0.1 Классификация положений равновесия линейной автономной системы второго порядка. Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия двумерной автономной нелинейной системы. Теорема о выпрямлении траекторий.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x, y) \end{cases} \tag{1}$$

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – положение равновесия данной системы, т. е. выполнено: $\begin{cases} \frac{dx}{dt}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{dy}{dt}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$

Тогда, мы можем формально линеаризовать систему, используя известные методы:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(y - y_0) + o(\rho) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(y - y_0) + o(\rho) \end{cases} \tag{2}$$

где $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. В итоге, стандартной заменой $x = \overline{x} + x_0$ и $y = \overline{y} + y_0$ приводим систему к линейному виду.

$$\begin{cases} \frac{d\overline{x}}{dt} = \alpha_{11}\overline{x} + \alpha_{12}\overline{y} \\ \frac{d\overline{y}}{dt} = \alpha_{21}\overline{x} + \alpha_{22}\overline{y} \end{cases} \tag{3}$$

С этого момента, мы будем изучать виды фазвых траекторий и их поведение в окрестности положения равновесия для систем вида:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \tag{4}$$

с положением равновесия в точке $M_0(0, 0)$.

Рассмотрим автономную однородную систему линейных ДУ (4) и введем матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Получим собственные значения этой матрицы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \operatorname{trace} A \cdot \lambda - \det A = 0 \Rightarrow \tag{6}$$

$$\lambda = \frac{\operatorname{trace} A \pm \sqrt{\operatorname{trace}^2 A - 4 \det A}}{2}$$

Фазовый портрет системы зависит от собственных значений матрицы A.

1. Собственные значения $\lambda_1,\ \lambda_2\ \in\ \mathbb{R}$ (или $\operatorname{trace}^2 A - 4 \det A > 0$)

   Тогда, в базисе собственных значений матрица A примет вид: $\overline{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

   система (4) будет иметь вид: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda_1 x \\ \frac{dy}{dt} = \lambda_2 y \end{cases}$

и решения данной системы в базисе собственных векторов: $\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$

Решение системы в исходном базисе: $\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} h_1 \\ y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} h_2 \end{cases}$

где $h_1,\ h_2$ – собственные векторы матрицы A.

Рассмотрим фазовые портреты.

(a) $\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0$ и $|\lambda_1| < |\lambda_2|$

Заметим прежде всего, что при $c_1 \neq 0,\ c_2 = 0$ и при $c_1 = 0,\ c_2 \neq 0$ мы получаем прямые линии с направляющими векторами h_1 и h_2. Поэтому вектора h_1 и h_2 являются решениями системы.

Теперь, рассмотрим, что будет при $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$. Из $\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \Rightarrow$ $t = \dfrac{1}{\lambda_1} \ln \dfrac{x}{c_1}$ подставляем выражение для y и получаем **в базисе собственных векторов** $y = c|x|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_2}} = c|x|^r$, где $r = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0$.

Таким образом мы приходим к выводу, что фазовые трактории в данном случае – есть параболы (с показателем $r > 0$), причем при $t \to 0$ фазовые траектории стремяться к положению равновесия.

Определение 0.1. *Положение равновесия, при котором сосбтвенные значения матрицы A одного знака и фазовые трактории направлены к положению равновесия называются* ***устойчивым узлом****.*

Примечание. *В случае, когда положение равновесия является узлом, фазовые траектории касаются оси с меньшим по модулю собственным числом.*