1 Билет 6. Первые интегралы автономных систем. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

1.1 Общее решение линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка

Определение 1.1. *Рассмотрим уравнение*

$$\sum_{i=1}^{n} f^i(\overrightarrow{x}, u)\frac{\partial u}{\partial x^i} = F(\overrightarrow{x}, u) \tag{1}$$

Функция $u(\overrightarrow{x})$ называется решением уравнения (1), если $u(\overrightarrow{x}) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ и после подстановки в (1) получается тождество, причём $f^i(\overrightarrow{x}, u) \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ – некоторые заданные функции. Уравнение (1) называется квазилинейным уравнением в частных производных первого порядка.

Определение 1.2. *Рассмотрим систему ДУ:*

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(\overrightarrow{x}, u) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f^n(\overrightarrow{x}, u) \end{cases} \tag{2}$$

Система (2) называется характеристической системой уравнения (1), а $\overrightarrow{x}(t)$ – фазовые кривые (2) – называются характеристиками (1).

Основное свойство характеристик состоит в том, что уравнение для $u(\overrightarrow{x})$ в силу (2) имеет вид

$$\frac{du}{dt} = F(\overrightarrow{x}(t), u) -$$

обыкновенное ДУ. Действительно, пусть u – решение (1), тогда

$$\frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x^i} f^i = F(\overrightarrow{x}(t), u)$$

Будем рассматривать уравнения вида

$$\sum_{i=1}^{n} f^i(\overrightarrow{x}, u)\frac{\partial u}{\partial x^i} = F(\overrightarrow{x}, u) \tag{3}$$

Определение 1.3. *Уравнения вида (3) называются линейными однородными уравнениями первого порядка в частных производных. Характеристической системой для (3) будем называть систему вида*

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(\overrightarrow{x}) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f^n(\overrightarrow{x}) \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 1.1. *Пусть $\nu_1(\overrightarrow{x}) = C_1, \dots, \nu_k(\overrightarrow{x}) = C_k$ являются независимыми первыми интегралами системы (4). Тогда функция $u(\overrightarrow{x}) = F(\nu_1(\overrightarrow{x}), \dots, \nu_k(\overrightarrow{x}))$ является решением уравнения (3).*

Доказательство. Запишем уравнение (3) следующим способом:

$$\sum_{i=1}^{n} f^i(\overrightarrow{x})\frac{\partial u}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{n} f^i(\overrightarrow{x})\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial u}{\partial \nu_l}\frac{\partial \nu_l}{\partial x^i} = \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial \nu_l}\sum_{i=1}^{k} f^i(\overrightarrow{x})\frac{\partial \nu_l}{\partial x^i} = 0$$

Получили тождество, значит $u(\overrightarrow{x}) = F(\nu_1(\overrightarrow{x}), \dots, \nu_k(\overrightarrow{x}))$ действительно решение уравнения (3). ■

Теорема 1.2. *Пусть функция* $u(\overrightarrow{x}) = F(\nu_1(\overrightarrow{x}), \dots, \nu_k(\overrightarrow{x}))$ *является решением уравнения* (3). *Тогда* $\nu_1(\overrightarrow{x}) = C_1, \dots, \nu_k(\overrightarrow{x}) = C_k$ *являются независимыми первыми интегралами системы* (4).

Доказательство. Так как $u(\overrightarrow{x})$ – решение, то

$$\sum_{i=1}^{n} f^i\frac{\partial u}{\partial x^i} = 0$$

Значит $u(\overrightarrow{x})$ – первый интеграл системы (4) по критерию первого интеграла. Этот первый интеграл может зависеть только от независимых переменных $\nu_1(\overrightarrow{x}), \dots, \nu_k(\overrightarrow{x})$, причём $u(\nu_1(\overrightarrow{x}), \dots, \nu_k(\overrightarrow{x})) = C_0$, где $\nu_1(\overrightarrow{x}), \dots, \nu_k(\overrightarrow{x})$ – первые интегралы системы (4). ■

1.2 Задача Коши для уравнения в частных производных первого порядка