0.1 Теорема Штурма

Рассмотрим на промежутке $I = I(x)$ следующее уравнение:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \tag{1}$$

где $a(x) \in C^1_{I(x)}$, $b(x) \in C^1_{I(x)}$.

Решение (1) такое, что $y(x)$ тождественно не равно нулю на $I(x)$ называется нетривиальным , а точка $x_0 \in I$ такая, что $y(x_0) = 0$ называется нулём нетривиального решения $y(x)$.

Уравнение (1) приводится к виду:

$$z'' + q(x)z = 0. \tag{2}$$

Для этого сделаем замену $y(x) = c(x) \cdot z(x)$, где $z(x)$ - решение уравнения выше (далее будем считать, что $c = c(x)$ и $z = z(x)$:

$$z'' \cdot c + 2c' \cdot z' + c'' \cdot z + a(x)(c' \cdot z + z' \cdot c) + b(x) \cdot c \cdot z = 0,$$

здесь выберем $c \neq 0$ так, что бы для z' выполнялось:

$$z'(2c' + a(x)c) = 0.$$

Тогда получаем линейное однородное уравнение $\Rightarrow$ $2c' + a(x)c = 0$, которое можно преобразовать в:

$$\frac{dc}{c} = -\frac{a(x)}{x}dx \Rightarrow c(x) = c_0 \cdot exp\left[-\frac{1}{2}\int a(x)dx\right] > 0. \tag{3}$$

Возьмем $c_0 = 1 \Rightarrow c \cdot z'' + (c'' + c'a + bc)z = 0$, тогда можемм ввести $q(x)$ такое, что:

$$q(x) = \frac{c'' + c'a}{c} + b.$$

Также заметим, что из (3) следует, что $c(x) > 0$. Тогда в силу замены $y = c(x) \cdot z$, $x_0 \in I$ является нулём $y(x)$ тогда и только тогда, когда x_0 является нулём $z(x)$.

Определение 0.1. *Точка x_0 является нулём $f(x) \in C^\infty$ кратности k, если $f(x_0) = f'(x_0) = ... = f^{(k-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(k)}(x_0) \neq 0$.*

Лемма 0.1. *Все нули нетривиального решения (2) (также как и для (1)) являются простыми, т.е. $k = 1$.*

Доказательство. От противного: пусть x_0 является нулём кратности 2, тогда $z(x_0) = z'(x_0) = 0$. Тогда в силу основной теоремы $z(x) = 0 \forall x \in I$ - противоречие, т.к. $z(x)$ - нетривиальное решение по условию. ■

Лемма 0.2. *Пусть M - множество нулей нетривиального решения $y(x)$ на нечетном промежутке $[x_1; x_2]$. Множество M не имеет предельной точки.*

Доказательство. От противного: пусть M - множество нулей. Пусть x_0 - предельная точка и $\exists x_k$:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \in [x_1; x_2],\ y(x_k) = 0,\ k = 1,2,...$$

Так как $y(x)$ - непрерывно, то $\lim\limits_{k\to\infty} y(x_k) = 0 = y(\lim\limits_{k\to\infty} x_k) = y(x_0) \Rightarrow y(x_0) = 0.$

Рассмотрим $[x_k; x_{k+1}]$ и $y(x)$ на нём, т.к. $y(x_k) = y(x_{k+1}) = 0$, то по теореме Ролля $\exists c_k : x_k \le c_k \le x_{k+1} : y'(c_k) = 0$ и т.к. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \lim\limits_{k\to\infty} x_{k+1} = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} c_k = x_0$. Из этого может получить, что так как $y'(x)$ - непрерывна, то:

$$\lim_{k\to\infty} y'(c_k) = 0 = y'(\lim_{k\to\infty} c_k) = y'(x_0) = 0$$

Так как по предложению $x_0 \in [x_1; x_2]$ и $y_0(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$ - получим задачу Коши для $x_0 \in [x_1; x_2] \Rightarrow$ в силу теорем существования и единственности решения задачи Коши: $y \equiv 0$ - единственное решение на $[x_1; x_2]$ - получим противоречие с нетривиальным решением. ■

Теорема 0.1 (Теорема Штурма)**.** *Рассмотрим уравнения:*

$$y'' + q(x)y = 0 \tag{4}$$

$$z'' + Q(x)z = 0, \tag{5}$$

где уравнение (4) будем называть быстрым, а (5) - медленным.
Пусть

$$q(x) \in C^1_{I(x)}, Q(x) \in C^1_{I(x)}, \forall x \in I \to q(x) \le Q(x).$$

Пусть $y(x)$ - нетривиальное решение (4), z(x) - нетривиальное решение (5). Если $x_1, x_2 \in I$ - последовательное нули $y(x)$б то либо $\exists x_0 \in (x_1; x_2)$, в которой $z(x_0) = 0$, либо $z(x_1) = z(x_2) = 0$.

Доказательство. Пусть x_1, x_2 - два соседних нуля $y(x)$, т.е. $y(x) \ne 0$ на $(x_1; x_2)$, пусть для определённости $y(x) > 0$.

По определению:

$$y'(x_1) = \lim_{x\to x_1} \frac{y(x) - y(x_1)}{x - x_1} \ge 0;\ y'(x_2) = \lim_{x\to x_2} \frac{y(x) - y(x_2)}{x - x_2}.$$

В силу Леммы 0.1 нули x_1 и x_2 должны быть однократными, т.е. $y'(x_1) \ne 0$, $y'(x_2) \ne 0$. Таким образом $y'(x_1) > 0$, $y'(x_2) < 0$.

Умножим (5) на $z(x)$, а (4) на y(x) и вычтем из первого второе:

$$zy'' + qyz - yz''' - Qyz = 0;\ zy'' - yz'' = (zy' - yz')' = (Q - q)zy.$$

Проинтегрируем полученное тождество на $[x_1; x_2]$:

$$(zy' - yz')\Big|_{x_1}^{x_2} = \int\limits_{x_1}^{x_2} (Q(x) - q(x))zydx;$$

$$z(x_2)y'(x_2) - y(x_2)z'(x_2) - z(x_!)y'(x_1) + y(x_1)z'(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} (Q(x) - q(x))zydx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(x_2)y'(x_2) - z(x_1)y'(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} (Q(x) - q(x))zydx, \tag{6}$$

здесь $z(x_2)y'(x_2) < 0$, $z(x_1)y'(x_1) > 0$, $(Q(x) - q(x)) > 0$ и $y > 0$.

Предположим противное - пусть теорема Штурма не верна. Тогда возможны варианты:

1. $z > 0 \forall x \in [x_1; x_2]$. Тогда левая часть (6) отрицательна, а правая положительна - противоречие.

2. $z > 0 \forall x \in [x_1; x_2)$, $z(x_2) = 0$ - аналогично.

3. $z > 0 \forall x \in (x_1; x_2]$ $z(x_1) = 0$ - аналогично.

Таким образом $\exists x_0 \in (x_1; x_2) : \; z(x_0) = 0$. Если $z(x_1) = z(x_2)$, то может быть, что $Q(x) \equiv q(x) \Rightarrow z(x) = const \cdot y(x)$, либо:

$$\exists x* \in (x_1; x_2) : \; Q(x*) > q(x*),$$

в силу непрерывности $Q(x)$ и $q(x) \exists \triangle$:

$$\int\limits_{x*-\triangle}^{x*+\triangle} (Q(x) - q(x))z(x)y(x)dx = 0,$$

значит $\exists x_0$, где $z(x)$ меняет знак $\Rightarrow z(x_0) = 0$ ■

0.2 Следствия из теоремы Штурма

Следствие 0.1.1. *Пусть есть уравнение:*

$$y'' + q(x)y = 0; \; q(x) \leq 0 \forall x \in I(x),$$

тогда любое нетривиальное решение (5) на I имеет не более одного нуля.

Доказательство. В качестве второго уравнения можно взять $z'' + Q(x)z = 0$, здесь Q(x) = 0. Пусть решение уравнения (5) имеет нули x_1 и x_2 $Q(x) \geq q(x) \Rightarrow 0 \geq q(x)$. Тогда по теореме Штурма любое решение (4) должно иметь ноль на $(x_1; x_2)$. В качестве решения можем вщять $z \equiv 1$, которое не и имеет нулей $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ для решения (5) не может быть больше одного нуля. ■

Следствие 0.1.2. *Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - два линейно независимых нетривиальных решения (5), $x_1, x_2 \in I$ - два соседних нуля $\varphi(x)$, тогда $\psi(x)$ имеет только один нуль на $(x_1; x_2)$.*

Доказательство. Применим теорему Штурма к двум одинаковым уравнениям ($Q(x) \leq Q(x)$). По теореме Штурма $\psi(x)$ на $(x_1; x_2)$ имеет хотя бы один нуль. Общих нулей $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ иметь не могут, так как они линейно независимые ($W(x_1) = 0$, если бы $\varphi(x_1) = \psi(x_1) = 0$, что означало бы, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - ЛЗ). Итак, $\psi(x)$ имеет нуль x_0 на $(x_1; x_2)$.

Докажем, что такой нуль единственный - от противного: пусть нулей два для $\psi(x) : x*$ и $\overline{x}$. Если нулей $\psi(x)$ два, то по теореме Штурма для $\varphi(x)$ будет ноль между $x*$ и $\overline{x}$ - противоречие тому, что x_1 и x_2 соседние нули $\varphi(x)$. ■

Таким образом нули решений (1) перемешаются.