1 Билет 6. Первые интегралы автономных систем. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

1.1 Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка

1.1.1 Общее решение линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка

Определение 1.1. *Рассмотрим уравнение*

$$\sum_{i=1}^{n} f^i\left(\overrightarrow{x}, u\right) \frac{\partial u}{\partial x^i} = F\left(\overrightarrow{x}, u\right) \tag{1}$$

Функция $u\left(\overrightarrow{x}\right)$ *называется решением уравнения* (1)*, если* $u\left(\overrightarrow{x}\right) \in C^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ *и после подстановки в* (1) *получаается тождество, причём* $f^i\left(\overrightarrow{x}, u\right) \in C^1\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\right)$ *– некоторые заданные функции. Уравнение* (1) *называется квазилинейным уравнением в частных производных первого порядка.*

Определение 1.2. *Рассмотрим систему ДУ:*

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1\left(\overrightarrow{x}, u\right) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f^n\left(\overrightarrow{x}, u\right) \end{cases} \tag{2}$$

Система (2) *называется характеристической системой уравнения* (1)*, а* $\overrightarrow{x}\left(t\right)$ *– фазовые кривые* (2) *– называются характеристиками* (1)*.*

Основное свойство характеристик состоит в том, что уравнение для $u\left(\overrightarrow{x}\right)$ в силу (2) имеет вид

$$\frac{du}{dt} = F\left(\overrightarrow{x}\left(t\right), u\right) \ -$$

обыкновенное ДУ. Действительно, пусть u – решение (1), тогда

$$\frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x^i} f^i = F\left(\overrightarrow{x}\left(t\right), u\right)$$

Будем рассматривать уравнения вида

$$\sum_{i=1}^{n} f^i\left(\overrightarrow{x}, u\right) \frac{\partial u}{\partial x^i} = F\left(\overrightarrow{x}, u\right) \tag{3}$$

Определение 1.3. *Уравнения вида* (3) *называются линейными однородными уравнениями первого порядка в частных производных. Характеристической системой для* (3) *будем называть систему вида*

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1\left(\overrightarrow{x}\right) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f^n\left(\overrightarrow{x}\right) \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 1.1. *Пусть* $\nu_1(\overrightarrow{x}) = C_1, \ldots, \nu_k(\overrightarrow{x}) = C_k$ *являются независимыми первыми интегралами системы* (4)*. Тогда функция* $u(\overrightarrow{x}) = F(\nu_1(\overrightarrow{x}), \ldots, \nu_k(\overrightarrow{x}))$ *является решением уравнения* (3)*.*

Доказательство. Запишем уравнение (3) следующим способом:

$$\sum_{i=1}^{n} f^i(\overrightarrow{x}) \frac{\partial u}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{n} f^i(\overrightarrow{x}) \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial u}{\partial \nu_l} \frac{\partial \nu_l}{\partial x^i} = \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial u}{\partial \nu_l} \sum_{i=1}^{k} f^i(\overrightarrow{x}) \frac{\partial \nu_l}{\partial x^i} = 0$$

Получили тождество, значит $u(\overrightarrow{x}) = F(\nu_1(\overrightarrow{x}), \ldots, \nu_k(\overrightarrow{x}))$ действительно решение уравнения (3). ■

Теорема 1.2. *Пусть функция* $u(\overrightarrow{x}) = F(\nu_1(\overrightarrow{x}), \ldots, \nu_k(\overrightarrow{x}))$ *является решением уравнения* (3)*. Тогда* $\nu_1(\overrightarrow{x}) = C_1, \ldots, \nu_k(\overrightarrow{x}) = C_k$ *являются независимыми первыми интегралами системы* (4)*.*

Доказательство. Так как $u(\overrightarrow{x})$ – решение, то

$$\sum_{i=1}^{n} f^i \frac{\partial u}{\partial x^i} = 0$$

Значит $u(\overrightarrow{x})$ – первый интеграл системы (4) по критерию первого интеграла. Этот первый интеграл может зависеть только от независимых переменных $\nu_1(\overrightarrow{x}), \ldots, \nu_k(\overrightarrow{x})$, причём $u(\nu_1(\overrightarrow{x}), \ldots, \nu_k(\overrightarrow{x})) = C_0$, где $\nu_1(\overrightarrow{x}), \ldots, \nu_k(\overrightarrow{x})$ – первые интегралы системы (4). ■

1.1.2 Задача Коши для уравнения в частных производных первого порядка

Пусть $S: \ g(\overrightarrow{x}) = 0$ – гладкая поверхность в $\mathbb{R}^n$ и

$$\nabla g = \left\| \frac{\partial g}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x^n} \right\| \neq \overrightarrow{0}$$

Определение 1.4. *Точка* $\overrightarrow{a} \in S$ *называется некритической точкой поверхности, если в системе* (4) $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}) \neq \overrightarrow{0}$ *и* $\left(\nabla g(\overrightarrow{a}), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a})\right) \neq 0$ *(фазовые траектории не лежат на* S*).*

Пусть на S задана функция $U_0(\overrightarrow{x})$ и $U_0(\overrightarrow{x}) \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Задача Коши: найти такое решение $u(\overrightarrow{x})$ уравнения (3), что $u(\overrightarrow{x}) = U_0(\overrightarrow{x}) \ \forall \overrightarrow{x} \in S$.

Теорема 1.3. *Пусть на гладкой поверхности* S *задана непрерывно дифференцируемая функция* $U_0(\overrightarrow{x})$*. Тогда если точка* $\overrightarrow{a_0} \in S$ *является некритической, то существует окрестность этой точки, в которой решение задачи Коши* $u(\overrightarrow{x}) = U_0(\overrightarrow{x})$ *для уравнения* (3) *существует и единственно.*

Доказательство. Запишем параметризацию поверхности S в $\mathbb{R}^n$: $x^i = \varphi^i(u_1, \ldots, u_{n-1}), \ i = \overline{1, n}$. Поверхность S может быть параметризована, поскольку требование $\nabla g \neq \overrightarrow{0}$ означает, что

$$rank \left\| \frac{\partial g}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x^n} \right\| = 1 \neq 0.$$

Значит по теореме о неявной функции параметризация поверхности S задаётся следующим образом:

$$\begin{cases} x^1 = \varphi\left(x^2, \ldots, x^n\right) \\ x^2 = x^2 \\ \ldots \\ x^n = x^n \end{cases}$$

Значит $u\left(\overrightarrow{x}\right) = u\left(x^1, \ldots, x^n\right) = u\left(\varphi\left(x^2, \ldots, x^n\right), \ldots, x^n\right) = U_0\left(x^2, \ldots, x^n\right)$.

Так как $\overrightarrow{a_0} \in S$ является некритической по условию, то существует такая окрестность этой точки $\mathcal{U}\left(\overrightarrow{a_0}\right)$, где существуют $n-1$ независимых первых интегралов системы (4): $\nu_1\left(\overrightarrow{x}\right) = C_1, \ldots, \nu_{n-1}\left(\overrightarrow{x}\right) = C_{n-1}$, а общее решение уравнения (3) $u = u\left(\nu_1\left(\overrightarrow{x}\right), \ldots, \nu_{n-1}\left(\overrightarrow{x}\right)\right)$.

Рассмотрим систему уравнений относительно $x^1, \ldots, x^n$:

$$\begin{cases} \nu_1\left(\overrightarrow{x}\right) = C_1 \\ \ldots \\ \nu_{n-1}\left(\overrightarrow{x}\right) = C_{n-1} \\ g\left(\overrightarrow{x}\right) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Допустим, что систему удалось разрешить и была получена параметризация поверхности S $g\left(\overrightarrow{x}\right) = 0$:

$$\begin{cases} x^1_S = x^1_S\left(C_1, \ldots, C^{n-1}\right) \\ \ldots \\ x^n_S = x^n_S\left(C_1, \ldots, C^{n-1}\right) \end{cases}$$

Рассмотрим

$$J\left(\overrightarrow{a_0}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \nu_1}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial \nu_1}{\partial x^n} \\ \ldots \\ \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^n} \\ \frac{\partial g}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial g}{\partial x^n} \end{vmatrix}\left(\overrightarrow{a_0}\right)$$

Так как $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{a_0}\right) \neq 0$, то умножим i-ый столбец определителя $J\left(\overrightarrow{a_0}\right)$ на $r^i = f^i\left(\overrightarrow{a_0}\right)$ и прибавим к первому столбцу все те столбцы, которые умножились $r^i = f^i\left(\overrightarrow{a_0}\right) \neq 0$. Учтём, что $\forall i = \overline{1, n-1}$:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \nu_i}{\partial x^j}\left(\overrightarrow{a_0}\right) f^j\left(\overrightarrow{a_0}\right) = 0$$

так как ν_i – первый интеграл. Преобразованный определитель будет выглядеть следующим образом:

$$J'\left(\overrightarrow{a_0}\right) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \nu_1}{\partial x^2} r^2 & \ldots & \frac{\partial \nu_1}{\partial x^n} r^n \\ \ldots \\ 0 & \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^2} r^2 & \ldots & \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^n} r^n \\ \left(\nabla g, \overrightarrow{f}\right) & \frac{\partial g}{\partial x^2} r^2 & \ldots & \frac{\partial g}{\partial x^n} r^n \end{vmatrix}\left(\overrightarrow{a_0}\right) = (-1)^{n+1}\left(\nabla g, \overrightarrow{f}\right) \begin{vmatrix} \frac{\partial \nu_1}{\partial x^2} r^2 & \ldots & \frac{\partial \nu_1}{\partial x^n} r^n \\ \ldots \\ \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^2} r^2 & \ldots & \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^n} r^n \end{vmatrix} \neq 0$$

Утверждение справедливо, так как $\left(\nabla g, \overrightarrow{f}\right) \neq 0$ в нехарактеристической точке $\overrightarrow{a_0}$ и

$$rank \begin{Vmatrix} \frac{\partial \nu_1}{\partial x^2} & \ldots & \frac{\partial \nu_1}{\partial x^n} \\ \ldots \\ \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^2} & \ldots & \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^n} \end{Vmatrix} = n - 1$$

так как первые интегралы функционально независимы.

Таким образом в силу непрерывности рассматриваемых функций существует окрестность $\mathcal{U}(a_0)$ в которой исходный определитель

$$J(\overrightarrow{a_0}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \nu_1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \nu_1}{\partial x^n} \\ \dots \\ \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^n} \\ \frac{\partial g}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x^n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то есть определитель матрицы Якоби исходной системы (5) не равен нулю. Тогда по теореме о системе неявных функций система однозначно разрешима и существуют единственным образом определённные функции $x_S^1 = x_S^1(C_1, \dots, C^{n-1}), \dots, x_S^2 = x_S^2(C_1, \dots, C^{n-1})$, а значит $u = u(x_S^1(C_1, \dots, C^{n-1}), \dots, x_S^n(C_1, \dots, C^{n-1}))$ является решением уравнения (3) и $u(\overrightarrow{x_S}) = U_0(\overrightarrow{x})\,\forall \overrightarrow{x} \in S$. Единственность следует из однозначности решения.

■

Рассмотрим уравнение

$$a(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} + c(x,y)z = f(x,y) \tag{6}$$

Функция $z(x,y)$ – искомая функция, а функции $a(x,y),\ b(x,y),\ c(x,y)$ непрерывно дифференцируемы в некоторой области D. Имеется кривая

$$\gamma = \begin{cases} x = \varphi(s) \\ y = \psi(s) \end{cases}, \ s \in I = [s_1, s_2],$$

которая является непрерывно дифференцируемой в I и $(\varphi'(s), \psi'(s)) \neq (0,0)\ \forall s \in I$. На кривой γ задано значение функции $z\big|_\gamma = h(s)$, то есть $z(\varphi(s), \psi(s)) = h(s)$ и $h(s)$ непрерывно дифференцируемая функция при $s \in I$.

Характеристическая система для уравнения (6) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x,y) \\ \dot{y} = b(x,y) \end{cases} \tag{7}$$

Теорема 1.4. *Пусть кривая γ в каждой своей точке не касается характеристик. Тогда задача Коши для* (6) *и* (7) *однозначно разрешима в некоторой окрестности кривой γ.*

Доказательство. Касательным вектором к фазовым траекторям (7) является вектор $\overrightarrow{\varphi} = (a(x,y), b(x,y))$, поэтому если кривая γ в каждой своей точке не касается фазовых характеристик, то $\overrightarrow{\varphi} \nparallel \overrightarrow{\tau} = (\varphi'(s), \psi`(s))$, а значит

$$\begin{vmatrix} a(\varphi(s), \psi(s)) & \varphi'(s) \\ b(\varphi(s), \psi(s)) & \psi'(s) \end{vmatrix} \neq 0\ \forall s \in I \tag{8}$$

Выпустим из каждой точки кривой γ характеристику, то есть решим систему (7) с начальными условиями $x\big|_{t=0} = \varphi(s), y\big|_{t=0} = \psi(s)$. Пусть $x = x(t,s),\ y = y(t,s)$ – некоторые решения системы.

Уравнение (6) в силу системы (7) имеет вид $\frac{dz}{dt} + cz = f$. Поставим задачу Коши для этого уравнения с $z\big|_{t=0} = h(s)$. По основной теореме и теореме о непрерывной зависимости решения от параметра (от начальных данных) существует решение поставленной задачи $z = \omega(t,s)$ – непрерывно дифференцируемая функция в $G \subset D$. На соотношения $x = x(t,s),\ y = y(t,s)$ можно смотреть как на систему уравнений относительно t и s, выразим их через x и y.

Так как
$$I(t,s)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s}\\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a(x(t,s),y(t,s)) & \frac{\partial x}{\partial s}(t,s)\\ b(x(t,s),y(t,s)) & \frac{\partial y}{\partial s}(t,s)\end{vmatrix}$$
$$I(0,s)=\begin{vmatrix}a(\varphi(s),\psi(s)) & \varphi'(s)\\ b(\varphi(s),\psi(s)) & \psi'(s)\end{vmatrix}\neq 0\ \forall s\in I,$$
поскольку $I(t,s)$ – непрерывная от t и s функция. Тогда
$$I(0,s)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s}\\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{vmatrix}=\left.\begin{vmatrix}\varphi'(s) & \psi'(s)\\ a(x,y) & b(x,y)\end{vmatrix}\right|_{(x,y)\in\gamma}\neq 0.$$

Поэтому существует окрестность кривой γ, в которой $I(t,s)\neq 0$. Тогда по теореме о неявных функциях можно выразить $t=t(x,y)$, $s=s(x,y)$ и подставить их в выражение для решения $z=\omega(t,s)=\omega(t(x,y),s(x,y))=\widetilde{\omega}(x,y)$ – доказано существование решения.

Докажем единственность решения. Пусть имеется ещё одно решения задачи Коши для уравнения (6) с начальным условием $z\big|_{\gamma}=h(s)$, то есть $z(\varphi(s),\psi(s))=h(s)$ и $h(s)$ непрерывно дифференцируемая функция при $s\in I$. Тогда, следуя тем же самым рассуждениям, получим существование решения $z=\overline{\widetilde{\omega}}(x,y)$. Пусть $\overline{z}=\widetilde{\omega}-\overline{\widetilde{\omega}}$. Как уже было показано, уравнение (6) вместе с (7) при решении $\overline{z}$ имеет вид
$$\frac{d\overline{z}}{dt}+c\overline{z}=0,\ \overline{z}\big|_{t=0}=0.$$
По основной теореме $z\equiv 0$ – единственное решение, то есть $\widetilde{\omega}=\overline{\widetilde{\omega}}$. Доказана единственность решения.

■

Важно понимать, что для решения однородного линейного уравнения в частных производных определяют только функционально независимые первые интегралы характеристической системы. Тогда как при решении уравнения типа (6) используют выражения для характеристик, то есть сами решения характеристических уравнений.

1.1.3 Примеры решения задач

1.
$$2\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

Характеристическая система для этого уравнения имеет вид
$$\begin{cases}\dot{x}=2\\ \dot{y}=3\end{cases}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}\Rightarrow 3x-2y=C\text{ – первый интеграл}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow u=f(3x-2y)\text{ – общее решение}$$

Поставим задачу Коши: $u=10$, $3x-2y=1$ (характеристика), откуда $10=f(1)\Rightarrow$
$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}u=10\cdot(3x-2y)^2\text{ – решение}\\ u=10\cdot\dfrac{\sin(3x-2y)^2}{\sin 1}\text{ – тоже решение}\end{array}\right.$$

Решение не однозначно, так как задача Коши была задана на характеристике.

Поставим задачу Коши: $u=\cos x$, $3x-2y=1$, откуда $const\neq\cos x=f(1)=const$ – противоречие, так как $u\neq const$ в начальных условиях.

2.
$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial x}=-z \tag{9}$$

Характеристическая система для этого уравнения имеет вид

$$\begin{cases}\dot{x}=a\\ \dot{y}=b\end{cases} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}\Rightarrow bx-ay=const \text{ – первый интеграл} \Rightarrow$$

В силу характеристической системы уравнений имеет вид

$$\frac{dz}{dt}=-z \text{ – соотношение на характеристике } z \ \Rightarrow \ln|z|=-t+C,$$

где C является константой на характеристике $c=g(bx-ay)\Rightarrow$

$$\Rightarrow z=F(bx-ay)e^{-t}=F(bx-ay)e^{-\frac{x-x_0}{a}}=F(bx-ay)e^{-\frac{y-y_0}{b}},$$

где x_0, y_0 – произвольные постоянные.

Рассмотрим задачу Коши $z(2,y)=\sin y$, $x_0=2$, тогда

$$F(bx-ay)=\widetilde{F}\left(y-\frac{(x-2)b}{a}\right)\Rightarrow z=\widetilde{F}\left(y-\frac{(x-2)b}{a}\right)e^{-\frac{x-2}{a}}$$

При $x=2$ $\widetilde{F}(y)=\sin y\Rightarrow$

$$z=\sin\left(y-\frac{(x-2)b}{a}\right)e^{-\frac{x-2}{a}}$$

3. Для уравнения (9) поставим задачу Коши: $bx-ay=2$ (на характеристике), $z=e^{-\frac{x-5}{a}}$, $x_0=5\Rightarrow F(2)=1$, то есть начальным условиям удовлетворяет любая функция F такая, что $F(2)=1$ – неоднозначное решение.

4. Для уравнения (9) поставим задачу Коши: $bx-ay=2$ (на характеристике), $z=\sin(\frac{x-x_0}{a})$ – решение не существует, так как

$$\frac{e^{-\frac{x-x_0}{a}}}{\sin\left(\frac{x-x_0}{a}\right)}\neq const=F(2)$$

5. Рассмотрим уравнение Хопфа:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x},\ u>0,\ u(0,x)=\varphi(x)$$

Уравнение характеристик:

$$\frac{dt}{d\tau}=1,\ \frac{dx}{d\tau}=u(x,t) \text{ – нелинейное уравнение, так как характеристика содержит искомое решен}$$

Замена: независимую x будем считать искомой функцией $x=x(t,u)$.

$$u=-\frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{\frac{\partial u}{\partial x}}=\frac{\frac{\partial u,x}{\partial t,x}}{\frac{\partial u,t}{\partial x,t}}=\frac{\partial(u,x)}{\partial(u,t)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial t}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial t}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial t}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_u\Rightarrow x-ut=c(u)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u=F(x-ut) \text{ – общее решение (распространение волны)}$$