Билет 2, часть 5

Теоремы о продолжении решения для нормальной системы дифференциальных уравнений.

Теоремы Коши носят существенно локальный характер. Решение и единственность задачи Коши будет существовать на отрезке Пиано. Теперь сделаем отход от единственности и докажем, что $\vec{\varphi}(t)$ и $\vec{\psi}(t)$ есть решение задачи Коши, то они будут совпадать на промежутке, где они оба определены (отход от локальности).

Теорема 0.1. *Пусть* $\vec{\varphi}(t)$ *решение* $(1) \wedge (2)$ *определенно на* $[a, b]$, *а* $\vec{\psi}(t)$ *решение* $(1) \wedge (2)$ *определенно на* $[c, d]$. *Тогда* $\vec{\varphi}(t) \equiv \vec{\psi}(t)$ *на* $[r_1, r_2] = [a, b] \cap [c, d]$.

Доказательство. От противного: $\exists t^* \in [r_1, r_2]$, где $\vec{\varphi}(t^*) \neq \vec{\psi}(t^*)$, тогда $t^* \neq t_0$ и предположим, что $t^* > t_0$. Рассмотрим мн-во N точек такое, что $t \in [r_1, r_2]$ и $\vec{\varphi}(t) = \vec{\psi}(t)$.
Покажем, что мн-во замкнуто:
Рассмотрим сходящуюся послед-сть $t_1 \dots t_n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \bar{t}$. Нужно показать, что $\bar{t} \in \mathbb{N}$:
Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{\varphi}(t_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \vec{\psi}(t_n)$ (равны по выбору множества N). И из непрерывности выбранных функций получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{\varphi}(t_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \vec{\psi}(t_n) = \vec{\varphi}(\bar{t}) = \vec{\psi}(\bar{t}) \Rightarrow$ замкнутость.
Из замкнутости и ограниченности мн-ва $N \Rightarrow \exists \widetilde{t} = sup\ N, \widetilde{t} \in N$. Мы пришли к противоречию, а именно t^* по начальному предположению должна быть точной верхней гранью. ■

Определение 0.1. $\vec{\varphi}(t)$ *определена на* $\langle a, b\rangle$ *и решение* $(1) \wedge (2)$, *если* $\exists \vec{\psi}(t)$ *на* $\langle a, b_1\rangle \supset \langle a, b\rangle$, *и решение* $(1) \wedge (2)$ *и* $\vec{\varphi}(t) \equiv \vec{\psi}(t)$ *на* $\langle a, b\rangle$, *тогда* $\vec{\varphi}(t)$ *называется продолжаемым вправо, а* $\vec{\psi}(t)$ *продолжением решения* $\vec{\varphi}(t)$ *задачи Коши*

Определение 0.2. *Решение, которое нельзя продолжить ни вправо, ни влево называется непродолжаемым решением*

Примечание. *По сути данная теорема является усилением задачи Коши. Вместо отрезка Пиано мы получили, что решение задачи Коши может быть продолжено на промежуток, где они оба определены.*

Теорема 0.2. *Пусть имеется задача Коши* $(1) \wedge (2)$ *и* $\vec{f}(t, \vec{x}), \dfrac{\partial f^i}{\partial x_j}, i, j = \overline{1, n}$ *непрерывны в* Ω *с* $\mathbb{R}^{n+1}$. *Тогда* $\forall (t_0, \vec{x_0}) \in \Omega\ \exists!$ *непродолжаемое решение задачи* $(1) \wedge (2)$.

Доказательство. Рассмотрим множество решений задач Коши $(1) \wedge (2)$. Каждое решение задачи определенно на промежутке $\langle R_1, R_2\rangle$, тогда пусть $T_1 = inf\ R_1, T_2 = sup\ R_2$. Построим решение задачи $(1) \wedge (2)$ на (T_1, T_2):
Выберем $t^* > t_0$, тогда $\exists\ \vec{\psi}(t)$, чей промежуток содержит t^* (в силу выбора промкежутка (T_1, T_2)). Положим $\vec{\varphi}(t^*) \overset{def}{=} \vec{\psi}(t^*)$. Покажем, что так можем сделать, что значение $\vec{\varphi}(t^*)$ не зависит от выбора $\vec{\psi}(t)$:
Пусть $\vec{\tilde{\psi}}(t)$ решение задачи Коши $(1) \wedge (2)$ содержащее t^*, тогда $\vec{\tilde{\psi}}(t^*) = \vec{\psi}(t^*)$ из теоремы сущ. и единст. решения задачи Коши (будут совпадать на промежутке, где они определены и при этом t^* принадлежит этому промежутку).
Построение вниз проводится аналогично. И так, $\vec{\varphi}(t)$ решение $(1) \wedge (2)$ на $T_1 < t < T_2$. Это решение является продолжением любого из множества решений задачи Коши. Допустим, $\vec{\tilde{\varphi}}(t)$ решение $(1) \wedge (2)$ на $r_1 \leq t \leq r_2$ и $T_1 \leq r_1 \leq r_2 \leq T_2 \Rightarrow \vec{\tilde{\varphi}}(t) = \vec{\varphi}(t)$ (продолжение решения по доказанной выше теоремы).

Покажем, что $\vec{\psi}(t)$ является <u>непродолжаемым решением</u> $(1) \wedge (2)$: Допустим, что имеется ещё одно решение $\vec{\chi}(t)$, определённое на $(\gamma_1; \gamma_2)$ и оно является продолжением $\vec{\varphi}(t)$. Тогда, либо $\gamma_1 < T_1$, либо $\gamma_2 > T_2$, что невозможно, т.к. $T_1 = inf\ R_1, T_2 = sup\ R_2$ по построению.
Покажем, что непродолжаемое решение $\vec{\varphi}(t)$ является <u>единственным</u>:
От противного, пусть $\exists\ \vec{\varphi}(t)$ непродолжаемое решение на (T_1, T_2) и $\vec{\psi}(t)$ на $(\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2)$. Для определённости $\widetilde{T}_1 < T_1$, тогда рассмотрим такое решение $\vec{\chi}(t) = \left[\begin{array}{l}\vec{\psi}(t) \text{ на } (\widetilde{T}_1, T_1), \\ \vec{\varphi}(t) \text{ на } (T_1, T_2);\end{array}\right. \Rightarrow \vec{\varphi}(t)$ – продолжение $\vec{\psi}(t)$, противоречие. Аналогично строя остальные решения получаем, что $\vec{\varphi}(t) = \vec{\psi}(t)$ ■

Примечание. *В теореме не скаазано, как определить T_1 и T_2. Ecси усилить условия теоремы, а именно Ω есть ограниченн ая область, то любое непродолжаемое решение выходит на границу этой области.*
Из этих утверждений следует, что если под интегральной кривой понимать график непродолжаемого решения, то через каждую точку $(x_0, y_0) \in \Omega$ проходит только одна кривая.