1 Билет 1. Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений

1.1 Основные понятия

Определение 1.1. *Уравнение вида*

$$F(x, y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением, где x – аргумент, $y(x)$ – неизвестная функция, F – известная функция.

Определение 1.2. *Если это уравнение удается разрешить относительно старшей производной, такое дифференциальное уравнение называется разрешённым относительно старшей производной и записывается в виде*

$$y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$$

Порядок уравнения определяется порядком старшей производной от y.

Определение 1.3. *Функция $y = \varphi(x)$ называется решением ДУ, если она n раз дифференцируема и*

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0 \quad \forall x,$$

где определена функция $\varphi(x)$ с её производными.

Определение 1.4. *Система n уравнений*

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f_1(t, x^1(t), \ldots, x^n(t)) \\ \ldots \\ \dot{x}^n = f_n(t, x^1(t), \ldots, x^n(t)) \end{cases} \tag{1}$$

где $x^1(t), \ldots, x^n(t)$ – искомые функции, называется нормальной системой ДУ n-го порядка.

Утверждение 1.1. *Рассмотрим ДУ $y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$ n-ого порядка. Это уравнение эквивалентно следующей нормальной системе ДУ:*

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = v_2 \\ \dot{v}_2 = v_3 \\ \ldots \\ \dot{v}_{n-1} = v_n \\ \dot{v}_n = f_n(x, v_1, v_2, \ldots, v_n) \end{cases} \Leftrightarrow y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \tag{2}$$

Доказательство. Введем обозначения: $y = v_1(x)$, $y' = v_2(x)$, $y'' = v_3(x)$, $\ldots$, $y^{(n-1)} = v_n(x)$. Тогда имеем $\dot{v}_1 = v_2,\ \dot{v}_2 = v_3,\ \ldots, \dot{v}_n = f(x, v_1, v_2, \ldots, v_n)$, то есть получилась нормальная система дифференциальных уравнений n-ого порядка с неизвестными v_i.

Обратными заменами системы уравнений можно получить исходное дифференциальное уравнение $y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$. ∎

Определение 1.5. *Рассмотрим уравнение 1-ого порядка $y' = f(x, y(x))$. Тогда задача решить это уравнение с условием $y(x_0) = y_0$ называется задачей Коши.*

Определение 1.6. *Пусть $\varphi(x)$ – решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y(x))$. График решения $\varphi(x)$ называется интегральной кривой. В силу определения функции $f(x, y)$ на множестве Ω, вся интегральная кривая будет лежать в Ω.*

Определение 1.7. *Проведём через каждую точку интегральной кривой $(x_0, y_0) \in \Omega$ малый отрезок с углом наклона по отношению к оси x равным α, причём $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0, y_0)$. Получим так называемое поле направлений.*

Из построения интегральной кривой следует, что интегральная кривая в каждой своей точке касается поля напрвлений. Верно и обратное: кривая, касающаяся в каждой своей точке поля направлений, является интегральной кривой.

1.2 Простейшие типы уравнений первого порядка

1.2.1 Уравнения в полных дифференциалах

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$. Тогда кривая

$$\gamma = \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \ t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \tag{3}$$

называется интегральной кривой рассматриваемого уравнения, если $\forall t : t \in [t_1; t_2]$ выполнено

$$P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'_t + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'_t = 0. \tag{4}$$

Определение 1.8. *Дифференциальное уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если $\exists F(x, y) : P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y)$.*

Тогда $dF(x, y) = 0 \Rightarrow F(x, y) = const$, то есть $F(x, y)$ определяет неявную функцию $y(x)$.

Теорема 1.1. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в области D. Для того, чтобы уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ являлось уравнением в полных дифференциалах, необходимо выполнение условия $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $(x,y) \in D$. Если же область D ещё и одвосвязна, то условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ является достаточным.*

Доказательство. Пусть $P(x, y)dx+Q(x, y)dy = 0$ – уравнение в полных дифференциалах, тогда $\exists F(x, y) : P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y) \Rightarrow P = \frac{\partial F}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$. По условию P и Q – непрерывно дифференцируемы, тогда $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ – непрерывные функции, значит

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \ (x, y) \in D. \tag{5}$$

Пусть теперь D – односвязная область. Рассмотрим значение интеграла

$$F = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x;y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

который берётся по кривой γ, лежащей в D и соединяющей точки (x_0, y_0) и $(x; y)$. Пусть $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда по теореме о независимости интеграла от пути интегрирования выходит, что значение интеграла не зависит от пути интегрирования γ, а является функцией от (x, y), значит $F = F(x, y)$ – функция и $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y)$. ■

Определение 1.9. *Непрерывно дифференцируемая функция $\mu(x, y) \neq 0$ в области G называется интегрирующим множителем для уравнения в полных дифференциалах $\mu(x, y)(P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = 0$, если исходное уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ не является уравнением в полных дифференциалах.*

Если $\mu(x, y)$ – интегрирующий множитель, то для достаточного условия имеем

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \Leftrightarrow P\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Полученное уравнение не легче исходного, так как теперь задача свелась к нахождению μ. Обычно интегрирующий множитель ищут в виде $\mu(x)$, $\mu(y)$, $\mu(x^2 + y^2)$, $\mu(x^\alpha, y^\beta)$.

1.2.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим ДУ вида $P(y)dx + Q(x)dy = 0$, где $P(y) \in C^1_{[y_1;y_2]}$, $Q(x) \in C^1_{[x_1;x_2]}$. Если $\exists y_0 :$ $P(y_0) = 0$ или $\exists x_0 : Q(x_0) = 0$, тогда

$$\begin{cases} x = t \\ y = y_0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_0 \\ y = t \end{cases} \tag{6}$$

являются интегральными кривыми рассматриваемого ДУ соответственно. Если же выполняется $P(x, y) \neq 0$ и $Q(x, y) \neq 0$, то применим к уравнению интегрирующий множитель

$$\mu(x, y) = \frac{1}{P(x, y)Q(x, y)},$$

получив уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{dx}{Q(x)} + \frac{dy}{P(y)} = 0. \tag{7}$$

Значение $\mu(x, y)$ действительно является интегрирующим множителем, так как выполняется

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{Q(x)}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{P(y)}\right) = 0. \tag{8}$$

Тогда

$$dF(x, y) = \frac{dx}{Q(x)} + \frac{dy}{P(y)} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{Q(x)} \Rightarrow F(x, y) = \int\limits_{x_1}^{x} \frac{dt}{Q(t)} + C(y), \tag{9}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{P(y)} = C'(y) \Rightarrow C(y) = \int\limits_{y_1}^{y} \frac{dt}{P(t)} + C_1 \Rightarrow F(x, y) = \int\limits_{x_1}^{x} \frac{dt}{Q(t)} + \int\limits_{y_1}^{y} \frac{dt}{P(t)} + C_1 = const. \tag{10}$$

Определение 1.10. *Если дифференциальное уравнение вида $P_1(x, y)dx + Q_1(x, y)dy = 0$ может быть сведено к виду $P(y)dx + Q(x)dy = 0$, то такое уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными.*

Утверждение 1.2. *Задача Коши уравнения с разделяющимися переменными $P(y)dx + Q(x)dy = 0$ задаётся в виде $y(x_1) = y_1$, а её решение в виде*

$$\int\limits_{x_1}^{x} \frac{dt}{Q(t)} + \int\limits_{y_1}^{y} \frac{dt}{P(t)} = 0. \tag{11}$$

1.2.3 Однородные уравнения

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$y' = y\left(\frac{y}{x}\right),$$

которое назовём уравнением с однородной правой частью. Сделаем замену $v(x) = \frac{y}{x}$, тогда $y(x) = v(x) \cdot x$, $y'_x = x \cdot v'_x + v = g(v)$, откуда имеем $x\frac{dv}{dx} = g(v) - v$. Если $\exists g(v_0) = v_0$, то v_0 – решение уравнения $x\frac{dv}{dx} = g(v) - v$. Если же $v \neq g(v)$, тогда

$$\frac{dv}{g(v) - v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|x| + C = \int\limits_{v_0}^{v} \frac{dt}{g(t) - t}. \tag{12}$$

Таким образом, найдено решение исходного уравнения с однородной правой частью в квадратурах.

Определение 1.11. *Функция $F(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ называется однородной степени m, если $\forall \lambda > 0 \longrightarrow F(\lambda x^1, \lambda x^2, \ldots, \lambda x^n) = \lambda^m F(x^1, x^2, \ldots, x^n)$.*

Пример 1.1. *Рассмотрим уравнение $P(x,y)dx = Q(x,y)dy$. Если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – однородные функции степени m, тогда*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{x^m P(1, \frac{y}{x})}{x^m Q(1, \frac{y}{x})} = \frac{P(1, \frac{y}{x})}{Q(1, \frac{y}{x})} = g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{13}$$

Таким образом исходное уравнение свелось к уравнению с однородной правой частью.

1.2.4 Линейные уравнения первого порядка

Определение 1.12. *Дифференциальное уравнение вида $y' + a(x)y = f(x)$ – линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Дифференциальное уравнение вида $y' + a(x)y = 0$ – линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка. При этом $a(x) \in C^1_{I(x)}$, $f(x) \in C_{I(x)}$, где $I(x)$ – область, на которой определены функции $a(x)$ и $f(x)$.*

Введём оператор $L = \frac{d}{dx} + a(x)$, который действует на множество непрерывно дифференцируемых функций $\varphi \in C^1_{I(x)}$. Тогда уравнение $y' + a(x)y = f(x)$ переписывается в виде $L(y) = f(x)$, а уравнение $y' + a(x)y = 0$ переписывается в виде $L(y) = 0$.

Теорема 1.2. *Введённые оператор $L = \frac{d}{dx} + a(x)$ – линейный оператор.*

Доказательство. Рассмотрим линейную комбинацию $c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$:

$$L(c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)) = (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)' + a(x)(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1 L(\varphi_1) + c_2 L(\varphi_2) \tag{14}$$

Таким образом, $L(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1 L(\varphi_1) + c_2 L(\varphi_2)$, то есть L – линейный оператор. ■

Утверждение 1.3. *Решением уравнения $y' + a(x)y = 0$ является*

$$y = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt}, \ C \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Доказательство. Найдём решение уравнения $y' + a(x)y = 0$:

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx \Rightarrow \ln|y| = -\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt + \ln C \Rightarrow |y| = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt},\ C > 0 \tag{16}$$

Раскрывая модуль и объединяя полученное решение с нулевым ($y \equiv 0$), имеем

$$y = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt},\ C \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

■

Утверждение 1.4. *Решением уравнения $y' + a(x)y = f(x)$ является*

$$y = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt},\ C \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Доказательство. Найдём решение уравнения $y' + a(x)y = f(x)$: воспользуемся уже найденным решением однородного уравнения, применяя метод вариации постоянной. То есть будем искать решение в виде

$$y = C(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt}. \tag{19}$$

Подставим это решение в исходное уравнение:

$$C'(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} - a(x)C(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} + a(x)C(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} = f(x) \tag{20}$$

$$C'(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} = f(x) \Rightarrow C(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)e^{\int\limits_{x_0}^{t} a(s)ds} + C_0 \tag{21}$$

Таким образом найден вид $C(x)$. Теперь подставим эту функцию:

$$y = C_0e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} + e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt}\int\limits_{x_0}^{x} f(t)e^{\int\limits_{x_0}^{t} a(s)ds} \tag{22}$$

$$y = C_0e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} + \int\limits_{x_0}^{x} f(t)e^{-\int\limits_{x_0}^{t} a(s)ds} \tag{23}$$

Из полученного решения видно, что оно является суммой решения однородного уравнения и частного решения. ■

Утверждение 1.5. *Если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – некоторые решения уравнения $y' + a(x)y = f(x)$, то $z(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ – решение однородного уравнения $y' + a(x)y = 0$.*

Доказательство. По условию $\varphi_1' + a(x)\varphi_1 = f(x)$, $\varphi_2' + a(x)\varphi_2 = f(x)$, откуда очевидно, что $(\varphi_1 - \varphi_2)' + a(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$. Обозначив $z = \varphi_1 - \varphi_2$, получим $z' + a(x)z = 0$, то есть z – решение однородного уравнения. ■

1.3 Уравнение Бернулли и Риккати

1.3.1 Уравнение Бернулли

Определение 1.13. *Д.у. вида* $\boxed{y' + a(x) \cdot y = y^r \cdot f(x)}^{(24)}$, *где* $a(x), f(x) \in C^1, r \in \mathbb{R}, r \neq 1$ *называется уравнением Бернулли.*

Утверждение 1.6. *Если* $r > 0$, *то* $y \equiv 0$ *- тривиальное решение. Пусть* $y \neq 0$, *разделим ДУ на* $y^r \Rightarrow \frac{y'}{y^r} + a(x) \cdot y^{1-r} = f(x)$. *Замена:* $u(x) = y^{1-r} \Rightarrow u' = (1-r) \cdot y^{-r} \cdot y' \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{\frac{1}{1-r} \cdot u' + a(x) \cdot u = f(x)}$ *- свелось к линейному уравнению.*

1.3.2 Уравнение Риккати

Определение 1.14. *Д.у. вида* $\boxed{y' + a(x) \cdot y^2 + b(x) \cdot y + c(x)}^{(25)}$, *где* $a(x), b(x) \in C^1_{I(x)}$, $c(x) \in C_{I(x)}$ *называется уравнением Риккати.*

Утверждение 1.7. *В общем случае уравнение Риккати не допускает решений в квадратурах, однако, если известно некоторое решение* $y = \varphi(x)$, *то сделав замену* $y = u + \varphi$, *получаем:* $\varphi' = u\varphi^2 + b\varphi + c$
$\varphi' + u' = u\varphi^2 + 2a\varphi u + au^2 + b\varphi + bu + c \Rightarrow u' = au^2 + (2a\varphi + b)u$ *- свелось к уравнению Бернулли.*

1.4 Методы понижения порядка дифференциальных уравнений

Утверждение 1.8. *Рассмотрим множество преобразований плоскости*
$\boxed{\bar{x} = \varphi(x,y,\lambda), \bar{y} = \psi(x,y,\lambda)}^{(26)}$. *В (26) каждому* $\lambda \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ *соответствует некоторое преобразование, например,* $\bar{x} = \lambda x, \bar{y} = \lambda y, \lambda > 0$ *- гомотетия. Множество преобразований (26) является группой преобразований, если оно содержит любую композицию (26), т.е.* $\exists \lambda_0 : \varphi(\varphi(x,y,\lambda_1), \psi(x,y,\lambda_2)) = \varphi(x,y,\lambda_0)$, *содержит тожедественное преобразование, т.е.* $\exists \lambda_0 : \varphi(x,y,\lambda_0) = x;\ \psi(x,y,\lambda_0) = y$, *и вместе с любым преобразованием содержит и обратное:* $\forall \lambda \in \mathcal{D}\colon \exists\ \lambda_0\colon x = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda_0);\ y = \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda_0)$
Т.о. если (26) - группа, то $x = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda),\ y = \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda)$; *если в ДУ* $y' = f(x,y)$ *осуществить переход к новым координатам, то*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'_{\bar{x}} d\bar{x} + \psi'_{\bar{y}} d\bar{y}}{\varphi'_{\bar{x}} d\bar{x} + \varphi'_{\bar{y}} d\bar{y}} = f(\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda), \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda)) = \tilde{f}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\psi'_{\bar{x}} + \psi'_{\bar{y}} \cdot \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}}{\varphi'_{\bar{x}} + \varphi'_{\bar{y}} \cdot \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}} = \tilde{f}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda) \Rightarrow \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{\tilde{f} \cdot \varphi'_{\bar{x}} - \psi'_{\bar{x}}}{\psi'_{\bar{y}} - \tilde{f} \cdot \varphi'_{\bar{y}}} \tag{27}$$

(27) является записью $y' = f(x,y)$ *в новых координатах. Говорят, что* $y' = f(x,y)$ *допускает группу* $x = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda),\ y = \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda)$, *если оно не изменяется при переходе к новым переменным, т.е.* $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{y})$.

Следствие 1.2.1. *Рассматриваем уравнения вида* $\boxed{F(x, y, y', y'') = 0}^{(28)}$

1. $\boxed{F(x,y'',y') = 0}^{(29)}$ *Замена* $y'(x) = v(x) \Rightarrow y''(x) = v'(x)$ *и (29) в этом случае имеет вид* $F(x, v(x), v'(x)) = 0 \xrightarrow[\text{решаем}]{} V(x) = y(x,c_1)$. *Тогда решение (29) запишется в виде*

$\frac{dy}{dx} = g(x,c_1) \Rightarrow y(x) = c_2 + \int g(x,c_1)dx$. *Заметим, что* (29) *допускает группу сдвига* $x = \bar{x},\ y = \bar{y} + y_0$

2. $\boxed{F(y,y',y'') = 0}^{(30)}$ *(не содержит явно* x*). Замена:* $y' = V(y)$*, тогда*
$y'' = \frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dx} = V\frac{dV}{dy} \Rightarrow F(y,V,y\frac{dV}{dy}) = 0$ *- ДУ первого порядка.*
Решение $V(y) = g(y,c_1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = g(y,c_1) \Rightarrow$ *Решение* (30)*:* $\int \frac{dy}{g(y,c_1)} = x + c_2$.
Заметим, что (30) *допускает группу сдвигов* $x = \bar{x} + x_0,\ y = \bar{y}$

3. $\boxed{F(x,y'',y',y) = 0 \text{ и } F - \text{однородная степени } m \text{ по } y'',\ y',\ y}$*, т.е.* $\forall\lambda > 0 \rightarrow$
$F(x,\lambda y'',\lambda y',\lambda y) = \lambda^m \cdot F(x,y'',y',y)$. *В таком случае ДУ допускает группу* $x = \bar{x}, y = \lambda\bar{y}$. *Замена:* $z(x) = \frac{y'}{y} \Rightarrow y' = z(x)y$
$\Rightarrow y'' = z'y + zy' = z'y + z^2y = y\cdot(z'+z^2) \Rightarrow F(x,y,zy,y(z'+z^2)) = 0$
$\Rightarrow y^m \cdot F(x,1,z,z'+z^2) = 0$ *- относительно* z *имеем ур-ние первого порядка.*
Если его решение $z(x) = g(x,c_1)$*, то* $\frac{y'}{y} = g(x,c_1) \Rightarrow \frac{dy}{y} = g(x,c_1)dx \Rightarrow$
$\ln|y| = \int g(x,c_1)dx + c_2$

4*. *Будем говорить, что функция* $F(x,y,y'',...,y^{(n)})$ *является квазиоднородной функцией степени* r*, если* $\exists\alpha\in\mathbb{R} : \forall\lambda > 0 : F(\lambda x,\lambda^\alpha y,\lambda^{\alpha-1}y',...,\lambda^{\alpha-n}y^{(n)}) =$
$= \lambda^r \cdot F(x,y,...,y^{(n)})$.
Рассмотрим множество преобразований:

$$\begin{cases} x = \lambda\bar{x} \\ y = \lambda^\alpha\bar{y} \end{cases}, \quad \text{где } \lambda > 0 \tag{31}$$

Такое множество преобразований перепишем в виде:

$$\begin{cases} x = e^\beta\cdot\bar{x} \\ y = e^{\alpha\beta}\bar{y} \end{cases}$$

Если F *в* (30) *является квазиоднородной, то* (30) *допускает группу растяжений* (31)*:*

$$\boxed{F(x,y'',y',y) = 0} \xrightarrow[\text{преобр.}]{} F(\lambda\bar{x},\lambda^\alpha\bar{y},\lambda^{\alpha-1}\bar{y'},\lambda^{\alpha-2}\bar{y''}) = \lambda^r\cdot F(\bar{x},\bar{y},\bar{y'},\bar{y''}) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$F(\bar{x},\bar{y},\bar{y'},\bar{y''}) = 0$$

$$\text{Замена: } \begin{cases} x = e^t \\ y = z(t)\cdot e^{2t} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{z'_t\cdot e^{\alpha t} + z\cdot\alpha\cdot e^{\alpha t}}{e^t} = e^{(\alpha-1)t}\cdot(z'_t + \alpha z)$$

$$\Downarrow$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(\alpha-1)\cdot e^{(\alpha-1)t}\cdot(z'_t+\alpha z) + e^{(\alpha-1)t}\cdot(z''_{tt}+\alpha z'_t)}{e^t} =$$

$$= e^{(\alpha-2)t}\cdot(z''_{tt} + (2\alpha-1)\cdot z'_t + \alpha\cdot(\alpha-1)z)$$

$$\Downarrow$$

$$F(e^t; z\cdot e^{\alpha t}; e^{(\alpha-1)t}\cdot(z'_t+\alpha z); e^{(\alpha-2)t}(z''_{tt} + (2\alpha-1)z'_t + \alpha\cdot(\alpha-1)z)) =$$

$= e^{rt}\cdot F(1;z;z'_t+\alpha z;z''_{tt}+(2\alpha-1)z'_t+\alpha\cdot(\alpha-1)z) = 0$ *- не содерж.* x*, т.е. свелось к случаю 2*

1.5 Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной

Утверждение 1.9. *Рассмотрим* $\boxed{F(x,y,y')=0}^{(32)}$ *, где* $F(x,y,y')$ *как функция трёх переменных является непрерывно дифференцируемой в области* $G \subset \mathbb{R}^3$
Решение уравнения $F(x,y,y') = 0$ *будем представлять как кривую в параметрическом виде:*

$$\gamma: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} t \in [t_1, t_2],\ \varphi(t), \psi(t) \in C^1_{[t_1,t_2]} \tag{33}$$

Кривая (33), *является интегральной кривой* (32) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow F\left(\varphi(t), \psi(t), \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}\right) = 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2] \tag{34}$$

Будем решать эквивалентную систему положив $p = \frac{dy}{dt}$*:*

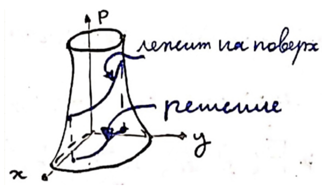
$$\begin{cases} F(x,y,p) = 0 \\ dy = pdx \end{cases} \tag{35}$$

Утверждение 1.10. *Уравнение* (32) *эквивалентно системе* (35).

Доказательство. Пусть γ - интегр. кривая (32). Положим $p = \frac{\psi'}{\varphi'} = \frac{dy}{dx}$ - второе уравнение в системе (35) выполнено, а первое выполнено в силу подстановки в (34). Обратно, пусть $x(t) = \varphi(t),\ y(t) = \psi(t), p$ - решение (34). $\Rightarrow$ Из второго уравнения системы:
$p = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} \rightarrow$ Подставляем в первое уравнение системы и получаем само уравнение (34)

■

Утверждение 1.11. *Рассмотрим метод решения* (32), *который называется методом введения параметра.*
Первое ур-ние в системе (35) *рассмотрим как задающее в* $\mathbb{R}^3_{(x,y,p)}$ *гладкую поверхность S, для которой параметрическое представление имеет вид:*



$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \Rightarrow F(\varphi(u,v); \psi(u,v); \chi(u,v)) \equiv 0 \\ p = \chi(u,v) \end{cases}$$

Потребуем, чтобы rank $\begin{pmatrix} \frac{\delta\varphi}{\delta u} & \frac{\delta\psi}{\delta u} & \frac{\delta\chi}{\delta u} \\ \frac{\delta\varphi}{\delta v} & \frac{\delta\psi}{\delta v} & \frac{\delta\chi}{\delta v} \end{pmatrix} = 2,\ \forall u, v \in G$ *т.е. S была простой гладкой пов.*

Тогда остаётся удовлетворить второму уравнению системы (35)*:*

$$\frac{\delta\psi}{\delta u}du + \frac{\delta\psi}{\delta v}dv = \chi \cdot \left(\frac{\delta\varphi}{\delta u}du + \frac{\delta\varphi}{\delta v}dv\right) \Rightarrow \left(\frac{\delta\psi}{\delta u} - \chi\frac{\delta\varphi}{\delta v}\right)du = \left(\chi\frac{\delta\varphi}{\delta v} - \frac{\delta\psi}{\delta v}\right)dv \tag{36}$$

Если $P(u,v) \neq 0 \ \forall (u,v) \in G$, *то из* (36) *получаем Д.У.:* $\dfrac{du}{dv} = \dfrac{Q(u,v)}{P(u,v)}$

Его решение $u = u(v,c)$, *тогда* $\begin{cases} x = \varphi(u(v,c),v) = x(v,c) & \text{- является параметрическим} \\ y = \psi(u(v,c),v) = y(v,c) & \text{представлением решения (32)} \end{cases}$

Если же существует связь между u *и* v: $u = f(v), P(f(v),v) = Q(f(v),v) = 0 \ \forall v \in G$, *то* $u = f(v)$ *явл. решением* $\left(\chi\frac{\delta\varphi}{\delta v} - \frac{\delta\psi}{\delta v}\right) dv$, *а*

$$\begin{cases} x = x(v) \\ y = y(v) \end{cases} \text{ - явл. решением (36)}$$

2 Билет 2. Задача Коши

2.1 Принцип сжимающих отображений

Работаем в $E = \mathbb{R}^n$ - пространство точек с n координатами. E - аффинное пространство, а $\vec{E}$ – его присоединенное линейное пространство, состоящее из векторов, натянутых на точки E.

Определение 2.1. *Пусть L - это векторное пространство, и на нем задано отображение $\|\cdot\| : L \longrightarrow \mathbb{R}$ такое, что:*

1. $\forall x \in L \longmapsto \|x\| \geqslant 0$. *А также* $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
2. $\forall x \in L \;\&\; \forall \lambda \in \mathbb{R} \longmapsto \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3. $\forall x, y \in L \longmapsto \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ - *неравенство треугольника.*

Тогда данное отображение называется нормой, а пространство L нормированным.

Пример 2.1. *Приведем пример норм. Пусть $a(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда норму можно определить, допустим, так:*

$$\|a\|_1 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}. \tag{37}$$

Или так:

$$\|a\|_2 = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j|. \tag{38}$$

И тогда можно ввести понятие эквивалентности норм.

Определение 2.2. *Пусть снова L - линейное пространство. Тогда нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на L называются эквивалентными, если $\exists C_1, C_2 > 0 :\ \forall x \in L \longmapsto C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1$.*

Как видно, для определенных выше двух норм это соотношение удовлетворяется.

Утверждение 2.1. *В конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.*

Рассмотрим множество функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$ для некоторых неравных $a, b \in \mathbb{R}$ и обозначим данное множество $C[a; b]$. Понятно, что $C[a; b]$ является линейным пространством. Тогда введем на нем норму.

Определение 2.3. *Нормой функции $f(x) \in C[a; b]$ будем называть число*

$$\|f(x)\| = \max_{x \in [a;b]} |f(x)|.$$

Определение 2.4. *Набор функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x) \in C[a; b]$ будем называть вектор-функцией и обозначать $f(x) = \vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))^T$.*

Определение 2.5. *Вектор-функция $f(x)$ называется непрерывной (дифференцируемой, непрерывно дифференцируемой и т.п.), если все ее компоненты непрерывны (дифференцируемы, непрерывно дифференцируемы и т.п.).*

Определение 2.6. *Модулем вектор-функции $f(x)$ назовем число*

$$|f(x)| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} f_j^2(x)}. \tag{39}$$

Норму вектор-функции можно определить как

$$\|f(x)\|_1 = \max_{x\in[a;b]} |f(x)|.$$

Или же как

$$\|f(x)\|_2 = \max_{j=1,\dots,n} \max_{x\in[a;b]} f_j(x).$$

Понятно, что эти две нормы эквивалентны.

Определение 2.7. *Пусть имеется функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, где $f_n(x) \in C[a;b]$ - линейное пространство функций с нормой (1 или 2 – неважно). Тогда говорят, что данная последовательность сходится к функции $f(x)$ по норме, если:*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0. \tag{40}$$

Аналогично все то же самое и точно так же определяется и для вектор-функций $f(x) = \vec{f}(x) \in C[a;b]^n$.

Определение 2.8. *Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется фундаментальной, если:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n \geqslant N\ \&\ \forall m \geqslant N \longmapsto \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon. \tag{41}$$

Определение 2.9. *Функциональное пространство L называется полным по [данной] норме, если любая фундаментальная функциональная последовательность данного пространства сходится по норме к функции из этого же пространства L.*

Теорема 2.1. *Функциональное пространство $C[a;b]$ с нормой $\|\cdot\|_1$ является полным.*

Доказательство. Возьмем произвольную функциональную последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ из нашего пространства непрерывных функции. Тогда из определения фундаментальности следует, что $\|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$.

Однако $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon\ \forall x \in [a;b]$.

А значит, последовательность $f_n(x)$ сходится к некоторой $f(x)$, причем равномерно на $[a;b]$ (числовая последовательность $\|f_n(x)\|$ мажорирует функциональную последовательность $f_n(x)$).

Так как $f_n(x) \in C[a;b]$ – непрерывны $\forall n \in \mathbb{N}$, и последовательность сходится равномерно на $[a;b]$, то предельная функция $f(x)$ также является непрерывной на $[a;b]$, а значит, $f(x) \in C[a;b]$.

Таким образом, последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f(x) \in C[a;b]$. В силу произвольности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ заключаем, что функциональное пространство $C[a;b]$ с нормой $\|\cdot\|_1$ является полным. ■

Определение 2.10. *Полное нормированное линейное пространство называется Банаховым. Обозначается B.*

Определение 2.11. *Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ называется сходящемся по норме, если последовательность его частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ является сходящейся по норме.*

Определение 2.12. *Пусть $\forall x \in M \subseteq B$ определен элемент $Ax \in B$. Тогда говорят, что на множестве B задан оператор A с областью определения M.*

Будем рассматривать уравнение $x = Ax$.

Определение 2.13. *Множество* $M \subseteq B$ *называется ограниченным, если* $\exists C > 0$ *такое, что* $\forall x \in M \longmapsto \|x\| \leqslant C$.

Определение 2.14. *Оператор* A *называется сжатием на* M*, если:*

1. $\forall x \in M \longmapsto Ax \in M$;
2. $\exists k \in (0;1) : \ \forall x, y \in M \longmapsto \|Ax - Ay\| \leqslant k\|x - y\|$.

Теорема 2.2 (Принцип сжимающих отображений). *Пусть множество* $M \subseteq B$ *является ограниченным и замкнутым, а оператор* A *является сжатием. Тогда решение уравнения* $x = Ax$ *существует и единственно.*

Доказательство. Будем использовать итерационный метод, согласно которому мы выбираем начальное x_0, а затем строим последовательность $x_n = Ax_{n-1}$. Тогда, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = Ax$, то $x = Ax$.

Пусть $x_n = S_n = x_0 + (x_1 - x_0) + \ldots + (x_n - x_{n-1})$. Докажем, что $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant 2Ck^n$ для некоторого $C > 0$, ограничивающего последовательность x_n. Сделаем это по индукции.

База индукции: $\|x_1 - x_0\| \leqslant \|x_1\| + \|x_0\| \leqslant 2C$.

Предположим, что $\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant 2Ck^{n-1}$. Тогда получаем, что $\|x_{n+1} - x_n\| = \|Ax_n - Ax_{n-1}\| \leqslant k\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant 2Ck^n$.

И получаем, что $x_0 + \sum\limits_{j=1}^{\infty}(x_j - x_{j-1}) \leqslant x_0 + \sum\limits_{j=1}^{\infty} 2Ck^{n-1} < \infty$.

А значит $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. А поскольку M замкнуто, то $x \in M$.

Теперь рассмотрим разность $\|Ax_n - Ax\| \leqslant k\|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Это означает, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = Ax$.

Учитывая, что $x_{n+1} = Ax_n$, то, перейдя к пределу с обеих частей равенства, мы получаем, что итерационный метод сходится к решению уравнения $x = Ax$. И таким образом, доказано существование решения. Теперь докажем его единственность.

Пойдем от противного: пусть x и y – два разных решения. Тогда $\|x-y\| = \|Ax - Ay\| \leqslant k\|x - y\|$. Учитывая, что $k \in (0;1)$, то данная ситуация возможна тогда и только тогда, когда $\|x - y\| = 0$. Следовательно, $x = y$, что противоречит тому, что это два разных решения. Итак, теорема доказана. ■

2.2 Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений

Определение 2.15. *Система вида*

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(t, \bar{x}) \\ \dot{x}^2 = f^2(t, \bar{x}) \\ \ldots \\ \dot{x}^n = f^n(t, \bar{x}) \end{cases} \tag{42}$$

называется нормальной системой дифференциальных уравнений n-ого порядка.

Определение 2.16. *Система*

$$\begin{cases} x^1(t_0) = x_0^1 \\ x^2(t_0) = x_0^2 \\ \ldots \\ x^n(t_0) = x_0^n \end{cases} \tag{43}$$

называется начальным условием

Утверждение 2.2. *Решить задачу Коши означает решить нормальную систему дифференциальных уравнений при заданном начальном условии*

Теорема 2.3 (Теорема Коши о существовании и единственности решения)**.** *Пусть* $\forall i, j = \overline{1, n}$ *функции* $f^i, \dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}$ *непрерывны в области* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$*, тогда,* $\forall (t_0, \overline{x_0}) \in \Omega\ \exists h > 0 : \forall t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ *решение задачи Коши существует и единственно.*

Лемма 2.1. *Если* $\bar{f}(t, \bar{x})$ *- непрерывны на* Ω*, то система уравнений*

$$\overline{x}(t) = \overline{x_0} + \int\limits_{t_0}^{t} \bar{f}(\tau, \overline{x}(\tau)) d\tau \tag{44}$$

эквивалентна задаче Коши.

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ - решение (42) при условии (43), тогда

$$\dot{\varphi}^i = f^i(t, \varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t))$$

Проинтегрируем полученное равенство по отрезку $[t_0, t]$

$$\int\limits_{t_0}^{t} \dot{\varphi}^i(\tau) d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} f^i(\tau, \varphi^1(\tau), \ldots, \varphi^n(\tau)) d\tau$$

$$\varphi^i(t) - \varphi^i(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} f^i(\tau, \bar{\varphi}(\tau)) d\tau$$

$$\varphi^i(t) = x_0^i + \int\limits_{t_0}^{t} f^i(\tau, \bar{\varphi}(\tau)) d\tau$$

Теперь пусть $\bar{\varphi}(t)$ - решение (44). Тогда

$$\varphi^i(t) \equiv x_0^i + \int\limits_{t_0}^{t} f^i(\tau, \bar{\varphi}(\tau)) d\tau$$

Отсюда видно, что функция $\varphi^i(t)$ - дифференцируемы. Тогда

$$\begin{cases} \dot{\varphi}^i(t) = f^i(t, \bar{\varphi}(t)) \\ \varphi^i(t_0) = x_0^i \end{cases} \tag{45}$$

■

Следствие 2.3.1. *Из 2 части леммы следует, что решение задачи Коши непрерывно дифференцируемо.*

Введем оператор $A(\bar{x}) = \bar{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau$. Тогда систему интегральных уравнений (44) можно записать в виде

$$\bar{x}(t) = A(\bar{x}) \tag{46}$$

Лемма 2.2.

$$\left\| \int_{t_0}^{t} \bar{x}(\tau)d\tau \right\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|\bar{x}(\tau)\|d\tau \right|$$

Доказательство.

$$\left| \int_{t_0}^{t} x^i(\tau)d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \left| x^i(\tau) \right| d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|\bar{x}(\tau)\|d\tau \right| \tag{47}$$

Таким образом $max\{|\int_{t_0}^{t} x^i(\tau)d\tau|\} = ||\int_{t_0}^{t} \bar{x}(\tau)d\tau|| \leq |\int_{t_0}^{t} \|\bar{x}(\tau)\|d\tau|$ ■

Лемма 2.3. *(Адамара) Пусть* $\bar{f}(\bar{x}), \dfrac{\partial f^i}{\partial x_j}$ *непрерывны в* $\Omega \subset \mathbb{R}$ *- замкнутой, ограниченной, выпуклой области. Тогда* $\forall i = \overline{1,n}, \bar{y} \in \Omega \hookrightarrow \|\bar{f}(\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x})\| \leq n^{3/2}K_1\|\overline{y-x}\|$*, где* $K_1 = max_{i,j=\overline{1,n}}\{max_{x\in\Omega}\left\{\left|\dfrac{\partial f^i}{\partial x_j}\right|\right\}\}$

Доказательство. $|\bar{f}| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(f^i)^2}$, $\|\bar{f}\|_C = max_{x\in\Omega}\{|\bar{f}(\bar{x})|\}$

Ω - компакт, поэтому непрерывность частных производных позволяет говорить о существовании K_1. Возьмем производные точки $\bar{x}$ и $\bar{y}$ и соединим их отрезком $\bar{x} + t(\bar{y} - \bar{x})$, где $t \in [0, 1]$. Рассмотрим значение компоненты f^i на отрезке:

$$f^i(\bar{x} + t(\bar{y} - \bar{x})) = f^i(t)$$

$f^i(t)$ - дифференцируема, тогда

$$|f^i(\bar{y}) - f^i(\bar{x})| = |f^i(1) - f^i(0)| = \left|\frac{df}{dt}(t^*) \cdot (1-0)\right| =$$
$$= \left|\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(t^*) \cdot (y^j - x^j)\right| \leq \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(t^*)\right| \cdot \left|(y^j - x^j)\right| \leq K_1\|\bar{y} - \bar{x}\| \cdot n$$

Теперь рассмотрим вектор-функцию

$$|\bar{f}(\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x})| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(f^k(\bar{y}) - f^k(\bar{x}))^2} \leq K_1 n^{3/2}\|\bar{y} - \bar{x}\|$$
$$\Rightarrow \|\bar{f}(\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x})\| \leq K_1 n^{3/2}\|\bar{y} - \bar{x}\|$$

■

Доказательство. (Основная теорема)

Докажем, что $A(\bar{x})$ из системы (46) является сжатием.

Рассмотрим $\Pi = \{\|\bar{x}(t) - \bar{x}_0(t)\| \leq b, |t - t_0| \leq a\} \subset \Omega$. Определим $K = \|\bar{f}\|_C = max_{\Pi}|\bar{f}|$. K_1 тоже определено в силу условий.

Рассмотрим $\Pi_h = \{\|\bar{x}(t) - \bar{x}_0(t)\| \leq b, |t - t_0| \leq h \leq a\}$

Банахово пространство B - множество функций $\bar{x}(t)$ непрерывных на отрезке $|t - t_0| \leq \leq h$. $M \subset B$ - множество функций $\|\bar{x}(t) - \bar{x}_0\| \leq b$. M ограничено, так как $\forall \bar{x}(t) \in M \hookrightarrow \|\bar{x}(t)\| = \|\bar{x}(t) - \bar{x}_0 + \bar{x}_0\| \leq b + \|\bar{x}_0\| = C$

Докажем, что M замкнуто. Пусть $\bar{x}_n(t), n = 1, 2, \dots$ - последовательность точек в M, такая что $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{x}_n(t) = \bar{x}(t)$. $\|\bar{x}(t)\| = \|\bar{x}(t) - \bar{x}_n + \bar{x}_n\| \le \|\bar{x}(t) - \bar{x}_n\| + \|\bar{x}_n\| \le \varepsilon + b \Rightarrow \bar{x}(t) \in M$

Подберем h так, чтобы $A : M \to M$. То есть $\|A(\bar{x}) - \bar{x}_0\| \le b$.

$$\|A(\bar{x}) - \bar{x}_0\| = \|\int\limits_{t_0}^{t} \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau\| \le |\int\limits_{t_0}^{t} \|\bar{f}\| d\tau| \le Kh$$

Получаем условие $h \le b/K$

Чтобы доказать, что A - сжатие, рассмотрим норму

$$\|A(\bar{y}) - A(\bar{x})\| = \|\int\limits_{t_0}^{t} (\bar{f}(\tau, \bar{y}(\tau)) - \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau))) d\tau\| \le$$

$$\le |\int\limits_{t_0}^{t} \|\bar{f}(\tau, \bar{y}) - \bar{f}(\tau, \bar{x})\| d\tau| \le K_1 n^{3/2} \|\overline{y - x}\| \cdot |\int\limits_{t_0}^{t} d\tau| \le K_1 h n^{3/2} \|\overline{y - x}\|$$

Откуда второе условие: $h < \dfrac{1}{n^{3/2} K_1}$

Тогда оператор A будет сжатием. Соответственно решение задачи Коши существует и единственно.

■

2.3 Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения n-го порядка в нормальном виде

Определение 2.17. *Уравнение вида*

$$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \tag{48}$$

называется уравнением n-го порядка в нормальной форме.

Определение 2.18. *Система*

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \tag{49}$$

называется начальным условием уравнения n-го порядка в нормальной форме.

Утверждение 2.3. *Решить задачу Коши означает найти такое решение (48), которое удовлетворяет условию (49)*

Теорема 2.4 (Теорема Коши о существовании и единственности решения)**.** *Если* $f, \dfrac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ *непрерывны в* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$*, тогда* $\forall (x_0, \bar{y}_0) \in \Omega \exists h > 0 : \forall x \in [x_0 + h, x_0 - h]$ *решение задачи Коши существует и единственно.*

Доказательство. Введем следующие функции: $y(x) = v_1(x), y'(x) = v_2(x), \ldots, y^{(n-1)}(x) = = v_n(x)$. Таким образом получаем систему уравнений в нормальной форме

$$\begin{cases} \dfrac{dv_1}{dx} = v_2 \\ \ldots \\ \dfrac{dv_n}{dx} = f(x, \bar{v}) \end{cases} \tag{50}$$

А для нее решение существует и единственно. ■