Билет 1

Уравнение Бернулли

Определение 0.1. *Д.у. вида* $\boxed{y' + a(x) \cdot y = y^r \cdot f(x)}^{(1)}$*, где* $a(x), f(x) \in C^1, r \in \mathbb{R}, r \neq 1$ *называется уравнением Бернулли.*

Утверждение 0.1. *Если* $r > 0$*, то* $y \equiv 0$ *- тривиальное решение. Пусть* $y \neq 0$*, разделим ДУ на* $y^r \Rightarrow \frac{y'}{y^r} + a(x) \cdot y^{1-r} = f(x)$*. Замена:* $u(x) = y^{1-r} \Rightarrow u' = (1-r) \cdot y^{-r} \cdot y' \Rightarrow$
$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{1-r} \cdot u' + a(x) \cdot u = f(x)}$ *- свелось к линейному уравнению.*

Уравнение Риккати

Определение 0.2. *Д.у. вида* $\boxed{y' + a(x) \cdot y^2 + b(x) \cdot y + c(x)}^{(2)}$*, где* $a(x), b(x) \in C^1_{I(x)}$*,* $c(x) \in C_{I(x)}$ *называется уравнением Риккати.*

Утверждение 0.2. *В общем случае уравнение Риккати не допускает решений в квадратурах, однако, если известно некоторое решение* $y = \varphi(x)$*, то сделав замену* $y = u + \varphi$*, получаем:* $\varphi' = u\varphi^2 + b\varphi + c$
$\varphi' + u' = u\varphi^2 + 2a\varphi u + au^2 + b\varphi + bu + c \Rightarrow u' = au^2 + (2a\varphi + b)u$ *- свелось к уравнению Бернулли.*

Методы понижения порядка дифференциальных уравнений

Утверждение 0.3. *Рассмотрим множество преобразований плоскости* $\boxed{\bar{x} = \varphi(x,y,\lambda), \bar{y} = \psi(x,y,\lambda)}^{(3)}$*. В (3) каждому* $\lambda \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ *соответствует некоторое преобразование, например,* $\bar{x} = \lambda x, \bar{y} = \lambda y, \lambda > 0$ *- гомотетия. Множество преобразований (3) является группой преобразований, если оно содержит любую композицию (3) , т.е.* $\exists \lambda_0 : \varphi(\varphi(x,y,\lambda_1), \psi(x,y,\lambda_2)) = \varphi(x,y,\lambda_0)$*, содержит тождественное преобразование, т.е.* $\exists \lambda_0 : \varphi(x,y,\lambda_0) = x;\ \psi(x,y,\lambda_0) = y$*, и вместе с любым преобразованием содержит и обратное:* $\forall \lambda \in \mathcal{D}\colon \exists\ \lambda_0\colon x = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda_0);\ y = \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda_0)$
Т.о. если (3) - группа, то $x = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda),\ y = \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda)$*; если в ДУ* $y' = f(x,y)$ *осуществить переход к новым координатам, то*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'_{\bar{x}} d\bar{x} + \psi'_{\bar{y}} d\bar{y}}{\varphi'_{\bar{x}} d\bar{x} + \varphi'_{\bar{y}} d\bar{y}} = f(\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda), \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda)) = \tilde{f}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\psi'_{\bar{x}} + \psi'_{\bar{y}} \cdot \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}}{\varphi'_{\bar{x}} + \varphi'_{\bar{y}} \cdot \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}} = \tilde{f}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda) \Rightarrow \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{\tilde{f} \cdot \varphi'_{\bar{x}} - \psi'_{\bar{x}}}{\psi'_{\bar{y}} - \tilde{f} \cdot \varphi'_{\bar{y}}} \tag{4}$$

(4) является записью $y' = f(x,y)$ *в новых координатах. Говорят, что* $y' = f(x,y)$ *допускает группу* $x = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda),\ y = \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda)$*, если оно не изменяется при переходе к новым переменным, т.е.* $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{y})$

Следствие 0.0.1. *Рассматриваем уравнения вида* $\boxed{F(x, y, y', y'') = 0}^{(5)}$

1. $\boxed{F(x,y'',y') = 0}^{(6)}$ *Замена* $y'(x) = v(x) \Rightarrow y''(x) = v'(x)$ *и (6) в этом случае имеет вид* $F(x, v(x), v'(x)) = 0 \xrightarrow[\text{решаем}]{} V(x) = y(x,c_1)$*. Тогда решение (6) запишется в виде*

$\frac{dy}{dx} = g(x,c_1) \Rightarrow y(x) = c_2 + \int g(x,c_1)dx$. *Заметим, что* (6) *допускает группу сдвига* $x = \bar{x},\ y = \bar{y} + y_0$

2. $\boxed{F(y,y',y'') = 0}^{(7)}$ *(не содержит явно* x*). Замена:* $y' = V(y)$, *тогда* $y'' = \frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dx} = V\frac{dV}{dy} \Rightarrow F(y,V,y\frac{dV}{dy}) = 0$ *- ДУ первого порядка.*
Решение $V(y) = g(y,c_1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = g(y,c_1) \Rightarrow$ *Решение* (7): $\int \frac{dy}{g(y,c_1)} = x + c_2$.
Заметим, что (7) *допускает группу сдвигов* $x = \bar{x} + x_0,\ y = \bar{y}$

3. $\boxed{F(x,y'',y',y) = 0 \text{ и } F - \text{однородная степени } m \text{ по } y'',\ y',\ y}$, *т.е.* $\forall\lambda > 0 \rightarrow$ $F(x,\lambda y'',\lambda y',\lambda y) = \lambda^m \cdot F(x,y'',y',y)$. *В таком случае ДУ допускает группу* $x = \bar{x}, y = \lambda\bar{y}$. *Замена:* $z(x) = \frac{y'}{y} \Rightarrow y' = z(x)y$
$\Rightarrow y'' = z'y + zy' = z'y + z^2y = y\cdot(z' + z^2) \Rightarrow F(x,y,zy,y(z'+z^2)) = 0$
$\Rightarrow y^m \cdot F(x,1,z,z'+z^2) = 0$ *- относительно* z *имеем ур-ние первого порядка.*
Если его решение $z(x) = g(x,c_1)$, *то* $\frac{y'}{y} = g(x,c_1) \Rightarrow \frac{dy}{y} = g(x,c_1)dx \Rightarrow$
$\ln|y| = \int g(x,c_1)dx + c_2$

4*. *Будем говорить, что функция* $F(x,y,y'',...,y^{(n)})$ *является квазиоднородной функцией степени* r, *если* $\exists\alpha \in \mathbb{R} : \forall\lambda > 0 : F(\lambda x, \lambda^\alpha y, \lambda^{\alpha-1}y', ..., \lambda^{\alpha-n}y^{(n)}) =$
$= \lambda^r \cdot F(x,y,...,y^{(n)})$.
Рассмотрим множество преобразований:

$$\begin{cases} x = \lambda\bar{x} \\ y = \lambda^\alpha\bar{y} \end{cases}, \quad \text{где } \lambda > 0 \tag{8}$$

Такое множество преобразований перепишем в виде:

$$\begin{cases} x = e^\beta\cdot\bar{x} \\ y = e^{\alpha\beta}\bar{y} \end{cases}$$

Если F *в* (7) *является квазиоднородной, то* (7) *допускает группу растяжений* (8)*:*

$$\boxed{F(x,y'',y',y) = 0} \xrightarrow[\text{преобр.}]{} F(\lambda\bar{x}, \lambda^\alpha\bar{y}, \lambda^{\alpha-1}\bar{y}', \lambda^{\alpha-2}\bar{y}'') = \lambda^r\cdot F(\bar{x},\bar{y},\bar{y}',\bar{y}'') = 0$$
$$\Downarrow$$
$$F(\bar{x},\bar{y},\bar{y}',\bar{y}'') = 0$$

$$\text{Замена: } \begin{cases} x = e^t \\ y = z(t)\cdot e^{2t} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{z'_t\cdot e^{\alpha t} + z\cdot\alpha\cdot e^{\alpha t}}{e^t} = e^{(\alpha-1)t}\cdot(z'_t + \alpha z)$$
$$\Downarrow$$
$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(\alpha-1)\cdot e^{(\alpha-1)t}\cdot(z'_t+\alpha z) + e^{(\alpha-1)t}\cdot(z''_{tt} + \alpha z'_t)}{e^t} =$$
$$= e^{(\alpha-2)t}\cdot(z''_{tt} + (2\alpha-1)\cdot z'_t + \alpha\cdot(\alpha-1)z)$$
$$\Downarrow$$
$$F(e^t; z\cdot e^{\alpha t}; e^{(\alpha-1)t}\cdot(z'_t+\alpha z); e^{(\alpha-2)t}(z''_{tt} + (2\alpha-1)z'_t + \alpha\cdot(\alpha-1)z)) =$$
$= e^{rt}\cdot F(1;z;z'_t+\alpha z;z''_{tt}+(2\alpha-1)z'_t+\alpha\cdot(\alpha-1)z) = 0$ *- не содерж.* x, *т.е. свелось к случаю 2*

Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.

Утверждение 0.4. *Рассмотрим* $\boxed{F(x, y, y') = 0}^{(9)}$ *, где* $F(x, y, y')$ *как функция трёх переменных является непрерывно дифференцируемой в области* $G \subset \mathbb{R}^3$
Решение уравнения $F(x, y, y') = 0$ *будем представлять как кривую в параметрическом виде:*

$$\gamma : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} t \in [t_1, t_2],\ \varphi(t), \psi(t) \in C^1_{[t_1,t_2]} \tag{10}$$

Кривая (10), *является интегральной кривой* (9) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow F\left(\varphi(t), \psi(t), \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}\right) = 0 \ \ \forall t \in [t_1, t_2] \tag{11}$$

Будем решать эквивалентную систему положив $p = \frac{dy}{dt}$*:*

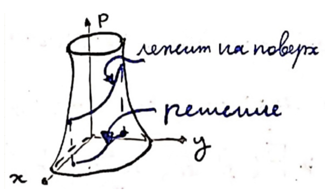
$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ dy = pdx \end{cases} \tag{12}$$

Утверждение 0.5. *Уравнение* (9) *эквивалентно системе* (12).

Доказательство. Пусть γ - интегр. кривая (9). Положим $p = \frac{\psi'}{\varphi'} = \frac{dy}{dx}$ - второе уравнение в системе (12) выполнено, а первое выполнено в силу подстановки в (11). Обратно, пусть $x(t) = \varphi(t),\ y(t) = \psi(t), p$ - решение (11). $\Rightarrow$ Из второго уравнения системы:
$p = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} \to$ Подставляем в первое уравнение системы и получаем само уравнение (11)

■

Утверждение 0.6. *Рассмотрим метод решения* (9), *который называется методом введения параметра.*
Первое ур-ние в системе (12) *рассмотрим как задающее в* $\mathbb{R}^3_{(x,y,p)}$ *гладкую поверхность* S, *для которой параметрическое представление имеет вид:*



$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \Rightarrow F(\varphi(u, v); \psi(u, v); \chi(u, v)) \equiv 0 \\ p = \chi(u, v) \end{cases}$$

Потребуем, чтобы $\operatorname{rank} \begin{pmatrix} \frac{\delta\varphi}{\delta u} & \frac{\delta\psi}{\delta u} & \frac{\delta\chi}{\delta u} \\ \frac{\delta\varphi}{\delta v} & \frac{\delta\psi}{\delta v} & \frac{\delta\chi}{\delta v} \end{pmatrix} = 2,\ \forall u, v \in G$ *т.е.* S *была простой гладкой пов.*

Тогда остаётся удовлетворить второму уравнению системы (12)*:*

$$\frac{\delta\psi}{\delta u}du + \frac{\delta\psi}{\delta v}dv = \chi \cdot \left(\frac{\delta\varphi}{\delta u}du + \frac{\delta\varphi}{\delta v}dv\right) \Rightarrow \left(\frac{\delta\psi}{\delta u} - \chi\frac{\delta\varphi}{\delta v}\right)du = \left(\chi\frac{\delta\varphi}{\delta v} - \frac{\delta\psi}{\delta v}\right)dv \tag{13}$$

Если $P(u,v) \neq 0\ \forall(u,v) \in G$, *то из* (13) *получаем Д.У.:* $\dfrac{du}{dv} = \dfrac{Q(u,v)}{P(u,v)}$

Его решение $u = u(v,c)$, *тогда* $\begin{cases} x = \varphi(u(v,c),v) = x(v,c) & \text{- является параметрическим} \\ y = \psi(u(v,c),v) = y(v,c) & \text{представлением решения (9)} \end{cases}$

Если же существует связь между u *и* v: $u = f(v), P(f(v),v) = Q(f(v),v) = 0\ \forall v \in G$, *то* $u = f(v)$ *явл. решением* $\left(\chi \frac{\delta\varphi}{\delta v} - \frac{\delta\psi}{\delta v}\right) dv$, *а*

$$\begin{cases} x = x(v) \\ y = y(v) \end{cases} \text{ - явл. решением (13)}$$