

Содержание

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Билет 1. Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений | 3 |
| 1.1 | Основные понятия | 3 |
| 1.2 | Простейшие типы уравнений первого порядка | 4 |
| 1.2.1 | Уравнения в полных дифференциалах | 4 |
| 1.2.2 | Уравнения с разделяющимися переменными | 5 |
| 1.2.3 | Однородные уравнения | 6 |
| 1.2.4 | Линейные уравнения первого порядка | 6 |
| 1.3 | Уравнение Бернулли и Риккати | 8 |
| 1.3.1 | Уравнение Бернулли | 8 |
| 1.3.2 | Уравнение Риккати | 8 |
| 1.4 | Методы понижения порядка дифференциальных уравнений | 8 |
| 1.5 | Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной | 10 |
| 2 | Билет 2. Задача Коши | 12 |
| 2.1 | Принцип сжимающих отображений | 12 |
| 2.2 | Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений | 14 |
| 2.3 | Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения n -го порядка в нормальном виде | 17 |
| 3 | Билет 3. Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами | 19 |
| 3.1 | Вводная часть | 19 |
| 3.1.1 | Понятие кольца. Рассмотрение понятия многочленов | 19 |
| 3.1.2 | Многочлен | 20 |
| 3.2 | Линейные уравнения с постоянными коэффициентами | 23 |
| 3.3 | Неоднородные линейные уравнения | 25 |
| 3.4 | Уравнение Эйлера | 27 |
| 3.5 | Матричная экспонента, ее свойства и применение к решению нормальных линейных систем | 28 |
| 3.5.1 | Матричная экспонента | 28 |
| 3.5.2 | Свойства матричной экспоненты | 28 |
| 3.5.3 | Применение к решению нормальных линейных систем | 30 |
| 4 | Билет 4. Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами | 31 |
| 4.1 | Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной линейной системы уравнений и для линейного уравнения n -го порядка в нормальном виде | 31 |
| 4.2 | Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы | 33 |
| 4.3 | Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем | 35 |
| 4.4 | Определитель Вронского и его свойства | 35 |
| 4.4.1 | Определитель Вронского | 35 |
| 4.4.2 | Свойства Вронскиана | 36 |
| 4.5 | Фундаментальная система решений и общее решение нормальной линейной однородной системы уравнений | 36 |

| | | |
|------|---|----|
| 4.6 | Линейная неоднородная система уравнений в случае, когда неоднородность представлена векторным квазимногочленом | 43 |
| 4.7 | Формула Лиувилля-Остроградского для нормальной линейной однородной системы уравнений и для линейного однородного уравнения n -го порядка. . | 43 |
| 4.8 | Метод вариации постоянных для линейной неоднородной системы уравнений и для линейного неоднородного уравнения n -го порядка. | 44 |
| 4.9 | Теорема Штурма | 46 |
| 4.10 | Следствия из теоремы Штурма | 48 |

1 Билет 1. Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений

1.1 Основные понятия

Определение 1.1. Уравнение вида

$$F(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением, где x – аргумент, $y(x)$ – неизвестная функция, F – известная функция.

Определение 1.2. Если это уравнение удастся разрешить относительно старшей производной, такое дифференциальное уравнение называется разрешённым относительно старшей производной и записывается в виде

$$y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

Порядок уравнения определяется порядком старшей производной от y .

Определение 1.3. Функция $y = \varphi(x)$ называется решением ДУ, если она n раз дифференцируема и

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0 \quad \forall x,$$

где определена функция $\varphi(x)$ с её производными.

Определение 1.4. Система n уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f_1(t, x^1(t), \dots, x^n(t)) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f_n(t, x^1(t), \dots, x^n(t)) \end{cases} \quad (1)$$

где $x^1(t), \dots, x^n(t)$ – искомые функции, называется нормальной системой ДУ n -го порядка.

Утверждение 1.1. Рассмотрим ДУ $y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$ n -ого порядка. Это уравнение эквивалентно следующей нормальной системе ДУ:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = v_2 \\ \dot{v}_2 = v_3 \\ \dots \\ \dot{v}_{n-1} = v_n \\ \dot{v}_n = f_n(x, v_1, v_2, \dots, v_n) \end{cases} \Leftrightarrow y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad (2)$$

Доказательство. Введем обозначения: $y = v_1(x)$, $y' = v_2(x)$, $y'' = v_3(x)$, \dots , $y^{(n-1)} = v_n(x)$. Тогда имеем $\dot{v}_1 = v_2$, $\dot{v}_2 = v_3$, \dots , $\dot{v}_n = f(x, v_1, v_2, \dots, v_n)$, то есть получилась нормальная система дифференциальных уравнений n -ого порядка с неизвестными v_i .

Обратными заменами системы уравнений можно получить исходное дифференциальное уравнение $y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$. ■

Определение 1.5. Рассмотрим уравнение 1-ого порядка $y' = f(x, y(x))$. Тогда задача решить это уравнение с условием $y(x_0) = y_0$ называется задачей Коши.

Определение 1.6. Пусть $\varphi(x)$ – решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y(x))$. График решения $\varphi(x)$ называется интегральной кривой. В силу определения функции $f(x, y)$ на множестве Ω , вся интегральная кривая будет лежать в Ω .

Определение 1.7. Проведём через каждую точку интегральной кривой $(x_0, y_0) \in \Omega$ малый отрезок с углом наклона по отношению к оси x равным α , причём $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0, y_0)$. Получим так называемое поле направлений.

Из построения интегральной кривой следует, что интегральная кривая в каждой своей точке касается поля направлений. Верно и обратное: кривая, касающаяся в каждой своей точке поля направлений, является интегральной кривой.

1.2 Простейшие типы уравнений первого порядка

1.2.1 Уравнения в полных дифференциалах

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$. Тогда кривая

$$\gamma = \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (3)$$

называется интегральной кривой рассматриваемого уравнения, если $\forall t : t \in [t_1; t_2]$ выполнено

$$P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'_t + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'_t = 0. \quad (4)$$

Определение 1.8. Дифференциальное уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если $\exists F(x, y) : P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y)$.

Тогда $dF(x, y) = 0 \Rightarrow F(x, y) = \text{const}$, то есть $F(x, y)$ определяет неявную функцию $y(x)$.

Теорема 1.1. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в области D . Для того, чтобы уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ являлось уравнением в полных дифференциалах, необходимо выполнение условия $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $(x, y) \in D$. Если же область D ещё и одновязна, то условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ является достаточным.

Доказательство. Пусть $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ – уравнение в полных дифференциалах, тогда $\exists F(x, y) : P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y) \Rightarrow P = \frac{\partial F}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$. По условию P и Q – непрерывно дифференцируемы, тогда $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ – непрерывные функции, значит

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (x, y) \in D. \quad (5)$$

Пусть теперь D – односвязная область. Рассмотрим значение интеграла

$$F = \int_{(x_0, y_0)}^{(x; y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

который берётся по кривой γ , лежащей в D и соединяющей точки (x_0, y_0) и $(x; y)$. Пусть $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда по теореме о независимости интеграла от пути интегрирования выходит, что значение интеграла не зависит от пути интегрирования γ , а является функцией от (x, y) , значит $F = F(x, y)$ – функция и $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y)$. ■

Определение 1.9. Непрерывно дифференцируемая функция $\mu(x, y) \neq 0$ в области G называется интегрирующим множителем для уравнения в полных дифференциалах $\mu(x, y)(P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = 0$, если исходное уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ не является уравнением в полных дифференциалах.

Если $\mu(x, y)$ – интегрирующий множитель, то для достаточного условия имеем

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \Leftrightarrow P \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \frac{\partial P}{\partial y} = Q \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Полученное уравнение не легче исходного, так как теперь задача свелась к нахождению μ . Обычно интегрирующий множитель ищут в виде $\mu(x)$, $\mu(y)$, $\mu(x^2 + y^2)$, $\mu(x^\alpha, y^\beta)$.

1.2.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим ДУ вида $P(y)dx + Q(x)dy = 0$, где $P(y) \in C^1_{[y_1; y_2]}$, $Q(x) \in C^1_{[x_1; x_2]}$. Если $\exists y_0 : P(y_0) = 0$ или $\exists x_0 : Q(x_0) = 0$, тогда

$$\begin{cases} x = t \\ y = y_0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_0 \\ y = t \end{cases} \quad (6)$$

являются интегральными кривыми рассматриваемого ДУ соответственно. Если же выполняется $P(x, y) \neq 0$ и $Q(x, y) \neq 0$, то применим к уравнению интегрирующий множитель

$$\mu(x, y) = \frac{1}{P(x, y)Q(x, y)},$$

получив уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{dx}{Q(x)} + \frac{dy}{P(y)} = 0. \quad (7)$$

Значение $\mu(x, y)$ действительно является интегрирующим множителем, так как выполняется

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{Q(x)} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{P(y)} \right) = 0. \quad (8)$$

Тогда

$$dF(x, y) = \frac{dx}{Q(x)} + \frac{dy}{P(y)} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{Q(x)} \Rightarrow F(x, y) = \int_{x_1}^x \frac{dt}{Q(t)} + C(y), \quad (9)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{P(y)} = C'(y) \Rightarrow C(y) = \int_{y_1}^y \frac{dt}{P(t)} + C_1 \Rightarrow F(x, y) = \int_{x_1}^x \frac{dt}{Q(t)} + \int_{y_1}^y \frac{dt}{P(t)} + C_1 = \text{const}. \quad (10)$$

Определение 1.10. Если дифференциальное уравнение вида $P_1(x, y)dx + Q_1(x, y)dy = 0$ может быть сведено к виду $P(y)dx + Q(x)dy = 0$, то такое уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными.

Утверждение 1.2. Задача Коши уравнения с разделяющимися переменными $P(y)dx + Q(x)dy = 0$ задаётся в виде $y(x_1) = y_1$, а её решение в виде

$$\int_{x_1}^x \frac{dt}{Q(t)} + \int_{y_1}^y \frac{dt}{P(t)} = 0. \quad (11)$$

1.2.3 Однородные уравнения

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$y' = y \left(\frac{y}{x} \right),$$

которое назовём уравнением с однородной правой частью. Сделаем замену $v(x) = \frac{y}{x}$, тогда $y(x) = v(x) \cdot x$, $y'_x = x \cdot v'_x + v = g(v)$, откуда имеем $x \frac{dv}{dx} = g(v) - v$. Если $\exists g(v_0) = v_0$, то v_0 – решение уравнения $x \frac{dv}{dx} = g(v) - v$. Если же $v \neq g(v)$, тогда

$$\frac{dv}{g(v) - v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |x| + C = \int_{v_0}^v \frac{dt}{g(t) - t}. \quad (12)$$

Таким образом, найдено решение исходного уравнения с однородной правой частью в квадратурах.

Определение 1.11. Функция $F(x^1, x^2, \dots, x^n)$ называется однородной степени m , если $\forall \lambda > 0 \rightarrow F(\lambda x^1, \lambda x^2, \dots, \lambda x^n) = \lambda^m F(x^1, x^2, \dots, x^n)$.

Пример 1.1. Рассмотрим уравнение $P(x, y)dx = Q(x, y)dy$. Если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции степени m , тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = \frac{x^m P(1, \frac{y}{x})}{x^m Q(1, \frac{y}{x})} = \frac{P(1, \frac{y}{x})}{Q(1, \frac{y}{x})} = g\left(\frac{y}{x}\right) \quad (13)$$

Таким образом исходное уравнение свелось к уравнению с однородной правой частью.

1.2.4 Линейные уравнения первого порядка

Определение 1.12. Дифференциальное уравнение вида $y' + a(x)y = f(x)$ – линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Дифференциальное уравнение вида $y' + a(x)y = 0$ – линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка. При этом $a(x) \in C^1_{I(x)}$, $f(x) \in C_{I(x)}$, где $I(x)$ – область, на которой определены функции $a(x)$ и $f(x)$.

Введём оператор $L = \frac{d}{dx} + a(x)$, который действует на множество непрерывно дифференцируемых функций $\varphi \in C^1_{I(x)}$. Тогда уравнение $y' + a(x)y = f(x)$ переписывается в виде $L(y) = f(x)$, а уравнение $y' + a(x)y = 0$ переписывается в виде $L(y) = 0$.

Теорема 1.2. Введённый оператор $L = \frac{d}{dx} + a(x)$ – линейный оператор.

Доказательство. Рассмотрим линейную комбинацию $c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$:

$$L(c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)) = (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)' + a(x)(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1L(\varphi_1) + c_2L(\varphi_2) \quad (14)$$

Таким образом, $L(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1L(\varphi_1) + c_2L(\varphi_2)$, то есть L – линейный оператор. ■

Утверждение 1.3. Решением уравнения $y' + a(x)y = 0$ является

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

Доказательство. Найдём решение уравнения $y' + a(x)y = 0$:

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx \Rightarrow \ln |y| = - \int_{x_0}^x a(t)dt + \ln C \Rightarrow |y| = Ce^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}, \quad C > 0 \quad (16)$$

Раскрывая модуль и объединяя полученное решение с нулевым ($y \equiv 0$), имеем

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

■

Утверждение 1.4. Решением уравнения $y' + a(x)y = f(x)$ является

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (18)$$

Доказательство. Найдём решение уравнения $y' + a(x)y = f(x)$: воспользуемся уже найденным решением однородного уравнения, применяя метод вариации постоянной. То есть будем искать решение в виде

$$y = C(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}. \quad (19)$$

Подставим это решение в исходное уравнение:

$$C'(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} - a(x)C(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} + a(x)C(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} = f(x) \quad (20)$$

$$C'(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} = f(x) \Rightarrow C(x) = \int_{x_0}^x f(t)e^{\int_{x_0}^t a(s)ds} + C_0 \quad (21)$$

Таким образом найден вид $C(x)$. Теперь подставим эту функцию:

$$y = C_0 e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} + e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} \int_{x_0}^x f(t)e^{\int_{x_0}^t a(s)ds} \quad (22)$$

$$y = C_0 e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} + \int_{x_0}^x f(t)e^{-\int_{x_0}^t a(s)ds} \quad (23)$$

Из полученного решения видно, что оно является суммой решения однородного уравнения и частного решения. ■

Утверждение 1.5. Если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – некоторые решения уравнения $y' + a(x)y = f(x)$, то $z(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ – решение однородного уравнения $y' + a(x)y = 0$.

Доказательство. По условию $\varphi_1' + a(x)\varphi_1 = f(x)$, $\varphi_2' + a(x)\varphi_2 = f(x)$, откуда очевидно, что $(\varphi_1 - \varphi_2)' + a(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$. Обозначив $z = \varphi_1 - \varphi_2$, получим $z' + a(x)z = 0$, то есть z – решение однородного уравнения. ■

1.3 Уравнение Бернулли и Риккати

1.3.1 Уравнение Бернулли

Определение 1.13. Д.у. вида $y' + a(x) \cdot y = y^r \cdot f(x)$ ⁽²⁴⁾, где $a(x), f(x) \in C^1, r \in \mathbb{R}, r \neq 1$ называется уравнением Бернулли.

Утверждение 1.6. Если $r > 0$, то $y \equiv 0$ - тривиальное решение. Пусть $y \neq 0$, разделим ДУ на $y^r \Rightarrow \frac{y'}{y^r} + a(x) \cdot y^{1-r} = f(x)$. Замена: $u(x) = y^{1-r} \Rightarrow u' = (1-r) \cdot y^{-r} \cdot y' \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{1}{1-r} \cdot u' + a(x) \cdot u = f(x)$ - свелось к линейному уравнению.

1.3.2 Уравнение Риккати

Определение 1.14. Д.у. вида $y' + a(x) \cdot y^2 + b(x) \cdot y + c(x)$ ⁽²⁵⁾, где $a(x), b(x) \in C^1_{I(x)}$, $c(x) \in C_{I(x)}$ называется уравнением Риккати.

Утверждение 1.7. В общем случае уравнение Риккати не допускает решений в квадратах, однако, если известно некоторое решение $y = \varphi(x)$, то сделав замену $y = u + \varphi$, получаем: $\varphi' = u\varphi^2 + b\varphi + c$
 $\varphi' + u' = u\varphi^2 + 2a\varphi u + au^2 + b\varphi + bu + c \Rightarrow u' = au^2 + (2a\varphi + b)u$ - свелось к уравнению Бернулли.

1.4 Методы понижения порядка дифференциальных уравнений

Утверждение 1.8. Рассмотрим множество преобразований плоскости

$\bar{x} = \varphi(x, y, \lambda), \bar{y} = \psi(x, y, \lambda)$ ⁽²⁶⁾. В (26) каждому $\lambda \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ соответствует некоторое преобразование, например, $\bar{x} = \lambda x, \bar{y} = \lambda y, \lambda > 0$ - гомотетия. Множество преобразований (26) является группой преобразований, если оно содержит любую композицию (26), т.е. $\exists \lambda_0 : \varphi(\varphi(x, y, \lambda_1), \psi(x, y, \lambda_2)) = \varphi(x, y, \lambda_0)$, содержит тождественное преобразование, т.е. $\exists \lambda_0 : \varphi(x, y, \lambda_0) = x; \psi(x, y, \lambda_0) = y$, и вместе с любым преобразованием содержит и обратное: $\forall \lambda \in \mathcal{D} : \exists \lambda_0 : x = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda_0); y = \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda_0)$
Т.о. если (26) - группа, то $x = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda), y = \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda)$; если в ДУ $y' = f(x, y)$ осуществить переход к новым координатам, то

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\psi'_x d\bar{x} + \psi'_y d\bar{y}}{\varphi'_x d\bar{x} + \varphi'_y d\bar{y}} = f(\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda), \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda)) = \tilde{f}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\psi'_x + \psi'_y \cdot \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}}{\varphi'_x + \varphi'_y \cdot \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}} = \tilde{f}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda) \Rightarrow \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{\tilde{f} \cdot \varphi'_x - \psi'_x}{\psi'_y - \tilde{f} \cdot \varphi'_y} \end{aligned} \quad (27)$$

(27) является записью $y' = f(x, y)$ в новых координатах. Говорят, что $y' = f(x, y)$ допускает группу $x = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda), y = \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda)$, если оно не изменяется при переходе к новым переменным, т.е. $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \tilde{f}(\bar{x}, \bar{y})$.

Следствие 1.2.1. Рассматриваем уравнения вида $F(x, y, y', y'') = 0$ ⁽²⁸⁾

1. $F(x, y'', y') = 0$ ⁽²⁹⁾ Замена $y'(x) = v(x) \Rightarrow y''(x) = v'(x)$ и (29) в этом случае имеет вид $F(x, v(x), v'(x)) = 0 \xrightarrow{\text{решаем}} V(x) = y(x, c_1)$. Тогда решение (29) запишется в виде

$\frac{dy}{dx} = g(x, c_1) \Rightarrow y(x) = c_2 + \int g(x, c_1) dx$. Заметим, что (29) допускает группу сдвига $x = \bar{x}$, $y = \bar{y} + y_0$

2. $\boxed{F(y, y', y'') = 0}^{(30)}$ (не содержит явно x). Замена: $y' = V(y)$, тогда

$y'' = \frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dy} \frac{dy}{dx} = V \frac{dV}{dy} \Rightarrow F(y, V, y \frac{dV}{dy}) = 0$ - ДУ первого порядка.

Решение $V(y) = g(y, c_1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = g(y, c_1) \Rightarrow$ Решение (30): $\int \frac{dy}{g(y, c_1)} = x + c_2$.

Заметим, что (30) допускает группу сдвигов $x = \bar{x} + x_0$, $y = \bar{y}$

3. $\boxed{F(x, y'', y', y) = 0}$ и F - однородная степени m по y'', y', y , т.е. $\forall \lambda > 0 \rightarrow$

$F(x, \lambda y'', \lambda y', \lambda y) = \lambda^m \cdot F(x, y'', y', y)$. В таком случае ДУ допускает группу

$x = \bar{x}$, $y = \lambda \bar{y}$. Замена: $z(x) = \frac{y'}{y} \Rightarrow y' = z(x)y$

$\Rightarrow y'' = z'y + zy' = z'y + z^2y = y \cdot (z' + z^2) \Rightarrow F(x, y, zy, y(z' + z^2)) = 0$

$\Rightarrow y^m \cdot F(x, 1, z, z' + z^2) = 0$ - относительно z имеем уравнение первого порядка.

Если его решение $z(x) = g(x, c_1)$, то $\frac{y'}{y} = g(x, c_1) \Rightarrow \frac{dy}{y} = g(x, c_1) dx \Rightarrow$

$\ln |y| = \int g(x, c_1) dx + c_2$

4*. Будем говорить, что функция $F(x, y, y'', \dots, y^{(n)})$ является квазиоднородной функцией степени r , если $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall \lambda > 0 : F(\lambda x, \lambda^\alpha y, \lambda^{\alpha-1} y', \dots, \lambda^{\alpha-n} y^{(n)}) = \lambda^r \cdot F(x, y, \dots, y^{(n)})$.

Рассмотрим множество преобразований:

$$\begin{cases} x = \lambda \bar{x} \\ y = \lambda^\alpha \bar{y} \end{cases}, \quad \text{где } \lambda > 0 \quad (31)$$

Такое множество преобразований перепишем в виде:

$$\begin{cases} x = e^\beta \cdot \bar{x} \\ y = e^{\alpha\beta} \bar{y} \end{cases}$$

Если F в (30) является квазиоднородной, то (30) допускает группу растяжений (31):

$$\boxed{F(x, y'', y', y) = 0} \xrightarrow{\text{преобр.}} F(\lambda \bar{x}, \lambda^\alpha \bar{y}, \lambda^{\alpha-1} \bar{y}', \lambda^{\alpha-2} \bar{y}'') = \lambda^r \cdot F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'') = 0$$

\Downarrow

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'') = 0$$

$$\text{Замена: } \begin{cases} x = e^t \\ y = z(t) \cdot e^{2t} \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{z'_t \cdot e^{\alpha t} + z \cdot \alpha \cdot e^{\alpha t}}{e^t} = e^{(\alpha-1)t} \cdot (z'_t + \alpha z)$$

\Downarrow

$$\begin{aligned} y''_{xx} &= \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(\alpha-1) \cdot e^{(\alpha-1)t} \cdot (z'_t + \alpha z) + e^{(\alpha-1)t} \cdot (z''_{tt} + \alpha z'_t)}{e^t} = \\ &= e^{(\alpha-2)t} \cdot (z''_{tt} + (2\alpha-1) \cdot z'_t + \alpha \cdot (\alpha-1)z) \end{aligned}$$

\Downarrow

$$\begin{aligned} &F(e^t; z \cdot e^{\alpha t}; e^{(\alpha-1)t} \cdot (z'_t + \alpha z); e^{(\alpha-2)t} (z''_{tt} + (2\alpha-1)z'_t + \alpha \cdot (\alpha-1)z)) = \\ &= e^{rt} \cdot F(1; z; z'_t + \alpha z; z''_{tt} + (2\alpha-1)z'_t + \alpha \cdot (\alpha-1)z) = 0 \text{ - не содержит } x, \text{ т.е. свелось к случаю 2} \end{aligned}$$

1.5 Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной

Утверждение 1.9. Рассмотрим $\boxed{F(x, y, y') = 0}^{(32)}$, где $F(x, y, y')$ как функция трёх переменных является непрерывно дифференцируемой в области $G \subset \mathbb{R}^3$

Решение уравнения $F(x, y, y') = 0$ будем представлять как кривую в параметрическом виде:

$$\gamma: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in [t_1, t_2], \quad \varphi(t), \psi(t) \in C^1_{[t_1, t_2]} \quad (33)$$

Кривая (33), является интегральной кривой (32) \Rightarrow

$$\Rightarrow F\left(\varphi(t), \psi(t), \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}\right) = 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2] \quad (34)$$

Будем решать эквивалентную систему положив $p = \frac{dy}{dx}$:

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ dy = p dx \end{cases} \quad (35)$$

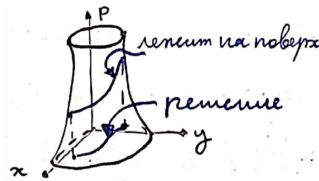
Утверждение 1.10. Уравнение (32) эквивалентно системе (35).

Доказательство. Пусть γ - интегр. кривая (32). Положим $p = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} = \frac{dy}{dx}$ - второе уравнение в системе (35) выполнено, а первое выполнено в силу подстановки в (34). Обратно, пусть $x(t) = \varphi(t)$, $y(t) = \psi(t)$, p - решение (34). \Rightarrow Из второго уравнения системы:

$p = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} \rightarrow$ Подставляем в первое уравнение системы и получаем само уравнение (34) ■

Утверждение 1.11. Рассмотрим метод решения (32), который называется методом введения параметра.

Первое ур-ние в системе (35) рассмотрим как задающее в $\mathbb{R}^3_{(x,y,p)}$ гладкую поверхность S , для которой параметрическое представление имеет вид:



$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ p = \chi(u, v) \end{cases} \Rightarrow F(\varphi(u, v); \psi(u, v); \chi(u, v)) \equiv 0$$

Потребуем, чтобы $\text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial v} \end{pmatrix} = 2, \quad \forall u, v \in G$ т.е. S была простой гладкой пов.

Тогда остаётся удовлетворить второму уравнению системы (35):

$$\frac{\delta \psi}{\delta u} du + \frac{\delta \psi}{\delta v} dv = \chi \cdot \left(\frac{\delta \varphi}{\delta u} du + \frac{\delta \varphi}{\delta v} dv \right) \Rightarrow \left(\frac{\delta \psi}{\delta u} - \chi \frac{\delta \varphi}{\delta v} \right) du = \left(\chi \frac{\delta \varphi}{\delta v} - \frac{\delta \psi}{\delta v} \right) dv \quad (36)$$

Если $P(u, v) \neq 0 \forall (u, v) \in G$, то из (36) получаем Д.У.: $\frac{du}{dv} = \frac{Q(u, v)}{P(u, v)}$

Это решение $u = u(v, c)$, тогда $\begin{cases} x = \varphi(u(v, c), v) = x(v, c) \\ y = \psi(u(v, c), v) = y(v, c) \end{cases}$ - является параметрическим представлением решения (32)

Если же существует связь между u и v : $u = f(v), P(f(v), v) = Q(f(v), v) = 0 \forall v \in G$, то $u = f(v)$ явл. решением $\left(\chi \frac{\delta \varphi}{\delta v} - \frac{\delta \psi}{\delta v}\right) dv$, а

$$\begin{cases} x = x(v) \\ y = y(v) \end{cases} \quad - \text{явл. решением (36)}$$

2 Билет 2. Задача Коши

2.1 Принцип сжимающих отображений

Работаем в $E = \mathbb{R}^n$ - пространстве точек с n координатами. E - аффинное пространство, а \vec{E} - его присоединенное линейное пространство, состоящее из векторов, натянутых на точки E .

Определение 2.1. Пусть L - это векторное пространство, и на нем задано отображение $\|\cdot\| : L \rightarrow \mathbb{R}$ такое, что:

1. $\forall x \in L \mapsto \|x\| \geq 0$. А также $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
2. $\forall x \in L \ \& \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3. $\forall x, y \in L \mapsto \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ - неравенство треугольника.

Тогда данное отображение называется нормой, а пространство L нормированным.

Пример 2.1. Приведем пример норм. Пусть $a(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда норму можно определить, допустим, так:

$$\|a\|_1 = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}. \quad (37)$$

Или так:

$$\|a\|_2 = \max_{j=1, \dots, n} |x_j|. \quad (38)$$

И тогда можно ввести понятие эквивалентности норм.

Определение 2.2. Пусть снова L - линейное пространство. Тогда нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на L называются эквивалентными, если $\exists C_1, C_2 > 0 : \forall x \in L \mapsto C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1$.

Как видно, для определенных выше двух норм это соотношение удовлетворяется.

Утверждение 2.1. В конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.

Рассмотрим множество функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$ для некоторых неравных $a, b \in \mathbb{R}$ и обозначим данное множество $C[a; b]$. Понятно, что $C[a; b]$ является линейным пространством. Тогда введем на нем норму.

Определение 2.3. Нормой функции $f(x) \in C[a; b]$ будем называть число

$$\|f(x)\| = \max_{x \in [a; b]} |f(x)|.$$

Определение 2.4. Набор функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) \in C[a; b]$ будем называть вектор-функцией и обозначать $f(x) = \vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T$.

Определение 2.5. Вектор-функция $f(x)$ называется непрерывной (дифференцируемой, непрерывно дифференцируемой и т.п.), если все ее компоненты непрерывны (дифференцируемы, непрерывно дифференцируемы и т.п.).

Определение 2.6. Модулем вектор-функции $f(x)$ назовем число

$$|f(x)| = \sqrt{\sum_{j=1}^n f_j^2(x)}. \quad (39)$$

Норму вектор-функции можно определить как

$$\|f(x)\|_1 = \max_{x \in [a; b]} |f(x)|.$$

Или же как

$$\|f(x)\|_2 = \max_{j=1, \dots, n} \max_{x \in [a; b]} f_j(x).$$

Понятно, что эти две нормы эквивалентны.

Определение 2.7. Пусть имеется функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, где $f_n(x) \in C[a; b]$ - линейное пространство функций с нормой (1 или 2 - неважно). Тогда говорят, что данная последовательность сходится к функции $f(x)$ по норме, если:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0. \quad (40)$$

Аналогично все то же самое и точно так же определяется и для вектор-функций $f(x) = \vec{f}(x) \in C[a; b]^n$.

Определение 2.8. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется фундаментальной, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \ \& \ \forall m \geq N \mapsto \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon. \quad (41)$$

Определение 2.9. Функциональное пространство L называется полным по [данной] норме, если любая фундаментальная функциональная последовательность данного пространства сходится по норме к функции из этого же пространства L .

Теорема 2.1. Функциональное пространство $C[a; b]$ с нормой $\|\cdot\|_1$ является полным.

Доказательство. Возьмем произвольную функциональную последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ из нашего пространства непрерывных функции. Тогда из определения фундаментальности следует, что $\|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$.

Однако $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon \ \forall x \in [a; b]$.

А значит, последовательность $f_n(x)$ сходится к некоторой $f(x)$, причем равномерно на $[a; b]$ (числовая последовательность $\|f_n(x)\|$ мажорирует функциональную последовательность $f_n(x)$).

Так как $f_n(x) \in C[a; b]$ - непрерывны $\forall n \in \mathbb{N}$, и последовательность сходится равномерно на $[a; b]$, то предельная функция $f(x)$ также является непрерывной на $[a; b]$, а значит, $f(x) \in C[a; b]$.

Таким образом, последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f(x) \in C[a; b]$. В силу произвольности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ заключаем, что функциональное пространство $C[a; b]$ с нормой $\|\cdot\|_1$ является полным. ■

Определение 2.10. Полное нормированное линейное пространство называется Банаховым. Обозначается B .

Определение 2.11. Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ называется сходящимся по норме,

если последовательность его частичных сумм $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ является сходящейся по норме.

Определение 2.12. Пусть $\forall x \in M \subseteq B$ определен элемент $Ax \in B$. Тогда говорят, что на множестве B задан оператор A с областью определения M .

Будем рассматривать уравнение $x = Ax$.

Определение 2.13. Множество $M \subseteq B$ называется ограниченным, если $\exists C > 0$ такое, что $\forall x \in M \mapsto \|x\| \leq C$.

Определение 2.14. Оператор A называется сжатием на M , если:

1. $\forall x \in M \mapsto Ax \in M$;
2. $\exists k \in (0; 1) : \forall x, y \in M \mapsto \|Ax - Ay\| \leq k\|x - y\|$.

Теорема 2.2 (Принцип сжимающих отображений). Пусть множество $M \subseteq B$ является ограниченным и замкнутым, а оператор A является сжатием. Тогда решение уравнения $x = Ax$ существует и единственно.

Доказательство. Будем использовать итерационный метод, согласно которому мы выбираем начальное x_0 , а затем строим последовательность $x_n = Ax_{n-1}$. Тогда, если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax$, то $x = Ax$.

Пусть $x_n = S_n = x_0 + (x_1 - x_0) + \dots + (x_n - x_{n-1})$. Докажем, что $\|x_{n+1} - x_n\| \leq 2Ck^n$ для некоторого $C > 0$, ограничивающего последовательность x_n . Сделаем это по индукции.

База индукции: $\|x_1 - x_0\| \leq \|x_1\| + \|x_0\| \leq 2C$.

Предположим, что $\|x_n - x_{n-1}\| \leq 2Ck^{n-1}$. Тогда получаем, что $\|x_{n+1} - x_n\| = \|Ax_n - Ax_{n-1}\| \leq k\|x_n - x_{n-1}\| \leq 2Ck^n$.

И получаем, что $x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (x_j - x_{j-1}) \leq x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} 2Ck^{j-1} < \infty$.

А значит $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. А поскольку M замкнуто, то $x \in M$.

Теперь рассмотрим разность $\|Ax_n - Ax\| \leq k\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Это означает, что $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax$.

Учитывая, что $x_{n+1} = Ax_n$, то, перейдя к пределу с обеих частей равенства, мы получаем, что итерационный метод сходится к решению уравнения $x = Ax$. И таким образом, доказано существование решения. Теперь докажем его единственность.

Пойдем от противного: пусть x и y – два разных решения. Тогда $\|x - y\| = \|Ax - Ay\| \leq k\|x - y\|$. Учитывая, что $k \in (0; 1)$, то данная ситуация возможна тогда и только тогда, когда $\|x - y\| = 0$. Следовательно, $x = y$, что противоречит тому, что это два разных решения. Итак, теорема доказана. ■

2.2 Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений

Определение 2.15. Система вида

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(t, \bar{x}) \\ \dot{x}^2 = f^2(t, \bar{x}) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f^n(t, \bar{x}) \end{cases} \quad (42)$$

называется нормальной системой дифференциальных уравнений n -ого порядка.

Определение 2.16. Система

$$\begin{cases} x^1(t_0) = x_0^1 \\ x^2(t_0) = x_0^2 \\ \dots \\ x^n(t_0) = x_0^n \end{cases} \quad (43)$$

называется начальным условием

Утверждение 2.2. Решить задачу Коши означает решить нормальную систему дифференциальных уравнений при заданном начальном условии

Теорема 2.3 (Теорема Коши о существовании и единственности решения). Пусть $\forall i, j = \overline{1, n}$ функции $f^i, \frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ непрерывны в области $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, тогда, $\forall (t_0, \bar{x}_0) \in \Omega \exists h > 0 : \forall t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ решение задачи Коши существует и единственно.

Лемма 2.1. Если $\bar{f}(t, \bar{x})$ - непрерывны на Ω , то система уравнений

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_0 + \int_{t_0}^t \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau \quad (44)$$

эквивалентна задаче Коши.

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ - решение (42) при условии (43), тогда

$$\dot{\varphi}^i = f^i(t, \varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t))$$

Проинтегрируем полученное равенство по отрезку $[t_0, t]$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \dot{\varphi}^i(\tau) d\tau &= \int_{t_0}^t f^i(\tau, \varphi^1(\tau), \dots, \varphi^n(\tau)) d\tau \\ \varphi^i(t) - \varphi^i(t_0) &= \int_{t_0}^t f^i(\tau, \bar{\varphi}(\tau)) d\tau \\ \varphi^i(t) &= x_0^i + \int_{t_0}^t f^i(\tau, \bar{\varphi}(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

Теперь пусть $\bar{\varphi}(t)$ - решение (44). Тогда

$$\varphi^i(t) \equiv x_0^i + \int_{t_0}^t f^i(\tau, \bar{\varphi}(\tau)) d\tau$$

Отсюда видно, что функция $\varphi^i(t)$ - дифференцируема. Тогда

$$\begin{cases} \dot{\varphi}^i(t) = f^i(t, \bar{\varphi}(t)) \\ \varphi^i(t_0) = x_0^i \end{cases} \quad (45)$$

■

Следствие 2.3.1. Из 2 части леммы следует, что решение задачи Коши непрерывно дифференцируемо.

Введем оператор $A(\bar{x}) = \bar{x}_0 + \int_{t_0}^t \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau$. Тогда систему интегральных уравнений (44) можно записать в виде

$$\bar{x}(t) = A(\bar{x}) \quad (46)$$

Лемма 2.2.

$$\left\| \int_{t_0}^t \bar{x}(\tau) d\tau \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|\bar{x}(\tau)\| d\tau \right|$$

Доказательство.

$$\left| \int_{t_0}^t x^i(\tau) d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |x^i(\tau)| d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t \|\bar{x}(\tau)\| d\tau \right| \quad (47)$$

Таким образом $\max\{|\int_{t_0}^t x^i(\tau) d\tau|\} = \|\int_{t_0}^t \bar{x}(\tau) d\tau\| \leq \int_{t_0}^t \|\bar{x}(\tau)\| d\tau$ ■

Лемма 2.3. (Адамара) Пусть $\bar{f}(\bar{x}), \frac{\partial f^i}{\partial x_j}$ непрерывны в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - замкнутой, ограниченной, выпуклой области. Тогда $\forall i = \overline{1, n}, \bar{y} \in \Omega \hookrightarrow \|\bar{f}(\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x})\| \leq n^{3/2} K_1 \|\bar{y} - \bar{x}\|$, где $K_1 = \max_{i,j=\overline{1,n}} \{\max_{x \in \Omega} \left| \frac{\partial f^i}{\partial x_j} \right| \}$

Доказательство. $|\bar{f}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (f^i)^2}$, $\|\bar{f}\|_C = \max_{x \in \Omega} \{|\bar{f}(\bar{x})|\}$

Ω - компакт, поэтому непрерывность частных производных позволяет говорить о существовании K_1 . Возьмем производные точки \bar{x} и \bar{y} и соединим их отрезком $\bar{x} + t(\bar{y} - \bar{x})$, где $t \in [0, 1]$. Рассмотрим значение компоненты f^i на отрезке:

$$f^i(\bar{x} + t(\bar{y} - \bar{x})) = f^i(t)$$

$f^i(t)$ - дифференцируема, тогда

$$\begin{aligned} |f^i(\bar{y}) - f^i(\bar{x})| &= |f^i(1) - f^i(0)| = \left| \frac{df^i}{dt}(t^*) \cdot (1 - 0) \right| = \\ &= \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(t^*) \cdot (y^j - x^j) \right| \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(t^*) \right| \cdot |y^j - x^j| \leq K_1 \|\bar{y} - \bar{x}\| \cdot n \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим вектор-функцию

$$\begin{aligned} |\bar{f}(\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x})| &= \sqrt{\sum_{k=1}^n (f^k(\bar{y}) - f^k(\bar{x}))^2} \leq K_1 n^{3/2} \|\bar{y} - \bar{x}\| \\ \Rightarrow \|\bar{f}(\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x})\| &\leq K_1 n^{3/2} \|\bar{y} - \bar{x}\| \end{aligned}$$
■

Доказательство. (Основная теорема)

Докажем, что $A(\bar{x})$ из системы (46) является сжатием.

Рассмотрим $\Pi = \{\|\bar{x}(t) - \bar{x}_0(t)\| \leq b, |t - t_0| \leq a\} \subset \Omega$. Определим $K = \|\bar{f}\|_C = \max_{\Pi} |\bar{f}|$. K_1 тоже определено в силу условий.

Рассмотрим $\Pi_h = \{\|\bar{x}(t) - \bar{x}_0(t)\| \leq b, |t - t_0| \leq h \leq a\}$

Банахово пространство B - множество функций $\bar{x}(t)$ непрерывных на отрезке $|t - t_0| \leq h$. $M \subset B$ - множество функций $\|\bar{x}(t) - \bar{x}_0\| \leq b$. M ограничено, так как $\forall \bar{x}(t) \in M \hookrightarrow \|\bar{x}(t)\| = \|\bar{x}(t) - \bar{x}_0 + \bar{x}_0\| \leq b + \|\bar{x}_0\| = C$

Докажем, что M замкнуто. Пусть $\bar{x}_n(t), n = 1, 2, \dots$ - последовательность точек в M , такая что $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n(t) = \bar{x}(t)$. $\|\bar{x}(t)\| = \|\bar{x}(t) - \bar{x}_n + \bar{x}_n\| \leq \|\bar{x}(t) - \bar{x}_n\| + \|\bar{x}_n\| \leq \varepsilon + b \Rightarrow \bar{x}(t) \in M$
 Подберем h так, чтобы $A : M \rightarrow M$. То есть $\|A(\bar{x}) - \bar{x}_0\| \leq b$.

$$\|A(\bar{x}) - \bar{x}_0\| = \left\| \int_{t_0}^t \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|\bar{f}\| d\tau \right| \leq Kh$$

Получаем условие $h \leq b/K$

Чтобы доказать, что A - сжатие, рассмотрим норму

$$\begin{aligned} \|A(\bar{y}) - A(\bar{x})\| &= \left\| \int_{t_0}^t (\bar{f}(\tau, \bar{y}(\tau)) - \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau))) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|\bar{f}(\tau, \bar{y}) - \bar{f}(\tau, \bar{x})\| d\tau \right| \leq K_1 n^{3/2} \|\bar{y} - \bar{x}\| \cdot \left| \int_{t_0}^t d\tau \right| \leq K_1 h n^{3/2} \|\bar{y} - \bar{x}\| \end{aligned}$$

Откуда второе условие: $h < \frac{1}{n^{3/2} K_1}$

Тогда оператор A будет сжатием. Соответственно решение задачи Коши существует и единственно. ■

2.3 Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения n -го порядка в нормальном виде

Определение 2.17. Уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \quad (48)$$

называется уравнением n -го порядка в нормальной форме.

Определение 2.18. Система

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad (49)$$

называется начальным условием уравнения n -го порядка в нормальной форме.

Утверждение 2.3. Решить задачу Коши означает найти такое решение (48), которое удовлетворяет условию (49)

Теорема 2.4 (Теорема Коши о существовании и единственности решения). Если $f, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ непрерывны в $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, тогда $\forall (x_0, \bar{y}_0) \in \Omega \exists h > 0 : \forall x \in [x_0 + h, x_0 - h]$ решение задачи Коши существует и единственно.

Доказательство. Введем следующие функции: $y(x) = v_1(x), y'(x) = v_2(x), \dots, y^{(n-1)}(x) = v_n(x)$. Таким образом получаем систему уравнений в нормальной форме

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dx} = v_2 \\ \dots \\ \frac{dv_n}{dx} = f(x, \bar{v}) \end{cases} \quad (50)$$

А для нее решение существует и единственно. ■

3 Билет 3. Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

3.1 Вводная часть

3.1.1 Понятие кольца. Рассмотрение понятия многочленов

Определение 3.1. Кольцом K называют множество, на котором определены две операции: сложение и умножение, сопоставляющее кпорядоченным парам элементов их "сумму" "произведение" являющихся элементами этого же множества.

Действия $+$ и \cdot удовлетворяют условиям: (первые 6 для любого кольца):

1. $(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in K$
2. $a + b = b + a \quad \forall a, b \in K$
3. $\exists 0 \in K : a + 0 = a \quad \forall a \in K$
4. $\forall a \in K \exists -a \in K : a + (-a) = 0 \quad \forall a \in K$
5. $(a + b) \cdot c = ac + bc \quad \forall a, b, c \in K$
6. $c \cdot (a + b) = ca + cb \quad \forall a, b, c \in K$
7. $(ab)c = a(bc) \quad \forall a, b, c \in K$
8. $ab = ba \quad \forall a, b \in K$
9. $\exists 1 \in K : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in K$
10. $\exists a^{-1} \in K : a^{-1}a = aa^{-1} = 1 \quad \forall a \in K$

Утверждение 3.1. Если $a + x = a + y$, то $x = y$

Доказательство.

$$(-a) + (a + x) = (-a) + (a + y) \Rightarrow ((-a) + a) + x = ((-a) + a) + y = 0 + x = x = x + y = y$$

Отсюда следует единственность нуля и противоположного элемента:

$$(-a) \neq (-a)'$$

$$0 = a + (-a) = a + (-a)' \Rightarrow (-a) = (-a)'$$

■

Утверждение 3.2. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \quad \forall a$

Доказательство. $a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0 = a(0 + 0) \Rightarrow a \cdot 0 = 0$; аналогично $0 + 0 \cdot a = 0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a \Rightarrow 0 \cdot a = 0$

■

Утверждение 3.3. Единица единственна

Доказательство. Пусть $1 \neq 1' : 1 = 1 \cdot 1' = 1' \cdot 1 = 1'$

■

- Кольцо называется ассоциативным, если выполнено условие 7; коммутативным, если выполнено 8. Если выполнено условие 9, то говорят о кольце с единицей.
- Ассоциативное кольцо называется областью целостности, если из $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$
- Полем называется коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, в котором каждый отличный от нуля элемент имеет обратный.

Утверждение 3.4. Любое поле является областью целостности

Доказательство. $ab = 0, a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} \cdot (ab) = a^{-1} \cdot 0 = 0 = (a^{-1}a) \cdot b = 1 \cdot b = b \Rightarrow b = 0$ ■

3.1.2 Многочлен

Пусть A — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Одночленом от x с коэффициентом из A называется выражение ax^m , $a \in A$, $m \in \mathbf{N}$. По определению положим, что $ax^0 = 0$. Выражение ax^m будем рассматривать как символ, для которого выполняется по определению:

$$\begin{aligned} ax^m + bx^m &= (a + b)x^m \\ ax^m \cdot ax^n &= ax^{m+n} \end{aligned}$$

Выражение, состоящее из нескольких одночленов, соединенных знаком $+$ назовем многочленом от x с коэффициентом из A . Без нарушения общности, в силу коммутативности сложения запишем в каноническом виде: $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$

1. Многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ и $Q_m(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ считаем равными в том и только в том случае, если $n = m$ и $a_k = b_k$, $k = \overline{1, n}$
2. Суммой двух многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ называется многочлен, получившейся посредством объединения одночленов соответствующих слагаемых:

$$P(n) + Q_m(x) = (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \dots + c_sx^s, \quad x = ma.$$

$$c_s = a_s + b_s, a_s = 0, \text{ если } s > n \text{ и } b_s = 0, \text{ если } s > m$$

Так определенное сложение многочленов коммутативно и ассоциативно.

Имеется нулевой элемент $0 = 0 \cdot x + \dots + 0 \cdot x^n$, а также противоположный $(-P_n(x)) = (-a_0) + (-a_1)x + \dots + (-a_n)x^n$

3. Произведением двух многочленов называют многочлен, составленный из произведения всех членов первого сомножителя на все члены второго.

$$P_n(x) \cdot Q_m(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots + \left(\sum_{j=k+l} a_kb_l \right) x^j + \dots + a_nb_mx^{n+m}$$

- Покажем, что так определенное умножение будет коммутативно и ассоциативно:

$$P_n(x) \cdot Q_m(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots + \left(\sum_{j=k+l} a_kb_l \right) x^j + \dots + a_nb_mx^{n+m}$$

В сумме $\sum_{j=k+l} a_kb_l$ заменим $k \leftrightarrow l \Rightarrow \sum_{j=k+l} b_ka_l = \sum_{j=k+l} b_la_k = \sum_{j=k+l} a_lb_k \stackrel{1)}{\Rightarrow} P_n(x) \cdot Q_m(x) = Q_m(x) \cdot P_n(x) \Rightarrow$ коммутативно.

Пусть $R_s(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_sx^s \Rightarrow (P_n(x) \cdot Q_m(x)) \cdot R_s(x) = ((a-)b_0)c_0 + \left(\sum_{\gamma=j+\sigma} \left(\sum_{j=k+l} a_k b_l \right) c_\sigma \right) x^\gamma + (a_n b_m) c_s x^{n+m+s}$, $j = 1, \dots, n+m+s-1$. Так как $\sum_{\gamma=j+\sigma} \left(\sum_{j=k+l} a_k b_l \right) c_\sigma = \sum_{\gamma=k+l+\sigma} a_k (b_l c_\sigma)$.
Пусть $l' = l + \sigma \Rightarrow \sum_{\gamma=k+l+\sigma} a_k (b_l c_\sigma) = \sum_{\gamma=k+l'} a_k \left(\sum_{l'=l+\sigma} b_l c_\sigma \right) \xRightarrow{1} (P_n(x) \cdot Q_m(x)) R_s(x) = P_n(x) \cdot (Q_m(x) \cdot R_s(x))$ — ассоциативно.

- Дистрибутивность аналогично (везде используются свойства одночленов)

Таким образом так построенное множество многочленов от x над A будет ассоциативным и коммутативным кольцом $A(x)$. Роль единицы в $A(x)$ играет единица из A .

При построении кольца многочленов вместо x положим $p = \frac{d}{dx}$ — оператор дифференцирования, который действует на множестве бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций. $p \cdot f(x) = p(f(x)) = \frac{df}{dx} = f'$, $p^2(f) = f''$, \dots , $p^n n(x) = f^{(n)}$; Справедлива формула $p^s \cdot p^m(f) = p^s \cdot (p^m(f)) = p^s \cdot (f^{(m)}) = f^{(m+s)} = p^{m+s}(f)$

По определению, множество бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций Φ является кольцом, содержащим поле \mathbb{C} . В качестве элементов кольца A будем брать числа из \mathbb{C} . Роль операторного одночлена в таком случае будет играть ap^m , $a \in \mathbb{C}$; $ap^m = p^m a$, так как $ap^m(f) = af^{(m)} = f^{(m)} \cdot a = p^m(f) \cdot a$; По определению положим $ap^0 = a$, что корректно, так как $ap^0 f = ap^0(f) = af = a \cdot f = a(f)$. Приведение подобных слагаемых для одночленов определим как $ap^m + bp^m = (a+b)p^m$, поскольку $(ap^{(m)})(f) + bp^{(m)}(f) = af^{(m)} + bf^{(m)} = (a+b)f^{(m)} = ((a+b)p^m)(f)$

Аналогично вводим выражение, состоящее из нескольких операторных одночленов, соединенных знаком $+$, называемое операторным многочленом от p с коэффициентом из \mathbb{C} . Из свойств дифференцирования следует, что в общем виде можно записать $L_n(p) = a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n$

Абсолютно аналогично доказываем, что замена x на p дает множество операторных многочленов от p , которое будет кольцом из \mathbb{C}

- Пусть $x \in \mathbb{C}$. Значение многочлена $P_n(x)$ на \mathbb{C} определим как число $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in \mathbb{C}$.

Понятие значения многочлена можно обобщить на случай, когда B является ассоциативным кольцом, содержащим кольцо A , в случае, когда элементы A коммутируют с элементами из B .

В таком случае можно определить степень элемента кольца B . Пусть $a \in B$, $a^1 = a$, $a^2 = a \cdot a$, \dots , $a^n = a^{n-1} \cdot a$

Теорема 3.1. $\forall k \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} \rightarrow a^k \cdot a^m = a^k + m$

- Значение операторного многочлена $L_n(p)$ определим на коммутативном и ассоциативном кольце Φ — бесконечно дифференцируемой комплекснозначной функцией от $x \in \mathbb{R}$: $f(x)$

$$L_n(F) = L_n(p)(f) = a_0 f + a_1 f' + \dots + a_n f^{(n)} \in \Phi$$

- Если $F(p) = L_n(p) + M_m(p)$ определим сумму на множестве дифф. операторов:

$$F(p) = (a_0 + b_0)f + (a_1 + b_1)f' + \dots + c_s f = L_n(p)(f) + M_m(p)(f) \Rightarrow (L_n(p) + M_m(p))(f) = (M_m(p) + N_m(p))(f)$$

коммутативно, ассоциативность аналогично/.

- $(L_n(p)M_m(p))(f) = (a_0b_0p^0 + (a_0b_1 + a_1b_0)p + \dots + (\sum_{j=k+l} a_kb_l)p^j + \dots + a_nb_mp^{m+n})(f) =$
 $a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)f' + \dots + (\sum_{j=k+l} a_kb_l)f^{(j)} + \dots + a_nb_mf^{(n+m)} = (a_0p^0 + a_1p + \dots + a_np^n) \cdot$
 $(b_0f + b_1f' + \dots + b_mf^{(m)}) = L_n(p) \cdot (M_m(f))$ — определение действия произведения операторов на множестве Φ . Так как $a_0b_0f + (a_0b_1 + a_1b_0)f' + \dots + (\sum_{j=k+l} a_kb_l)f^{(j)} + \dots +$
 $a_nb_mf^{(m+n)} = M_m(p) \cdot (a_0f + a_1f' + \dots + a_nf^{(n)}) \Rightarrow (L_n(p) \cdot M_m(p)) = (M_m(p) \cdot L_n(p))$ — коммутативность.

- Покажем ассоциативность и дистрибутивность

$$L_n(p) \cdot M_m(p) K_s(p)(f) = (L_n(p) \cdot M_m(p))(K_s(p)(f)) = L_n(p)(M_m(p)(K_s(p)(f))) = L_n(p)(Q_m(p)R_s(p)(f)) \quad (51)$$

ассоциативность.

$$L_n(p) + M_m(p) K_s(p)(f) = L_n(p)(K_s(p)(f)) + M_m(p)(K_s(p)(f)) = (L_n(p)K_s(p))(f) + (M_m(p)K_s(p))(f)$$

дистрибутивность \cdot и $+$.

Таким образом множество значений операторных многочленов является кольцом, которое содержится в Φ

- Если для $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ из $A(x)$ $\exists R_s(x) \in A(x) : P_n(x) = Q_m(x) \cdot R_s(x)$, то говорят, что $P_n(x)$ делится на $Q_m(x)$.

Теорема 3.2.

$$P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \in A(x), c \in A \Rightarrow \exists! Q_m(x), r \in \mathbb{C} : P_n(x) = (x-c)Q_m(x) + r$$

Теорема 3.3. (Безу) $P_n(x)$ делится на $x - c \Leftrightarrow P_n(c) = 0$

Теорема 3.4. Если кольцо A является областью целостности, то число корней $P_n(x)$ не превосходит n

Теорема 3.5. Основная теорема алгебры

Любой многочлен $P_n(x)$ над \mathbb{C} имеет хотя бы один корень

Утверждение 3.5. Из 3 и 5 теоремы

$$\forall P_n(x) \rightarrow P_n(x) = a_n(x - c_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x - c_k)^{l_k} \quad (52)$$

- Взаимооднозначное соответствие φ кольца K на кольцо K' называется изоморфизмом, если $\forall a \in K$ и $\forall b \in K' \rightarrow$

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \quad \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \quad (53)$$

Из (53) следует что образом нуля кольца K будет нуль K' : $\varphi(a) = a' \in K'$ и $\varphi(0) = c'$, $\varphi(a) = a' = \varphi(a + 0) = \varphi(a) + \varphi(0) = a' + c' \Rightarrow c' = 0$

Если кольцо K имеет единицу, то $\varphi(1)$ будет единицей кольца K' : $\varphi(a) = a' = \varphi(1 \cdot a) = \varphi(1) \cdot \varphi(a) = \varphi(1)a' \Rightarrow \varphi(1) =$ единица K'

- Обратное отображение φ^{-1} кольца K' на K существует и будет изоморфно.

Рассмотрим отображение φ , которое множеству значений $P_n(x)$ над \mathbb{C} ставит в соответствие множество значений $L_n(p)$ на множестве бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций Φ по принципу:

$$\varphi(P_m(z)) = \varphi(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 z^0) = L_n(p)(f) = a_n f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \dots + a_0 f;$$

Покажем что отображение является изоморфизмом.

Отображение взаимнооднозначно по построению.

$$\begin{aligned} \varphi(P_n(z) + Q_m(z)) &= \varphi(a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m) = \varphi(a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)z + \dots + (a_s + b_s)z^s) \\ &= (a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)p + \dots + (a_s + b_s)p^s)(f) = L_n(p) + L_m(p)(f) \end{aligned}$$

$$\varphi(P_n(z) \cdot Q_m(z)) = \varphi(a_0 b_0 + \sum_{j=k+l} a_k b_l z^j + a_n b_m z^{m+n}) = (a_0 b_0 + \sum_{j=k+l} a_k b_l p^j + a_n b_m p^{m+n})(f) = L_n(p) \cdot Q_m(p)$$

Т.о. φ – изоморфизм. Тогда из (53):

$$\varphi(P_n(x)) = \varphi(a_n(z - c_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (z - c_k)^{l_k}) = L_n(p)(f) = a_n \cdot (p - c_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (p - c_k)^{l_k}(f)$$

В итоге $L_n(p) = a_n \cdot (p - c_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (p - c_k)^{l_k}$, где c_1, \dots, c_k – корни $P_n(z)$

3.2 Линейные уравнения с потоянными коэффициентами

Рассмотрим ДУ вида: $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$, $a_n \neq 0$, где $a_i = \text{const} \ \forall i = \overline{1, n}$. Через введенный ранее дифференциальный оператор $L_n(p) = a_n p^n + \dots + a_0 p^0$ уравнение записывается в виде

$$L_n(p)(y(x)) = 0 \quad (2.1)$$

Было доказано, что $L_n(p)$ является изоморфизмом характеристического многочлена (2.1): $P_n(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_0 = a_n(\lambda - \lambda_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{l_k}$ и поэтому для $L_n(p)$ справедливо разложение

$$L_n(p) = a_n(p - \lambda_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (p - \lambda_k)^{l_k}, \quad p = \frac{d}{dx} \quad (2.2)$$

Задача: найти ФСР (2.1). Из записи $L_n(p)$ ясно, что решением (2.1) будут функции из Φ , котрые являются корнями $L_n(p)$

Лемма 3.1. Для любой n раз дифференцируемой на промежутке функции $f(x)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ выполняется "формула сдвига"

$$L_n(p)(e^{\lambda x} f) = e^{\lambda x} \cdot L_n(p + \lambda)(f) \quad (2.3)$$

Доказательство. Докажем по индукции. База $n = 1$:

$$L_1(p)(e^{\lambda x} f) = (a_1 p^1 + a_0)(e^{\lambda x} f) = e^{\lambda x}(a_0 f + a_1(\lambda f + f')) = e^{\lambda x}(a_1(p + \lambda) + a_0)(f) = e^{\lambda x} L_1(p + \lambda)(f)$$

Пусть (2.3) справедлива для $k = n - 1$, то есть $L_{n-1}(p)(e^{\lambda x} f) = e^{\lambda x} L_{n-1}(p + \lambda)(f)$

Обозначим $L_n(p) = p - \lambda_1$, тогда по формуле (2.2) :

$$L_n(p) = a_n(p - \lambda_1) \cdot (p - \lambda_1)^{l_1-1} \cdot \dots \cdot (p - \lambda_m)^{l_m} \cdot \dots \cdot (p - \lambda_k)^{l_k} = L_1(p) \cdot L_{n-1}(p) = L_{n-1}(p) \cdot L_1(p)$$

$$\text{Тогда } L_n(p)(e^{\lambda x} f) = L_{n-1}(p) \cdot L_1(p)(e^{\lambda x} f(x)) = L_{n-1}(p)(L_1(p)(e^{\lambda x} f)) \underset{\text{база}}{=} L_{n-1}(p)(e^{\lambda x} \cdot (p + \lambda)(f))$$

Обозначим через $g(x) = L_1(p + \lambda)(f(x))$, имеем:

$$L_n(p)(e^{\lambda x} f) = L_{n-1}(p)(e^{\lambda x} g(x)) \underset{\text{индукция}}{=} e^{\lambda x} L_{n-1}(p + \lambda)(g) = e^{\lambda x} L_{n-1}(p + \lambda)(L_1(p + \lambda)(f)) = e^{\lambda x} (L_{n-1}(p + \lambda)(L_1(p + \lambda)(f)))$$

■

Теорема 3.6. Если λ_m является корнем $L_n(\lambda)$ кратности l_m , то функции $e^{\lambda_m x}, xe^{\lambda_m x}, \dots, x^{l_m-1}e^{\lambda_m x}$ являются решениями (2.2)

Доказательство. Из коммутативности и ассоциативности кольца операторных многочленов и формулы (2.3): $L_n(p) = a_n(p - \lambda_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (p - \lambda_m)^{l_m} \cdot \dots \cdot (p - \lambda_k)^{l_k} = L_{n-l_m}(p)(p - \lambda_m)^{l_m}$

Воспользуемся формулой сдвига для $x^s e^{\lambda_m x}$:

$$L_n(p)(x^s e^{\lambda_m x}) = e^{\lambda_m x} \cdot L_{n-l_m}(p + \lambda_m) \cdot p^{l_m}(x^s) = e^{\lambda_m x} \cdot L_{n-l_m}(p + \lambda_m)(x^s)^{(l_m)} = \begin{cases} 0, & \forall s \leq l_m - 1 \\ e^{\lambda_m x} \cdot P_{n-l_m}(x), & s \geq l_m \end{cases}$$

где P_{n-l_m} многочлен степени не ниже $n - l_m$

Таким образом $x^s e^{\lambda_m x}$, $s = \overline{q, l_m - 1}$ являются корнями $L - n(p)$, а значит и решениями (2.1) ■

Из доказанной теоремы следует:

$$\left\{ \{e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{l_1-1} e^{\lambda_1 x}\}, \dots, \{e^{\lambda_m x}, \dots, x^{l_m-1} e^{\lambda_m x}\}, \dots, \{e^{\lambda_k x}, \dots, x^{l_k-q} e^{\lambda_k x}\} \right\} \quad (2.4)$$

будут решениями (2.2). Всего таких функций n штук. Докажем линейную независимость систем функций (2.4)

Лемма 3.2. Система q, x, \dots, x^m линейно независима.

Доказательство. Рассмотрим линейную комбинацию функций $C_0 + C_1 x + \dots + C_n x^n = 0$

От противного: пусть $\exists C_0, \dots, C_n : \sum_{i=0}^n C_i^2 \neq 0 : C_0 + C_1 x + \dots + C_n x^n = 0 \quad \forall x$

Так как у многочлена степени n не более чем n нулей, то получаем противоречие ■

Теорема 3.7. Система функций $P_{n1}(x)e^{\lambda_1 x}, \dots, P_{ns}(x)e^{\lambda_s x}$, где $P_{ni}(x)$ является многочленом степени n_i , а все $\lambda_i \in \mathbb{C}$ разные, является ЛНЗ.

Доказательство. Выражение $P_n(x)e^{\lambda x}$ — квазисногочлен степени n , $\lambda \in \mathbb{C}$, коэффициенты $P_n(x) \in \Phi$ Рассмотрим $(P_n(x)e^{\lambda x})' = \lambda \cdot P_n(x)e^{\lambda x} + e^{\lambda x} \overline{P}_{n-1}(x) = e^{\lambda x}(\lambda P_n(x) + \overline{P}_{n-1}(x)) = \tilde{P}_n(e^{\lambda x})$

То есть, если будем дифференцировать степень n , то останемся в множестве квазимногочленов степени n .

Докажем по индукции. База $n = 1$ — выполнена по Лемме (3.2). Пусть выполнено для $n = s-1$: система из $s-1$ квазимногочленов является ЛНЗ системой: $P_{n1}(x)e^{\lambda_1 x}, \dots, P_{n_{s-1}}(x)e^{\lambda_{s-1} x}$ — ЛНЗ.

Для n . От противного: пусть система $P_{n1}(x)e^{\lambda_1 x}, \dots, P_{n_{s-1}}(x)e^{\lambda_{s-1} x}, P_{ns}(x)e^{\lambda_s x}$ является линейно зависимой, тогда $\exists C_1, \dots, C_l, \dots, C_s :$

$$C_1 P_{n1}(x)e^{\lambda_1 x} + C_2 P_{n2}(x)e^{\lambda_2 x} + \dots + C_l P_{nl}(x)e^{\lambda_l x} + \dots + C_s P_{ns}(x)e^{\lambda_s x} = 0 \quad (2.5)$$

и хотя бы одна константа, например $C_l \neq 0$ Из (2.5), перенося C_l вправо и деля на $C_l e^{\lambda_l x}$ получаем:

$$\overline{C}_1 P_{n1}(x)e^{\omega_1 x} + \dots + \overline{C}_s P_{ns}(x)e^{\omega_s x} = -P_{nl}(x)$$

где $\overline{C}_i = \frac{C_i}{C_l e^{\lambda_l x}}, \omega_i = \lambda_i - \lambda_l$

Продифференцируем n_{l+1} раз последнее тождество. Перенумеровав $s-1$ слагаемое в левой части получим $\overline{C}_1 \cdot \tilde{P}_n(x)e^{\omega_1 x} + \dots + \overline{C}_{s-1} \cdot \tilde{P}_{n_{s-1}}(x)e^{\omega_{s-1} x} = 0$

По определению индукции последнее равенство возможно, только если все $\overline{C}_i = 0$, $\overline{C}_i = \frac{C_i}{C_l}; C_l \neq 0 \Rightarrow C_i = 0, i = 1, \dots, l-1, l+1, \dots, s \xRightarrow{(2.5)} C_l = 0$ — противоречие предположению индукции о линейной независимости системы $P_{n1}(x)e^{\lambda_1 x}, \dots, P_{n_{s-1}}(x)e^{\lambda_{s-1} x}$ ■

Таким образом ФСР дифференциального уравнения (2.1) будет состоять из функций набора

$$\left\{ \{e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{l_1-1} e^{\lambda_1 x}\}, \dots, \{e^{\lambda_m x}, \dots, x^{l_m-1} e^{\lambda_m x}\}, \dots, \{e^{\lambda_k x}, \dots, x^{l_k-1} e^{\lambda_k x}\} \right\},$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \dots, \lambda_k$ — корни характеристического многочлена $P_n(\lambda)$ кратности $l_1, \dots, l_m, \dots, l_k$

Общее решение (2.1) будет иметь вид

$$y_0 = e^{\lambda_1 x} \left(\sum_{m=1}^{l_1-1} C_m^1 x^m \right) + \dots + e^{\lambda_k x} \left(\sum_{m=1}^{l_k-1} C_m^k x^m \right) \quad (2.6)$$

Фигурирующие в (2.6) константы C_i^j , вообще говоря, могут быть комплексными, если корни $P_n(\lambda)$ являются комплекснозначными. Если изначально ставится задача — найти решение ДУ во множестве действительных функций действительного переменного, то в случае комплексных корней возникает задача выделить из множества комплексных решений действительное. Это осуществимо, так как коэффициенты $P_n(\lambda)$ являются действительными числами.

Пусть $\lambda_m = \alpha + \beta i$ — корень характеристического многочлена кратности i . Ему соответствуют $\varphi_m^i = x^i e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$; $\varphi_m^i, \bar{\varphi}_m^i$ — ЛНЗ, $i = \overline{0, l-1}$

Рассмотрим функции

$$\Psi_m^i = \frac{\varphi_m^i + \bar{\varphi}_m^i}{2} = e^{\alpha x} \cdot x^i \cos \beta x = \operatorname{Re}(\varphi_m^i)$$

$$\chi_m^i = \frac{\varphi_m^i - \bar{\varphi}_m^i}{2} = e^{\alpha x} \cdot x^i \sin \beta x = \operatorname{Im}(\varphi_m^i)$$

Так как любая суперпозиция решений (2.2) в силу его линейности тоже является решением, то χ_m^i и Ψ_m^i являются линейно независимыми и действительными решениями (2.2). Таким образом, чтобы получить действительную ФСР, необходимо все φ_m^i и $\bar{\varphi}_m^i$, $i = \overline{0, l_m}$ $m = \overline{1, k}$ отвечающих паре комплексных корней характеристического многочлена $\alpha \pm i\beta$ кратности l заменить на вещественные $\operatorname{Re}(\varphi_m^i)$ и $\operatorname{Im}(\varphi_m^i)$. Если считать, что $\lambda_i = \alpha_i \pm i\beta_i$ — корень $P_n(\lambda)$ кратности l_i , то общее решение (2.2) имеет вид:

$$y_0 = e^{\alpha_1 x} \left(\sum_{j=0}^{l_1-1} x^j (A_j^1 \cos \beta_1 x + B_j^1 \sin \beta_1 x) \right) + \dots + e^{\lambda_k x} \left(\sum_{j=0}^{l_k-1} x^j (A_j^k \cos \beta_k x + B_j^k \sin \beta_k x) \right) \quad (2.7)$$

3.3 Неоднородные линейные уравнения

Рассмотрим уравнение вида: $L_n(p)(y(x)) = f(x)$

Лемма 3.3. Пусть неоднородность имеет вид $f(x) = \sum_{k=1}^m f_k(x)$ и $y_k^s(x)$ — частное решение

$$L_n(p)(y(x)) = f_k(x), \quad k = \overline{1, m}, \text{ то есть } L_n(p)(y_k^s(x)) = f_k(x)$$

$$\text{Тогда частное решение уравнения имеет вид } y^s(x) = \sum_{k=1}^m y_k^s(x).$$

$$\text{Доказательство. } L_n(p) \left(\sum_{k=1}^m y_k^s(x) \right) \stackrel{\text{linear}}{=} \sum_{k=1}^m L_n(p)(y_k^s(x)) = \sum_{k=1}^m f_k(x) = f(x) \quad \blacksquare$$

Примечание. Утверждение леммы остается верным и в случае переменных коэффициентов в $L_n(p)$.

Определение 3.2. Пусть $f(x) = \sum_{i=1}^n P_{n_i}(x)e^{\lambda x}$, где P_{n_i} — многочлен степени n_i с комплексными коэффициентами, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда $f(x)$ называется квазимногочленом.

Рассмотрим ДУ:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = L_n(p)(y(x)) = (b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_0) e^{\lambda x} = P_k(x) e^{\lambda x} \quad (1)$$

Теорема 3.8. Частное решение (1) можно найти в виде

$$y^s(x) = x^r (C_k x^k + C_{k-1} x^{k-1} + \dots + C_0) e^{\lambda x} \quad (2)$$

где $r = l_m$, если $\lambda = \lambda_m$, $m = \overline{1, s}$ — корень $P_n(\lambda)$

$r = 0$, если $\lambda \neq \lambda_m$; Неопределенность константы $C_k \dots, C_0$ находятся из системы с треугольной матрицей.

Доказательство. • $\lambda_m = \lambda$

Подставим (2) в (1) и воспользуемся формулой сдвига.

$$y^s(x) x^r (C_k x^k + C_{k-1} x^{k-1} + \dots + C_0) e^{\lambda x}$$

Оператор примет вид:

$$\begin{aligned} L_n(p)(y^s(x)) &= (a_n(p-\lambda_1)^{l_1} \dots (p-\lambda_s)^{l_s})(y^s(x)) = L_{n-l_m}(p) \cdot (p-\lambda_m)^{l_m}(y^s(x)) \quad \text{формула сдвига} \\ &\quad \text{(к оператору)} \\ &= e^{\lambda_m x} L_{n-l_m}(p + \lambda_m) \frac{d^{l_m}}{dx^{l_m}} (C_k x^{r+k} + C_{k-1} x^{r+k-1} + \dots + C_0 x^r) \end{aligned}$$

Уравнение в таком виде имеет вид:

$$e^{\lambda x} L_{n-l_m}(p)(p + \lambda_m) \frac{d^{l_m}}{dx^{l_m}} (C_k x^{r+k} + C_{k-1} x^{r+k-1} + \dots + C_0 x^r) \equiv e^{\lambda_m x} (b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_0)$$

$$\text{где } L_{n-l_m}(p + \lambda_m) = a_0(p + \lambda_m)^0 + \dots + a_{n-l_m}(p + \lambda_m)^{n-l_m} = d_0 p^0 + \dots + d_{n-l_m} p^{n-l_m}$$

Сократим на $e^{\lambda_m x}$ и выполним дифференцирование $\frac{d^{l_m}}{dx^{l_m}}$ с учетом того, что $r = l_m$

$$\begin{aligned} (d_0 p^0 + \dots + d_{n-l_m} p^{n-l_m}) (A_k C_k x^k + A_{k-1} C_{k-1} x^{k-1} + \dots) &= A_k C_k d_0 x^k + (k A_k C_k d_1 + A_{k-1} C_{k-1} d_0) x^{k-1} + \dots \\ &\equiv b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots \end{aligned}$$

$$\text{где } A_k = (k + l_m)(k + l_m - 1) \cdot \dots \cdot (k + 1)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x и получим систему

$$\text{система с треугольной матрицей} \begin{cases} A_k C_k d_0 = b_k \\ A_{k-1} C_{k-1} d_0 + k A_k C_k d_1 = b_{k-1} \end{cases} \quad (54)$$

• $\lambda \neq \lambda_m$

$$y^s = e^{\lambda x} (C_k x^k + C_{k-1} x^{k-1} + \dots + C_0)$$

После формулы сдвига $e^{\lambda x} L_n(p + \lambda)(f) \Rightarrow$

$$L_n(p + \lambda_m) = (a_0(p + \lambda_m)^0 + \dots + a_n(p + \lambda_m)^n) = d_0 p^0 + d_1 p + \dots + d_n p^n \Rightarrow$$

уравнение примет вид:

$$e^{\lambda x}(d_0 p^0 + d_1 p + \dots + d_n p^n)(C_k x^k + C_{k-1} x^{k-1} + \dots + C_0) \equiv (b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_0) e^{\lambda x} \Rightarrow$$

$$C_k d_0 x^k + (k C_k d_1 + C_{k-1} d_0) x^{k-1} + \dots \equiv b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots$$

После приравнивая коэффициентов при одинаковых степенях x :

$$\text{Система с треугольной матрицей} \begin{cases} C_k d_0 = b_k \\ C_{k-1} d_0 + k C_k d_1 = b_{k-1} \end{cases} \quad (55)$$

■

3.4 Уравнение Эйлера

Примечание. Источник: В. М. Ипатова, О. А. Пыркова, В. Н. Седов "ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ"

Определение 3.3. Уравнением Эйлера называется линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами вида $a_k(x) = b_k x^{n-k}$, $k = \overline{0, n}$, где b_0, b_1, \dots, b_n — заданные числа, причем $b_0 \neq 0$:

$$b_0 x^n y^{(n)} + b_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + n_{n-1} x y' + b_n y = f(x) \quad (3.1)$$

Заменой $x = e^t$ ($t = \ln x$) (3.1) сводится к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Действительно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt} = e^{-t} \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = e^{-t} \frac{d}{dt} \left(e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) = e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

Допустим, что k -я производная имеет вид

$$\frac{d^k y}{dx^k} = e^{-kt} \left(\frac{d^k y}{dt^k} + \alpha_1 \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}} + \dots + \alpha_{k-1} \frac{dy}{dt} \right) = \frac{1}{x^k} \left(\frac{d^k y}{dt^k} + \alpha_1 \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}} + \dots + \alpha_{k-1} \frac{dy}{dt} \right) \quad \text{где } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1} - \text{постоянны}$$

Тогда $(k+1)$ -я производная будет равна

$$\frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^k y}{dx^k} \right) = e^{-t} \frac{d}{dt} \left(\frac{d^k y}{dx^k} \right) = e^{-(k+1)t} \left(\frac{d^{k+1} y}{dt^{k+1}} + (\alpha_1 - k) \frac{d^k y}{dt^k} + \dots + k \alpha_{k-1} \frac{dy}{dt} \right) = \quad (56)$$

$$= \frac{1}{x^{k+1}} \left(\frac{d^{k+1} y}{dt^{k+1}} + (\alpha_1 - k) \frac{d^k y}{dt^k} + \dots + k \alpha_{k-1} \frac{dy}{dt} \right) \quad (57)$$

Так как в преобразованном уравнении, в случае отсутствия кратных корней характеристического уравнения, решения имеют вид $y = e^{\lambda t}$, следовательно, в исходном уравнении они имеют вид $y = x^\lambda$. Поэтому можно непосредственно подставить его в уравнение Эйлера (3.1). Поскольку $x^k \frac{d^k x^\lambda}{dx^k} = \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-k+1)$ при $k \leq \lambda$, то характеристическое уравнение имеет вид

$$b_0 \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-n+1) + \dots + b_{n-1} \lambda(\lambda-1) + b_{n-1} \lambda + b_n = 1 \quad (3.2)$$

Каждому простому корню λ уравнения (3.2) соответствует частное решение однородного уравнения Эйлера x^λ ; каждому действительному корню λ кратности l ($l \geq 2$) соответствует l линейно независимых частных решений однородного уравнения Эйлера $x^\lambda, x^\lambda \ln x, \dots, x^\lambda (\ln x)^{l-1}$. В случае невещественных корней λ надо учитывать, что $x^{i\beta} = e^{i\beta \ln x}$, таким образом паре комплексно сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ уравнения (3.2) будут соответствовать два решения однородного уравнения Эйлера $x^\alpha \cos(\beta \ln x)$ и $x^\alpha \sin(\beta \ln x)$

3.5 Матричная экспонента, ее свойства и применение к решению нормальных линейных систем

3.5.1 Матричная экспонента

Необходимо решить ОЛДУ вида:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \quad (58)$$

Если $A(t) = \|a_j^i\|$, $a_j^i \in \mathbf{R}$, $i, j = 1, \dots, n$, тогда:

$$\begin{aligned} \vec{x}_0 &= E\vec{x}_0, \vec{x}_1 = E\vec{x}_0 + \frac{t-t_0}{1!}A\vec{x}_0 = \left(E + \frac{t-t_0}{1!}A\right)\vec{x}_0, \\ \vec{x}_n &= \left(E + \frac{t-t_0}{1!}A + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n\right)\vec{x}_0, \end{aligned}$$

Этот процесс будет сходиться к задаче Коши с решением:

$$\vec{x} = \left(E + \frac{t-t_0}{1!}A + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n + \dots\right)\vec{x}_0 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n\right)\vec{x}_0,$$

при условии, что $A^0 = E$.

Определение 3.4. Матричной экспонентой называют следующий степенной ряд:

$$e^{(t-t_0)A} = E + \frac{t-t_0}{1!}A + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n.$$

3.5.2 Свойства матричной экспоненты

Это квадратная матрица, по размерам аналогична матрице A , и каждый элемент этой матрицы представляет из себя степенной ряд с радиусом сходимости $+\infty$.

1. Решение задачи Коши для (58), если $A = const$:

$$\vec{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{x}_0, (\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0).$$

2. $e^{0A} = E$.
3. $e^{(t_1+t_2)A} = e^{t_1A}e^{t_2A} \Rightarrow e^{t_1A}e^{t_2A} = e^{t_2A}e^{t_1A}$ (коммутативность).
4. $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$.
5. $(e^{tA})' = Ae^{tA} = e^{tA}A$.

Доказательство. Так как квадратные матрицы составляют определенное кольцо, то $A^{n+m} = A^n A^m = A^m A^n$.

- 1.
2. $e^{tA} = E + \frac{t-t_0}{1!}A + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n + \dots$, если $t = 0$:

$$e^{0A} = E + 0 + \dots = E$$

3. рассматриваем (58), если $\vec{x}(t)$ - решение этого ДУ, то $\vec{x}(t + t_0)$ тоже решение этого ДУ $\forall t_0 \in \mathbf{R}$. ($u = t + t_0$) :

$$\frac{d\vec{x}(t + t_0)}{dt} = \frac{d\vec{x}}{du} \frac{du}{dt} = \frac{d\vec{x}}{du} = A\vec{x}(u) = A\vec{x}(t + t_0).$$

Тогда (58), с задачей Коши $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ имеет решение:

$$\vec{x}(t) = e^{tA} \vec{x}_0,$$

$$\vec{x}(t + t_0) = e^{(t+t_0)A} \vec{x}_0 - \text{решение } \frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}.$$

Рассмотрим тогда тоже самое уравнение для функции $z(t)$:

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = A\vec{z}, \text{ с задачей Коши } \vec{z}(0) = e^{t_0 A} \vec{x}_0 \Rightarrow \vec{z}(t) = e^{tA} (e^{t_0 A} \vec{x}_0) = (e^{tA} e^{t_0 A}) \vec{x}_0.$$

Рассмотрим это решение в нуле:

$$\vec{x}(0 + t_0) = e^{t_0 A} \vec{x}_0,$$

из основной теоремы следует, что $\vec{x}(t + t_0) = \vec{z}(t) \forall t$.

Тогда и получается основная формула:

$$\vec{x}(t + t_0) = e^{(t+t_0)A} \vec{x}_0 = (e^{tA} e^{t_0 A}) \vec{x}_0$$

4. $E = e^{0A} = e^{(t-t)A} = e^{tA} e^{-tA} = E \Rightarrow (e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$.
5. Берем представление матричной экспоненты в виде степенного ряда, который можно дифференцировать, тогда получаем:

$$(e^{tA})' = A + tA^2 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^n + \dots = A \left(E + tA + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^{n-1} \right),$$

$$(e^{tA})' = A e^{tA} = e^{tA} A.$$

■

Примечание. Формула $e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}$ не имеет места, кроме случая, если $AB = BA$ (т.е. матрицы коммутативны).

3.5.3 Применение к решению нормальных линейных систем

Теорема 3.9. Пусть S - матрица перехода от исходного базиса к новому базису. Тогда в новой базисе $\bar{A} = S^{-1}AS$, или $A = S\bar{A}S^{-1}$. И главное:

$$e^{tA} = S^{-1}e^{t\bar{A}}S.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \left(E + tA + \dots + \frac{t^n}{n!}A^n \right) = \left(E + tS^{-1}e^{t\bar{A}}S + \dots + \frac{t^n}{n!}(S^{-1}e^{t\bar{A}}S)^n \right), \\ (S\bar{A}S^{-1})^n &= S\bar{A}^nS^{-1}, SES^{-1} = SS^{-1} = E \\ e^{tA} &= S^{-1}e^{t\bar{A}}S. \end{aligned}$$

■

Для решения нормальных линейных систем методом матричной экспоненты мы будем находить собственные вектора.

Матрица A в базисе из собственных векторов (если они соответствуют действительным собственным значениям) будет иметь диагональный вид. Произведение диагональной матрицы на диагональную – диагональная. Тогда для случая без кратных корней:

$$e^{tA} = E + t \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + \frac{t^2}{2!} \cdot \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2).$$

$$e^{tA} = \text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}).$$

Если λ – корень кратности l , то матрица A приводится к Жордановой клетке (диагональная матрица с единицами над главной диагональю).

$$A = \lambda E + B \Rightarrow B = A - \lambda E.$$

$$e^{tA} = e^{t(\lambda E + B)} = e^{t\lambda E}e^{tB}, e^{t\lambda E} = \text{diag}(e^{t\lambda}, \dots, e^{t\lambda}), e^{tB} = E + tB + \dots + \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}B^{l-1} + 0$$

$$\text{тогда } e^{tA} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots \\ & & \dots & \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} \\ 0 & & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Метод решения линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами (матричный метод вариации постоянной)

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}(t), \text{ решение будем искать в виде } \vec{x}(t) = e^{tA}\vec{C}(t),$$

$$\text{тогда } Ae^{tA}\vec{C}(t) + e^{tA}\dot{\vec{C}}(t) = Ae^{tA}\vec{C} + \vec{f}(t),$$

$$e^{tA}\dot{\vec{C}}(t) = \vec{f}(t) \Rightarrow \dot{\vec{C}}(t) = (e^{tA})^{-1}\vec{f}(t) = e^{-tA}\vec{f}(t).$$

4 Билет 4. Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

4.1 Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной линейной системы уравнений и для линейного уравнения n -го порядка в нормальном виде

Рассматривается система вида

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{q}(t), \quad (59)$$

где $A = \|a_j^i(t)\|$, $i, j = 1, \vec{n}$ – матрица, $\vec{q}(t)$ – заданная вектор-функция. Наряду с векторной записью также будем использовать координатную запись $x^i = \sum_{j=1}^n a_j^i x^j + q^i(t)$, $i = 1, \vec{n}$.

Необходимым условием линейности является факт того, что все A_j^i и q^i зависят только от t и не зависят от \vec{x} .

Для (59) ставится задача Коши:

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0.$$

Теорема 4.1. Основная теорема для линейных систем. Пусть $a_j^i(t)$, $i, j = 1, \vec{n}$ и $\vec{q}(t)$ в (59) непрерывны на отрезке $[a; b]$. Тогда решение задачи Коши существует и единственно на всем отрезке $[a; b]$.

Предварительные замечания:

Пусть вектор-функция $\vec{f}(x) \in B$ и A – линейный оператор, действующий из B в B , т.е. $A(\vec{f} + \vec{g}) = A\vec{f} + A\vec{g}$.

Определим норму оператора:

$$\|A\| = \sup_{\vec{\varphi} \in B, \vec{\varphi} \neq \vec{0}} \frac{\|A(\vec{\varphi})\|}{\|\vec{\varphi}\|}.$$

Тогда получаем неравенство: $\|A\| \|\vec{\varphi}\| \geq \|A(\vec{\varphi})\|$.

Нормой для вектор-функции выберем $\|\vec{x}(t)\| = \max_{1 \leq i \leq n} (\max_{t \in [a; b]} x^i(t))$, а нормой для оператора $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} (\max_{t \in [a; b]} \sum_{j=1}^n |a_j^i(t)|)$

Доказательство. Определим $\vec{g}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t \vec{q}(S) dS$ и построим итерационную процедуру.

Т.к. $q^i(t) \in C_{[a; b]} \forall i = 1, \vec{n} \Rightarrow \exists \|\vec{q}\|_c = M_1$. Тогда $\|\vec{g}\|_c = \|\vec{x}_0 + \int_{t_0}^t \vec{q}(S) dS\| \leq \|\vec{x}_0\| + \int_{t_0}^t \|\vec{q}(S)\| dS \leq \|\vec{x}_0\| + M_1(b - a) = C$.

Рассмотрим интегральное уравнение $\vec{x} = \vec{g} + \int_{t_0}^t A(s)\vec{x}(s) ds$.

Аналогично основной лемме доказывается, что последнее интегральное уравнение эквивалентно задаче (59).

Итерационная процедура: $\vec{x}_0 = \vec{g}$; $\vec{x}_k = \vec{g} + \int_{t_0}^t A(s)x_{k-1}(s)ds$, $k = 0, 1, \dots$

Оценим норму:

$$\|\vec{x}_1 - \vec{x}_0\| = \left\| \int_{t_0}^t A(s)\vec{g}(s)ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)\vec{g}(s)\|ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)\| \cdot \|\vec{g}(s)\|ds \right| \leq C_1 C |t - t_0|;$$

Таким образом $\|\vec{x}_1 - \vec{x}_0\| \leq C_1 C |t - t_0|$.

Теперь докажем по индукции неравенство: $\|\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}\| \leq \frac{C C_1^k}{k!} |t - t_0|^k$.

Базой индукции выступает полученное выше неравенство. Предположим, что верно для $n = k$, т.е.: $\|\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}\| \leq \frac{C C_1^k}{k!} |t - t_0|^k$.

Докажем для

$$\begin{aligned} n = k + 1 : \|\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k\| &= \left\| \int_{t_0}^t A(s)(\vec{x}_k(s) - \vec{x}_{k-1}(s))ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)(\vec{x}_k(s) - \vec{x}_{k-1}(s))\|ds \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)\| \cdot \|(\vec{x}_k(s) - \vec{x}_{k-1}(s))\|ds \right| \leq C \left| \int_{t_0}^t \frac{C_1 C^k |s - t_0|^k}{k!} ds \right| = \frac{C^{k+1} C_1 |t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

Т.к. $|t - t_0| \leq (b - a)$, то предыдущее неравенство можно усилить $\|\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}\| \leq \frac{C_1 C^k}{k!} (b - a)^k$.

Функциональная последовательность \vec{x}_k сходится равномерно, т.к. сходится равномерно ряд $\vec{x}_0 + (\vec{x}_1 - \vec{x}_0) + \dots + (\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}) + \dots$, который межорируется сходящимся рядом $\|\vec{x}_0\| + \|(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)\| + \dots + \|(\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1})\| + \dots \leq \|\vec{x}_0\| + C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C^k |b-a|^k}{k!} = \|\vec{x}_0\| + C_1 e^{C(b-a)} < \infty \Rightarrow$

Существует (в силу банаховости пр-ва) непрерывно дифф. $\varphi(t) : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n = \varphi(t)$.

Рассмотрим $\left\| \int_{t_0}^t A \vec{x}_n dS - \int_{t_0}^t A \vec{\varphi} dS \right\| = \left\| \int_{t_0}^t A(\vec{x}_n - \vec{\varphi}) dS \right\| \leq \|A\| \cdot \left| \int_{t_0}^t \|\vec{x}_n - \vec{\varphi}\| dS \right|$, где $\|\vec{x}_n - \vec{\varphi}\| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$.

Т.о. итерационная процедура сходится в силу существования пределов слева и справа.

Полученное решение эквивалентно решению задачи (59). В отличие от основной теоремы для нормальных систем ДУ: $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t, \vec{x})$, где существование было получено только на отрезке Пеано, для СЛДУ существование решения доказано для всего отрезка $[a; b]$ – промежутка, где $a_j^i(t)$ и $\vec{q}(t)$ непрерывны. В нашем случае \vec{f} соответствует $\vec{f} = A\vec{x} + \vec{q}$. Она непрерывна, т.к. полученное решение $\vec{x}(t)$ непрерывно. Условие непрерывности $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ также выполнены, т.к. в нашем случае $\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_{ij}(t)$ – непр. на $[a; b]$. Отсюда следует единственность, т.к. два решения задачи (59), согласно основной теореме для нормальных систем, совпадают на промежутке, где они оба определены. В нашем случае это $[a; b]$.

Т.о. теорема не носит локальных характер.

■

4.2 Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы

Будем рассматривать однородную систему ДУ вида:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}; \quad \dot{x}^i = \sum_{k=1}^n a_k^i x^k; \quad i, k = \overline{1, n} \quad (60)$$

Утверждение 4.1. Для однородных систем линейных уравнений верен принцип суперпозиций, т.е. если система функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – решение системы уравнений, то любая их линейная комбинация тоже является решением.

Доказательство. Введем оператор L такой, что $L = \frac{d}{dt} - A$. Тогда однородная система ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ запишется в виде $L(\vec{x}) = 0$, неоднородная система ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} - A\vec{x} = q(t)$ запишется в виде $L(\vec{x}) = q(t)$.

Пусть вектор-функции $\vec{\varphi}(t)$ и $\vec{\psi}(t)$ являются решениями системы $L(\vec{x}) = 0$, в таком случае справедливо

$$L(\vec{\varphi}(t)) = 0; \quad L(\vec{\psi}(t)) = 0$$

Рассмотрим вектор-функцию $\vec{\chi}(t) = a\vec{\varphi}(t) + b\vec{\psi}(t)$, где a и b – произвольные коэффициенты. Применим оператор L к получившейся вектор-функции:

$$\begin{aligned} L(\vec{\chi}(t)) &= \frac{d}{dt} (a\vec{\varphi}(t) + b\vec{\psi}(t)) - A(a\vec{\varphi}(t) + b\vec{\psi}(t)) = \\ &= a \left(\frac{d}{dt} \vec{\varphi}(t) - A\vec{\varphi}(t) \right) + b \left(\frac{d}{dt} \vec{\psi}(t) - A\vec{\psi}(t) \right) = \\ &= aL(\vec{\varphi}(t)) + bL(\vec{\psi}(t)) = 0 \end{aligned}$$

■

Определение 4.1. Пусть имеется система вектор-функций $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$

$$\vec{\varphi}_i(t) = \begin{pmatrix} \varphi_i^1(t) \\ \dots \\ \varphi_i^n(t) \end{pmatrix} \quad (61)$$

непрерывна на $I(x)$, тогда такая система называется линейно-зависимой на I , если

$$\exists C_1, \dots, C_n : \sum_{i=1}^n |C_i| \neq 0 \text{ \& } \sum_{i=1}^n C_i \vec{\varphi}_i(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

В противном случае, система вектор-функций называется линейно-независимой, то есть условие

$$\sum_{i=1}^n C_i \vec{\varphi}_i(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

выполняется только при $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$.

Определение 4.2. Пусть система вектор-функций $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$ линейно-независима на I и каждая вектор-функция $\vec{\varphi}_i(t)$ является решением системы ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$. Тогда такая система вектор-функций называется фундаментальной системой решений (ФСР) данной системы ДУ.

Теорема 4.2. Рассмотрим систему ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$. Если матрица A является непрерывной на отрезке $[a, b]$, то система имеет ФСР на этом отрезке.

Доказательство. матрица A является непрерывной на отрезке $[a, b]$, тогда, согласно основной теореме, на отрезке $[a, b]$ существует единственное решение задачи Коши.

Пусть система функций $\vec{\varphi}_1(t), \vec{\varphi}_2(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$ является решением системы при следующих заданных условиях:

$$\vec{\varphi}_1(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\varphi}_2(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{\varphi}_n(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (62)$$

тогда вронскиан такой системы в точке t_0 :

$$W(t_0) = |\vec{\varphi}_1(t_0), \vec{\varphi}_2(t_0), \dots, \vec{\varphi}_n(t_0)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad (63)$$

тогда, из свойства вронскиана следует, что данная система функций является линейно-независимой, а так как каждая функция является решением системы ДУ, эта система вектор-функций и есть ФСР системы ДУ. ■

Теорема 4.3. Пусть система вектор-функций $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$ является ФСР системы ДУ, тогда любое решение этой системы ДУ можно представить, как линейную комбинацию компонентов ФСР: $\vec{x}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$, где C_1, \dots, C_n – произвольные постоянные.

Доказательство. Так как для системы ДУ справедлив принцип суперпозиции, то вектор-функция $\vec{x}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$.

Предположим теперь, что существует функция $\vec{\chi}(t)$ такая, что она является решением системы ДУ, но не представима в виде $C_1\vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$. Пусть значение этой функции в точке t_0 :

$$\vec{\chi}(t_0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_1(t_0) \\ \chi_2(t_0) \\ \dots \\ \chi_n(t_0) \end{pmatrix} \quad (64)$$

Теперь составим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} C_1\varphi_1^1(t_0) + C_2\varphi_2^1(t_0) + \dots + C_n\varphi_n^1(t_0) = \alpha_1 \\ C_1\varphi_1^2(t_0) + C_2\varphi_2^2(t_0) + \dots + C_n\varphi_n^2(t_0) = \alpha_2 \\ \dots \\ C_1\varphi_1^n(t_0) + C_2\varphi_2^n(t_0) + \dots + C_n\varphi_n^n(t_0) = \alpha_n \end{cases} \quad (65)$$

где C_1, C_2, \dots, C_n – являются неизвестными, который надо найти. Определителем этой системы является

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} \varphi_1^1(t_0) & \varphi_2^1(t_0) & \dots & \varphi_n^1(t_0) \\ \varphi_1^2(t_0) & \varphi_2^2(t_0) & \dots & \varphi_n^2(t_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^n(t_0) & \varphi_2^n(t_0) & \dots & \varphi_n^n(t_0) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (66)$$

данный определитель не равен 0, поскольку функции $\vec{\varphi}_i$ $i = 1, \dots, n$ являются ФСР системы ДУ, поэтому числа C_1, C_2, \dots, C_n определяются однозначно.

С этими числами рассмотрим решение исходной системы ДУ, назовем его $\vec{z}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$. Поскольку $\vec{\chi}(t)$ и $\vec{z}(t)$ – являются решениями системы ДУ, по принципу суперпозиции функция $\vec{\psi}(t) = \vec{z}(t) - \vec{\chi}(t)$ так же является решением этой системы ДУ.

Заметим, что значение этой функции в точке t_0 : $\vec{\psi}(t_0) = \vec{z}(t_0) - \vec{\chi}(t_0) = 0$, заметим так же, что $\vec{0}$ является решением однородной системы системы $\frac{d}{dt}\vec{x} - A\vec{x}$. Тогда, в силу теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши, выполняется:

$$\begin{aligned}\vec{\psi}(t) &= 0 \quad \forall t \in I \Rightarrow \\ \vec{\psi}(t) &= \vec{z}(t) - \vec{\chi}(t) \equiv 0 \quad \forall t \in I \Rightarrow \\ \vec{z}(t) &= \vec{\chi}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + C_2\vec{\varphi}_2(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t)\end{aligned}$$

Мы получили противоречие с предположением о невозможности линейного представления решения $\vec{\chi}(t)$ через функции ФСР, таким образом, мы доказали, что любое решение системы ДУ можно представить, как линейную комбинацию компонентов ФСР. ■

Определение 4.3. Решение системы ДУ вида $\vec{x}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$, где C_1, \dots, C_n называется общим решением системы ДУ.

4.3 Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем

Введем оператор L такой, что $L = \frac{d}{dt} - A$. Тогда однородная система ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ запишется в виде $L(\vec{x}) = 0$, неоднородная система ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} - A\vec{x} = q(t)$ запишется в виде $L(\vec{x}) = q(t)$.

Утверждение 4.2. Общее решение неоднородной системы ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} - A\vec{x} = q(t)$ представляет собой следующее выражение:

$$\vec{x} = \vec{x}^s + \vec{x}_0^{ob} \quad (67)$$

где \vec{x}^s – частное решение линейного неоднородного уравнения, т. е. $L(\vec{x}^s) = q(t)$, а \vec{x}_0^{ob} – общее решение системы линейных **однородных** уравнений $L(\vec{x}_0^{ob}) = 0$. Таким образом, получаем:

$$L(\vec{x}) = L(\vec{x}^s + \vec{x}_0^{ob}) = L(\vec{x}^s) + L(\vec{x}_0^{ob}) = q(t) + 0$$

4.4 Определитель Вронского и его свойства

4.4.1 Определитель Вронского

Определение 4.4. Пусть на I определена система вектор-функций $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$, тогда определитель

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1^1(t) & \dots & \varphi_n^1(t) \\ \dots & & \dots \\ \varphi_1^n(t) & \dots & \varphi_n^n(t) \end{vmatrix} \quad (68)$$

называется определителем Вронского, где

$$\vec{\varphi}_i = \begin{pmatrix} \varphi_i^1 \\ \dots \\ \varphi_i^n \end{pmatrix} \quad (69)$$

другими словами

$$W(t) = |\vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_n| \quad (70)$$

Теорема 4.4. Если $\exists t_0 \in I : W(t_0) \neq 0$, то система является линейно независимой на I . Обратное неверно, пример:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ЛНЗ, но } W(t) = 0 \quad (71)$$

Доказательство. Будем доказывать от противного: пусть система является линейно-зависимой, тогда $\exists C_1, \dots, C_n : C_1 \vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n \vec{\varphi}_n(t) = 0 \forall t \in I$. Тогда в определителе Вронского $W(t)$ есть хотя бы два линейно-зависимых столбца, так как $\vec{\varphi}_i(t)$ являются столбцами определителя, но тогда получаем, что $W(t) = 0 \forall t \in I$ (хотя предполагалось, что $\exists t_0 \in I : W(t_0) \neq 0$). Таким образом, мы получили противоречие, откуда следует, что система является линейно независимой на I . ■

4.4.2 Свойства Вронскиана

1. Если $\exists t_0 \in I : W(t_0) \neq 0$, то система является линейно независимой на I (см. доказательство теоремы).
2. Пусть вектор-функции $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$ являются решениями системы ДУ, и существует точка $t_0 \in I : W(t_0) = 0$, тогда система $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$ является линейно-зависимой.

Доказательство. Поскольку $W(t_0) = 0$ столбцы этой матрицы являются линейно-зависимыми, то есть

$$\exists C_1, C_2, \dots, C_n : \sum_{i=1}^n C_i^2 \neq 0 \text{ \& } \sum_{i=1}^n C_i \vec{\varphi}_i(t_0) = 0$$

Используя данные коэффициенты, построим функцию $\vec{x}(t) = C_i \vec{\varphi}_i(t)$. Заметим, что во-первых $\vec{x}(t_0) = 0$, а во-вторых данная функция является решением системы ДУ в силу теоремы о суперпозиции. Тогда, в силу теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши выполняется: $\vec{x}(t) = C_i \vec{\varphi}_i(t) = 0 \forall t \in I$, что означает, что система $\vec{\varphi}_i$ является линейнозависимой. ■

4.5 Фундаментальная система решений и общее решение нормальной линейной однородной системы уравнений

Рассмотрим систему вида

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{f}, \quad (72)$$

где $A = \|a_j^i\|$, $i, j = \overline{1, n}$ - матрица системы, причём a_j^i - числа; $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f^1(t) \\ \dots \\ f^n(t) \end{pmatrix}$ - вектор-

столбец неоднородной системы; $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ \dots \\ x^n(t) \end{pmatrix}$ - вектор-столбец искомых функций.

Наряду с вышеприведённой записью также будем рассматривать запись вида:

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_j^i x^j(t) + f^i, \quad i = \overline{1, n}$$

Основная идея решения систем дифференциальных уравнений вида (72), состоит в том, что матрица системы рассматривается как матрица линейного преобразования линейного пространства $\vec{\mathbb{R}}^n$ (пространство, присоединённое к аффинному \mathbb{R}^n), заданная в исходном базисе.

Пусть $S = \|\sigma_j^i\|$, $i, j = \overline{1, n}$ - матрица перехода от исходного базиса $\|\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\|$ к базису. Эти соотношения связаны выражением $\|\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\| = \|\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\| \cdot S$ или $\vec{e}_i = \sum_{k=1}^n \sigma_i^k \vec{e}_k$, а координаты векторов в новом и старом базисе связаны формулой $\vec{x} = S\vec{x}'$ или $x^i = \sum_{m=1}^n \sigma_m^i x'^m$.

Матрица перехода S обратима, поэтому $\exists S^{-1} = \|\tau_j^i\|$, $i, j = \overline{1, n}$, причём $SS^{-1} = S^{-1}S = E$, т.е. $\sum_{k=1}^n \tau_k^i \sigma_j^k = \delta_j^i$. Тогда $\vec{x}' = S^{-1}\vec{x}$. Преобразуем исходную систему, умножив её справа на S^{-1} .

$$S^{-1} \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(S^{-1}\vec{x}) = S^{-1}A\vec{x} + S^{-1}\vec{f}$$

Подставив $\vec{x} = S\vec{x}'$, получим $\frac{d\vec{x}}{dt} = \bar{A}\vec{x}' + \vec{f}'$, где $\vec{f}'(t) = S^{-1}\vec{f}(t)$, а $\bar{A} = S^{-1}AS$ является матрицей преобразования A в новом базисе. Уравнение имеет **ковариантный вид**, поэтому задачи свелись к нахождению базиса, в котором система имела бы наиболее простой вид.

Пусть A - матрица системы (72) является матрицей линейного преобразования линейного пространства $\vec{\mathbb{R}}^n$, т.е. $\forall \vec{x} \in \vec{\mathbb{R}}^n \mapsto A\vec{x} = \vec{y} \in \vec{\mathbb{R}}^n$, тогда $A = \|A\vec{e}_1, \dots, A\vec{e}_n\|$, т.е. столбцы матрицы A являются компонентами образов базисных векторов.

Определение 4.5. Подпространство $L \subset \vec{\mathbb{R}}^n$ называется **инвариантным подпространством** относительно преобразования A , если $\forall \vec{x} \in L \mapsto A\vec{x} \in L$.

Пусть $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_s, \vec{e}_{s+1}, \dots, \vec{e}_n$ - базис в $\vec{\mathbb{R}}^n$, а $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_s$ - базис в L .

Тогда $\forall i = \overline{1, s} \mapsto A\vec{e}_i = \sum_{k=1}^s \gamma_i^k \vec{e}_k$ и матрица A в этом базисе будет иметь вид:

$$A = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{vmatrix}, \text{ где } A_1 = \begin{vmatrix} \gamma_1^1 & \dots & \gamma_s^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_1^s & \dots & \gamma_s^s \end{vmatrix}, \text{ } O - \text{ нулевая матрица размером } (n-s) \times s.$$

Если $\vec{\mathbb{R}}^n = L^1 \oplus \dots \oplus L^k$ и L^i , $i = \overline{1, k}$ - инвариантные подпространства, то в базисе, который является базисом-объединения всех базисов инвариантных подпространств, прямая сумма которых равна $\vec{\mathbb{R}}^n$, матрица будет иметь вид:

$$A = \begin{vmatrix} A_1 & O & \dots & O \\ O & A_2 & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & A_k \end{vmatrix}$$

A_i , $i = \overline{1, k}$ - квадратная матрица размерами $l_i < n$, которая является сужением матрицы преобразования A на инвариантное подпространство L_i

В таком случае искомую вектор-функцию можно переписать в виде:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^{l_1} \\ \dots \\ x^{l_1+\dots+l_{i-1}+1} \\ x^{l_1+\dots+l_i} \\ \dots \\ x^{l_1+\dots+l_k+1} \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}$$

$$\text{Обозначим через } X_i = \begin{pmatrix} x^{l_1+\dots+l_{i-1}+1} \\ \dots \\ x^{l_1+\dots+l_{i-1}+l_i} \end{pmatrix}$$

Тогда система (72) распадается на k систем, порядок которых $l_i < n$:

$$\dot{\vec{X}}_i = A_i \vec{X}_i + \vec{f}_i(t), \quad i = \overline{1, k}$$

Для приведения матрицы линейного преобразования к клеточно-диагональному виду нужно найти собственные векторы линейного преобразования. Вектор $\vec{x} \neq 0$ называется собственным вектором линейного преобразования, матрица которого равна A , если

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}. \text{ Пусть } A = \|a_{ij}^i\|, \quad i, j = \overline{1, n}, \text{ а } \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} - \text{компоненты собственного вектора. Тогда}$$

компоненты собственного вектора должны удовлетворять системе однородных линейных уравнений вида $\|A - \lambda E\|\vec{x} = 0$. Чтобы эта система имела ненулевое решение необходимо, чтобы $\det \|A - \lambda E\| = P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{trace } A + \dots + \det A = 0$.

$P_n(\lambda)$ - характеристический многочлен матрицы A .

Случай простых корней характеристического многочлена

Рассмотрим однорудную систему с постоянными коэффициентами

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \quad (73)$$

. Задача состоит в том, чтобы найти вектор функции $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$, которые будут образовывать ФСР нашей системы.

Корни характеристического многочлена $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ простые и действительные.

Таким $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ соответствуют собственные векторы $\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_n$ ($A\vec{h}_i = \lambda_i \vec{h}_i$) Можно показать, что собственные вектора, соответствующие разным собственным значениям линейно независимы, поэтому существует базис из собственных векторов $\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_n$, в котором матрица A имеет вид: $\bar{A} =$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{Тогда система (73) будет иметь следующий вид:}$$

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}^1}{dt} = \lambda_1 \vec{x}^1 \\ \dots \\ \frac{d\vec{x}^n}{dt} = \lambda_n \vec{x}^n \end{cases} \Rightarrow$$

вектор-функции $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}, \dots, \varphi_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda_n t}$ образует ФСР этой системы, т.к. явля-

ются линейно независимыми решениями. Матрица перехода в этом случае $S = \|\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_n\|$. Тогда получим, что

$$\vec{x}_1 = \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \vec{x}_n = \vec{h}_n e^{\lambda_n t} \quad (74)$$

является ФСР (73), т.к. $\vec{x}_i, i = \overline{1, n}$ из (74) являются решениями (73), линейная независимость вектор-функций $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ следует из того, что вронскиан (74) при $t = 0$ является $\det S \neq 0$ (свойство 10 вронскиана). Тогда любое решение (73) представимо в виде

$$\vec{x} = c_1 \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n \vec{h}_n e^{\lambda_n t} \quad (75)$$

Можно доказать, что $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ - ФСР иначе:

Лемма 4.1. Система функций $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$, где все λ_i - разные, является линейно независимой.

Доказательство. Составим линейную комбинацию, равную нулю: $c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t} = 0$ - продифференцируем $(n-1)$ раз и запишем получившуюся систему для поиска c_1, \dots, c_n

$$\begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t} = 0 \\ \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + \lambda_n c_n e^{\lambda_n t} = 0 \\ \dots \\ \lambda_1^{n-1} c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + \lambda_n^{n-1} c_n e^{\lambda_n t} = 0 \end{cases}$$

Система является однородной, поэтому имеет тривиальное решение, но единственное ли оно?

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 t + \dots + \lambda_n t} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 t + \dots + \lambda_n t} \prod_{1 \leq j < i \leq n} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$$

Полученный определитель это определитель Вандермонда, который равен нулю только, если какая-то пара λ_i, λ_j совпадёт. Значит определитель не равен нулю по условию \Rightarrow система имеет только тривиальное решение по теореме Крамера \Rightarrow система линейно независима. ■

Лемма 4.2. Система $\vec{\varphi}_1 = \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \vec{\varphi}_n = \vec{h}_n e^{\lambda_n t}$ является ФСР.

Доказательство. $\vec{\varphi}_i = \vec{h}_i e^{\lambda_i t}$ является решением по построению. Рассмотрим $W(t)$: $W(t) = \|\vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} \dots \vec{h}_n e^{\lambda_n t}\|$, при $t = 0$: $W(0) = \|\vec{h}_1 \dots \vec{h}_n\| \neq 0$, т.к. собственные вектора линейно независимые. Следовательно, по 10 свойству определителя Вронского система линейно независима. ■

Итак, общее решение системы (73) записывается в виде:

$$\boxed{\vec{x}_0^{\text{об}} = c_1 \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n \vec{h}_n e^{\lambda_n t}}$$

Корни характеристического многочлена $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ простые, но среди них есть комплексные.

Пусть есть комплексные собственное число $\lambda_k = r_k + i\omega_k$ и ему соответствующий комплексный собственный вектор $\vec{h}_k + i\vec{d}_k$, где \vec{h}_k, \vec{d}_k - действительные вектора. Так как характеристический многочлен это многочлен с действительными коэффициентами, то комплексный корень идет вместе с комплексно ему сопряженным, т.е. $\bar{\lambda}_k = r_k - i\omega_k$ тоже является корнем характеристического многочлена.

Взяв комплексное сопряжение над равенством $A(\vec{h}_k + i\vec{d}_k) = (r_k + i\omega_k)(\vec{h}_k + i\vec{d}_k)$:

$$\overline{A(\vec{h}_k + i\vec{d}_k)} = A(\vec{h}_k - i\vec{d}_k) = \overline{(r_k + i\omega_k)(\vec{h}_k + i\vec{d}_k)} = (r_k - i\omega_k)(\vec{h}_k - i\vec{d}_k)$$

Т.е. $\vec{h}_k - i\vec{d}_k$ является собственным вектором для $\bar{\lambda}_k = r_k - i\omega_k$.

Аналогично случайно действительных простых корней система принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}_1}{dt} = \lambda_1 \vec{x}_1 \\ \dots \\ \frac{d\vec{x}_k}{dt} = (r_k + i\omega_k) \vec{x}_k \\ \frac{d\vec{x}_{k+1}}{dt} = (r_k - i\omega_k) \vec{x}_{k+1} \\ \dots \\ \frac{d\vec{x}_n}{dt} = \lambda_n \vec{x}_n \end{cases}$$

$$\text{ФСР такой системы будет комплексной: } \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} e^{\lambda_1 t}; \dots; \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} e^{r_k t} (\cos \omega_k t + i \sin \omega_k t);$$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} e^{r_k t} (\cos \omega_k t - i \sin \omega_k t); \dots; \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} e^{\lambda_n t}$$

Т.к. матрица перехода $S = \left\| \vec{h}_1, \dots, \vec{h}_k + i\vec{d}_k, \vec{h}_k - i\vec{d}_k, \dots, \vec{h}_n \right\|$, то комплексная ФСР (73) будет: $\vec{h}_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, (\vec{h}_k + i\vec{d}_k) e^{r_k t} (\cos \omega_k t + i \sin \omega_k t), (\vec{h}_k - i\vec{d}_k) e^{r_k t} (\cos \omega_k t - i \sin \omega_k t), \dots, \vec{h}_n e^{\lambda_n t}$

Рассмотрим систему функций, у которых первые $k-1$ функции являются функциями построенной выше системы. В качестве k -ой и $k+1$ -ой функций возьмём:

$$\vec{q}_k = \frac{1}{2} ((\vec{h}_k + i\vec{d}_k) e^{r_k t} (\cos \omega_k t + i \sin \omega_k t) + (\vec{h}_k - i\vec{d}_k) e^{r_k t} (\cos \omega_k t - i \sin \omega_k t)) = e^{r_k t} (\vec{h}_k \cos \omega_k t - \vec{d}_k \sin \omega_k t)$$

$$\vec{q}_{k+1} = \frac{1}{2i}((\vec{h}_k + i\vec{d}_k)e^{r_k t}(\cos\omega_k t + i\sin\omega_k t) - (\vec{h}_k - i\vec{d}_k)e^{r_k t}(\cos\omega_k t - i\sin\omega_k t)) = e^{r_k t}(\vec{h}_k \sin\omega_k t + \vec{d}_k \cos\omega_k t)$$

Остальные вектор-функции оставим прежними. Так построенная система будет линейно независимой, т.к. была получена линейными комбинациями линейно независимых вектор-функций. Каждая функция данной системы будет решением (73) по построению и принципу суперпозиции \Rightarrow полученная система является ФСР (73) и содержит только действительные функции \Rightarrow

$$\vec{x}_0^{об} = c_1 \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_k e^{r_k t}(\vec{h}_k \cos\omega_k t - \vec{d}_k \sin\omega_k t) + c_{k+1} e^{r_k t}(\vec{h}_k \sin\omega_k t + \vec{d}_k \cos\omega_k t) + \dots + c_n \vec{h}_n e^{\lambda_n t}$$

Случай кратных корней характеристического многочлена

В общем случае по основной теореме алгебры характеристический многочлен представляется в виде: $P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{tr} A + \dots + \det A = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{k_m}$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ являются собственными числами матрицы A , $k_i \geq 1$, $i = \overline{1, m}$. В таком случае количество собственных векторов может быть меньше размерности пространства, поэтому матрица может быть не диагонализируема.

Определение 4.6. Множество $R_s = \ker(A - \lambda_s E)^{k_s}$, $s = \overline{1, m}$, где λ_s - корень кратности k_s характеристического многочлена, называется **корневым пространством**

Одно из утверждений теоремы Жордана: $\vec{R}^n = R_1 \oplus \dots \oplus R_m$ пространство раскладывается в прямую сумму корневых подпространств, а также $\dim R_s = k_s$. Следовательно, если выбрать базис, как объединение базисов корневых подпространств, то исходная система распадается на m систем порядка k_s , $s = \overline{1, m}$, связывающих $k_s \leq n$ функций. Рассмотрим одну из таких систем.

Обозначим $\lambda_s = \bar{\lambda}$, $k_s = l$, перенумеруем и переобозначим искомые функции $x^{k_1 + \dots + k_{s-1} + 1} = \bar{x}_1, \dots, x^{k_1 + \dots + k_{s-1} + l} = \bar{x}^l$. Тогда имеем задачу: решить систему

$$\dot{\vec{x}} = \bar{A} \vec{x} \quad (76)$$

где \bar{A} является сужением A на подпространство $R_s = \ker(A - \bar{\lambda} E)^l = \ker B^l$, т.е. $\forall \vec{x} \in R_s \mapsto B^l \vec{x} = 0$ по определению ядра.

Имеет место вложенность: $0 \subset \ker B \subset \ker B^2 \subset \dots \subset \ker B^l$, т.к. $\forall \vec{x} : B^{i-1}(\vec{x}) = 0 \mapsto B^i(\vec{x}) = B(B^{i-1}(\vec{x})) = 0$

Обозначим $T_i = \ker B^i$, $i = \overline{1, k}$, где $k \leq l$

Примечание. Неравенство $k \leq l$ связано с тем, что может оказаться, что $\forall \vec{x} \in R_s \mapsto B^k \vec{x} = 0$ и строить T_i невозможно

Для $i = \overline{1, k}$ определим множество $\mathcal{V}^i = \{\vec{x} \in \mathcal{V}^i : B^i \vec{x} = 0, B^{i-1} \vec{x} \neq 0\}$. Заметим, что \mathcal{V}^1 является по построению собственным подпространством A .

В силу определения B^i и \mathcal{V}^i : $\mathcal{V}^i = \ker B^i \setminus \ker B^{i-1}$, $i = \overline{2, k}$. По построению $R_s = \mathcal{V}^1 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}^k$. Осталось выбрать базис в \mathcal{V}^i , $i = \overline{2, k}$.

Теорема 4.5. Пусть $i > j$, тогда $\forall \vec{h}_i \in \mathcal{V}^i \exists \vec{h}_j \in \mathcal{V}^j : \vec{h}_j = B^{i-j} \vec{h}_i$.

Доказательство. Построим такой \vec{h}_j и покажем, что он лежит в \mathcal{V}^j .

$$\begin{aligned} B^j \vec{h}_j &= B^j(B^{i-j}(\vec{h}_i)) = (B^j B^{i-j})(\vec{h}_i) = B^i \vec{h}_i = 0 \\ B^{j-1} \vec{h}_j &= B^{j-1}(B^{i-j}(\vec{h}_i)) = (B^{j-1} B^{i-j})(\vec{h}_i) = B^{i-1} \vec{h}_i \neq 0 \end{aligned}$$

■

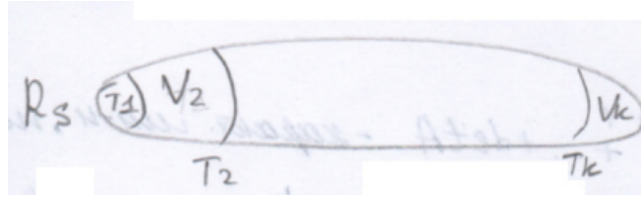


Рис. 1

Построение соответствующего базиса начинается с определения собственных векторов A , соответствующих числу $\bar{\lambda}$. Для этого решается уравнение $(\bar{A} - \bar{\lambda}E)\vec{x} = B\vec{x} = 0$.

Рассмотрим случай, когда имеется только один собственный вектор \vec{e} . В этом случае $k = l$ (наше подпространство будет представимо в виде 1 жордановой клетки). Вектор \vec{e} образует базис в $\mathcal{V} = T_1$. Вектор $\vec{h}_1 \in \mathcal{V}^2$ найдём как решение $B\vec{h}_1 = \vec{e}$, по доказанной выше теореме такое уравнение имеет решение. Вектор \vec{h}_1 называется **присоединённым** к вектору \vec{e} . Вектора \vec{e} и \vec{h}_1 образуют базис в T_2 . Определим векторы $\vec{h}_i, i = \overline{2, l-1}$ из уравнений $B\vec{h}_i = \vec{h}_{i-1}$. Так построенные векторы $\vec{e}, \vec{h}_1, \dots, \vec{h}_{l-1}$ образует базис в R_s . Этот базис называется жордановой цепью.

Запишем матрицу системы в этом базисе. Все построенные векторы находим из уравнений: $\bar{A}\vec{e} = \bar{\lambda}\vec{e}, \bar{A}\vec{h}_1 = \vec{e} + \bar{\lambda}\vec{h}_1, \dots, \bar{A}\vec{h}_{l-1} = \vec{h}_{l-2} + \bar{\lambda}\vec{h}_{l-1}$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \bar{\lambda} & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \bar{\lambda} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} - \text{жорданова клетка размер } l$$

В таком базисе системе имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}^1}{dt} = \bar{\lambda}\bar{x}^1 + \bar{x}^2 \\ \dots \\ \frac{d\bar{x}^{n-1}}{dt} = \bar{\lambda}\bar{x}^{n-1} + \bar{x}^n \\ \frac{d\bar{x}^n}{dt} = \bar{\lambda}\bar{x}^n \end{cases} \quad (77)$$

Замена: $\bar{x}^i = \bar{y}^i e^{\bar{\lambda}t}, i = \overline{1, l} \Rightarrow \dot{\bar{y}}^i e^{\bar{\lambda}t} + \bar{\lambda}\bar{y}^i e^{\bar{\lambda}t} = \lambda\dot{\bar{y}}^i e^{\bar{\lambda}t} + \dot{\bar{y}}^{i+1} e^{\bar{\lambda}t} \Rightarrow$ Система преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{y}^1}{dt} = \bar{y}^2 \\ \frac{d\bar{y}^2}{dt} = \bar{y}^3 \\ \dots \\ \frac{d\bar{y}^{l-1}}{dt} = \bar{y}^l \\ \frac{d\bar{y}^l}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{\bar{y}} = \begin{pmatrix} c_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + c_{l-1} \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \dots + c_2 \frac{t}{1!} + c_1 \\ \dots \\ \dots \\ c_l t + c_{l-1} \\ c_l \end{pmatrix} \Rightarrow \quad (78)$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{vmatrix} c_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + c_{l-1} \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \dots + c_2 \frac{t}{1!} + c_1 \\ \dots \\ \dots \\ c_l t + c_{l-1} \\ c_l \end{vmatrix} \cdot e^{\bar{\lambda}t}$$

Переходим к старому базису:

$$\vec{x}(t) = \left\| \vec{e}, \vec{h}_1, \dots, \vec{h}_{l-1} \right\| \cdot \begin{vmatrix} c_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + c_{l-1} \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \dots + c_2 \frac{t}{1!} + c_1 \\ \dots \\ \dots \\ c_l t + c_{l-1} \\ c_l \end{vmatrix} \cdot e^{\bar{\lambda}t} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \vec{x}_0^{об} &= \vec{e} \left(c_1 + \dots + c_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \right) e^{\bar{\lambda}t} + \dots + \vec{h}_{l-1} c_l e^{\bar{\lambda}t} = \\ &= \boxed{c_1 \vec{e} e^{\bar{\lambda}t} + c_2 (\vec{e}t + \vec{h}_1) e^{\bar{\lambda}t} + \dots + c_l \left[\vec{e} \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + \vec{h}_1 \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \dots + \vec{h}_{l-1} \right]} \quad (79) \end{aligned}$$

Полагая последовательно $c_1 = 1, c_2 = \dots = c_n = 0$; ...; $c_1 = \dots = c_{i-1} = c_{i+1} = \dots = c_n = 0, c_i = 1, i = \overline{2, n}$ получим функции:

$$\vec{\varphi}_1 = \vec{e} e^{\bar{\lambda}t}, \vec{\varphi}_1 = (\vec{e}t + \vec{h}_1) e^{\bar{\lambda}t}, \dots, \vec{\varphi}_{l-1} = \left(\vec{e} \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + \vec{h}_1 \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \dots + \vec{h}_{l-1} \right) e^{\bar{\lambda}t}. \text{ Они}$$

являются решениями по построению, $W(0) = \left\| \vec{e}, \dots, \vec{h}_{l-1} \right\| \neq 0 \Rightarrow \vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_{l-1}$ - линейно независимы $\Rightarrow \vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_{l-1}$ - ФСР.

4.6 Линейная неоднородная система уравнений в случае, когда неоднородность представлена векторным квазимногочленом

4.7 Формула Лиувилля-Остроградского для нормальной линейной однородной системы уравнений и для линейного однородного уравнения n-го порядка.

Следующее свойство вронскиана рассмотрим в виде теоремы. Для начала докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 4.3. [Формула Эйлера дифференцирования определителя]

$$\text{Детерминант матрицы представим в виде: } \Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^i & \dots & a_n^i \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} \cdot a_k^i M_i^k \text{ Тогда}$$

для

$$\dot{\Delta}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot \dot{a}_j^i M_i^j$$

Теорема 4.6. [Формула Лиувилля-Остроградского]

Пусть $W(x)$ – вронскиан решений $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$ однородной системы $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$. Тогда имеет место формула:

$$\dot{W}(t) = W(t) \cdot \text{tr} A$$

$$\text{где } \text{tr} A = \sum_{k=1}^n a_{kk}(t)$$

Доказательство. Зафиксируем среди системы решений функцию $\vec{\varphi}_j = \begin{pmatrix} \varphi_j^1 \\ \varphi_j^2 \\ \dots \\ \varphi_j^n \end{pmatrix}$. Рассмотрим i -ую компоненту φ_j^i решения $\vec{\varphi}_j$. Поскольку $\vec{\varphi}_j$ решение, то $\frac{d\vec{\varphi}_j}{dt} = A\vec{\varphi}_j \Rightarrow$

$$\frac{d\varphi_j^i}{dt} = \dot{\varphi}_j^i = \sum_{k=1}^n a_k^i \varphi_j^k$$

Рассмотрим вронскиан $W(t)$, продифференцируем его по t

$$\dot{W}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot \dot{\varphi}_j^i M_j^i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_k^i \varphi_j^k M_j^i$$

Переставим суммы местами

$$\dot{W}(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_k^i \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \varphi_j^k M_j^i = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_k^i \delta_i^k W(t) = W(t) \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_k^i \delta_i^k = W(t) \sum_{k=1}^n a_k^k$$

$$\dot{W}(t) = W(t) \cdot \text{tr} A$$

■

Также можно решить это уравнение и переписать в виде

$$W(t) = W(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \text{tr} A(u) du \right)$$

4.8 Метод вариации постоянных для линейной неоднородной системы уравнений и для линейного неоднородного уравнения n -го порядка.

$$\text{Рассмотрим } y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x). \quad (80)$$

$\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ – Ф.С.Р. однородного уравнения $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$. Это означает, что

$$\forall k = \overline{1, n} \hookrightarrow \varphi_k^{(n)} + a_1(x)\varphi_k^{(n-1)} + \dots + a_n(x)\varphi_k \equiv 0 \quad (81)$$

Перепишем уравнение (80) в эквивалентном виде. Для этого сделаем следующие замены: $y = v_1$, $y^{(1)} = v_2$, ..., $y^{(n-1)} = v_n$. Тогда получим:

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dx} = v_2, \\ \frac{dv_2}{dx} = v_3, \\ \dots, \\ \frac{dv_n}{dx} = f(x) - a_1(x)v_n - \dots - a_n(x)v_1. \end{cases} \quad (82)$$

Будем искать решение (80) в виде

$$y(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + \dots + C_n(x)\varphi_n(x)$$

Тогда получается, что решение эквивалентной системы будем искать в виде

$$\vec{v}(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ \dots \\ v_n(x) \end{pmatrix} = C_1(x) \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \dots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} + \dots + C_n(x) \begin{pmatrix} \varphi_n(x) \\ \dots \\ \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \quad (83)$$

Рассмотрим функцию $v_k(x) = C_1(x)\varphi_1^{(k-1)} + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(k-1)}$. Продифференцируем эту функцию по x :

$$\forall k = \overline{1, n-1} \hookrightarrow \dot{v}_k(x) = \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(k-1)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(k-1)} + C_1(x)\varphi_1^{(k)} + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(k)} \quad (84)$$

С другой стороны $\dot{v}_k(x) = v_{k+1} = C_1(x)\varphi_1^{(k)} + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(k)}$. Тогда получаем

$$v_k(x) = C_1(x)\varphi_1^{(k)} + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(k)} = \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(k-1)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(k-1)} + C_1(x)\varphi_1^{(k)} + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(k)} \quad (85)$$

$$\forall k = \overline{1, n-1} \hookrightarrow \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(k-1)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(k-1)} = 0 \quad (86)$$

$$k = n : \dot{v}_n(x) = \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-1)} + C_1(x)\varphi_1^{(n)} + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(n)} = \\ = f(x) - a_1(x) \left(C_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(n-1)} \right) - \dots - a_n(x) (C_1(x)\varphi_1 + \dots + C_n(x)\varphi_n)$$

$$\dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-1)} + C_1(x) \left(\varphi_1^{(n)} + a_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + \dots + a_n(x)\varphi_1 \right) + \dots + \\ + C_n(x) \left(\varphi_n^{(n)} + a_1(x)\varphi_n^{(n-1)} + \dots + a_n(x)\varphi_n \right) = f(x)$$

Из уравнения (81) следует что выражения в скобках равны нулю, тогда получим

$$k = n : \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-1)} = f(x)$$

Т.е. мы получили следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{C}_1(x)\varphi_1 + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n = 0, \\ \dots \\ \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-2)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-2)} = 0, \\ \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \quad (87)$$

Система (87) это линейная система для определения $\dot{C}_1, \dots, \dot{C}_n$. Определитель этой системы $\Delta = W(x) \neq 0$, а значит система разрешима единственным образом.

4.9 Теорема Штурма

Рассмотрим на промежутке $I = I(x)$ следующее уравнение:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \quad (88)$$

где $a(x) \in C^1_{I(x)}$, $b(x) \in C^1_{I(x)}$.

Решение (88) такое, что $y(x)$ тождественно не равно нулю на $I(x)$ называется нетривиальным, а точка $x_0 \in I$ такая, что $y(x_0) = 0$ называется нулём нетривиального решения $y(x)$.

Уравнение (88) приводится к виду:

$$z'' + q(x)z = 0. \quad (89)$$

Для этого сделаем замену $y(x) = c(x) \cdot z(x)$, где $z(x)$ - решение уравнения выше (далее будем считать, что $c = c(x)$ и $z = z(x)$):

$$z'' \cdot c + 2c' \cdot z' + c'' \cdot z + a(x)(c' \cdot z + z' \cdot c) + b(x) \cdot c \cdot z = 0,$$

здесь выберем $c \neq 0$ так, что бы для z' выполнялось:

$$z'(2c' + a(x)c) = 0.$$

Тогда получаем линейное однородное уравнение $\Rightarrow 2c' + a(x)c = 0$, которое можно преобразовать в:

$$\frac{dc}{c} = -\frac{a(x)}{x}dx \Rightarrow c(x) = c_0 \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \int a(x)dx \right] > 0. \quad (90)$$

Возьмем $c_0 = 1 \Rightarrow c \cdot z'' + (c'' + c'a + bc)z = 0$, тогда можем ввести $q(x)$ такое, что:

$$q(x) = \frac{c'' + c'a}{c} + b.$$

Также заметим, что из (90) следует, что $c(x) > 0$. Тогда в силу замены $y = c(x) \cdot z$, $x_0 \in I$ является нулём $y(x)$ тогда и только тогда, когда x_0 является нулём $z(x)$.

Определение 4.7. Точка x_0 является нулём $f(x) \in C^\infty$ кратности k , если $f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(k)}(x_0) \neq 0$.

Лемма 4.4. Все нули нетривиального решения (89) (также как и для (88)) являются простыми, т.е. $k = 1$.

Доказательство. От противного: пусть x_0 является нулём кратности 2, тогда $z(x_0) = z'(x_0) = 0$. Тогда в силу основной теоремы $z(x) = 0 \forall x \in I$ - противоречие, т.к. $z(x)$ - нетривиальное решение по условию. ■

Лемма 4.5. Пусть M - множество нулей нетривиального решения $y(x)$ на нечетном промежутке $[x_1; x_2]$. Множество M не имеет предельной точки.

Доказательство. От противного: пусть M - множество нулей. Пусть x_0 - предельная точка и $\exists x_k$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0 \in [x_1; x_2], y(x_k) = 0, k = 1, 2, \dots$$

Так как $y(x)$ - непрерывно, то $\lim_{k \rightarrow \infty} y(x_k) = 0 = y(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k) = y(x_0) \Rightarrow y(x_0) = 0$.

Рассмотрим $[x_k; x_{k+1}]$ и $y(x)$ на нём, т.к. $y(x_k) = y(x_{k+1}) = 0$, то по теореме Ролля $\exists c_k : x_k \leq c_k \leq x_{k+1} : y'(c_k) = 0$ и т.к. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = x_0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = x_0$. Из этого может получить, что так как $y'(x)$ - непрерывна, то:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y'(c_k) = 0 = y'(\lim_{k \rightarrow \infty} c_k) = y'(x_0) = 0$$

Так как по предложению $x_0 \in [x_1; x_2]$ и $y_0(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$ - получим задачу Коши для $x_0 \in [x_1; x_2] \Rightarrow$ в силу теорем существования и единственности решения задачи Коши: $y \equiv 0$ - единственное решение на $[x_1; x_2]$ - получим противоречие с нетривиальным решением. ■

Теорема 4.7 (Теорема Штурма). *Рассмотрим уравнения:*

$$y'' + q(x)y = 0 \tag{91}$$

$$z'' + Q(x)z = 0, \tag{92}$$

где уравнение (91) будем называть быстрым, а (92) - медленным.

Пусть

$$q(x) \in C_{I(x)}^1, Q(x) \in C_{I(x)}^1, \forall x \in I \rightarrow q(x) \leq Q(x).$$

Пусть $y(x)$ - нетривиальное решение (91), $z(x)$ - нетривиальное решение (92). Если $x_1, x_2 \in I$ - последовательные нули $y(x)$ то либо $\exists x_0 \in (x_1; x_2)$, в которой $z(x_0) = 0$, либо $z(x_1) = z(x_2) = 0$.

Доказательство. Пусть x_1, x_2 - два соседних нуля $y(x)$, т.е. $y(x) \neq 0$ на $(x_1; x_2)$, пусть для определённости $y(x) > 0$.

По определению:

$$y'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{y(x) - y(x_1)}{x - x_1} \geq 0; y'(x_2) = \lim_{x \rightarrow x_2} \frac{y(x) - y(x_2)}{x - x_2}.$$

В силу Леммы 4.4 нули x_1 и x_2 должны быть однократными, т.е. $y'(x_1) \neq 0$, $y'(x_2) \neq 0$. Таким образом $y'(x_1) > 0$, $y'(x_2) < 0$.

Умножим (92) на $z(x)$, а (91) на $y(x)$ и вычтем из первого второе:

$$zy'' + qyz - yz''' - Qyz = 0; zy'' - yz'' = (zy' - yz')' = (Q - q)zy.$$

Проинтегрируем полученное тождество на $[x_1; x_2]$:

$$\begin{aligned} (zy' - yz') \Big|_{x_1}^{x_2} &= \int_{x_1}^{x_2} (Q(x) - q(x))zydx; \\ z(x_2)y'(x_2) - y(x_2)z'(x_2) - z(x_1)y'(x_1) + y(x_1)z'(x_1) &= \int_{x_1}^{x_2} (Q(x) - q(x))zydx \Rightarrow \\ \Rightarrow z(x_2)y'(x_2) - z(x_1)y'(x_1) &= \int_{x_1}^{x_2} (Q(x) - q(x))zydx, \end{aligned} \tag{93}$$

здесь $z(x_2)y'(x_2) < 0$, $z(x_1)y'(x_1) > 0$, $(Q(x) - q(x)) > 0$ и $y > 0$.

Предположим противное - пусть теорема Штурма не верна. Тогда возможны варианты:

1. $z > 0 \forall x \in [x_1; x_2]$. Тогда левая часть (93) отрицательна, а правая положительна - противоречие.
2. $z > 0 \forall x \in [x_1; x_2)$, $z(x_2) = 0$ - аналогично.
3. $z > 0 \forall x \in (x_1; x_2]$ $z(x_1) = 0$ - аналогично.

Таким образом $\exists x_0 \in (x_1; x_2) : z(x_0) = 0$. Если $z(x_1) = z(x_2)$, то может быть, что $Q(x) \equiv q(x) \Rightarrow z(x) = \text{const} \cdot y(x)$, либо:

$$\exists x^* \in (x_1; x_2) : Q(x^*) > q(x^*),$$

в силу непрерывности $Q(x)$ и $q(x) \exists \Delta :$

$$\int_{x^*-\Delta}^{x^*+\Delta} (Q(x) - q(x))z(x)y(x)dx = 0,$$

значит $\exists x_0$, где $z(x)$ меняет знак $\Rightarrow z(x_0) = 0$ ■

4.10 Следствия из теоремы Штурма

Следствие 4.7.1. Пусть есть уравнение:

$$y'' + q(x)y = 0; \quad q(x) \leq 0 \forall x \in I(x),$$

тогда любое нетривиальное решение (92) на I имеет не более одного нуля.

Доказательство. В качестве второго уравнения можно взять $z'' + Q(x)z = 0$, здесь $Q(x) = 0$. Пусть решение уравнения (92) имеет нули x_1 и x_2 $Q(x) \geq q(x) \Rightarrow 0 \geq q(x)$. Тогда по теореме Штурма любое решение (91) должно иметь ноль на $(x_1; x_2)$. В качестве решения можем взять $z \equiv 1$, которое не имеет нулей \Rightarrow противоречие \Rightarrow для решения (92) не может быть больше одного нуля. ■

Следствие 4.7.2. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - два линейно независимых нетривиальных решения (92), $x_1, x_2 \in I$ - два соседних нуля $\varphi(x)$, тогда $\psi(x)$ имеет только один ноль на $(x_1; x_2)$.

Доказательство. Применим теорему Штурма к двум одинаковым уравнениям ($Q(x) \leq Q(x)$). По теореме Штурма $\psi(x)$ на $(x_1; x_2)$ имеет хотя бы один ноль. Общих нулей $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ иметь не могут, так как они линейно независимы ($W(x_1) = 0$, если бы $\varphi(x_1) = \psi(x_1) = 0$, что означало бы, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - ЛЗ). Итак, $\psi(x)$ имеет ноль x_0 на $(x_1; x_2)$.

Докажем, что такой ноль единственный - от противного: пусть нулей два для $\psi(x) : x^*$ и \bar{x} . Если нулей $\psi(x)$ два, то по теореме Штурма для $\varphi(x)$ будет ноль между x^* и \bar{x} - противоречие тому, что x_1 и x_2 соседние нули $\varphi(x)$. ■

Таким образом нули решений (88) перемешаются.