

1 Билет номер 3

1.1 Понятие кольца. Рассмотрение понятия многочленов

Определение 1.1. Кольцом K называют множество, на котором определены две операции: сложение и умножение, сопоставляющее каждому парам элементов их "сумму" "произведение" являющихся элементами этого же множества.

Действия $+$ и \cdot удовлетворяют условиям: (первые 6 для любого кольца):

1. $(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in K$
2. $a + b = b + a \quad \forall a, b \in K$
3. $\exists 0 \in K : a + 0 = a \quad \forall a \in K$
4. $\forall a \in K \exists -a \in K : a + (-a) = 0 \in K$
5. $(a + b) = ac + bc \quad \forall a, b, c \in K$
6. $c \cdot (a + b) = ca + cb \quad \forall a, b, c \in K$
7. $(ab)c = a(bc) \quad \forall a, b, c \in K$
8. $ab = ba \quad \forall a, b \in K$
9. $\exists 1 \in K : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in K$
10. $\exists a^{-1} \in K : a^{-1}a = aa^{-1} = 1 \quad \forall a \in K$

Утверждение 1.1. Если $a + x = a + y$, то $x = y$

Доказательство.

$$(-a) + (a + x) = (-a) + (a + y) \Rightarrow ((-a) + a) + x = ((-a) + a) + y = 0 + x = x = x + y = y$$

Отсюда следует единственность нуля и противоположного элемента:

$$\begin{aligned} (-a) &\neq (-a)' \\ 0 &= a + (-a) = a + (-a)' \Rightarrow (-a) = (-a)' \end{aligned}$$

■

Утверждение 1.2. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \quad \forall a$

Доказательство. $a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0 = a(0 + 0) \cdot 0 = 0$; аналогично $0 + 0 \cdot a = 0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a \Rightarrow 0 \cdot a = 0$

■

Утверждение 1.3. Единица единственна

Доказательство. Пусть $1 \neq 1' : 1 = 1 \cdot 1' = 1' \cdot 1 = 1'$

■

- Кольцо называется ассоциативным, если выполнено условие 7; коммутативным, если выполнено 8. Если выполнено условие 9, то говорят о кольце с единицей.
- Ассоциативное кольцо называется областью целостности, если из $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$
- Полем называется коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, в котором каждый отличный от нуля элемент имеет обратный.

Утверждение 1.4. Любое поле является областью целостности

Доказательство. $ab = 0, a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} \cdot (ab) = a^{-1} \cdot 0 = 0 = (a^{-1}a) \cdot b = 1 \cdot b = b = 0$

■

1.2 Многочлен

Пусть A — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Одночленом от x с коэффициентом из A называется выражение ax^m , $a \in A$, $m \in \mathbf{N}$. По определению положим, что $ax^0 = 0$. Выражение ax^m будем рассматривать как символ, для которого выполняется по определению:

$$ax^m + bx^m = (a + b)x^m$$

$$ax^m \cdot ax^n = ax^{m+n}$$

Выражение, состоящее из нескольких одночленов, соединенных знаком $+$ назовем многочленом от x с коэффициентом из A . Без нарушения общности, в силу коммутативности сложения запишем в каноническом виде: $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$

1. Многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ и $Q_m(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ считаем равными в том и только в том случае, если $n = m$ и $a_k = b_k$, $k = \overline{1, n}$
2. Суммой двух многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ называется многочлен, получившейся посредством объединения одночленов соответствующих слагаемых:

$$P(n) + Q_m(x) = (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \dots + c_sx^s, \quad x = \max\{n, m\}$$

$$c_s = a_s + b_s, a_s = 0, \text{ если } s > n \text{ и } b_s = 0, \text{ если } s > m$$

Так определенное сложение многочленов коммутативно и ассоциативно.

Имеется нулевой элемент $0 = 0 + \dots + 0 \cdot x^n$, а также противоположный $(-P_n(x)) = (-a_0) + (-a_1)x + \dots + (-a_n)x^n$

3. Произведением двух многочленов называют многочлен, составленный из произведения всех членов первого сомножителя на все члены второго.

$$P_n(x) \cdot Q_m(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots + \left(\sum_{j=k+l} a_kb_l \right) x^j + \dots + a_nb_mx^{n+m}$$

- Покажем, что так определенное умножение будет коммутативно и ассоциативно:

$$P_n(x) \cdot Q_m(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots + \left(\sum_{j=k+l} a_kb_l \right) x^j + \dots + a_nb_mx^{n+m}$$

В сумме $\sum_{j=k+l} a_kb_l$ заменим $k \leftrightarrow l \Rightarrow \sum_{j=k+l} b_ka_l = \sum_{j=k+l} b_la_k = \sum_{j=k+l} a_lb_k \stackrel{??}{\Rightarrow} P_n(x) \cdot Q_m(x) = Q_m(x) \cdot P_n(x) \Rightarrow$ коммутативно.

Пусть $R_s(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_sx^s \Rightarrow (P_n(x) \cdot Q_m(x)) \cdot R_s(x) = ((a-b)_0c_0) + \left(\sum_{\gamma=j+\sigma} \left(\sum_{j=k+l} a_kb_l \right) c_\sigma \right) x^\gamma + (a_nb_m)c_sx^{n+m+s}$, $j = 1, \dots, n + m + s - 1$. Так как $\sum_{\gamma=j+\sigma} \left(\sum_{j=k+l} a_kb_l \right) c_\sigma = \sum_{\gamma=k+l+\sigma} a_k(b_lc_\sigma)$. Пусть $l' = l + \sigma \Rightarrow \sum_{\gamma=k+l+\sigma} a_k(b_lc_\sigma) = \sum_{\gamma=k+l'} a_k \left(\sum_{l'=l+\sigma} b_lc_\sigma \right) \stackrel{??}{\Rightarrow} (P_n(x) \cdot Q_m(x)) R_s(x) = P_n(x) \cdot (Q_m(x) \cdot R_s(x))$ — ассоциативно.

- Дистрибутивность аналогично (везде используются свойства одночленов)

Таким образом так построенное множество многочленов от x над A будет ассоциативным и коммутативным кольцом $A(x)$. Роль единицы в $A(x)$ играет единица из A .

При построении кольца многочленов вместо x положим $p = \frac{d}{dx}$ — оператор дифференцирования, который действует на множестве бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций. $p \cdot f(x) = p(f(x)) = \frac{df}{dx} = f'$, $p^2(f) = f''$, \dots , $p^n(x) = f^{(n)}$; Справедлива формула $p^s \cdot p^m(f) = p^s \cdot (p^m(f)) = p^s \cdot (f^{(m)}) = f^{(m+s)} = p^{m+s}(f)$

По определению, множество бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций Φ является кольцом, содержащим поле \mathbb{C} . В качестве элементов кольца A будем брать числа из \mathbb{C} . Роль операторного одночлена в таком случае будет играть ap^m , $a \in \mathbb{C}$; $ap^m = p^ma$, так как $ap^m(f) = af^{(m)} = f^{(m)} \cdot a =$

$p^m(f) \cdot a$; По определению положим $ap^0 = a$, что корректно, так как $ap^0 f = ap^0(f) = af = a \cdot f = a(f)$. Приведение подобных слагаемых для одночленов определим как $ap^m + bp^m = (a + b)p^m$, поскольку $(ap^{(m)})(f) + bp^{(m)}(f) = af^{(m)} + b^{(m)} = (a + b)f^{(m)} = ((a + b)p^m)(f)$

Аналогично вводим выражение, состоящее из нескольких операторных одночленов, соединенных знаком $+$, называемое операторным многочленом от p с коэффициентом из \mathbb{C} . Из свойств дифференцирования следует, что в общем виде можно записать $L_n(p) = a_0 + a_1p + \dots + a_np^n$

Абсолютно аналогично доказываем, что замена x на p дает множество операторных многочленов от p , которое будет кольцом из \mathbb{C}

- Пусть $x \in \mathbb{C}$. Значение многочлена $P_n(x)$ на \mathbb{C} определим как число $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{C}$.

Понятие значения иномногчлена можно обобщить на случай, когда B является ассоциативным кольцом, содержащим кольцо A , в случае, когда элементы A коммутируют с элементами из B .

В таком случае можно определить степень элемента кольца B . Пусть $a \in B$, $a^1 = a$, $a^2 = a \cdot a$, \dots , $a^n = a^{n-1} \cdot a$

Теорема 1.1. $\forall k \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} \rightarrow a^k \cdot a^m = a^k + m$

- Значение операторного многочлена $L_n(p)$ определим на коммутативном и ассоциативном кольце Φ — бесконечно дифференцируемой комплекснозначной функцией от $x \in \mathbf{R}$: $f(x)$

$$L_n(F) = L_n(p)(f) = a_0f + a_1f' + \dots + a_nf^{(n)} \in \Phi$$

- Если $F(p) = L_n(p) + M_m(p)$ определим сумму на множестве дифф. операторов:

$$F(p) = (a_0 + b_0)f + (a_1 + b_1)f' + \dots + c_sf = L_n(p)(f) + M_m(p)(f) \Rightarrow (L_n(p) + M_m(p))(f) = (M_m(p) + N_m(p))(f)$$

коммутативно, ассоциативность аналогично/.

- $(L_n(p)M_m(p))(f) = (a_0b_0p^0 + (a_0b_1 + a_1b_0)p + \dots + (\sum_{j=k+l} a_kb_l)p^j + \dots + a_nb_mp^{m+n})(f) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)f' + \dots + (\sum_{j=k+l} a_kb_l)f^{(j)} + \dots + a_nb_mf^{(n+m)} = (a_0p^0 + a_1p + \dots + a_np^n) \cdot (b_0f + b_1f' + \dots + b_mf^{(m)}) = L_n(p) \cdot (M_m(f))$ — определение действия произведения операторов на множестве Φ . Так как $a_0b_0f + (a_0b_1 + a_1b_0)f' + \dots + (\sum_{j=k+l} a_kb_l)f^{(j)} + \dots + a_nb_mf^{(m+n)} = M_m(p) \cdot (a_0f + a_1f' + \dots + a_nf^{(n)}) \Rightarrow (L_n(p) \cdot M_m(p)) = (M_m(p) \cdot L_n(p))$ — коммутативность.

- Покажем ассоциативность и дистрибутивность

$$L_n(p) \cdot M_m(p)K_s(p)(f) = (L_n(p) \cdot M_m(p))(K_s(p)(f)) = L_n(p)(M_m(p)(K_s(p)(f))) = L_n(p)(Q_m(p)R_s(p))(f)$$

ассоциативность.

$$L_n(p) + M_m(p)K_s(p)(f) = L_n(p)(K_s(p)(f)) + M_m(p)(K_s(p)(f)) = (L_n(p)K_s(p))(f) + (M_m(p)K_s(p))(f)$$

дистрибутивность \cdot и $+$.

Таким образом множество значений операторных многочленов является кольцом, которое содержится в Φ

- Если для $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ из $A(x)$ $\exists R_s(x) \in A(x)$: $P_n(x) = Q_m(x) \cdot R_s(x)$, то говорят, что $P_n(x)$ делится на $Q_m(x)$.

Теорема 1.2.

$$P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \in A(x), c \Rightarrow \exists! Q_m(x), r \in \mathbb{C} : P_n(x) = (x - c)Q_m(x) + r$$

Теорема 1.3. (Безу) $P_n(x)$ делится на $x - c \Leftrightarrow P_n(c) = 0$

Теорема 1.4. Если кольцо A является областью целостности, то число корней $P_n(x)$ не превосходит n

Теорема 1.5. Основная теорема алгебры

Любой многочлен $P_n(x)$ над \mathbb{C} имеет хотя бы один корень

Утверждение 1.5. Из 3 и 5 теоремы

$$\forall P_n(x) \rightarrow P_n(x) = a_n(x - c_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x - c_k)^{l_k} \quad (1)$$

- Взаимооднозначное соответствие φ кольца K на кольцо K' называется изморфизмом, если $\forall a \in K$ и $\forall b \in K' \rightarrow$

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \quad \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \quad (2)$$

Из (??) следуетЮ что образом нуля кольца K будет еуль K : $\varphi(a) = a''$ и $\varphi(0) = c'$, $\varphi(a) = a' = \varphi(a + 0) = \varphi(a) + \varphi(0) = a' + c' \Rightarrow c' = 0$

Если кольцо K имеет единицу, то $\varphi(1)$,будет еденицей кольца K' : $\varphi(a) = a' = \varphi(1 \cdot a) = \varphi(1) \cdot \varphi(a) = \varphi(1)a' \Rightarrow \varphi(1) =$ еденица K'

- Обратное отображение φ^{-1} кольца K' на K существует и будет изоморфно.

Рассмотрим отображение φ , которое множеству значений $P_n(x)$ над \mathbb{C} ставит в соответствие множество значений $L_n(p)$ на множестве бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций Φ по принципу:

$$\varphi(P_m(z)) = \varphi(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 z^0) = L_n(p)(f) = a_n f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \dots + a_0 f;$$

Покажем что отображение является изоморфизмом.

Отображение взаимоднозначно по построению.

$$\begin{aligned} \varphi(P_n(z) + Q_m(z)) &= \varphi(a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m) = \varphi(a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)z + \dots + (a_s + b_s)z^s) = \\ &= (a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)p + \dots + (a_s + b_s)p^s)(f) = L_n(p) + L_m(p)(f) \\ \varphi(P_n(z)_m(z)) &= \varphi(a_0 b_0 + \sum_{j=k+l} a_k b_l z^j + a_n b_m z^{m+n}) = (a_0 b_0 + \sum_{j=k+l} a_k b_l p^j + a_n b_m p^{m+n}) = L_n(p) \cdot Q_m(p)(f) \end{aligned}$$

Т.о. φ – изоморфизм. Тогда из (??):

$$\varphi(P_n(x)) = \varphi(a_n(x - c_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x - c_k)^{l_k}) = L_n(p)(f) = a_n \cdot (p - c_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (p - c_k)^{l_k}(f)$$

В итоге $L_n(p) = a_n \cdot (p - c_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (p - c_k)^{l_k}$, где c_1, \dots, c_k – корни $P_n(z)$

1.3 Линейные уравнения с потоянными коэффициентами

Рассмотрим ДУ вида: $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$, $a_n \neq 0$, где $a_i = \text{const} = \overline{1, n}$. Через введенный ранее дифференциальный оператор $L_n(p) = a_n p^n + \dots + a_0 p^0$ уравнение записывается в виде

$$L_n(p)(y(x)) = 0 \quad (2.1)$$

Было доказано, что $L_n(p)$ является изоиорфизмом характеристического многочлена (??): $P_n(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_0 = a_n(\lambda - \lambda_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{l_k}$ и поэтому для $L_n(p)$ справедливо разложение

$$L_n(p) = a_n(p - \lambda_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (p - \lambda_k)^{l_k}, \quad p = \frac{d}{dx} \quad (2.2)$$

Задача: найти ФСР (??). Из записи $L_n(p)$ ясно, что решением(??) будут функции из Φ , котрые являются корнями $L_n(p)$

Лемма 1.1. Для любой n раз дифференцируемой на промежутке функции $f(x)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ выполняется "формула сдвига"

$$L_n(p)(e^{\lambda x} f) = e^{\lambda x} \cdot L_n(p + \lambda)(f) \quad (2.3)$$

Доказательство. Докажем по индукции. База $n = 1$:

$$L_1(p)(e^{\lambda x} f) = (a_1 p^1 + a_0)(e^{\lambda x} f) = e^{\lambda x}(a_0 f + a_1(\lambda f + f')) = e^{\lambda x}(a_1(p + \lambda) + a_0)(f) = e^{\lambda x} L_1(p + \lambda)(f)$$

Пусть (??) справедлива для $k = n - 1$, то есть $L_{n-1}(p)(e^{\lambda x} f) = e^{\lambda x} L_{n-1}(p + \lambda)(f)$

Обозначим $L_n(p) = p - \lambda_1$, тогда по формуле (??) :

$$L_n(p) = a_n(p - \lambda_1) \cdot (p - \lambda_1)^{l_1-1} \cdot \dots \cdot (p - \lambda_m)^{l_m} \cdot \dots \cdot (p - \lambda_k)^{l_k} = L_1(p) \cdot L_{n-1}(p) = L_{n-1}(p) \cdot L_1(p)$$

$$\text{Тогда } L_n(p)(e^{\lambda x} f) = L_{n-1}(p) \cdot L_1(p)(e^{\lambda x} f(x)) = L_{n-1}(p)(L_1(p)(e^{\lambda x} f)) \underset{\text{база}}{=} L_{n-1}(p)(e^{\lambda x} \cdot (p + \lambda)(f))$$

Обозначим через $g(x) = L_1(p + \lambda)(f(x))$, имеем:

$$L_n(p)(e^{\lambda x} f) = L_{n-1}(p)(e^{\lambda x} g(x)) \underset{\text{индукция}}{=} e^{\lambda x} L_{n-1}(p + \lambda)(g) = e^{\lambda x} L_{n-1}(p + \lambda)(L_1(p + \lambda)(f)) = e^{\lambda x} (L_{n-1}(p + \lambda) \cdot L_1(p + \lambda))(f) =$$

■

Теорема 1.6. Если λ_m является корнем $L_n(\lambda)$ кратности l_m , то функции $e^{\lambda_m x}, x e^{\lambda_m x}, \dots, x^{l_m-1} e^{\lambda_m x}$ являются решениями (??)

Доказательство. Из коммутативности и ассоциативности кольца операторных многочленов и формулы (??):
 $L_n(p) = a_n(p - \lambda_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (p - \lambda_m)^{l_m} \cdot \dots \cdot (p - \lambda_k)^{l_k} = L_{n-l_m}(p)(p - \lambda_m)^{l_m}$

Воспользуемся формулой сдвига для $x^s e^{\lambda_m x}$:

$$L_n(p)(x^s e^{\lambda_m x}) = e^{\lambda_m x} \cdot L_{n-l_m}(p + \lambda_m) \cdot p^{l_m}(x^s) = e^{\lambda_m x} \cdot L_{n-l_m}(p + \lambda_m)(x^s)^{(l_m)} = \begin{cases} 0, & \forall s \leq l_m - 1 \\ e^{\lambda_m x} \cdot P_{n-l_m}(x), & s \geq l_m \end{cases}$$

где P_{n-l_m} многочлен степени не ниже $n - l_m$

Таким образом $x^s e^{\lambda_m x}$, $s = \overline{q, l_m-1}$ являются корнями $L - n(p)$, а значит и решениями (??)

■

Из доказанной теоремы следует:

$$\left\{ \{e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{l_1-1} e^{\lambda_1 x}\}, \dots, \{e^{\lambda_m x}, \dots, x^{l_m-1} e^{\lambda_m x}\}, \dots, \{e^{\lambda_k x}, \dots, x^{l_k-1} e^{\lambda_k x}\} \right\} \quad (2.4)$$

будут решениями (??). Всего таких функций n штук. Докажем линейную независимость систем функций (??)

Лемма 1.2. Система q, x, \dots, x^m линейно независима.

Доказательство. Рассмотрим линейную комбинацию функций $C_0 + C_1 x + \dots + C_n x^n = 0$

$$\text{От противного: пусть } \exists C_0, \dots, C_n : \sum_{i=0}^n C_i^2 \neq 0 : C_0 + C_1 x + \dots + C_n x^n = 0 \quad \forall x$$

Так как у многочлена степени n не более чем n нулей, то получаем противоречие

■

Теорема 1.7. Система функций $P_{n_1}(x)e^{\lambda_1 x}, \dots, P_{n_s}(x)e^{\lambda_s x}$, где $P_{n_i}(x)$ является многочленом степени n_i , а все $\lambda_i \in \mathbb{C}$ разные, является ЛНЗ.

Доказательство. Выражение $P_n(x)e^{\lambda x}$ — квазисногочлен степени n , $\lambda \in \mathbb{C}$, коэффициенты $P_n(x) \in \Phi$ Рассмотрим $(P_n(x)e^{\lambda x})' = \lambda \cdot P_n(x)e^{\lambda x} + e^{\lambda x} \overline{P}_{n-1}(x) = e^{\lambda x}(\lambda P_n(x) + \overline{P}_{n-1}(x)) = \tilde{P}_n(e^{\lambda x})$

То есть, если будем дифференцировать степень n , то останемся в множестве квазимногочленов степени n .

Докажем по индукции. База $n = 1$ — выполнена по Лемме (??). Пусть выполнено для $n = s - 1$: система из $s - 1$ квазимногочленов является ЛНЗ системой: $P_{n_1}(x)e^{\lambda_1 x}, \dots, P_{n_{s-1}}(x)e^{\lambda_{s-1} x}$ — ЛНЗ.

Для n . От противного: пусть система $P_{n_1}(x)e^{\lambda_1 x}, \dots, P_{n_{s-1}}(x)e^{\lambda_{s-1} x}, P_{n_s}(x)e^{\lambda_s x}$ является линейно зависимой, тогда $\exists C_1, \dots, C_l, \dots, C_s$:

$$C_1 P_{n_1}(x)e^{\lambda_1 x} + C_2 P_{n_2}(x)e^{\lambda_2 x} + \dots + C_l P_{n_l}(x)e^{\lambda_l x} + \dots + C_s P_{n_s}(x)e^{\lambda_s x} = 0 \quad (2.5)$$

и хотя бы одна константа, например $C_l \neq 0$ Из (??), перенося C_l вправо и деля на $C_l e^{\lambda_l x}$ получаем:

$$\overline{C}_1 P_{n_1}(x)e^{\omega_1 x} + \dots + \overline{C}_s P_{n_s}(x)e^{\omega_s x} = -P_{n_l}(x)$$

где $\overline{C_i} = \frac{C_i}{C_i \neq 0}, \omega_i = \lambda_i - \lambda_l$

Продифференцируем n_{l+1} раз последнее тождество. Перенумеровав $s-1$ слагаемое в левой части получим $\overline{C_1} \cdot \tilde{P}_n(x)e^{\omega_1 x} + \dots + \overline{C_{s-1}} \cdot \tilde{P}_{n_{s-1}}(x)e^{\omega_{s-1} x} = 0$

По определению индукции последнее равенство возможно, только если все $\overline{C_i} = 0$, $\overline{C_i} = \frac{C_i}{C_i}; C_l \neq 0 \Rightarrow C_i = 0, i = 1, \dots, l-1, l+1, \dots, s \Rightarrow C_l = 0$ — противоречие предположению индукции о линейной независимости системы $P_{n_1}(x)e^{\lambda_1 x}, \dots, P_{n_{s-1}}(x)e^{\lambda_{s-1} x}$ ■

Таким образом ФСР дифференциального уравнения (??) будет состоять из функций набора

$$\left\{ \{e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{l_1-1} e^{\lambda_1 x}\}, \dots, \{e^{\lambda_m x}, \dots, x^{l_m-1} e^{\lambda_m x}\}, \dots, \{e^{\lambda_k x}, \dots, x^{l_k-1} e^{\lambda_k x}\} \right\},$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \dots, \lambda_k$ — корни характеристического многочлена $P_n(\lambda)$ кратности $l_1, \dots, l_m, \dots, l_k$

Общее решение (??) будет иметь вид

$$y_0 = e^{\lambda_1 x} \left(\sum_{m=1}^{l_1-1} C_m^1 x^m \right) + \dots + e^{\lambda_k x} \left(\sum_{m=1}^{l_k-1} C_m^k x^m \right) \quad (2.6)$$

Фигурирующие в (??) константы C_i^j , вообще говоря, могут быть комплексными, если корни $P_n(\lambda)$ являются комплекснозначными. Если изначально ставится задача — найти решение ДУ во множестве действительных функций действительного переменного, то в случае комплексных корней возникает задача выделить из множества комплексных решений действительное. Это осуществимо, так как коэффициенты $P_n(\lambda)$ являются действительными числами.

Пусть $\lambda_m = \alpha + \beta i$ — корень характеристического многочлена кратности i . Ему соответствуют $\varphi_m^i = x^i e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$; $\varphi_m^i, \overline{\varphi_m^i}$ — ЛНЗ, $i = 0, l-1$

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} \Psi_m^i &= \frac{\varphi_m^i + \overline{\varphi_m^i}}{2} = e^{\alpha x} \cdot x^i \cos \beta x = \operatorname{Re}(\varphi_m^i) \\ \chi_m^i &= \frac{\varphi_m^i - \overline{\varphi_m^i}}{2} = e^{\alpha x} \cdot x^i \sin \beta x = \operatorname{Im}(\varphi_m^i) \end{aligned}$$

Так как любая суперпозиция решений (??) в силу его линейности тоже является решением, то χ_m^i и Ψ_m^i являются линейно независимыми и действительными решениями (??). Таким образом, чтобы получить действительную ФСР, необходимо все φ_m^i и $\overline{\varphi_m^i}$, $i = 0, l_m$ $m = 1, k$ отвечающих паре комплексных корней характеристического многочлена $\alpha \pm i\beta$ кратности l заменить на вещественные $\operatorname{Re}(\varphi_m^i)$ и (φ_m^i) . Если считать, что $\lambda_i = \alpha_i \pm i\beta_i$ — корень $P_n(\lambda)$ кратности l_i , то общее решение (??) имеет вид:

$$y_0 = e^{\alpha_1 x} \left(\sum_{j=0}^{l_1-1} x^j (A_j^1 \cos \beta_1 x + B_j^1 \sin \beta_1 x) \right) + \dots + e^{\lambda_k x} \left(\sum_{j=0}^{l_k-1} x^j (A_j^k \cos \beta_k x + B_j^k \sin \beta_k x) \right) \quad (2.7)$$

1.4 Неоднородные линейные уравнения

Рассмотрим уравнение вида: $L_n(p)(y(x)) = f(x)$

Лемма 1.3. Пусть неоднородность имеет вид $f(x) = \sum_{k=1}^m f_k(x)$ и $y_k^s(x)$ — частное решение

$$L_n(p)(y(x)) = f_k(x), \quad k = \overline{1, m}, \text{ то есть } L_n(p)(y_k^s(x)) = f_k(x)$$

$$\text{Тогда частное решение уравнения имеет вид } y^s(x) = \sum_{k=1}^m y_k^s(x).$$

Доказательство. $L_n(p) \left(\sum_{k=1}^m y_k^s(x) \right) \stackrel{\text{linear L}}{=} \sum_{k=1}^m L_n(p)(y_k^s(x)) = \sum_{k=1}^m f_k(x) = f(x)$ ■

Примечание. Утверждение леммы остается верным и в случае переменных коэффициентов в $L_n(p)$.

Определение 1.2. Пусть $f(x) = \sum_{i=1}^n P_{n_i}(x)e^{\lambda x}$, где P_{n_i} — многочлен степени n_i с комплексными коэффициентами, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда $f(x)$ называется квазимногочленом.

Рассмотрим ДУ:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = L_n(p)(y(x)) = (b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_0) e^{\lambda x} = P_k(x) e^{\lambda x} \quad (1)$$

Теорема 1.8. Частное решение (??) можно найти в виде

$$y^s(x) = x^r (C_k x^k + C_{k-1} x^{k-1} + \dots + C_0) e^{\lambda x} \quad (2)$$

где $r = l_m$, если $\lambda = \lambda_m$, $m = \overline{1, s}$ — корень $P_n(\lambda)$

$r = 0$, если $\lambda \neq \lambda_m$; Неопределенность константы $C_k \dots, C_0$ находятся из системы с треугольной матрицей.

Доказательство. • $\lambda_m = \lambda$

Подставим (??) в (??) и воспользуемся формулой сдвига.

$$y^s(x) x^r (C_k x^k + C_{k-1} x^{k-1} + \dots + C_0) e^{\lambda x}$$

Оператор примет вид:

$$\begin{aligned} L_n(p)(y^s(x)) &= (a_n(p - \lambda_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (p - \lambda_s)^{l_s})(y^s(x)) = L_{n-l_m}(p) \cdot \underbrace{(p - \lambda_m)^{l_m}}_{(\text{к оператору})} (y^s(x)) \stackrel{\text{формула сдвига}}{=} \\ &= e^{\lambda_m x} L_{n-l_m}(p + \lambda_m) \frac{d^{l_m}}{dx^{l_m}} (C_k x^{r+k} + C_{k-1} x^{r+k-1} + \dots + C_0 x^r) \end{aligned}$$

Уравнение в таком виде имеет вид:

$$e^{\lambda x} L_{n-l_m}(p)(p + \lambda_m) \frac{d^{l_m}}{dx^{l_m}} (C_k x^{r+k} + C_{k-1} x^{r+k-1} + \dots + C_0 x^r) \equiv e^{\lambda_m x} (b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_0)$$

где $L_{n-l_m}(p + \lambda_m) = a_0(p + \lambda_m)^0 + \dots + a_{n-l_m}(p + \lambda_m)^{n-l_m} = d_0 p^0 + \dots + d_{n-l_m} p^{n-l_m}$

Сократим на $e^{\lambda_m x}$ и выполним дифференцирование $\frac{d^{l_m}}{dx^{l_m}}$ с учетом того, что $r = l_m$

$$\begin{aligned} (d_0 p^0 + \dots + d_{n-l_m} p^{n-l_m})(A_k C_k x^k + A_{k-1} C_{k-1} x^{k-1} + \dots) &= A_k C_k d_0 x^k + (k A_k C_k d_1 + A_{k-1} C_{k-1} d_0) x^{k-1} + \dots \equiv \\ &\equiv b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots \end{aligned}$$

где $A_k = (k + l_m)(k + l_m - 1) \cdot \dots \cdot (k + 1)$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x и получим систему

$$\text{система с треугольной матрицей} \begin{cases} A_k C_k d_0 = b_k \\ A_{k-1} C_{k-1} d_0 + k A_k C_k d_1 = b_{k-1} \end{cases}$$

• $\lambda \neq \lambda_m$

$$y^s = e^{\lambda x} (C_k x^k + C_{k-1} x^{k-1} + \dots + C_0)$$

После формулы сдвига $e^{\lambda x} L_n(p + \lambda)(f) \Rightarrow$

$$L_n(p + \lambda_m) = (a_0(p + \lambda_m)^0 + \dots + a_n(p + \lambda_m)^n) = d_0 p^0 + d_1 p + \dots + d_n p^n \Rightarrow$$

уравнение примет вид:

$$\begin{aligned} e^{\lambda x} (d_0 p^0 + d_1 p + \dots + d_n p^n) (C_k x^k + C_{k-1} x^{k-1} + \dots + C_0) &\equiv (b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_0) e^{\lambda x} \Rightarrow \\ C_k d_0 x^k + (k C_k d_1 + C_{k-1} d_0) x^{k-1} + \dots &\equiv b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots \end{aligned}$$

После приравнявая коэффициентов при одинаковых степенях x :

$$\text{Система с треугольной матрицей} \begin{cases} C_k d_0 = b_k \\ C_{k-1} d_0 + k C_k d_1 = b_{k-1} \end{cases}$$

■

1.5 Уравнение Эйлера

Примечание. Источники: В. М. Ипатова, О. А. Пыркова, В. Н. Седов "ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ"

Определение 1.3. Уравнением Эйлера называется линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами вида $a_k(x) = b_k x^{n-k}$, $k = 0, n$, где b_0, b_1, \dots, b_n — заданные числа, причем $b_0 \neq 0$:

$$b_0 x^n y^{(n)} + b_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} x y' + b_n y = f(x) \quad (3.1)$$

Заменой $x = e^t$ ($t = \ln x$) (??) сводится к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Действительно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt} = e^{-t} \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = e^{-t} \frac{d}{dt} \left(e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) = e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

Допустим, что k -я производная имеет вид

$$\frac{d^k y}{dx^k} = e^{-kt} \left(\frac{d^k y}{dt^k} + \alpha_1 \frac{d^k y}{dt^k} + \dots + \alpha_{k-1} \frac{dy}{dt} \right) = \frac{1}{x^k} \left(\frac{d^k y}{dt^k} + \alpha_1 \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}} + \dots + \alpha_{k-1} \frac{dy}{dt} \right) \quad \text{где } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1} \text{ — постоянные}$$

Тогда $(k+1)$ -я производная будет равна

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^k y}{dx^k} \right) = e^{-t} \frac{d}{dt} \left(\frac{d^k y}{dx^k} \right) = e^{-(k+1)t} \left(\frac{d^{k+1} y}{dt^{k+1}} + (\alpha_1 - k) \frac{d^k y}{dt^k} + \dots + k \alpha_{k-1} \frac{dy}{dt} \right) = \\ &= \frac{1}{x^{k+1}} \left(\frac{d^{k+1} y}{dt^{k+1}} + (\alpha_1 - k) \frac{d^k y}{dt^k} + \dots + k \alpha_{k-1} \frac{dy}{dt} \right) \end{aligned}$$

Так как в преобразованном уравнении, в случае отсутствия кратных корней характеристического уравнения, решения имеют вид $y = e^{\lambda t}$, следовательно, в исходном уравнении они имеют вид $y = x^\lambda$. Поэтому можно непосредственно подставить его в уравнение Эйлера (??). Поскольку $x^k \frac{d^k x^\lambda}{dx^k} = \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-k+1)$ при $k \leq \lambda$, то характеристическое уравнение имеет вид

$$b_0 \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-n+1) + \dots + b_{n-1} \lambda(\lambda-1) + b_{n-1} \lambda + b_n = 1 \quad (3.2)$$

Каждому простому корню λ уравнения (??) соответствует частное решение однородного уравнения Эйлера x^λ ; каждому действительному корню λ кратности l ($l \geq 2$) соответствует l линейно независимых частных решений однородного уравнения Эйлера $x^\lambda, x^\lambda \ln x, \dots, x^\lambda (\ln x)^{l-1}$. В случае невещественных корней λ надо учитывать, что $x^{i\beta} = e^{i\beta \ln x}$, таким образом паре комплексно сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ уравнения (??) будут соответствовать два решения однородного уравнения Эйлера $x^\alpha \cos(\beta \ln x)$ и $x^\alpha \sin(\beta \ln x)$