

Содержание

1	Билет 1. Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений	3
1.1	Основные понятия	3
1.2	Простейшие типы уравнений первого порядка	4
1.2.1	Уравнения в полных дифференциалах	4
1.2.2	Уравнения с разделяющимися переменными	5
1.2.3	Однородные уравнения	6
1.2.4	Линейные уравнения первого порядка	6
1.3	Уравнение Бернулли и Риккати	8
1.3.1	Уравнение Бернулли	8
1.3.2	Уравнение Риккати	8
1.4	Методы понижения порядка дифференциальных уравнений	8
1.5	Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной	10
2	Билет 2. Задача Коши	12
2.1	Принцип сжимающих отображений	12
2.2	Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений	14
2.3	Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения n -го порядка в нормальном виде	17
2.4	Теоремы о продолжении решения для нормальной системы дифференциальных уравнений	18
2.5	Непрерывная зависимость от параметров решения задачи Коши для нормальной системы ДУ	19
2.6	Дифференцируемость решения по параметру.	20
2.7	Задача Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Особое решение	20
3	Билет 3. Линейный дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	22
3.1	Вводная часть	22
3.1.1	Понятие кольца. Рассмотрение понятия многочленов	22
3.1.2	Многочлен	23
3.2	Линейные уравнения с постоянными коэффициентами	26
3.3	Неоднородные линейные уравнения	28
3.4	Уравнение Эйлера	30
3.5	Матричная экспонента, ее свойства и применение к решению нормальных линейных систем	31
3.5.1	Матричная экспонента	31
3.5.2	Свойства матричной экспоненты	31
3.5.3	Применение к решению нормальных линейных систем	33
4	Билет 4. Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами	34
4.1	Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной линейной системы уравнений и для линейного уравнения n -го порядка в нормальном виде	34

4.2	Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы	36
4.3	Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем . .	38
4.4	Определитель Вронского и его свойства	38
4.4.1	Определитель Вронского	38
4.4.2	Свойства Вронскиана	39
4.5	Фундаментальная система решений и общее решение нормальной линейной однородной системы уравнений	39
4.6	Линейная неоднородная система уравнений в случае, когда неоднородность представлена векторным квазимногочленом	46
4.7	Формула Лиувилля-Остроградского для нормальной линейной однородной системы уравнений и для линейного однородного уравнения n -го порядка. .	46
4.8	Метод вариации постоянных для линейной неоднородной системы уравнений и для линейного неоднородного уравнения n -го порядка.	47
4.9	Теорема Штурма	49
4.10	Следствия из теоремы Штурма	51

1 Билет 1. Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений

1.1 Основные понятия

Определение 1.1. Уравнение вида

$$F(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением, где x – аргумент, $y(x)$ – неизвестная функция, F – известная функция.

Определение 1.2. Если это уравнение удастся разрешить относительно старшей производной, такое дифференциальное уравнение называется разрешённым относительно старшей производной и записывается в виде

$$y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

Порядок уравнения определяется порядком старшей производной от y .

Определение 1.3. Функция $y = \varphi(x)$ называется решением ДУ, если она n раз дифференцируема и

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0 \quad \forall x,$$

где определена функция $\varphi(x)$ с её производными.

Определение 1.4. Система n уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f_1(t, x^1(t), \dots, x^n(t)) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f_n(t, x^1(t), \dots, x^n(t)) \end{cases} \quad (1)$$

где $x^1(t), \dots, x^n(t)$ – искомые функции, называется нормальной системой ДУ n -го порядка.

Утверждение 1.1. Рассмотрим ДУ $y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$ n -ого порядка. Это уравнение эквивалентно следующей нормальной системе ДУ:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = v_2 \\ \dot{v}_2 = v_3 \\ \dots \\ \dot{v}_{n-1} = v_n \\ \dot{v}_n = f_n(x, v_1, v_2, \dots, v_n) \end{cases} \Leftrightarrow y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad (2)$$

Доказательство. Введем обозначения: $y = v_1(x)$, $y' = v_2(x)$, $y'' = v_3(x)$, \dots , $y^{(n-1)} = v_n(x)$. Тогда имеем $\dot{v}_1 = v_2$, $\dot{v}_2 = v_3$, \dots , $\dot{v}_n = f(x, v_1, v_2, \dots, v_n)$, то есть получилась нормальная система дифференциальных уравнений n -ого порядка с неизвестными v_i .

Обратными заменами системы уравнений можно получить исходное дифференциальное уравнение $y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$. ■

Определение 1.5. Рассмотрим уравнение 1-ого порядка $y' = f(x, y(x))$. Тогда задача решить это уравнение с условием $y(x_0) = y_0$ называется задачей Коши.

Определение 1.6. Пусть $\varphi(x)$ – решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y(x))$. График решения $\varphi(x)$ называется интегральной кривой. В силу определения функции $f(x, y)$ на множестве Ω , вся интегральная кривая будет лежать в Ω .

Определение 1.7. Проведём через каждую точку интегральной кривой $(x_0, y_0) \in \Omega$ малый отрезок с углом наклона по отношению к оси x равным α , причём $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0, y_0)$. Получим так называемое поле направлений.

Из построения интегральной кривой следует, что интегральная кривая в каждой своей точке касается поля направлений. Верно и обратное: кривая, касающаяся в каждой своей точке поля направлений, является интегральной кривой.

1.2 Простейшие типы уравнений первого порядка

1.2.1 Уравнения в полных дифференциалах

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$. Тогда кривая

$$\gamma = \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (3)$$

называется интегральной кривой рассматриваемого уравнения, если $\forall t : t \in [t_1; t_2]$ выполнено

$$P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'_t + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'_t = 0. \quad (4)$$

Определение 1.8. Дифференциальное уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если $\exists F(x, y) : P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y)$.

Тогда $dF(x, y) = 0 \Rightarrow F(x, y) = \text{const}$, то есть $F(x, y)$ определяет неявную функцию $y(x)$.

Теорема 1.1. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в области D . Для того, чтобы уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ являлось уравнением в полных дифференциалах, необходимо выполнение условия $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $(x, y) \in D$. Если же область D ещё и одновязна, то условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ является достаточным.

Доказательство. Пусть $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ – уравнение в полных дифференциалах, тогда $\exists F(x, y) : P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y) \Rightarrow P = \frac{\partial F}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$. По условию P и Q – непрерывно дифференцируемы, тогда $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ – непрерывные функции, значит

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (x, y) \in D. \quad (5)$$

Пусть теперь D – односвязная область. Рассмотрим значение интеграла

$$F = \int_{(x_0, y_0)}^{(x; y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

который берётся по кривой γ , лежащей в D и соединяющей точки (x_0, y_0) и $(x; y)$. Пусть $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда по теореме о независимости интеграла от пути интегрирования выходит, что значение интеграла не зависит от пути интегрирования γ , а является функцией от (x, y) , значит $F = F(x, y)$ – функция и $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y)$. ■

Определение 1.9. Непрерывно дифференцируемая функция $\mu(x, y) \neq 0$ в области G называется интегрирующим множителем для уравнения в полных дифференциалах $\mu(x, y)(P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = 0$, если исходное уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ не является уравнением в полных дифференциалах.

Если $\mu(x, y)$ – интегрирующий множитель, то для достаточного условия имеем

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \Leftrightarrow P \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \frac{\partial P}{\partial y} = Q \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Полученное уравнение не легче исходного, так как теперь задача свелась к нахождению μ . Обычно интегрирующий множитель ищут в виде $\mu(x)$, $\mu(y)$, $\mu(x^2 + y^2)$, $\mu(x^\alpha, y^\beta)$.

1.2.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим ДУ вида $P(y)dx + Q(x)dy = 0$, где $P(y) \in C^1_{[y_1; y_2]}$, $Q(x) \in C^1_{[x_1; x_2]}$. Если $\exists y_0 : P(y_0) = 0$ или $\exists x_0 : Q(x_0) = 0$, тогда

$$\begin{cases} x = t \\ y = y_0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_0 \\ y = t \end{cases} \quad (6)$$

являются интегральными кривыми рассматриваемого ДУ соответственно. Если же выполняется $P(x, y) \neq 0$ и $Q(x, y) \neq 0$, то применим к уравнению интегрирующий множитель

$$\mu(x, y) = \frac{1}{P(x, y)Q(x, y)},$$

получив уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{dx}{Q(x)} + \frac{dy}{P(y)} = 0. \quad (7)$$

Значение $\mu(x, y)$ действительно является интегрирующим множителем, так как выполняется

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{Q(x)} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{P(y)} \right) = 0. \quad (8)$$

Тогда

$$dF(x, y) = \frac{dx}{Q(x)} + \frac{dy}{P(y)} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{Q(x)} \Rightarrow F(x, y) = \int_{x_1}^x \frac{dt}{Q(t)} + C(y), \quad (9)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{P(y)} = C'(y) \Rightarrow C(y) = \int_{y_1}^y \frac{dt}{P(t)} + C_1 \Rightarrow F(x, y) = \int_{x_1}^x \frac{dt}{Q(t)} + \int_{y_1}^y \frac{dt}{P(t)} + C_1 = \text{const}. \quad (10)$$

Определение 1.10. Если дифференциальное уравнение вида $P_1(x, y)dx + Q_1(x, y)dy = 0$ может быть сведено к виду $P(y)dx + Q(x)dy = 0$, то такое уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными.

Утверждение 1.2. Задача Коши уравнения с разделяющимися переменными $P(y)dx + Q(x)dy = 0$ задаётся в виде $y(x_1) = y_1$, а её решение в виде

$$\int_{x_1}^x \frac{dt}{Q(t)} + \int_{y_1}^y \frac{dt}{P(t)} = 0. \quad (11)$$

1.2.3 Однородные уравнения

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$y' = y \left(\frac{y}{x} \right),$$

которое назовём уравнением с однородной правой частью. Сделаем замену $v(x) = \frac{y}{x}$, тогда $y(x) = v(x) \cdot x$, $y'_x = x \cdot v'_x + v = g(v)$, откуда имеем $x \frac{dv}{dx} = g(v) - v$. Если $\exists g(v_0) = v_0$, то v_0 – решение уравнения $x \frac{dv}{dx} = g(v) - v$. Если же $v \neq g(v)$, тогда

$$\frac{dv}{g(v) - v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |x| + C = \int_{v_0}^v \frac{dt}{g(t) - t}. \quad (12)$$

Таким образом, найдено решение исходного уравнения с однородной правой частью в квадратурах.

Определение 1.11. Функция $F(x^1, x^2, \dots, x^n)$ называется однородной степени m , если $\forall \lambda > 0 \rightarrow F(\lambda x^1, \lambda x^2, \dots, \lambda x^n) = \lambda^m F(x^1, x^2, \dots, x^n)$.

Пример 1.1. Рассмотрим уравнение $P(x, y)dx = Q(x, y)dy$. Если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции степени m , тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = \frac{x^m P(1, \frac{y}{x})}{x^m Q(1, \frac{y}{x})} = \frac{P(1, \frac{y}{x})}{Q(1, \frac{y}{x})} = g\left(\frac{y}{x}\right) \quad (13)$$

Таким образом исходное уравнение свелось к уравнению с однородной правой частью.

1.2.4 Линейные уравнения первого порядка

Определение 1.12. Дифференциальное уравнение вида $y' + a(x)y = f(x)$ – линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Дифференциальное уравнение вида $y' + a(x)y = 0$ – линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка. При этом $a(x) \in C^1_{I(x)}$, $f(x) \in C_{I(x)}$, где $I(x)$ – область, на которой определены функции $a(x)$ и $f(x)$.

Введём оператор $L = \frac{d}{dx} + a(x)$, который действует на множество непрерывно дифференцируемых функций $\varphi \in C^1_{I(x)}$. Тогда уравнение $y' + a(x)y = f(x)$ переписывается в виде $L(y) = f(x)$, а уравнение $y' + a(x)y = 0$ переписывается в виде $L(y) = 0$.

Теорема 1.2. Введённый оператор $L = \frac{d}{dx} + a(x)$ – линейный оператор.

Доказательство. Рассмотрим линейную комбинацию $c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$:

$$L(c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)) = (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)' + a(x)(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1L(\varphi_1) + c_2L(\varphi_2) \quad (14)$$

Таким образом, $L(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1L(\varphi_1) + c_2L(\varphi_2)$, то есть L – линейный оператор. ■

Утверждение 1.3. Решением уравнения $y' + a(x)y = 0$ является

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

Доказательство. Найдём решение уравнения $y' + a(x)y = 0$:

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx \Rightarrow \ln |y| = - \int_{x_0}^x a(t)dt + \ln C \Rightarrow |y| = Ce^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}, \quad C > 0 \quad (16)$$

Раскрывая модуль и объединяя полученное решение с нулевым ($y \equiv 0$), имеем

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

■

Утверждение 1.4. Решением уравнения $y' + a(x)y = f(x)$ является

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (18)$$

Доказательство. Найдём решение уравнения $y' + a(x)y = f(x)$: воспользуемся уже найденным решением однородного уравнения, применяя метод вариации постоянной. То есть будем искать решение в виде

$$y = C(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}. \quad (19)$$

Подставим это решение в исходное уравнение:

$$C'(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} - a(x)C(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} + a(x)C(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} = f(x) \quad (20)$$

$$C'(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} = f(x) \Rightarrow C(x) = \int_{x_0}^x f(t)e^{\int_{x_0}^t a(s)ds} + C_0 \quad (21)$$

Таким образом найден вид $C(x)$. Теперь подставим эту функцию:

$$y = C_0 e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} + e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} \int_{x_0}^x f(t)e^{\int_{x_0}^t a(s)ds} \quad (22)$$

$$y = C_0 e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} + \int_{x_0}^x f(t)e^{-\int_{x_0}^t a(s)ds} \quad (23)$$

Из полученного решения видно, что оно является суммой решения однородного уравнения и частного решения. ■

Утверждение 1.5. Если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – некоторые решения уравнения $y' + a(x)y = f(x)$, то $z(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ – решение однородного уравнения $y' + a(x)y = 0$.

Доказательство. По условию $\varphi_1' + a(x)\varphi_1 = f(x)$, $\varphi_2' + a(x)\varphi_2 = f(x)$, откуда очевидно, что $(\varphi_1 - \varphi_2)' + a(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$. Обозначив $z = \varphi_1 - \varphi_2$, получим $z' + a(x)z = 0$, то есть z – решение однородного уравнения. ■

1.3 Уравнение Бернулли и Риккати

1.3.1 Уравнение Бернулли

Определение 1.13. Д.у. вида $y' + a(x) \cdot y = y^r \cdot f(x)$ ⁽²⁴⁾, где $a(x), f(x) \in C^1, r \in \mathbb{R}, r \neq 1$ называется уравнением Бернулли.

Утверждение 1.6. Если $r > 0$, то $y \equiv 0$ - тривиальное решение. Пусть $y \neq 0$, разделим ДУ на $y^r \Rightarrow \frac{y'}{y^r} + a(x) \cdot y^{1-r} = f(x)$. Замена: $u(x) = y^{1-r} \Rightarrow u' = (1-r) \cdot y^{-r} \cdot y' \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{1}{1-r} \cdot u' + a(x) \cdot u = f(x)$ - свелось к линейному уравнению.

1.3.2 Уравнение Риккати

Определение 1.14. Д.у. вида $y' + a(x) \cdot y^2 + b(x) \cdot y + c(x)$ ⁽²⁵⁾, где $a(x), b(x) \in C^1_{I(x)}$, $c(x) \in C_{I(x)}$ называется уравнением Риккати.

Утверждение 1.7. В общем случае уравнение Риккати не допускает решений в квадратах, однако, если известно некоторое решение $y = \varphi(x)$, то сделав замену $y = u + \varphi$, получаем: $\varphi' = u\varphi^2 + b\varphi + c$
 $\varphi' + u' = u\varphi^2 + 2a\varphi u + au^2 + b\varphi + bu + c \Rightarrow u' = au^2 + (2a\varphi + b)u$ - свелось к уравнению Бернулли.

1.4 Методы понижения порядка дифференциальных уравнений

Утверждение 1.8. Рассмотрим множество преобразований плоскости

$\bar{x} = \varphi(x, y, \lambda), \bar{y} = \psi(x, y, \lambda)$ ⁽²⁶⁾. В (26) каждому $\lambda \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ соответствует некоторое преобразование, например, $\bar{x} = \lambda x, \bar{y} = \lambda y, \lambda > 0$ - гомотетия. Множество преобразований (26) является группой преобразований, если оно содержит любую композицию (26), т.е. $\exists \lambda_0 : \varphi(\varphi(x, y, \lambda_1), \psi(x, y, \lambda_2)) = \varphi(x, y, \lambda_0)$, содержит тождественное преобразование, т.е. $\exists \lambda_0 : \varphi(x, y, \lambda_0) = x; \psi(x, y, \lambda_0) = y$, и вместе с любым преобразованием содержит и обратное: $\forall \lambda \in \mathcal{D} : \exists \lambda_0 : x = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda_0); y = \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda_0)$
 Т.о. если (26) - группа, то $x = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda), y = \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda)$; если в ДУ $y' = f(x, y)$ осуществить переход к новым координатам, то

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\psi'_x d\bar{x} + \psi'_y d\bar{y}}{\varphi'_x d\bar{x} + \varphi'_y d\bar{y}} = f(\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda), \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda)) = \tilde{f}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\psi'_x + \psi'_y \cdot \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}}{\varphi'_x + \varphi'_y \cdot \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}} = \tilde{f}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda) \Rightarrow \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{\tilde{f} \cdot \varphi'_x - \psi'_x}{\psi'_y - \tilde{f} \cdot \varphi'_y} \end{aligned} \quad (27)$$

(27) является записью $y' = f(x, y)$ в новых координатах. Говорят, что $y' = f(x, y)$ допускает группу $x = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda), y = \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda)$, если оно не изменяется при переходе к новым переменным, т.е. $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \tilde{f}(\bar{x}, \bar{y})$.

Следствие 1.2.1. Рассматриваем уравнения вида $F(x, y, y', y'') = 0$ ⁽²⁸⁾

1. $F(x, y'', y') = 0$ ⁽²⁹⁾ Замена $y'(x) = v(x) \Rightarrow y''(x) = v'(x)$ и (29) в этом случае имеет вид $F(x, v(x), v'(x)) = 0 \xrightarrow{\text{решаем}} V(x) = y(x, c_1)$. Тогда решение (29) запишется в виде

$\frac{dy}{dx} = g(x, c_1) \Rightarrow y(x) = c_2 + \int g(x, c_1) dx$. Заметим, что (29) допускает группу сдвига $x = \bar{x}$, $y = \bar{y} + y_0$

2. $\boxed{F(y, y', y'') = 0}^{(30)}$ (не содержит явно x). Замена: $y' = V(y)$, тогда

$$y'' = \frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dy} \frac{dy}{dx} = V \frac{dV}{dy} \Rightarrow F(y, V, y \frac{dV}{dy}) = 0 - \text{ДУ первого порядка.}$$

Решение $V(y) = g(y, c_1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = g(y, c_1) \Rightarrow$ Решение (30): $\int \frac{dy}{g(y, c_1)} = x + c_2$.

Заметим, что (30) допускает группу сдвигов $x = \bar{x} + x_0$, $y = \bar{y}$

3. $\boxed{F(x, y'', y', y) = 0}$ и F — однородная степени m по y'', y', y , т.е. $\forall \lambda > 0 \rightarrow$

$F(x, \lambda y'', \lambda y', \lambda y) = \lambda^m \cdot F(x, y'', y', y)$. В таком случае ДУ допускает группу

$x = \bar{x}$, $y = \lambda \bar{y}$. Замена: $z(x) = \frac{y'}{y} \Rightarrow y' = z(x)y$

$$\Rightarrow y'' = z'y + zy' = z'y + z^2y = y \cdot (z' + z^2) \Rightarrow F(x, y, zy, y(z' + z^2)) = 0$$

$\Rightarrow y^m \cdot F(x, 1, z, z' + z^2) = 0$ — относительно z имеем уравнение первого порядка.

Если его решение $z(x) = g(x, c_1)$, то $\frac{y'}{y} = g(x, c_1) \Rightarrow \frac{dy}{y} = g(x, c_1) dx \Rightarrow$

$$\ln |y| = \int g(x, c_1) dx + c_2$$

4*. Будем говорить, что функция $F(x, y, y'', \dots, y^{(n)})$ является квазиоднородной функцией степени r , если $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall \lambda > 0 : F(\lambda x, \lambda^\alpha y, \lambda^{\alpha-1} y', \dots, \lambda^{\alpha-n} y^{(n)}) = \lambda^r \cdot F(x, y, \dots, y^{(n)})$.

Рассмотрим множество преобразований:

$$\begin{cases} x = \lambda \bar{x} \\ y = \lambda^\alpha \bar{y} \end{cases}, \quad \text{где } \lambda > 0 \quad (31)$$

Такое множество преобразований перепишем в виде:

$$\begin{cases} x = e^\beta \cdot \bar{x} \\ y = e^{\alpha\beta} \bar{y} \end{cases}$$

Если F в (30) является квазиоднородной, то (30) допускает группу растяжений (31):

$$\boxed{F(x, y'', y', y) = 0} \xrightarrow{\text{преобр.}} F(\lambda \bar{x}, \lambda^\alpha \bar{y}, \lambda^{\alpha-1} \bar{y}', \lambda^{\alpha-2} \bar{y}'') = \lambda^r \cdot F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'') = 0$$

\Downarrow

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'') = 0$$

$$\text{Замена: } \begin{cases} x = e^t \\ y = z(t) \cdot e^{2t} \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{z'_t \cdot e^{\alpha t} + z \cdot \alpha \cdot e^{\alpha t}}{e^t} = e^{(\alpha-1)t} \cdot (z'_t + \alpha z)$$

\Downarrow

$$\begin{aligned} y''_{xx} &= \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(\alpha-1) \cdot e^{(\alpha-1)t} \cdot (z'_t + \alpha z) + e^{(\alpha-1)t} \cdot (z''_{tt} + \alpha z'_t)}{e^t} = \\ &= e^{(\alpha-2)t} \cdot (z''_{tt} + (2\alpha-1) \cdot z'_t + \alpha \cdot (\alpha-1)z) \end{aligned}$$

\Downarrow

$$\begin{aligned} &F(e^t; z \cdot e^{\alpha t}; e^{(\alpha-1)t} \cdot (z'_t + \alpha z); e^{(\alpha-2)t} (z''_{tt} + (2\alpha-1)z'_t + \alpha \cdot (\alpha-1)z)) = \\ &= e^{rt} \cdot F(1; z; z'_t + \alpha z; z''_{tt} + (2\alpha-1)z'_t + \alpha \cdot (\alpha-1)z) = 0 - \text{не содержит } x, \text{ т.е. свелось к случаю 2} \end{aligned}$$

1.5 Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной

Утверждение 1.9. Рассмотрим $\boxed{F(x, y, y') = 0}^{(32)}$, где $F(x, y, y')$ как функция трёх переменных является непрерывно дифференцируемой в области $G \subset \mathbb{R}^3$

Решение уравнения $F(x, y, y') = 0$ будем представлять как кривую в параметрическом виде:

$$\gamma: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in [t_1, t_2], \quad \varphi(t), \psi(t) \in C^1_{[t_1, t_2]} \quad (33)$$

Кривая (33), является интегральной кривой (32) \Rightarrow

$$\Rightarrow F\left(\varphi(t), \psi(t), \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}\right) = 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2] \quad (34)$$

Будем решать эквивалентную систему положив $p = \frac{dy}{dx}$:

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ dy = p dx \end{cases} \quad (35)$$

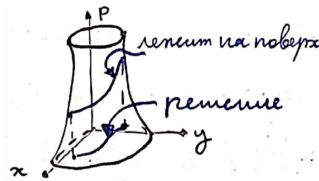
Утверждение 1.10. Уравнение (32) эквивалентно системе (35).

Доказательство. Пусть γ - интегр. кривая (32). Положим $p = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} = \frac{dy}{dx}$ - второе уравнение в системе (35) выполнено, а первое выполнено в силу подстановки в (34). Обратно, пусть $x(t) = \varphi(t)$, $y(t) = \psi(t)$, p - решение (34). \Rightarrow Из второго уравнения системы:

$p = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} \rightarrow$ Подставляем в первое уравнение системы и получаем само уравнение (34) ■

Утверждение 1.11. Рассмотрим метод решения (32), который называется методом введения параметра.

Первое ур-ние в системе (35) рассмотрим как задающее в $\mathbb{R}^3_{(x,y,p)}$ гладкую поверхность S , для которой параметрическое представление имеет вид:



$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ p = \chi(u, v) \end{cases} \Rightarrow F(\varphi(u, v); \psi(u, v); \chi(u, v)) \equiv 0$$

Потребуем, чтобы $\text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial v} \end{pmatrix} = 2, \quad \forall u, v \in G$ т.е. S была простой гладкой пов.

Тогда остаётся удовлетворить второму уравнению системы (35):

$$\frac{\delta \psi}{\delta u} du + \frac{\delta \psi}{\delta v} dv = \chi \cdot \left(\frac{\delta \varphi}{\delta u} du + \frac{\delta \varphi}{\delta v} dv \right) \Rightarrow \left(\frac{\delta \psi}{\delta u} - \chi \frac{\delta \varphi}{\delta v} \right) du = \left(\chi \frac{\delta \varphi}{\delta v} - \frac{\delta \psi}{\delta v} \right) dv \quad (36)$$

Если $P(u, v) \neq 0 \forall (u, v) \in G$, то из (36) получаем Д.У.: $\frac{du}{dv} = \frac{Q(u, v)}{P(u, v)}$

Это решение $u = u(v, c)$, тогда $\begin{cases} x = \varphi(u(v, c), v) = x(v, c) \\ y = \psi(u(v, c), v) = y(v, c) \end{cases}$ - является параметрическим представлением решения (32)

Если же существует связь между u и v : $u = f(v)$, $P(f(v), v) = Q(f(v), v) = 0 \forall v \in G$, то $u = f(v)$ явл. решением $\left(\chi \frac{\delta \varphi}{\delta v} - \frac{\delta \psi}{\delta v}\right) dv$, а

$$\begin{cases} x = x(v) \\ y = y(v) \end{cases} \quad - \text{явл. решением (36)}$$

2 Билет 2. Задача Коши

2.1 Принцип сжимающих отображений

Работаем в $E = \mathbb{R}^n$ - пространстве точек с n координатами. E - аффинное пространство, а \vec{E} - его присоединенное линейное пространство, состоящее из векторов, натянутых на точки E .

Определение 2.1. Пусть L - это векторное пространство, и на нем задано отображение $\|\cdot\| : L \rightarrow \mathbb{R}$ такое, что:

1. $\forall x \in L \mapsto \|x\| \geq 0$. А также $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
2. $\forall x \in L \ \& \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3. $\forall x, y \in L \mapsto \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ - неравенство треугольника.

Тогда данное отображение называется нормой, а пространство L нормированным.

Пример 2.1. Приведем пример норм. Пусть $a(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда норму можно определить, допустим, так:

$$\|a\|_1 = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}. \quad (37)$$

Или так:

$$\|a\|_2 = \max_{j=1, \dots, n} |x_j|. \quad (38)$$

И тогда можно ввести понятие эквивалентности норм.

Определение 2.2. Пусть снова L - линейное пространство. Тогда нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на L называются эквивалентными, если $\exists C_1, C_2 > 0 : \forall x \in L \mapsto C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1$.

Как видно, для определенных выше двух норм это соотношение удовлетворяется.

Утверждение 2.1. В конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.

Рассмотрим множество функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$ для некоторых неравных $a, b \in \mathbb{R}$ и обозначим данное множество $C[a; b]$. Понятно, что $C[a; b]$ является линейным пространством. Тогда введем на нем норму.

Определение 2.3. Нормой функции $f(x) \in C[a; b]$ будем называть число

$$\|f(x)\| = \max_{x \in [a; b]} |f(x)|.$$

Определение 2.4. Набор функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) \in C[a; b]$ будем называть вектор-функцией и обозначать $f(x) = \vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T$.

Определение 2.5. Вектор-функция $f(x)$ называется непрерывной (дифференцируемой, непрерывно дифференцируемой и т.п.), если все ее компоненты непрерывны (дифференцируемы, непрерывно дифференцируемы и т.п.).

Определение 2.6. Модулем вектор-функции $f(x)$ назовем число

$$|f(x)| = \sqrt{\sum_{j=1}^n f_j^2(x)}. \quad (39)$$

Норму вектор-функции можно определить как

$$\|f(x)\|_1 = \max_{x \in [a; b]} |f(x)|.$$

Или же как

$$\|f(x)\|_2 = \max_{j=1, \dots, n} \max_{x \in [a; b]} f_j(x).$$

Понятно, что эти две нормы эквивалентны.

Определение 2.7. Пусть имеется функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$, где $f_n(x) \in C[a; b]$ - линейное пространство функций с нормой (1 или 2 - неважно). Тогда говорят, что данная последовательность сходится к функции $f(x)$ по норме, если:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0. \quad (40)$$

Аналогично все то же самое и точно так же определяется и для вектор-функций $f(x) = \vec{f}(x) \in C[a; b]^n$.

Определение 2.8. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ называется фундаментальной, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \ \& \ \forall m \geq N \mapsto \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon. \quad (41)$$

Определение 2.9. Функциональное пространство L называется полным по [данной] норме, если любая фундаментальная функциональная последовательность данного пространства сходится по норме к функции из этого же пространства L .

Теорема 2.1. Функциональное пространство $C[a; b]$ с нормой $\|\cdot\|_1$ является полным.

Доказательство. Возьмем произвольную функциональную последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ из нашего пространства непрерывных функции. Тогда из определения фундаментальности следует, что $\|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$.

Однако $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon \ \forall x \in [a; b]$.

А значит, последовательность $f_n(x)$ сходится к некоторой $f(x)$, причем равномерно на $[a; b]$ (числовая последовательность $\|f_n(x)\|$ мажорирует функциональную последовательность $f_n(x)$).

Так как $f_n(x) \in C[a; b]$ - непрерывны $\forall n \in \mathbb{N}$, и последовательность сходится равномерно на $[a; b]$, то предельная функция $f(x)$ также является непрерывной на $[a; b]$, а значит, $f(x) \in C[a; b]$.

Таким образом, последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ сходится к $f(x) \in C[a; b]$. В силу произвольности $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ заключаем, что функциональное пространство $C[a; b]$ с нормой $\|\cdot\|_1$ является полным. ■

Определение 2.10. Полное нормированное линейное пространство называется Банаховым. Обозначается B .

Определение 2.11. Функциональный ряд $\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ называется сходящимся по норме,

если последовательность его частичных сумм $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ является сходящейся по норме.

Определение 2.12. Пусть $\forall x \in M \subseteq B$ определен элемент $Ax \in B$. Тогда говорят, что на множестве B задан оператор A с областью определения M .

Будем рассматривать уравнение $x = Ax$.

Определение 2.13. Множество $M \subseteq B$ называется ограниченным, если $\exists C > 0$ такое, что $\forall x \in M \mapsto \|x\| \leq C$.

Определение 2.14. Оператор A называется сжатием на M , если:

1. $\forall x \in M \mapsto Ax \in M$;
2. $\exists k \in (0; 1) : \forall x, y \in M \mapsto \|Ax - Ay\| \leq k\|x - y\|$.

Теорема 2.2 (Принцип сжимающих отображений). Пусть множество $M \subseteq B$ является ограниченным и замкнутым, а оператор A является сжатием. Тогда решение уравнения $x = Ax$ существует и единственно.

Доказательство. Будем использовать итерационный метод, согласно которому мы выбираем начальное x_0 , а затем строим последовательность $x_n = Ax_{n-1}$. Тогда, если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax$, то $x = Ax$.

Пусть $x_n = S_n = x_0 + (x_1 - x_0) + \dots + (x_n - x_{n-1})$. Докажем, что $\|x_{n+1} - x_n\| \leq 2Ck^n$ для некоторого $C > 0$, ограничивающего последовательность x_n . Сделаем это по индукции.

База индукции: $\|x_1 - x_0\| \leq \|x_1\| + \|x_0\| \leq 2C$.

Предположим, что $\|x_n - x_{n-1}\| \leq 2Ck^{n-1}$. Тогда получаем, что $\|x_{n+1} - x_n\| = \|Ax_n - Ax_{n-1}\| \leq k\|x_n - x_{n-1}\| \leq 2Ck^n$.

И получаем, что $x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (x_j - x_{j-1}) \leq x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} 2Ck^{j-1} < \infty$.

А значит $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. А поскольку M замкнуто, то $x \in M$.

Теперь рассмотрим разность $\|Ax_n - Ax\| \leq k\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Это означает, что $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax$.

Учитывая, что $x_{n+1} = Ax_n$, то, перейдя к пределу с обеих частей равенства, мы получаем, что итерационный метод сходится к решению уравнения $x = Ax$. И таким образом, доказано существование решения. Теперь докажем его единственность.

Пойдем от противного: пусть x и y – два разных решения. Тогда $\|x - y\| = \|Ax - Ay\| \leq k\|x - y\|$. Учитывая, что $k \in (0; 1)$, то данная ситуация возможна тогда и только тогда, когда $\|x - y\| = 0$. Следовательно, $x = y$, что противоречит тому, что это два разных решения. Итак, теорема доказана. ■

2.2 Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений

Определение 2.15. Система вида

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(t, \bar{x}) \\ \dot{x}^2 = f^2(t, \bar{x}) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f^n(t, \bar{x}) \end{cases} \quad (42)$$

называется нормальной системой дифференциальных уравнений n -ого порядка.

Определение 2.16. Система

$$\begin{cases} x^1(t_0) = x_0^1 \\ x^2(t_0) = x_0^2 \\ \dots \\ x^n(t_0) = x_0^n \end{cases} \quad (43)$$

называется начальным условием

Утверждение 2.2. Решить задачу Коши означает решить нормальную систему дифференциальных уравнений при заданном начальном условии

Теорема 2.3 (Теорема Коши о существовании и единственности решения). Пусть $\forall i, j = \overline{1, n}$ функции $f^i, \frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ непрерывны в области $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, тогда, $\forall (t_0, \bar{x}_0) \in \Omega \exists h > 0 : \forall t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ решение задачи Коши существует и единственно.

Лемма 2.1. Если $\bar{f}(t, \bar{x})$ - непрерывны на Ω , то система уравнений

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_0 + \int_{t_0}^t \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau \quad (44)$$

эквивалентна задаче Коши.

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ - решение (42) при условии (43), тогда

$$\dot{\varphi}^i = f^i(t, \varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t))$$

Проинтегрируем полученное равенство по отрезку $[t_0, t]$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \dot{\varphi}^i(\tau) d\tau &= \int_{t_0}^t f^i(\tau, \varphi^1(\tau), \dots, \varphi^n(\tau)) d\tau \\ \varphi^i(t) - \varphi^i(t_0) &= \int_{t_0}^t f^i(\tau, \bar{\varphi}(\tau)) d\tau \\ \varphi^i(t) &= x_0^i + \int_{t_0}^t f^i(\tau, \bar{\varphi}(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

Теперь пусть $\bar{\varphi}(t)$ - решение (44). Тогда

$$\varphi^i(t) \equiv x_0^i + \int_{t_0}^t f^i(\tau, \bar{\varphi}(\tau)) d\tau$$

Отсюда видно, что функция $\varphi^i(t)$ - дифференцируема. Тогда

$$\begin{cases} \dot{\varphi}^i(t) = f^i(t, \bar{\varphi}(t)) \\ \varphi^i(t_0) = x_0^i \end{cases} \quad (45)$$

■

Следствие 2.3.1. Из 2 части леммы следует, что решение задачи Коши непрерывно дифференцируемо.

Введем оператор $A(\bar{x}) = \bar{x}_0 + \int_{t_0}^t \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau$. Тогда систему интегральных уравнений (44) можно записать в виде

$$\bar{x}(t) = A(\bar{x}) \quad (46)$$

Лемма 2.2.

$$\left\| \int_{t_0}^t \bar{x}(\tau) d\tau \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|\bar{x}(\tau)\| d\tau \right|$$

Доказательство.

$$\left| \int_{t_0}^t x^i(\tau) d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |x^i(\tau)| d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t \|\bar{x}(\tau)\| d\tau \right| \quad (47)$$

Таким образом $\max\{|\int_{t_0}^t x^i(\tau) d\tau|\} = \|\int_{t_0}^t \bar{x}(\tau) d\tau\| \leq \int_{t_0}^t \|\bar{x}(\tau)\| d\tau$ ■

Лемма 2.3. (Адамара) Пусть $\bar{f}(\bar{x}), \frac{\partial f^i}{\partial x_j}$ непрерывны в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - замкнутой, ограниченной, выпуклой области. Тогда $\forall i = \overline{1, n}, \bar{y} \in \Omega \hookrightarrow \|\bar{f}(\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x})\| \leq n^{3/2} K_1 \|\bar{y} - \bar{x}\|$, где $K_1 = \max_{i,j=\overline{1,n}} \{\max_{x \in \Omega} \left| \frac{\partial f^i}{\partial x_j} \right| \}$

Доказательство. $|\bar{f}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (f^i)^2}$, $\|\bar{f}\|_C = \max_{x \in \Omega} \{|\bar{f}(\bar{x})|\}$

Ω - компакт, поэтому непрерывность частных производных позволяет говорить о существовании K_1 . Возьмем производные точки \bar{x} и \bar{y} и соединим их отрезком $\bar{x} + t(\bar{y} - \bar{x})$, где $t \in [0, 1]$. Рассмотрим значение компоненты f^i на отрезке:

$$f^i(\bar{x} + t(\bar{y} - \bar{x})) = f^i(t)$$

$f^i(t)$ - дифференцируема, тогда

$$\begin{aligned} |f^i(\bar{y}) - f^i(\bar{x})| &= |f^i(1) - f^i(0)| = \left| \frac{df^i}{dt}(t^*) \cdot (1 - 0) \right| = \\ &= \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(t^*) \cdot (y^j - x^j) \right| \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(t^*) \right| \cdot |y^j - x^j| \leq K_1 \|\bar{y} - \bar{x}\| \cdot n \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим вектор-функцию

$$\begin{aligned} |\bar{f}(\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x})| &= \sqrt{\sum_{k=1}^n (f^k(\bar{y}) - f^k(\bar{x}))^2} \leq K_1 n^{3/2} \|\bar{y} - \bar{x}\| \\ \Rightarrow \|\bar{f}(\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x})\| &\leq K_1 n^{3/2} \|\bar{y} - \bar{x}\| \end{aligned}$$

■

Доказательство. (Основная теорема)

Докажем, что $A(\bar{x})$ из системы (46) является сжатием.

Рассмотрим $\Pi = \{\|\bar{x}(t) - \bar{x}_0(t)\| \leq b, |t - t_0| \leq a\} \subset \Omega$. Определим $K = \|\bar{f}\|_C = \max_{\Pi} |\bar{f}|$. K_1 тоже определено в силу условий.

Рассмотрим $\Pi_h = \{\|\bar{x}(t) - \bar{x}_0(t)\| \leq b, |t - t_0| \leq h \leq a\}$

Банахово пространство B - множество функций $\bar{x}(t)$ непрерывных на отрезке $|t - t_0| \leq h$. $M \subset B$ - множество функций $\|\bar{x}(t) - \bar{x}_0\| \leq b$. M ограничено, так как $\forall \bar{x}(t) \in M \hookrightarrow \|\bar{x}(t)\| = \|\bar{x}(t) - \bar{x}_0 + \bar{x}_0\| \leq b + \|\bar{x}_0\| = C$

Докажем, что M замкнуто. Пусть $\bar{x}_n(t), n = 1, 2, \dots$ - последовательность точек в M , такая что $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n(t) = \bar{x}(t)$. $\|\bar{x}(t)\| = \|\bar{x}(t) - \bar{x}_n + \bar{x}_n\| \leq \|\bar{x}(t) - \bar{x}_n\| + \|\bar{x}_n\| \leq \varepsilon + b \Rightarrow \bar{x}(t) \in M$
 Подберем h так, чтобы $A : M \rightarrow M$. То есть $\|A(\bar{x}) - \bar{x}_0\| \leq b$.

$$\|A(\bar{x}) - \bar{x}_0\| = \left\| \int_{t_0}^t \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|\bar{f}\| d\tau \right| \leq Kh$$

Получаем условие $h \leq b/K$

Чтобы доказать, что A - сжатие, рассмотрим норму

$$\begin{aligned} \|A(\bar{y}) - A(\bar{x})\| &= \left\| \int_{t_0}^t (\bar{f}(\tau, \bar{y}(\tau)) - \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau))) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|\bar{f}(\tau, \bar{y}) - \bar{f}(\tau, \bar{x})\| d\tau \right| \leq K_1 n^{3/2} \|\bar{y} - \bar{x}\| \cdot \left| \int_{t_0}^t d\tau \right| \leq K_1 h n^{3/2} \|\bar{y} - \bar{x}\| \end{aligned}$$

Откуда второе условие: $h < \frac{1}{n^{3/2} K_1}$

Тогда оператор A будет сжатием. Соответственно решение задачи Коши существует и единственно. ■

2.3 Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения n -го порядка в нормальном виде

Определение 2.17. Уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \quad (48)$$

называется уравнением n -го порядка в нормальной форме.

Определение 2.18. Система

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad (49)$$

называется начальным условием уравнения n -го порядка в нормальной форме.

Утверждение 2.3. Решить задачу Коши означает найти такое решение (48), которое удовлетворяет условию (49)

Теорема 2.4 (Теорема Коши о существовании и единственности решения). Если $f, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ непрерывны в $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, тогда $\forall (x_0, \bar{y}_0) \in \Omega \exists h > 0 : \forall x \in [x_0 + h, x_0 - h]$ решение задачи Коши существует и единственно.

Доказательство. Введем следующие функции: $y(x) = v_1(x), y'(x) = v_2(x), \dots, y^{(n-1)}(x) = v_n(x)$. Таким образом получаем систему уравнений в нормальной форме

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dx} = v_2 \\ \dots \\ \frac{dv_n}{dx} = f(x, \bar{v}) \end{cases} \quad (50)$$

А для нее решение существует и единственно. ■

2.4 Теоремы о продолжении решения для нормальной системы дифференциальных уравнений

Теоремы Коши носят существенно локальный характер. Решение и единственность задачи Коши будет существовать на отрезке Пеано. Теперь сделаем отход от единственности и докажем, что $\vec{\varphi}(t)$ и $\vec{\psi}(t)$ есть решение задачи Коши, то они будут совпадать на промежутке, где они оба определены (отход от локальности).

Теорема 2.5. Пусть $\vec{\varphi}(t)$ решение (1) \wedge (2) определено на $[a, b]$, а $\vec{\psi}(t)$ решение (1) \wedge (2) определено на $[c, d]$. Тогда $\vec{\varphi}(t) \equiv \vec{\psi}(t)$ на $[r_1, r_2] = [a, b] \cap [c, d]$.

Доказательство. От противного: $\exists t^* \in [r_1, r_2]$, где $\vec{\varphi}(t^*) \neq \vec{\psi}(t^*)$, тогда $t^* \neq t_0$ и предположим, что $t^* > t_0$. Рассмотрим множество N точек такое, что $t \in [r_1, r_2]$ и $\vec{\varphi}(t) = \vec{\psi}(t)$.

Покажем, что множество замкнуто:

Рассмотрим сходящуюся последовательность $t_1 \dots t_n \in N$, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \bar{t}$. Нужно показать, что $\bar{t} \in N$:

Рассмотрим $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{\varphi}(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{\psi}(t_n)$ (равны по выбору множества N). И из непрерывности выбранных функций получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{\varphi}(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{\psi}(t_n) = \vec{\varphi}(\bar{t}) = \vec{\psi}(\bar{t}) \Rightarrow$ замкнутость.

Из замкнутости и ограниченности мн-ва $N \Rightarrow \exists \bar{t} = \sup N, \bar{t} \in N$. Мы пришли к противоречию, а именно t^* по начальному предположению должна быть точной верхней гранью. ■

Определение 2.19. $\vec{\varphi}(t)$ определена на $\langle a, b \rangle$ и решение (1) \wedge (2), если $\exists \vec{\psi}(t)$ на $\langle a, b_1 \rangle \supset \langle a, b \rangle$, и решение (1) \wedge (2) и $\vec{\varphi}(t) \equiv \vec{\psi}(t)$ на $\langle a, b \rangle$, тогда $\vec{\varphi}(t)$ называется продолжаемым вправо, а $\vec{\psi}(t)$ продолжением решения $\vec{\varphi}(t)$ задачи Коши

Определение 2.20. Решение, которое нельзя продолжить ни вправо, ни влево называется непродолжаемым решением

Примечание. По сути данная теорема является усилением задачи Коши. Вместо отрезка Пеано мы получили, что решение задачи Коши может быть продолжено на промежутке, где они оба определены.

Теорема 2.6. Пусть имеется задача Коши (1) \wedge (2) и $\vec{f}(t, \vec{x}), \frac{\partial f^i}{\partial x_j}, i, j = \overline{1, n}$ непрерывны в $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда $\forall (t_0, \vec{x}_0) \in \Omega \exists!$ непродолжаемое решение задачи (1) \wedge (2).

Доказательство. Рассмотрим множество решений задач Коши (1) \wedge (2). Каждое решение задачи определено на промежутке $\langle R_1, R_2 \rangle$, тогда пусть $T_1 = \inf R_1, T_2 = \sup R_2$. Построим решение задачи (1) \wedge (2) на (T_1, T_2) :

Выберем $t^* > t_0$, тогда $\exists \vec{\psi}(t)$, чей промежуток содержит t^* (в силу выбора промежутка (T_1, T_2)). Положим $\vec{\varphi}(t^*) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\psi}(t^*)$. Покажем, что так можем сделать, что значение $\vec{\varphi}(t^*)$ не

зависит от выбора $\vec{\psi}(t)$:

Пусть $\vec{\psi}(t)$ решение задачи Коши (1) \wedge (2) содержащее t^* , тогда $\vec{\psi}(t^*) = \vec{\psi}(t^*)$ из теоремы сущ. и единст. решения задачи Коши (будут совпадать на промежутке, где они определены и при этом t^* принадлежит этому промежутку).

Построение вниз проводится аналогично. И так, $\vec{\varphi}(t)$ решение (1) \wedge (2) на $T_1 < t < T_2$. Это решение является продолжением любого из множества решений задачи Коши. Допустим, $\vec{\tilde{\varphi}}(t)$ решение (1) \wedge (2) на $r_1 \leq t \leq r_2$ и $T_1 \leq r_1 \leq r_2 \leq T_2 \Rightarrow \vec{\tilde{\varphi}}(t) = \vec{\varphi}(t)$ (продолжение решения по доказанной выше теореме).

Покажем, что $\vec{\psi}(t)$ является непродолжаемым решением (1) \wedge (2): Допустим, что имеется ещё одно решение $\vec{\chi}(t)$, определённое на $(\gamma_1; \gamma_2)$ и оно является продолжением $\vec{\varphi}(t)$. Тогда, либо $\gamma_1 < T_1$, либо $\gamma_2 > T_2$, что невозможно, т.к. $T_1 = \inf R_1, T_2 = \sup R_2$ по построению. Покажем, что непродолжаемое решение $\vec{\varphi}(t)$ является единственным:

От противного, пусть $\exists \vec{\varphi}(t)$ непродолжаемое решение на (T_1, T_2) и $\vec{\psi}(t)$ на $(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2)$. Для определённости $\tilde{T}_1 < T_1$, тогда рассмотрим такое решение $\vec{\chi}(t) = \begin{cases} \vec{\psi}(t) & \text{на } (\tilde{T}_1, T_1), \\ \vec{\varphi}(t) & \text{на } (T_1, T_2); \end{cases} \Rightarrow \vec{\varphi}(t)$

– продолжение $\vec{\psi}(t)$, противоречие. Аналогично строя остальные решения получаем, что $\vec{\varphi}(t) = \vec{\psi}(t)$ ■

Примечание. В теореме не сказано, как определить T_1 и T_2 . Если усилить условия теоремы, а именно Ω есть ограниченная область, то любое непродолжаемое решение выходит на границу этой области.

Из этих утверждений следует, что если под интегральной кривой понимать график непродолжаемого решения, то через каждую точку $(x_0, y_0) \in \Omega$ проходит только одна кривая.

2.5 Непрерывная зависимость от параметров решения задачи Коши для нормальной системы ДУ

Рассматриваем уравнение

$$y = f(x, y, \mu) \quad (51)$$

с задачей Коши $y(x_0, \mu) = y_0$, где μ – параметр.

Теорема 2.7. Пусть \mathcal{G} – область в пр-ве (z, y, μ) . Если ф-ции $f(x, y, \mu)$, $\frac{\partial f(x, y, \mu)}{\partial y}$ непрерывны в области по совокупности переменных и точка $(x_0, y_0, \mu_0) \in \mathcal{G}$, то решение задачи Коши (51 $y(x, \mu)$) непрерывно по совокупности переменных $(x; \mu)$ в некоторой области $|x - x_0| \leq h, |\mu - \mu_0| \leq \delta$

Доказательство. Аналогично доказательство основной теоремы(!!!!Здесь можно вставить ссылку на основную теорему!!!!) сведем задачу Коши к эквивалентной её интегральному уравнению

$$y(x, \mu) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, y(\tau, \mu)) d\tau, \quad (52)$$

или в операторной форме:

$$y(x, \mu) = A(y(x, \mu)), \quad (53)$$

где $A(y(x, \mu)) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, y(\tau, \mu)) d\tau$.

Выберем параллелепипед $\Pi = \{|x - x_0| \leq a, |\mu - \mu_0| \leq \delta, |y - y_0| \leq b\}$, целиком лежащей

в области \mathcal{G} . В силу условий теоремы $\exists K = \max_{\Pi} |f(x, y, \mu)|$, $C = \max_{\Pi} \left| \frac{\partial f(x, y, \mu)}{\partial y} \right|$.

Применим к (53) принцип сжатых отображений. В качестве B возьмём пр-во ф-ций $y(x, \mu)$ непрерывных в прямоугольнике $\{|x - x_0| \leq h, |\mu - \mu_0| \leq \delta\}$, где $h > 0$ будет выбрано с нормой $\|y(x, \mu)\| = \max_{|x-x_0| \leq h} |y(\mu, x)|$. В качестве $M \subset B$ возьмём множество функций из B таких, что $\|y(x, \mu) - y_0\|_C \leq b$.

1) Нужно, чтобы $A(y(x, \mu)) \in M$, если $y(x, \mu) \in M$. $\|A(y) - y_0\| = \left\| \int_{x_0}^x f(\tau, y(\tau, \mu)) d\tau \right\| \leq \left| \int_{x_0}^x f(\tau, y(\tau, \mu)) d\tau \right| \leq K \cdot h \Rightarrow$ Необходимо, чтобы $K \cdot h < b \Rightarrow h = \min \{a, \frac{b}{K}\}$.

2) Нужно, чтобы A_x было сжатием, т. е. $\|A\varphi - A\psi\| \leq k \cdot \|\varphi - \psi\|$, $0 < k < 1$.

$\|A\varphi - A\psi\| = \left\| \int_{x_0}^x (f(\tau, \varphi(\tau, \mu)) - f(\tau, \psi(\tau, \mu))) \cdot d\tau \right\| \leq \left| \int_{x_0}^x \|f(\tau, \varphi(\tau, \mu)) - f(\tau, \psi(\tau, \mu))\| \cdot d\tau \right| \leq$
 $\{\text{По лемме Адамара}\} \leq C \cdot h \cdot 1 \cdot \|\varphi - \psi\| \Rightarrow$ Необходимо, чтобы $C \cdot h < 1 \Rightarrow h < \frac{1}{C}$.

Т. е. при $\begin{cases} h \leq \min \{a, \frac{b}{K}\}, \\ h < \frac{1}{C}. \end{cases}$ оператор A является сжатием и обладает единственным

решением операторного уравнения $y(x, \mu) = A(y(x, \mu))$, а значит и задача Коши (51). Причём решение $y(x, \mu)$ непрерывно по совокупности переменных. ■

2.6 Дифференцируемость решения по параметру.

Пусть $y(x, \mu)$ является решением задачи Коши (51). Введем ф-цию $z(x, \mu)$: $z(x, \mu) = \frac{\partial y(x, \mu)}{\partial \mu}$

Теорема 2.8. Если $f(x, y, \mu)$ как функция трёх переменных в области \mathcal{G} пр-ва (x, y, μ) p раз непрерывно дифференцируема по (y, μ) и $p - 1$ раз непрерывно дифференцируема по x , тогда решение задачи Коши (51) $y(x, \mu)$ является p раз непрерывно дифференцируема по совокупности (x, μ) .

Доказательство. В 15 лекции от 10.12.20 года лектор сказал, что доказывать не будет. Запись текущего года на ютубе отсутствует. В Федорюке проводится доказательство для $p = 1$ (см следствие). ■

Следствие 2.8.1. $\frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\partial}{\partial \mu} (f(x, y(x, \mu), \mu)) = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial f}{\partial \mu}$

с задачей Коши: $\frac{\partial z}{\partial \mu}(x_0) = \frac{\partial y_0}{\partial \mu} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial y}{\partial \mu} \right) = \boxed{z'_x = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot z + \frac{\partial f}{\partial \mu}}$ – уравнение в вариациях для (51).

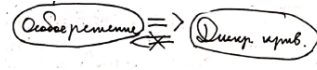
Примечание. Уравнение в вариациях всегда линейное.

2.7 Задача Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Особое решение

Рассматриваем уравнение

$$F(x, y, y') = 0, \quad (54)$$

где $F(x, y, y')$ как функция трёх переменных является непрерывно дифференцируемой функцией в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$.



Теорема 2.9. Пусть $F \in C^1$ в $D \subset \mathbb{R}^3$ в точке $M(x_0, y_0, y'_0) \in D$ выполнено $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$ и $\frac{\partial F(x_0, y_0, y'_0)}{\partial y'} \neq 0$. Тогда $\exists h > 0 : \forall x \in [x_0 - h; x_0 + h]$ существует и единственно решение (54), удовлетворяющая условиям

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0. \quad (55)$$

Доказательство. Из условий теоремы о неявной функции существует окрестность U точки (x_0, y_0) , в которой существует $f(x, y) \in C^1_U$ такая, что

$$y' = f(x, y). \quad (56)$$

При этом

$$F(x, y, f(x, y)) \equiv 0, f(x_0, y_0) = y'_0. \quad (57)$$

Согласно основной теореме, существует отрезок Пеано, принадлежащий проекции U на ось абсцисс, на котором существует и единственно решение (56), удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

Пусть это решение есть $y = \varphi(x)$, $y_0 = \varphi(x_0)$. Тогда $y' = \varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$, и из (57) следует, что $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0$, $\varphi'(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0)) = y'_0 \Rightarrow y = \varphi(x)$ – решение задачи (54) \wedge (55) ■

Примечание. Второе условие в (55) возникает из-за неоднозначности разрешения $F(x, y, y') = 0$, относительно y' в точке $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$. Так, в ДУ $(y')^2 = 4x^2 \forall (x, y) : y' = \pm 2x$. Второе условие (55) определяет одно из условий (фактически выбор ДУ).

На плоскости $(x; y)$ рассмотрим кривую γ , определяемую системой уравнений, каждое из которых определяет поверхность.

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0. \end{cases} \quad (58)$$

Определение 2.21. Кривая (58) называется дискриминантной кривой.

Примечание. По определению дискриминантной кривой, в каждой точке нарушается единственность решения (54). В приведённом выше примере дискриминантная кривая есть $x = 0$ и решение задачи $y(0) = C$, $y' = 0$ будет иметь четыре решения:

$$y = x^2 + C, y = -x^2 + C, y = \begin{cases} x^2 + C, x \leq 0 \\ -x^2 + C, x > 0 \end{cases} \quad y = \begin{cases} -x^2 + C, x \leq 0, \\ x^2 + C, x > 0. \end{cases}$$

Определение 2.22. Решение ДУ называется особым, если в каждой ему принадлежащей точке его касается другое решение ДУ, отличное от него в любой достаточно малой окрестности этой точки.

Примечание. Т. е. особым решением являются ветви дискриминантной кривой, которые являются решением этого уравнения.

3 Билет 3. Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

3.1 Вводная часть

3.1.1 Понятие кольца. Рассмотрение понятия многочленов

Определение 3.1. Кольцом K называют множество, на котором определены две операции: сложение и умножение, сопоставляющее каждому парам элементов их "сумму" "произведение" являющихся элементами этого же множества.

Действия $+$ и \cdot удовлетворяют условиям: (первые 6 для любого кольца):

1. $(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in K$
2. $a + b = b + a \quad \forall a, b \in K$
3. $\exists 0 \in K : a + 0 = a \quad \forall a \in K$
4. $\forall a \in K \exists -a \in K : a + (-a) = 0 \quad \forall a \in K$
5. $(a + b) \cdot c = ac + bc \quad \forall a, b, c \in K$
6. $c \cdot (a + b) = ca + cb \quad \forall a, b, c \in K$
7. $(ab)c = a(bc) \quad \forall a, b, c \in K$
8. $ab = ba \quad \forall a, b \in K$
9. $\exists 1 \in K : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in K$
10. $\exists a^{-1} \in K : a^{-1}a = aa^{-1} = 1 \quad \forall a \in K$

Утверждение 3.1. Если $a + x = a + y$, то $x = y$

Доказательство.

$$(-a) + (a + x) = (-a) + (a + y) \Rightarrow ((-a) + a) + x = ((-a) + a) + y = 0 + x = x = x + y = y$$

Отсюда следует единственность нуля и противоположного элемента:

$$(-a) \neq (-a)'$$

$$0 = a + (-a) = a + (-a)' \Rightarrow (-a) = (-a)'$$

■

Утверждение 3.2. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \quad \forall a$

Доказательство. $a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0 = a(0 + 0) \Rightarrow a \cdot 0 = 0$; аналогично $0 + 0 \cdot a = 0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a \Rightarrow 0 \cdot a = 0$

■

Утверждение 3.3. Единица единственна

Доказательство. Пусть $1 \neq 1' : 1 = 1 \cdot 1' = 1' \cdot 1 = 1'$

■

- Кольцо называется ассоциативным, если выполнено условие 7; коммутативным, если выполнено 8. Если выполнено условие 9, то говорят о кольце с единицей.
- Ассоциативное кольцо называется областно целостным, если из $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$
- Полем называется коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, в котором каждый отличный от нуля элемент имеет обратный.

Утверждение 3.4. Любое поле является областно целостным

Доказательство. $ab = 0, a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} \cdot (ab) = a^{-1} \cdot 0 = 0 = (a^{-1}a) \cdot b = 1 \cdot b = b \Rightarrow b = 0$ ■

3.1.2 Многочлен

Пусть A — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Одночленом от x с коэффициентом из A называется выражение ax^m , $a \in A$, $m \in \mathbf{N}$. По определению положим, что $ax^0 = 0$. Выражение ax^m будем рассматривать как символ, для которого выполняется по определению:

$$\begin{aligned} ax^m + bx^m &= (a + b)x^m \\ ax^m \cdot ax^n &= ax^{m+n} \end{aligned}$$

Выражение, состоящее из нескольких одночленов, соединенных знаком $+$ назовем многочленом от x с коэффициентом из A . Без нарушения общности, в силу коммутативности сложения запишем в каноническом виде: $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$

1. Многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ и $Q_m(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ считаем равными в том и только в том случае, если $n = m$ и $a_k = b_k$, $k = \overline{1, n}$
2. Суммой двух многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ называется многочлен, получившейся посредством объединения одночленов соответствующих слагаемых:

$$P(n) + Q_m(x) = (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \dots + c_sx^s, \quad x = ma.$$

$$c_s = a_s + b_s, a_s = 0, \text{ если } s > n \text{ и } b_s = 0, \text{ если } s > m$$

Так определенное сложение многочленов коммутативно и ассоциативно.

Имеется нулевой элемент $0 = 0 \cdot x + \dots + 0 \cdot x^n$, а также противоположный $(-P_n(x)) = (-a_0) + (-a_1)x + \dots + (-a_n)x^n$

3. Произведением двух многочленов называют многочлен, составленный из произведения всех членов первого сомножителя на все члены второго.

$$P_n(x) \cdot Q_m(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots + \left(\sum_{j=k+l} a_kb_l \right) x^j + \dots + a_nb_mx^{n+m}$$

- Покажем, что так определенное умножение будет коммутативно и ассоциативно:

$$P_n(x) \cdot Q_m(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots + \left(\sum_{j=k+l} a_kb_l \right) x^j + \dots + a_nb_mx^{n+m}$$

В сумме $\sum_{j=k+l} a_kb_l$ заменим $k \leftrightarrow l \Rightarrow \sum_{j=k+l} b_ka_l = \sum_{j=k+l} b_la_k = \sum_{j=k+l} a_lb_k \stackrel{1)}{\Rightarrow} P_n(x) \cdot Q_m(x) = Q_m(x) \cdot P_n(x) \Rightarrow$ коммутативно.

Пусть $R_s(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_sx^s \Rightarrow (P_n(x) \cdot Q_m(x)) \cdot R_s(x) = ((a-)b_0)c_0 + \left(\sum_{\gamma=j+\sigma} \left(\sum_{j=k+l} a_k b_l \right) c_\sigma \right) x^\gamma + (a_n b_m) c_s x^{n+m+s}$, $j = 1, \dots, n+m+s-1$. Так как $\sum_{\gamma=j+\sigma} \left(\sum_{j=k+l} a_k b_l \right) c_\sigma = \sum_{\gamma=k+l+\sigma} a_k (b_l c_\sigma)$.

Пусть $l' = l + \sigma \Rightarrow \sum_{\gamma=k+l+\sigma} a_k (b_l c_\sigma) = \sum_{\gamma=k+l'} a_k \left(\sum_{l'=l+\sigma} b_l c_\sigma \right) \stackrel{1)}{\Rightarrow} (P_n(x) \cdot Q_m(x)) R_s(x) = P_n(x) \cdot (Q_m(x) \cdot R_s(x))$ — ассоциативно.

- Дистрибутивность аналогично (везде используются свойства одночленов)

Таким образом так построенное множество многочленов от x над A будет ассоциативным и коммутативным кольцом $A(x)$. Роль единицы в $A(x)$ играет единица из A .

При построении кольца многочленов вместо x положим $p = \frac{d}{dx}$ — оператор дифференцирования, который действует на множестве бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций. $p \cdot f(x) = p(f(x)) = \frac{df}{dx} = f'$, $p^2(f) = f''$, \dots , $p^n n(x) = f^{(n)}$; Справедлива формула $p^s \cdot p^m(f) = p^s \cdot (p^m(f)) = p^s \cdot (f^{(m)}) = f^{(m+s)} = p^{m+s}(f)$

По определению, множество бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций Φ является кольцом, содержащим поле \mathbb{C} . В качестве элементов кольца A будем брать числа из \mathbb{C} . Роль операторного одночлена в таком случае будет играть ap^m , $a \in \mathbb{C}$; $ap^m = p^m a$, так как $ap^m(f) = a f^{(m)} = f^{(m)} \cdot a = p^m(f) \cdot a$; По определению положим $ap^0 = a$, что корректно, так как $ap^0 f = ap^0(f) = af = a \cdot f = a(f)$. Приведение подобных слагаемых для одночленов определим как $ap^m + bp^m = (a+b)p^m$, поскольку $(ap^{(m)})(f) + bp^{(m)}(f) = af^{(m)} + bf^{(m)} = (a+b)f^{(m)} = ((a+b)p^m)(f)$

Аналогично вводим выражение, состоящее из нескольких операторных одночленов, соединенных знаком $+$, называемое операторным многочленом от p с коэффициентом из \mathbb{C} . Из свойств дифференцирования следует, что в общем виде можно записать $L_n(p) = a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n$

Абсолютно аналогично доказываем, что замена x на p дает множество операторных многочленов от p , которое будет кольцом из \mathbb{C}

- Пусть $x \in \mathbb{C}$. Значение многочлена $P_n(x)$ на \mathbb{C} определим как число $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in \mathbb{C}$.

Понятие значения многочлена можно обобщить на случай, когда B является ассоциативным кольцом, содержащим кольцо A , в случае, когда элементы A коммутируют с элементами из B .

В таком случае можно определить степень элемента кольца B . Пусть $a \in B$, $a^1 = a$, $a^2 = a \cdot a$, \dots , $a^n = a^{n-1} \cdot a$

Теорема 3.1. $\forall k \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} \rightarrow a^k \cdot a^m = a^k + m$

- Значение операторного многочлена $L_n(p)$ определим на коммутативном и ассоциативном кольце Φ — бесконечно дифференцируемой комплекснозначной функцией от $x \in \mathbb{R}$: $f(x)$

$$L_n(F) = L_n(p)(f) = a_0 f + a_1 f' + \dots + a_n f^{(n)} \in \Phi$$

- Если $F(p) = L_n(p) + M_m(p)$ определим сумму на множестве дифф. операторов:

$$F(p) = (a_0 + b_0)f + (a_1 + b_1)f' + \dots + c_s f = L_n(p)(f) + M_m(p)(f) \Rightarrow (L_n(p) + M_m(p))(f) = (M_m(p) + N_m(p))(f)$$

коммутативно, ассоциативность аналогично/.

- $(L_n(p)M_m(p))(f) = (a_0b_0p^0 + (a_0b_1 + a_1b_0)p + \dots + (\sum_{j=k+l} a_kb_l)p^j + \dots + a_nb_mp^{m+n})(f) =$
 $a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)f' + \dots + (\sum_{j=k+l} a_kb_l)f^{(j)} + \dots + a_nb_mf^{(n+m)} = (a_0p^0 + a_1p + \dots + a_np^n) \cdot$
 $(b_0f + b_1f' + \dots + b_mf^{(m)}) = L_n(p) \cdot (M_m(f))$ — определение действия произведения операторов на множестве Φ . Так как $a_0b_0f + (a_0b_1 + a_1b_0)f' + \dots + (\sum_{j=k+l} a_kb_l)f^{(j)} + \dots +$
 $a_nb_mf^{(m+n)} = M_m(p) \cdot (a_0f + a_1f' + \dots + a_nf^{(n)}) \Rightarrow (L_n(p) \cdot M_m(p)) = (M_m(p) \cdot L_n(p))$ — коммутативность.

- Покажем ассоциативность и дистрибутивность

$$L_n(p) \cdot M_m(p) K_s(p)(f) = (L_n(p) \cdot M_m(p))(K_s(p)(f)) = L_n(p)(M_m(p)(K_s(p)(f))) = L_n(p)(Q_m(p)R_s(p)(f)) \quad (59)$$

ассоциативность.

$$L_n(p) + M_m(p) K_s(p)(f) = L_n(p)(K_s(p)(f)) + M_m(p)(K_s(p)(f)) = (L_n(p)K_s(p))(f) + (M_m(p)K_s(p))(f)$$

дистрибутивность \cdot и $+$.

Таким образом множество значений операторных многочленов является кольцом, которое содержится в Φ

- Если для $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ из $A(x)$ $\exists R_s(x) \in A(x) : P_n(x) = Q_m(x) \cdot R_s(x)$, то говорят, что $P_n(x)$ делится на $Q_m(x)$.

Теорема 3.2.

$$P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \in A(x), c \in A \Rightarrow \exists! Q_m(x), r \in \mathbb{C} : P_n(x) = (x-c)Q_m(x) + r$$

Теорема 3.3. (Безу) $P_n(x)$ делится на $x - c \Leftrightarrow P_n(c) = 0$

Теорема 3.4. Если кольцо A является областью целостности, то число корней $P_n(x)$ не превосходит n

Теорема 3.5. Основная теорема алгебры

Любой многочлен $P_n(x)$ над \mathbb{C} имеет хотя бы один корень

Утверждение 3.5. Из 3 и 5 теоремы

$$\forall P_n(x) \rightarrow P_n(x) = a_n(x - c_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x - c_k)^{l_k} \quad (60)$$

- Взаимооднозначное соответствие φ кольца K на кольцо K' называется изоморфизмом, если $\forall a \in K$ и $\forall b \in K' \rightarrow$

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \quad \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \quad (61)$$

Из (61) следует что образом нуля кольца K будет нуль K' : $\varphi(a) = a' \in K'$ и $\varphi(0) = c'$, $\varphi(a) = a' = \varphi(a + 0) = \varphi(a) + \varphi(0) = a' + c' \Rightarrow c' = 0$

Если кольцо K имеет единицу, то $\varphi(1)$ будет единицей кольца K' : $\varphi(a) = a' = \varphi(1 \cdot a) = \varphi(1) \cdot \varphi(a) = \varphi(1)a' \Rightarrow \varphi(1) = 1$ — единица K'

- Обратное отображение φ^{-1} кольца K' на K существует и будет изоморфно.

Рассмотрим отображение φ , которое множеству значений $P_n(x)$ над \mathbb{C} ставит в соответствие множество значений $L_n(p)$ на множестве бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций Φ по принципу:

$$\varphi(P_m(z)) = \varphi(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 z^0) = L_n(p)(f) = a_n f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \dots + a_0 f;$$

Покажем что отображение является изоморфизмом.

Отображение взаимнооднозначно по построению.

$$\begin{aligned} \varphi(P_n(z) + Q_m(z)) &= \varphi(a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m) = \varphi(a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)z + \dots + (a_s + b_s)z^s) \\ &= (a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)p + \dots + (a_s + b_s)p^s)(f) = L_n(p) + L_m(p)(f) \end{aligned}$$

$$\varphi(P_n(z) \cdot Q_m(z)) = \varphi(a_0 b_0 + \sum_{j=k+l} a_k b_l z^j + a_n b_m z^{m+n}) = (a_0 b_0 + \sum_{j=k+l} a_k b_l p^j + a_n b_m p^{m+n})(f) = L_n(p) \cdot Q_m(p)$$

Т.о. φ – изоморфизм. Тогда из (61):

$$\varphi(P_n(x)) = \varphi(a_n(z - c_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (z - c_k)^{l_k}) = L_n(p)(f) = a_n \cdot (p - c_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (p - c_k)^{l_k}(f)$$

В итоге $L_n(p) = a_n \cdot (p - c_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (p - c_k)^{l_k}$, где c_1, \dots, c_k – корни $P_n(z)$

3.2 Линейные уравнения с потоянными коэффициентами

Рассмотрим ДУ вида: $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$, $a_n \neq 0$, где $a_i = \text{const} \ \forall i = \overline{1, n}$. Через введенный ранее дифференциальный оператор $L_n(p) = a_n p^n + \dots + a_0 p^0$ уравнение записывается в виде

$$L_n(p)(y(x)) = 0 \quad (2.1)$$

Было доказано, что $L_n(p)$ является изоморфизмом характеристического многочлена (2.1): $P_n(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_0 = a_n(\lambda - \lambda_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{l_k}$ и поэтому для $L_n(p)$ справедливо разложение

$$L_n(p) = a_n(p - \lambda_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (p - \lambda_k)^{l_k}, \quad p = \frac{d}{dx} \quad (2.2)$$

Задача: найти ФСР (2.1). Из записи $L_n(p)$ ясно, что решением (2.1) будут функции из Φ , котрые являются корнями $L_n(p)$

Лемма 3.1. Для любой n раз дифференцируемой на промежутке функции $f(x)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ выполняется "формула сдвига"

$$L_n(p)(e^{\lambda x} f) = e^{\lambda x} \cdot L_n(p + \lambda)(f) \quad (2.3)$$

Доказательство. Докажем по индукции. База $n = 1$:

$$L_1(p)(e^{\lambda x} f) = (a_1 p^1 + a_0)(e^{\lambda x} f) = e^{\lambda x}(a_0 f + a_1(\lambda f + f')) = e^{\lambda x}(a_1(p + \lambda) + a_0)(f) = e^{\lambda x} L_1(p + \lambda)(f)$$

Пусть (2.3) справедлива для $k = n - 1$, то есть $L_{n-1}(p)(e^{\lambda x} f) = e^{\lambda x} L_{n-1}(p + \lambda)(f)$

Обозначим $L_n(p) = p - \lambda_1$, тогда по формуле (2.2) :

$$L_n(p) = a_n(p - \lambda_1) \cdot (p - \lambda_1)^{l_1-1} \cdot \dots \cdot (p - \lambda_m)^{l_m} \cdot \dots \cdot (p - \lambda_k)^{l_k} = L_1(p) \cdot L_{n-1}(p) = L_{n-1}(p) \cdot L_1(p)$$

$$\text{Тогда } L_n(p)(e^{\lambda x} f) = L_{n-1}(p) \cdot L_1(p)(e^{\lambda x} f(x)) = L_{n-1}(p)(L_1(p)(e^{\lambda x} f)) \underset{\text{база}}{=} L_{n-1}(p)(e^{\lambda x} \cdot (p + \lambda)(f))$$

Обозначим через $g(x) = L_1(p + \lambda)(f(x))$, имеем:

$$L_n(p)(e^{\lambda x} f) = L_{n-1}(p)(e^{\lambda x} g(x)) \underset{\text{индукция}}{=} e^{\lambda x} L_{n-1}(p + \lambda)(g) = e^{\lambda x} L_{n-1}(p + \lambda)(L_1(p + \lambda)(f)) = e^{\lambda x} (L_{n-1}(p + \lambda)(L_1(p + \lambda)(f)))$$

■

Теорема 3.6. Если λ_m является корнем $L_n(\lambda)$ кратности l_m , то функции $e^{\lambda_m x}, xe^{\lambda_m x}, \dots, x^{l_m-1}e^{\lambda_m x}$ являются решениями (2.2)

Доказательство. Из коммутативности и ассоциативности кольца операторных многочленов и формулы (2.3): $L_n(p) = a_n(p - \lambda_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (p - \lambda_m)^{l_m} \cdot \dots \cdot (p - \lambda_k)^{l_k} = L_{n-l_m}(p)(p - \lambda_m)^{l_m}$

Воспользуемся формулой сдвига для $x^s e^{\lambda_m x}$:

$$L_n(p)(x^s e^{\lambda_m x}) = e^{\lambda_m x} \cdot L_{n-l_m}(p + \lambda_m) \cdot p^{l_m}(x^s) = e^{\lambda_m x} \cdot L_{n-l_m}(p + \lambda_m)(x^s)^{(l_m)} = \begin{cases} 0, & \forall s \leq l_m - 1 \\ e^{\lambda_m x} \cdot P_{n-l_m}(x), & s \geq l_m \end{cases}$$

где P_{n-l_m} многочлен степени не ниже $n - l_m$

Таким образом $x^s e^{\lambda_m x}$, $s = \overline{q, l_m - 1}$ являются корнями $L - n(p)$, а значит и решениями (2.1) ■

Из доказанной теоремы следует:

$$\left\{ \{e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{l_1-1} e^{\lambda_1 x}\}, \dots, \{e^{\lambda_m x}, \dots, x^{l_m-1} e^{\lambda_m x}\}, \dots, \{e^{\lambda_k x}, \dots, x^{l_k-q} e^{\lambda_k x}\} \right\} \quad (2.4)$$

будут решениями (2.2). Всего таких функций n штук. Докажем линейную независимость систем функций (2.4)

Лемма 3.2. Система q, x, \dots, x^m линейно независима.

Доказательство. Рассмотрим линейную комбинацию функций $C_0 + C_1 x + \dots + C_n x^n = 0$

От противного: пусть $\exists C_0, \dots, C_n : \sum_{i=0}^n C_i^2 \neq 0 : C_0 + C_1 x + \dots + C_n x^n = 0 \quad \forall x$

Так как у многочлена степени n не более чем n нулей, то получаем противоречие ■

Теорема 3.7. Система функций $P_{n1}(x)e^{\lambda_1 x}, \dots, P_{ns}(x)e^{\lambda_s x}$, где $P_{ni}(x)$ является многочленом степени n_i , а все $\lambda_i \in \mathbb{C}$ разные, является ЛНЗ.

Доказательство. Выражение $P_n(x)e^{\lambda x}$ — квазисногочлен степени n , $\lambda \in \mathbb{C}$, коэффициенты $P_n(x) \in \Phi$ Рассмотрим $(P_n(x)e^{\lambda x})' = \lambda \cdot P_n(x)e^{\lambda x} + e^{\lambda x} \overline{P}_{n-1}(x) = e^{\lambda x}(\lambda P_n(x) + \overline{P}_{n-1}(x)) = \tilde{P}_n(e^{\lambda x})$

То есть, если будем дифференцировать степень n , то останемся в множестве квазимногочленов степени n .

Докажем по индукции. База $n = 1$ — выполнена по Лемме (3.2). Пусть выполнено для $n = s-1$: система из $s-1$ квазимногочленов является ЛНЗ системой: $P_{n1}(x)e^{\lambda_1 x}, \dots, P_{ns-1}(x)e^{\lambda_{s-1} x}$ — ЛНЗ.

Для n . От противного: пусть система $P_{n1}(x)e^{\lambda_1 x}, \dots, P_{ns-1}(x)e^{\lambda_{s-1} x}, P_{ns}(x)e^{\lambda_s x}$ является линейно зависимой, тогда $\exists C_1, \dots, C_l, \dots, C_s :$

$$C_1 P_{n1}(x)e^{\lambda_1 x} + C_2 P_{n2}(x)e^{\lambda_2 x} + \dots + C_l P_{nl}(x)e^{\lambda_l x} + \dots + C_s P_{ns}(x)e^{\lambda_s x} = 0 \quad (2.5)$$

и хотя бы одна константа, например $C_l \neq 0$ Из (2.5), перенося C_l вправо и деля на $C_l e^{\lambda_l x}$ получаем:

$$\overline{C}_1 P_{n1}(x)e^{\omega_1 x} + \dots + \overline{C}_s P_{ns}(x)e^{\omega_s x} = -P_{nl}(x)$$

где $\overline{C}_i = \frac{C_i}{C_l e^{\lambda_l x}}, \omega_i = \lambda_i - \lambda_l$

Продифференцируем n_{l+1} раз последнее тождество. Перенумеровав $s-1$ слагаемое в левой части получим $\overline{C}_1 \cdot \tilde{P}_n(x)e^{\omega_1 x} + \dots + \overline{C}_{s-1} \cdot \tilde{P}_{n_{s-1}}(x)e^{\omega_{s-1} x} = 0$

По определению индукции последнее равенство возможно, только если все $\overline{C}_i = 0$, $\overline{C}_i = \frac{C_i}{C_l}; C_l \neq 0 \Rightarrow C_i = 0, i = 1, \dots, l-1, l+1, \dots, s \xRightarrow{(2.5)} C_l = 0$ — противоречие предположению индукции о линейной независимости системы $P_{n1}(x)e^{\lambda_1 x}, \dots, P_{ns-1}(x)e^{\lambda_{s-1} x}$ ■

Таким образом ФСР дифференциального уравнения (2.1) будет состоять из функций набора

$$\left\{ \{e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{l_1-1} e^{\lambda_1 x}\}, \dots, \{e^{\lambda_m x}, \dots, x^{l_m-1} e^{\lambda_m x}\}, \dots, \{e^{\lambda_k x}, \dots, x^{l_k-1} e^{\lambda_k x}\} \right\},$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \dots, \lambda_k$ — корни характеристического многочлена $P_n(\lambda)$ кратности $l_1, \dots, l_m, \dots, l_k$

Общее решение (2.1) будет иметь вид

$$y_0 = e^{\lambda_1 x} \left(\sum_{m=1}^{l_1-1} C_m^1 x^m \right) + \dots + e^{\lambda_k x} \left(\sum_{m=1}^{l_k-1} C_m^k x^m \right) \quad (2.6)$$

Фигурирующие в (2.6) константы C_i^j , вообще говоря, могут быть комплексными, если корни $P_n(\lambda)$ являются комплекснозначными. Если изначально ставится задача — найти решение ДУ во множестве действительных функций действительного переменного, то в случае комплексных корней возникает задача выделить из множества комплексных решений действительное. Это осуществимо, так как коэффициенты $P_n(\lambda)$ являются действительными числами.

Пусть $\lambda_m = \alpha + \beta i$ — корень характеристического многочлена кратности i . Ему соответствуют $\varphi_m^i = x^i e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$; $\varphi_m^i, \bar{\varphi}_m^i$ — ЛНЗ, $i = \overline{0, l-1}$

Рассмотрим функции

$$\Psi_m^i = \frac{\varphi_m^i + \bar{\varphi}_m^i}{2} = e^{\alpha x} \cdot x^i \cos \beta x = \operatorname{Re}(\varphi_m^i)$$

$$\chi_m^i = \frac{\varphi_m^i - \bar{\varphi}_m^i}{2} = e^{\alpha x} \cdot x^i \sin \beta x = \operatorname{Im}(\varphi_m^i)$$

Так как любая суперпозиция решений (2.2) в силу его линейности тоже является решением, то χ_m^i и Ψ_m^i являются линейно независимыми и действительными решениями (2.2). Таким образом, чтобы получить действительную ФСР, необходимо все φ_m^i и $\bar{\varphi}_m^i$, $i = \overline{0, l_m}$ $m = \overline{1, k}$ отвечающих паре комплексных корней характеристического многочлена $\alpha \pm i\beta$ кратности l заменить на вещественные $\operatorname{Re}(\varphi_m^i)$ и $\operatorname{Im}(\varphi_m^i)$. Если считать, что $\lambda_i = \alpha_i \pm i\beta_i$ — корень $P_n(\lambda)$ кратности l_i , то общее решение (2.2) имеет вид:

$$y_0 = e^{\alpha_1 x} \left(\sum_{j=0}^{l_1-1} x^j (A_j^1 \cos \beta_1 x + B_j^1 \sin \beta_1 x) \right) + \dots + e^{\lambda_k x} \left(\sum_{j=0}^{l_k-1} x^j (A_j^k \cos \beta_k x + B_j^k \sin \beta_k x) \right) \quad (2.7)$$

3.3 Неоднородные линейные уравнения

Рассмотрим уравнение вида: $L_n(p)(y(x)) = f(x)$

Лемма 3.3. Пусть неоднородность имеет вид $f(x) = \sum_{k=1}^m f_k(x)$ и $y_k^s(x)$ — частное решение

$$L_n(p)(y(x)) = f_k(x), \quad k = \overline{1, m}, \text{ то есть } L_n(p)(y_k^s(x)) = f_k(x)$$

$$\text{Тогда частное решение уравнения имеет вид } y^s(x) = \sum_{k=1}^m y_k^s(x).$$

$$\text{Доказательство. } L_n(p) \left(\sum_{k=1}^m y_k^s(x) \right) \stackrel{\text{linear}}{=} \sum_{k=1}^m L_n(p)(y_k^s(x)) = \sum_{k=1}^m f_k(x) = f(x) \quad \blacksquare$$

Примечание. Утверждение леммы остается верным и в случае переменных коэффициентов в $L_n(p)$.

Определение 3.2. Пусть $f(x) = \sum_{i=1}^n P_{n_i}(x)e^{\lambda x}$, где P_{n_i} — многочлен степени n_i с комплексными коэффициентами, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда $f(x)$ называется квазимногочленом.

Рассмотрим ДУ:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = L_n(p)(y(x)) = (b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_0) e^{\lambda x} = P_k(x) e^{\lambda x} \quad (1)$$

Теорема 3.8. Частное решение (1) можно найти в виде

$$y^s(x) = x^r (C_k x^k + C_{k-1} x^{k-1} + \dots + C_0) e^{\lambda x} \quad (2)$$

где $r = l_m$, если $\lambda = \lambda_m$, $m = \overline{1, s}$ — корень $P_n(\lambda)$

$r = 0$, если $\lambda \neq \lambda_m$; Неопределенность константы $C_k \dots, C_0$ находятся из системы с треугольной матрицей.

Доказательство. • $\lambda_m = \lambda$

Подставим (2) в (1) и воспользуемся формулой сдвига.

$$y^s(x) x^r (C_k x^k + C_{k-1} x^{k-1} + \dots + C_0) e^{\lambda x}$$

Оператор примет вид:

$$\begin{aligned} L_n(p)(y^s(x)) &= (a_n(p-\lambda_1)^{l_1} \dots (p-\lambda_s)^{l_s})(y^s(x)) = L_{n-l_m}(p) \cdot (p-\lambda_m)^{l_m}(y^s(x)) \quad \text{формула сдвига} \\ &\quad \text{(к оператору)} \\ &= e^{\lambda_m x} L_{n-l_m}(p + \lambda_m) \frac{d^{l_m}}{dx^{l_m}} (C_k x^{r+k} + C_{k-1} x^{r+k-1} + \dots + C_0 x^r) \end{aligned}$$

Уравнение в таком виде имеет вид:

$$e^{\lambda x} L_{n-l_m}(p)(p + \lambda_m) \frac{d^{l_m}}{dx^{l_m}} (C_k x^{r+k} + C_{k-1} x^{r+k-1} + \dots + C_0 x^r) \equiv e^{\lambda_m x} (b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_0)$$

$$\text{где } L_{n-l_m}(p + \lambda_m) = a_0(p + \lambda_m)^0 + \dots + a_{n-l_m}(p + \lambda_m)^{n-l_m} = d_0 p^0 + \dots + d_{n-l_m} p^{n-l_m}$$

Сократим на $e^{\lambda_m x}$ и выполним дифференцирование $\frac{d^{l_m}}{dx^{l_m}}$ с учетом того, что $r = l_m$

$$\begin{aligned} (d_0 p^0 + \dots + d_{n-l_m} p^{n-l_m}) (A_k C_k x^k + A_{k-1} C_{k-1} x^{k-1} + \dots) &= A_k C_k d_0 x^k + (k A_k C_k d_1 + A_{k-1} C_{k-1} d_0) x^{k-1} + \dots \\ &\equiv b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots \end{aligned}$$

$$\text{где } A_k = (k + l_m)(k + l_m - 1) \cdot \dots \cdot (k + 1)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x и получим систему

$$\text{система с треугольной матрицей} \begin{cases} A_k C_k d_0 = b_k \\ A_{k-1} C_{k-1} d_0 + k A_k C_k d_1 = b_{k-1} \end{cases} \quad (62)$$

• $\lambda \neq \lambda_m$

$$y^s = e^{\lambda x} (C_k x^k + C_{k-1} x^{k-1} + \dots + C_0)$$

После формулы сдвига $e^{\lambda x} L_n(p + \lambda)(f) \Rightarrow$

$$L_n(p + \lambda_m) = (a_0(p + \lambda_m)^0 + \dots + a_n(p + \lambda_m)^n) = d_0 p^0 + d_1 p + \dots + d_n p^n \Rightarrow$$

уравнение примет вид:

$$e^{\lambda x}(d_0 p^0 + d_1 p + \dots + d_n p^n)(C_k x^k + C_{k-1} x^{k-1} + \dots + C_0) \equiv (b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_0) e^{\lambda x} \Rightarrow$$

$$C_k d_0 x^k + (k C_k d_1 + C_{k-1} d_0) x^{k-1} + \dots \equiv b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots$$

После приравнивая коэффициентов при одинаковых степенях x :

$$\text{Система с треугольной матрицей} \begin{cases} C_k d_0 = b_k \\ C_{k-1} d_0 + k C_k d_1 = b_{k-1} \end{cases} \quad (63)$$

■

3.4 Уравнение Эйлера

Примечание. Источник: В. М. Ипатов, О. А. Пыркова, В. Н. Седов "ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ"

Определение 3.3. Уравнением Эйлера называется линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами вида $a_k(x) = b_k x^{n-k}$, $k = \overline{0, n}$, где b_0, b_1, \dots, b_n — заданные числа, причем $b_0 \neq 0$:

$$b_0 x^n y^{(n)} + b_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + n_{n-1} x y' + b_n y = f(x) \quad (3.1)$$

Заменой $x = e^t$ ($t = \ln x$) (3.1) сводится к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Действительно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt} = e^{-t} \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = e^{-t} \frac{d}{dt} \left(e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) = e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

Допустим, что k -я производная имеет вид

$$\frac{d^k y}{dx^k} = e^{-kt} \left(\frac{d^k y}{dt^k} + \alpha_1 \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}} + \dots + \alpha_{k-1} \frac{dy}{dt} \right) = \frac{1}{x^k} \left(\frac{d^k y}{dt^k} + \alpha_1 \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}} + \dots + \alpha_{k-1} \frac{dy}{dt} \right) \quad \text{где } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1} - \text{постоянные}$$

Тогда $(k+1)$ -я производная будет равна

$$\frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^k y}{dx^k} \right) = e^{-t} \frac{d}{dt} \left(\frac{d^k y}{dx^k} \right) = e^{-(k+1)t} \left(\frac{d^{k+1} y}{dt^{k+1}} + (\alpha_1 - k) \frac{d^k y}{dt^k} + \dots + k \alpha_{k-1} \frac{dy}{dt} \right) = \quad (64)$$

$$= \frac{1}{x^{k+1}} \left(\frac{d^{k+1} y}{dt^{k+1}} + (\alpha_1 - k) \frac{d^k y}{dt^k} + \dots + k \alpha_{k-1} \frac{dy}{dt} \right) \quad (65)$$

Так как в преобразованном уравнении, в случае отсутствия кратных корней характеристического уравнения, решения имеют вид $y = e^{\lambda t}$, следовательно, в исходном уравнении они имеют вид $y = x^\lambda$. Поэтому можно непосредственно подставить его в уравнение Эйлера (3.1). Поскольку $x^k \frac{d^k x^\lambda}{dx^k} = \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-k+1)$ при $k \leq \lambda$, то характеристическое уравнение имеет вид

$$b_0 \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-n+1) + \dots + b_{n-1} \lambda(\lambda-1) + b_{n-1} \lambda + b_n = 1 \quad (3.2)$$

Каждому простому корню λ уравнения (3.2) соответствует частное решение однородного уравнения Эйлера x^λ ; каждому действительному корню λ кратности l ($l \geq 2$) соответствует l линейно независимых частных решений однородного уравнения Эйлера $x^\lambda, x^\lambda \ln x, \dots, x^\lambda (\ln x)^{l-1}$. В случае невещественных корней λ надо учитывать, что $x^{i\beta} = e^{i\beta \ln x}$, таким образом паре комплексно сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ уравнения (3.2) будут соответствовать два решения однородного уравнения Эйлера $x^\alpha \cos(\beta \ln x)$ и $x^\alpha \sin(\beta \ln x)$

3.5 Матричная экспонента, ее свойства и применение к решению нормальных линейных систем

3.5.1 Матричная экспонента

Необходимо решить ОЛДУ вида:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \quad (66)$$

Если $A(t) = \|a_j^i\|$, $a_j^i \in \mathbf{R}$, $i, j = 1, \dots, n$, тогда:

$$\begin{aligned} \vec{x}_0 &= E\vec{x}_0, \vec{x}_1 = E\vec{x}_0 + \frac{t-t_0}{1!}A\vec{x}_0 = \left(E + \frac{t-t_0}{1!}A\right)\vec{x}_0, \\ \vec{x}_n &= \left(E + \frac{t-t_0}{1!}A + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n\right)\vec{x}_0, \end{aligned}$$

Этот процесс будет сходиться к задаче Коши с решением:

$$\vec{x} = \left(E + \frac{t-t_0}{1!}A + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n + \dots\right)\vec{x}_0 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n\right)\vec{x}_0,$$

при условии, что $A^0 = E$.

Определение 3.4. Матричной экспонентой называют следующий степенной ряд:

$$e^{(t-t_0)A} = E + \frac{t-t_0}{1!}A + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n.$$

3.5.2 Свойства матричной экспоненты

Это квадратная матрица, по размерам аналогична матрице A , и каждый элемент этой матрицы представляет из себя степенной ряд с радиусом сходимости $+\infty$.

1. Решение задачи Коши для (66), если $A = \text{const}$:

$$\vec{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{x}_0, (\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0).$$

2. $e^{0A} = E$.

3. $e^{(t_1+t_2)A} = e^{t_1A}e^{t_2A} \Rightarrow e^{t_1A}e^{t_2A} = e^{t_2A}e^{t_1A}$ (коммутативность).

4. $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$.

5. $(e^{tA})' = Ae^{tA} = e^{tA}A$.

Доказательство. Так как квадратные матрицы составляют определенное кольцо, то $A^{n+m} = A^n A^m = A^m A^n$.

1.

2. $e^{tA} = E + \frac{t-t_0}{1!}A + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n + \dots$, если $t = 0$:

$$e^{0A} = E + 0 + \dots = E$$

3. рассматриваем (66), если $\vec{x}(t)$ - решение этого ДУ, то $\vec{x}(t + t_0)$ тоже решение этого ДУ $\forall t_0 \in \mathbf{R}$. ($u = t + t_0$) :

$$\frac{d\vec{x}(t + t_0)}{dt} = \frac{d\vec{x}}{du} \frac{du}{dt} = \frac{d\vec{x}}{du} = A\vec{x}(u) = A\vec{x}(t + t_0).$$

Тогда (66), с задачей Коши $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ имеет решение:

$$\vec{x}(t) = e^{tA} \vec{x}_0,$$

$$\vec{x}(t + t_0) = e^{(t+t_0)A} \vec{x}_0 - \text{решение } \frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}.$$

Рассмотрим тогда тоже самое уравнение для функции $z(t)$:

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = A\vec{z}, \text{ с задачей Коши } \vec{z}(0) = e^{t_0 A} \vec{x}_0 \Rightarrow \vec{z}(t) = e^{tA} (e^{t_0 A} \vec{x}_0) = (e^{tA} e^{t_0 A}) \vec{x}_0.$$

Рассмотрим это решение в нуле:

$$\vec{x}(0 + t_0) = e^{t_0 A} \vec{x}_0,$$

из основной теоремы следует, что $\vec{x}(t + t_0) = \vec{z}(t) \forall t$.

Тогда и получается основная формула:

$$\vec{x}(t + t_0) = e^{(t+t_0)A} \vec{x}_0 = (e^{tA} e^{t_0 A}) \vec{x}_0$$

4. $E = e^{0A} = e^{(t-t)A} = e^{tA} e^{-tA} = E \Rightarrow (e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$.
5. Берем представление матричной экспоненты в виде степенного ряда, который можно дифференцировать, тогда получаем:

$$(e^{tA})' = A + tA^2 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^n + \dots = A \left(E + tA + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^{n-1} \right),$$

$$(e^{tA})' = Ae^{tA} = e^{tA} A.$$

■

Примечание. Формула $e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}$ не имеет места, кроме случая, если $AB = BA$ (т.е. матрицы коммутативны).

3.5.3 Применение к решению нормальных линейных систем

Теорема 3.9. Пусть S - матрица перехода от исходного базиса к новому базису. Тогда в новой базисе $\bar{A} = S^{-1}AS$, или $A = S\bar{A}S^{-1}$. И главное:

$$e^{tA} = S^{-1}e^{t\bar{A}}S.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \left(E + tA + \dots + \frac{t^n}{n!}A^n \right) = \left(E + tS^{-1}e^{t\bar{A}}S + \dots + \frac{t^n}{n!}(S^{-1}e^{t\bar{A}}S)^n \right), \\ (S\bar{A}S^{-1})^n &= S\bar{A}^nS^{-1}, SES^{-1} = SS^{-1} = E \\ e^{tA} &= S^{-1}e^{t\bar{A}}S. \end{aligned}$$

■

Для решения нормальных линейных систем методом матричной экспоненты мы будем находить собственные вектора.

Матрица A в базисе из собственных векторов (если они соответствуют действительным собственным значениям) будет иметь диагональный вид. Произведение диагональной матрицы на диагональную – диагональная. Тогда для случая без кратных корней:

$$e^{tA} = E + t \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + \frac{t^2}{2!} \cdot \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2).$$

$$e^{tA} = \text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}).$$

Если λ – корень кратности l , то матрица A приводится к Жордановой клетке (диагональная матрица с единицами над главной диагональю).

$$A = \lambda E + B \Rightarrow B = A - \lambda E.$$

$$e^{tA} = e^{t(\lambda E + B)} = e^{t\lambda E}e^{tB}, e^{t\lambda E} = \text{diag}(e^{t\lambda}, \dots, e^{t\lambda}), e^{tB} = E + tB + \dots + \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}B^{l-1} + 0$$

$$\text{тогда } e^{tA} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots \\ & & \dots & \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} \\ 0 & & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Метод решения линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами (матричный метод вариации постоянной)

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}(t), \text{ решение будем искать в виде } \vec{x}(t) = e^{tA}\vec{C}(t),$$

$$\text{тогда } Ae^{tA}\vec{C}(t) + e^{tA}\dot{\vec{C}}(t) = Ae^{tA}\vec{C} + \vec{f}(t),$$

$$e^{tA}\dot{\vec{C}}(t) = \vec{f}(t) \Rightarrow \dot{\vec{C}}(t) = (e^{tA})^{-1}\vec{f}(t) = e^{-tA}\vec{f}(t).$$

4 Билет 4. Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

4.1 Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной линейной системы уравнений и для линейного уравнения n -го порядка в нормальном виде

Рассматривается система вида

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{q}(t), \quad (67)$$

где $A = \|a_j^i(t)\|$, $i, j = 1, \vec{n}$ – матрица, $\vec{q}(t)$ – заданная вектор-функция. Наряду с векторной записью также будем использовать координатную запись $x^i = \sum_{j=1}^n a_j^i x^j + q^i(t)$, $i = 1, \vec{n}$.

Необходимым условием линейности является факт того, что все A_j^i и q^i зависят только от t и не зависят от \vec{x} .

Для (67) ставится задача Коши:

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0.$$

Теорема 4.1. Основная теорема для линейных систем. Пусть $a_j^i(t)$, $i, j = 1, \vec{n}$ и $\vec{q}(t)$ в (67) непрерывны на отрезке $[a; b]$. Тогда решение задачи Коши существует и единственно на всем отрезке $[a; b]$.

Предварительные замечания:

Пусть вектор-функция $\vec{f}(x) \in B$ и A – линейный оператор, действующий из B в B , т.е. $A(\vec{f} + \vec{g}) = A\vec{f} + A\vec{g}$.

Определим норму оператора:

$$\|A\| = \sup_{\vec{\varphi} \in B, \vec{\varphi} \neq \vec{0}} \frac{\|A(\vec{\varphi})\|}{\|\vec{\varphi}\|}.$$

Тогда получаем неравенство: $\|A\| \leq \frac{\|A(\vec{\varphi})\|}{\|\vec{\varphi}\|}$.

Нормой для вектор-функции выберем $\|\vec{x}(t)\| = \max_{1 \leq i \leq n} (\max_{t \in [a; b]} x^i(t))$, а нормой для оператора $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} (\max_{t \in [a; b]} \sum_{j=1}^n |a_j^i(t)|)$

Доказательство. Определим $\vec{g}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t \vec{q}(S) dS$ и построим итерационную процедуру.

Т.к. $q^i(t) \in C_{[a; b]} \forall i = 1, \vec{n} \Rightarrow \exists \|\vec{q}\|_c = M_1$. Тогда $\|\vec{g}\|_c = \|\vec{x}_0 + \int_{t_0}^t \vec{q}(S) dS\| \leq \|\vec{x}_0\| + \int_{t_0}^t \|\vec{q}(S)\| dS \leq \|\vec{x}_0\| + M_1(b - a) = C$.

Рассмотрим интегральное уравнение $\vec{x} = \vec{g} + \int_{t_0}^t A(s)\vec{x}(s) ds$.

Аналогично основной лемме доказывается, что последнее интегральное уравнение эквивалентно задаче (67).

Итерационная процедура: $\vec{x}_0 = \vec{g}$; $\vec{x}_k = \vec{g} + \int_{t_0}^t A(s)x_{k-1}(s)ds$, $k = 0, 1, \dots$

Оценим норму:

$$\|\vec{x}_1 - \vec{x}_0\| = \left\| \int_{t_0}^t A(s)\vec{g}(s)ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)\vec{g}(s)\|ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)\| \cdot \|\vec{g}(s)\|ds \right| \leq C_1 C |t - t_0|;$$

Таким образом $\|\vec{x}_1 - \vec{x}_0\| \leq C_1 C |t - t_0|$.

Теперь докажем по индукции неравенство: $\|\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}\| \leq \frac{C C_1^k}{k!} |t - t_0|^k$.

Базой индукции выступает полученное выше неравенство. Предположим, что верно для $n = k$, т.е.: $\|\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}\| \leq \frac{C C_1^k}{k!} |t - t_0|^k$.

Докажем для

$$\begin{aligned} n = k + 1 : \|\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k\| &= \left\| \int_{t_0}^t A(s)(\vec{x}_k(s) - \vec{x}_{k-1}(s))ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)(\vec{x}_k(s) - \vec{x}_{k-1}(s))\|ds \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)\| \cdot \|(\vec{x}_k(s) - \vec{x}_{k-1}(s))\|ds \right| \leq C \left| \int_{t_0}^t \frac{C_1 C^k |s - t_0|^k}{k!} ds \right| = \frac{C^{k+1} C_1 |t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

Т.к. $|t - t_0| \leq (b - a)$, то предыдущее неравенство можно усилить $\|\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}\| \leq \frac{C_1 C^k}{k!} (b - a)^k$.

Функциональная последовательность \vec{x}_k сходится равномерно, т.к. сходится равномерно ряд $\vec{x}_0 + (\vec{x}_1 - \vec{x}_0) + \dots + (\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}) + \dots$, который межорируется сходящимся рядом $\|\vec{x}_0\| + \|(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)\| + \dots + \|(\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1})\| + \dots \leq \|\vec{x}_0\| + C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C^k |b-a|^k}{k!} = \|\vec{x}_0\| + C_1 e^{C(b-a)} < \infty \Rightarrow$

Существует (в силу банаховости пр-ва) непрерывно дифф. $\varphi(t) : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n = \varphi(t)$.

Рассмотрим $\left\| \int_{t_0}^t A \vec{x}_n dS - \int_{t_0}^t A \vec{\varphi} dS \right\| = \left\| \int_{t_0}^t A(\vec{x}_n - \vec{\varphi}) dS \right\| \leq \|A\| \cdot \left| \int_{t_0}^t \|\vec{x}_n - \vec{\varphi}\| dS \right|$, где $\|\vec{x}_n - \vec{\varphi}\| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$.

Т.о. итерационная процедура сходится в силу существования пределов слева и справа.

Полученное решение эквивалентно решению задачи (67). В отличие от основной теоремы для нормальных систем ДУ: $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t, \vec{x})$, где существование было получено только на отрезке Пеано, для СЛДУ существование решения доказано для всего отрезка $[a; b]$ – промежутка, где $a_j^i(t)$ и $\vec{q}(t)$ непрерывны. В нашем случае \vec{f} соответствует $\vec{f} = A\vec{x} + \vec{q}$. Она непрерывна, т.к. полученное решение $\vec{x}(t)$ непрерывно. Условие непрерывности $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ также выполнены, т.к. в нашем случае $\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_{ij}(t)$ – непр. на $[a; b]$. Отсюда следует единственность, т.к. два решения задачи (67), согласно основной теореме для нормальных систем, совпадают на промежутке, где они оба определены. В нашем случае это $[a; b]$.

Т.о. теорема не носит локальных характер.

■

4.2 Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы

Будем рассматривать однородную систему ДУ вида:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}; \quad \dot{x}^i = \sum_{k=1}^n a_k^i x^k; \quad i, k = \overline{1, n} \quad (68)$$

Утверждение 4.1. Для однородных систем линейных уравнений верен принцип суперпозиций, т.е. если система функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – решение системы уравнений, то любая их линейная комбинация тоже является решением.

Доказательство. Введем оператор L такой, что $L = \frac{d}{dt} - A$. Тогда однородная система ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ запишется в виде $L(\vec{x}) = 0$, неоднородная система ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} - A\vec{x} = q(t)$ запишется в виде $L(\vec{x}) = q(t)$.

Пусть вектор-функции $\vec{\varphi}(t)$ и $\vec{\psi}(t)$ являются решениями системы $L(\vec{x}) = 0$, в таком случае справедливо

$$L(\vec{\varphi}(t)) = 0; \quad L(\vec{\psi}(t)) = 0$$

Рассмотрим вектор-функцию $\vec{\chi}(t) = a\vec{\varphi}(t) + b\vec{\psi}(t)$, где a и b – произвольные коэффициенты. Применим оператор L к получившейся вектор-функции:

$$\begin{aligned} L(\vec{\chi}(t)) &= \frac{d}{dt} (a\vec{\varphi}(t) + b\vec{\psi}(t)) - A(a\vec{\varphi}(t) + b\vec{\psi}(t)) = \\ &= a \left(\frac{d}{dt} \vec{\varphi}(t) - A\vec{\varphi}(t) \right) + b \left(\frac{d}{dt} \vec{\psi}(t) - A\vec{\psi}(t) \right) = \\ &= aL(\vec{\varphi}(t)) + bL(\vec{\psi}(t)) = 0 \end{aligned}$$

■

Определение 4.1. Пусть имеется система вектор-функций $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$

$$\vec{\varphi}_i(t) = \begin{pmatrix} \varphi_i^1(t) \\ \dots \\ \varphi_i^n(t) \end{pmatrix} \quad (69)$$

непрерывна на $I(x)$, тогда такая система называется линейно-зависимой на I , если

$$\exists C_1, \dots, C_n : \sum_{i=1}^n |C_i| \neq 0 \ \& \ \sum_{i=1}^n C_i \vec{\varphi}_i(t) = 0 \ \forall t \in I$$

В противном случае, система вектор-функций называется линейно-независимой, то есть условие

$$\sum_{i=1}^n C_i \vec{\varphi}_i(t) = 0 \ \forall t \in I$$

выполняется только при $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$.

Определение 4.2. Пусть система вектор-функций $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$ линейно-независима на I и каждая вектор-функция $\vec{\varphi}_i(t)$ является решением системы ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$. Тогда такая система вектор-функций называется фундаментальной системой решений (ФСР) данной системы ДУ.

Теорема 4.2. Рассмотрим систему ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$. Если матрица A является непрерывной на отрезке $[a, b]$, то система имеет ФСР на этом отрезке.

Доказательство. матрица A является непрерывной на отрезке $[a, b]$, тогда, согласно основной теореме, на отрезке $[a, b]$ существует единственное решение задачи Коши.

Пусть система функций $\vec{\varphi}_1(t), \vec{\varphi}_2(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$ является решением системы при следующих заданных условиях:

$$\vec{\varphi}_1(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\varphi}_2(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{\varphi}_n(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (70)$$

тогда вронскиан такой системы в точке t_0 :

$$W(t_0) = |\vec{\varphi}_1(t_0), \vec{\varphi}_2(t_0), \dots, \vec{\varphi}_n(t_0)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad (71)$$

тогда, из свойства вронскиана следует, что данная система функций является линейно-независимой, а так как каждая функция является решением системы ДУ, эта система вектор-функций и есть ФСР системы ДУ. ■

Теорема 4.3. Пусть система вектор-функций $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$ является ФСР системы ДУ, тогда любое решение этой системы ДУ можно представить, как линейную комбинацию компонентов ФСР: $\vec{x}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$, где C_1, \dots, C_n – произвольные постоянные.

Доказательство. Так как для системы ДУ справедлив принцип суперпозиции, то вектор-функция $\vec{x}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$.

Предположим теперь, что существует функция $\vec{\chi}(t)$ такая, что она является решением системы ДУ, но не представима в виде $C_1\vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$. Пусть значение этой функции в точке t_0 :

$$\vec{\chi}(t_0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_1(t_0) \\ \chi_2(t_0) \\ \dots \\ \chi_n(t_0) \end{pmatrix} \quad (72)$$

Теперь составим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} C_1\varphi_1^1(t_0) + C_2\varphi_2^1(t_0) + \dots + C_n\varphi_n^1(t_0) = \alpha_1 \\ C_1\varphi_1^2(t_0) + C_2\varphi_2^2(t_0) + \dots + C_n\varphi_n^2(t_0) = \alpha_2 \\ \dots \\ C_1\varphi_1^n(t_0) + C_2\varphi_2^n(t_0) + \dots + C_n\varphi_n^n(t_0) = \alpha_n \end{cases} \quad (73)$$

где C_1, C_2, \dots, C_n – являются неизвестными, который надо найти. Определителем этой системы является

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} \varphi_1^1(t_0) & \varphi_2^1(t_0) & \dots & \varphi_n^1(t_0) \\ \varphi_1^2(t_0) & \varphi_2^2(t_0) & \dots & \varphi_n^2(t_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^n(t_0) & \varphi_2^n(t_0) & \dots & \varphi_n^n(t_0) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (74)$$

данный определитель не равен 0, поскольку функции $\vec{\varphi}_i$ $i = 1 \dots n$ являются ФСР системы ДУ, поэтому числа C_1, C_2, \dots, C_n определяются однозначно.

С этими числами рассмотрим решение исходной системы ДУ, назовем его $\vec{z}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$. Поскольку $\vec{\chi}(t)$ и $\vec{z}(t)$ – являются решениями системы ДУ, по принципу суперпозиции функция $\vec{\psi}(t) = \vec{z}(t) - \vec{\chi}(t)$ так же является решением этой системы ДУ.

Заметим, что значение этой функции в точке t_0 : $\vec{\psi}(t_0) = \vec{z}(t_0) - \vec{\chi}(t_0) = 0$, заметим так же, что $\vec{0}$ является решением однородной системы системы $\frac{d}{dt}\vec{x} - A\vec{x}$. Тогда, в силу теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши, выполняется:

$$\begin{aligned}\vec{\psi}(t) &= 0 \quad \forall t \in I \Rightarrow \\ \vec{\psi}(t) &= \vec{z}(t) - \vec{\chi}(t) \equiv 0 \quad \forall t \in I \Rightarrow \\ \vec{z}(t) &= \vec{\chi}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + C_2\vec{\varphi}_2(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t)\end{aligned}$$

Мы получили противоречие с предположением о невозможности линейного представления решения $\vec{\chi}(t)$ через функции ФСР, таким образом, мы доказали, что любое решение системы ДУ можно представить, как линейную комбинацию компонентов ФСР. ■

Определение 4.3. Решение системы ДУ вида $\vec{x}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$, где C_1, \dots, C_n называется общим решением системы ДУ.

4.3 Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем

Введем оператор L такой, что $L = \frac{d}{dt} - A$. Тогда однородная система ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ запишется в виде $L(\vec{x}) = 0$, неоднородная система ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} - A\vec{x} = q(t)$ запишется в виде $L(\vec{x}) = q(t)$.

Утверждение 4.2. Общее решение неоднородной системы ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} - A\vec{x} = q(t)$ представляет собой следующее выражение:

$$\vec{x} = \vec{x}^s + \vec{x}_0^{ob} \quad (75)$$

где \vec{x}^s – частное решение линейного неоднородного уравнения, т. е. $L(\vec{x}^s) = q(t)$, а \vec{x}_0^{ob} – общее решение системы линейных **однородных** уравнений $L(\vec{x}_0^{ob}) = 0$. Таким образом, получаем:

$$L(\vec{x}) = L(\vec{x}^s + \vec{x}_0^{ob}) = L(\vec{x}^s) + L(\vec{x}_0^{ob}) = q(t) + 0$$

4.4 Определитель Вронского и его свойства

4.4.1 Определитель Вронского

Определение 4.4. Пусть на I определена система вектор-функций $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$, тогда определитель

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1^1(t) & \dots & \varphi_n^1(t) \\ \dots & & \dots \\ \varphi_1^n(t) & \dots & \varphi_n^n(t) \end{vmatrix} \quad (76)$$

называется определителем Вронского, где

$$\vec{\varphi}_i = \begin{pmatrix} \varphi_i^1 \\ \dots \\ \varphi_i^n \end{pmatrix} \quad (77)$$

другими словами

$$W(t) = |\vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_n| \quad (78)$$

Теорема 4.4. Если $\exists t_0 \in I : W(t_0) \neq 0$, то система является линейно независимой на I . Обратное неверно, пример:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ЛНЗ, но } W(t) = 0 \quad (79)$$

Доказательство. Будем доказывать от противного: пусть система является линейно-зависимой, тогда $\exists C_1, \dots, C_n : C_1 \vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n \vec{\varphi}_n(t) = 0 \forall t \in I$. Тогда в определителе Вронского $W(t)$ есть хотя бы два линейно-зависимых столбца, так как $\vec{\varphi}_i(t)$ являются столбцами определителя, но тогда получаем, что $W(t) = 0 \forall t \in I$ (хотя предполагалось, что $\exists t_0 \in I : W(t_0) \neq 0$). Таким образом, мы получили противоречие, откуда следует, что система является линейно независимой на I . ■

4.4.2 Свойства Вронскиана

1. Если $\exists t_0 \in I : W(t_0) \neq 0$, то система является линейно независимой на I (см. доказательство теоремы).
2. Пусть вектор-функции $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$ являются решениями системы ДУ, и существует точка $t_0 \in I : W(t_0) = 0$, тогда система $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$ является линейно-зависимой.

Доказательство. Поскольку $W(t_0) = 0$ столбцы этой матрицы являются линейно-зависимыми, то есть

$$\exists C_1, C_2, \dots, C_n : \sum_{i=1}^n C_i^2 \neq 0 \text{ \& } \sum_{i=1}^n C_i \vec{\varphi}_i(t_0) = 0$$

Используя данные коэффициенты, построим функцию $\vec{x}(t) = C_i \vec{\varphi}_i(t)$. Заметим, что во-первых $\vec{x}(t_0) = 0$, а во-вторых данная функция является решением системы ДУ в силу теоремы о суперпозиции. Тогда, в силу теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши выполняется: $\vec{x}(t) = C_i \vec{\varphi}_i(t) = 0 \forall t \in I$, что означает, что система $\vec{\varphi}_i$ является линейнозависимой. ■

4.5 Фундаментальная система решений и общее решение нормальной линейной однородной системы уравнений

Рассмотрим систему вида

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{f}, \quad (80)$$

где $A = \|a_j^i\|$, $i, j = \overline{1, n}$ - матрица системы, причём a_j^i - числа; $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f^1(t) \\ \dots \\ f^n(t) \end{pmatrix}$ - вектор-

столбец неоднородной системы; $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ \dots \\ x^n(t) \end{pmatrix}$ - вектор-столбец искомых функций.

Наряду с вышеприведённой записью также будем рассматривать запись вида:

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_j^i x^j(t) + f^i, \quad i = \overline{1, n}$$

Основная идея решения систем дифференциальных уравнений вида (80), состоит в том, что матрица системы рассматривается как матрица линейного преобразования линейного пространства $\vec{\mathbb{R}}^n$ (пространство, присоединённое к аффинному \mathbb{R}^n), заданная в исходном базисе.

Пусть $S = \|\sigma_j^i\|$, $i, j = \overline{1, n}$ - матрица перехода от исходного базиса $\|\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\|$ к базису. Эти соотношения связаны выражением $\|\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\| = \|\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\| \cdot S$ или $\vec{e}_i = \sum_{k=1}^n \sigma_i^k \vec{e}_k$, а координаты векторов в новом и старом базисе связаны формулой $\vec{x} = S\vec{x}'$ или $x^i = \sum_{m=1}^n \sigma_m^i x'^m$.

Матрица перехода S обратима, поэтому $\exists S^{-1} = \|\tau_j^i\|$, $i, j = \overline{1, n}$, причём $SS^{-1} = S^{-1}S = E$, т.е. $\sum_{k=1}^n \tau_k^i \sigma_j^k = \delta_j^i$. Тогда $\vec{x}' = S^{-1}\vec{x}$. Преобразуем исходную систему, умножив её справа на S^{-1} .

$$S^{-1} \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(S^{-1}\vec{x}) = S^{-1}A\vec{x} + S^{-1}\vec{f}$$

Подставив $\vec{x} = S\vec{x}'$, получим $\frac{d\vec{x}'}{dt} = \bar{A}\vec{x}' + \vec{f}'$, где $\vec{f}'(t) = S^{-1}\vec{f}(t)$, а $\bar{A} = S^{-1}AS$ является матрицей преобразования A в новом базисе. Уравнение имеет **ковариантный вид**, поэтому задачи свелись к нахождению базиса, в котором система имела бы наиболее простой вид.

Пусть A - матрица системы (80) является матрицей линейного преобразования линейного пространства $\vec{\mathbb{R}}^n$, т.е. $\forall \vec{x} \in \vec{\mathbb{R}}^n \mapsto A\vec{x} = \vec{y} \in \vec{\mathbb{R}}^n$, тогда $A = \|A\vec{e}_1, \dots, A\vec{e}_n\|$, т.е. столбцы матрицы A являются компонентами образов базисных векторов.

Определение 4.5. Подпространство $L \subset \vec{\mathbb{R}}^n$ называется **инвариантным подпространством** относительно преобразования A , если $\forall \vec{x} \in L \mapsto A\vec{x} \in L$.

Пусть $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_s, \vec{e}_{s+1}, \dots, \vec{e}_n$ - базис в $\vec{\mathbb{R}}^n$, а $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_s$ - базис в L .

Тогда $\forall i = \overline{1, s} \mapsto A\vec{e}_i = \sum_{k=1}^s \gamma_i^k \vec{e}_k$ и матрица A в этом базисе будет иметь вид:

$$A = \begin{Bmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{Bmatrix}, \text{ где } A_1 = \begin{Bmatrix} \gamma_1^1 & \dots & \gamma_s^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_1^s & \dots & \gamma_s^s \end{Bmatrix}, \text{ } O - \text{ нулевая матрица размером } (n-s) \times s.$$

Если $\vec{\mathbb{R}}^n = L^1 \oplus \dots \oplus L^k$ и L^i , $i = \overline{1, k}$ - инвариантные подпространства, то в базисе, который является базисом-объединения всех базисов инвариантных подпространств, прямая сумма которых равна $\vec{\mathbb{R}}^n$, матрица будет иметь вид:

$$A = \begin{Bmatrix} A_1 & O & \dots & O \\ O & A_2 & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & A_k \end{Bmatrix}$$

A_i , $i = \overline{1, k}$ - квадратная матрица размерами $l_i < n$, которая является сужением матрицы преобразования A на инвариантное подпространство L_i

В таком случае искомую вектор-функцию можно переписать в виде:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^{l_1} \\ \dots \\ x^{l_1+\dots+l_{i-1}+1} \\ x^{l_1+\dots+l_i} \\ \dots \\ x^{l_1+\dots+l_k+1} \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}$$

$$\text{Обозначим через } X_i = \begin{pmatrix} x^{l_1+\dots+l_{i-1}+1} \\ \dots \\ x^{l_1+\dots+l_{i-1}+l_i} \end{pmatrix}$$

Тогда система (80) распадается на k систем, порядок которых $l_i < n$:

$$\dot{\vec{X}}_i = A_i \vec{X}_i + \vec{f}_i(t), \quad i = \overline{1, k}$$

Для приведения матрицы линейного преобразования к клеточно-диагональному виду нужно найти собственные векторы линейного преобразования. Вектор $\vec{x} \neq 0$ называется собственным вектором линейного преобразования, матрица которого равна A , если

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}. \text{ Пусть } A = \|a_{ij}^i\|, \quad i, j = \overline{1, n}, \text{ а } \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} - \text{компоненты собственного вектора. Тогда}$$

компоненты собственного вектора должны удовлетворять системе однородных линейных уравнений вида $\|A - \lambda E\|\vec{x} = 0$. Чтобы эта система имела ненулевое решение необходимо, чтобы $\det \|A - \lambda E\| = P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{trace } A + \dots + \det A = 0$.

$P_n(\lambda)$ - характеристический многочлен матрицы A .

Случай простых корней характеристического многочлена

Рассмотрим однорудную систему с постоянными коэффициентами

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \quad (81)$$

. Задача состоит в том, чтобы найти вектор функции $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$, которые будут образовывать ФСР нашей системы.

Корни характеристического многочлена $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ простые и действительные.

Таким $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ соответствуют собственные векторы $\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_n$ ($A\vec{h}_i = \lambda_i \vec{h}_i$) Можно показать, что собственные вектора, соответствующие разным собственным значениям линейно независимы, поэтому существует базис из собственных векторов $\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_n$, в котором матрица A имеет вид: $\bar{A} =$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{Тогда система (81) будет иметь следующий вид:}$$

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}^1}{dt} = \lambda_1 \vec{x}^1 \\ \dots \\ \frac{d\vec{x}^n}{dt} = \lambda_n \vec{x}^n \end{cases} \Rightarrow$$

вектор-функции $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}, \dots, \varphi_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda_n t}$ образует ФСР этой системы, т.к. явля-

ются линейно независимыми решениями. Матрица перехода в этом случае $S = \|\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_n\|$. Тогда получим, что

$$\vec{x}_1 = \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \vec{x}_n = \vec{h}_n e^{\lambda_n t} \quad (82)$$

является ФСР (81), т.к. $\vec{x}_i, i = \overline{1, n}$ из (82) являются решениями (81), линейная независимость вектор-функций $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ следует из того, что вронскиан (82) при $t = 0$ является $\det S \neq 0$ (свойство 10 вронскиана). Тогда любое решение (81) представимо в виде

$$\vec{x} = c_1 \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n \vec{h}_n e^{\lambda_n t} \quad (83)$$

Можно доказать, что $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ - ФСР иначе:

Лемма 4.1. Система функций $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$, где все λ_i - разные, является линейно независимой.

Доказательство. Составим линейную комбинацию, равную нулю: $c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t} = 0$ - продифференцируем $(n-1)$ раз и запишем получившуюся систему для поиска c_1, \dots, c_n

$$\begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t} = 0 \\ \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + \lambda_n c_n e^{\lambda_n t} = 0 \\ \dots \\ \lambda_1^{n-1} c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + \lambda_n^{n-1} c_n e^{\lambda_n t} = 0 \end{cases}$$

Система является однородной, поэтому имеет тривиальное решение, но единственное ли оно?

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 t + \dots + \lambda_n t} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 t + \dots + \lambda_n t} \prod_{1 \leq j < i \leq n} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$$

Полученный определитель это определитель Вандермонда, который равен нулю только, если какая-то пара λ_i, λ_j совпадёт. Значит определитель не равен нулю по условию \Rightarrow система имеет только тривиальное решение по теореме Крамера \Rightarrow система линейно независима. ■

Лемма 4.2. Система $\vec{\varphi}_1 = \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \vec{\varphi}_n = \vec{h}_n e^{\lambda_n t}$ является ФСР.

Доказательство. $\vec{\varphi}_i = \vec{h}_i e^{\lambda_i t}$ является решением по построению. Рассмотрим $W(t)$: $W(t) = \|\vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} \dots \vec{h}_n e^{\lambda_n t}\|$, при $t = 0$: $W(0) = \|\vec{h}_1 \dots \vec{h}_n\| \neq 0$, т.к. собственные вектора линейно независимые. Следовательно, по 10 свойству определителя Вронского система линейно независима. ■

Итак, общее решение системы (81) записывается в виде:

$$\boxed{\vec{x}_0^{\text{об}} = c_1 \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n \vec{h}_n e^{\lambda_n t}}$$

Корни характеристического многочлена $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ простые, но среди них есть комплексные.

Пусть есть комплексные собственное число $\lambda_k = r_k + i\omega_k$ и ему соответствующий комплексный собственный вектор $\vec{h}_k + i\vec{d}_k$, где \vec{h}_k, \vec{d}_k - действительные вектора. Так как характеристический многочлен это многочлен с действительными коэффициентами, то комплексный корень идет вместе с комплексно ему сопряженным, т.е. $\bar{\lambda}_k = r_k - i\omega_k$ тоже является корнем характеристического многочлена.

Взяв комплексное сопряжение над равенством $A(\vec{h}_k + i\vec{d}_k) = (r_k + i\omega_k)(\vec{h}_k + i\vec{d}_k)$:

$$\overline{A(\vec{h}_k + i\vec{d}_k)} = A(\vec{h}_k - i\vec{d}_k) = \overline{(r_k + i\omega_k)(\vec{h}_k + i\vec{d}_k)} = (r_k - i\omega_k)(\vec{h}_k - i\vec{d}_k)$$

Т.е. $\vec{h}_k - i\vec{d}_k$ является собственным вектором для $\bar{\lambda}_k = r_k - i\omega_k$.

Аналогично случайно действительных простых корней система принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}_1}{dt} = \lambda_1 \vec{x}_1 \\ \dots \\ \frac{d\vec{x}_k}{dt} = (r_k + i\omega_k) \vec{x}_k \\ \frac{d\vec{x}_{k+1}}{dt} = (r_k - i\omega_k) \vec{x}_{k+1} \\ \dots \\ \frac{d\vec{x}_n}{dt} = \lambda_n \vec{x}_n \end{cases}$$

$$\text{ФСР такой системы будет комплексной: } \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} e^{\lambda_1 t}; \dots; \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} e^{r_k t} (\cos \omega_k t + i \sin \omega_k t);$$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} e^{r_k t} (\cos \omega_k t - i \sin \omega_k t); \dots; \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} e^{\lambda_n t}$$

Т.к. матрица перехода $S = \left\| \vec{h}_1, \dots, \vec{h}_k + i\vec{d}_k, \vec{h}_k - i\vec{d}_k, \dots, \vec{h}_n \right\|$, то комплексная ФСР (81) будет: $\vec{h}_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, (\vec{h}_k + i\vec{d}_k) e^{r_k t} (\cos \omega_k t + i \sin \omega_k t), (\vec{h}_k - i\vec{d}_k) e^{r_k t} (\cos \omega_k t - i \sin \omega_k t), \dots, \vec{h}_n e^{\lambda_n t}$

Рассмотрим систему функций, у которых первые $k-1$ функции являются функциями построенной выше системы. В качестве k -ой и $k+1$ -ой функций возьмём:

$$\vec{q}_k = \frac{1}{2} ((\vec{h}_k + i\vec{d}_k) e^{r_k t} (\cos \omega_k t + i \sin \omega_k t) + (\vec{h}_k - i\vec{d}_k) e^{r_k t} (\cos \omega_k t - i \sin \omega_k t)) = e^{r_k t} (\vec{h}_k \cos \omega_k t - \vec{d}_k \sin \omega_k t)$$

$$\vec{q}_{k+1} = \frac{1}{2i}((\vec{h}_k + i\vec{d}_k)e^{r_k t}(\cos\omega_k t + i\sin\omega_k t) - (\vec{h}_k - i\vec{d}_k)e^{r_k t}(\cos\omega_k t - i\sin\omega_k t)) = e^{r_k t}(\vec{h}_k \sin\omega_k t + \vec{d}_k \cos\omega_k t)$$

Остальные вектор-функции оставим прежними. Так построенная система будет линейно независимой, т.к. была получена линейными комбинациями линейно независимых вектор-функций. Каждая функция данной системы будет решением (81) по построению и принципу суперпозиции \Rightarrow полученная система является ФСР (81) и содержит только действительные функции \Rightarrow

$$\vec{x}_0^{об} = c_1 \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_k e^{r_k t}(\vec{h}_k \cos\omega_k t - \vec{d}_k \sin\omega_k t) + c_{k+1} e^{r_k t}(\vec{h}_k \sin\omega_k t + \vec{d}_k \cos\omega_k t) + \dots + c_n \vec{h}_n e^{\lambda_n t}$$

Случай кратных корней характеристического многочлена

В общем случае по основной теореме алгебры характеристический многочлен представляется в виде: $P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{tr} A + \dots + \det A = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{k_m}$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ являются собственными числами матрицы A , $k_i \geq 1$, $i = \overline{1, m}$. В таком случае количество собственных векторов может быть меньше размерности пространства, поэтому матрица может быть не диагонализируема.

Определение 4.6. Множество $R_s = \ker(A - \lambda_s E)^{k_s}$, $s = \overline{1, m}$, где λ_s - корень кратности k_s характеристического многочлена, называется **корневым пространством**

Одно из утверждений теоремы Жордана: $\vec{R}^n = R_1 \oplus \dots \oplus R_m$ пространство раскладывается в прямую сумму корневых подпространств, а также $\dim R_s = k_s$. Следовательно, если выбрать базис, как объединение базисов корневых подпространств, то исходная система распадается на m систем порядка k_s , $s = \overline{1, m}$, связывающих $k_s \leq n$ функций. Рассмотрим одну из таких систем.

Обозначим $\lambda_s = \bar{\lambda}$, $k_s = l$, перенумеруем и переобозначим искомые функции $x^{k_1 + \dots + k_{s-1} + 1} = \bar{x}_1, \dots, x^{k_1 + \dots + k_{s-1} + l} = \bar{x}^l$. Тогда имеем задачу: решить систему

$$\dot{\vec{x}} = \bar{A} \vec{x} \quad (84)$$

где \bar{A} является сужением A на подпространство $R_s = \ker(A - \bar{\lambda} E)^l = \ker B^l$, т.е. $\forall \vec{x} \in R_s \mapsto B^l \vec{x} = 0$ по определению ядра.

Имеет место вложенность: $0 \subset \ker B \subset \ker B^2 \subset \dots \subset \ker B^l$, т.к. $\forall \vec{x} : B^{i-1}(\vec{x}) = 0 \mapsto B^i(\vec{x}) = B(B^{i-1}(\vec{x})) = 0$

Обозначим $T_i = \ker B^i$, $i = \overline{1, k}$, где $k \leq l$

Примечание. Неравенство $k \leq l$ связано с тем, что может оказаться, что $\forall \vec{x} \in R_s \mapsto B^k \vec{x} = 0$ и строить T_i невозможно

Для $i = \overline{1, k}$ определим множество $\mathcal{V}^i = \{\vec{x} \in \mathcal{V}^i : B^i \vec{x} = 0, B^{i-1} \vec{x} \neq 0\}$. Заметим, что \mathcal{V}^1 является по построению собственным подпространством A .

В силу определения B^i и \mathcal{V}^i : $\mathcal{V}^i = \ker B^i \setminus \ker B^{i-1}$, $i = \overline{2, k}$. По построению $R_s = \mathcal{V}^1 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}^k$. Осталось выбрать базис в \mathcal{V}^i , $i = \overline{2, k}$.

Теорема 4.5. Пусть $i > j$, тогда $\forall \vec{h}_i \in \mathcal{V}^i \exists \vec{h}_j \in \mathcal{V}^j : \vec{h}_j = B^{i-j} \vec{h}_i$.

Доказательство. Построим такой \vec{h}_j и покажем, что он лежит в \mathcal{V}^j .

$$\begin{aligned} B^j \vec{h}_j &= B^j(B^{i-j}(\vec{h}_i)) = (B^j B^{i-j})(\vec{h}_i) = B^i \vec{h}_i = 0 \\ B^{j-1} \vec{h}_j &= B^{j-1}(B^{i-j}(\vec{h}_i)) = (B^{j-1} B^{i-j})(\vec{h}_i) = B^{i-1} \vec{h}_i \neq 0 \end{aligned}$$

■

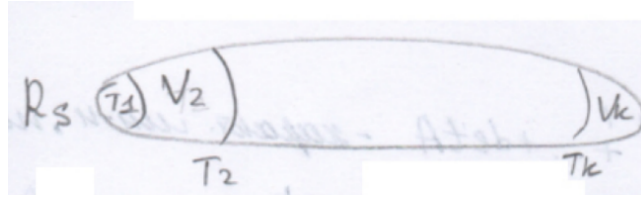


Рис. 1

Построение соответствующего базиса начинается с определения собственных векторов A , соответствующих числу $\bar{\lambda}$. Для этого решается уравнение $(\bar{A} - \bar{\lambda}E)\vec{x} = B\vec{x} = 0$.

Рассмотрим случай, когда имеется только один собственный вектор \vec{e} . В этом случае $k = l$ (наше подпространство будет представимо в виде 1 жордановой клетки). Вектор \vec{e} образует базис в $\mathcal{V} = T_1$. Вектор $\vec{h}_1 \in \mathcal{V}^2$ найдём как решение $B\vec{h}_1 = \vec{e}$, по доказанной выше теореме такое уравнение имеет решение. Вектор \vec{h}_1 называется **присоединённым** к вектору \vec{e} . Вектора \vec{e} и \vec{h}_1 образуют базис в T_2 . Определим векторы $\vec{h}_i, i = \overline{2, l-1}$ из уравнений $B\vec{h}_i = \vec{h}_{i-1}$. Так построенные векторы $\vec{e}, \vec{h}_1, \dots, \vec{h}_{l-1}$ образует базис в R_s . Этот базис называется жордановой цепью.

Запишем матрицу системы в этом базисе. Все построенные векторы находим из уравнений: $\bar{A}\vec{e} = \bar{\lambda}\vec{e}, \bar{A}\vec{h}_1 = \vec{e} + \bar{\lambda}\vec{h}_1, \dots, \bar{A}\vec{h}_{l-1} = \vec{h}_{l-2} + \bar{\lambda}\vec{h}_{l-1}$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \bar{\lambda} & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \bar{\lambda} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} - \text{жорданова клетка размер } l$$

В таком базисе системе имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}^1}{dt} = \bar{\lambda}\bar{x}^1 + \bar{x}^2 \\ \dots \\ \frac{d\bar{x}^{n-1}}{dt} = \bar{\lambda}\bar{x}^{n-1} + \bar{x}^n \\ \frac{d\bar{x}^n}{dt} = \bar{\lambda}\bar{x}^n \end{cases} \quad (85)$$

Замена: $\bar{x}^i = \bar{y}^i e^{\bar{\lambda}t}, i = \overline{1, l} \Rightarrow \dot{\bar{y}}^i e^{\bar{\lambda}t} + \bar{\lambda}\bar{y}^i e^{\bar{\lambda}t} = \lambda\dot{\bar{y}}^i e^{\bar{\lambda}t} + \dot{\bar{y}}^{i+1} e^{\bar{\lambda}t} \Rightarrow$ Система преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{y}^1}{dt} = \bar{y}^2 \\ \frac{d\bar{y}^2}{dt} = \bar{y}^3 \\ \dots \\ \frac{d\bar{y}^{l-1}}{dt} = \bar{y}^l \\ \frac{d\bar{y}^l}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{\bar{y}} = \begin{pmatrix} c_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + c_{l-1} \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \dots + c_2 \frac{t}{1!} + c_1 \\ \dots \\ \dots \\ c_l t + c_{l-1} \\ c_l \end{pmatrix} \Rightarrow \quad (86)$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{vmatrix} c_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + c_{l-1} \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \dots + c_2 \frac{t}{1!} + c_1 \\ \dots \\ \dots \\ c_l t + c_{l-1} \\ c_l \end{vmatrix} \cdot e^{\bar{\lambda}t}$$

Переходим к старому базису:

$$\vec{x}(t) = \left\| \vec{e}, \vec{h}_1, \dots, \vec{h}_{l-1} \right\| \cdot \begin{vmatrix} c_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + c_{l-1} \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \dots + c_2 \frac{t}{1!} + c_1 \\ \dots \\ \dots \\ c_l t + c_{l-1} \\ c_l \end{vmatrix} \cdot e^{\bar{\lambda}t} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \vec{x}_0^{об} &= \vec{e} \left(c_1 + \dots + c_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \right) e^{\bar{\lambda}t} + \dots + \vec{h}_{l-1} c_l e^{\bar{\lambda}t} = \\ &= \boxed{c_1 \vec{e} e^{\bar{\lambda}t} + c_2 (\vec{e}t + \vec{h}_1) e^{\bar{\lambda}t} + \dots + c_l \left[\vec{e} \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + \vec{h}_1 \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \dots + \vec{h}_{l-1} \right]} \quad (87) \end{aligned}$$

Полагая последовательно $c_1 = 1, c_2 = \dots = c_n = 0; \dots; c_1 = \dots = c_{i-1} = c_{i+1} = \dots = c_n = 0, c_i = 1, i = \overline{2, n}$ получим функции:

$$\vec{\varphi}_1 = \vec{e} e^{\bar{\lambda}t}, \vec{\varphi}_1 = (\vec{e}t + \vec{h}_1) e^{\bar{\lambda}t}, \dots, \vec{\varphi}_{l-1} = \left(\vec{e} \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + \vec{h}_1 \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \dots + \vec{h}_{l-1} \right) e^{\bar{\lambda}t}. \text{ Они}$$

являются решениями по построению, $W(0) = \left\| \vec{e}, \dots, \vec{h}_{l-1} \right\| \neq 0 \Rightarrow \vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_{l-1}$ - линейно независимы $\Rightarrow \vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_{l-1}$ - ФСР.

4.6 Линейная неоднородная система уравнений в случае, когда неоднородность представлена векторным квазимногочленом

4.7 Формула Лиувилля-Остроградского для нормальной линейной однородной системы уравнений и для линейного однородного уравнения n-го порядка.

Следующее свойство вронскиана рассмотрим в виде теоремы. Для начала докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 4.3. [Формула Эйлера дифференцирования определителя]

$$\text{Детерминант матрицы представим в виде: } \Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^i & \dots & a_n^i \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} \cdot a_k^i M_i^k \text{ Тогда}$$

для

$$\dot{\Delta}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot \dot{a}_j^i M_i^j$$

Теорема 4.6. [Формула Лиувилля-Остроградского]

Пусть $W(x)$ – вронскиан решений $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$ однородной системы $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$. Тогда имеет место формула:

$$\dot{W}(t) = W(t) \cdot \text{tr} A$$

$$\text{где } \text{tr} A = \sum_{k=1}^n a_{kk}(t)$$

Доказательство. Зафиксируем среди системы решений функцию $\vec{\varphi}_j = \begin{pmatrix} \varphi_j^1 \\ \varphi_j^2 \\ \dots \\ \varphi_j^n \end{pmatrix}$. Рассмотрим i -ую компоненту φ_j^i решения $\vec{\varphi}_j$. Поскольку $\vec{\varphi}_j$ решение, то $\frac{d\vec{\varphi}_j}{dt} = A\vec{\varphi}_j \Rightarrow$

$$\frac{d\varphi_j^i}{dt} = \dot{\varphi}_j^i = \sum_{k=1}^n a_k^i \varphi_j^k$$

Рассмотрим вронскиан $W(t)$, продифференцируем его по t

$$\dot{W}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot \dot{\varphi}_j^i M_j^i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_k^i \varphi_j^k M_j^i$$

Переставим суммы местами

$$\dot{W}(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_k^i \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \varphi_j^k M_j^i = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_k^i \delta_i^k W(t) = W(t) \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_k^i \delta_i^k = W(t) \sum_{k=1}^n a_k^k$$

$$\dot{W}(t) = W(t) \cdot \text{tr} A$$

■

Также можно решить это уравнение и переписать в виде

$$W(t) = W(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \text{tr} A(u) du \right)$$

4.8 Метод вариации постоянных для линейной неоднородной системы уравнений и для линейного неоднородного уравнения n -го порядка.

$$\text{Рассмотрим } y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x). \quad (88)$$

$\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ – Ф.С.Р. однородного уравнения $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$. Это означает, что

$$\forall k = \overline{1, n} \hookrightarrow \varphi_k^{(n)} + a_1(x)\varphi_k^{(n-1)} + \dots + a_n(x)\varphi_k \equiv 0 \quad (89)$$

Перепишем уравнение (88) в эквивалентном виде. Для этого сделаем следующие замены: $y = v_1$, $y^{(1)} = v_2$, ..., $y^{(n-1)} = v_n$. Тогда получим:

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dx} = v_2, \\ \frac{dv_2}{dx} = v_3, \\ \dots, \\ \frac{dv_n}{dx} = f(x) - a_1(x)v_n - \dots - a_n(x)v_1. \end{cases} \quad (90)$$

Будем искать решение (88) в виде

$$y(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + \dots + C_n(x)\varphi_n(x)$$

Тогда получается, что решение эквивалентной системы будем искать в виде

$$\vec{v}(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ \dots \\ v_n(x) \end{pmatrix} = C_1(x) \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \dots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} + \dots + C_n(x) \begin{pmatrix} \varphi_n(x) \\ \dots \\ \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \quad (91)$$

Рассмотрим функцию $v_k(x) = C_1(x)\varphi_1^{(k-1)} + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(k-1)}$. Продифференцируем эту функцию по x :

$$\forall k = \overline{1, n-1} \hookrightarrow \dot{v}_k(x) = \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(k-1)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(k-1)} + C_1(x)\varphi_1^{(k)} + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(k)} \quad (92)$$

С другой стороны $\dot{v}_k(x) = v_{k+1} = C_1(x)\varphi_1^{(k)} + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(k)}$. Тогда получаем

$$v_k(x) = C_1(x)\varphi_1^{(k)} + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(k)} = \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(k-1)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(k-1)} + C_1(x)\varphi_1^{(k)} + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(k)} \quad (93)$$

$$\forall k = \overline{1, n-1} \hookrightarrow \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(k-1)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(k-1)} = 0 \quad (94)$$

$$k = n : \dot{v}_n(x) = \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-1)} + C_1(x)\varphi_1^{(n)} + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(n)} = \\ = f(x) - a_1(x) \left(C_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(n-1)} \right) - \dots - a_n(x) (C_1(x)\varphi_1 + \dots + C_n(x)\varphi_n)$$

$$\dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-1)} + C_1(x) \left(\varphi_1^{(n)} + a_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + \dots + a_n(x)\varphi_1 \right) + \dots + \\ + C_n(x) \left(\varphi_n^{(n)} + a_1(x)\varphi_n^{(n-1)} + \dots + a_n(x)\varphi_n \right) = f(x)$$

Из уравнения (89) следует что выражения в скобках равны нулю, тогда получим

$$k = n : \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-1)} = f(x)$$

Т.е. мы получили следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{C}_1(x)\varphi_1 + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n = 0, \\ \dots \\ \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-2)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-2)} = 0, \\ \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \quad (95)$$

Система (95) это линейная система для определения $\dot{C}_1, \dots, \dot{C}_n$. Определитель этой системы $\Delta = W(x) \neq 0$, а значит система разрешима единственным образом.

4.9 Теорема Штурма

Рассмотрим на промежутке $I = I(x)$ следующее уравнение:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \quad (96)$$

где $a(x) \in C^1_{I(x)}$, $b(x) \in C^1_{I(x)}$.

Решение (96) такое, что $y(x)$ тождественно не равно нулю на $I(x)$ называется нетривиальным, а точка $x_0 \in I$ такая, что $y(x_0) = 0$ называется нулём нетривиального решения $y(x)$.

Уравнение (96) приводится к виду:

$$z'' + q(x)z = 0. \quad (97)$$

Для этого сделаем замену $y(x) = c(x) \cdot z(x)$, где $z(x)$ - решение уравнения выше (далее будем считать, что $c = c(x)$ и $z = z(x)$):

$$z'' \cdot c + 2c' \cdot z' + c'' \cdot z + a(x)(c' \cdot z + z' \cdot c) + b(x) \cdot c \cdot z = 0,$$

здесь выберем $c \neq 0$ так, что бы для z' выполнялось:

$$z'(2c' + a(x)c) = 0.$$

Тогда получаем линейное однородное уравнение $\Rightarrow 2c' + a(x)c = 0$, которое можно преобразовать в:

$$\frac{dc}{c} = -\frac{a(x)}{x}dx \Rightarrow c(x) = c_0 \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \int a(x)dx \right] > 0. \quad (98)$$

Возьмем $c_0 = 1 \Rightarrow c \cdot z'' + (c'' + c'a + bc)z = 0$, тогда можем ввести $q(x)$ такое, что:

$$q(x) = \frac{c'' + c'a}{c} + b.$$

Также заметим, что из (98) следует, что $c(x) > 0$. Тогда в силу замены $y = c(x) \cdot z$, $x_0 \in I$ является нулём $y(x)$ тогда и только тогда, когда x_0 является нулём $z(x)$.

Определение 4.7. Точка x_0 является нулём $f(x) \in C^\infty$ кратности k , если $f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(k)}(x_0) \neq 0$.

Лемма 4.4. Все нули нетривиального решения (97) (также как и для (96)) являются простыми, т.е. $k = 1$.

Доказательство. От противного: пусть x_0 является нулём кратности 2, тогда $z(x_0) = z'(x_0) = 0$. Тогда в силу основной теоремы $z(x) = 0 \forall x \in I$ - противоречие, т.к. $z(x)$ - нетривиальное решение по условию. ■

Лемма 4.5. Пусть M - множество нулей нетривиального решения $y(x)$ на нечетном промежутке $[x_1; x_2]$. Множество M не имеет предельной точки.

Доказательство. От противного: пусть M - множество нулей. Пусть x_0 - предельная точка и $\exists x_k$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0 \in [x_1; x_2], \quad y(x_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Так как $y(x)$ - непрерывно, то $\lim_{k \rightarrow \infty} y(x_k) = 0 = y(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k) = y(x_0) \Rightarrow y(x_0) = 0$.

Рассмотрим $[x_k; x_{k+1}]$ и $y(x)$ на нём, т.к. $y(x_k) = y(x_{k+1}) = 0$, то по теореме Ролля $\exists c_k : x_k \leq c_k \leq x_{k+1} : y'(c_k) = 0$ и т.к. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = x_0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = x_0$. Из этого может получить, что так как $y'(x)$ - непрерывна, то:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y'(c_k) = 0 = y'(\lim_{k \rightarrow \infty} c_k) = y'(x_0) = 0$$

Так как по предложению $x_0 \in [x_1; x_2]$ и $y_0(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$ - получим задачу Коши для $x_0 \in [x_1; x_2] \Rightarrow$ в силу теорем существования и единственности решения задачи Коши: $y \equiv 0$ - единственное решение на $[x_1; x_2]$ - получим противоречие с нетривиальным решением. ■

Теорема 4.7 (Теорема Штурма). *Рассмотрим уравнения:*

$$y'' + q(x)y = 0 \quad (99)$$

$$z'' + Q(x)z = 0, \quad (100)$$

где уравнение (99) будем называть быстрым, а (100) - медленным.

Пусть

$$q(x) \in C_{I(x)}^1, Q(x) \in C_{I(x)}^1, \forall x \in I \rightarrow q(x) \leq Q(x).$$

Пусть $y(x)$ - нетривиальное решение (99), $z(x)$ - нетривиальное решение (100). Если $x_1, x_2 \in I$ - последовательные нули $y(x)$ то либо $\exists x_0 \in (x_1; x_2)$, в которой $z(x_0) = 0$, либо $z(x_1) = z(x_2) = 0$.

Доказательство. Пусть x_1, x_2 - два соседних нуля $y(x)$, т.е. $y(x) \neq 0$ на $(x_1; x_2)$, пусть для определённости $y(x) > 0$.

По определению:

$$y'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{y(x) - y(x_1)}{x - x_1} \geq 0; \quad y'(x_2) = \lim_{x \rightarrow x_2} \frac{y(x) - y(x_2)}{x - x_2}.$$

В силу Леммы 4.4 нули x_1 и x_2 должны быть однократными, т.е. $y'(x_1) \neq 0$, $y'(x_2) \neq 0$. Таким образом $y'(x_1) > 0$, $y'(x_2) < 0$.

Умножим (100) на $z(x)$, а (99) на $y(x)$ и вычтем из первого второе:

$$zy'' + qyz - yz''' - Qyz = 0; \quad zy'' - yz'' = (zy' - yz')' = (Q - q)zy.$$

Проинтегрируем полученное тождество на $[x_1; x_2]$:

$$\begin{aligned} (zy' - yz') \Big|_{x_1}^{x_2} &= \int_{x_1}^{x_2} (Q(x) - q(x))zydx; \\ z(x_2)y'(x_2) - y(x_2)z'(x_2) - z(x_1)y'(x_1) + y(x_1)z'(x_1) &= \int_{x_1}^{x_2} (Q(x) - q(x))zydx \Rightarrow \\ \Rightarrow z(x_2)y'(x_2) - z(x_1)y'(x_1) &= \int_{x_1}^{x_2} (Q(x) - q(x))zydx, \end{aligned} \quad (101)$$

здесь $z(x_2)y'(x_2) < 0$, $z(x_1)y'(x_1) > 0$, $(Q(x) - q(x)) > 0$ и $y > 0$.

Предположим противное - пусть теорема Штурма не верна. Тогда возможны варианты:

1. $z > 0 \forall x \in [x_1; x_2]$. Тогда левая часть (101) отрицательна, а правая положительна - противоречие.
2. $z > 0 \forall x \in [x_1; x_2)$, $z(x_2) = 0$ - аналогично.
3. $z > 0 \forall x \in (x_1; x_2]$, $z(x_1) = 0$ - аналогично.

Таким образом $\exists x_0 \in (x_1; x_2) : z(x_0) = 0$. Если $z(x_1) = z(x_2)$, то может быть, что $Q(x) \equiv q(x) \Rightarrow z(x) = \text{const} \cdot y(x)$, либо:

$$\exists x^* \in (x_1; x_2) : Q(x^*) > q(x^*),$$

в силу непрерывности $Q(x)$ и $q(x) \exists \Delta :$

$$\int_{x^*-\Delta}^{x^*+\Delta} (Q(x) - q(x))z(x)y(x)dx = 0,$$

значит $\exists x_0$, где $z(x)$ меняет знак $\Rightarrow z(x_0) = 0$ ■

4.10 Следствия из теоремы Штурма

Следствие 4.7.1. Пусть есть уравнение:

$$y'' + q(x)y = 0; \quad q(x) \leq 0 \forall x \in I(x),$$

тогда любое нетривиальное решение (100) на I имеет не более одного нуля.

Доказательство. В качестве второго уравнения можно взять $z'' + Q(x)z = 0$, здесь $Q(x) = 0$. Пусть решение уравнения (100) имеет нули x_1 и x_2 $Q(x) \geq q(x) \Rightarrow 0 \geq q(x)$. Тогда по теореме Штурма любое решение (99) должно иметь ноль на $(x_1; x_2)$. В качестве решения можем взять $z \equiv 1$, которое не имеет нулей \Rightarrow противоречие \Rightarrow для решения (100) не может быть больше одного нуля. ■

Следствие 4.7.2. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - два линейно независимых нетривиальных решения (100), $x_1, x_2 \in I$ - два соседних нуля $\varphi(x)$, тогда $\psi(x)$ имеет только один ноль на $(x_1; x_2)$.

Доказательство. Применим теорему Штурма к двум одинаковым уравнениям ($Q(x) \leq Q(x)$). По теореме Штурма $\psi(x)$ на $(x_1; x_2)$ имеет хотя бы один ноль. Общих нулей $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ иметь не могут, так как они линейно независимы ($W(x_1) = 0$, если бы $\varphi(x_1) = \psi(x_1) = 0$, что означало бы, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - ЛЗ). Итак, $\psi(x)$ имеет ноль x_0 на $(x_1; x_2)$.

Докажем, что такой ноль единственный - от противного: пусть нулей два для $\psi(x) : x^*$ и \bar{x} . Если нулей $\psi(x)$ два, то по теореме Штурма для $\varphi(x)$ будет ноль между x^* и \bar{x} - противоречие тому, что x_1 и x_2 соседние нули $\varphi(x)$. ■

Таким образом нули решений (96) перемешаются.