0.1 Классификация положений равновесия линейной автономной системы второго порядка. Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия двумерной автономной нелинейной системы. Теорема о выпрямлении траекторий.

0.1.1 Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия двумерной автономной нелинейной системы.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – положение равновесия данной системы, т. е. выполнено: $\begin{cases} \frac{dx}{dt}(x_0,y_0) = 0 \\ \frac{dy}{dt}(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$

Для того, чтобы было проще исследовать фазовые траектории линеаризуем систему нелинейных автономных уравнений. Сделать это нам позволяет соответствующая теорема (дается без доказательства)

Теорема 0.1. *Если линеаризация нелинейной системы в начале координат ($x = 0$) является простой автономной системой и $x = 0$ не является центром для исодной системы, то в окрестности $x = 0$ нелинейная система и ее линеаризация качественно эквивалентны.*

Тогда, мы можем формально линеаризовать систему, используя известные методы:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(y - y_0) + o(\rho) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(y - y_0) + o(\rho) \end{cases} \tag{2}$$

где $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$. В итоге, стандартной заменой $x = \overline{x} + x_0$ и $y = \overline{y} + y_0$ приводим систему к линейному виду.

$$\begin{cases} \frac{d\overline{x}}{dt} = \alpha_{11}\overline{x} + \alpha_{12}\overline{y} \\ \frac{d\overline{y}}{dt} = \alpha_{21}\overline{x} + \alpha_{22}\overline{y} \end{cases} \tag{3}$$

С этого момента, мы будем изучать виды фазвых траекторий и их поведение в окрестности положения равновесия для систем вида:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \tag{4}$$

с положением равновесия в точке $M_0(0,0)$.

0.1.2 Классификация положений равновесия линейной автономной системы второго порядка.

Рассмотрим автономную однородную систему линейных ДУ (4) и введем матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Получим собственные значения этой матрицы:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \operatorname{trace} A \cdot \lambda - \det A = 0 \Rightarrow \tag{6}$$

$$\lambda = \frac{\operatorname{trace} A \pm \sqrt{\operatorname{trace}^2 A - 4\det A}}{2}$$

Фазовый портрет системы зависит от собственных значений матрицы A. Рассмотрим различные виды фазовы траекторий в зависимости от собственных значений.

1. Собственные значения $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (или $\operatorname{trace}^2 A - 4\det A > 0$)

   Тогда, в базисе собственных значений матрица A примет вид: $\overline{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

   система (4) будет иметь вид: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda_1 x \\ \frac{dy}{dt} = \lambda_2 y \end{cases}$

   и решения данной системы в базисе собственных векторов: $\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$

   Решение системы в исходном базисе: $\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} h_1 \\ y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} h_2 \end{cases}$

   где $h_1,\ h_2$ – собственные векторы матрицы A. Общий вид этого решения справедлив для всех случаев, при которых $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Рассмотрим фазовые портреты.

   (a) $\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0$ и $|\lambda_1| < |\lambda_2|$

      Заметим прежде всего, что при $c_1 \neq 0,\ c_2 = 0$ и при $c_1 = 0,\ c_2 \neq 0$ мы получаем прямые линии с направляющими векторами h_1 и h_2. Поэтому вектора h_1 и h_2 являются решениями системы.

      Теперь, рассмотрим, что будет при $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$. Из $\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \Rightarrow$ $t = \dfrac{1}{\lambda_1} \ln \dfrac{x}{c_1}$ подставляем выражение для y и получаем **в базисе собственных векторов** $y = c|x|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_2}} = c|x|^r$, где $r = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0$.

      Таким образом мы приходим к выводу, что фазовые тракториии в данном случае – есть параболы (с показателем $r > 0$), причем при $t \to 0$ фазовые траектории стремяться **к** положению равновесия.

      Определение 0.1. *Положение равновесия, при котором сосбтвенные значения матрицы A одного знака и фазовые трактории направлены к положению равновесия называются* ***устойчивым узлом*** *рис 1.*

      Примечание. *В случае, когда положение равновесия является узлом, фазовые траектории касаются оси с меньшим по модулю собственным числом.*

   (b) $\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 > 0$ и $|\lambda_1| < |\lambda_2|$

      Расположение и вид траекторий (как и принцип их нахождения) остаются такими же, как и в первом случае, но направление движения по траекториям при $t \to +\infty$ меняется на противоположное.

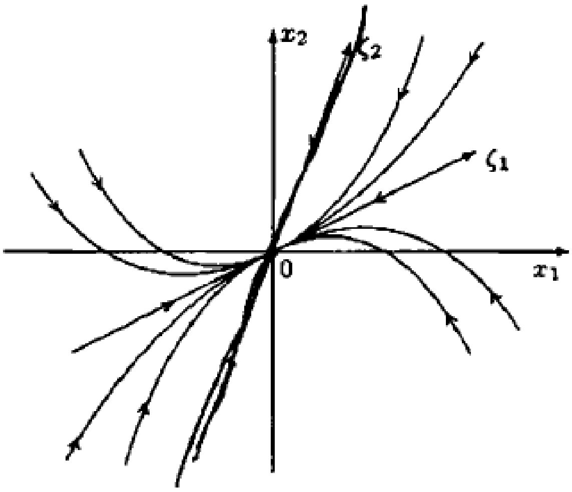

Рис. 1: Устойчивый узел, $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

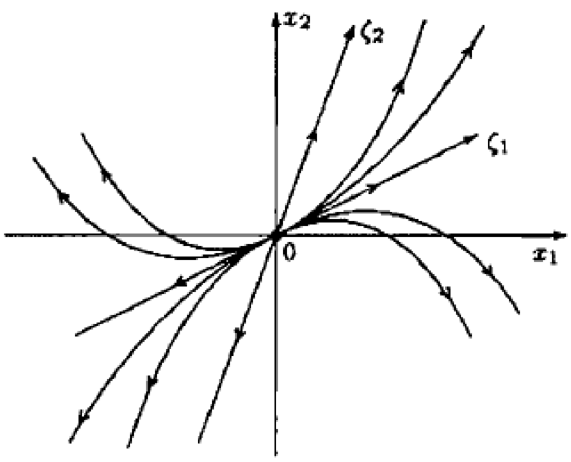

Рис. 2: Неустойчивый узел $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

Определение 0.2. *Положение равновесия, при котором собтвенные значения матрицы A одного знака и фазовые тракториии направлены от положения равновесия называются* ***неустойчивым узлом*** *рис 2.*

(c) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

В этом случае при $c_1 = c_2 = 0$ получаем положение равновесия $x = 0$, при $c_1 \neq 0,\ c_2 = 0$ и при $c_1 = 0,\ c_2 \neq 0$ мы получаем прямые линии с направляющими векторами h_1 и h_2. Для $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$ аналогично первому слуучаю получим $y = c|x|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_2}} = c|x|^r$, только в этом случае $r = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$, поэтому траектории – это кривые типа гиперболы. При этом оси с направляющими векторами h_1 и h_2 служат асимптотами траекторий типа гипербол и называются **сепаратисами** 3.

Положение равновесия в этом случае называется седлом системы.

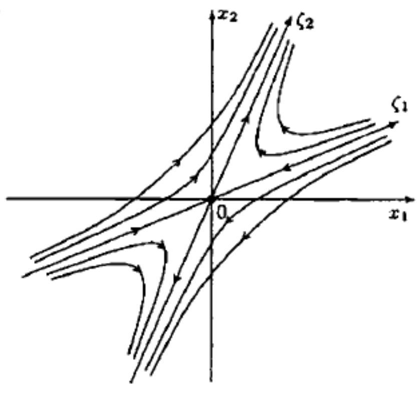

Рис. 3: Седло $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

(d) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, причем существует базис плоскости из собственных векторов h_1 и h_2 матрицы A.

В этом случае решения системы в базисе собственных векторов: $\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda t} \end{cases}$

каждое такое решение описывает в фазовой плоскости луч, выодящий из начала координат, причем движение по лучу при $t \to +\infty$ идет к нулю для $\lambda < 0$ и от нуля для $\lambda > 0$.

При $\lambda < 0$ положение равновесия называется **устойчивым дикритическим (илм звездным) узлом**, а при $\lambda > 0$ **неустойчивым дикритическим (илм звездным) узлом** рис 4 и 5.

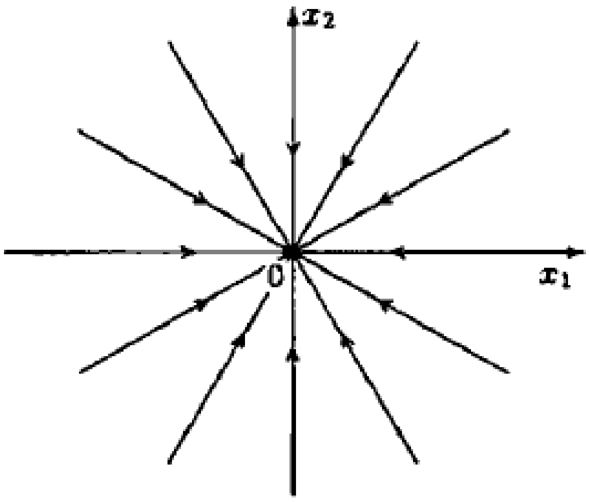

Рис. 4: Устойчивый дикритический узел, $\lambda < 0$

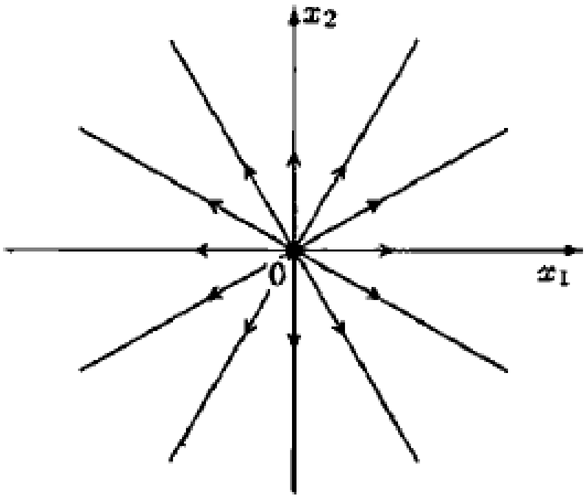

Рис. 5: Неустойчивый дикритический узел $\lambda > 0$

(e) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, причем существует базис плоскости из собственного вектора h_1 и присоединенного к нему вектора h_2 матрицы A.

В этом случае $\begin{cases} x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda t} \end{cases}$

Из этой системы видно, что прямая с направляющим собственным вектором будет являться решением, а прямая с направляющим присоединенным вектором решением являться не будет.

Подобные фазовые траектории называются устойчивыми и неустойчивыми вырожденными узлами рис 6 и 7.

2. Собственные значения $\lambda_1,\ \lambda_2\ \in\ \mathbb{C}$ (или $\operatorname{trace}^2 A - 4\det A < 0$)

В этом случае собственные значения матрица A будут комплексными, запишем и с следующем виде: $\lambda_{1,2} = r \pm i\omega$. Так же, запишем выражения для собственных векторов матрицы: $\vec{h_{1,2}} = \vec{a} \pm i\vec{b}$. Тогда решение в базисе собственных векторов запишется в следующем виде: $\begin{cases} x(t) = c_1 e^{rt}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) \\ y(t) = c_2 e^{rt}(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)) \end{cases}$ где $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Выделим действительное решение. Один из способов выделения действительного решения: положим комплексные константы таковыми: $c_1 = ce^{i\varphi}$, $c_2 = \overline{c_1} = ce^{-i\varphi}$, где $c \in \mathbb{R}$. Подставим константы в решение и получим:

$$\begin{cases} x(t) = ce^{rt}e^{i(\omega t+\varphi)} \\ y(t) = ce^{rt}e^{-i(\omega t+\varphi)} \end{cases} \tag{7}$$

это вид решения в базисе собственных векторов, перейдем обратно в исодный базис и получим:

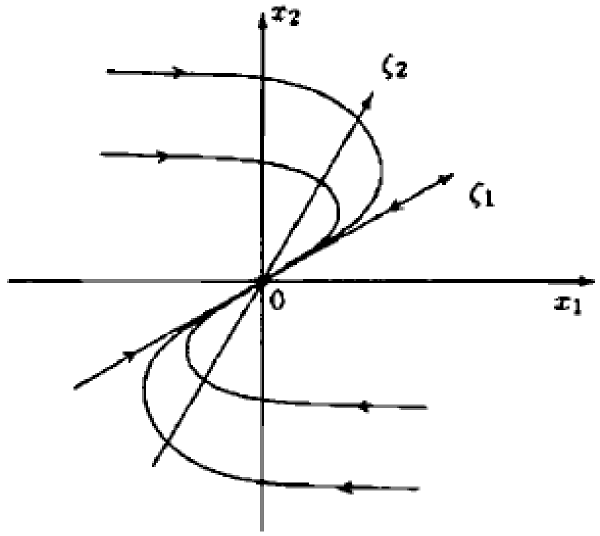

Рис. 6: Устойчивый вырожденный узел, $\lambda < 0$

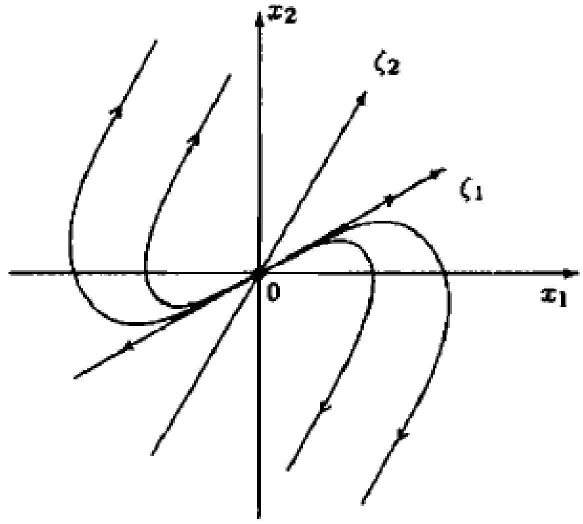

Рис. 7: Неустойчивый вырожденный узел $\lambda > 0$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a} + i\vec{b} \\ \vec{a} - i\vec{b} \end{pmatrix} e^{rt} \begin{pmatrix} e^{i(\omega t+\varphi)} \\ e^{-i(\omega t+\varphi)} \end{pmatrix} \tag{8}$$

отсюда несложно выразить:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ce^{rt}(2\vec{a}\cos(\omega t+\varphi) - 2\vec{b}\sin(\omega t+\varphi)) \tag{9}$$

переодя к базису независимых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ получим:

$$\begin{cases} x = ce^{rt}\cos\chi \\ y = ce^{rt}\sin\chi \end{cases} \tag{10}$$

где $\chi = \omega t + \varphi$. Чтобы понять вид фазовой траектории перейдем к полярным координатам:

$$\begin{cases} \rho = ce^{r\frac{\chi-\varphi}{\omega}} \\ \chi = \omega t + \varphi \end{cases} \tag{11}$$

рассмотрим полученные уравнения и выделим два принципиальных случая.

(a) $r \neq 0$

В этом случае видно, что фазовая траектория представляет собой спираль, причем если $r > 0$ спираль раскручивается, а если $r < 0$ – закручивается. Такое положение равновесия называется **фокусом** рис 8, 9, 10, 11. Заметим, что направление закручивания (или раскручивания) определяется направлением фазовой скорости.

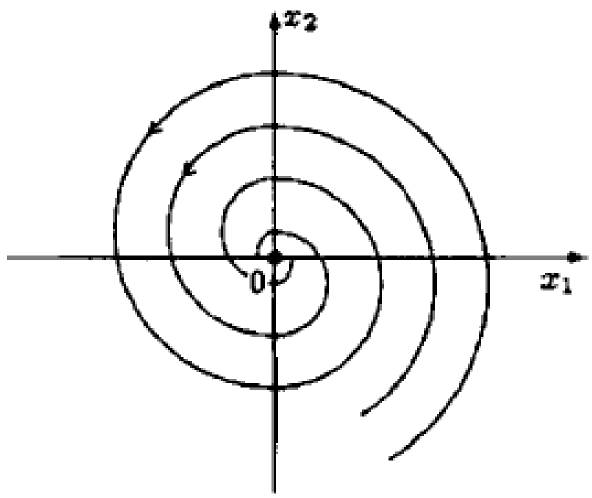

Рис. 8: Устойчивый фокус

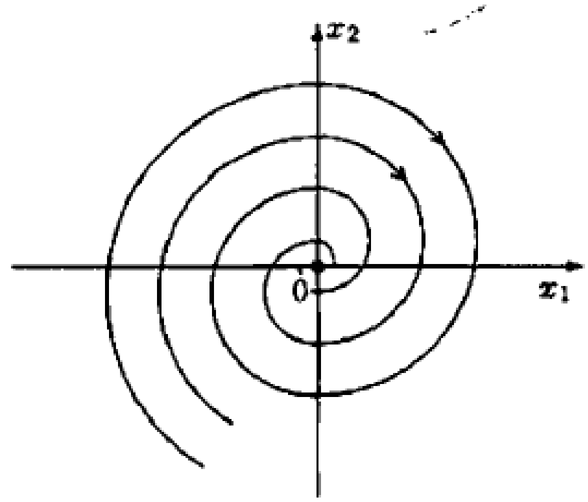

Рис. 9: Устойчивый фокус

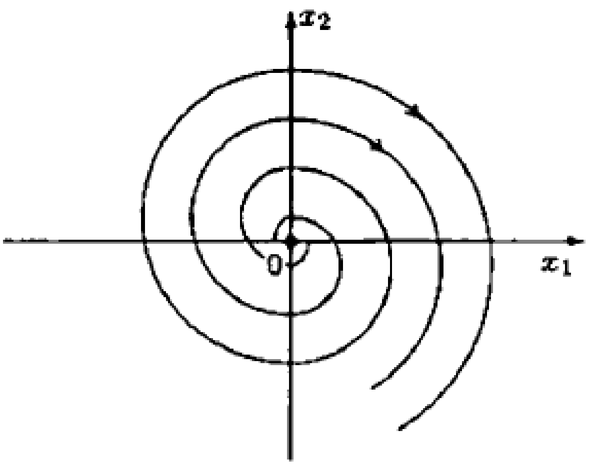

Рис. 10: Неустойчивый фокус

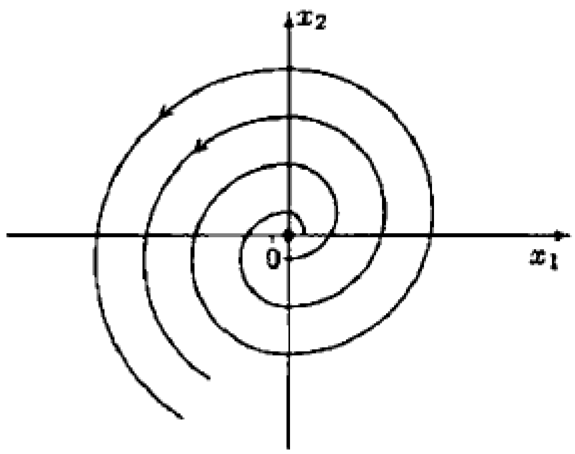

Рис. 11: Неустойчивый фокус

(b) $r = 0$

В этом случае в базисе векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ фазовые траектории будут представлять собой окружности, что видно из уравнений $\begin{cases} x = c\cos\chi \\ y = c\sin\chi \end{cases}$ соответственно, в исходном базисе траекториями будут концентрические эллипсы. Подобное положение равновесия называется **центром системы** рис 12, 13.

0.1.3 Теорема о выпрямлении траекторий.

Пусть точка x_0 **не является особой точкой автономной системы**

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x) \tag{12}$$

т. е. $f(x_0) \neq 0$, $x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$, где D – область фазового пространства.

Пусть при этом $\varphi(t, x_0)$ – решение этой системы, такое, что $\varphi(0) = x_0$. В этом случае справедлива **теорема о выпрямлении** (дается без доказательства):

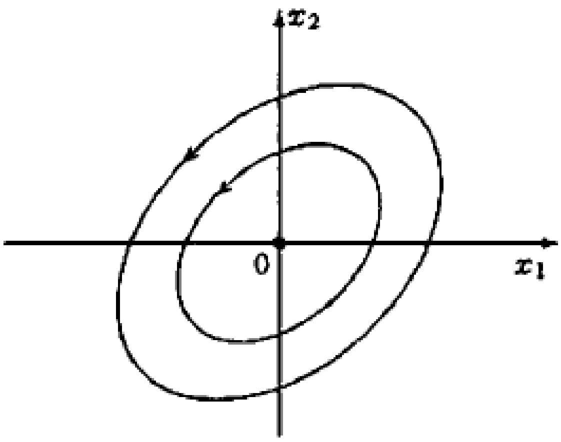

Рис. 12: Центр системы

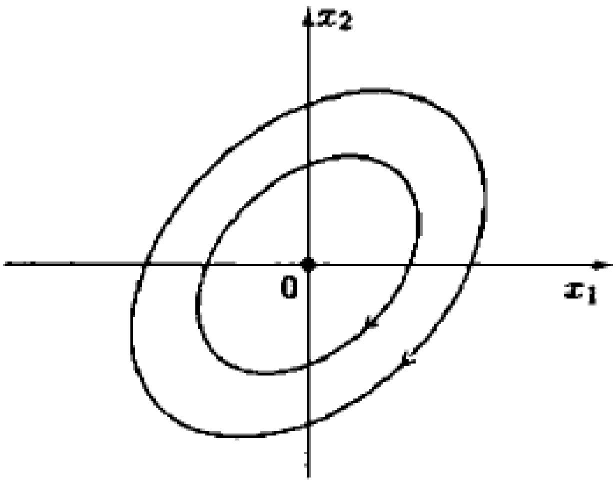

Рис. 13: Центр системы

Теорема 0.2. *Существует окрестность точки x_0, такая что в этой окрестности фазовая траектория с точностью до $o(t)$ является прямой линией с направляющим вектором $\vec{q} = \frac{\vec{f}(x)}{|f(x)|}$.*