1 Билет номер 4

1.1 Нормальная система дифференциальных уравнений

Определение 1.1. *Система вида*

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(t, \bar{x}) \\ \dot{x}^2 = f^2(t, \bar{x}) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f^n(t, \bar{x}) \end{cases} \tag{1}$$

называется нормальной системой дифференциальных уравнений n-ого порядка.

Определение 1.2. *Система*

$$\begin{cases} x^1(t_0) = x_0^1 \\ x^2(t_0) = x_0^2 \\ \dots \\ x^n(t_0) = x_0^n \end{cases} \tag{2}$$

называется начальным условием

Утверждение 1.1. *Решить задачу Коши означает решить нормальную систему дифференциальных уравнений при заданном начальном условии*

Теорема 1.1 (Теорема Коши о существовании и единственности решения)**.** *Пусть* $\forall i, j = \overline{1, n}$ *функции* $f^i, \dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}$ *непрерывны в области* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$*, тогда,* $\forall (t_0, \overline{x_0}) \in \Omega\ \exists h > 0 : \forall t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ *решение задачи Коши существует и единственно.*

Лемма 1.1. *Если* $\bar{f}(t, \bar{x})$ *- непрерывны на* Ω*, то система уравнений*

$$\overline{x}(t) = \overline{x_0} + \int\limits_{t_0}^{t} \bar{f}(\tau, \overline{x}(\tau)) d\tau \tag{3}$$

эквивалентна задаче Коши.

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ - решение (1) при условии (2), тогда

$$\dot{\varphi}^i = f^i(t, \varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t))$$

Проинтегрируем полученное равенство по отрезку $[t_0, t]$

$$\int\limits_{t_0}^{t} \dot{\varphi}^i(\tau) d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} f^i(\tau, \varphi^1(\tau), \dots, \varphi^n(\tau)) d\tau$$

$$\varphi^i(t) - \varphi^i(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} f^i(\tau, \bar{\varphi}(\tau)) d\tau$$

$$\varphi^i(t) = x_0^i + \int\limits_{t_0}^{t} f^i(\tau, \bar{\varphi}(\tau)) d\tau$$

Теперь пусть $\bar{\varphi}(t)$ - решение (3). Тогда

$$\varphi^i(t) \equiv x_0^i + \int\limits_{t_0}^{t} f^i(\tau, \bar{\varphi}(\tau))d\tau$$

Отсюда видно, что функция $\varphi^i(t)$ - дифференцируемы. Тогда

$$\begin{cases} \dot{\varphi}^i(t) = f^i(t, \bar{\varphi}(t)) \\ \varphi^i(t_0) = x_0^i \end{cases}$$

■

Следствие 1.1.1. *Из 2 части леммы следует, что решение задачи Коши непрерывно дифференцируемо.*

Введем оператор $A(\bar{x}) = \bar{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau))d\tau$. Тогда систему интегральных уравнений (3) можно записать в виде

$$\bar{x}(t) = A(\bar{x}) \tag{4}$$

Лемма 1.2.

$$\left\| \int\limits_{t_0}^{t} \bar{x}(\tau)d\tau \right\| \leq \left| \int\limits_{t_0}^{t} \|\bar{x}(\tau)\|d\tau \right|$$

Доказательство.

$$\left| \int\limits_{t_0}^{t} x^i(\tau)d\tau \right| \leq \left| \int\limits_{t_0}^{t} \mid x^i(\tau) \mid d\tau \right| \leq \left| \int\limits_{t_0}^{t} \|\bar{x}(\tau)\|d\tau \right|$$

Таким образом $max\{|\int\limits_{t_0}^{t} x^i(\tau)d\tau|\} = ||\int\limits_{t_0}^{t} \bar{x}(\tau)d\tau|| \leq |\int\limits_{t_0}^{t} \|\bar{x}(\tau)\|d\tau|$ ■

Лемма 1.3. *(Адамара) Пусть $\bar{f}(\bar{x})$, $\dfrac{\partial f^i}{\partial x_j}$ непрерывны в $\Omega \subset \mathbb{R}$ - замкнутой, ограниченной, выпуклой области. Тогда $\forall i = \overline{1,n}, \bar{y} \in \Omega \hookrightarrow \|\bar{f}(\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x})\| \leq n^{3/2}K_1\|\overline{y-x}\|$, где $K_1 = max_{i,j=\overline{1,n}}\{max_{x\in\Omega}\left\{\left|\dfrac{\partial f^i}{\partial x_j}\right|\right\}\}$*

Доказательство. $|\bar{f}| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(f^i)^2}$, $\|\bar{f}\|_C = max_{x\in\Omega}\{|\bar{f}(\bar{x})|\}$

Ω - компакт, поэтому непрерывность частных производных позволяет говорить о существовании K_1. Возьмем производные точки $\bar{x}$ и $\bar{y}$ и соединим их отрезком $\bar{x} + t(\bar{y} - \bar{x})$, где $t \in [0, 1]$. Рассмотрим значение компоненты f^i на отрезке:

$$f^i(\bar{x} + t(\bar{y} - \bar{x})) = f^i(t)$$

$f^i(t)$ - дифференцируема, тогда

$$|f^i(\bar{y}) - f^i(\bar{x})| = |f^i(1) - f^i(0)| = \left|\frac{df}{dt}(t^*) \cdot (1-0)\right| =$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(t^*) \cdot (y^j - x^j)\right| \leq \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(t^*)\right| \cdot \left|(y^j - x^j)\right| \leq K_1\|\bar{y} - \bar{x}\| \cdot n$$

Теперь рассмотрим вектор-функцию

$$|\bar{f}(\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x})| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(f^k(\bar{y}) - f^k(\bar{x}))^2} \le K_1 n^{3/2}\|\bar{y} - \bar{x}\|$$
$$\Rightarrow \|\bar{f}(\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x})\| \le K_1 n^{3/2}\|\bar{y} - \bar{x}\|$$

■

Доказательство. (Основная теорема)

Докажем, что $A(\bar{x})$ из системы (4) является сжатием.

Рассмотрим $\Pi = \{\|\bar{x}(t) - \bar{x}_0(t)\| \le b, |t - t_0| \le a\} \subset \Omega$. Определим $K = \|\bar{f}\|_C = max_\Pi|\bar{f}|$. K_1 тоже определено в силу условий.

Рассмотрим $\Pi_h = \{\|\bar{x}(t) - \bar{x}_0(t)\| \le b, |t - t_0| \le h \le a\}$

Банахово пространство B - множество функций $\bar{x}(t)$ непрерывных на отрезке $|t - t_0| \le$ $\le h$. $M \subset B$ - множество функций $\|\bar{x}(t) - \bar{x}_0\| \le b$. M ограничено, так как $\forall \bar{x}(t) \in M \hookrightarrow$ $\|\bar{x}(t)\| = \|\bar{x}(t) - \bar{x}_0 + \bar{x}_0\| \le b + \|\bar{x}_0\| = C$

Докажем, что M замкнуто. Пусть $\bar{x}_n(t), n = 1, 2, \dots$ - последовательность точек в M, такая что $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{x}_n(t) = \bar{x}(t)$. $\|\bar{x}(t)\| = \|\bar{x}(t) - \bar{x}_n + \bar{x}_n\| \le \|\bar{x}(t) - \bar{x}_n\| + \|\bar{x}_n\| \le \varepsilon + b \Rightarrow \bar{x}(t) \in M$

Подберем h так, чтобы $A : M \to M$. То есть $\|A(\bar{x}) - \bar{x}_0\| \le b$.

$$\|A(\bar{x}) - \bar{x}_0\| = \|\int\limits_{t_0}^{t} \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau))d\tau\| \le |\int\limits_{t_0}^{t} \|\bar{f}\|d\tau| \le Kh$$

Получаем условие $h \le b/K$

Чтобы доказать, что A - сжатие, рассмотрим норму

$$\|A(\bar{y}) - A(\bar{x})\| = \|\int\limits_{t_0}^{t} (\bar{f}(\tau, \bar{y}(\tau)) - \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau)))d\tau\| \le$$
$$\le |\int\limits_{t_0}^{t} \|\bar{f}(\tau, \bar{y}) - \bar{f}(\tau, \bar{x})\|d\tau| \le K_1 n^{3/2}\|\overline{y - x}\| \cdot |\int\limits_{t_0}^{t} d\tau| \le K_1 h n^{3/2}\|\overline{y - x}\|$$

Откуда второе условие: $h < \dfrac{1}{n^{3/2}K_1}$

Тогда оператор A будет сжатием. Соответственно решение задачи Коши существует и единственно.

■

1.2 Уравнения n-го порядка в нормальной форме

Определение 1.3. *Уравнение вида*

$$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \tag{5}$$

называется уравнением n-го порядка в нормальной форме.

Определение 1.4. *Система*

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \tag{6}$$

называется начальным условием уравнения n-го порядка в нормальной форме.

Утверждение 1.2. *Решить задачу Коши означает найти такое решение (5), которое удовлетворяет условию (6)*

Теорема 1.2 (Теорема Коши о существовании и единственности решения)**.** *Если* $f, \dfrac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ *непрерывны в* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, *тогда* $\forall (x_0, \bar{y}_0) \in \Omega \exists h > 0 : \forall x \in [x_0 + h, x_0 - h]$ *решение задачи Коши существует и единственно.*

Доказательство. Введем следующие функции: $y(x) = v_1(x), y'(x) = v_2(x), \dots, y^{(n-1)}(x) = = v_n(x)$. Таким образом получаем систему уравнений в нормальной форме

$$\begin{cases} \dfrac{dv_1}{dx} = v_2 \\ \dots \\ \dfrac{dv_n}{dx} = f(x, \bar{v}) \end{cases}$$

А для нее решение существует и единственно. ∎