

1 Матричная экспонента, ее свойства и применение к решению нормальных линейных систем

1.1 Матричная экспонента

Необходимо решить ОЛДУ вида:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \quad (1)$$

Если $A(t) = \|a_j^i\|$, $a_j^i \in \mathbf{R}$, $i, j = 1, \dots, n$, тогда:

$$\begin{aligned} \vec{x}_0 &= E\vec{x}_0, \vec{x}_1 = E\vec{x}_0 + \frac{t-t_0}{1!}A\vec{x}_0 = \left(E + \frac{t-t_0}{1!}A\right)\vec{x}_0, \\ \vec{x}_n &= \left(E + \frac{t-t_0}{1!}A + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n\right)\vec{x}_0, \end{aligned}$$

Этот процесс будет сходиться к задаче Коши с решением:

$$\vec{x} = \left(E + \frac{t-t_0}{1!}A + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n + \dots\right)\vec{x}_0 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n\right)\vec{x}_0,$$

при условии, что $A^0 = E$.

Определение 1.1. Матричной экспонентой называют следующий степенной ряд:

$$e^{(t-t_0)A} = E + \frac{t-t_0}{1!}A + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n.$$

1.2 Свойства матричной экспоненты

Это квадратная матрица, по размерам аналогична матрице A , и каждый элемент этой матрицы представляет из себя степенной ряд с радиусом сходимости $+\infty$.

1. Решение задачи Коши для (??), если $A = \text{const}$:

$$\vec{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{x}_0, (\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0).$$

2. $e^{0A} = E$.

3. $e^{(t_1+t_2)A} = e^{t_1A}e^{t_2A} \Rightarrow e^{t_1A}e^{t_2A} = e^{t_2A}e^{t_1A}$ (КОММУТАТИВНОСТЬ).

4. $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$.

5. $(e^{tA})' = Ae^{tA} = e^{tA}A$.

Доказательство. Так как квадратные матрицы составляют определенное кольцо, то $A^{n+m} = A^nA^m = A^mA^n$.

1.

2. $e^{tA} = E + \frac{t-t_0}{1!}A + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n + \dots$, если $t = 0$:

$$e^{0A} = E + 0 + \dots = E$$

3. рассматриваем (??), если $\vec{x}(t)$ - решение этого ДУ, то $\vec{x}(t + t_0)$ тоже решение этого ДУ $\forall t_0 \in \mathbf{R}$. ($u = t + t_0$) :

$$\frac{d\vec{x}(t + t_0)}{dt} = \frac{d\vec{x}}{du} \frac{du}{dt} = \frac{d\vec{x}}{du} = A\vec{x}(u) = A\vec{x}(t + t_0).$$

Тогда (??), с задачей Коши $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ имеет решение:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= e^{tA} \vec{x}_0, \\ \vec{x}(t + t_0) &= e^{(t+t_0)A} \vec{x}_0 - \text{решение } \frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}.\end{aligned}$$

Рассмотрим тогда тоже самое уравнение для функции $z(t)$:

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = A\vec{z}, \text{ с задачей Коши } \vec{z}(0) = e^{t_0 A} \vec{x}_0 \Rightarrow \vec{z}(t) = e^{tA} (e^{t_0 A} \vec{x}_0) = (e^{tA} e^{t_0 A}) \vec{x}_0.$$

Рассмотрим это решение в нуле:

$$\vec{x}(0 + t_0) = e^{t_0 A} \vec{x}_0,$$

из основной теоремы следует, что $\vec{x}(t + t_0) = \vec{z}(t) \forall t$.

Тогда и получается основная формула:

$$\vec{x}(t + t_0) = e^{(t+t_0)A} \vec{x}_0 = (e^{tA} e^{t_0 A}) \vec{x}_0$$

4. $E = e^{0A} = e^{(t-t)A} = e^{tA} e^{-tA} = E \Rightarrow (e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$.
5. Берем представление матричной экспоненты в виде степенного ряда, который можно дифференцировать, тогда получаем:

$$(e^{tA})' = A + tA^2 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^n + \dots = A \left(E + tA + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^{n-1} \right),$$

$$(e^{tA})' = Ae^{tA} = e^{tA} A.$$

■

Примечание. Формула $e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}$ не имеет места, кроме случая, если $AB = BA$ (т.е. матрицы коммутативны).

1.3 Применение к решению нормальных линейных систем

Теорема 1.1. Пусть S - матрица перехода от исходного базиса к новому базису. Тогда в новой базисе $\bar{A} = S^{-1}AS$, или $A = S\bar{A}S^{-1}$. И главное:

$$e^{tA} = S^{-1} e^{t\bar{A}} S.$$

Доказательство.

$$e^{tA} = \left(E + tA + \dots + \frac{t^n}{n!} A^n \right) = \left(E + tS^{-1}e^{t\bar{A}}S + \dots + \frac{t^n}{n!} (S^{-1}e^{t\bar{A}}S)^n \right),$$

$$(S\bar{A}S^{-1})^n = S\bar{A}^n S^{-1}, SES^{-1} = SS^{-1} = E$$

$$e^{tA} = S^{-1}e^{t\bar{A}}S.$$

■

Для решения нормальных линейных систем методом матричной экспоненты мы будем находить собственные вектора.

Матрица A в базисе из собственных векторов (если они соответствуют действительным собственным значениям) будет иметь диагональный вид. Произведение диагональной матрицы на диагональную – диагональная. Тогда для случая без кратных корней:

$$e^{tA} = E + t \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + \frac{t^2}{2!} \cdot \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2).$$

$$e^{tA} = \text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}).$$

Если λ – корень кратности l , то матрица A приводится к Жордановой клетке (диагональная матрица с единицами над главной диагональю).

$$A = \lambda E + B \Rightarrow B = A - \lambda E.$$

$$e^{tA} = e^{t(\lambda E + B)} = e^{t\lambda E} e^{tB}, e^{t\lambda E} = \text{diag}(e^{t\lambda}, \dots, e^{t\lambda}), e^{tB} = E + tB + \dots + \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} B^{l-1} + 0$$

$$\text{тогда } e^{tA} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} \\ & & \dots & & \\ 0 & & \dots & & 1 \end{pmatrix}$$

Метод решения линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами (матричный метод вариации постоянной)

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}(t), \text{ решение будем искать в виде } \vec{x}(t) = e^{tA}\vec{C}(t),$$

$$\text{тогда } Ae^{tA}\vec{C}(t) + e^{tA}\dot{\vec{C}}(t) = Ae^{tA}\vec{C} + \vec{f}(t),$$

$$e^{tA}\dot{\vec{C}}(t) = \vec{f}(t) \Rightarrow \dot{\vec{C}}(t) = (e^{tA})^{-1}\vec{f}(t) = e^{-tA}\vec{f}(t).$$

2 ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НОРМАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ n -ГО ПОРЯДКА В НОРМАЛЬНОМ ВИДЕ

2 Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной линейной системы уравнений и для линейного уравнения n -го порядка в нормальном виде

Рассматривается система вида

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{q}(t), \quad (2)$$

где $A = \|a_j^i(t)\|$, $i, j = 1, \vec{n}$ – матрица, $\vec{q}(t)$ – заданная вектор-функция. Наряду с векторной записью также будем использовать координатную запись $\dot{x}^i = \sum_{j=1}^n a_j^i x^j + q^i(t)$, $i = 1, \vec{n}$.

Необходимым условием линейности является факт того, что все A_j^i и q^i зависят только от t и не зависят от \vec{x} .

Для (??) ставится задача Коши:

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0.$$

Теорема 2.1. Основная теорема для линейных систем. Пусть $a_j^i(t)$, $i, j = 1, \vec{n}$ и $\vec{q}(t)$ в (??) непрерывны на отрезке $[a; b]$. Тогда решение задачи Коши существует и единственно на всем отрезке $[a; b]$.

Предварительные замечания:

Пусть вектор-функция $\vec{f}(x) \in B$ и A – линейный оператор, действующий из B в B , т.е. $A(\vec{f} + \vec{g}) = A\vec{f} + A\vec{g}$.

Определим норму оператора:

$$\|A\| = \sup_{\vec{\varphi} \in B, \vec{\varphi} \neq \vec{0}} \frac{\|A(\vec{\varphi})\|}{\|\vec{\varphi}\|}.$$

Тогда получаем неравенство: $\|A\| \|\vec{\varphi}\| \geq \|A(\vec{\varphi})\|$.

Нормой для вектор-функции выберем $\|\vec{x}(t)\| = \max_{1 \leq i \leq n} (\max_{t \in [a; b]} x^i(t))$, а нормой для оператора $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} (\max_{t \in [a; b]} \sum_{j=1}^n |a_j^i(t)|)$.

Доказательство. Определим $\vec{g}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t \vec{q}(S) dS$ и построим итерационную процедуру.

Т.к. $q^i(t) \in C_{[a; b]} \forall i = 1, \vec{n} \Rightarrow \exists \|\vec{q}\|_C = M_1$. Тогда $\|\vec{g}\|_C = \|\vec{x}_0 + \int_{t_0}^t \vec{q}(S) dS\| \leq \|\vec{x}_0\| + \int_{t_0}^t \|\vec{q}(S)\| dS \leq \|\vec{x}_0\| + M_1(b - a) = C$.

Рассмотрим интегральное уравнение $\vec{x} = \vec{g} + \int_{t_0}^t A(s)\vec{x}(s) ds$.

Аналогично основной лемме доказывается, что последнее интегральное уравнение эквивалентно задаче (??).

Итерационная процедура: $\vec{x}_0 = \vec{g}$; $\vec{x}_k = \vec{g} + \int_{t_0}^t A(s)\vec{x}_{k-1}(s) ds$, $k = 0, 1, \dots$

Оценим норму:

$$\|\vec{x}_1 - \vec{x}_0\| = \left\| \int_{t_0}^t A(s) \vec{g}(s) ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s) \vec{g}(s)\| ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)\| \cdot \|\vec{g}(s)\| ds \right| \leq C_1 C |t - t_0|;$$

Таким образом $\|\vec{x}_1 - \vec{x}_0\| \leq C_1 C |t - t_0|$.

Теперь докажем по индукции неравенство: $\|\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}\| \leq \frac{C C_1^k}{k!} |t - t_0|^k$.

Базой индукции выступает полученное выше неравенство. Предположим, что верно для $n = k$, т.е.: $\|\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}\| \leq \frac{C C_1^k}{k!} |t - t_0|^k$.

Докажем для

$$\begin{aligned} n = k + 1 : \|\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k\| &= \left\| \int_{t_0}^t A(s) (\vec{x}_k(s) - \vec{x}_{k-1}(s)) ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s) (\vec{x}_k(s) - \vec{x}_{k-1}(s))\| ds \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)\| \cdot \|(\vec{x}_k(s) - \vec{x}_{k-1}(s))\| ds \right| \leq C \left| \int_{t_0}^t \frac{C_1 C^k |s - t_0|^k}{k!} ds \right| = \frac{C^{k+1} C_1 |t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

Т.к. $|t - t_0| \leq (b - a)$, то предыдущее неравенство можно усилить $\|\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}\| \leq \frac{C_1 C^k}{k!} (b - a)^k$.

Функциональная последовательность \vec{x}_k сходится равномерно, т.к. сходится равномерно ряд $\vec{x}_0 + (\vec{x}_1 - \vec{x}_0) + \dots + (\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}) + \dots$, который межорируется сходящимся рядом $\|\vec{x}_0\| + \|(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)\| + \dots + \|(\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1})\| + \dots \leq \|\vec{x}_0\| + C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C^k |b-a|^k}{k!} = \|\vec{x}_0\| + C_1 e^{C(b-a)} < \infty \Rightarrow$

Существует (в силу банаховости пр-ва) непрерывно дифф. $\varphi(t) : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n = \varphi(t)$.

Рассмотрим $\left\| \int_{t_0}^t A \vec{x}_n dS - \int_{t_0}^t A \vec{\varphi} dS \right\| = \left\| \int_{t_0}^t A (\vec{x}_n - \vec{\varphi}) dS \right\| \leq \|A\| \cdot \left| \int_{t_0}^t \|\vec{x}_n - \vec{\varphi}\| dS \right|$, где $\|\vec{x}_n - \vec{\varphi}\| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$.

Т.о. итерационная процедура сходится в силу существования пределов слева и справа.

Полученное решение эквивалентно решению задачи (??). В отличие от основной теоремы для нормальных систем ДУ: $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t, \vec{x})$, где существование было получено только на отрезке Пеано, для СЛДУ существование решения доказано для всего отрезка $[a; b]$ – промежутка, где $a_j^i(t)$ и $\vec{q}(t)$ непрерывны. В нашем случае \vec{f} соответствует $\vec{f} = A\vec{x} + \vec{q}$. Она непрерывна, т.к. полученное решение $\vec{x}(t)$ непрерывно. Условие непрерывности $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ также выполнены, т.к. в нашем случае $\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_{ij}(t)$ – непр. на $[a; b]$. Отсюда следует единственность, т.к. два решения задачи (??), согласно основной теореме для нормальных систем, совпадают на промежутке, где они оба определены. В нашем случае это $[a; b]$.

Т.о. теорема не носит локальных характер.

■