1 Билет номер 3

1.1 Понятие кольца. Пассмотрение пронятия многочленов

Определение 1.1. *Кольцом K называют множество, на котором определены две операции: сложение и умножение, сопоставляющее кпорядоченным парам элементов их "сумму "произведение являющихся элементами этого же множества.*

Действия $+$ и $\cdot$ удовлетворяют условиям:(первые 6 для любого кольца):

1. $(a+b)+c = a+(b+c) \quad \forall a,b,c \in K$
2. $a+b = b+a \quad \forall a,b \in K$
3. $\exists 0 \in K: \quad a+0 = a \quad \forall a \in K$
4. $\forall\ a\ \in\ K\ \exists\ -a\ \in\ K : a+(-a) = 0\ \forall a\ \in\ K$
5. $(a+b)\cdot c = ac+bc \quad \forall a,b,c \in K$
6. $c\cdot(a+b) = ca+cb \quad \forall a,b,c \in K$
7. $(ab)c = a(bc) \quad \forall a,b,c \in K$
8. $ab = ba \quad \forall a,b \in K$
9. $\exists 1 \in K : a\cdot 1 = 1\cdot a = a \quad \forall a \in K$
10. $\exists a^{-1} \in K : a^{-1}a = aa^{-1} = 1 \quad \forall a \in K$

Утверждение 1.1. *Если $a+x = a+y$, то $x = y$*

Доказательство.

$$(-a)+(a+x) = (-a)+(a+y) \Rightarrow \big((-a)+a\big)+x = \big((-a)+a\big)+y = 0+x = x = x+y = y$$

Отсюда следует единственность нуля и противоположного элемента:

$$(-a) \neq (-a)'$$

$$0 = a+(-a) = a+(-a)' \Rightarrow (-a) = (-a)'$$

∎

Утверждение 1.2. $a\cdot 0 = 0\cdot a = 0 \quad \forall a$

Доказательство. $a\cdot0+0 = a\cdot0 = a(0+0) \Rightarrow a\cdot0 = 0$; аналогично $0+0\cdot a = 0\cdot a = (0+0)\cdot a = 0\cdot a+0\cdot a \Rightarrow 0\cdot a = 0$ ∎

Утверждение 1.3. *Единица единственна*

Доказательство. Пусть $1 \neq 1' : 1 = 1\cdot 1' = 1'\cdot 1 = 1'$ ∎

- Кольцо называется ассоциативным, если выполнено условие 7; коммутативным, если выполненно 8. Если выполнено условие 9, то говорят о кольце с единицей.
- Ассоциативное кольцо называется областно целостным, если из $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \bigvee b = 0$
- Полем называется коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, в котором каждый отличный от нуля элемент имеет обратный.

Утверждение 1.4. *Любое поле является областно целостным*

Доказательство. $ab = 0, \quad a \neq 0 \Rightarrow a^{-1}\cdot(ab) = a^{-1}\cdot 0 = 0 = (a^{-1}a)\cdot b = 1\cdot b = b \Rightarrow b = 0$ ∎

1.2 Многочлен

Пусть A – коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Одночленом от x с коэффициентом их A называется выражение $ax^m,\ \ a \in A,\ \ m \in \mathbf{N}$. По определению положим, что $ax^0 = 0$. Выражение ax^m будем рассматривать как символ, для которого выпоняется по определению:

$$ax^m + bx^m = (a+b)x^m$$

$$ax^m \cdot ax^n = ax^{m+n}$$

Выражение, состоящее из нескольких одночленов, соединенных знаком + назовем многочленом от x с коэффициентом из A. Без нарушения общности, в силу коммутативности сложения запишем в каноническом виде: $P_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$

1. Многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ и $Q_m(x) = b_0 + b_1x \cdots + b_mx^m$ считаем равными в том и только в том случае, если $n = m$ и $a_k = b_k,\ \ k = \overline{1,n}$

2. Суммой двух многочленов $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ называется многочлен, получившейся посредством объединения одночленов соответствующих слагаемых:

   $$P(n)+Q_m(x) = (a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)+(b_0+b_1x^1+\cdots+b_mx^m) = a_0+b_0+(a_1+b_1)x+\cdots+c_sx^s,\ \ x = max\{n,m\}$$

   $c_s = a_s + b_s$,$a_s = 0$, если $s > n$ и $b_s = 0$, если $s > m$

   Так определенное сложение многочленов коммутативно и ассоциативно.

   Имеется нулевой элемент $0 = 0 \cdot x + \cdots + 0 \cdot x^n$, а также противополжный $\big(-P_n(x)\big) = (-a_0) + (-a_1)x + + \cdots + (-a^n)x^n$

3. Произведением двух многочленов называют многочлен, составленный их произведения всех членов первого сомножителя на все члены второго.

   $$P_n(x) \cdot Q_m(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots + \Big(\sum_{j=k+l} a_kb_l\Big)x^j + \cdots + a_nb_mx^{n+m}$$

- Покажем, что так определенное умножение будет коммутативно и ассоциативно:

  $$P_n(x) \cdot Q_m(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots + \Big(\sum_{j=k+l} a_kb_l\Big)x^j + \cdots + a_nb_mx^{n+m}$$

  В сумме $\sum\limits_{j=k+l} a_kb_l$ заменим $k \leftrightarrow l \Rightarrow \sum\limits_{j=k+l} b_ka_l = \sum\limits_{j=k+l} b_la_k = \sum\limits_{j=k+l} a_lb_k \underset{1)}{\Rightarrow} P_n(x) \cdot Q_m(x) = Q_m(x) \cdot P_n(x) \Rightarrow$ коммутативно.

  Пусть $R_s(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_sx^{\Rightarrow}(P_n(x) \cdot Q_m(x)) \cdot R_s(x) = \big((a-)b_0)c_0\big) + \Big(\sum\limits_{\gamma=j+\sigma}\Big(\sum\limits_{j=k+l} a_kb_l\Big)c_\sigma\Big)x^\gamma + +(a_nb_m)c_Sx^{n+m+s}),\ \ \ j = 1,\ldots,n+m+s-1$. Так как $\sum\limits_{\gamma=j+\sigma}\Big(\sum\limits_{j=k+l} a_kb_l\Big)c_\sigma\Big) = \sum\limits_{\gamma=k+l+\sigma} a_k(b_lc_\sigma)$. Пусть $l' = l + \sigma \Rightarrow \sum\limits_{\gamma=k+l+\sigma} a_k(b_lc_\sigma) = \sum\limits_{\gamma=k+l'} a_k\Big(\sum\limits_{l'=l+\sigma} b_lc_\sigma\Big) \underset{1)}{\Rightarrow} (P_n(x) \cdot Q_m(x))R_s(x) = P_n(x) \cdot (Q_m(x) \cdot R_s(x)))$ – ассоциативно.

- Дистрибутивность аналогично (везде используются свойства одночленов)

  Таким образом так построенное множество многочленов от x над A будетт ассоциативным и коммутативным кольцом $A(x)$. Роль единицы в $A(x)$ играет единица их A.

  При построении кольца многочленов вмпесто x полоожим $p = \frac{d}{dx}$ – оператор дифференцирования, который действует на множестве бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций. $p \cdot f(x) = p(f(x)) = \frac{df}{dx} = f',\ \ p^2(f) = f'', \ldots, p^nn(x) = f^{(n)}$; Справедлива формула $p^s \cdot p^m(f) = p^s \cdot (p^m(f)) = p^s \cdot (f^{(m)}) = f^{(m+s)} = p^{m+s}(f)$

  По определению, множество бесконечно дифференцируемых еомплекснозначных функций Φ является кольцом, содержащим поле $\mathbb{C}$. В качестве элементов кольца A будем брать числа из $\mathbb{C}$. Роль операторного одночлена в таком случае будет играть $ap^m,\ \ a \in \mathbb{C};\ \ \ ap^m = p^ma$, так как $ap^m(f) = af^{(m)} = f^{(m)} \cdot a =$

$p^m(f) \cdot a$; По определению положим $ap^0 = a$, что корректно, так как $ap^0 f = ap^0(f) = af = a \cdot f = a(f)$. Приведение подобных слагаемых для одночленов определим как $ap^m + bp^m = (a+b)p^m$, поскольку $(ap^{(m)})(f) + bp^{(m)})(f) = af^{(m)} + b^{(m)} = (a+b)f^{(m)} = ((a+b)p^m)(f)$

Аналогично вводим выражение, состоящее из нескольких операторных одночленов, соединенных знаком $+$, называемое операторным многочленом от p с коэффициентом из $\mathbb{C}$. Из свойств дифференцирования следует, что в общем виде можно записать $L_n(p) = a_0 + a_1 p + \cdots + a_n p^n$

Абсолютно аналогично доказываем, что замена x на p дает множество операторных многочленов от р, которое будет кольцом из $\mathbb{C}$

- Пусть $x \in \mathbb{C}$. Значение многочлена $P_n(x)$ на $\mathbb{C}$ определим как число $P_n(x) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n^{zn} \in \mathbb{C}$.

  Понятие значения иногочлена можно обобщить на случай, когда B является ассоциативным кольцом, содержащим кольцо A, в случае, когда элементы A коммутируют с элементами из B.

  В таком случае можно опредеоить степень элемента кольца B. Пусть $a \in B$, $a^1 = a$, $a^2 = a \cdot a, \ldots, a^n = a^{n-1} \cdot a$

  Теорема 1.1. $\forall k \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} \to a^k \cdot a^m = a^k + m$

- Значение операторного многочлена $L_n(p)$ определим на коммутативном и ассоциативном кольце Φ − бесконечно дифференцируемой комплекснозначной функцией от $x \in \mathbf{R}:\quad f(x)$

$$L_n(F) = L_n(p)(f) = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_n f^{(n)} \in \Phi$$

- Если $F(p) = L_n(p) + M_m(p)$ определим сумму на множемтве дифф. операторов:

  $F(p) = (a_0+b_0)f + (a_1+b_1)f' + \cdots + c_s f = L_n(p)(f) + M_m(p)(f) \Rightarrow (L_n(p)+M_m(p))(f) = (M_m(p)+N_m(p))(f)$

  коммутативно, ассоциативность аналогично/.

- $(L_n(p)M_m(p))(f) = (a_0 b_0 p^0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)p + \cdots + (\sum\limits_{j=k+l} a_k b_l)p^j + \cdots + a_n b_m p^{m+n})(f) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)f' + \cdots + (\sum\limits_{j=k+l} a_k b_l)f^{(j)} + \cdots + a_n b_m f^{(n+m)} = (a_0 p^0 + a_1 p + \cdots + a_n p^n) \cdot (b_0 f + b_1 f' + \cdots + b_m f^{(m)}) = = L_n(p) \cdot (M_m(f)) -$ определение действия произведения операторов на множестве Φ. Так как $a_0 b_0 f + +(a_0 b_1 + a_1 b_0)f' + \cdots + (\sum\limits_{j=k+l} a_k b_l)f^{(j)} + \cdots + a_n b_m f^{(m+n)} = M_m(p) \cdot (a_0 f + a_1 f' + \ldots a_n f^{(n)}) \Rightarrow (L_n(p) \cdot M_m(p)) = = (M_m(p) \cdot L_n(p)) -$ коммутативность.

- Покажем ассоциативность и дистрибутивность

$$L_n(p) \cdot M_m(p) K_s(p)(f) = (L_n(p) \cdot M_m(p))(K_s(p)(f)) = L_n(p)(M_m(p)(K_s(p)(f))) = L_n(p)(Q_m(p)R_s(p))(f) \tag{1}$$

  ассоциативность.

$$L_n(p) + M_m(p)K_s(p)(f) = L_n(p)(K_s(p)(f)) + M_m(p)(K_s(p)(f)) = (L_n(p)K_s(p))(f) + ()M_m(p)K_s(p)(f)$$

  дистрибутивность $\cdot$ и $+$.

  Таким образом множество значений операторных многочленов является кольцом, которое содержится в Φ

- Если для $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ из $A(x)\quad \exists R_s(x) \in A(x):\quad P_n(x) = Q_m(x) \cdot R_s(x)$, то говорят, что $P_n(x)$ делится на $Q_m(x)$.

  Теорема 1.2.

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \in A(x), c \in A \Rightarrow \exists! Q_m(x), r \in \mathbb{C} : P_n(x) = (x-c)Q_m(x) + r$$

  Теорема 1.3. *(Безу)* $P_n(x)$ *делится на* $x - c \Leftrightarrow P_n(c) = 0$

  Теорема 1.4. *Если кольцо A является областью целостности, то число корней* $P_n(x)$ *не превосходит* n

Теорема 1.5. *Основная теорема алгебры*

Любой многочлен $P_n(x)$ над $\mathbb{C}$ имеет хотя бы один корень

Утверждение 1.5. *Из* 3 *и* 5*теоремы*

$$\forall P_n(x) \to P_n(x) = a_n(x-c_1)^{l_1} \cdot ... \cdot (x-c_k)^{l_k} \tag{2}$$

- Взаимооднозначное соответствие φ кольца K на кольцо K' называется изморфизмом, если $\forall a \in K$ и $\forall b \in K' \to$

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \qquad \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \tag{3}$$

  Из (3) следуетЮ что образом нуля кольца K будет еуль K: $\varphi(a) = a' \in K'$ и $\varphi(0) = c'$, $\varphi(a) = a' = \varphi(a+o) = \ = \varphi(a) + \varphi(0) = a' + c' \Rightarrow c' = 0$

  Если кольцо K имеет единицу, то $\varphi(1)$,будет еденицей кольца K': $\varphi(a) = a' = \varphi(1 \cdot a) = \varphi(1) \cdot \varphi(a) = = \varphi(1)a' \Rightarrow \varphi(1) -$ еденица K'

- Обратное отображение φ^{-1} кольца K' на K существует и будет изоморфно.

  Рассмотрим отображение φ, которое множеству значений $P_n(x)$ над $\mathbb{C}$ ставит в соответствие множество значений $L_n(p)$ на множестве бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций Φ по принципу:

$$\varphi(P_m(z)) = \varphi(a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 z^0) = L_n(p)(f) = a_n f^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + \cdots + a_0 f;$$

  Покажем что отображение является изоморфизмом.

  Отображение взаимооднозначно по построению.

$$\varphi(P_n(z)+Q_m(z)) = \varphi(a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+b_0+b_1z+\cdots+b_mz^m) = \varphi(a_0+b_0+(a_1+b_1)z+\cdots+(a_s+b_s)z^s) =$$

$$= (a_0+b_0+(a_1+b_1)p+\cdots+(a_s+b_s)p^s)(f) = L_n(p) + L_m(p)(f)$$

$$\varphi(P_n(z) \cdot Q_m(z)) = \varphi(a_0b_0 + \sum_{j=k+l} a_kb_lz^j + a_nb_mz^{m+n}) = (a_0b_0 + \sum_{j=k+l} a_kb_lp^j + a_nb_mp^{m+n}) = L_n(p) \cdot Q_m(p)(f)$$

  Т.о. φ – изоморфизм. Тогда из (3):

$$\varphi(P_n(x)) = \varphi(a_n(z-c_1)^{l_1} \cdot ... \cdot (z-c_k)^{l_k}) = L_n(p)(f) = a_n \cdot (p-c_1)^{l_1} \cdot ... \cdot (p-c_k)^{l_k}(f)$$

  В итоге $L_n(p) = a_n \cdot (p-c_1)^{l_1} \cdot ... \cdot (p-c_k)^{l_k}$, где $c_1, \ldots, c_k -$ корни$P_n(z)$

1.3 Линейные уравнения с потоянными коэффициентами

Рассмотрим ДУ вида: $a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0, \quad a_n \neq 0$, где $a_i = const \ \ \forall i = \overline{1,n}$. Через введенный ранее дифференциальный оператор $L_n(p) = a_n p^n + \cdots + a_0 p^0$ уравнение записывается в виде

$$L_n(p)(y(x)) = 0 \tag{2.1}$$

Было доказано, что $L_n(p)$ является изоиорфизмом характеристического многочлена (2.1): $P_n(\lambda) = a_n\lambda^n + \cdots + a_0 = a_n(\lambda-\lambda_1)^{l1} \cdot ... \cdot (\lambda-\lambda_k)^{l_k}$ и поэтому для $L_n(p)$ справедливо разложение

$$L_n(p) = a_n(p-\lambda_1)^{l1} \cdot ... \cdot (p-\lambda_k)^{l_k}, \quad p = \frac{d}{dx} \tag{2.2}$$

Задача: найти ФСР (2.1). Из записи $L_n(p)$ ясно, что решением(2.1) будут функции из Φ, котрые являются корнями $L_n(p)$

Лемма 1.1. *Для любой n раз дифференцируемой на промежутке функции $f(x)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ выполняется "формула сдвига"*

$$L_n(p)(e^{\lambda x} f) = e^{\lambda x} \cdot L_n(p+\lambda)(f) \tag{2.3}$$

Доказательство. Докажем по индукции. База $n = 1$:

$$L_1(p)(e^{\lambda x}f) = (a_1p^1 + a_0)(e^{\lambda x}f) = e^{\lambda x}(a_0f + a_1(\lambda f + f')) = e^{\lambda x}(a_1(p+\lambda) + a_0)(f) = e^{\lambda x}L_1(p+\lambda)(f)$$

Пусть (2.3) справедлива для $k = n-1$, то есть $L_{n-1}(p)(e^{\lambda x}f) = e^{\lambda x}L_{n-1}(p+\lambda)(f)$

Обозначим $L_n(p) = p - \lambda_1$, тогда по формуле (2.2) :

$$L_n(p) = a_n(p-\lambda_1)\cdot(p-\lambda_1)^{l_1-1}\cdot\ldots\cdot(p-\lambda_m)^{l_m}\cdot\ldots\cdot(p-\lambda_k)^{l_k} = L_1(p)\cdot L_{n-1}(p) = L_{n-1}(p)\cdot L_1(p)$$

Тогда $L_n(p)(e^{\lambda x}f) = L_{n-1}(p)\cdot L_1(p)(e^{\lambda x}f(x)) = L_{n-1}(p)(L_1(p)(e^{\lambda x}f)) \underset{\text{база}}{=} L_{n-1}(p)(e^{\lambda x}\cdot(p+\lambda)(f))$

Обозначим через $g(x) = L_1(p+\lambda)(f(x))$, имеем:

$$L_n(p)(e^{\lambda x}f) = L_{n-1}(p)(e^{\lambda x}g(x)) \underset{\text{индукция}}{=} e^{\lambda x}L-n-1(p+\lambda)(g) = e^{\lambda x}L_{n-1}(p+\lambda)(L_1(p+\lambda)(f)) = e^{\lambda x}(L_{n-1}(p+\lambda)\cdot L_1(p+\lambda))(f) =$$

■

Теорема 1.6. *Если λ_m является корнем $L_n(\lambda)$ кратности l_m, то функции $e^{\lambda_m x}, xe^{\lambda_m x}, \ldots, x^{l_m-1}e^{\lambda_m x}$ являюься решениями* (2.2)

Доказательство. Из коммутативности и ассоциативности кольца операторных многочленов и формулы (2.3): $L_n(p) = a_n(p-\lambda_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(p-\lambda_m)^{l_m}\cdot\ldots\cdot(p-\lambda_k)^{l_k} = L_{n-l_m}(p)(p-\lambda_m)^{l_m}$

Воспользуемся формулой сдвига для $x^se^{\lambda_m x}$:

$$L_n(p)(x^se^{\lambda_m x}) = e^{\lambda x}\cdot L_{n-l_m}(p+\lambda_m)\cdot p^{l_m}(x^s) = e^{\lambda_m x}\cdot L_{n-l_m}(p+\lambda_m)(x^s)^{(l_m)} = \begin{cases}0, \ \forall s \leqslant l_{m-1}\\ e^{\lambda_m x}\cdot P_{n-l_m}(x), s \geqslant l_m\end{cases}$$

где P_{n-l_m} многочлен степени не <u>ниже</u> $n - l_m$

Таким образом $x^se_m^{\lambda}x, \quad s = \overline{q, l_{m-1}}$ являются корнями $L-n(p)$, а значит и решениями(2.1) ■

Из доказанной теоремы следует:

$$\left\{\{e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{l_1-1}e^{\lambda_1 x}\}, \ldots, \{e^{\lambda_m x}, \ldots, x^{l_m-1}e^{\lambda_m x}\}, \ldots, \{e^{\lambda_k x}, \ldots, x^{l_k-q}e^{\lambda_k x}\}\right\} \tag{2.4}$$

будут решениями (2.2). Всего таких функций n штук. Докажем линейную независимость систем функций (2.4)

Лемма 1.2. *Система $q, x, \ldots, x^m$ линейно независима.*

Доказательство. Рассмотрим линейную комбинацию функций $C_0 + C_1x + \cdots + C_nx^n = 0$

От противного: пусть $\exists C_0, \ldots, C_n : \quad \sum\limits_{i=0}^{n} C_i^2 \neq 0 : C_0 + C_1x + \cdots + C_nx^n = 0 \quad \forall x$

Так как у многочлена степени n не более чем n нулей, то получаем противоречие ■

Теорема 1.7. *Система функций $P_{n1}(x)e^{\lambda_1 x}, \ldots, P_{ns}(x)e^{\lambda_s x}$, где $P_{ni}(x)$ является многочленом степени n_i, а все $\lambda_i \in \mathbb{C}$ разные, является ЛНЗ.*

Доказательство. Выражение $P_n(x)e^{\lambda x}$ – квазисногочлен степени n, $\lambda \in \mathbb{C}$, коэффициенты $P_n(x) \in \varPhi$ Рассмотрим $(P_n(x)e^{\lambda x})' = \lambda\cdot P_n(x)e^{\lambda x} + e^{\lambda x}\overline{P}_{n-1}(x) = e^{\lambda x}(\lambda P_n(x) + \overline{P}_{n-1}(x)) = \widetilde{P}_n(e^{\lambda x})$

То есть, если будем дифференцировать степень n, то останемся в множестве квазимногочленов степени n.

Докажем по индукции. База $n = 1-$ выполнена по Лемме (1.2). Пусть выполнено для $n = s-1$: система из $s-1$ квазимногочленов является ЛНЗ системой: $P_{n_1}(x)e^{\lambda_1 x}, \ldots, P_{n_{s-1}}$ – ЛНЗ.

Для n. От противного: пусть система $P_{n_1}(x)e^{\lambda_1 x}, \ldots, P_{n_{s-1}}, P_{n_s}(x)e^{\lambda_s x}$ является линейно зависимой, тогда $\exists C_1, \ldots, C_l, \ldots, C_s$:

$$C_1P_{n_1}(x)e^{\lambda_1 x} + C_2P_{n_2}(x)e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_lP_{n_l}(x)e^{\lambda_l x} + \cdots + C_sP_{n_s}(x)e^{\lambda_s}x = 0 \tag{2.5}$$

и хотя бы одна константа, например $C_l \neq 0$ Из (2.5), перенося C_l вправо и деля на $C_le^{\lambda_l x}$ получаем:

$$\overline{C_1}P_{n_1}(x)e^{\omega_1 x} + \cdots + \overline{C_s}P_{n_s}(x)e^{\omega_s x} = -P_{n_l}(x)$$

где $\overline{C_i} = \frac{C_i}{C_l \neq 0}, \omega_i = \lambda_i - \lambda_l$

Продифференцируем n_{l+1} раз последнее тождество. Перенумеровав $s-1$ слагаемое в левой частЮ получим $\overline{C}_1 \cdot \widetilde{P}_n(x)e^{\omega_1 x} + \dots + \overline{C}_{s-1} \cdot \widetilde{P}_{n_{s-1}}(x)e^{\omega_{s-1}x} = 0$

По определению индукции последнее равенство возможно, только если все $\overline{C}_i = 0, \quad \overline{C}_i = \frac{C_i}{C_l}; C_l \neq 0 \Rightarrow C_i = 0, i = 1, \dots, l-1, l+1, \dots, s \underset{(2.5)}{\Rightarrow} C_l = 0 -$ противоречие рпедположению индукции о линейнос независимости системы $P_{n_1}(x)e^{\lambda_1 x}, \dots, P_{n_{s-1}}(x)e^{\lambda_{s-1}x}$ ■

Таким образом ФСР дифференциального уравнения (2.1) будет состоять из функций набора

$$\Big\{\{e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{l_1-1}e^{\lambda_1 x}\}, \dots, \{e^{\lambda_m x}, \dots, x^{l_m-1}e^{\lambda_m x}\}, \dots, \{e^{\lambda_k x}, \dots, x^{l_k-q}e^{\lambda_k x}\}\Big\},$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \dots, \lambda_k -$ корни характеристического многочлена $P_n(\lambda)$ кратности $l_1, \dots, l_m, \dots, l_k$

Общее решение (2.1) будет иметь вид

$$y_0 = e^{\lambda_1 x}\Big(\sum_{m=1}^{l_1-1} C_m^1 x^m\Big) + \dots + e^{\lambda_k x}\Big(\sum_{m=1}^{l_k-1} C_m^k x^m\Big) \tag{2.6}$$

Фигурирующие в (2.6) константы C_i^j, вообще говоря, могут быть комплексными, если корни $P_n(\lambda)$ являются комплекснозначными. Если изначально ставится задача $-$ найти решение ДУ во множестве действительных функций действительного переменного, то в случае комплексных корней возникает задача выделить из множества комплексных решений действительное. Это осуществимо, так как коэффициенты $P_n(\lambda)$ являются действительными числами.

Пусть $\lambda_m = \alpha + \beta i -$ корень характеристического многочлена кратности i. Ему соответствуют $\varphi_m^i = x^i e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x); \quad \varphi_m^i, \overline{\varphi}_m^i -$ ЛНЗ, $i = \overline{0, l-1}$

Рассмотрим функции

$$\Psi_m^i = \frac{\varphi_m^i + \overline{\varphi}_m^i}{2} = e^{\alpha x} \cdot x^i \cos \beta x = Re(\varphi_m^i)$$

$$\chi_m^i = \frac{\varphi_m^i - \overline{\varphi}_m^i}{2} = e^{\alpha x} \cdot x^i \sin \beta x = Im(\varphi_m^i)$$

Так как любая суперпозиция решений (2.2) в силу его линейности тоже является решением, то χ_m^i и Ψ_m^i являются линейно независимыми и действительными решениями (2.2). Таким образом, чтобы получить действительную ФСР, необходимо все φ_m^i и $\overline{\varphi_m^i}, \quad i = \overline{0, l_m} \quad m = \overline{1, k}$ отвечающих паре комплексных корней характеристического многочлена $\alpha \pm i\beta$ кратности l заменить на вещественные $Re(\varphi_m^i)$ и (φ_m^i). Если считать, что $\lambda_i = \alpha_i \pm i\beta_i -$ корень $P_n(\lambda)$ кратности l_i, то общее решение (2.2) имеет вид:

$$y_0 = e^{\alpha_1 x}\Big(\sum_{j=0}^{l_1-1} x^j(A_j^1 \cos \beta_1 x + B_j^1 \sin \beta_1 x)\Big) + \dots + e^{\lambda_k x}\Big(\sum_{j=0}^{l_k-1} x^j(A_j^k \cos \beta_k x + B_j^k \sin \beta_k x)\Big) \tag{2.7}$$

1.4 Неоднородные линейные уравнения

Рассмотрим уравнение вида: $L_n(p)(y(x)) = f(x)$

Лемма 1.3. *Пусть неоднородность имеет вид* $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} f_k(x)$ *и* $y_k^s(x) -$ *частное решение*

$L_n(p)(y(x)) = f_k(x), \quad k = \overline{1, m}$, *то есть* $L_n(p)(y_k^s(x)) = f_k(x)$

Тогда частное решение уравнения имеет вид $y^s(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} y_n^s(x)$.

Доказательство. $L_n(p)\Big(\sum\limits_{k=1}^{m} y_k^s(x)\Big) \underset{linear L}{=} \sum\limits_{k=1}^{m} L_n(p)(y_k^s(x)) = \sum\limits_{k=1}^{m} f_k(x) = f(x)$ ■

Примечание. *Утверждение леммы остается верным и в случае переменных коэффициентов в* $L_n(p)$.

Определение 1.2. *Пусть* $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} P_{n_i}(x)e^{\lambda x}$, *где* P_{n_i} – *многочлен степени* n_i *с комплексными коэффициентами,* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Тогда* $f(x)$ *называется квазимногочленом.*

Рассмотрим ДУ:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_n y = L_n(p)(y(x)) = (b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \dots + b_0)e^{\lambda x} = P_k(x)e^{\lambda x} \qquad (1)$$

Теорема 1.8. *Частное решение* (1) *можно найти в виде*

$$y^s(x) = x^r(C_k x^k + C_{k-1}x^{k-1} + \dots + C_0)e^{\lambda x} \qquad (2)$$

где $r = l_m$, *если* $\lambda = \lambda_m$, $m = \overline{1,s}$ – *корень* $P_n(\lambda)$

$r = 0$, *если* $\lambda \neq \lambda_m$; *Неопределенность константы* $C_k \dots, C_0$ *находятся из системы с треугольной матрицей.*

Доказательство.

- $\lambda_m = \lambda$

Подставим (2) в (1) и воспользуемся формулой сдвига.

$y^s(x)x^r(C_k x^k + C_{k-1}x^{k-1} + \dots + C_0)e^{\lambda x}$

Оператор примет вид:

$$L_n(p)(y^s(x)) = (a_n(p-\lambda_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (p-\lambda_s)^{l_s})(y^s(x)) = L_{n-l_m}(p) \cdot \underbrace{(p-\lambda_m)^{l_m}}_{\text{(к оператору)}}(y^s(x)) \underset{\text{формула сдвига}}{=}$$

$$= e^{\lambda_m x} L_{n-l_m}(p+\lambda_m)\frac{d^{l_m}}{dx^{l_m}}(C_k x^{r+k} + C_{k-1}x^{r+k-1} + \dots + C_0 x^r)$$

Уравнение в таком виде имеет вид:

$$e^{\lambda x} L_{n-l_m}(p)(p+\lambda_m)\frac{d^{l_m}}{dx^{l_m}}(C_k x^{r+k} + C_{k-1}^{r+k-1} + \dots + C_0 x^r) \equiv e^{\lambda_m x}(b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \dots + b_0)$$

где $L_{n-l_m}(p+\lambda_m) = a_0(p+\lambda_m)^0 + \dots + a_{n-l_m}(p+\lambda_m)^{n-l_m} = d_0 p^0 + \dots + d_{n-l_m}p^{n-l_m}$

Сократим на $e^{\lambda_m x}$ и выполним дифференцирование $\frac{d^{l_m}}{dx^{l_m}}$ с учетом того, что $r = l_m$

$$(d_0p^0 + \dots + d_{n-l_m}p^{n-l_m})(A_k C_k x^k + A_{k-1}C_{k-1}x^{k-1} + \dots) = A_k C_k d_0 x^k + (kA_k C_k d_1 + A_{k-1}C_{k-1}d_0)x^{k-1} + \dots \equiv$$

$$\equiv b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \dots$$

где $A_k = (k+l_m)(k+l_m-1) \cdot \dots \cdot (k+1)$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x и получим систему

$$\text{система с треугольной матрицей} \begin{cases} A_k C_k d_0 = b_k \\ A_{k-1}C_{k-1}d_0 + kA_k C_k d_1 = b_{k-1} \end{cases} \qquad (4)$$

- $\lambda \neq \lambda_m$

$$y^s = e^{\lambda x}(C_k x^k + C_{k-1}x^{k-1} + \dots + C_0)$$

После формулы сдвига $e^{\lambda x}L_n(p+\lambda)(f) \Rightarrow$

$$L_n(p+\lambda_m) = (a_0(p+\lambda_m)^0 + \dots + a_n(p+\lambda_m)^n) = d_0p^0 + d_1p + \dots + d_np^n \Rightarrow$$

уравнение примет вид:

$$e^{\lambda x}(d_0p^0 + d_1p + \dots + d_np^n)(C_k x^k + C_{k-1}x^{k-1} + \dots + C_0) \equiv (b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \dots + b_0)e^{\lambda x} \Rightarrow$$

$$C_k d_0 x^k + (kC_k d_1 + C_{k-1}d_0)x^{k-1} + \dots \equiv b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \dots$$

После приравнивая коэффициентов при одинаковых степенях x:

$$\text{Система с треугольной матрицей} \begin{cases} C_k d_0 = b_k \\ C_{k-1}d_0 + kC_k d_1 = b_{k-1} \end{cases} \qquad (5)$$

■

1.5 Уравнение Эйлера

Примечание. *Источник: В. М. Ипатова, О. А. Пыркова, В. Н. Седов "ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ"*

Определение 1.3. *Уравнением Эйлера называется линейное дифференциальное уравнение с переменными к оэффициентам вида* $a_k(x) = b_k x^{n-k}$, $k = \overline{0,n}$, *где* $b_0, b_1, \ldots, b_n$ *– заданные числа, причем* $b_0 \neq 0$:

$$b_0 x^n y^{(n)} + b_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + n_{n-1} x y' + b_n y = f(x) \tag{3.1}$$

Заменой $x = e^t$ $(t = lnx)$ (3.1) сводится к линейному дифференциальному уравнению с постояннными коэффициентами. Действительно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt} = e^{-t} \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\Big(\frac{dy}{dx}\Big) = e^{-t} \frac{d}{dt}\Big(e^{-t}\frac{dy}{dt}\Big) = e^{-2t}\Big(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\Big)$$

Допустим, что $k-$я производная имеет вид

$$\frac{d^ky}{dx^k} = e^{-kt}\Big(\frac{d^ky}{dt^k} + \alpha_1 \frac{d^ky}{dt^k} + \cdots + \alpha_{k-1}\frac{dy}{dt}\Big) = \frac{1}{x^k}\Big(\frac{d^ky}{dt^k} + \alpha_1 \frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}} + \cdots + \alpha_{k-1}\frac{dy}{dt}\Big) \text{ где } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1} - \text{постоянные}$$

Тогда $(k+1)-$я производная будет равна

$$\frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}} = \frac{d}{dx}\Big(\frac{d^ky}{dx^k}\Big) = e^{-t}\frac{d}{dt}\Big(\frac{d^ky}{dx^k}\Big) = e^{-(k+1)t}\Big(\frac{d^{k+1}y}{dt^{k+1}} + (\alpha_1 - k)\frac{d^ky}{dt^k} + \cdots + k\alpha_{k-1}\frac{dy}{dt}\Big) = \tag{6}$$

$$= \frac{1}{x^{k+1}}\Big(\frac{d^{k+1}y}{dt^{k+1}} + (\alpha_1 - k)\frac{d^ky}{dt^k} + \cdots + k\alpha_{k-1}\frac{dy}{dt}\Big) \tag{7}$$

Так как в преобразованном уравнении, в случае отсутствия кратных корней характеристического уравнения, решения имеют вид $y = e^{\lambda t}$, следовательно, в исходном уравнении они имеют вид $y = x^\lambda$. Поэтому можно непосредственно подставить его в уравнение Эйлера (3.1). Поскольку $x^k \frac{d^k x^\lambda}{dxk} = \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-k+1)$ при $k \leqslant \lambda$, то характеристическое уравнение имеет вид

$$b_0\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1) + \cdots + b_{n-1}\lambda(\lambda-1) + b_{n-1}\lambda + b_n = 1 \tag{3.2}$$

Каждому простому корню λ уравнения (3.2) соответствует частное решение однородного уравнения Эйлера x^λ; каждому действительному корню λ кратности l $(l \geqslant 2)$ сооответсвует l линейно независимых частных решений однородного уравнения Эйлера $x^\lambda, x^\lambda \ln x, \ldots, x^\lambda (\ln x)^{l-1}$. В случае невещественных корней λ надо учитывать, что $x^{i\beta} = e^{i\beta \ln x}$, таким образом паре комплексно сопряженных корней$\alpha \pm i\beta$ уравнения (3.2) будут соответствовать два решения однородного уравнения Эйлера $x^\alpha \cos(\beta \ln x)$ и $x^\alpha \sin(\beta \ln x)$