),\ y = y(t,s)$ можно смотреть как на систему уравнений относительно t и s, выразим их через x и y.

Так как

$$I(t,s) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a(x(t,s), y(t,s)) & \frac{\partial x}{\partial s}(t,s) \\ b(x(t,s), y(t,s)) & \frac{\partial y}{\partial s}(t,s) \end{vmatrix}$$

$$I(0,s) = \begin{vmatrix} a(\varphi(s), \psi(s)) & \varphi'(s) \\ b(\varphi(s), \psi(s)) & \psi'(s) \end{vmatrix} \neq 0\ \forall s \in I,$$

поскольку $I(t,s)$ – непрерывная от t и s функция. Тогда

$$I(0,s) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi'(s) & \psi'(s) \\ a(x,y) & b(x,y) \end{vmatrix} \Bigg|_{(x,y)\in\gamma} \neq 0.$$

Поэтому существует окрестность кривой γ, где $I(t,s) \neq 0$.

■