1 Элементы группового анализа ДУ

Уравнение первого порядка в общем виде:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

Если выполняется $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow F(x,y) = const$ – решение уравнения в полных дифференциалах.

Если же $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то ищется интегрирующий множитель $\mu(x,y)$:
$\mu P dx + \mu Q dy = 0$ – уже уравнение в полных дифференциалах.

$$P\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\frac{\partial Q}{\partial x} - \mu\frac{\partial P}{\partial y} \tag{2}$$

$$P(y)dx + \varphi(x)dy = 0, \tag{3}$$

уравнение с разделяющимися переменными.

Если ДУ может быть приведено к виду (3), то оно интегрируемо. Рассмотрит, к каким переменным нужно перейти, чтобы уравнение $y' = \dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ свелось бы к уравнению с разделяющимися переменными.

1.1 Однопараметрические группы

Пусть имеется множество взаимно однозначных преобразований $\mathbb{R}^n$: $\tau(\mathbb{R}^n)$. Это множество образуем группу (относительно композиции). Каждому $a \in \mathbb{R}$ соответствием φ сопоставим преобразованние $g_a = \varphi(a) \in \tau(\mathbb{R}^n)$.

Следует ответить, что ассоциативность следует из ассоциативности матричного умножения.

Причем $\varphi(a+b) = \varphi(a)\cdot\varphi(b)$ и $\varphi(0) = E$, т.е. φ осуществляет изоморфизм коммутативной группы $\mathbb{R}$ на группу $\tau(\mathbb{R}^n)$.Образ $\varphi(R) \in \tau(\mathbb{R}^n)$ называется однопараметрической группой преобразований.

Было доказано, что однопараметрической группой будет фазовый поток автоновной системы ДУ. Эта группа $g_a = g_a(M(\vec{x})) = M(\overrightarrow{\overline{x}})$ задается в виде:
$\overline{x^i} = \varphi^i(x^1, \ \dots \ ,x^n) = \varphi^i(\vec{x}, a)$, $i = \overline{1,n}$ или

$$\overrightarrow{\overline{x}} = \vec{\varphi}(\vec{x}, a) \tag{4}$$

Т.к. группа коммутативна, то $\vec{\varphi}(\vec{x}, a+b) = \vec{\varphi}(\vec{\varphi}(\vec{x}, a), b) = \vec{\varphi}(\vec{\varphi}(\vec{x}, b), a)$, а $\vec{\varphi}(\vec{x}, 0) = \vec{x}$.

Будем предпологать, что вектор-функция $\vec{\varphi}(\vec{x}, a)$ непрерывно дифференцируема по всем своим аргументами.

Рассмотрим однопараметрическую группу преобразований плоскости $(x,y)(\mathbb{R}^2)$ –

$$\begin{gathered} g_a = g_a(M(x,y)) \Rightarrow \vec{x} = \varphi(x,y,a) \ , \ \vec{y} = \psi(x,y,a), \\ \varphi(x,y,0) = x, \psi(x,y,0) = y \end{gathered} \tag{5}$$

Определение 1.1. ***траекторией (или орбита группы)*** *– параметрическое предстачление кривой γ, проходящей через $(x;y)$, при фиксированных x,y* (5).

Кривая γ при сделанных предположениях является **гладкой кривой**, поэтому с ней можно связать векторное поле, т.е. в каждой точке $M(x,y)$ поставим в соответствие вектор $\vec{h}(\xi(x,y), \zeta(x,y))$, касательный к γ, проходящей через эту точку.

Компоненты вектора $\vec{h}$, касательного к кривой γ в точке (x,y) равны

$$\xi(x,y) = \frac{\partial\varphi}{\partial a}|_{a\to 0},\ \zeta(x,y) = \frac{\partial\psi}{\partial a}|_{a\to 0},$$

а само векторное поле определено как отображение:

$$(x,y) \to \partial g_a(M(x,y)) = \vec{h}(\xi(x,y),\zeta(x,y)) = \frac{dg_a}{da}|_{a\to 0} \qquad (6)$$

Это векторное поле называется **касательным векторным полем** группы. Рассмотрим

$$\begin{gathered}\frac{dg_{a+b}(M)}{db}|_{b\to 0} = \frac{d(g_a\cdot g_b)}{db}|_{b\to 0} = \frac{d(g_b\cdot g_a)}{db}|_{b\to 0} = \\ = (\frac{dg_a}{db}|_{b\to 0})g_a = \partial g_a(g_a(M(x,y))) = \partial g_a(x,y,a) = \vec{h}(\xi(x,y),\zeta(x,y)).\end{gathered} \qquad (7)$$

Т.к. $\vec{h}(\xi(x,y),\zeta(x,y))$ является косательным к γ при фиксированным a, то кривая γ является **фазовой траекторией** автономной системы.

$$\begin{cases}\dfrac{d\vec{x}}{da} = \xi(\vec{x},\vec{y}) = \varphi_a'(\vec{x},\vec{y}),\\ \dfrac{d\vec{y}}{da} = \zeta(\vec{x},\vec{y}) = \psi_a'(\vec{x},\vec{y}),\end{cases} \qquad (8)$$

Система (8) (она можеть записываться в виде $\partial_a g(x,y,a) = \vec{h}(g_a(x,y,a)))$ называется **уравнением Ли**.

Ранее было получено, что любая автономная система определяет однопараметрическую группу преобразований (фазовый поток).

$$\text{Оператор } X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \zeta\frac{\partial}{\partial y} - \text{ генератор группы.} \qquad (9)$$

Т.к. $X(u) = \xi\dfrac{\partial u}{\partial x} + \zeta\dfrac{\partial u}{\partial y}$, то становится ясно, что генератор группы является оператором дифференцирования в силу системы Ли (группы Ли) или оператором дифференцирования по направлению векторного поля группы.

Определение 1.2. *Функция $F(x,y)$ называется* ***инвариантом группы*** (5)*, если* $F(\vec{x},\vec{y}) = F(x,y)\ \forall a$*, т.е. F постоянна на любой траектории* (5)*.*

Т.о., если функция $F(x,y)$ является инвариантом группы, то $X(F(x,y)) = \xi\dfrac{\partial F}{\partial x} + \zeta\dfrac{\partial F}{\partial y} = \xi\cdot 0 + \zeta\cdot 0 = 0$, и т.о. инвариант группы (5) является просто первым интегралом (8).

Рассммотрим группы $\vec{x} = x + a$, $\vec{y} = y$ – группа смещений $\Rightarrow$ генератор группы $X = 1\dfrac{\partial}{\partial x} + 0\dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}$, а инвариантом этой группы является любой $F(x,y) = f(y)$.

Теорема 1.1. *Любая однопараметрическая группа с генератором* 9 *может быть с помощью подходящей замены*

$$t = t(x,y),\ u = u(x,y) \qquad (10)$$

приведена к группе смещений

$$\vec{t} = t + a,\ \vec{u} = u. \tag{11}$$

Замечание: *в новых переменных генератор имеет вид* $X = \dfrac{\partial}{\partial t}$*, и инвариант группы остается инвариантом и в новых переменных (см. инвариантность ПИ относительно гладкой замены).*

Доказательство. Имеется

$$\xi\frac{\partial}{\partial x} + \zeta\frac{\partial}{\partial y} = \xi(\frac{\partial}{\partial t}t'_x + \frac{\partial}{\partial u}u'_x) + \zeta(\frac{\partial}{\partial t}t'_y + \frac{\partial}{\partial u}u'_y) = X(t)\frac{\partial}{\partial t} + X(u)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Отсюда получаем, что функции (10), которые приводят группу к группе смещений, должны удовлетворять условиям:

$$X(t) = 1 \Rightarrow \xi\frac{\partial t}{\partial x} + \zeta\frac{\partial t}{\partial y} = 1;\ X(u) = 0 \Rightarrow \xi\frac{\partial u}{\partial x} + \zeta\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{12}$$

Так, определенные переменные t и u называются **каноническими переменными**.

Заметим, что переменные и являются инвариантом исходной группы, поскольку $X(u) = 0$

■

Теорема 1.2. *Орбиты группы либо совпадают, либо не пересекаются.*

Доказательство. Пусть произошло пересечение: $g_a(M,a) = g_b(M_1,b)$, причем M_1 не принадлежит орбите точки M. Пусть $b < a$, подействуем g_{-b} на последнее равенство:

$$g_{-b}(g_a(M,1)) = g_{-b}(g_b(M_1,b)) \Rightarrow g_{-b+a}(M,a) = E(M_1) \Rightarrow$$

т. M_1 принадлежит орбите т.M – противоречие.

■

Рассмотрим ДУ:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{13}$$

Будем говорить, что группа g_a является **группой симметрии** ДУ (13) (или (13) допускает группу g_a), если форма ДУ (13) остается неизменной после замены переменных при замене

$$\begin{cases} \overline{x} = \varphi(x,y,a), \\ \overline{y} = \psi(x,y,a) \end{cases} \tag{14}$$

т.е. $\dfrac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = f(\overline{x},\overline{y})$, где f то же самое, что и в (13).

Если ДУ (13) допускает группу, то тогда $f(\overline{x},\overline{y}) = f(x,y)\ \forall a$, и правая часть (13) является инвариантом группу. Тогда, перейдя к каноническим переменным, получим, что в таких переменных t и u уравнение примет вид:

$$\frac{du}{dt} = g(u), \tag{15}$$

т.е. получили уравнение с разделяющимися переменными.