1 Билет номер 5

1.1 Устойчивость по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость

Рассматривается общая система дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(t, x^1, \ldots, x^n) \tag{1}$$

Пусть $\bar{x} = \bar{\varphi}(t, \bar{x}_0)$ – решение этой системы, такое что $\bar{\varphi}(t_0, \bar{x}_0) = \bar{x}_0$. А $\psi(t, \bar{\bar{x}}_0)$ – произвольное решение, такое что $\psi(t, \bar{\bar{x}}_0) = \bar{\bar{x}}_0$.

Определение 1.1. *Решение $\bar{x} = \bar{\varphi}(t, \bar{x}_0)$ называется **устойчивым по Ляпунову**, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \bar{x}_0 : |\bar{\bar{x}}_0 - \bar{x}_0| < \delta \to |\bar{\psi}(t, \bar{\bar{x}}_0) - \bar{\varphi}(t_0, \bar{x}_0)| < \varepsilon \ \forall t \in [t_0, +\infty]$$

Определение 1.2. *Решение $\bar{x} = \bar{\varphi}(t, \bar{x}_0)$ называется **асимптотически устойчивым**, если оно устойчиво по Ляпунову, а так же*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \bar{x}_0 : |\bar{\bar{x}}_0 - \bar{x}_0| < \delta \to \lim_{t \to \infty} |\bar{\psi}(t, \bar{\bar{x}}_0) - \bar{\varphi}(t_0, \bar{x}_0)| = 0$$

1.2 Автономные линейные системы

Пусть в конечномерном линейном пространстве B линейный оператор задается матрицей $A = ||a_{ij}(t)||$. Если a_{ij} ограничены, тогда норма матрицы

$$||A|| = \max_{i,j=\overline{1,n}} | \sup_{t \in I(t)} (a_{ij}(t))|$$

Можно записать следующее неравенство:

$$||A\bar{x}|| \leq ||A|| \cdot ||\bar{x}||$$

Теперь рассмотрим систему однородных уравнений, где A постоянна

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} \tag{2}$$

Тогда $\bar{x} = 0$ – решение.

Лемма 1.1. *Если однородная линейная система имеет неограниченное решение, то нулевое решение не устойчиво.*

Доказательство. Будем рассматривать систему (2). Пусть решение $\bar{\varphi}(t, \bar{x}_0)$ неограниченно. То есть

$$\forall M > 0 \exists t^* : |\bar{\varphi}(t^*, \bar{x}_0)| > M$$

Обратим определение устойчивости нулевого приближения

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \exists \bar{x}_0 : |\bar{x}_0| < \delta, \exists t^* \in [t_0, +\infty) : |\bar{\varphi}(t^*, \bar{x}_0)| > \varepsilon$$

Воспользуемся неограниченностью решения

$$\forall C > 0 \to \bar{\psi}(t, \bar{x}_0) = C \cdot \bar{\varphi}(t, \bar{x}_0) \text{ – неограниченно}$$

Теперь для произвольного $\delta > 0$ возьмем $C = \dfrac{\delta}{2|\bar{x}_0|}$

$$|\bar{\psi}(t_0, \bar{x}_0)| = C \cdot |\bar{\varphi}(t_0, \bar{x}_0)| = \frac{\delta |\bar{x}_0|}{2|\bar{x}_0|} = \frac{\delta}{2}$$

Таким образом

$$\exists \varepsilon_0, \exists t : |\bar{\psi}(t, \bar{x}_0)| > \varepsilon_0$$

■

Теорема 1.1. *Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – собственные числа матрицы A кратности $l_1, \dots, l_k$ соответственно. Тогда*

1. *Если $Re(\lambda_i) < 0, i = \overline{1, k}$, то нулевое решение асимптотически устойчиво.*
2. *Пусть $Re(\lambda_i) < 0, i \neq l, Re(\lambda_l) = 0$. И существует базис из собственных векторов $e_{l_1}, \dots, e_{l_k}$. Тогда нулевое решение устойчиво по Ляпунову.*
3. *Если $\exists l : Re(\lambda_l) > 0$, или $Re(\lambda_l) = 0$, но собственные вектора не образуют базис, тогда нулевое решение не устойчиво*

Доказательство. Рассмотрим решение $\bar{\varphi}(t, \bar{x}_0)$, такое что $\bar{\varphi}(0, \bar{x}_0) = \bar{x}_0$. Тогда

$$\bar{x}(t) = e^{tA} \cdot \bar{x}_0$$

где

$$e^{tA} = S \begin{Vmatrix} e^{\lambda_1 t} P_{ij}^1(t) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{\lambda_2 t} P_{ij}^2(t) & 0 & \dots \\ & & \dots & \\ \dots & 0 & 0 & e^{\lambda_k t} P_{ij}^k(t) \end{Vmatrix} S^{-1} = ||e^{\lambda_s t} P_{ij}(t)||$$

S – матрица перехода к Жорданову базису. P_{ij} – многочлены степени m

$$m \leq \max_{s=\overline{1,k}} (l_s - 1)$$

Рассмотрим случаи по порядку:

1. $e^{(\alpha_s + i\omega_s)t} P_{ij}^s(t)$ – элемент e^{tA}. $e^{(\alpha_s + i\omega_s)t} P_{ij}^s(t) = e^{\alpha_s t}(\cos(\omega_s t) + i \sin(\omega_s t)) P_{ij}^s(t)$. Тогда $|e^{(\alpha_s + i\omega_s)t} P_{ij}^s(t)| = e^{\alpha_s t} |P_{ij}^s(t)|$. Положим $\alpha = \inf_{i=\overline{1,k}} |\alpha_i|$. Распишем

   $$e^{tA} = e^{-\alpha t}(e^{\alpha t} e^{tA}) = e^{-\alpha t} \Phi(t)$$

   Произвольный элемент матрицы $\Phi(t)$

   $$\Phi_{ij}(t) = e^{-rt} P_{ij}(t)$$

   где $r > 0$. Отсюда видно, что

   $$\lim_{t \to \infty} e^{-rt} P_{ij}(t) = 0$$

   Тогда все элементы матрицы $\Phi(t)$ ограничены. Обозначим норму этой матрицы

   $$m = ||\Phi(t)||$$

   Для произвольного ε возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{m}$. Теперь возьмем норму решения $\bar{x}(t)$.

   $$||\bar{x}(t)|| = ||e^{tA} \cdot \bar{x}_0|| \leq ||e^{tA}|| \cdot ||\bar{x}_0|| = e^{-\alpha t} ||\Phi(t)|| \cdot ||\bar{x}_0|| \leq e^{-\alpha t} m ||\bar{x}_0|| \leq e^{-\alpha t} m \delta \leq e^{-\alpha t} \varepsilon$$

   $$\lim_{t \to \infty} e^{-\alpha t} \varepsilon = 0$$

2. В данном случае $P_{ij}^l = const$, тогда $e^{-\alpha t}$ не будет. Следовательно $||\bar{x}(t)|| \leq \varepsilon$ – устойчивость по Ляпунову.

3. $Re(\lambda_s) > 0$. Тогда решение

   $$\bar{\varphi}(t, \bar{x}_0) = e^{(\alpha_s + i\omega_s)t} \cdot C \text{ – неограниченно}$$

   А если $Re(\lambda_s) = 0$, но в базисе присутствуют присоединенные вектора, тогда решение принимает вид $P_{ij}(t)$ – неограниченно при $t \to +\infty$

■