0.1 Построение Жорданова базиса

Для характеристического многочлена справедливо разложение:

$$\frac{1}{P_n(\lambda)} = \frac{1}{(\lambda-\lambda_1)^{k_1}...(\lambda-\lambda_m)^{k_m}} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{k_1}\frac{A_l^i}{(\lambda-\lambda_i)^l},\ A_l^i \in R^m$$

После сложения по внутренней сумме:

$$\frac{1}{P_n(\lambda)} = \frac{1}{(\lambda-\lambda_1)^{k_1}...(\lambda-\lambda_m)^{k_m}} = \frac{f_1(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)^{k_1}} + ... + \frac{f_s(\lambda)}{(\lambda-\lambda_s)^{k_s}} + ... + \frac{f_m(\lambda)}{(\lambda-\lambda_m)^{k_m}}$$

где $f_s(\lambda)$– многочлен степени не выше k_{s-1}, $s = \overline{1,m}$. Умножим на $P_n(\lambda)$:

$$1 = Q_1(\lambda) + ... + Q_m(\lambda)$$

$$Q_s(\lambda) = f_s(\lambda)\cdot\frac{P_n(\lambda)}{(\lambda-\lambda_s)^{k_s}} = f_s(\lambda)\cdot(\lambda-\lambda_1)^{k_1}\cdot...\cdot(\lambda-\lambda_{s-1})^{k_{s-1}}\cdot(\lambda-\lambda_{s+1})^{k_{s+1}}\cdot...\cdot(\lambda-\lambda_m)^{k_m} \quad (1)$$

Рассмотрим множество квадратных матриц одного порядка. Это множество является ассоциативным кольцом с единицей, поэтому

$$A^n \cdot A^m = A^{n+m} = A^m \cdot A^n;\ A^0 \stackrel{def}{=} E$$

Определены коммутативное и ассоциативное сложение матриц. Нулевую матрицу примем за ноль. Согласно свойствам умножения матриц на числа:

$$A^k \cdot \alpha = \alpha A^k,\ \alpha A^k + \beta A^k = (\alpha+\beta)A^k$$

Таким образом правила приведения подобных членов аналогично правилу для многочленов.

$$A^k + (-1\cdot A^k) = A^k + (-A^k) = 0$$

В качестве символа x в определении многочлена можно взять квадратную матрицу A и получить множество матричных многочленов $\{P_n(A)\}$

$$P_n(A) = a_0E + a_1A + ... + a_nA^n$$

На множестве $\{P_n(A)\}$ сложение и умножение определяются как обычные матричные действия, поэтому $\{P_n(A)\}$ является кольцом.

1. $P_n(A) + P_m(A) = P_m(A) + P_n(A)$
2. $(P_n(A) + P_m(A)) + P_s(A) = P_n(A) + (P_m(A) + P_s(A))$
3. $P_n(A)\cdot P_m(A) = P_m(A)\cdot P_n(A)$
4. $(P_n(A)\cdot P_m(A))\cdot P_s(A) = P_n(A)\cdot(P_m(A)\cdot P_s(A))$
5. $P_n(A)\cdot(P_m(A) + P_s(A)) = P_n(A)\cdot P_m(A) + P_n(A)\cdot P_s(A)$

За ноль в этом множестве принимается нулевая матрица.

Определение 0.1. *Отображение φ кольца K на кольцо K' называется гомоморфизмом, если $\forall a \in K$, $\forall b \in K$:*

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b);\ \varphi(ab) = \varphi(a)\cdot\varphi(b)$$

В отличие от изоморфизма гомоморфизм не обязательно является взаимно однозначным отображением, т.е. не предполагается, что образы K заполняют все кольцо K', и различным элементам из K соответствуют разные элементы из K'.

В силу определения множеств $\{P_n(A)\}$ и $\{P_n(\lambda)\}$, кольца $\{P_n(A)\}$ и $\{P_n(\lambda)\}$ гомоморфны:

$$\varphi : \varphi(P_n(\lambda)) \longrightarrow P_n(A)$$

Неоднозначность отображения φ возникает в силу того, что существуют такие квадратные матрицы $A \neq 0 : \exists n \in N : A^m = 0 \ \forall m \geq n$.

Теорема 0.1 (Гамильтона-Кэли)**.** *Пусть $P_n(\lambda)-$ характерестический многочлен матрицы A, тогда $P_n(A) = 0$.*

В силу построения гомоморфизма между $\{P_n(A)\}$ и $\{P_n(\lambda)\}$ имеет место разложение:

$$P_n(A) = A^n + a_1 \cdot A^{n-1} + ... + a_o \cdot E = (A - \lambda_1 E)^{k_1} \cdot ... \cdot (A - \lambda_m E)^{k_m}$$

где $\lambda_1, ..., \lambda_m-$ корни $P_n(A)$.

Подействуем гомоморфизмом φ на (1) :

$$E = Q_1(A) + ... + Q_m(A)$$
$$Q_s(A) = f_s(A) \cdot (A - \lambda_1 E)^{k_1} \cdot ... \cdot (A - \lambda_{s-1})^{k_{s-1}} \cdot (A - \lambda_{s+1})^{k_{s+1}} \cdot ... \cdot (A - \lambda_m)^{k_m} \qquad (2)$$
$$Q_s(A) - \text{линейные преобразования}$$

Порядок сомножетелей в (2) не важен, т.к. матрицы $(A - \lambda_s E)$ такого вида перестоновочны между собой.

Рассмотрим $Q_i(A)$. Покажем, что $\forall i,\ j = \overline{1,m} \longmapsto$

$$Q_i(A) \cdot Q_j(A) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ Q_i^2, i = j \end{cases} \quad \text{и } Q_i(A) = Q_i^2(A) \qquad (3)$$

Доказательство. $Q_i(A) \cdot Q_j(A) = f_i(A) \cdot f_j(A) \cdot (A - \lambda_1 E)^{k_1} \cdot ... \cdot (A - \lambda_{i-1} E)^{k_{i-1}} \cdot (A - \lambda_{i-1} E)^{k_{i+1}} \cdot ... \cdot (A - \lambda_m E)^{k_m} \cdot (A - \lambda_1 E)^{k_1} \cdot ... \cdot (A - \lambda_{j-1} E)^{k_{j-1}} \cdot (A - \lambda_{j+1} E)^{k_{j+1}} \cdot ... \cdot (A - \lambda_m E)^{k_m} = M(A) \cdot P_n(A) =$ (Теорема Гамильтона-Кэли) $= 0$

В силу (2):

$$\vec{x} = E\vec{x} = Q_1(\vec{x}) + ... + Q_i(\vec{x}) + ... + Q_m(\vec{x})$$
$$\Rightarrow Q_i(\vec{x}) = (Q_i Q_1)(\vec{x}) + ... + (Q_i^2)(\vec{x}) + ... + (Q_i Q_n)(\vec{x}) = Q_i^2(\vec{x})$$

■