1 Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений

1.1 Основные понятия

Определение 1.1. *Уравнение вида*

$$F(x, y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением, где x – аргумент, $y(x)$ – неизвестная функция, F – известная функция.

Определение 1.2. *Если это уравнение удается разрешить относительно старшей производной, такое дифференциальное уравнение называется разрешённым относительно старшей производной и записывается в виде*

$$y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$$

Порядок уравнения определяется порядком старшей производной от y.

Определение 1.3. *Функция $y = \varphi(x)$ называется решением ДУ, если она n раз дифференцируема и*

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0 \ \ \forall x,$$

где определена функция $\varphi(x)$ с её производными.

Определение 1.4. *Система n уравнений*

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f_1(t, x^1(t), \ldots, x^n(t)) \\ \ldots \\ \dot{x}^n = f_n(t, x^1(t), \ldots, x^n(t)) \end{cases}$$

где $x^1(t), \ldots, x^n(t)$ – искомые функции, называется нормальной системой ДУ n-го порядка.

Утверждение 1.1. *Рассмотрим ДУ $y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$ n-ого порядка. Это уравнение эквивалентно следующей нормальной системе ДУ:*

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = v_2 \\ \dot{v}_2 = v_3 \\ \ldots \\ \dot{v}_{n-1} = v_n \\ \dot{v}_n = f_n(x, v_1, v_2, \ldots, v_n) \end{cases} \qquad \Leftrightarrow y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$$

Доказательство. Введем обозначения: $y = v_1(x)$, $y' = v_2(x)$, $y'' = v_3(x)$, $\ldots$, $y^{(n-1)} = v_n(x)$. Тогда имеем $\dot{v}_1 = v_2,\ \dot{v}_2 = v_3,\ \ldots, \dot{v}_n = f(x, v_1, v_2, \ldots, v_n)$, то есть получилась нормальная система дифференциальных уравнений n-ого порядка с неизвестными v_i.

Обратными заменами системы уравнений можно получить исходное дифференциальное уравнение $y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$. ■

Определение 1.5. *Рассмотрим уравнение 1-ого порядка $y' = f(x, y(x))$. Тогда задача решить это уравнение с условием $y(x_0) = y_0$ называется задачей Коши.*

Определение 1.6. *Пусть $\varphi(x)$ – решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y(x))$. График решения $\varphi(x)$ называется интегральной кривой. В силу определения функции $f(x, y)$ на множестве Ω, вся интегральная кривая будет лежать в Ω.*

Определение 1.7. *Проведём через каждую точку интегральной кривой $(x_0, y_0) \in \Omega$ малый отрезок с углом наклона по отношению к оси x равным α, причём $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0, y_0)$. Получим так называемое поле направлений.*

Из построения интегральной кривой следует, что интегральная кривая в каждой своей точке касается поля напрвлений. Верно и обратное: кривая, касающаяся в каждой своей точке поля направлений, является интегральной кривой.

1.2 Простейшие типы уравнений первого порядка

1.2.1 Уравнения в полных дифференциалах

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$. Тогда кривая

$$\gamma = \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \ t_1 \leqslant t \leqslant t_2$$

называется интегральной кривой рассматриваемого уравнения, если $\forall t : t \in [t_1; t_2]$ выполнено

$$P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'_t + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'_t = 0$$

Определение 1.8. *Дифференциальное уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если $\exists F(x, y) : P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y)$.*

Тогда $dF(x, y) = 0 \Rightarrow F(x, y) = const$, то есть $F(x, y)$ определяет неявную функцию $y(x)$.

Теорема 1.1. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в области D. Для того, чтобы уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ являлось уравнением в полных дифференциалах, необходимо выполнение условия $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $(x,y) \in D$. Если же область D ещё и одвосвязна, то условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ является достаточным.*

Доказательство. Пусть $P(x, y)dx+Q(x, y)dy = 0$ – уравнение в полных дифференциалах, тогда $\exists F(x, y) : P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y) \Rightarrow P = \frac{\partial F}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$. По условию P и Q – непрерывно дифференцируемы, тогда $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ – непрерывные функции, значит

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \ (x, y) \in D$$

Пусть теперь D – односвязная область. Рассмотрим значение интеграла

$$F = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x;y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

который берётся по кривой γ, лежащей в D и соединяющей точки (x_0, y_0) и $(x; y)$. Пусть $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда по теореме о независимости интеграла от пути интегрирования выходит, что значение интеграла не зависит от пути интегрирования γ, а является функцией от (x, y), значит $F = F(x, y)$ – функция и $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y)$. ∎

Определение 1.9. *Непрерывно дифференцируемая функция $\mu(x, y) \neq 0$ в области G называется интегрирующим множителем для уравнения в полных дифференциалах $\mu(x, y)(P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = 0$, если исходное уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ не является уравнением в полных дифференциалах.*

Если $\mu(x, y)$ – интегрирующий множитель, то для достаточного условия имеем

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \Leftrightarrow P\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}$$

.

Полученное уравнение не легче исходного, так как теперь задача свелась к нахождению μ. Обычно интегрирующий множитель ищут в виде $\mu(x),\ \mu(y),\ \mu(x^2 + y^2),\ \mu(x^\alpha, y^\beta)$.

1.2.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим ДУ вида $P(y)dx + Q(x)dy = 0$, где $P(y) \in C'_{[y_1;y_2]}$, $Q(x) \in C'_{[x_1;x_2]}$. Если $\exists y_0 : P(y_0) = 0$ или $\exists x_0 : Q(x_0) = 0$, тогда

$$\begin{cases} x = t \\ y = y_0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_0 \\ y = t \end{cases} \tag{1}$$

являются интегральными кривыми рассматриваемого ДУ. Если же $P(x, y) \neq 0$ и $Q(x, y) \neq 0$, то применим к уравнению интегрирующий множитель

$$\mu(x, y) = \frac{1}{P(x, y)Q(x, y)}$$