1 Билет 6. Первые интегралы автономных систем. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

1.1 Общее решение линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка

Определение 1.1. *Рассмотрим уравнение*

$$\sum_{i=1}^{n} f^i(\overrightarrow{x}, u)\frac{\partial u}{\partial x^i} = F(\overrightarrow{x}, u) \tag{1}$$

Функция $u(\overrightarrow{x})$ называется решением уравнения (1), если $u(\overrightarrow{x}) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ и после подстановки в (1) получаается тождество, причём $f^i(\overrightarrow{x}, u) \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ – некоторые заданные функции. Уравнение (1) называется квазилинейным уравнением в частных производных первого порядка.

Определение 1.2. *Рассмотрим систему ДУ:*

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(\overrightarrow{x}, u) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f^n(\overrightarrow{x}, u) \end{cases} \tag{2}$$

Система (2) называется характеристической системой уравнения (1), а $\overrightarrow{x}(t)$ – фазовые кривые (2) – называются характеристиками (1).

Основное свойство характеристик состоит в том, что уравнение для $u(\overrightarrow{x})$ в силу (2) имеет вид

$$\frac{du}{dt} = F(\overrightarrow{x}(t), u) -$$

обыкновенное ДУ. Действительно, пусть u – решение (1), тогда

$$\frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x^i} f^i = F(\overrightarrow{x}(t), u)$$

Будем рассматривать уравнения вида

$$\sum_{i=1}^{n} f^i(\overrightarrow{x}, u)\frac{\partial u}{\partial x^i} = F(\overrightarrow{x}, u) \tag{3}$$

Определение 1.3. *Уравнения вида (3) называются линейными однородными уравнениями первого порядка в частных производных. Характеристической системой для (3) будем называть систему вида*

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(\overrightarrow{x}) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f^n(\overrightarrow{x}) \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 1.1. *Пусть $\nu_1(\overrightarrow{x}) = C_1, \dots, \nu_k(\overrightarrow{x}) = C_k$ являются независимыми первыми интегралами системы (4). Тогда функция $u(\overrightarrow{x}) = F(\nu_1(\overrightarrow{x}), \dots, \nu_k(\overrightarrow{x}))$ является решением уравнения (3).*

Доказательство. Запишем уравнение (3) следующим способом:

$$\sum_{i=1}^{n} f^i(\overrightarrow{x})\frac{\partial u}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{n} f^i(\overrightarrow{x})\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial u}{\partial \nu_l}\frac{\partial \nu_l}{\partial x^i} = \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial \nu_l}\sum_{i=1}^{k} f^i(\overrightarrow{x})\frac{\partial \nu_l}{\partial x^i} = 0$$

Получили тождество, значит $u(\overrightarrow{x}) = F(\nu_1(\overrightarrow{x}),\ldots,\nu_k(\overrightarrow{x}))$ действительно решение уравнения (3). ■

Теорема 1.2. *Пусть функция $u(\overrightarrow{x}) = F(\nu_1(\overrightarrow{x}),\ldots,\nu_k(\overrightarrow{x}))$ является решением уравнения* (3)*. Тогда $\nu_1(\overrightarrow{x}) = C_1,\ldots,\nu_k(\overrightarrow{x}) = C_k$ являются независимыми первыми интегралами системы* (4)*.*

Доказательство. Так как $u(\overrightarrow{x})$ – решение, то

$$\sum_{i=1}^{n} f^i\frac{\partial u}{\partial x^i} = 0$$

Значит $u(\overrightarrow{x})$ – первый интеграл системы (4) по критерию первого интеграла. Этот первый интеграл может зависеть только от независимых переменных $\nu_1(\overrightarrow{x}),\ldots,\nu_k(\overrightarrow{x})$, причём $u(\nu_1(\overrightarrow{x}),\ldots,\nu_k(\overrightarrow{x})) = C_0$, где $\nu_1(\overrightarrow{x}),\ldots,\nu_k(\overrightarrow{x})$ – первые интегралы системы (4). ■

1.2 Задача Коши для уравнения в частных производных первого порядка

Пусть $S:\ g(\overrightarrow{x}) = 0$ – гладкая поверхность в $\mathbb{R}^n$ и

$$\nabla g = \left\|\frac{\partial g}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial g}{\partial x^n}\right\| \neq \overrightarrow{0}$$

Определение 1.4. *Точка $\overrightarrow{a} \in S$ называется некритической точкой поверхности, если в системе* (4) $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) \neq \overrightarrow{0}$ *и* $(\nabla g(\overrightarrow{a}), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a})) \neq 0$ *(фазовые траектории не лежат на S).*

Пусть на S задана функция $U_0(\overrightarrow{x})$ и $U_0(\overrightarrow{x}) \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Задача Коши: найти такое решение $u(\overrightarrow{x})$ уравнения (3), что $u(\overrightarrow{x}) = U_0(\overrightarrow{x})\ \forall \overrightarrow{x} \in S$.

Теорема 1.3. *Пусть на гладкой поверхности S задана непрерывно дифференцируемая функция $U_0(\overrightarrow{x})$. Тогда если точка $\overrightarrow{a_0} \in S$ является некритической, то существует окрестность этой точки, в которой решение задачи Коши $u(\overrightarrow{x}) = U_0(\overrightarrow{x})$ для уравнения* (3) *существует и единственно.*

Доказательство. Запишем параметризацию поверхности S в $\mathbb{R}^n$: $x^i = \varphi^i(u_1,\ldots,u_{n-1}),\ i = \overline{1,n}$. Поверхность S может быть параметризована, поскольку требование $\nabla g \neq \overrightarrow{0}$ означает, что

$$rank\left\|\frac{\partial g}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial g}{\partial x^n}\right\| = 1 \neq 0.$$

Значит по теореме о неявной функции параметризация поверхности S задаётся следующим образом:

$$\begin{cases} x^1 = \varphi(x^2,\ldots,x^n) \\ x^2 = x^2 \\ \ldots \\ x^n = x^n \end{cases}$$

Значит $u(\overrightarrow{x}) = u(x^1, \dots, x^n) = u(\varphi(x^2, \dots, x^n), \dots, x^n) = U_0(x^2, \dots, x^n)$.

Так как $\overrightarrow{a_0} \in S$ является некритической по условию, то существует такая окрестность этой точки $\mathcal{U}(\overrightarrow{a_0})$, где существуют $n-1$ независимых первых интегралов системы (4): $\nu_1(\overrightarrow{x}) = C_1, \dots, \nu_{n-1}(\overrightarrow{x}) = C_{n-1}$, а общее решение уравнения (3) $u = u(\nu_1(\overrightarrow{x}), \dots, \nu_{n-1}(\overrightarrow{x}))$.

Рассмотрим систему уравнений относительно $x^1, \dots, x^n$:

$$\begin{cases} \nu_1(\overrightarrow{x}) = C_1 \\ \dots \\ \nu_{n-1}(\overrightarrow{x}) = C_{n-1} \\ g(\overrightarrow{x}) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Допустим, что систему удалось разрешить и была получена параметризация поверхности S $g(\overrightarrow{x}) = 0$:

$$\begin{cases} x^1_S = x^1_S(C_1, \dots, C^{n-1}) \\ \dots \\ x^n_S = x^n_S(C_1, \dots, C^{n-1})G() \end{cases}$$

Рассмотрим

$$J(\overrightarrow{a_0}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \nu_1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \nu_1}{\partial x^n} \\ \dots \\ \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^n} \\ \frac{\partial g}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x^n} \end{vmatrix} (\overrightarrow{a_0})$$

Так как $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a_0}) \neq 0$, то умножим i-ый столбец определителя $J(\overrightarrow{a_0})$ на $r^i = f^i(\overrightarrow{a_0})$ и прибавим к первому столбцу все те столбцы, которые умножились $r^i = f^i(\overrightarrow{a_0}) \neq 0$. Учтём, что $\forall i = \overline{1, n-1}$:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \nu_i}{\partial x^j}(\overrightarrow{a_0}) f^j(\overrightarrow{a_0}) = 0$$

так как ν_i – первый интеграл. Преобразованный определитель будет выглядеть следующим образом:

$$J'(\overrightarrow{a_0}) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \nu_1}{\partial x^2} r^2 & \dots & \frac{\partial \nu_1}{\partial x^n} r^n \\ \dots \\ 0 & \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^2} r^2 & \dots & \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^n} r^n \\ (\nabla g, \overrightarrow{f}) & \frac{\partial g}{\partial x^2} r^2 & \dots & \frac{\partial g}{\partial x^n} r^n \end{vmatrix} (\overrightarrow{a_0}) = (-1)^{n+1} (\nabla g, \overrightarrow{f}) \begin{vmatrix} \frac{\partial \nu_1}{\partial x^2} r^2 & \dots & \frac{\partial \nu_1}{\partial x^n} r^n \\ \dots \\ \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^2} r^2 & \dots & \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^n} r^n \end{vmatrix} \neq 0$$

Утверждение справедливо, так как $(\nabla g, \overrightarrow{f}) \neq 0$ в нехарактеристической точке $\overrightarrow{a_0}$ и

$$rank \begin{Vmatrix} \frac{\partial \nu_1}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial \nu_1}{\partial x^n} \\ \dots \\ \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^n} \end{Vmatrix} = n - 1$$

так как первые интегралы функционально независимы.

Таким образом в силу непрерывности рассматриваемых функций существует окрестность $\mathcal{U}(a_0)$ в которой исходный определитель

$$J(\overrightarrow{a_0}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \nu_1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \nu_1}{\partial x^n} \\ \dots \\ \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^n} \\ \frac{\partial g}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x^n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то есть определитель матрицы Якоби исходной системы (5) не равен нулю. Тогда по теореме о системе неявных функций система однозначно разрешима и существуют единственным образом определённные функции $x_S^1 = x_S^1(C_1, \ldots, C^{n-1}), \ldots, x_S^2 = x_S^2(C_1, \ldots, C^{n-1})$, а значит $u = u(x_S^1(C_1, \ldots, C^{n-1}), \ldots, x_S^n(C_1, \ldots, C^{n-1}))$ является решением уравнения (3) и $u(\overrightarrow{x_S}) = U_0(\overrightarrow{x}) \forall \overrightarrow{x} \in S$.

$\blacksquare$