1 Билет 1. Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений

1.1 Основные понятия

Определение 1.1. *Уравнение вида*

$$F(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением, где x – аргумент, $y(x)$ – неизвестная функция, F – известная функция.

Определение 1.2. *Если это уравнение удается разрешить относительно старшей производной, такое дифференциальное уравнение называется разрешённым относительно старшей производной и записывается в виде*

$$y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

Порядок уравнения определяется порядком старшей производной от y.

Определение 1.3. *Функция $y = \varphi(x)$ называется решением ДУ, если она n раз дифференцируема и*

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0 \quad \forall x,$$

где определена функция $\varphi(x)$ с её производными.

Определение 1.4. *Система n уравнений*

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f_1(t, x^1(t), \dots, x^n(t)) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f_n(t, x^1(t), \dots, x^n(t)) \end{cases} \tag{1}$$

где $x^1(t), \dots, x^n(t)$ – искомые функции, называется нормальной системой ДУ n-го порядка.

Утверждение 1.1. *Рассмотрим ДУ $y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$ n-ого порядка. Это уравнение эквивалентно следующей нормальной системе ДУ:*

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = v_2 \\ \dot{v}_2 = v_3 \\ \dots \\ \dot{v}_{n-1} = v_n \\ \dot{v}_n = f_n(x, v_1, v_2, \dots, v_n) \end{cases} \Leftrightarrow y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \tag{2}$$

Доказательство. Введем обозначения: $y = v_1(x)$, $y' = v_2(x)$, $y'' = v_3(x)$, $\dots$, $y^{(n-1)} = v_n(x)$. Тогда имеем $\dot{v}_1 = v_2,\ \dot{v}_2 = v_3,\ \dots, \dot{v}_n = f(x, v_1, v_2, \dots, v_n)$, то есть получилась нормальная система дифференциальных уравнений n-ого порядка с неизвестными v_i.

Обратными заменами системы уравнений можно получить исходное дифференциальное уравнение $y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$. ■

Определение 1.5. *Рассмотрим уравнение 1-ого порядка $y' = f(x, y(x))$. Тогда задача решить это уравнение с условием $y(x_0) = y_0$ называется задачей Коши.*

Определение 1.6. *Пусть $\varphi(x)$ – решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y(x))$. График решения $\varphi(x)$ называется интегральной кривой. В силу определения функции $f(x, y)$ на множестве Ω, вся интегральная кривая будет лежать в Ω.*

Определение 1.7. *Проведём через каждую точку интегральной кривой $(x_0, y_0) \in \Omega$ малый отрезок с углом наклона по отношению к оси x равным α, причём $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0, y_0)$. Получим так называемое поле направлений.*

Из построения интегральной кривой следует, что интегральная кривая в каждой своей точке касается поля напрвлений. Верно и обратное: кривая, касающаяся в каждой своей точке поля направлений, является интегральной кривой.

1.2 Простейшие типы уравнений первого порядка

1.2.1 Уравнения в полных дифференциалах

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$. Тогда кривая

$$\gamma = \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \ t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \tag{3}$$

называется интегральной кривой рассматриваемого уравнения, если $\forall t : t \in [t_1; t_2]$ выполнено

$$P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'_t + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'_t = 0. \tag{4}$$

Определение 1.8. *Дифференциальное уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если $\exists F(x, y) : P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y)$.*

Тогда $dF(x, y) = 0 \Rightarrow F(x, y) = const$, то есть $F(x, y)$ определяет неявную функцию $y(x)$.

Теорема 1.1. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в области D. Для того, чтобы уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ являлось уравнением в полных дифференциалах, необходимо выполнение условия $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $(x,y) \in D$. Если же область D ещё и одвосвязна, то условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ является достаточным.*

Доказательство. Пусть $P(x, y)dx+Q(x, y)dy = 0$ – уравнение в полных дифференциалах, тогда $\exists F(x, y) : P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y) \Rightarrow P = \frac{\partial F}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$. По условию P и Q – непрерывно дифференцируемы, тогда $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ – непрерывные функции, значит

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \ (x, y) \in D. \tag{5}$$

Пусть теперь D – односвязная область. Рассмотрим значение интеграла

$$F = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x;y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

который берётся по кривой γ, лежащей в D и соединяющей точки (x_0, y_0) и $(x; y)$. Пусть $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда по теореме о независимости интеграла от пути интегрирования выходит, что значение интеграла не зависит от пути интегрирования γ, а является функцией от (x, y), значит $F = F(x, y)$ – функция и $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y)$. ∎

Определение 1.9. *Непрерывно дифференцируемая функция $\mu(x, y) \neq 0$ в области G называется интегрирующим множителем для уравнения в полных дифференциалах $\mu(x, y)(P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = 0$, если исходное уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ не является уравнением в полных дифференциалах.*

Если $\mu(x, y)$ – интегрирующий множитель, то для достаточного условия имеем

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \Leftrightarrow P\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Полученное уравнение не легче исходного, так как теперь задача свелась к нахождению μ. Обычно интегрирующий множитель ищут в виде $\mu(x)$, $\mu(y)$, $\mu(x^2 + y^2)$, $\mu(x^\alpha, y^\beta)$.

1.2.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим ДУ вида $P(y)dx + Q(x)dy = 0$, где $P(y) \in C^1_{[y_1;y_2]}$, $Q(x) \in C^1_{[x_1;x_2]}$. Если $\exists y_0 : P(y_0) = 0$ или $\exists x_0 : Q(x_0) = 0$, тогда

$$\begin{cases} x = t \\ y = y_0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_0 \\ y = t \end{cases} \tag{6}$$

являются интегральными кривыми рассматриваемого ДУ соответственно. Если же выполняется $P(x, y) \neq 0$ и $Q(x, y) \neq 0$, то применим к уравнению интегрирующий множитель

$$\mu(x, y) = \frac{1}{P(x, y)Q(x, y)},$$

получив уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{dx}{Q(x)} + \frac{dy}{P(y)} = 0. \tag{7}$$

Значение $\mu(x, y)$ действительно является интегрирующим множителем, так как выполняется

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{Q(x)}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{P(y)}\right) = 0. \tag{8}$$

Тогда

$$dF(x, y) = \frac{dx}{Q(x)} + \frac{dy}{P(y)} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{Q(x)} \Rightarrow F(x, y) = \int\limits_{x_1}^{x} \frac{dt}{Q(t)} + C(y), \tag{9}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{P(y)} = C'(y) \Rightarrow C(y) = \int\limits_{y_1}^{y} \frac{dt}{P(t)} + C_1 \Rightarrow F(x, y) = \int\limits_{x_1}^{x} \frac{dt}{Q(t)} + \int\limits_{y_1}^{y} \frac{dt}{P(t)} + C_1 = const. \tag{10}$$

Определение 1.10. *Если дифференциальное уравнение вида $P_1(x, y)dx + Q_1(x, y)dy = 0$ может быть сведено к виду $P(y)dx + Q(x)dy = 0$, то такое уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными.*

Утверждение 1.2. *Задача Коши уравнения с разделяющимися переменными $P(y)dx + Q(x)dy = 0$ задаётся в виде $y(x_1) = y_1$, а её решение в виде*

$$\int\limits_{x_1}^{x} \frac{dt}{Q(t)} + \int\limits_{y_1}^{y} \frac{dt}{P(t)} = 0. \tag{11}$$

1.2.3 Однородные уравнения

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$y' = y\left(\frac{y}{x}\right),$$

которое назовём уравнением с однородной правой частью. Сделаем замену $v(x) = \frac{y}{x}$, тогда $y(x) = v(x) \cdot x$, $y'_x = x \cdot v'_x + v = g(v)$, откуда имеем $x\frac{dv}{dx} = g(v) - v$. Если $\exists g(v_0) = v_0$, то v_0 – решение уравнения $x\frac{dv}{dx} = g(v) - v$. Если же $v \neq g(v)$, тогда

$$\frac{dv}{g(v) - v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|x| + C = \int\limits_{v_0}^{v} \frac{dt}{g(t) - t}. \tag{12}$$

Таким образом, найдено решение исходного уравнения с однородной правой частью в квадратурах.

Определение 1.11. *Функция $F(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ называется однородной степени m, если $\forall\lambda > 0 \longrightarrow F(\lambda x^1, \lambda x^2, \ldots, \lambda x^n) = \lambda^m F(x^1, x^2, \ldots, x^n)$.*

Пример 1.1. *Рассмотрим уравнение $P(x, y)dx = Q(x, y)dy$. Если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции степени m, тогда*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = \frac{x^m P(1, \frac{y}{x})}{x^m Q(1, \frac{y}{x})} = \frac{P(1, \frac{y}{x})}{Q(1, \frac{y}{x})} = g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{13}$$

Таким образом исходное уравнение свелось к уравнению с однородной правой частью.

1.2.4 Линейные уравнения первого порядка

Определение 1.12. *Дифференциальное уравнение вида $y' + a(x)y = f(x)$ – линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Дифференциальное уравнение вида $y' + a(x)y = 0$ – линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка. При этом $a(x) \in C^1_{I(x)}$, $f(x) \in C_{I(x)}$, где $I(x)$ – область, на которой определены функции $a(x)$ и $f(x)$.*

Введём оператор $L = \frac{d}{dx} + a(x)$, который действует на множество непрерывно дифференцируемых функций $\varphi \in C^1_{I(x)}$. Тогда уравнение $y' + a(x)y = f(x)$ переписывается в виде $L(y) = f(x)$, а уравнение $y' + a(x)y = 0$ переписывается в виде $L(y) = 0$.

Теорема 1.2. *Введённые оператор $L = \frac{d}{dx} + a(x)$ – линейный оператор.*

Доказательство. Рассмотрим линейную комбинацию $c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$:

$$L(c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)) = (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)' + a(x)(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1 L(\varphi_1) + c_2 L(\varphi_2) \tag{14}$$

Таким образом, $L(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1 L(\varphi_1) + c_2 L(\varphi_2)$, то есть L – линейный оператор. ∎

Утверждение 1.3. *Решением уравнения $y' + a(x)y = 0$ является*

$$y = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt},\ C \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Доказательство. Найдём решение уравнения $y' + a(x)y = 0$:

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx \Rightarrow \ln|y| = -\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt + \ln C \Rightarrow |y| = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt},\ C > 0 \tag{16}$$

Раскрывая модуль и объединяя полученное решение с нулевым ($y \equiv 0$), имеем

$$y = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt},\ C \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

■

Утверждение 1.4. *Решением уравнения $y' + a(x)y = f(x)$ является*

$$y = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt},\ C \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Доказательство. Найдём решение уравнения $y' + a(x)y = f(x)$: воспользуемся уже найденным решением однородного уравнения, применяя метод вариации постоянной. То есть будем искать решение в виде

$$y = C(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt}. \tag{19}$$

Подставим это решение в исходное уравнение:

$$C'(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} - a(x)C(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} + a(x)C(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} = f(x) \tag{20}$$

$$C'(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} = f(x) \Rightarrow C(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)e^{\int\limits_{x_0}^{t} a(s)ds} + C_0 \tag{21}$$

Таким образом найден вид $C(x)$. Теперь подставим эту функцию:

$$y = C_0e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} + e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt}\int\limits_{x_0}^{x} f(t)e^{\int\limits_{x_0}^{t} a(s)ds} \tag{22}$$

$$y = C_0e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} + \int\limits_{x_0}^{x} f(t)e^{-\int\limits_{x_0}^{t} a(s)ds} \tag{23}$$

Из полученного решения видно, что оно является суммой решения однородного уравнения и частного решения. ■

Утверждение 1.5. *Если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – некоторые решения уравнения $y' + a(x)y = f(x)$, то $z(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ – решение однородного уравнения $y' + a(x)y = 0$.*

Доказательство. По условию $\varphi_1' + a(x)\varphi_1 = f(x)$, $\varphi_2' + a(x)\varphi_2 = f(x)$, откуда очевидно, что $(\varphi_1 - \varphi_2)' + a(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$. Обозначив $z = \varphi_1 - \varphi_2$, получим $z' + a(x)z = 0$, то есть z – решение однородного уравнения. ■

1.3 Уравнение Бернулли и Риккати

1.3.1 Уравнение Бернулли

Определение 1.13. *Д.у. вида* $\boxed{y' + a(x)\cdot y = y^r\cdot f(x)}^{(24)}$, *где* $a(x), f(x) \in C^1, r \in \mathbb{R}, r \neq 1$ *называется уравнением Бернулли.*

Утверждение 1.6. *Если* $r > 0$, *то* $y \equiv 0$ *- тривиальное решение. Пусть* $y \neq 0$, *разделим ДУ на* $y^r \Rightarrow \frac{y'}{y^r} + a(x)\cdot y^{1-r} = f(x)$. *Замена:* $u(x) = y^{1-r} \Rightarrow u' = (1-r)\cdot y^{-r}\cdot y' \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{\frac{1}{1-r}\cdot u' + a(x)\cdot u = f(x)}$ *- свелось к линейному уравнению.*

1.3.2 Уравнение Риккати

Определение 1.14. *Д.у. вида* $\boxed{y' + a(x)\cdot y^2 + b(x)\cdot y + c(x)}^{(25)}$, *где* $a(x), b(x) \in C^1_{I(x)}$, $c(x) \in C_{I(x)}$ *называется уравнением Риккати.*

Утверждение 1.7. *В общем случае уравнение Риккати не допускает решений в квадратурах, однако, если известно некоторое решение* $y = \varphi(x)$, *то сделав замену* $y = u + \varphi$, *получаем:* $\varphi' = u\varphi^2 + b\varphi + c$
$\varphi' + u' = u\varphi^2 + 2a\varphi u + au^2 + b\varphi + bu + c \Rightarrow u' = au^2 + (2a\varphi + b)u$ *- свелось к уравнению Бернулли.*

1.4 Методы понижения порядка дифференциальных уравнений

Утверждение 1.8. *Рассмотрим множество преобразований плоскости* $\boxed{\bar{x} = \varphi(x,y,\lambda), \bar{y} = \psi(x,y,\lambda)}^{(26)}$. *В (26) каждому* $\lambda \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ *соответствует некоторое преобразование, например,* $\bar{x} = \lambda x, \bar{y} = \lambda y, \lambda > 0$ *- гомотетия. Множество преобразований (26) является группой преобразований, если оно содержит любую композицию (26), т.е.* $\exists\lambda_0 : \varphi(\varphi(x,y,\lambda_1), \psi(x,y,\lambda_2)) = \varphi(x,y,\lambda_0)$, *содержит тождественное преобразование, т.е.* $\exists\lambda_0 : \varphi(x,y,\lambda_0) = x;\ \psi(x,y,\lambda_0) = y$, *и вместе с любым преобразованием содержит и обратное:* $\forall\lambda \in \mathcal{D}\colon \exists\ \lambda_0\colon x = \bar{\varphi}(\bar{x},\bar{y},\lambda_0);\ y = \bar{\psi}(\bar{x},\bar{y},\lambda_0)$
Т.о. если (26) - группа, то $x = \bar{\varphi}(\bar{x},\bar{y},\lambda),\ y = \bar{\psi}(\bar{x},\bar{y},\lambda)$; *если в ДУ* $y' = f(x,y)$ *осуществить переход к новым координатам, то*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'_{\bar{x}}d\bar{x} + \psi'_{\bar{y}}d\bar{y}}{\varphi'_{\bar{x}}d\bar{x} + \varphi'_{\bar{y}}d\bar{y}} = f(\bar{\varphi}(\bar{x},\bar{y},\lambda), \bar{\psi}(\bar{x},\bar{y},\lambda)) = \tilde{f}(\bar{x},\bar{y},\lambda) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\psi'_{\bar{x}} + \psi'_{\bar{y}}\cdot\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}}{\varphi'_{\bar{x}} + \varphi'_{\bar{y}}\cdot\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}} = \tilde{f}(\bar{x},\bar{y},\lambda) \Rightarrow \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{\tilde{f}\cdot\varphi'_{\bar{x}} - \psi'_{\bar{x}}}{\psi'_{\bar{y}} - \tilde{f}\cdot\varphi'_{\bar{y}}} \tag{27}$$

(27) является записью $y' = f(x,y)$ *в новых координатах. Говорят, что* $y' = f(x,y)$ *допускает группу* $x = \bar{\varphi}(\bar{x},\bar{y},\lambda),\ y = \bar{\psi}(\bar{x},\bar{y},\lambda)$, *если оно не изменяется при переходе к новым переменным, т.е.* $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = f(\bar{x},\bar{y})$.

Следствие 1.2.1. *Рассматриваем уравнения вида* $\boxed{F(x,y,y',y'') = 0}^{(28)}$

1. $\boxed{F(x,y'',y') = 0}^{(29)}$ *Замена* $y'(x) = v(x) \Rightarrow y''(x) = v'(x)$ *и (29) в этом случае имеет вид* $F(x,v(x),v'(x)) = 0 \xrightarrow[\text{решаем}]{} V(x) = y(x,c_1)$. *Тогда решение (29) запишется в виде*

$\frac{dy}{dx}=g(x,c_1)\Rightarrow y(x)=c_2+\int g(x,c_1)dx$. *Заметим, что* (29) *допускает группу сдвига* $x=\bar{x},\ y=\bar{y}+y_0$

2. $\boxed{F(y,y',y'')=0}^{(30)}$ *(не содержит явно* x*). Замена:* $y'=V(y)$*, тогда*
$y''=\frac{dV}{dx}=\frac{dV}{dy}\frac{dy}{dx}=V\frac{dV}{dy}\Rightarrow F(y,V,y\frac{dV}{dy})=0$ *- ДУ первого порядка.*
Решение $V(y)=g(y,c_1)\Rightarrow\frac{dy}{dx}=g(y,c_1)\Rightarrow$ *Решение* (30)*:* $\int\frac{dy}{g(y,c_1)}=x+c_2$.
Заметим, что (30) *допускает группу сдвигов* $x=\bar{x}+x_0,\ y=\bar{y}$

3. $\boxed{F(x,y'',y',y)=0 \text{ и } F - \text{однородная степени } m \text{ по } y'',\ y',\ y}$*, т.е.* $\forall\lambda>0\to$
$F(x,\lambda y'',\lambda y',\lambda y)=\lambda^m\cdot F(x,y'',y',y)$. *В таком случае ДУ допускает группу* $x=\bar{x},y=\lambda\bar{y}$*. Замена:* $z(x)=\frac{y'}{y}\Rightarrow y'=z(x)y$
$\Rightarrow y''=z'y+zy'=z'y+z^2y=y\cdot(z'+z^2)\Rightarrow F(x,y,zy,y(z'+z^2))=0$
$\Rightarrow y^m\cdot F(x,1,z,z'+z^2)=0$ *- относительно* z *имеем ур-ние первого порядка.*
Если его решение $z(x)=g(x,c_1)$*, то* $\frac{y'}{y}=g(x,c_1)\Rightarrow\frac{dy}{y}=g(x,c_1)dx\Rightarrow$
$\ln|y|=\int g(x,c_1)dx+c_2$

4*. *Будем говорить, что функция* $F(x,y,y'',...,y^{(n)})$ *является квазиоднородной функцией степени* r*, если* $\exists\alpha\in\mathbb{R}:\forall\lambda>0:F(\lambda x,\lambda^\alpha y,\lambda^{\alpha-1}y',...,\lambda^{\alpha-n}y^{(n)})=$
$=\lambda^r\cdot F(x,y,...,y^{(n)})$.
Рассмотрим множество преобразований:

$$\begin{cases}x=\lambda\bar{x}\\ y=\lambda^\alpha\bar{y}\end{cases},\quad \text{где } \lambda>0 \tag{31}$$

Такое множество преобразований перепишем в виде:

$$\begin{cases}x=e^\beta\cdot\bar{x}\\ y=e^{\alpha\beta}\bar{y}\end{cases}$$

Если F *в* (30) *является квазиоднородной, то* (30) *допускает группу растяжений* (31)*:*

$$\boxed{F(x,y'',y',y)=0}\xrightarrow[\text{преобр.}]{}F(\lambda\bar{x},\lambda^\alpha\bar{y},\lambda^{\alpha-1}\bar{y'},\lambda^{\alpha-2}\bar{y''})=\lambda^r\cdot F(\bar{x},\bar{y},\bar{y'},\bar{y''})=0$$
$$\Downarrow$$
$$F(\bar{x},\bar{y},\bar{y'},\bar{y''})=0$$

$$\text{Замена: }\begin{cases}x=e^t\\ y=z(t)\cdot e^{2t}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{z'_t\cdot e^{\alpha t}+z\cdot\alpha\cdot e^{\alpha t}}{e^t}=e^{(\alpha-1)t}\cdot(z'_t+\alpha z)$$
$$\Downarrow$$
$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{(\alpha-1)\cdot e^{(\alpha-1)t}\cdot(z'_t+\alpha z)+e^{(\alpha-1)t}\cdot(z''_{tt}+\alpha z'_t)}{e^t}=$$
$$=e^{(\alpha-2)t}\cdot(z''_{tt}+(2\alpha-1)\cdot z'_t+\alpha\cdot(\alpha-1)z)$$
$$\Downarrow$$
$$F(e^t;z\cdot e^{\alpha t};e^{(\alpha-1)t}\cdot(z'_t+\alpha z);e^{(\alpha-2)t}(z''_{tt}+(2\alpha-1)z'_t+\alpha\cdot(\alpha-1)z))=$$
$=e^{rt}\cdot F(1;z;z'_t+\alpha z;z''_{tt}+(2\alpha-1)z'_t+\alpha\cdot(\alpha-1)z)=0$ *- не содерж.* x*, т.е. свелось к случаю 2*

1.5 Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной

Утверждение 1.9. *Рассмотрим* $\boxed{F(x,y,y')=0}^{(32)}$ *, где* $F(x,y,y')$ *как функция трёх переменных является непрерывно дифференцируемой в области* $G\subset\mathbb{R}^3$
Решение уравнения $F(x,y,y')=0$ *будем представлять как кривую в параметрическом виде:*

$$\gamma:\ \begin{cases} x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases} t\in[t_1,t_2],\ \varphi(t),\psi(t)\in C^1_{[t_1,t_2]} \tag{33}$$

Кривая (33)*, является интегральной кривой* (32) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow F\left(\varphi(t),\psi(t),\frac{\psi'_t}{\varphi'_t}\right)=0\ \ \forall t\in[t_1,t_2] \tag{34}$$

Будем решать эквивалентную систему положив $p=\frac{dy}{dt}$*:*

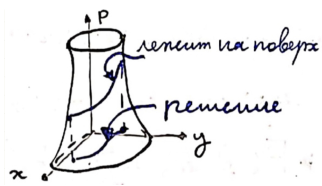
$$\begin{cases} F(x,y,p)=0\\ dy=pdx\end{cases} \tag{35}$$

Утверждение 1.10. *Уравнение* (32) *эквивалентно системе* (35)*.*

Доказательство. Пусть γ - интегр. кривая (32). Положим $p=\frac{\psi'}{\varphi'}=\frac{dy}{dx}$ - второе уравнение в системе (35) выполнено, а первое выполнено в силу подстановки в (34). Обратно, пусть $x(t)=\varphi(t),\ y(t)=\psi(t),p$ - решение (34). $\Rightarrow$ Из второго уравнения системы:
$p=\frac{\psi'_t}{\varphi'_t}\rightarrow$ Подставляем в первое уравнение системы и получаем само уравнение (34)

■

Утверждение 1.11. *Рассмотрим метод решения* (32)*, который называется методом введения параметра.*
Первое ур-ние в системе (35) *рассмотрим как задающее в* $\mathbb{R}^3_{(x,y,p)}$ *гладкую поверхность S, для которой параметрическое представление имеет вид:*



$$\begin{cases} x=\varphi(u,v)\\ y=\psi(u,v)\Rightarrow F(\varphi(u,v);\psi(u,v);\chi(u,v))\equiv 0\\ p=\chi(u,v)\end{cases}$$

Потребуем, чтобы rank $\begin{pmatrix} \frac{\delta\varphi}{\delta u} & \frac{\delta\psi}{\delta u} & \frac{\delta\chi}{\delta u}\\ \frac{\delta\varphi}{\delta v} & \frac{\delta\psi}{\delta v} & \frac{\delta\chi}{\delta v}\end{pmatrix}=2,\ \forall u,v\in G$ *т.е. S была простой гладкой пов.*

Тогда остаётся удовлетворить второму уравнению системы (35)*:*

$$\frac{\delta\psi}{\delta u}du+\frac{\delta\psi}{\delta v}dv=\chi\cdot\left(\frac{\delta\varphi}{\delta u}du+\frac{\delta\varphi}{\delta v}dv\right)\Rightarrow\left(\frac{\delta\psi}{\delta u}-\chi\frac{\delta\varphi}{\delta v}\right)du=\left(\chi\frac{\delta\varphi}{\delta v}-\frac{\delta\psi}{\delta v}\right)dv \tag{36}$$

Если $P(u,v) \neq 0\ \forall(u,v) \in G$, *то из* (36) *получаем Д.У.:* $\dfrac{du}{dv} = \dfrac{Q(u,v)}{P(u,v)}$

Его решение $u = u(v,c)$, *тогда* $\begin{cases} x = \varphi(u(v,c),v) = x(v,c) & \text{- является параметрическим} \\ y = \psi(u(v,c),v) = y(v,c) & \text{представлением решения (32)} \end{cases}$

Если же существует связь между u *и* v: $u = f(v), P(f(v),v) = Q(f(v),v) = 0\ \forall v \in G$, *то* $u = f(v)$ *явл. решением* $\left(\chi\frac{\delta\varphi}{\delta v} - \frac{\delta\psi}{\delta v}\right) dv$, *а*

$$\begin{cases} x = x(v) \\ y = y(v) \end{cases} \text{ - явл. решением (36)}$$

2 Билет 2. Задача Коши

2.1 Принцип сжимающих отображений

Работаем в $E = \mathbb{R}^n$ - пространство точек с n координатами. E - аффинное пространство, а $\vec{E}$ – его присоединенное линейное пространство, состоящее из векторов, натянутых на точки E.

Определение 2.1. *Пусть L - это векторное пространство, и на нем задано отображение $\|\cdot\| : L \longrightarrow \mathbb{R}$ такое, что:*

1. *$\forall x \in L \longmapsto \|x\| \geqslant 0$. А также $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;*
2. *$\forall x \in L \; \& \; \forall \lambda \in \mathbb{R} \longmapsto \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;*
3. *$\forall x, y \in L \longmapsto \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ - неравенство треугольника.*

Тогда данное отображение называется нормой, а пространство L нормированным.

Пример 2.1. *Приведем пример норм. Пусть $a(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда норму можно определить, допустим, так:*

$$\|a\|_1 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}. \tag{37}$$

Или так:

$$\|a\|_2 = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j|. \tag{38}$$

И тогда можно ввести понятие эквивалентности норм.

Определение 2.2. *Пусть снова L - линейное пространство. Тогда нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на L называются эквивалентными, если $\exists C_1, C_2 > 0 : \; \forall x \in L \longmapsto C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1$.*

Как видно, для определенных выше двух норм это соотношение удовлетворяется.

Утверждение 2.1. *В конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.*

Рассмотрим множество функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$ для некоторых неравных $a, b \in \mathbb{R}$ и обозначим данное множество $C[a; b]$. Понятно, что $C[a; b]$ является линейным пространством. Тогда введем на нем норму.

Определение 2.3. *Нормой функции $f(x) \in C[a; b]$ будем называть число*

$$\|f(x)\| = \max_{x \in [a;b]} |f(x)|.$$

Определение 2.4. *Набор функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x) \in C[a; b]$ будем называть вектор-функцией и обозначать $f(x) = \vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))^T$.*

Определение 2.5. *Вектор-функция $f(x)$ называется непрерывной (дифференцируемой, непрерывно дифференцируемой и т.п.), если все ее компоненты непрерывны (дифференцируемы, непрерывно дифференцируемы и т.п.).*

Определение 2.6. *Модулем вектор-функции $f(x)$ назовем число*

$$|f(x)| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} f_j^2(x)}. \tag{39}$$

Норму вектор-функции можно определить как

$$\|f(x)\|_1 = \max_{x\in[a;b]} |f(x)|.$$

Или же как

$$\|f(x)\|_2 = \max_{j=1,\ldots,n} \max_{x\in[a;b]} f_j(x).$$

Понятно, что эти две нормы эквивалентны.

Определение 2.7. *Пусть имеется функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, где $f_n(x) \in C[a;b]$ - линейное пространство функций с нормой (1 или 2 – неважно). Тогда говорят, что данная последовательность сходится к функции $f(x)$ по норме, если:*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0. \tag{40}$$

Аналогично все то же самое и точно так же определяется и для вектор-функций $f(x) = \vec{f}(x) \in C[a;b]^n$.

Определение 2.8. *Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется фундаментальной, если:*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n \geqslant N \ \&\ \forall m \geqslant N \longmapsto \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon. \tag{41}$$

Определение 2.9. *Функциональное пространство L называется полным по [данной] норме, если любая фундаментальная функциональная последовательность данного пространства сходится по норме к функции из этого же пространства L.*

Теорема 2.1. *Функциональное пространство $C[a;b]$ с нормой $\|\cdot\|_1$ является полным.*

Доказательство. Возьмем произвольную функциональную последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ из нашего пространства непрерывных функции. Тогда из определения фундаментальности следует, что $\|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$.

Однако $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon\ \forall x \in [a;b]$.

А значит, последовательность $f_n(x)$ сходится к некоторой $f(x)$, причем равномерно на $[a;b]$ (числовая последовательность $\|f_n(x)\|$ мажорирует функциональную последовательность $f_n(x)$).

Так как $f_n(x) \in C[a;b]$ – непрерывны $\forall n \in \mathbb{N}$, и последовательность сходится равномерно на $[a;b]$, то предельная функция $f(x)$ также является непрерывной на $[a;b]$, а значит, $f(x) \in C[a;b]$.

Таким образом, последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f(x) \in C[a;b]$. В силу произвольности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ заключаем, что функциональное пространство $C[a;b]$ с нормой $\|\cdot\|_1$ является полным. ■

Определение 2.10. *Полное нормированное линейное пространство называется Банаховым. Обозначается B.*

Определение 2.11. *Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ называется сходящемся по норме, если последовательность его частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ является сходящейся по норме.*

Определение 2.12. *Пусть $\forall x \in M \subseteq B$ определен элемент $Ax \in B$. Тогда говорят, что на множестве B задан оператор A с областью определения M.*

Будем рассматривать уравнение $x = Ax$.

Определение 2.13. *Множество $M \subseteq B$ называется ограниченным, если $\exists C > 0$ такое, что $\forall x \in M \longmapsto \|x\| \leqslant C$.*

Определение 2.14. *Оператор A называется сжатием на M, если:*

1. $\forall x \in M \longmapsto Ax \in M$;
2. $\exists k \in (0;1): \ \forall x, y \in M \longmapsto \|Ax - Ay\| \leqslant k\|x - y\|$.

Теорема 2.2 (Принцип сжимающих отображений)**.** *Пусть множество $M \subseteq B$ является ограниченным и замкнутым, а оператор A является сжатием. Тогда решение уравнения $x = Ax$ существует и единственно.*

Доказательство. Будем использовать итерационный метод, согласно которому мы выбираем начальное x_0, а затем строим последовательность $x_n = Ax_{n-1}$. Тогда, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = Ax$, то $x = Ax$.

Пусть $x_n = S_n = x_0 + (x_1 - x_0) + \ldots + (x_n - x_{n-1})$. Докажем, что $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant 2Ck^n$ для некоторого $C > 0$, ограничивающего последовательность x_n. Сделаем это по индукции.

База индукции: $\|x_1 - x_0\| \leqslant \|x_1\| + \|x_0\| \leqslant 2C$.

Предположим, что $\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant 2Ck^{n-1}$. Тогда получаем, что $\|x_{n+1} - x_n\| = \|Ax_n - Ax_{n-1}\| \leqslant k\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant 2Ck^n$.

И получаем, что $x_0 + \sum\limits_{j=1}^{\infty}(x_j - x_{j-1}) \leqslant x_0 + \sum\limits_{j=1}^{\infty} 2Ck^{n-1} < \infty$.

А значит $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. А поскольку M замкнуто, то $x \in M$.

Теперь рассмотрим разность $\|Ax_n - Ax\| \leqslant k\|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Это означает, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = Ax$.

Учитывая, что $x_{n+1} = Ax_n$, то, перейдя к пределу с обеих частей равенства, мы получаем, что итерационный метод сходится к решению уравнения $x = Ax$. И таким образом, доказано существование решения. Теперь докажем его единственность.

Пойдем от противного: пусть x и y – два разных решения. Тогда $\|x - y\| = \|Ax - Ay\| \leqslant k\|x - y\|$. Учитывая, что $k \in (0;1)$, то данная ситуация возможна тогда и только тогда, когда $\|x - y\| = 0$. Следовательно, $x = y$, что противоречит тому, что это два разных решения. Итак, теорема доказана. ■