1 Матричная экспонента, ее свойства и применение к решению нормальных линейных систем

1.1 Матричная экспонента

Необходимо решить ОЛДУ вида:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x},\ \vec{x}(t_0) = \vec{x_0}, \tag{1}$$

Если $A(t) = ||a^i_j||$, $a^i_j \in \mathbf{R}$, $i,j = 1, \ldots, n$, тогда:

$$\vec{x_0} = E\vec{x_0},\ \vec{x_1} = E\vec{x_0} + \frac{t-t_0}{1!}A\vec{x_0} = \left(E + \frac{t-t_0}{1!}A\right)\vec{x_0},$$
$$\vec{x_n} = \left(E + \frac{t-t_0}{1!}A + \ \ldots\ + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n\right)\vec{x_0},$$

Этот процесс будет сходиться к задаче Коши с решением:

$$\vec{x} = \left(E + \frac{t-t_0}{1!}A + \ \ldots\ + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n + \ \ldots\right)\vec{x_0} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n\right)\vec{x_0},$$

при условии, что $A^0 = E$.

Определение 1.1. *Матричной экспонентой называют следующий степенной ряд:*

$$e^{(t-t_0)A} = E + \frac{t-t_0}{1!}A + \ \ldots\ + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n + \ \ldots\ = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n.$$

1.2 Свойства матричной экспоненты

Это квадратная матрица, по размерам аналогична матрице A, и каждый элемент этой матрицы представляет из себя степенной ряд с радиусом сходимости $+\infty$.

1. Решение задачи Коши для (1), если $A = const$:

$$\vec{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{x_0},\ (\vec{x}(t_0) = \vec{x_0}).$$

2. $e^{0A} = E$.

3. $e^{(t_1+t_2)A} = e^{t_1A}e^{t_2A} \Rightarrow e^{t_1A}e^{t_2A} = e^{t_2A}e^{t_1A}$ (коммутативность).

4. $\left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}$.

5. $\left(e^{tA}\right)' = Ae^{tA} = e^{tA}A$.

Доказательство. Так как квадратные матрицы составляют определенное кольцо, то $A^{n+m} = A^nA^m = A^mA^n$.

1.

2. $e^{tA} = E + \frac{t-t_0}{1!}A + \ \ldots\ + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n + \ \ldots$, если $t = 0$:

$$e^{0A} = E + 0 + \cdots = E$$

3. рассматриваем (1), если $\vec{x}(t)$ - решение этого ДУ, то $\vec{x}(t+t_0)$ тоже решение этого ДУ $\forall t_0 \in \mathbf{R}$. $(u = t+t_0)$:

$$\frac{d\vec{x}(t+t_0)}{dt} = \frac{d\vec{x}}{du}\frac{du}{dt} = \frac{d\vec{x}}{du} = A\vec{x}(u) = A\vec{x}(t+t_0).$$

Тогда (1), с задачей Коши $\vec{x}(0) = \vec{x_0}$ имеет решение:

$$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x_0},$$

$$\vec{x}(t+t_0) = e^{(t+t_0)}\vec{x_0} \text{ - решение } \frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}.$$

Рассмотрим тогда тоже самое уравнение для функции $z(t)$:

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = A\vec{z}, \text{ с задачей Коши } \vec{z}(0) = e^{t_0A}\vec{x_0} \Rightarrow \vec{z}(t) = e^{tA}(e^{t_0A}\vec{x_0}) = (e^{tA}e^{t_0A})\vec{x_0}.$$

Рассмотрим это решение в нуле:

$$\vec{x}(0+t_0) = e^{t_0A}\vec{x_0},$$

из основной теоремы следует, что $\vec{x}(t+t_0) = \vec{z}(t)\ \forall t$.

Тогда и получается основная формула:

$$\vec{x}(t+t_0) = e^{(t+t_0)A}\vec{x_0} = (e^{tA}e^{t_0A})\vec{x_0}$$

4. $E = e^{0A} = e^{(t-t)A} = e^{tA}e^{-tA} = E \Rightarrow \left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}$.

5. Берем представление матричной экспоненты в виде степенного ряда, который можно дифференцировать, тогда получаем:

$$(e^{tA})' = A + tA^2 + \ \dots\ + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n + \ \dots = A\left(E + tA + \ \dots\ + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1}\right),$$

$$(e^{tA})' = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

■

Примечание. Формула $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$ не имеет места, кроме случая, если $AB = BA$ (т.е. матрицы коммутативны).

1.3 Применение к решению нормальных линейных систем

Теорема 1.1. *Пусть S - матрица перехода от исходного базиса к новому базису. Тогда в новой базисе $\overline{A} = S^{-1}AS$, или $A = S\overline{A}S^{-1}$. И главное:*

$$e^{tA} = S^{-1}e^{t\overline{A}}S.$$

Доказательство.

$$e^{tA} = \left(E + tA + \ \dots \ + \frac{t^n}{n!}A^n\right) = \left(E + tS^{-1}e^{t\overline{A}}S + \ \dots \ + \frac{t^n}{n!}(S^{-1}e^{t\overline{A}}S)^n\right),$$
$$(S\overline{A}S^{-1})^n = S\overline{A}^nS^{-1},\ SES^{-1} = SS^{-1} = E$$
$$e^{tA} = S^{-1}e^{t\overline{A}}S.$$

■

Для решения нормальных линейных систем методом матричной экспоненты мы будем находить собственные вектора.

Матрица A в базисе из собственных векторов (если они соответствуют действительным собственным значениям) будет иметь диагональный вид. Произведение диагональной матрицы на диагональную – диагональная. Тогда для случая без кратных корней:

$$e^{tA} = E + t \cdot diag(\lambda_1, \dots ,\lambda_n) + \frac{t^n}{n!} \cdot diag(\lambda_1^n, \dots ,\lambda_n^n).$$

$$e^{tA} = diag(e^{t\lambda_1}, \dots , e^{t\lambda_n}).$$

Если λ – корень кратности l, то матрица A приводится к Жордановой клетке (диагональная матрица с единицами над главной диагональю).

$$A = \lambda E + B \Rightarrow B = A - \lambda E.$$

$$e^{tA} = e^{t(\lambda E+B)} = e^{t\lambda E}e^{tB},\ e^{t\lambda E} = diag(e^{t\lambda}, \dots , e^{t\lambda}), e^{tB} = E + tB + \ \dots \ + \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}B^{l-1} + 0$$

$$\text{тогда } e^{tA} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t & & \dots & \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} \\ & & & \dots & \\ 0 & & & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Метод решения линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами (матричный метод вариации постоянной)

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}(t), \quad \text{решение будем искать в виде } \ \vec{x}(t) = e^{tA}\vec{C}(t),$$

$$\text{тогда } Ae^{tA}\vec{C}(t) + e^{tA}\dot{\vec{C}}(t) = Ae^{tA}\vec{C} + \vec{f}(t),$$

$$e^{tA}\dot{\vec{C}}(t) = \vec{f}(t) \ \Rightarrow \dot{\vec{C}}(t) = (e^{tA})^{-1}\vec{f}(t) = e^{-tA}\vec{f}(t).$$

2 Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной линейной системы уравнений и для линейного уравнения n-го порядка в нормальном виде

Рассматривается система вида

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{q}(t), \tag{2}$$

где $A = ||a^i_j(t)||$, $i,j = \vec{1,n}$ – матрица, $\vec{q}(t)$ – заданная вектор-фенкция. Наряду с векторной записью также будем использовать координатную запись $\dot{x}^i = \sum\limits_{j=1}^{n} a^i_j x^j + q^i(t)$, $i = \vec{1,n}$.

Необходимым условием линейности является факт того, что все A^i_j и q^i зависят только от t и не зависят от $\vec{x}$.

Для (2) ставится задача Коши:

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x_0}.$$

Теорема 2.1. ***Основная теорема для линейных систем.*** *Пусть $a^i_j(t)$, $i,j = \vec{1,n}$ и $\vec{q}(t)$ в (2) непрерывны на отрезке $[a;b]$. Тогда рпешение задачи Коши существует и единственно на всем отрезке $[a;b]$.*

Предварительные замечания:

Пусть вектор-функция $\vec{f}(x) \in B$ и A – линейный оператор, действубщий из B в B, т.е. $A(\vec{f} + \vec{g}) = A\vec{f} + A\vec{g}$.

Определим норму оператора:

$$||A|| = \sup_{\vec{\varphi} \in B,\ \vec{\varphi} \neq \vec{0}} \frac{||A(\vec{\varphi})||}{||\vec{\varphi}||}.$$

Тогда получаем неравенство: $||A||$
$leqslant ||A||||\vec{\varphi}||$.

Нормой для вектор-функции выберем $||\vec{x}(t)|| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(\max\limits_{t \in [a;b]} x^i(t))$, а нормой для оператора $||A|| == \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(\max\limits_{t \in [a;b]} \sum\limits_{j=1}^{n} |a^i_j(t)|)$

Доказательство. Определим $\vec{g}(t) = \vec{x_0} + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{q}(S)dS$ и построим итерационную процедуру.

Т.к $q^i(t) \in C_{[a;b]}$ $\forall i = \vec{1,n} \Rightarrow \exists ||\vec{q}||_c = M_1$. Тогда $||\vec{g}||_c = ||\vec{x_0} + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{q}(S)dS|| \leqslant ||\vec{x_0}|| + ||\int\limits_{t_0}^{t} \vec{q}(S)dS|| \leqslant ||\vec{x_0}|| + M_1(b-a) = C$.

Рассмотрим интегральное уравнение $\vec{x} = \vec{g} + \int\limits_{t_0}^{t} A(s)\vec{x}(s)ds$.

Аналогично основной лемме доказывается, что последнее интегральное уравнение эквивалентно задаче (2).

Итерационная процедура: $\vec{x_0} = \vec{g}$; $\vec{x_k} = \vec{g} + \int\limits_{t_0}^{t} A(s)\vec{x_{k-1}}(s)ds$, $k = 0,1, \ \ldots$

Оценим норму:

$$||\vec{x_1}-\vec{x_0}|| = ||\int\limits_{t_0}^{t} A(s)\vec{g}(s)ds|| \leqslant |\int\limits_{t_0}^{t} ||A(s)\vec{g}(s)||ds| \leqslant |\int\limits_{t_0}^{t} ||A(s)||\cdot||\vec{g}(s)||ds| \leqslant C_1C|t-t_0|;$$

Таким образом $||\vec{x_1}-\vec{x_0}|| \leqslant C_1C|t-t_0|$.

Теперь докажем по индукции неравенство: $||\vec{x_k}-\vec{x_{k-1}}|| \leqslant \frac{CC_1^k}{k!}|t-t_0|^k$.

Базой индукции выступает полученное выше неравенство. Предположим, что верно для $n=k$, т.е.: $||\vec{x_k}-\vec{x_{k-1}}|| \leqslant \frac{CC_1^k}{k!}|t-t_0|^k$.

Докажем для

$$n=k+1:\ ||\vec{x_{k+1}}-\vec{x_k}|| = ||\int\limits_{t_0}^{t} A(s)(\vec{x_k}(s)-\vec{x_{k-1}}(s))ds|| \leqslant |\int\limits_{t_0}^{t} ||A(s)(\vec{x_k}(s)-\vec{x_{k-1}}(s))||ds| \leqslant$$

$$\leqslant |\int\limits_{t_0}^{t} ||A(s)||\cdot||(\vec{x_k}(s)-\vec{x_{k-1}}(s))||ds| \leqslant C|\int\limits_{t_0}^{t} \frac{C_1C^k|s-t_0|^k}{k!}ds| = \frac{C^{k+1}C_1|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!}$$

Т.к. $|t-t_0| \leqslant (b-a)$, то предыдущее неравенство можно усилить $||\vec{x_k}-\vec{x_{k-1}}|| \leqslant \frac{C_1C^k}{k!}(b-a)^k$.

Функциональная последовательно $\vec{x_k}$ сходиться равномерно, т.к. сходится равномерно ряд $\vec{x_0}+(\vec{x_1}-\vec{x_0})+\ \dots\ +(\vec{x_k}-\vec{x_{k-1}})+\ \dots$, который межорируется сходящимся рядом $||\vec{x_0}||+||(\vec{x_1}-\vec{x_0})||+\dots+||(\vec{x_k}-\vec{x_{k-1}})||+\dots \leqslant ||\vec{x_0}||+C_1\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{C^k|b-a|^k}{k!} = ||\vec{x_0}||+C_1e^{C(b-a)} < \infty \Rightarrow$ Существует (в сиду банаховости пр-ва) непрерывно дифф. $\vec{\varphi(t)}: \exists \lim\limits_{n\to\infty}\vec{x_n} = \varphi(t)$.

Рассмотрим $||\int\limits_{t_0}^{t} A\vec{x_n}dS - \int\limits_{t_0}^{t} A\vec{\varphi}dS|| = ||\int\limits_{t_0}^{t} A(\vec{x_n}-\vec{\varphi})dS|| \leqslant ||A||\cdot|\int\limits_{t_0}^{t}||\vec{x_n}-\vec{\varphi}||dS|$, где $||\vec{x_n}-\vec{\varphi}|| \to_{n\to\infty} 0$.

Т.о. итерационная процедура сходится в силу существования пределов слева и справа.

Полученное решение эквивалентно решению задачи (2). В отличии от основной теоремы для нормальных систем ДУ: $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t,\vec{x})$, где существование было получено только на отрезке Пеано, для СЛДУ существование решения доказано для всего отрезка $[a;b]$ – промежутка, где $a_j^i(t)$ и $\vec{q}(t)$ непрерывны. В нашем случае $\vec{f}$ соответствует $\vec{f} = A\vec{x}+\vec{q}$. Она непрерывна, т.к. полученное решение $\vec{x}(t)$ непрерывно. Условие непрерывности $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ также выполнены, т.к. в нашем случае $\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_{ij}(t)$ – непр. на $[a;b]$. Отсюда следует единственность, т.к. два решения задачи (2), согласно основной теореме для нормальныэ систем, совпадает на промежутке, где они оба определены. В нашем случае это $[a;b]$.

Т.о. теорема не носит локальных характер.

$\blacksquare$