1 Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений

1.1 Основные понятия

Определение 1.1. *Уравнение вида*

$$F(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением, где x – аргумент, $y(x)$ – неизвестная функция, F – известная функция.

Определение 1.2. *Если это уравнение удается разрешить относительно старшей производной, такое дифференциальное уравнение называется разрешенным относительно старшей производной и записывается в виде*

$$y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

Порядок уравнения определяется порядком старшей производной от y.

Определение 1.3. *Функция $y = \varphi(x)$ называется решением ДУ, если она n раз дифференцируема и*

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0 \quad \forall x$$

Определение 1.4. *Система n уравнений*

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f_1(t, x^1(t), \dots, x^n(t)) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f_n(t, x^1(t), \dots, x^n(t)) \end{cases}$$

где $x^1(t), \dots, x^n(t)$ – искомые функции, называется нормальной системой ДУ n-го порядка.

Рассмотрим ДУ $y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$. Введем обозначения: $y = v_1(x)$, $y' = v_2(x)$, $y'' = v_3(x)$, $\dots$, $y^{(n-1)} = v_n(x)$. Тогда $f(x, v_1, v_2, \dots, v_n) = \dot{v}_n$.

Покажем, что

$$f(x, v_1, v_2, \dots, v_n) = \dot{v}_n \Leftrightarrow y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

В силу (1.4) видно, что любое решение (1.2) есть решение (1.5). Пусть вектор-функция

$$\vec{v}(x) = \begin{pmatrix} v^1 \\ \dots \\ v^n \end{pmatrix}$$

является решением (1.5). Тогда, в силу (1.4) имеем