1 Билет 6. Первые интегралы автономных систем. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

1.1 Общее решение линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка

Определение 1.1. *Рассмотрим уравнение*

$$\sum_{i=1}^{n} f^i(\overrightarrow{x}, u)\frac{\partial u}{\partial x^i} = F(\overrightarrow{x}, u) \tag{1}$$

Функция $u(\overrightarrow{x})$ называется решением уравнения 1, если $u(\overrightarrow{x}) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ и после подстановки в 1 получается тождество, причём $f^i(\overrightarrow{x}, u) \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ – некоторые заданные функции. Уравнение 1 называется квазилинейным уравнением в частных производных первого порядка.

Определение 1.2. *Рассмотрим систему ДУ:*

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(\overrightarrow{x}, u) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f^n(\overrightarrow{x}, u) \end{cases} \tag{2}$$

Система 2 называется характеристической системой уравнения 1, а $\overrightarrow{x}(t)$ – фазовые кривые 2 – называются характеристиками 1.

Основное свойство характеристик состоит в том, что уравнение для $u(\overrightarrow{x})$ в силу 2 имеет вид

$$\frac{du}{dt} = F(\overrightarrow{x}(t), u) -$$

обыкновенное ДУ. Действительно, пусть u – решение 1, тогда

$$\frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x^i} f^i = F(\overrightarrow{x}(t), u)$$

Будем рассматривать уравнения вида

$$\sum_{i=1}^{n} f^i(\overrightarrow{x}, u)\frac{\partial u}{\partial x^i} = F(\overrightarrow{x}, u) \tag{3}$$

Определение 1.3. *Уравнения вида 3 называются линейными однородными уравнениями первого порядка в частных производных. Характеристической системой для 3 будем называть систему вида*

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(\overrightarrow{x}) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f^n(\overrightarrow{x}) \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 1.1. *Пусть $\nu_1(\overrightarrow{x}) = C_1, \dots, \nu_k(\overrightarrow{x}) = C_k$ являются независимыми первыми интегралами системы 4. Тогда функция $u(\overrightarrow{x}) = F(\nu_1(\overrightarrow{x}), \dots, \nu_k(\overrightarrow{x}))$ является решением уравнения 3.*

Доказательство. Запишем уравнение 3 следующим способом:

$$\sum_{i=1}^{n} f^i(\overrightarrow{x})\frac{\partial u}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{n} f^i(\overrightarrow{x})\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial u}{\partial \nu_l}\frac{\partial \nu_l}{\partial x^i} = \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial \nu_l}\sum_{i=1}^{k} f^i(\overrightarrow{x})\frac{\partial \nu_l}{\partial x^i} = 0$$

Получили тождество, значит $u(\overrightarrow{x}) = F(\nu_1(\overrightarrow{x}), \ldots, \nu_k(\overrightarrow{x}))$ действительно решение уравнения 3. ■

Теорема 1.2. *Пусть функция* $u(\overrightarrow{x}) = F(\nu_1(\overrightarrow{x}), \ldots, \nu_k(\overrightarrow{x}))$ *является решением уравнения* 3*. Тогда* $\nu_1(\overrightarrow{x}) = C_1, \ldots, \nu_k(\overrightarrow{x}) = C_k$ *являются независимыми первыми интегралами системы* 4*.*

Доказательство. Так как $u(\overrightarrow{x})$ – решение, то

$$\sum_{i=1}^{n} f^i\frac{\partial u}{\partial x^i} = 0$$

Значит $u(\overrightarrow{x})$ – первый интеграл системы 4 по критерию первого интеграла. Этот первый интеграл может зависеть только от независимых переменных $\nu_1(\overrightarrow{x}), \ldots, \nu_k(\overrightarrow{x})$, причём $u(\nu_1(\overrightarrow{x}), \ldots, \nu_k(\overrightarrow{x})) = C_0$, где $\nu_1(\overrightarrow{x}), \ldots, \nu_k(\overrightarrow{x})$ – первые интегралы системы 4. ■

1.2 Задача Коши для уравнения в частных производных первого порядка