Формула Лиувилля-Остроградского для нормальной линейной однородной системы уравнений и для линейного однородного уравнения n-го порядка.

Следующее свойство вронскиана рассмотрим в виде теоремы. Для начала докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 0.1. *[Формула Эйлера дифференцирования определителя]*
Детерминант матрицы представим в виде: $\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & ... & a_n^1 \\ a_1^i & ... & a_n^i \\ ... & ... & ... \\ a_1^n & ... & a_n^n \end{vmatrix} = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} \cdot {a_k}^i {M_i}^k$ *Тогда для*

$$\dot{\Delta}(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot \dot{a_j^i} M_i^j$$

Теорема 0.1. *[Формула Лиувилля-Остроградского]*
Пусть $W(x)-$ вронскиан решений $\vec{\varphi_1}(t), ..., \vec{\varphi_n}(t)$ однородной системы $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$. Тогда имеет место формула:

$$\dot{W(t)} = W(t) \cdot trA$$

где $trA = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kk}(t)$

Доказательство. Зафиксируем среди системы решений функцию $\vec{\varphi_j} = \begin{pmatrix} \varphi_j^1 \\ \varphi_j^2 \\ ... \\ \varphi_j^n \end{pmatrix}$. Рассмотрим i - ую компоненту φ_j^i решения $\vec{\varphi_j}$. Поскольку $\vec{\varphi_j}$ решение, то $\frac{d\vec{\varphi_j}}{dt} = A\vec{\varphi_j} \Rightarrow$

$$\frac{d\varphi_j^i}{dt} = \dot{\varphi_j^i} = \sum_{k=1}^{n} a_k^i \varphi_j^k$$

Рассмотрим вранскиан $W(t)$, продифференцируем его по t

$$\dot{W}(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot \dot{\varphi_j^i} M_j^i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_k^i \varphi_j^k M_j^i$$

Переставим суммы местами

$$\dot{W}(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_k^i \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \varphi_j^k M_j^i = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_k^i \delta_i^k W(t) = W(t) \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_k^i \delta_i^k = W(t) \sum_{k=1}^{n} a_k^k$$

$$\dot{W}(t) = W(t) \cdot trA$$

■

Также можно решить это уравнение и переписать в виде

$$W(t) = W(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^{t} trA(u) du \right)$$

Метод вариации постоянных для линейной неоднородной системы уравнений и для линейного неоднородного уравнения n-го порядка.

$$\text{Рассмотрим } y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x). \tag{1}$$

$\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ – Ф.С.Р. однородного уравнения $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = 0$. Это означает, что

$$\forall k = \overline{1,n} \hookrightarrow \varphi_k^{(n)} + a_1(x)\varphi_k^{(n-1)} + ... + a_n(x)\varphi_k \equiv 0 \tag{2}$$

Перепишем уравнение (1) в эквивалентном виде. Для этого сделаем следующие замены: $y = v_1,\ y^{(1)} = v_2,\ ...,\ y^{(n-1)} = v_n$. Тогда получим:

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dx} = v_2, \\ \frac{dv_2}{dx} = v_3, \\ ..., \\ \frac{dv_n}{dx} = f(x) - a_1(x)v_n - ... - a_n(x)v_1. \end{cases} \tag{3}$$

Будем искать решение (1) в виде

$$y(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + ... + C_n(x)\varphi_n(x)$$

Тогда получается, что решение эквивалентной системы будем искать в виде

$$\vec{v}(x) = \begin{Vmatrix} v_1(x) \\ ... \\ v_n(x) \end{Vmatrix} = C_1(x) \begin{Vmatrix} \varphi_1(x) \\ ... \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) \end{Vmatrix} + ... + C_n(x) \begin{Vmatrix} \varphi_n(x) \\ ... \\ \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{Vmatrix}$$

Рассмотрим функцию $v_k(x) = C_1(x)\varphi_1^{(k-1)} + ... + C_n(x)\varphi_n^{(k-1)}$. Продифференцируем эту функцию по x:

$$\forall k = \overline{1, n-1} \hookrightarrow \dot{v_k}(x) = \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(k-1)} + ... + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(k-1)} + C_1(x)\varphi_1^{(k)} + ... + C_n(x)\varphi_n^{(k)}$$

С другой стороны $\dot{v_k}(x) = v_{k+1} = C_1(x)\varphi_1^{(k)} + ... + C_n(x)\varphi_n^{(k)}$. Тогда получаем

$$\dot{v_k}(x) = C_1(x)\varphi_1^{(k)} + ... + C_n(x)\varphi_n^{(k)} = \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(k-1)} + ... + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(k-1)} + C_1(x)\varphi_1^{(k)} + ... + C_n(x)\varphi_n^{(k)}$$

$$\forall k = \overline{1, n-1} \hookrightarrow \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(k-1)} + ... + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(k-1)} = 0$$

$$k = n:\ \dot{v}_n(x) = \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + ... + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-1)} + C_1(x)\varphi_1^{(n)} + ... + C_n(x)\varphi_n^{(n)} =$$
$$= f(x) - a_1(x)\left(C_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + ... + C_n(x)\varphi_n^{(n-1)}\right) - ... - a_n(x)\left(C_1(x)\varphi_1 + ... + C_n(x)\varphi_n\right)$$

$$\dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + ... + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-1)} + C_1(x)\left(\varphi_1^{(n)} + a_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + ... + a_n(x)\varphi_1\right) + ... +$$
$$+ C_n(x)\left(\varphi_n^{(n)} + a_1(x)\varphi_n^{(n-1)} + ... + a_n(x)\varphi_n\right) = f(x)$$

Из уравнения (2) следует что выражения в скобках равны нулю, тогда получим

$$k = n:\ \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + ... + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-1)} = f(x)$$

Т.е. мы получили следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{C}_1(x)\varphi_1 + ... + \dot{C}_n(x)\varphi_n = 0, \\ ... \\ \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-2)} + ... + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-2)} = 0, \\ \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + ... + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \tag{4}$$

Система (4) это линейная система для определения $\dot{C}_1,\ ...,\ \dot{C}_n$. Определитель этой системы $\Delta = W(x) \neq 0$, а значит система разрешима единственным образом.