

1 Билет 1. Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений

1.1 Основные понятия

Определение 1.1. Уравнение вида

$$F(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением, где x – аргумент, $y(x)$ – неизвестная функция, F – известная функция.

Определение 1.2. Если это уравнение удастся разрешить относительно старшей производной, такое дифференциальное уравнение называется разрешённым относительно старшей производной и записывается в виде

$$y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

Порядок уравнения определяется порядком старшей производной от y .

Определение 1.3. Функция $y = \varphi(x)$ называется решением ДУ, если она n раз дифференцируема и

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0 \quad \forall x,$$

где определена функция $\varphi(x)$ с её производными.

Определение 1.4. Система n уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f_1(t, x^1(t), \dots, x^n(t)) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f_n(t, x^1(t), \dots, x^n(t)) \end{cases} \quad (1)$$

где $x^1(t), \dots, x^n(t)$ – искомые функции, называется нормальной системой ДУ n -го порядка.

Утверждение 1.1. Рассмотрим ДУ $y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$ n -ого порядка. Это уравнение эквивалентно следующей нормальной системе ДУ:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = v_2 \\ \dot{v}_2 = v_3 \\ \dots \\ \dot{v}_{n-1} = v_n \\ \dot{v}_n = f_n(x, v_1, v_2, \dots, v_n) \end{cases} \Leftrightarrow y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad (2)$$

Доказательство. Введем обозначения: $y = v_1(x)$, $y' = v_2(x)$, $y'' = v_3(x)$, \dots , $y^{(n-1)} = v_n(x)$. Тогда имеем $\dot{v}_1 = v_2$, $\dot{v}_2 = v_3$, \dots , $\dot{v}_n = f(x, v_1, v_2, \dots, v_n)$, то есть получилась нормальная система дифференциальных уравнений n -ого порядка с неизвестными v_i .

Обратными заменами системы уравнений можно получить исходное дифференциальное уравнение $y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$. ■

Определение 1.5. Рассмотрим уравнение 1-ого порядка $y' = f(x, y(x))$. Тогда задача решить это уравнение с условием $y(x_0) = y_0$ называется задачей Коши.

Определение 1.6. Пусть $\varphi(x)$ – решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y(x))$. График решения $\varphi(x)$ называется интегральной кривой. В силу определения функции $f(x, y)$ на множестве Ω , вся интегральная кривая будет лежать в Ω .

Определение 1.7. Проведём через каждую точку интегральной кривой $(x_0, y_0) \in \Omega$ малый отрезок с углом наклона по отношению к оси x равным α , причём $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0, y_0)$. Получим так называемое поле направлений.

Из построения интегральной кривой следует, что интегральная кривая в каждой своей точке касается поля направлений. Верно и обратное: кривая, касающаяся в каждой своей точке поля направлений, является интегральной кривой.

1.2 Простейшие типы уравнений первого порядка

1.2.1 Уравнения в полных дифференциалах

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$. Тогда кривая

$$\gamma = \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (3)$$

называется интегральной кривой рассматриваемого уравнения, если $\forall t : t \in [t_1; t_2]$ выполнено

$$P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'_t + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'_t = 0. \quad (4)$$

Определение 1.8. Дифференциальное уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если $\exists F(x, y) : P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y)$.

Тогда $dF(x, y) = 0 \Rightarrow F(x, y) = \text{const}$, то есть $F(x, y)$ определяет неявную функцию $y(x)$.

Теорема 1.1. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в области D . Для того, чтобы уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ являлось уравнением в полных дифференциалах, необходимо выполнение условия $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $(x, y) \in D$. Если же область D ещё и одновсвязна, то условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ является достаточным.

Доказательство. Пусть $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ – уравнение в полных дифференциалах, тогда $\exists F(x, y) : P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y) \Rightarrow P = \frac{\partial F}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$. По условию P и Q – непрерывно дифференцируемы, тогда $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ – непрерывные функции, значит

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (x, y) \in D. \quad (5)$$

Пусть теперь D – одновсвязная область. Рассмотрим значение интеграла

$$F = \int_{(x_0, y_0)}^{(x; y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

который берётся по кривой γ , лежащей в D и соединяющей точки (x_0, y_0) и $(x; y)$. Пусть $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда по теореме о независимости интеграла от пути интегрирования выходит, что значение интеграла не зависит от пути интегрирования γ , а является функцией от (x, y) , значит $F = F(x, y)$ – функция и $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y)$. ■

Определение 1.9. Непрерывно дифференцируемая функция $\mu(x, y) \neq 0$ в области G называется интегрирующим множителем для уравнения в полных дифференциалах $\mu(x, y)(P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = 0$, если исходное уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ не является уравнением в полных дифференциалах.

Если $\mu(x, y)$ – интегрирующий множитель, то для достаточного условия имеем

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \Leftrightarrow P \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \frac{\partial P}{\partial y} = Q \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Полученное уравнение не легче исходного, так как теперь задача свелась к нахождению μ . Обычно интегрирующий множитель ищут в виде $\mu(x)$, $\mu(y)$, $\mu(x^2 + y^2)$, $\mu(x^\alpha, y^\beta)$.

1.2.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим ДУ вида $P(y)dx + Q(x)dy = 0$, где $P(y) \in C^1_{[y_1; y_2]}$, $Q(x) \in C^1_{[x_1; x_2]}$. Если $\exists y_0 : P(y_0) = 0$ или $\exists x_0 : Q(x_0) = 0$, тогда

$$\begin{cases} x = t \\ y = y_0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_0 \\ y = t \end{cases} \quad (6)$$

являются интегральными кривыми рассматриваемого ДУ соответственно. Если же выполняется $P(x, y) \neq 0$ и $Q(x, y) \neq 0$, то применим к уравнению интегрирующий множитель

$$\mu(x, y) = \frac{1}{P(x, y)Q(x, y)},$$

получив уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{dx}{Q(x)} + \frac{dy}{P(y)} = 0. \quad (7)$$

Значение $\mu(x, y)$ действительно является интегрирующим множителем, так как выполняется

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{Q(x)} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{P(y)} \right) = 0. \quad (8)$$

Тогда

$$dF(x, y) = \frac{dx}{Q(x)} + \frac{dy}{P(y)} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{Q(x)} \Rightarrow F(x, y) = \int_{x_1}^x \frac{dt}{Q(t)} + C(y), \quad (9)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{P(y)} = C'(y) \Rightarrow C(y) = \int_{y_1}^y \frac{dt}{P(t)} + C_1 \Rightarrow F(x, y) = \int_{x_1}^x \frac{dt}{Q(t)} + \int_{y_1}^y \frac{dt}{P(t)} + C_1 = \text{const}. \quad (10)$$

Определение 1.10. Если дифференциальное уравнение вида $P_1(x, y)dx + Q_1(x, y)dy = 0$ может быть сведено к виду $P(y)dx + Q(x)dy = 0$, то такое уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными.

Утверждение 1.2. Задача Коши уравнения с разделяющимися переменными $P(y)dx + Q(x)dy = 0$ задаётся в виде $y(x_1) = y_1$, а её решение в виде

$$\int_{x_1}^x \frac{dt}{Q(t)} + \int_{y_1}^y \frac{dt}{P(t)} = 0. \quad (11)$$

1.2.3 Однородные уравнения

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$y' = y \left(\frac{y}{x} \right),$$

которое назовём уравнением с однородной правой частью. Сделаем замену $v(x) = \frac{y}{x}$, тогда $y(x) = v(x) \cdot x$, $y'_x = x \cdot v'_x + v = g(v)$, откуда имеем $x \frac{dv}{dx} = g(v) - v$. Если $\exists g(v_0) = v_0$, то v_0 – решение уравнения $x \frac{dv}{dx} = g(v) - v$. Если же $v \neq g(v)$, тогда

$$\frac{dv}{g(v) - v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |x| + C = \int_{v_0}^v \frac{dt}{g(t) - t}. \quad (12)$$

Таким образом, найдено решение исходного уравнения с однородной правой частью в квадратурах.

Определение 1.11. Функция $F(x^1, x^2, \dots, x^n)$ называется однородной степени m , если $\forall \lambda > 0 \rightarrow F(\lambda x^1, \lambda x^2, \dots, \lambda x^n) = \lambda^m F(x^1, x^2, \dots, x^n)$.

Пример 1.1. Рассмотрим уравнение $P(x, y)dx = Q(x, y)dy$. Если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции степени m , тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = \frac{x^m P(1, \frac{y}{x})}{x^m Q(1, \frac{y}{x})} = \frac{P(1, \frac{y}{x})}{Q(1, \frac{y}{x})} = g\left(\frac{y}{x}\right) \quad (13)$$

Таким образом исходное уравнение свелось к уравнению с однородной правой частью.

1.2.4 Линейные уравнения первого порядка

Определение 1.12. Дифференциальное уравнение вида $y' + a(x)y = f(x)$ – линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Дифференциальное уравнение вида $y' + a(x)y = 0$ – линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка. При этом $a(x) \in C^1_{I(x)}$, $f(x) \in C_{I(x)}$, где $I(x)$ – область, на которой определены функции $a(x)$ и $f(x)$.

Введём оператор $L = \frac{d}{dx} + a(x)$, который действует на множество непрерывно дифференцируемых функций $\varphi \in C^1_{I(x)}$. Тогда уравнение $y' + a(x)y = f(x)$ переписывается в виде $L(y) = f(x)$, а уравнение $y' + a(x)y = 0$ переписывается в виде $L(y) = 0$.

Теорема 1.2. Введённый оператор $L = \frac{d}{dx} + a(x)$ – линейный оператор.

Доказательство. Рассмотрим линейную комбинацию $c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$:

$$L(c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)) = (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)' + a(x)(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1L(\varphi_1) + c_2L(\varphi_2) \quad (14)$$

Таким образом, $L(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1L(\varphi_1) + c_2L(\varphi_2)$, то есть L – линейный оператор. ■

Утверждение 1.3. Решением уравнения $y' + a(x)y = 0$ является

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

Доказательство. Найдём решение уравнения $y' + a(x)y = 0$:

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx \Rightarrow \ln |y| = - \int_{x_0}^x a(t)dt + \ln C \Rightarrow |y| = Ce^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}, \quad C > 0 \quad (16)$$

Раскрывая модуль и объединяя полученное решение с нулевым ($y \equiv 0$), имеем

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

■

Утверждение 1.4. Решением уравнения $y' + a(x)y = f(x)$ является

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (18)$$

Доказательство. Найдём решение уравнения $y' + a(x)y = f(x)$: воспользуемся уже найденным решением однородного уравнения, применяя метод вариации постоянной. То есть будем искать решение в виде

$$y = C(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}. \quad (19)$$

Подставим это решение в исходное уравнение:

$$C'(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} - a(x)C(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} + a(x)C(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} = f(x) \quad (20)$$

$$C'(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} = f(x) \Rightarrow C(x) = \int_{x_0}^x f(t)e^{\int_{x_0}^t a(s)ds} + C_0 \quad (21)$$

Таким образом найден вид $C(x)$. Теперь подставим эту функцию:

$$y = C_0 e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} + e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} \int_{x_0}^x f(t)e^{\int_{x_0}^t a(s)ds} \quad (22)$$

$$y = C_0 e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} + \int_{x_0}^x f(t)e^{-\int_{x_0}^t a(s)ds} \quad (23)$$

Из полученного решения видно, что оно является суммой решения однородного уравнения и частного решения. ■

Утверждение 1.5. Если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – некоторые решения уравнения $y' + a(x)y = f(x)$, то $z(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ – решение однородного уравнения $y' + a(x)y = 0$.

Доказательство. По условию $\varphi_1' + a(x)\varphi_1 = f(x)$, $\varphi_2' + a(x)\varphi_2 = f(x)$, откуда очевидно, что $(\varphi_1 - \varphi_2)' + a(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$. Обозначив $z = \varphi_1 - \varphi_2$, получим $z' + a(x)z = 0$, то есть z – решение однородного уравнения. ■

1.3 Уравнение Бернулли и Риккати

1.3.1 Уравнение Бернулли

Определение 1.13. Д.у. вида $y' + a(x) \cdot y = y^r \cdot f(x)$ ⁽²⁴⁾, где $a(x), f(x) \in C^1, r \in \mathbb{R}, r \neq 1$ называется уравнением Бернулли.

Утверждение 1.6. Если $r > 0$, то $y \equiv 0$ - тривиальное решение. Пусть $y \neq 0$, разделим ДУ на $y^r \Rightarrow \frac{y'}{y^r} + a(x) \cdot y^{1-r} = f(x)$. Замена: $u(x) = y^{1-r} \Rightarrow u' = (1-r) \cdot y^{-r} \cdot y' \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{1}{1-r} \cdot u' + a(x) \cdot u = f(x)$ - свелось к линейному уравнению.

1.3.2 Уравнение Риккати

Определение 1.14. Д.у. вида $y' + a(x) \cdot y^2 + b(x) \cdot y + c(x)$ ⁽²⁵⁾, где $a(x), b(x) \in C^1_{I(x)}$, $c(x) \in C_{I(x)}$ называется уравнением Риккати.

Утверждение 1.7. В общем случае уравнение Риккати не допускает решений в квадратах, однако, если известно некоторое решение $y = \varphi(x)$, то сделав замену $y = u + \varphi$, получаем: $\varphi' = u\varphi^2 + b\varphi + c$
 $\varphi' + u' = u\varphi^2 + 2a\varphi u + au^2 + b\varphi + bu + c \Rightarrow u' = au^2 + (2a\varphi + b)u$ - свелось к уравнению Бернулли.

1.4 Методы понижения порядка дифференциальных уравнений

Утверждение 1.8. Рассмотрим множество преобразований плоскости

$\bar{x} = \varphi(x, y, \lambda), \bar{y} = \psi(x, y, \lambda)$ ⁽²⁶⁾. В (26) каждому $\lambda \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ соответствует некоторое преобразование, например, $\bar{x} = \lambda x, \bar{y} = \lambda y, \lambda > 0$ - гомотетия. Множество преобразований (26) является группой преобразований, если оно содержит любую композицию (26), т.е. $\exists \lambda_0 : \varphi(\varphi(x, y, \lambda_1), \psi(x, y, \lambda_2)) = \varphi(x, y, \lambda_0)$, содержит тождественное преобразование, т.е. $\exists \lambda_0 : \varphi(x, y, \lambda_0) = x; \psi(x, y, \lambda_0) = y$, и вместе с любым преобразованием содержит и обратное: $\forall \lambda \in \mathcal{D} : \exists \lambda_0 : x = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda_0); y = \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda_0)$
Т.о. если (26) - группа, то $x = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda), y = \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda)$; если в ДУ $y' = f(x, y)$ осуществить переход к новым координатам, то

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\psi'_x d\bar{x} + \psi'_y d\bar{y}}{\varphi'_x d\bar{x} + \varphi'_y d\bar{y}} = f(\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda), \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda)) = \tilde{f}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\psi'_x + \psi'_y \cdot \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}}{\varphi'_x + \varphi'_y \cdot \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}} = \tilde{f}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda) \Rightarrow \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{\tilde{f} \cdot \varphi'_x - \psi'_x}{\psi'_y - \tilde{f} \cdot \varphi'_y} \end{aligned} \quad (27)$$

(27) является записью $y' = f(x, y)$ в новых координатах. Говорят, что $y' = f(x, y)$ допускает группу $x = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda), y = \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda)$, если оно не изменяется при переходе к новым переменным, т.е. $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \tilde{f}(\bar{x}, \bar{y})$.

Следствие 1.2.1. Рассматриваем уравнения вида $F(x, y, y', y'') = 0$ ⁽²⁸⁾

1. $F(x, y'', y') = 0$ ⁽²⁹⁾ Замена $y'(x) = v(x) \Rightarrow y''(x) = v'(x)$ и (29) в этом случае имеет вид $F(x, v(x), v'(x)) = 0 \xrightarrow{\text{решаем}} V(x) = y(x, c_1)$. Тогда решение (29) запишется в виде

$\frac{dy}{dx} = g(x, c_1) \Rightarrow y(x) = c_2 + \int g(x, c_1) dx$. Заметим, что (29) допускает группу сдвига $x = \bar{x}$, $y = \bar{y} + y_0$

2. $\boxed{F(y, y', y'') = 0}^{(30)}$ (не содержит явно x). Замена: $y' = V(y)$, тогда

$y'' = \frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dy} \frac{dy}{dx} = V \frac{dV}{dy} \Rightarrow F(y, V, y \frac{dV}{dy}) = 0$ - ДУ первого порядка.

Решение $V(y) = g(y, c_1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = g(y, c_1) \Rightarrow$ Решение (30): $\int \frac{dy}{g(y, c_1)} = x + c_2$.

Заметим, что (30) допускает группу сдвигов $x = \bar{x} + x_0$, $y = \bar{y}$

3. $\boxed{F(x, y'', y', y) = 0}$ и F - однородная степени m по y'', y', y , т.е. $\forall \lambda > 0 \rightarrow$

$F(x, \lambda y'', \lambda y', \lambda y) = \lambda^m \cdot F(x, y'', y', y)$. В таком случае ДУ допускает группу

$x = \bar{x}$, $y = \lambda \bar{y}$. Замена: $z(x) = \frac{y'}{y} \Rightarrow y' = z(x)y$

$\Rightarrow y'' = z'y + zy' = z'y + z^2y = y \cdot (z' + z^2) \Rightarrow F(x, y, zy, y(z' + z^2)) = 0$

$\Rightarrow y^m \cdot F(x, 1, z, z' + z^2) = 0$ - относительно z имеем уравнение первого порядка.

Если его решение $z(x) = g(x, c_1)$, то $\frac{y'}{y} = g(x, c_1) \Rightarrow \frac{dy}{y} = g(x, c_1) dx \Rightarrow$

$\ln |y| = \int g(x, c_1) dx + c_2$

4*. Будем говорить, что функция $F(x, y, y'', \dots, y^{(n)})$ является квазиоднородной функцией степени r , если $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall \lambda > 0 : F(\lambda x, \lambda^\alpha y, \lambda^{\alpha-1} y', \dots, \lambda^{\alpha-n} y^{(n)}) = \lambda^r \cdot F(x, y, \dots, y^{(n)})$.

Рассмотрим множество преобразований:

$$\begin{cases} x = \lambda \bar{x} \\ y = \lambda^\alpha \bar{y} \end{cases}, \quad \text{где } \lambda > 0 \quad (31)$$

Такое множество преобразований перепишем в виде:

$$\begin{cases} x = e^\beta \cdot \bar{x} \\ y = e^{\alpha\beta} \bar{y} \end{cases}$$

Если F в (30) является квазиоднородной, то (30) допускает группу растяжений (31):

$$\boxed{F(x, y'', y', y) = 0} \xrightarrow{\text{преобр.}} F(\lambda \bar{x}, \lambda^\alpha \bar{y}, \lambda^{\alpha-1} \bar{y}', \lambda^{\alpha-2} \bar{y}'') = \lambda^r \cdot F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'') = 0$$

\Downarrow

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'') = 0$$

$$\text{Замена: } \begin{cases} x = e^t \\ y = z(t) \cdot e^{2t} \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{z'_t \cdot e^{\alpha t} + z \cdot \alpha \cdot e^{\alpha t}}{e^t} = e^{(\alpha-1)t} \cdot (z'_t + \alpha z)$$

\Downarrow

$$\begin{aligned} y''_{xx} &= \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(\alpha-1) \cdot e^{(\alpha-1)t} \cdot (z'_t + \alpha z) + e^{(\alpha-1)t} \cdot (z''_{tt} + \alpha z'_t)}{e^t} = \\ &= e^{(\alpha-2)t} \cdot (z''_{tt} + (2\alpha-1) \cdot z'_t + \alpha \cdot (\alpha-1)z) \end{aligned}$$

\Downarrow

$$\begin{aligned} &F(e^t; z \cdot e^{\alpha t}; e^{(\alpha-1)t} \cdot (z'_t + \alpha z); e^{(\alpha-2)t} (z''_{tt} + (2\alpha-1)z'_t + \alpha \cdot (\alpha-1)z)) = \\ &= e^{rt} \cdot F(1; z; z'_t + \alpha z; z''_{tt} + (2\alpha-1)z'_t + \alpha \cdot (\alpha-1)z) = 0 \text{ - не содержит } x, \text{ т.е. свелось к случаю 2} \end{aligned}$$

1.5 Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной

Утверждение 1.9. Рассмотрим $\boxed{F(x, y, y') = 0}^{(32)}$, где $F(x, y, y')$ как функция трёх переменных является непрерывно дифференцируемой в области $G \subset \mathbb{R}^3$

Решение уравнения $F(x, y, y') = 0$ будем представлять как кривую в параметрическом виде:

$$\gamma: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in [t_1, t_2], \quad \varphi(t), \psi(t) \in C^1_{[t_1, t_2]} \quad (33)$$

Кривая (33), является интегральной кривой (32) \Rightarrow

$$\Rightarrow F\left(\varphi(t), \psi(t), \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}\right) = 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2] \quad (34)$$

Будем решать эквивалентную систему положив $p = \frac{dy}{dx}$:

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ dy = p dx \end{cases} \quad (35)$$

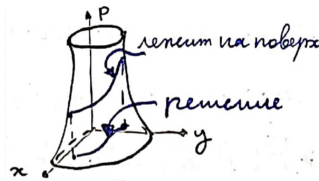
Утверждение 1.10. Уравнение (32) эквивалентно системе (35).

Доказательство. Пусть γ - интегр. кривая (32). Положим $p = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} = \frac{dy}{dx}$ - второе уравнение в системе (35) выполнено, а первое выполнено в силу подстановки в (34). Обратно, пусть $x(t) = \varphi(t)$, $y(t) = \psi(t)$, p - решение (34). \Rightarrow Из второго уравнения системы:

$p = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} \rightarrow$ Подставляем в первое уравнение системы и получаем само уравнение (34) ■

Утверждение 1.11. Рассмотрим метод решения (32), который называется методом введения параметра.

Первое ур-ние в системе (35) рассмотрим как задающее в $\mathbb{R}^3_{(x,y,p)}$ гладкую поверхность S , для которой параметрическое представление имеет вид:



$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ p = \chi(u, v) \end{cases} \Rightarrow F(\varphi(u, v); \psi(u, v); \chi(u, v)) \equiv 0$$

Потребуем, чтобы $\text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\delta \varphi}{\delta u} & \frac{\delta \psi}{\delta u} & \frac{\delta \chi}{\delta u} \\ \frac{\delta \varphi}{\delta v} & \frac{\delta \psi}{\delta v} & \frac{\delta \chi}{\delta v} \end{pmatrix} = 2, \quad \forall u, v \in G$ т.е. S была простой гладкой пов.

Тогда остаётся удовлетворить второму уравнению системы (35):

$$\frac{\delta \psi}{\delta u} du + \frac{\delta \psi}{\delta v} dv = \chi \cdot \left(\frac{\delta \varphi}{\delta u} du + \frac{\delta \varphi}{\delta v} dv \right) \Rightarrow \left(\frac{\delta \psi}{\delta u} - \chi \frac{\delta \varphi}{\delta v} \right) du = \left(\chi \frac{\delta \varphi}{\delta v} - \frac{\delta \psi}{\delta v} \right) dv \quad (36)$$

Если $P(u, v) \neq 0 \forall (u, v) \in G$, то из (36) получаем Д.У.: $\frac{du}{dv} = \frac{Q(u, v)}{P(u, v)}$

Это решение $u = u(v, c)$, тогда $\begin{cases} x = \varphi(u(v, c), v) = x(v, c) \\ y = \psi(u(v, c), v) = y(v, c) \end{cases}$ - является параметрическим представлением решения (32)

Если же существует связь между u и v : $u = f(v)$, $P(f(v), v) = Q(f(v), v) = 0 \forall v \in G$, то $u = f(v)$ явл. решением $\left(\chi \frac{\delta \varphi}{\delta v} - \frac{\delta \psi}{\delta v}\right) dv$, а

$$\begin{cases} x = x(v) \\ y = y(v) \end{cases} \quad - \text{явл. решением (36)}$$

2 Билет 2. Задача Коши

2.1 Принцип сжимающих отображений

Работаем в $E = \mathbb{R}^n$ - пространстве точек с n координатами. E - аффинное пространство, а \vec{E} - его присоединенное линейное пространство, состоящее из векторов, натянутых на точки E .

Определение 2.1. Пусть L - это векторное пространство, и на нем задано отображение $\|\cdot\| : L \rightarrow \mathbb{R}$ такое, что:

1. $\forall x \in L \mapsto \|x\| \geq 0$. А также $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
2. $\forall x \in L \ \& \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3. $\forall x, y \in L \mapsto \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ - неравенство треугольника.

Тогда данное отображение называется нормой, а пространство L нормированным.

Пример 2.1. Приведем пример норм. Пусть $a(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда норму можно определить, допустим, так:

$$\|a\|_1 = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}. \quad (37)$$

Или так:

$$\|a\|_2 = \max_{j=1, \dots, n} |x_j|. \quad (38)$$

И тогда можно ввести понятие эквивалентности норм.

Определение 2.2. Пусть снова L - линейное пространство. Тогда нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на L называются эквивалентными, если $\exists C_1, C_2 > 0 : \forall x \in L \mapsto C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1$.

Как видно, для определенных выше двух норм это соотношение удовлетворяется.

Утверждение 2.1. В конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.

Рассмотрим множество функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$ для некоторых неравных $a, b \in \mathbb{R}$ и обозначим данное множество $C[a; b]$. Понятно, что $C[a; b]$ является линейным пространством. Тогда введем на нем норму.

Определение 2.3. Нормой функции $f(x) \in C[a; b]$ будем называть число

$$\|f(x)\| = \max_{x \in [a; b]} |f(x)|.$$

Определение 2.4. Набор функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) \in C[a; b]$ будем называть вектор-функцией и обозначать $f(x) = \vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T$.

Определение 2.5. Вектор-функция $f(x)$ называется непрерывной (дифференцируемой, непрерывно дифференцируемой и т.п.), если все ее компоненты непрерывны (дифференцируемы, непрерывно дифференцируемы и т.п.).

Определение 2.6. Модулем вектор-функции $f(x)$ назовем число

$$|f(x)| = \sqrt{\sum_{j=1}^n f_j^2(x)}. \quad (39)$$

Норму вектор-функции можно определить как

$$\|f(x)\|_1 = \max_{x \in [a; b]} |f(x)|.$$

Или же как

$$\|f(x)\|_2 = \max_{j=1, \dots, n} \max_{x \in [a; b]} f_j(x).$$

Понятно, что эти две нормы эквивалентны.

Определение 2.7. Пусть имеется функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, где $f_n(x) \in C[a; b]$ - линейное пространство функций с нормой (1 или 2 - неважно). Тогда говорят, что данная последовательность сходится к функции $f(x)$ по норме, если:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0. \quad (40)$$

Аналогично все то же самое и точно так же определяется и для вектор-функций $f(x) = \vec{f}(x) \in C[a; b]^n$.

Определение 2.8. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется фундаментальной, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \ \& \ \forall m \geq N \mapsto \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon. \quad (41)$$

Определение 2.9. Функциональное пространство L называется полным по [данной] норме, если любая фундаментальная функциональная последовательность данного пространства сходится по норме к функции из этого же пространства L .

Теорема 2.1. Функциональное пространство $C[a; b]$ с нормой $\|\cdot\|_1$ является полным.

Доказательство. Возьмем произвольную функциональную последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ из нашего пространства непрерывных функции. Тогда из определения фундаментальности следует, что $\|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$.

Однако $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon \ \forall x \in [a; b]$.

А значит, последовательность $f_n(x)$ сходится к некоторой $f(x)$, причем равномерно на $[a; b]$ (числовая последовательность $\|f_n(x)\|$ мажорирует функциональную последовательность $f_n(x)$).

Так как $f_n(x) \in C[a; b]$ - непрерывны $\forall n \in \mathbb{N}$, и последовательность сходится равномерно на $[a; b]$, то предельная функция $f(x)$ также является непрерывной на $[a; b]$, а значит, $f(x) \in C[a; b]$.

Таким образом, последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f(x) \in C[a; b]$. В силу произвольности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ заключаем, что функциональное пространство $C[a; b]$ с нормой $\|\cdot\|_1$ является полным. ■

Определение 2.10. Полное нормированное линейное пространство называется Банаховым. Обозначается B .

Определение 2.11. Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ называется сходящимся по норме,

если последовательность его частичных сумм $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ является сходящейся по норме.

Определение 2.12. Пусть $\forall x \in M \subseteq B$ определен элемент $Ax \in B$. Тогда говорят, что на множестве B задан оператор A с областью определения M .

Будем рассматривать уравнение $x = Ax$.

Определение 2.13. Множество $M \subseteq B$ называется ограниченным, если $\exists C > 0$ такое, что $\forall x \in M \mapsto \|x\| \leq C$.

Определение 2.14. Оператор A называется сжатием на M , если:

1. $\forall x \in M \mapsto Ax \in M$;
2. $\exists k \in (0; 1) : \forall x, y \in M \mapsto \|Ax - Ay\| \leq k\|x - y\|$.

Теорема 2.2 (Принцип сжимающих отображений). Пусть множество $M \subseteq B$ является ограниченным и замкнутым, а оператор A является сжатием. Тогда решение уравнения $x = Ax$ существует и единственно.

Доказательство. Будем использовать итерационный метод, согласно которому мы выбираем начальное x_0 , а затем строим последовательность $x_n = Ax_{n-1}$. Тогда, если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax$, то $x = Ax$.

Пусть $x_n = S_n = x_0 + (x_1 - x_0) + \dots + (x_n - x_{n-1})$. Докажем, что $\|x_{n+1} - x_n\| \leq 2Ck^n$ для некоторого $C > 0$, ограничивающего последовательность x_n . Сделаем это по индукции.

База индукции: $\|x_1 - x_0\| \leq \|x_1\| + \|x_0\| \leq 2C$.

Предположим, что $\|x_n - x_{n-1}\| \leq 2Ck^{n-1}$. Тогда получаем, что $\|x_{n+1} - x_n\| = \|Ax_n - Ax_{n-1}\| \leq k\|x_n - x_{n-1}\| \leq 2Ck^n$.

И получаем, что $x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (x_j - x_{j-1}) \leq x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} 2Ck^{j-1} < \infty$.

А значит $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. А поскольку M замкнуто, то $x \in M$.

Теперь рассмотрим разность $\|Ax_n - Ax\| \leq k\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Это означает, что $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax$.

Учитывая, что $x_{n+1} = Ax_n$, то, перейдя к пределу с обеих частей равенства, мы получаем, что итерационный метод сходится к решению уравнения $x = Ax$. И таким образом, доказано существование решения. Теперь докажем его единственность.

Пойдем от противного: пусть x и y — два разных решения. Тогда $\|x - y\| = \|Ax - Ay\| \leq k\|x - y\|$. Учитывая, что $k \in (0; 1)$, то данная ситуация возможна тогда и только тогда, когда $\|x - y\| = 0$. Следовательно, $x = y$, что противоречит тому, что это два разных решения. Итак, теорема доказана. ■

2.2 Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений

Определение 2.15. Система вида

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(t, \bar{x}) \\ \dot{x}^2 = f^2(t, \bar{x}) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f^n(t, \bar{x}) \end{cases} \quad (42)$$

называется нормальной системой дифференциальных уравнений n -ого порядка.

Определение 2.16. Система

$$\begin{cases} x^1(t_0) = x_0^1 \\ x^2(t_0) = x_0^2 \\ \dots \\ x^n(t_0) = x_0^n \end{cases} \quad (43)$$

называется начальным условием

Утверждение 2.2. Решить задачу Коши означает решить нормальную систему дифференциальных уравнений при заданном начальном условии

Теорема 2.3 (Теорема Коши о существовании и единственности решения). Пусть $\forall i, j = \overline{1, n}$ функции $f^i, \frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ непрерывны в области $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, тогда, $\forall (t_0, \bar{x}_0) \in \Omega \exists h > 0 : \forall t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ решение задачи Коши существует и единственно.

Лемма 2.1. Если $\bar{f}(t, \bar{x})$ - непрерывны на Ω , то система уравнений

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_0 + \int_{t_0}^t \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau \quad (44)$$

эквивалентна задаче Коши.

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ - решение (42) при условии (43), тогда

$$\dot{\varphi}^i = f^i(t, \varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t))$$

Проинтегрируем полученное равенство по отрезку $[t_0, t]$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \dot{\varphi}^i(\tau) d\tau &= \int_{t_0}^t f^i(\tau, \varphi^1(\tau), \dots, \varphi^n(\tau)) d\tau \\ \varphi^i(t) - \varphi^i(t_0) &= \int_{t_0}^t f^i(\tau, \bar{\varphi}(\tau)) d\tau \\ \varphi^i(t) &= x_0^i + \int_{t_0}^t f^i(\tau, \bar{\varphi}(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

Теперь пусть $\bar{\varphi}(t)$ - решение (44). Тогда

$$\varphi^i(t) \equiv x_0^i + \int_{t_0}^t f^i(\tau, \bar{\varphi}(\tau)) d\tau$$

Отсюда видно, что функция $\varphi^i(t)$ - дифференцируема. Тогда

$$\begin{cases} \dot{\varphi}^i(t) = f^i(t, \bar{\varphi}(t)) \\ \varphi^i(t_0) = x_0^i \end{cases} \quad (45)$$

■

Следствие 2.3.1. Из 2 части леммы следует, что решение задачи Коши непрерывно дифференцируемо.

Введем оператор $A(\bar{x}) = \bar{x}_0 + \int_{t_0}^t \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau$. Тогда систему интегральных уравнений (44) можно записать в виде

$$\bar{x}(t) = A(\bar{x}) \quad (46)$$

Лемма 2.2.

$$\left\| \int_{t_0}^t \bar{x}(\tau) d\tau \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|\bar{x}(\tau)\| d\tau \right|$$

Доказательство.

$$\left| \int_{t_0}^t x^i(\tau) d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |x^i(\tau)| d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t \|\bar{x}(\tau)\| d\tau \right| \quad (47)$$

Таким образом $\max\{|\int_{t_0}^t x^i(\tau) d\tau|\} = \|\int_{t_0}^t \bar{x}(\tau) d\tau\| \leq \int_{t_0}^t \|\bar{x}(\tau)\| d\tau$ ■

Лемма 2.3. (Адамара) Пусть $\bar{f}(\bar{x}), \frac{\partial f^i}{\partial x_j}$ непрерывны в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - замкнутой, ограниченной, выпуклой области. Тогда $\forall i = \overline{1, n}, \bar{y} \in \Omega \hookrightarrow \|\bar{f}(\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x})\| \leq n^{3/2} K_1 \|\bar{y} - \bar{x}\|$, где $K_1 = \max_{i,j=\overline{1,n}} \{\max_{x \in \Omega} \left| \frac{\partial f^i}{\partial x_j} \right| \}$

Доказательство. $|\bar{f}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (f^i)^2}$, $\|\bar{f}\|_C = \max_{x \in \Omega} \{|\bar{f}(\bar{x})|\}$

Ω - компакт, поэтому непрерывность частных производных позволяет говорить о существовании K_1 . Возьмем производные точки \bar{x} и \bar{y} и соединим их отрезком $\bar{x} + t(\bar{y} - \bar{x})$, где $t \in [0, 1]$. Рассмотрим значение компоненты f^i на отрезке:

$$f^i(\bar{x} + t(\bar{y} - \bar{x})) = f^i(t)$$

$f^i(t)$ - дифференцируема, тогда

$$\begin{aligned} |f^i(\bar{y}) - f^i(\bar{x})| &= |f^i(1) - f^i(0)| = \left| \frac{df^i}{dt}(t^*) \cdot (1 - 0) \right| = \\ &= \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(t^*) \cdot (y^j - x^j) \right| \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(t^*) \right| \cdot |y^j - x^j| \leq K_1 \|\bar{y} - \bar{x}\| \cdot n \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим вектор-функцию

$$\begin{aligned} |\bar{f}(\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x})| &= \sqrt{\sum_{k=1}^n (f^k(\bar{y}) - f^k(\bar{x}))^2} \leq K_1 n^{3/2} \|\bar{y} - \bar{x}\| \\ \Rightarrow \|\bar{f}(\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x})\| &\leq K_1 n^{3/2} \|\bar{y} - \bar{x}\| \end{aligned}$$

Доказательство. (Основная теорема)

Докажем, что $A(\bar{x})$ из системы (46) является сжатием.

Рассмотрим $\Pi = \{\|\bar{x}(t) - \bar{x}_0(t)\| \leq b, |t - t_0| \leq a\} \subset \Omega$. Определим $K = \|\bar{f}\|_C = \max_{\Pi} |\bar{f}|$. K_1 тоже определено в силу условий.

Рассмотрим $\Pi_h = \{\|\bar{x}(t) - \bar{x}_0(t)\| \leq b, |t - t_0| \leq h \leq a\}$

Банахово пространство B - множество функций $\bar{x}(t)$ непрерывных на отрезке $|t - t_0| \leq h$. $M \subset B$ - множество функций $\|\bar{x}(t) - \bar{x}_0\| \leq b$. M ограничено, так как $\forall \bar{x}(t) \in M \hookrightarrow \|\bar{x}(t)\| = \|\bar{x}(t) - \bar{x}_0 + \bar{x}_0\| \leq b + \|\bar{x}_0\| = C$

Докажем, что M замкнуто. Пусть $\bar{x}_n(t), n = 1, 2, \dots$ - последовательность точек в M , такая что $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n(t) = \bar{x}(t)$. $\|\bar{x}(t)\| = \|\bar{x}(t) - \bar{x}_n + \bar{x}_n\| \leq \|\bar{x}(t) - \bar{x}_n\| + \|\bar{x}_n\| \leq \varepsilon + b \Rightarrow \bar{x}(t) \in M$
 Подберем h так, чтобы $A : M \rightarrow M$. То есть $\|A(\bar{x}) - \bar{x}_0\| \leq b$.

$$\|A(\bar{x}) - \bar{x}_0\| = \left\| \int_{t_0}^t \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|\bar{f}\| d\tau \right| \leq Kh$$

Получаем условие $h \leq b/K$

Чтобы доказать, что A - сжатие, рассмотрим норму

$$\begin{aligned} \|A(\bar{y}) - A(\bar{x})\| &= \left\| \int_{t_0}^t (\bar{f}(\tau, \bar{y}(\tau)) - \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau))) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|\bar{f}(\tau, \bar{y}) - \bar{f}(\tau, \bar{x})\| d\tau \right| \leq K_1 n^{3/2} \|\bar{y} - \bar{x}\| \cdot \left| \int_{t_0}^t d\tau \right| \leq K_1 h n^{3/2} \|\bar{y} - \bar{x}\| \end{aligned}$$

Откуда второе условие: $h < \frac{1}{n^{3/2} K_1}$

Тогда оператор A будет сжатием. Соответственно решение задачи Коши существует и единственно. ■

2.3 Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения n -го порядка в нормальном виде

Определение 2.17. Уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \quad (48)$$

называется уравнением n -го порядка в нормальной форме.

Определение 2.18. Система

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad (49)$$

называется начальным условием уравнения n -го порядка в нормальной форме.

Утверждение 2.3. Решить задачу Коши означает найти такое решение (48), которое удовлетворяет условию (49)

Теорема 2.4 (Теорема Коши о существовании и единственности решения). Если $f, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ непрерывны в $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, тогда $\forall (x_0, \bar{y}_0) \in \Omega \exists h > 0 : \forall x \in [x_0 + h, x_0 - h]$ решение задачи Коши существует и единственно.

Доказательство. Введем следующие функции: $y(x) = v_1(x), y'(x) = v_2(x), \dots, y^{(n-1)}(x) = v_n(x)$. Таким образом получаем систему уравнений в нормальной форме

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dx} = v_2 \\ \dots \\ \frac{dv_n}{dx} = f(x, \bar{v}) \end{cases} \quad (50)$$

А для нее решение существует и единственно. ■