

# Содержание

|          |                                                                                                                                                                            |           |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Билет 1. Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений</b>                                                                                               | <b>2</b>  |
| 1.1      | Основные понятия . . . . .                                                                                                                                                 | 2         |
| 1.2      | Простейшие типы уравнений первого порядка . . . . .                                                                                                                        | 3         |
| 1.2.1    | Уравнения в полных дифференциалах . . . . .                                                                                                                                | 3         |
| 1.2.2    | Уравнения с разделяющимися переменными . . . . .                                                                                                                           | 4         |
| 1.2.3    | Однородные уравнения . . . . .                                                                                                                                             | 5         |
| 1.2.4    | Линейные уравнения первого порядка . . . . .                                                                                                                               | 5         |
| 1.3      | Уравнение Бернулли и Риккати . . . . .                                                                                                                                     | 7         |
| 1.3.1    | Уравнение Бернулли . . . . .                                                                                                                                               | 7         |
| 1.3.2    | Уравнение Риккати . . . . .                                                                                                                                                | 7         |
| 1.4      | Методы понижения порядка дифференциальных уравнений . . . . .                                                                                                              | 7         |
| 1.5      | Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной . . . . .                                                                 | 9         |
| <b>2</b> | <b>Билет 2. Задача Коши</b>                                                                                                                                                | <b>11</b> |
| 2.1      | Принцип сжимающих отображений . . . . .                                                                                                                                    | 11        |
| 2.2      | Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений . . . . .                                                     | 13        |
| 2.3      | Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения $n$ -го порядка в нормальном виде . . . . .                                                       | 16        |
| <b>3</b> | <b>Билет 3. Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами</b>                                             | <b>18</b> |
| 3.1      | Матричная экспонента, ее свойства и применение к решению нормальных линейных систем . . . . .                                                                              | 18        |
| 3.1.1    | Матричная экспонента . . . . .                                                                                                                                             | 18        |
| 3.1.2    | Свойства матричной экспоненты . . . . .                                                                                                                                    | 18        |
| 3.1.3    | Применение к решению нормальных линейных систем . . . . .                                                                                                                  | 20        |
| <b>4</b> | <b>Билет 4. Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами</b>                                             | <b>21</b> |
| 4.1      | Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной линейной системы уравнений и для линейного уравнения $n$ -го порядка в нормальном виде . . . . . | 21        |
| 4.2      | Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы . . . . .                                                                            | 23        |
| 4.3      | Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем . . . . .                                                                                               | 25        |
| 4.4      | Определитель Вронского и его свойства . . . . .                                                                                                                            | 25        |
| 4.4.1    | Определитель Вронского . . . . .                                                                                                                                           | 25        |
| 4.4.2    | Свойства Вронскиана . . . . .                                                                                                                                              | 26        |
| 4.5      | Формула Лиувилля-Остроградского для нормальной линейной однородной системы уравнений и для линейного однородного уравнения $n$ -го порядка. . . . .                        | 26        |
| 4.6      | Метод вариации постоянных для линейной неоднородной системы уравнений и для линейного неоднородного уравнения $n$ -го порядка. . . . .                                     | 27        |

# 1 Билет 1. Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений

## 1.1 Основные понятия

**Определение 1.1.** Уравнение вида

$$F(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением, где  $x$  – аргумент,  $y(x)$  – неизвестная функция,  $F$  – известная функция.

**Определение 1.2.** Если это уравнение удастся разрешить относительно старшей производной, такое дифференциальное уравнение называется разрешённым относительно старшей производной и записывается в виде

$$y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

Порядок уравнения определяется порядком старшей производной от  $y$ .

**Определение 1.3.** Функция  $y = \varphi(x)$  называется решением ДУ, если она  $n$  раз дифференцируема и

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0 \quad \forall x,$$

где определена функция  $\varphi(x)$  с её производными.

**Определение 1.4.** Система  $n$  уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f_1(t, x^1(t), \dots, x^n(t)) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f_n(t, x^1(t), \dots, x^n(t)) \end{cases} \quad (1)$$

где  $x^1(t), \dots, x^n(t)$  – искомые функции, называется нормальной системой ДУ  $n$ -го порядка.

**Утверждение 1.1.** Рассмотрим ДУ  $y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$   $n$ -ого порядка. Это уравнение эквивалентно следующей нормальной системе ДУ:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = v_2 \\ \dot{v}_2 = v_3 \\ \dots \\ \dot{v}_{n-1} = v_n \\ \dot{v}_n = f_n(x, v_1, v_2, \dots, v_n) \end{cases} \Leftrightarrow y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad (2)$$

*Доказательство.* Введем обозначения:  $y = v_1(x)$ ,  $y' = v_2(x)$ ,  $y'' = v_3(x)$ ,  $\dots$ ,  $y^{(n-1)} = v_n(x)$ . Тогда имеем  $\dot{v}_1 = v_2$ ,  $\dot{v}_2 = v_3$ ,  $\dots$ ,  $\dot{v}_n = f(x, v_1, v_2, \dots, v_n)$ , то есть получилась нормальная система дифференциальных уравнений  $n$ -ого порядка с неизвестными  $v_i$ .

Обратными заменами системы уравнений можно получить исходное дифференциальное уравнение  $y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$ . ■

**Определение 1.5.** Рассмотрим уравнение 1-ого порядка  $y' = f(x, y(x))$ . Тогда задача решить это уравнение с условием  $y(x_0) = y_0$  называется задачей Коши.

**Определение 1.6.** Пусть  $\varphi(x)$  – решение дифференциального уравнения  $y' = f(x, y(x))$ . График решения  $\varphi(x)$  называется интегральной кривой. В силу определения функции  $f(x, y)$  на множестве  $\Omega$ , вся интегральная кривая будет лежать в  $\Omega$ .

**Определение 1.7.** Проведём через каждую точку интегральной кривой  $(x_0, y_0) \in \Omega$  малый отрезок с углом наклона по отношению к оси  $x$  равным  $\alpha$ , причём  $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0, y_0)$ . Получим так называемое поле направлений.

Из построения интегральной кривой следует, что интегральная кривая в каждой своей точке касается поля направлений. Верно и обратное: кривая, касающаяся в каждой своей точке поля направлений, является интегральной кривой.

## 1.2 Простейшие типы уравнений первого порядка

### 1.2.1 Уравнения в полных дифференциалах

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение:  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ . Тогда кривая

$$\gamma = \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (3)$$

называется интегральной кривой рассматриваемого уравнения, если  $\forall t : t \in [t_1; t_2]$  выполнено

$$P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'_t + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'_t = 0. \quad (4)$$

**Определение 1.8.** Дифференциальное уравнение  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  называется уравнением в полных дифференциалах, если  $\exists F(x, y) : P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y)$ .

Тогда  $dF(x, y) = 0 \Rightarrow F(x, y) = \text{const}$ , то есть  $F(x, y)$  определяет неявную функцию  $y(x)$ .

**Теорема 1.1.** Пусть функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  непрерывно дифференцируемы в области  $D$ . Для того, чтобы уравнение  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  являлось уравнением в полных дифференциалах, необходимо выполнение условия  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ,  $(x, y) \in D$ . Если же область  $D$  ещё и одновязна, то условие  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  является достаточным.

*Доказательство.* Пусть  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  – уравнение в полных дифференциалах, тогда  $\exists F(x, y) : P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y) \Rightarrow P = \frac{\partial F}{\partial x}$ ,  $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$ . По условию  $P$  и  $Q$  – непрерывно дифференцируемы, тогда  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  – непрерывные функции, значит

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (x, y) \in D. \quad (5)$$

Пусть теперь  $D$  – односвязная область. Рассмотрим значение интеграла

$$F = \int_{(x_0, y_0)}^{(x; y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

который берётся по кривой  $\gamma$ , лежащей в  $D$  и соединяющей точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x; y)$ . Пусть  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ . Тогда по теореме о независимости интеграла от пути интегрирования выходит, что значение интеграла не зависит от пути интегрирования  $\gamma$ , а является функцией от  $(x, y)$ , значит  $F = F(x, y)$  – функция и  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y)$ . ■

**Определение 1.9.** Непрерывно дифференцируемая функция  $\mu(x, y) \neq 0$  в области  $G$  называется интегрирующим множителем для уравнения в полных дифференциалах  $\mu(x, y)(P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = 0$ , если исходное уравнение  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  не является уравнением в полных дифференциалах.

Если  $\mu(x, y)$  – интегрирующий множитель, то для достаточного условия имеем

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \Leftrightarrow P \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \frac{\partial P}{\partial y} = Q \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Полученное уравнение не легче исходного, так как теперь задача свелась к нахождению  $\mu$ . Обычно интегрирующий множитель ищут в виде  $\mu(x)$ ,  $\mu(y)$ ,  $\mu(x^2 + y^2)$ ,  $\mu(x^\alpha, y^\beta)$ .

### 1.2.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим ДУ вида  $P(y)dx + Q(x)dy = 0$ , где  $P(y) \in C^1_{[y_1; y_2]}$ ,  $Q(x) \in C^1_{[x_1; x_2]}$ . Если  $\exists y_0 : P(y_0) = 0$  или  $\exists x_0 : Q(x_0) = 0$ , тогда

$$\begin{cases} x = t \\ y = y_0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_0 \\ y = t \end{cases} \quad (6)$$

являются интегральными кривыми рассматриваемого ДУ соответственно. Если же выполняется  $P(x, y) \neq 0$  и  $Q(x, y) \neq 0$ , то применим к уравнению интегрирующий множитель

$$\mu(x, y) = \frac{1}{P(x, y)Q(x, y)},$$

получив уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{dx}{Q(x)} + \frac{dy}{P(y)} = 0. \quad (7)$$

Значение  $\mu(x, y)$  действительно является интегрирующим множителем, так как выполняется

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{Q(x)} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{P(y)} \right) = 0. \quad (8)$$

Тогда

$$dF(x, y) = \frac{dx}{Q(x)} + \frac{dy}{P(y)} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{Q(x)} \Rightarrow F(x, y) = \int_{x_1}^x \frac{dt}{Q(t)} + C(y), \quad (9)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{P(y)} = C'(y) \Rightarrow C(y) = \int_{y_1}^y \frac{dt}{P(t)} + C_1 \Rightarrow F(x, y) = \int_{x_1}^x \frac{dt}{Q(t)} + \int_{y_1}^y \frac{dt}{P(t)} + C_1 = \text{const}. \quad (10)$$

**Определение 1.10.** Если дифференциальное уравнение вида  $P_1(x, y)dx + Q_1(x, y)dy = 0$  может быть сведено к виду  $P(y)dx + Q(x)dy = 0$ , то такое уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными.

**Утверждение 1.2.** Задача Коши уравнения с разделяющимися переменными  $P(y)dx + Q(x)dy = 0$  задаётся в виде  $y(x_1) = y_1$ , а её решение в виде

$$\int_{x_1}^x \frac{dt}{Q(t)} + \int_{y_1}^y \frac{dt}{P(t)} = 0. \quad (11)$$

### 1.2.3 Однородные уравнения

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$y' = y \left( \frac{y}{x} \right),$$

которое назовём уравнением с однородной правой частью. Сделаем замену  $v(x) = \frac{y}{x}$ , тогда  $y(x) = v(x) \cdot x$ ,  $y'_x = x \cdot v'_x + v = g(v)$ , откуда имеем  $x \frac{dv}{dx} = g(v) - v$ . Если  $\exists g(v_0) = v_0$ , то  $v_0$  – решение уравнения  $x \frac{dv}{dx} = g(v) - v$ . Если же  $v \neq g(v)$ , тогда

$$\frac{dv}{g(v) - v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |x| + C = \int_{v_0}^v \frac{dt}{g(t) - t}. \quad (12)$$

Таким образом, найдено решение исходного уравнения с однородной правой частью в квадратурах.

**Определение 1.11.** Функция  $F(x^1, x^2, \dots, x^n)$  называется однородной степени  $m$ , если  $\forall \lambda > 0 \rightarrow F(\lambda x^1, \lambda x^2, \dots, \lambda x^n) = \lambda^m F(x^1, x^2, \dots, x^n)$ .

**Пример 1.1.** Рассмотрим уравнение  $P(x, y)dx = Q(x, y)dy$ . Если  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  – однородные функции степени  $m$ , тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = \frac{x^m P(1, \frac{y}{x})}{x^m Q(1, \frac{y}{x})} = \frac{P(1, \frac{y}{x})}{Q(1, \frac{y}{x})} = g\left(\frac{y}{x}\right) \quad (13)$$

Таким образом исходное уравнение свелось к уравнению с однородной правой частью.

### 1.2.4 Линейные уравнения первого порядка

**Определение 1.12.** Дифференциальное уравнение вида  $y' + a(x)y = f(x)$  – линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Дифференциальное уравнение вида  $y' + a(x)y = 0$  – линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка. При этом  $a(x) \in C^1_{I(x)}$ ,  $f(x) \in C_{I(x)}$ , где  $I(x)$  – область, на которой определены функции  $a(x)$  и  $f(x)$ .

Введём оператор  $L = \frac{d}{dx} + a(x)$ , который действует на множество непрерывно дифференцируемых функций  $\varphi \in C^1_{I(x)}$ . Тогда уравнение  $y' + a(x)y = f(x)$  переписывается в виде  $L(y) = f(x)$ , а уравнение  $y' + a(x)y = 0$  переписывается в виде  $L(y) = 0$ .

**Теорема 1.2.** Введённый оператор  $L = \frac{d}{dx} + a(x)$  – линейный оператор.

*Доказательство.* Рассмотрим линейную комбинацию  $c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$ :

$$L(c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)) = (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)' + a(x)(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1L(\varphi_1) + c_2L(\varphi_2) \quad (14)$$

Таким образом,  $L(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1L(\varphi_1) + c_2L(\varphi_2)$ , то есть  $L$  – линейный оператор. ■

**Утверждение 1.3.** Решением уравнения  $y' + a(x)y = 0$  является

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

*Доказательство.* Найдём решение уравнения  $y' + a(x)y = 0$ :

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx \Rightarrow \ln |y| = - \int_{x_0}^x a(t)dt + \ln C \Rightarrow |y| = Ce^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}, \quad C > 0 \quad (16)$$

Раскрывая модуль и объединяя полученное решение с нулевым ( $y \equiv 0$ ), имеем

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

■

**Утверждение 1.4.** Решением уравнения  $y' + a(x)y = f(x)$  является

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (18)$$

*Доказательство.* Найдём решение уравнения  $y' + a(x)y = f(x)$ : воспользуемся уже найденным решением однородного уравнения, применяя метод вариации постоянной. То есть будем искать решение в виде

$$y = C(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}. \quad (19)$$

Подставим это решение в исходное уравнение:

$$C'(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} - a(x)C(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} + a(x)C(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} = f(x) \quad (20)$$

$$C'(x)e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} = f(x) \Rightarrow C(x) = \int_{x_0}^x f(t)e^{\int_{x_0}^t a(s)ds} + C_0 \quad (21)$$

Таким образом найден вид  $C(x)$ . Теперь подставим эту функцию:

$$y = C_0 e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} + e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} \int_{x_0}^x f(t)e^{\int_{x_0}^t a(s)ds} \quad (22)$$

$$y = C_0 e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} + \int_{x_0}^x f(t)e^{-\int_{x_0}^t a(s)ds} \quad (23)$$

Из полученного решения видно, что оно является суммой решения однородного уравнения и частного решения. ■

**Утверждение 1.5.** Если  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  – некоторые решения уравнения  $y' + a(x)y = f(x)$ , то  $z(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$  – решение однородного уравнения  $y' + a(x)y = 0$ .

*Доказательство.* По условию  $\varphi_1' + a(x)\varphi_1 = f(x)$ ,  $\varphi_2' + a(x)\varphi_2 = f(x)$ , откуда очевидно, что  $(\varphi_1 - \varphi_2)' + a(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ . Обозначив  $z = \varphi_1 - \varphi_2$ , получим  $z' + a(x)z = 0$ , то есть  $z$  – решение однородного уравнения. ■

### 1.3 Уравнение Бернулли и Риккати

#### 1.3.1 Уравнение Бернулли

**Определение 1.13.** Д.у. вида  $y' + a(x) \cdot y = y^r \cdot f(x)$  <sup>(24)</sup>, где  $a(x), f(x) \in C^1, r \in \mathbb{R}, r \neq 1$  называется уравнением Бернулли.

**Утверждение 1.6.** Если  $r > 0$ , то  $y \equiv 0$  - тривиальное решение. Пусть  $y \neq 0$ , разделим ДУ на  $y^r \Rightarrow \frac{y'}{y^r} + a(x) \cdot y^{1-r} = f(x)$ . Замена:  $u(x) = y^{1-r} \Rightarrow u' = (1-r) \cdot y^{-r} \cdot y' \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \frac{1}{1-r} \cdot u' + a(x) \cdot u = f(x)$  - свелось к линейному уравнению.

#### 1.3.2 Уравнение Риккати

**Определение 1.14.** Д.у. вида  $y' + a(x) \cdot y^2 + b(x) \cdot y + c(x)$  <sup>(25)</sup>, где  $a(x), b(x) \in C^1_{I(x)}$ ,  $c(x) \in C_{I(x)}$  называется уравнением Риккати.

**Утверждение 1.7.** В общем случае уравнение Риккати не допускает решений в квадратах, однако, если известно некоторое решение  $y = \varphi(x)$ , то сделав замену  $y = u + \varphi$ , получаем:  $\varphi' = u\varphi^2 + b\varphi + c$   
 $\varphi' + u' = u\varphi^2 + 2a\varphi u + au^2 + b\varphi + bu + c \Rightarrow u' = au^2 + (2a\varphi + b)u$  - свелось к уравнению Бернулли.

### 1.4 Методы понижения порядка дифференциальных уравнений

**Утверждение 1.8.** Рассмотрим множество преобразований плоскости

$\bar{x} = \varphi(x, y, \lambda), \bar{y} = \psi(x, y, \lambda)$  <sup>(26)</sup>. В (26) каждому  $\lambda \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$  соответствует некоторое преобразование, например,  $\bar{x} = \lambda x, \bar{y} = \lambda y, \lambda > 0$  - гомотетия. Множество преобразований (26) является группой преобразований, если оно содержит любую композицию (26), т.е.  $\exists \lambda_0 : \varphi(\varphi(x, y, \lambda_1), \psi(x, y, \lambda_2)) = \varphi(x, y, \lambda_0)$ , содержит тождественное преобразование, т.е.  $\exists \lambda_0 : \varphi(x, y, \lambda_0) = x; \psi(x, y, \lambda_0) = y$ , и вместе с любым преобразованием содержит и обратное:  $\forall \lambda \in \mathcal{D} : \exists \lambda_0 : x = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda_0); y = \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda_0)$   
Т.о. если (26) - группа, то  $x = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda), y = \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda)$ ; если в ДУ  $y' = f(x, y)$  осуществить переход к новым координатам, то

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\psi'_x d\bar{x} + \psi'_y d\bar{y}}{\varphi'_x d\bar{x} + \varphi'_y d\bar{y}} = f(\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda), \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda)) = \tilde{f}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\psi'_x + \psi'_y \cdot \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}}{\varphi'_x + \varphi'_y \cdot \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}} = \tilde{f}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda) \Rightarrow \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{\tilde{f} \cdot \varphi'_x - \psi'_x}{\psi'_y - \tilde{f} \cdot \varphi'_y} \end{aligned} \quad (27)$$

(27) является записью  $y' = f(x, y)$  в новых координатах. Говорят, что  $y' = f(x, y)$  допускает группу  $x = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda), y = \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda)$ , если оно не изменяется при переходе к новым переменным, т.е.  $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \tilde{f}(\bar{x}, \bar{y})$ .

**Следствие 1.2.1.** Рассматриваем уравнения вида  $F(x, y, y', y'') = 0$  <sup>(28)</sup>

1.  $F(x, y'', y') = 0$  <sup>(29)</sup> Замена  $y'(x) = v(x) \Rightarrow y''(x) = v'(x)$  и (29) в этом случае имеет вид  $F(x, v(x), v'(x)) = 0 \xrightarrow{\text{решаем}} V(x) = y(x, c_1)$ . Тогда решение (29) запишется в виде

$\frac{dy}{dx} = g(x, c_1) \Rightarrow y(x) = c_2 + \int g(x, c_1) dx$ . Заметим, что (29) допускает группу сдвига  $x = \bar{x}$ ,  $y = \bar{y} + y_0$

2.  $\boxed{F(y, y', y'') = 0}^{(30)}$  (не содержит явно  $x$ ). Замена:  $y' = V(y)$ , тогда

$$y'' = \frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dy} \frac{dy}{dx} = V \frac{dV}{dy} \Rightarrow F(y, V, y \frac{dV}{dy}) = 0 - \text{ДУ первого порядка.}$$

Решение  $V(y) = g(y, c_1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = g(y, c_1) \Rightarrow$  Решение (30):  $\int \frac{dy}{g(y, c_1)} = x + c_2$ .

Заметим, что (30) допускает группу сдвигов  $x = \bar{x} + x_0$ ,  $y = \bar{y}$

3.  $\boxed{F(x, y'', y', y) = 0}$  и  $F$  — однородная степени  $m$  по  $y'', y', y$ , т.е.  $\forall \lambda > 0 \rightarrow$

$F(x, \lambda y'', \lambda y', \lambda y) = \lambda^m \cdot F(x, y'', y', y)$ . В таком случае ДУ допускает группу

$x = \bar{x}$ ,  $y = \lambda \bar{y}$ . Замена:  $z(x) = \frac{y'}{y} \Rightarrow y' = z(x)y$

$$\Rightarrow y'' = z'y + zy' = z'y + z^2y = y \cdot (z' + z^2) \Rightarrow F(x, y, zy, y(z' + z^2)) = 0$$

$\Rightarrow y^m \cdot F(x, 1, z, z' + z^2) = 0$  — относительно  $z$  имеем уравнение первого порядка.

Если его решение  $z(x) = g(x, c_1)$ , то  $\frac{y'}{y} = g(x, c_1) \Rightarrow \frac{dy}{y} = g(x, c_1) dx \Rightarrow$

$$\ln |y| = \int g(x, c_1) dx + c_2$$

4\*. Будем говорить, что функция  $F(x, y, y'', \dots, y^{(n)})$  является квазиоднородной функцией степени  $r$ , если  $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall \lambda > 0 : F(\lambda x, \lambda^\alpha y, \lambda^{\alpha-1} y', \dots, \lambda^{\alpha-n} y^{(n)}) = \lambda^r \cdot F(x, y, \dots, y^{(n)})$ .

Рассмотрим множество преобразований:

$$\begin{cases} x = \lambda \bar{x} \\ y = \lambda^\alpha \bar{y} \end{cases}, \quad \text{где } \lambda > 0 \quad (31)$$

Такое множество преобразований перепишем в виде:

$$\begin{cases} x = e^\beta \cdot \bar{x} \\ y = e^{\alpha\beta} \bar{y} \end{cases}$$

Если  $F$  в (30) является квазиоднородной, то (30) допускает группу растяжений (31):

$$\boxed{F(x, y'', y', y) = 0} \xrightarrow{\text{преобр.}} F(\lambda \bar{x}, \lambda^\alpha \bar{y}, \lambda^{\alpha-1} \bar{y}', \lambda^{\alpha-2} \bar{y}'') = \lambda^r \cdot F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'') = 0$$

$\Downarrow$

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'') = 0$$

$$\text{Замена: } \begin{cases} x = e^t \\ y = z(t) \cdot e^{2t} \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{z'_t \cdot e^{\alpha t} + z \cdot \alpha \cdot e^{\alpha t}}{e^t} = e^{(\alpha-1)t} \cdot (z'_t + \alpha z)$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} y''_{xx} &= \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(\alpha-1) \cdot e^{(\alpha-1)t} \cdot (z'_t + \alpha z) + e^{(\alpha-1)t} \cdot (z''_{tt} + \alpha z'_t)}{e^t} = \\ &= e^{(\alpha-2)t} \cdot (z''_{tt} + (2\alpha-1) \cdot z'_t + \alpha \cdot (\alpha-1)z) \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} &F(e^t; z \cdot e^{\alpha t}; e^{(\alpha-1)t} \cdot (z'_t + \alpha z); e^{(\alpha-2)t} (z''_{tt} + (2\alpha-1)z'_t + \alpha \cdot (\alpha-1)z)) = \\ &= e^{rt} \cdot F(1; z; z'_t + \alpha z; z''_{tt} + (2\alpha-1)z'_t + \alpha \cdot (\alpha-1)z) = 0 - \text{не содержит } x, \text{ т.е. свелось к случаю 2} \end{aligned}$$



## 1.5 Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной

**Утверждение 1.9.** Рассмотрим  $\boxed{F(x, y, y') = 0}^{(32)}$ , где  $F(x, y, y')$  как функция трёх переменных является непрерывно дифференцируемой в области  $G \subset \mathbb{R}^3$

Решение уравнения  $F(x, y, y') = 0$  будем представлять как кривую в параметрическом виде:

$$\gamma: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in [t_1, t_2], \quad \varphi(t), \psi(t) \in C^1_{[t_1, t_2]} \quad (33)$$

Кривая (33), является интегральной кривой (32)  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow F\left(\varphi(t), \psi(t), \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}\right) = 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2] \quad (34)$$

Будем решать эквивалентную систему положив  $p = \frac{dy}{dx}$ :

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ dy = p dx \end{cases} \quad (35)$$

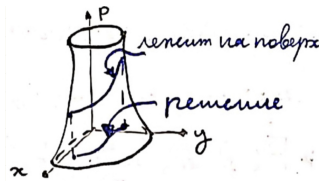
**Утверждение 1.10.** Уравнение (32) эквивалентно системе (35).

*Доказательство.* Пусть  $\gamma$  - интегр. кривая (32). Положим  $p = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} = \frac{dy}{dx}$  - второе уравнение в системе (35) выполнено, а первое выполнено в силу подстановки в (34). Обратно, пусть  $x(t) = \varphi(t)$ ,  $y(t) = \psi(t)$ ,  $p$  - решение (34).  $\Rightarrow$  Из второго уравнения системы:

$p = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} \rightarrow$  Подставляем в первое уравнение системы и получаем само уравнение (34) ■

**Утверждение 1.11.** Рассмотрим метод решения (32), который называется методом введения параметра.

Первое ур-ние в системе (35) рассмотрим как задающее в  $\mathbb{R}^3_{(x,y,p)}$  гладкую поверхность  $S$ , для которой параметрическое представление имеет вид:



$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ p = \chi(u, v) \end{cases} \Rightarrow F(\varphi(u, v); \psi(u, v); \chi(u, v)) \equiv 0$$

Потребуем, чтобы  $\text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\delta \varphi}{\delta u} & \frac{\delta \psi}{\delta u} & \frac{\delta \chi}{\delta u} \\ \frac{\delta \varphi}{\delta v} & \frac{\delta \psi}{\delta v} & \frac{\delta \chi}{\delta v} \end{pmatrix} = 2, \quad \forall u, v \in G$  т.е.  $S$  была простой гладкой пов.

Тогда остаётся удовлетворить второму уравнению системы (35):

$$\frac{\delta \psi}{\delta u} du + \frac{\delta \psi}{\delta v} dv = \chi \cdot \left( \frac{\delta \varphi}{\delta u} du + \frac{\delta \varphi}{\delta v} dv \right) \Rightarrow \left( \frac{\delta \psi}{\delta u} - \chi \frac{\delta \varphi}{\delta v} \right) du = \left( \chi \frac{\delta \varphi}{\delta v} - \frac{\delta \psi}{\delta v} \right) dv \quad (36)$$

Если  $P(u, v) \neq 0 \forall (u, v) \in G$ , то из (36) получаем Д.У.:  $\frac{du}{dv} = \frac{Q(u, v)}{P(u, v)}$

Это решение  $u = u(v, c)$ , тогда  $\begin{cases} x = \varphi(u(v, c), v) = x(v, c) \\ y = \psi(u(v, c), v) = y(v, c) \end{cases}$  - является параметрическим представлением решения (32)

Если же существует связь между  $u$  и  $v$ :  $u = f(v)$ ,  $P(f(v), v) = Q(f(v), v) = 0 \forall v \in G$ , то  $u = f(v)$  явл. решением  $\left(\chi \frac{\delta \varphi}{\delta v} - \frac{\delta \psi}{\delta v}\right) dv$ , а

$$\begin{cases} x = x(v) \\ y = y(v) \end{cases} \quad - \text{явл. решением (36)}$$

## 2 Билет 2. Задача Коши

### 2.1 Принцип сжимающих отображений

Работаем в  $E = \mathbb{R}^n$  - пространстве точек с  $n$  координатами.  $E$  - аффинное пространство, а  $\vec{E}$  - его присоединенное линейное пространство, состоящее из векторов, натянутых на точки  $E$ .

**Определение 2.1.** Пусть  $L$  - это векторное пространство, и на нем задано отображение  $\|\cdot\| : L \rightarrow \mathbb{R}$  такое, что:

1.  $\forall x \in L \mapsto \|x\| \geq 0$ . А также  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ;
2.  $\forall x \in L \ \& \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ ;
3.  $\forall x, y \in L \mapsto \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  - неравенство треугольника.

Тогда данное отображение называется нормой, а пространство  $L$  нормированным.

**Пример 2.1.** Приведем пример норм. Пусть  $a(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Тогда норму можно определить, допустим, так:

$$\|a\|_1 = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}. \quad (37)$$

Или так:

$$\|a\|_2 = \max_{j=1, \dots, n} |x_j|. \quad (38)$$

И тогда можно ввести понятие эквивалентности норм.

**Определение 2.2.** Пусть снова  $L$  - линейное пространство. Тогда нормы  $\|\cdot\|_1$  и  $\|\cdot\|_2$  на  $L$  называются эквивалентными, если  $\exists C_1, C_2 > 0 : \forall x \in L \mapsto C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1$ .

Как видно, для определенных выше двух норм это соотношение удовлетворяется.

**Утверждение 2.1.** В конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.

Рассмотрим множество функций, непрерывных на отрезке  $[a; b]$  для некоторых неравных  $a, b \in \mathbb{R}$  и обозначим данное множество  $C[a; b]$ . Понятно, что  $C[a; b]$  является линейным пространством. Тогда введем на нем норму.

**Определение 2.3.** Нормой функции  $f(x) \in C[a; b]$  будем называть число

$$\|f(x)\| = \max_{x \in [a; b]} |f(x)|.$$

**Определение 2.4.** Набор функций  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) \in C[a; b]$  будем называть вектор-функцией и обозначать  $f(x) = \vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T$ .

**Определение 2.5.** Вектор-функция  $f(x)$  называется непрерывной (дифференцируемой, непрерывно дифференцируемой и т.п.), если все ее компоненты непрерывны (дифференцируемы, непрерывно дифференцируемы и т.п.).

**Определение 2.6.** Модулем вектор-функции  $f(x)$  назовем число

$$|f(x)| = \sqrt{\sum_{j=1}^n f_j^2(x)}. \quad (39)$$

Норму вектор-функции можно определить как

$$\|f(x)\|_1 = \max_{x \in [a; b]} |f(x)|.$$

Или же как

$$\|f(x)\|_2 = \max_{j=1, \dots, n} \max_{x \in [a; b]} f_j(x).$$

Понятно, что эти две нормы эквивалентны.

**Определение 2.7.** Пусть имеется функциональная последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ , где  $f_n(x) \in C[a; b]$  - линейное пространство функций с нормой (1 или 2 - неважно). Тогда говорят, что данная последовательность сходится к функции  $f(x)$  по норме, если:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0. \quad (40)$$

Аналогично все то же самое и точно так же определяется и для вектор-функций  $f(x) = \vec{f}(x) \in C[a; b]^n$ .

**Определение 2.8.** Функциональная последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  называется фундаментальной, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \ \& \ \forall m \geq N \mapsto \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon. \quad (41)$$

**Определение 2.9.** Функциональное пространство  $L$  называется полным по [данной] норме, если любая фундаментальная функциональная последовательность данного пространства сходится по норме к функции из этого же пространства  $L$ .

**Теорема 2.1.** Функциональное пространство  $C[a; b]$  с нормой  $\|\cdot\|_1$  является полным.

*Доказательство.* Возьмем произвольную функциональную последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  из нашего пространства непрерывных функции. Тогда из определения фундаментальности следует, что  $\|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$ .

Однако  $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon \ \forall x \in [a; b]$ .

А значит, последовательность  $f_n(x)$  сходится к некоторой  $f(x)$ , причем равномерно на  $[a; b]$  (числовая последовательность  $\|f_n(x)\|$  мажорирует функциональную последовательность  $f_n(x)$ ).

Так как  $f_n(x) \in C[a; b]$  - непрерывны  $\forall n \in \mathbb{N}$ , и последовательность сходится равномерно на  $[a; b]$ , то предельная функция  $f(x)$  также является непрерывной на  $[a; b]$ , а значит,  $f(x) \in C[a; b]$ .

Таким образом, последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  сходится к  $f(x) \in C[a; b]$ . В силу произвольности  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  заключаем, что функциональное пространство  $C[a; b]$  с нормой  $\|\cdot\|_1$  является полным. ■

**Определение 2.10.** Полное нормированное линейное пространство называется Банаховым. Обозначается  $B$ .

**Определение 2.11.** Функциональный ряд  $\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$  называется сходящимся по норме,

если последовательность его частичных сумм  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$  является сходящейся по норме.

**Определение 2.12.** Пусть  $\forall x \in M \subseteq B$  определен элемент  $Ax \in B$ . Тогда говорят, что на множестве  $B$  задан оператор  $A$  с областью определения  $M$ .

Будем рассматривать уравнение  $x = Ax$ .

**Определение 2.13.** Множество  $M \subseteq B$  называется ограниченным, если  $\exists C > 0$  такое, что  $\forall x \in M \mapsto \|x\| \leq C$ .

**Определение 2.14.** Оператор  $A$  называется сжатием на  $M$ , если:

1.  $\forall x \in M \mapsto Ax \in M$ ;
2.  $\exists k \in (0; 1) : \forall x, y \in M \mapsto \|Ax - Ay\| \leq k\|x - y\|$ .

**Теорема 2.2** (Принцип сжимающих отображений). Пусть множество  $M \subseteq B$  является ограниченным и замкнутым, а оператор  $A$  является сжатием. Тогда решение уравнения  $x = Ax$  существует и единственно.

*Доказательство.* Будем использовать итерационный метод, согласно которому мы выбираем начальное  $x_0$ , а затем строим последовательность  $x_n = Ax_{n-1}$ . Тогда, если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  и  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax$ , то  $x = Ax$ .

Пусть  $x_n = S_n = x_0 + (x_1 - x_0) + \dots + (x_n - x_{n-1})$ . Докажем, что  $\|x_{n+1} - x_n\| \leq 2Ck^n$  для некоторого  $C > 0$ , ограничивающего последовательность  $x_n$ . Сделаем это по индукции.

База индукции:  $\|x_1 - x_0\| \leq \|x_1\| + \|x_0\| \leq 2C$ .

Предположим, что  $\|x_n - x_{n-1}\| \leq 2Ck^{n-1}$ . Тогда получаем, что  $\|x_{n+1} - x_n\| = \|Ax_n - Ax_{n-1}\| \leq k\|x_n - x_{n-1}\| \leq 2Ck^n$ .

И получаем, что  $x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (x_j - x_{j-1}) \leq x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} 2Ck^{j-1} < \infty$ .

А значит  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . А поскольку  $M$  замкнуто, то  $x \in M$ .

Теперь рассмотрим разность  $\|Ax_n - Ax\| \leq k\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Это означает, что  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax$ .

Учитывая, что  $x_{n+1} = Ax_n$ , то, перейдя к пределу с обеих частей равенства, мы получаем, что итерационный метод сходится к решению уравнения  $x = Ax$ . И таким образом, доказано существование решения. Теперь докажем его единственность.

Пойдем от противного: пусть  $x$  и  $y$  – два разных решения. Тогда  $\|x - y\| = \|Ax - Ay\| \leq k\|x - y\|$ . Учитывая, что  $k \in (0; 1)$ , то данная ситуация возможна тогда и только тогда, когда  $\|x - y\| = 0$ . Следовательно,  $x = y$ , что противоречит тому, что это два разных решения. Итак, теорема доказана. ■

## 2.2 Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений

**Определение 2.15.** Система вида

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(t, \bar{x}) \\ \dot{x}^2 = f^2(t, \bar{x}) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f^n(t, \bar{x}) \end{cases} \quad (42)$$

называется нормальной системой дифференциальных уравнений  $n$ -ого порядка.

**Определение 2.16.** Система

$$\begin{cases} x^1(t_0) = x_0^1 \\ x^2(t_0) = x_0^2 \\ \dots \\ x^n(t_0) = x_0^n \end{cases} \quad (43)$$

называется начальным условием

**Утверждение 2.2.** Решить задачу Коши означает решить нормальную систему дифференциальных уравнений при заданном начальном условии

**Теорема 2.3** (Теорема Коши о существовании и единственности решения). Пусть  $\forall i, j = \overline{1, n}$  функции  $f^i, \frac{\partial f^i}{\partial x^j}$  непрерывны в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , тогда,  $\forall (t_0, \bar{x}_0) \in \Omega \exists h > 0 : \forall t \in [t_0 - h, t_0 + h]$  решение задачи Коши существует и единственно.

**Лемма 2.1.** Если  $\bar{f}(t, \bar{x})$  - непрерывны на  $\Omega$ , то система уравнений

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_0 + \int_{t_0}^t \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau \quad (44)$$

эквивалентна задаче Коши.

*Доказательство.* Пусть  $\varphi(t)$  - решение (42) при условии (43), тогда

$$\dot{\varphi}^i = f^i(t, \varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t))$$

Проинтегрируем полученное равенство по отрезку  $[t_0, t]$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \dot{\varphi}^i(\tau) d\tau &= \int_{t_0}^t f^i(\tau, \varphi^1(\tau), \dots, \varphi^n(\tau)) d\tau \\ \varphi^i(t) - \varphi^i(t_0) &= \int_{t_0}^t f^i(\tau, \bar{\varphi}(\tau)) d\tau \\ \varphi^i(t) &= x_0^i + \int_{t_0}^t f^i(\tau, \bar{\varphi}(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

Теперь пусть  $\bar{\varphi}(t)$  - решение (44). Тогда

$$\varphi^i(t) \equiv x_0^i + \int_{t_0}^t f^i(\tau, \bar{\varphi}(\tau)) d\tau$$

Отсюда видно, что функция  $\varphi^i(t)$  - дифференцируема. Тогда

$$\begin{cases} \dot{\varphi}^i(t) = f^i(t, \bar{\varphi}(t)) \\ \varphi^i(t_0) = x_0^i \end{cases} \quad (45)$$

■

**Следствие 2.3.1.** Из 2 части леммы следует, что решение задачи Коши непрерывно дифференцируемо.

Введем оператор  $A(\bar{x}) = \bar{x}_0 + \int_{t_0}^t \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau$ . Тогда систему интегральных уравнений (44) можно записать в виде

$$\bar{x}(t) = A(\bar{x}) \quad (46)$$

**Лемма 2.2.**

$$\left\| \int_{t_0}^t \bar{x}(\tau) d\tau \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|\bar{x}(\tau)\| d\tau \right|$$

*Доказательство.*

$$\left| \int_{t_0}^t x^i(\tau) d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |x^i(\tau)| d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t \|\bar{x}(\tau)\| d\tau \right| \quad (47)$$

Таким образом  $\max\{|\int_{t_0}^t x^i(\tau) d\tau|\} = |\int_{t_0}^t \bar{x}(\tau) d\tau| \leq |\int_{t_0}^t \|\bar{x}(\tau)\| d\tau|$  ■

**Лемма 2.3.** (Адамара) Пусть  $\bar{f}(\bar{x}), \frac{\partial f^i}{\partial x_j}$  непрерывны в  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  - замкнутой, ограниченной, выпуклой области. Тогда  $\forall i = \overline{1, n}, \bar{y} \in \Omega \hookrightarrow \|\bar{f}(\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x})\| \leq n^{3/2} K_1 \|\bar{y} - \bar{x}\|$ , где  $K_1 = \max_{i,j=\overline{1,n}} \{\max_{x \in \Omega} \left| \frac{\partial f^i}{\partial x_j} \right| \}$

*Доказательство.*  $|\bar{f}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (f^i)^2}$ ,  $\|\bar{f}\|_C = \max_{x \in \Omega} \{|\bar{f}(\bar{x})|\}$

$\Omega$  - компакт, поэтому непрерывность частных производных позволяет говорить о существовании  $K_1$ . Возьмем производные точки  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  и соединим их отрезком  $\bar{x} + t(\bar{y} - \bar{x})$ , где  $t \in [0, 1]$ . Рассмотрим значение компоненты  $f^i$  на отрезке:

$$f^i(\bar{x} + t(\bar{y} - \bar{x})) = f^i(t)$$

$f^i(t)$  - дифференцируема, тогда

$$\begin{aligned} |f^i(\bar{y}) - f^i(\bar{x})| &= |f^i(1) - f^i(0)| = \left| \frac{df^i}{dt}(t^*) \cdot (1 - 0) \right| = \\ &= \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(t^*) \cdot (y^j - x^j) \right| \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(t^*) \right| \cdot |y^j - x^j| \leq K_1 \|\bar{y} - \bar{x}\| \cdot n \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим вектор-функцию

$$\begin{aligned} |\bar{f}(\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x})| &= \sqrt{\sum_{k=1}^n (f^k(\bar{y}) - f^k(\bar{x}))^2} \leq K_1 n^{3/2} \|\bar{y} - \bar{x}\| \\ \Rightarrow \|\bar{f}(\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x})\| &\leq K_1 n^{3/2} \|\bar{y} - \bar{x}\| \end{aligned}$$
■

*Доказательство.* (Основная теорема)

Докажем, что  $A(\bar{x})$  из системы (46) является сжатием.

Рассмотрим  $\Pi = \{\|\bar{x}(t) - \bar{x}_0(t)\| \leq b, |t - t_0| \leq a\} \subset \Omega$ . Определим  $K = \|\bar{f}\|_C = \max_{\Pi} |\bar{f}|$ .  $K_1$  тоже определено в силу условий.

Рассмотрим  $\Pi_h = \{\|\bar{x}(t) - \bar{x}_0(t)\| \leq b, |t - t_0| \leq h \leq a\}$

Банахово пространство  $B$  - множество функций  $\bar{x}(t)$  непрерывных на отрезке  $|t - t_0| \leq h$ .  $M \subset B$  - множество функций  $\|\bar{x}(t) - \bar{x}_0\| \leq b$ .  $M$  ограничено, так как  $\forall \bar{x}(t) \in M \hookrightarrow \|\bar{x}(t)\| = \|\bar{x}(t) - \bar{x}_0 + \bar{x}_0\| \leq b + \|\bar{x}_0\| = C$

Докажем, что  $M$  замкнуто. Пусть  $\bar{x}_n(t), n = 1, 2, \dots$  - последовательность точек в  $M$ , такая что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n(t) = \bar{x}(t)$ .  $\|\bar{x}(t)\| = \|\bar{x}(t) - \bar{x}_n + \bar{x}_n\| \leq \|\bar{x}(t) - \bar{x}_n\| + \|\bar{x}_n\| \leq \varepsilon + b \Rightarrow \bar{x}(t) \in M$   
 Подберем  $h$  так, чтобы  $A : M \rightarrow M$ . То есть  $\|A(\bar{x}) - \bar{x}_0\| \leq b$ .

$$\|A(\bar{x}) - \bar{x}_0\| = \left\| \int_{t_0}^t \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|\bar{f}\| d\tau \right| \leq Kh$$

Получаем условие  $h \leq b/K$

Чтобы доказать, что  $A$  - сжатие, рассмотрим норму

$$\begin{aligned} \|A(\bar{y}) - A(\bar{x})\| &= \left\| \int_{t_0}^t (\bar{f}(\tau, \bar{y}(\tau)) - \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau))) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|\bar{f}(\tau, \bar{y}) - \bar{f}(\tau, \bar{x})\| d\tau \right| \leq K_1 n^{3/2} \|\bar{y} - \bar{x}\| \cdot \left| \int_{t_0}^t d\tau \right| \leq K_1 h n^{3/2} \|\bar{y} - \bar{x}\| \end{aligned}$$

Откуда второе условие:  $h < \frac{1}{n^{3/2} K_1}$

Тогда оператор  $A$  будет сжатием. Соответственно решение задачи Коши существует и единственно. ■

## 2.3 Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения $n$ -го порядка в нормальном виде

**Определение 2.17.** Уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \quad (48)$$

называется уравнением  $n$ -го порядка в нормальной форме.

**Определение 2.18.** Система

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad (49)$$

называется начальным условием уравнения  $n$ -го порядка в нормальной форме.

**Утверждение 2.3.** Решить задачу Коши означает найти такое решение (48), которое удовлетворяет условию (49)

**Теорема 2.4** (Теорема Коши о существовании и единственности решения). Если  $f, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$  непрерывны в  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , тогда  $\forall (x_0, \bar{y}_0) \in \Omega \exists h > 0 : \forall x \in [x_0 + h, x_0 - h]$  решение задачи Коши существует и единственно.



*Доказательство.* Введем следующие функции:  $y(x) = v_1(x), y'(x) = v_2(x), \dots, y^{(n-1)}(x) = v_n(x)$ . Таким образом получаем систему уравнений в нормальной форме

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dx} = v_2 \\ \dots \\ \frac{dv_n}{dx} = f(x, \bar{v}) \end{cases} \quad (50)$$

А для нее решение существует и единственно. ■

### 3 Билет 3. Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

#### 3.1 Матричная экспонента, ее свойства и применение к решению нормальных линейных систем

##### 3.1.1 Матричная экспонента

Необходимо решить ОЛДУ вида:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \quad (51)$$

Если  $A(t) = \|a_j^i\|$ ,  $a_j^i \in \mathbf{R}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , тогда:

$$\begin{aligned} \vec{x}_0 &= E\vec{x}_0, \vec{x}_1 = E\vec{x}_0 + \frac{t-t_0}{1!}A\vec{x}_0 = \left(E + \frac{t-t_0}{1!}A\right)\vec{x}_0, \\ \vec{x}_n &= \left(E + \frac{t-t_0}{1!}A + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n\right)\vec{x}_0, \end{aligned}$$

Этот процесс будет сходиться к задаче Коши с решением:

$$\vec{x} = \left(E + \frac{t-t_0}{1!}A + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n + \dots\right)\vec{x}_0 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n\right)\vec{x}_0,$$

при условии, что  $A^0 = E$ .

**Определение 3.1.** Матричной экспонентой называют следующий степенной ряд:

$$e^{(t-t_0)A} = E + \frac{t-t_0}{1!}A + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n.$$

##### 3.1.2 Свойства матричной экспоненты

Это квадратная матрица, по размерам аналогична матрице  $A$ , и каждый элемент этой матрицы представляет из себя степенной ряд с радиусом сходимости  $+\infty$ .

1. Решение задачи Коши для (51), если  $A = \text{const}$ :

$$\vec{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{x}_0, (\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0).$$

2.  $e^{0A} = E$ .

3.  $e^{(t_1+t_2)A} = e^{t_1A}e^{t_2A} \Rightarrow e^{t_1A}e^{t_2A} = e^{t_2A}e^{t_1A}$  (коммутативность).

4.  $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$ .

5.  $(e^{tA})' = Ae^{tA} = e^{tA}A$ .

*Доказательство.* Так как квадратные матрицы составляют определенное кольцо, то  $A^{n+m} = A^nA^m = A^mA^n$ .

1.

2.  $e^{tA} = E + \frac{t-t_0}{1!}A + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n + \dots$ , если  $t = 0$  :

$$e^{0A} = E + 0 + \dots = E$$

3. рассматриваем (51), если  $\vec{x}(t)$  - решение этого ДУ, то  $\vec{x}(t+t_0)$  тоже решение этого ДУ  $\forall t_0 \in \mathbf{R}$ . ( $u = t+t_0$ ) :

$$\frac{d\vec{x}(t+t_0)}{dt} = \frac{d\vec{x}}{du} \frac{du}{dt} = \frac{d\vec{x}}{du} = A\vec{x}(u) = A\vec{x}(t+t_0).$$

Тогда (51), с задачей Коши  $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$  имеет решение:

$$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x}_0,$$

$$\vec{x}(t+t_0) = e^{(t+t_0)A}\vec{x}_0 - \text{решение } \frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}.$$

Рассмотрим тогда тоже самое уравнение для функции  $z(t)$ :

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = A\vec{z}, \text{ с задачей Коши } \vec{z}(0) = e^{t_0A}\vec{x}_0 \Rightarrow \vec{z}(t) = e^{tA}(e^{t_0A}\vec{x}_0) = (e^{tA}e^{t_0A})\vec{x}_0.$$

Рассмотрим это решение в нуле:

$$\vec{x}(0+t_0) = e^{t_0A}\vec{x}_0,$$

из основной теоремы следует, что  $\vec{x}(t+t_0) = \vec{z}(t) \forall t$ .

Тогда и получается основная формула:

$$\vec{x}(t+t_0) = e^{(t+t_0)A}\vec{x}_0 = (e^{tA}e^{t_0A})\vec{x}_0$$

4.  $E = e^{0A} = e^{(t-t)A} = e^{tA}e^{-tA} = E \Rightarrow (e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$ .

5. Берем представление матричной экспоненты в виде степенного ряда, который можно дифференцировать, тогда получаем:

$$(e^{tA})' = A + tA^2 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n + \dots = A \left( E + tA + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1} \right),$$

$$(e^{tA})' = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

■

**Примечание.** Формула  $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$  не имеет места, кроме случая, если  $AB = BA$  (т.е. матрицы коммутативны).

### 3.1.3 Применение к решению нормальных линейных систем

**Теорема 3.1.** Пусть  $S$  - матрица перехода от исходного базиса к новому базису. Тогда в новой базисе  $\bar{A} = S^{-1}AS$ , или  $A = S\bar{A}S^{-1}$ . И главное:

$$e^{tA} = S^{-1}e^{t\bar{A}}S.$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \left( E + tA + \dots + \frac{t^n}{n!}A^n \right) = \left( E + tS^{-1}e^{t\bar{A}}S + \dots + \frac{t^n}{n!}(S^{-1}e^{t\bar{A}}S)^n \right), \\ (S\bar{A}S^{-1})^n &= S\bar{A}^nS^{-1}, SES^{-1} = SS^{-1} = E \\ e^{tA} &= S^{-1}e^{t\bar{A}}S. \end{aligned}$$

■

Для решения нормальных линейных систем методом матричной экспоненты мы будем находить собственные вектора.

Матрица  $A$  в базисе из собственных векторов (если они соответствуют действительным собственным значениям) будет иметь диагональный вид. Произведение диагональной матрицы на диагональную – диагональная. Тогда для случая без кратных корней:

$$e^{tA} = E + t \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + \frac{t^2}{2!} \cdot \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2).$$

$$e^{tA} = \text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}).$$

Если  $\lambda$  – корень кратности  $l$ , то матрица  $A$  приводится к Жордановой клетке (диагональная матрица с единицами над главной диагональю).

$$A = \lambda E + B \Rightarrow B = A - \lambda E.$$

$$e^{tA} = e^{t(\lambda E + B)} = e^{t\lambda E}e^{tB}, e^{t\lambda E} = \text{diag}(e^{t\lambda}, \dots, e^{t\lambda}), e^{tB} = E + tB + \dots + \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}B^{l-1} + 0$$

$$\text{тогда } e^{tA} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots \\ & & \dots & \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} \\ 0 & & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

**Метод решения линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами** (матричный метод вариации постоянной)

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}(t), \text{ решение будем искать в виде } \vec{x}(t) = e^{tA}\vec{C}(t),$$

$$\text{тогда } Ae^{tA}\vec{C}(t) + e^{tA}\dot{\vec{C}}(t) = Ae^{tA}\vec{C} + \vec{f}(t),$$

$$e^{tA}\dot{\vec{C}}(t) = \vec{f}(t) \Rightarrow \dot{\vec{C}}(t) = (e^{tA})^{-1}\vec{f}(t) = e^{-tA}\vec{f}(t).$$

## 4 Билет 4. Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

### 4.1 Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной линейной системы уравнений и для линейного уравнения $n$ -го порядка в нормальном виде

Рассматривается система вида

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{q}(t), \quad (52)$$

где  $A = \|a_j^i(t)\|$ ,  $i, j = 1, \vec{n}$  – матрица,  $\vec{q}(t)$  – заданная вектор-функция. Наряду с векторной записью также будем использовать координатную запись  $x^i = \sum_{j=1}^n a_j^i x^j + q^i(t)$ ,  $i = 1, \vec{n}$ .

**Необходимым условием линейности** является факт того, что все  $A_j^i$  и  $q^i$  зависят только от  $t$  и не зависят от  $\vec{x}$ .

Для (52) ставится задача Коши:

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0.$$

**Теорема 4.1. Основная теорема для линейных систем.** Пусть  $a_j^i(t)$ ,  $i, j = 1, \vec{n}$  и  $\vec{q}(t)$  в (52) непрерывны на отрезке  $[a; b]$ . Тогда решение задачи Коши существует и единственно на всем отрезке  $[a; b]$ .

#### Предварительные замечания:

Пусть вектор-функция  $\vec{f}(x) \in B$  и  $A$  – линейный оператор, действующий из  $B$  в  $B$ , т.е.  $A(\vec{f} + \vec{g}) = A\vec{f} + A\vec{g}$ .

**Определим норму оператора:**

$$\|A\| = \sup_{\vec{\varphi} \in B, \vec{\varphi} \neq \vec{0}} \frac{\|A(\vec{\varphi})\|}{\|\vec{\varphi}\|}.$$

Тогда получаем неравенство:  $\|A\| \|\vec{\varphi}\| \geq \|A(\vec{\varphi})\|$ .

Нормой для вектор-функции выберем  $\|\vec{x}(t)\| = \max_{1 \leq i \leq n} (\max_{t \in [a; b]} x^i(t))$ , а нормой для оператора  $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} (\max_{t \in [a; b]} \sum_{j=1}^n |a_j^i(t)|)$

*Доказательство.* Определим  $\vec{g}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t \vec{q}(S) dS$  и построим итерационную процедуру.

Т.к.  $q^i(t) \in C_{[a; b]} \forall i = 1, \vec{n} \Rightarrow \exists \|\vec{q}\|_c = M_1$ . Тогда  $\|\vec{g}\|_c = \|\vec{x}_0 + \int_{t_0}^t \vec{q}(S) dS\| \leq \|\vec{x}_0\| + \int_{t_0}^t \|\vec{q}(S)\| dS \leq \|\vec{x}_0\| + M_1(b-a) = C$ .

Рассмотрим интегральное уравнение  $\vec{x} = \vec{g} + \int_{t_0}^t A(s)\vec{x}(s) ds$ .

Аналогично основной лемме доказывается, что последнее интегральное уравнение эквивалентно задаче (52).

Итерационная процедура:  $\vec{x}_0 = \vec{g}$ ;  $\vec{x}_k = \vec{g} + \int_{t_0}^t A(s)x_{k-1}(s)ds$ ,  $k = 0, 1, \dots$

Оценим норму:

$$\|\vec{x}_1 - \vec{x}_0\| = \left\| \int_{t_0}^t A(s)\vec{g}(s)ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)\vec{g}(s)\|ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)\| \cdot \|\vec{g}(s)\|ds \right| \leq C_1 C |t - t_0|;$$

Таким образом  $\|\vec{x}_1 - \vec{x}_0\| \leq C_1 C |t - t_0|$ .

Теперь докажем по индукции неравенство:  $\|\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}\| \leq \frac{C C_1^k}{k!} |t - t_0|^k$ .

Базой индукции выступает полученное выше неравенство. Предположим, что верно для  $n = k$ , т.е.:  $\|\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}\| \leq \frac{C C_1^k}{k!} |t - t_0|^k$ .

Докажем для

$$\begin{aligned} n = k + 1 : \|\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k\| &= \left\| \int_{t_0}^t A(s)(\vec{x}_k(s) - \vec{x}_{k-1}(s))ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)(\vec{x}_k(s) - \vec{x}_{k-1}(s))\|ds \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)\| \cdot \|(\vec{x}_k(s) - \vec{x}_{k-1}(s))\|ds \right| \leq C \left| \int_{t_0}^t \frac{C_1 C^k |s - t_0|^k}{k!} ds \right| = \frac{C^{k+1} C_1 |t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

Т.к.  $|t - t_0| \leq (b - a)$ , то предыдущее неравенство можно усилить  $\|\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}\| \leq \frac{C_1 C^k}{k!} (b - a)^k$ .

Функциональная последовательность  $\vec{x}_k$  сходится равномерно, т.к. сходится равномерно ряд  $\vec{x}_0 + (\vec{x}_1 - \vec{x}_0) + \dots + (\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}) + \dots$ , который межорируется сходящимся рядом  $\|\vec{x}_0\| + \|(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)\| + \dots + \|(\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1})\| + \dots \leq \|\vec{x}_0\| + C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C^k |b-a|^k}{k!} = \|\vec{x}_0\| + C_1 e^{C(b-a)} < \infty \Rightarrow$

Существует (в силу банаховости пр-ва) непрерывно дифф.  $\varphi(t) : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n = \varphi(t)$ .

Рассмотрим  $\left\| \int_{t_0}^t A \vec{x}_n dS - \int_{t_0}^t A \vec{\varphi} dS \right\| = \left\| \int_{t_0}^t A(\vec{x}_n - \vec{\varphi}) dS \right\| \leq \|A\| \cdot \left| \int_{t_0}^t \|\vec{x}_n - \vec{\varphi}\| dS \right|$ , где  $\|\vec{x}_n - \vec{\varphi}\| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ .

Т.о. итерационная процедура сходится в силу существования пределов слева и справа.

Полученное решение эквивалентно решению задачи (52). В отличие от основной теоремы для нормальных систем ДУ:  $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t, \vec{x})$ , где существование было получено только на отрезке Пеано, для СЛДУ существование решения доказано для всего отрезка  $[a; b]$  – промежутка, где  $a_j^i(t)$  и  $\vec{q}(t)$  непрерывны. В нашем случае  $\vec{f}$  соответствует  $\vec{f} = A\vec{x} + \vec{q}$ . Она непрерывна, т.к. полученное решение  $\vec{x}(t)$  непрерывно. Условие непрерывности  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  также выполнены, т.к. в нашем случае  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_{ij}(t)$  – непр. на  $[a; b]$ . Отсюда следует единственность, т.к. два решения задачи (52), согласно основной теореме для нормальных систем, совпадают на промежутке, где они оба определены. В нашем случае это  $[a; b]$ .

Т.о. теорема не носит локальных характер.

■

## 4.2 Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы

Будем рассматривать однородную систему ДУ вида:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}; \quad \dot{x}^i = \sum_{k=1}^n a_k^i x^k; \quad i, k = \overline{1, n} \quad (53)$$

**Утверждение 4.1.** Для однородных систем линейных уравнений верен принцип суперпозиций, т.е. если система функций  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  – решение системы уравнений, то любая их линейная комбинация тоже является решением.

*Доказательство.* Введем оператор  $L$  такой, что  $L = \frac{d}{dt} - A$ . Тогда однородная система ДУ  $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$  запишется в виде  $L(\vec{x}) = 0$ , неоднородная система ДУ  $\frac{d\vec{x}}{dt} - A\vec{x} = q(t)$  запишется в виде  $L(\vec{x}) = q(t)$ .

Пусть вектор-функции  $\vec{\varphi}(t)$  и  $\vec{\psi}(t)$  являются решениями системы  $L(\vec{x}) = 0$ , в таком случае справедливо

$$L(\vec{\varphi}(t)) = 0; \quad L(\vec{\psi}(t)) = 0$$

Рассмотрим вектор-функцию  $\vec{\chi}(t) = a\vec{\varphi}(t) + b\vec{\psi}(t)$ , где  $a$  и  $b$  – произвольные коэффициенты. Применим оператор  $L$  к получившейся вектор-функции:

$$\begin{aligned} L(\vec{\chi}(t)) &= \frac{d}{dt} (a\vec{\varphi}(t) + b\vec{\psi}(t)) - A(a\vec{\varphi}(t) + b\vec{\psi}(t)) = \\ &= a \left( \frac{d}{dt} \vec{\varphi}(t) - A\vec{\varphi}(t) \right) + b \left( \frac{d}{dt} \vec{\psi}(t) - A\vec{\psi}(t) \right) = \\ &= aL(\vec{\varphi}(t)) + bL(\vec{\psi}(t)) = 0 \end{aligned}$$

■

**Определение 4.1.** Пусть имеется система вектор-функций  $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$

$$\vec{\varphi}_i(t) = \begin{pmatrix} \varphi_i^1(t) \\ \dots \\ \varphi_i^n(t) \end{pmatrix} \quad (54)$$

непрерывна на  $I(x)$ , тогда такая система называется линейно-зависимой на  $I$ , если

$$\exists C_1, \dots, C_n : \sum_{i=1}^n |C_i| \neq 0 \ \& \ \sum_{i=1}^n C_i \vec{\varphi}_i(t) = 0 \ \forall t \in I$$

В противном случае, система вектор-функций называется линейно-независимой, то есть условие

$$\sum_{i=1}^n C_i \vec{\varphi}_i(t) = 0 \ \forall t \in I$$

выполняется только при  $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$ .

**Определение 4.2.** Пусть система вектор-функций  $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$  линейно-независима на  $I$  и каждая вектор-функция  $\vec{\varphi}_i(t)$  является решением системы ДУ  $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ . Тогда такая система вектор-функций называется фундаментальной системой решений (ФСР) данной системы ДУ.

**Теорема 4.2.** Рассмотрим систему ДУ  $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ . Если матрица  $A$  является непрерывной на отрезке  $[a, b]$ , то система имеет ФСР на этом отрезке.

*Доказательство.* матрица  $A$  является непрерывной на отрезке  $[a, b]$ , тогда, согласно основной теореме, на отрезке  $[a, b]$  существует единственное решение задачи Коши.

Пусть система функций  $\vec{\varphi}_1(t), \vec{\varphi}_2(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$  является решением системы при следующих заданных условиях:

$$\vec{\varphi}_1(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\varphi}_2(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{\varphi}_n(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (55)$$

тогда вронскиан такой системы в точке  $t_0$ :

$$W(t_0) = |\vec{\varphi}_1(t_0), \vec{\varphi}_2(t_0), \dots, \vec{\varphi}_n(t_0)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad (56)$$

тогда, из свойства вронскиана следует, что данная система функций является линейно-независимой, а так как каждая функция является решением системы ДУ, эта система вектор-функций и есть ФСР системы ДУ. ■

**Теорема 4.3.** Пусть система вектор-функций  $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$  является ФСР системы ДУ, тогда любое решение этой системы ДУ можно представить, как линейную комбинацию компонентов ФСР:  $\vec{x}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$ , где  $C_1, \dots, C_n$  – произвольные постоянные.

*Доказательство.* Так как для системы ДУ справедлив принцип суперпозиции, то вектор-функция  $\vec{x}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$ .

Предположим теперь, что существует функция  $\vec{\chi}(t)$  такая, что она является решением системы ДУ, но не представима в виде  $C_1\vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$ . Пусть значение этой функции в точке  $t_0$ :

$$\vec{\chi}(t_0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_1(t_0) \\ \chi_2(t_0) \\ \dots \\ \chi_n(t_0) \end{pmatrix} \quad (57)$$

Теперь составим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} C_1\varphi_1^1(t_0) + C_2\varphi_2^1(t_0) + \dots + C_n\varphi_n^1(t_0) = \alpha_1 \\ C_1\varphi_1^2(t_0) + C_2\varphi_2^2(t_0) + \dots + C_n\varphi_n^2(t_0) = \alpha_2 \\ \dots \\ C_1\varphi_1^n(t_0) + C_2\varphi_2^n(t_0) + \dots + C_n\varphi_n^n(t_0) = \alpha_n \end{cases} \quad (58)$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  – являются неизвестными, который надо найти. Определителем этой системы является

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} \varphi_1^1(t_0) & \varphi_2^1(t_0) & \dots & \varphi_n^1(t_0) \\ \varphi_1^2(t_0) & \varphi_2^2(t_0) & \dots & \varphi_n^2(t_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^n(t_0) & \varphi_2^n(t_0) & \dots & \varphi_n^n(t_0) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (59)$$



данный определитель не равен 0, поскольку функции  $\vec{\varphi}_i$   $i = 1 \dots n$  являются ФСР системы ДУ, поэтому числа  $C_1, C_2, \dots, C_n$  определяются однозначно.

С этими числами рассмотрим решение исходной системы ДУ, назовем его  $\vec{z}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$ . Поскольку  $\vec{\chi}(t)$  и  $\vec{z}(t)$  – являются решениями системы ДУ, по принципу суперпозиции функция  $\vec{\psi}(t) = \vec{z}(t) - \vec{\chi}(t)$  так же является решением этой системы ДУ.

Заметим, что значение этой функции в точке  $t_0$ :  $\vec{\psi}(t_0) = \vec{z}(t_0) - \vec{\chi}(t_0) = 0$ , заметим так же, что  $\vec{0}$  является решением однородной системы системы  $\frac{d}{dt}\vec{x} - A\vec{x}$ . Тогда, в силу теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши, выполняется:

$$\begin{aligned}\vec{\psi}(t) &= 0 \quad \forall t \in I \Rightarrow \\ \vec{\psi}(t) &= \vec{z}(t) - \vec{\chi}(t) \equiv 0 \quad \forall t \in I \Rightarrow \\ \vec{z}(t) &= \vec{\chi}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + C_2\vec{\varphi}_2(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t)\end{aligned}$$

Мы получили противоречие с предположением о невозможности линейного представления решения  $\vec{\chi}(t)$  через функции ФСР, таким образом, мы доказали, что любое решение системы ДУ можно представить, как линейную комбинацию компонентов ФСР. ■

**Определение 4.3.** *Решение системы ДУ вида  $\vec{x}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$ , где  $C_1, \dots, C_n$  называется общим решением системы ДУ.*

### 4.3 Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем

Введем оператор  $L$  такой, что  $L = \frac{d}{dt} - A$ . Тогда однородная система ДУ  $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$  запишется в виде  $L(\vec{x}) = 0$ , неоднородная система ДУ  $\frac{d\vec{x}}{dt} - A\vec{x} = q(t)$  запишется в виде  $L(\vec{x}) = q(t)$ .

**Утверждение 4.2.** *Общее решение неоднородной системы ДУ  $\frac{d\vec{x}}{dt} - A\vec{x} = q(t)$  представляет собой следующее выражение:*

$$\vec{x} = \vec{x}^s + \vec{x}_0^{ob} \quad (60)$$

где  $\vec{x}^s$  – частное решение линейного неоднородного уравнения, т. е.  $L(\vec{x}^s) = q(t)$ , а  $\vec{x}_0^{ob}$  – общее решение системы линейных **однородных** уравнений  $L(\vec{x}_0^{ob}) = 0$ . Таким образом, получаем:

$$L(\vec{x}) = L(\vec{x}^s + \vec{x}_0^{ob}) = L(\vec{x}^s) + L(\vec{x}_0^{ob}) = q(t) + 0$$

### 4.4 Определитель Вронского и его свойства

#### 4.4.1 Определитель Вронского

**Определение 4.4.** *Пусть на  $I$  определена система вектор-функций  $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$ , тогда определитель*

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1^1(t) & \dots & \varphi_n^1(t) \\ \dots & & \dots \\ \varphi_1^n(t) & \dots & \varphi_n^n(t) \end{vmatrix} \quad (61)$$

называется определителем Вронского, где

$$\vec{\varphi}_i = \begin{pmatrix} \varphi_i^1 \\ \dots \\ \varphi_i^n \end{pmatrix} \quad (62)$$

другими словами

$$W(t) = |\vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_n| \quad (63)$$

**Теорема 4.4.** Если  $\exists t_0 \in I : W(t_0) \neq 0$ , то система является линейно независимой на  $I$ . Обратное неверно, пример:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ЛНЗ, но } W(t) = 0 \quad (64)$$

*Доказательство.* Будем доказывать от противного: пусть система является линейно-зависимой, тогда  $\exists C_1, \dots, C_n : C_1 \vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n \vec{\varphi}_n(t) = 0 \forall t \in I$ . Тогда в определителе Вронского  $W(t)$  есть хотя бы два линейно-зависимых столбца, так как  $\vec{\varphi}_i(t)$  являются столбцами определителя, но тогда получаем, что  $W(t) = 0 \forall t \in I$  (хотя предполагалось, что  $\exists t_0 \in I : W(t_0) \neq 0$ ). Таким образом, мы получили противоречие, откуда следует, что система является линейно независимой на  $I$ . ■

#### 4.4.2 Свойства Вронскиана

1. Если  $\exists t_0 \in I : W(t_0) \neq 0$ , то система является линейно независимой на  $I$  (см. доказательство теоремы).
2. Пусть вектор-функции  $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$  являются решениями системы ДУ, и существует точка  $t_0 \in I : W(t_0) = 0$ , тогда система  $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$  является линейно-зависимой.

*Доказательство.* Поскольку  $W(t_0) = 0$  столбцы этой матрицы являются линейно-зависимыми, то есть

$$\exists C_1, C_2, \dots, C_n : \sum_{i=1}^n C_i^2 \neq 0 \text{ \& } \sum_{i=1}^n C_i \vec{\varphi}_i(t_0) = 0$$

Используя данные коэффициенты, построим функцию  $\vec{x}(t) = C_i \vec{\varphi}_i(t)$ . Заметим, что во-первых  $\vec{x}(t_0) = 0$ , а во-вторых данная функция является решением системы ДУ в силу теоремы о суперпозиции. Тогда, в силу теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши выполняется:  $\vec{x}(t) = C_i \vec{\varphi}_i(t) = 0 \forall t \in I$ , что означает, что система  $\vec{\varphi}_i$  является линейнозависимой. ■

### 4.5 Формула Лиувилля-Остроградского для нормальной линейной однородной системы уравнений и для линейного однородного уравнения n-го порядка.

Следующее свойство вронскиана рассмотрим в виде теоремы. Для начала докажем вспомогательное утверждение.

**Лемма 4.1.** [Формула Эйлера дифференцирования определителя]

Детерминант матрицы представим в виде:  $\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^i & \dots & a_n^i \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} \cdot a_k^i M_i^k$  Тогда

для

$$\dot{\Delta}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot \dot{a}_j^i M_i^j$$

**Теорема 4.5.** [Формула Лиувилля-Остроградского]

Пусть  $W(x)$  – вронскиан решений  $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$  однородной системы  $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ . Тогда имеет место формула:

$$\dot{W}(t) = W(t) \cdot \text{tr} A$$

$$\text{где } \text{tr} A = \sum_{k=1}^n a_{kk}(t)$$

*Доказательство.* Зафиксируем среди системы решений функцию  $\vec{\varphi}_j = \begin{pmatrix} \varphi_j^1 \\ \varphi_j^2 \\ \dots \\ \varphi_j^n \end{pmatrix}$ . Рассмотрим  $i$ -ую компоненту  $\varphi_j^i$  решения  $\vec{\varphi}_j$ . Поскольку  $\vec{\varphi}_j$  решение, то  $\frac{d\vec{\varphi}_j}{dt} = A\vec{\varphi}_j \Rightarrow$

$$\frac{d\varphi_j^i}{dt} = \dot{\varphi}_j^i = \sum_{k=1}^n a_k^i \varphi_j^k$$

Рассмотрим вронскиан  $W(t)$ , продифференцируем его по  $t$

$$\dot{W}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot \dot{\varphi}_j^i M_j^i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_k^i \varphi_j^k M_j^i$$

Переставим суммы местами

$$\dot{W}(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_k^i \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \varphi_j^k M_j^i = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_k^i \delta_i^k W(t) = W(t) \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_k^i \delta_i^k = W(t) \sum_{k=1}^n a_k^k$$

$$\dot{W}(t) = W(t) \cdot \text{tr} A$$

■

Также можно решить это уравнение и переписать в виде

$$W(t) = W(t_0) \exp \left( \int_{t_0}^t \text{tr} A(u) du \right)$$

## 4.6 Метод вариации постоянных для линейной неоднородной системы уравнений и для линейного неоднородного уравнения $n$ -го порядка.

$$\text{Рассмотрим } y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x). \quad (65)$$

$\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  – Ф.С.Р. однородного уравнения  $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$ . Это означает, что

$$\forall k = \overline{1, n} \hookrightarrow \varphi_k^{(n)} + a_1(x)\varphi_k^{(n-1)} + \dots + a_n(x)\varphi_k \equiv 0 \quad (66)$$

Перепишем уравнение (65) в эквивалентном виде. Для этого сделаем следующие замены:  $y = v_1$ ,  $y^{(1)} = v_2$ , ...,  $y^{(n-1)} = v_n$ . Тогда получим:

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dx} = v_2, \\ \frac{dv_2}{dx} = v_3, \\ \dots, \\ \frac{dv_n}{dx} = f(x) - a_1(x)v_n - \dots - a_n(x)v_1. \end{cases} \quad (67)$$

Будем искать решение (65) в виде

$$y(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + \dots + C_n(x)\varphi_n(x)$$

Тогда получается, что решение эквивалентной системы будем искать в виде

$$\vec{v}(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ \dots \\ v_n(x) \end{pmatrix} = C_1(x) \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \dots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} + \dots + C_n(x) \begin{pmatrix} \varphi_n(x) \\ \dots \\ \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \quad (68)$$

Рассмотрим функцию  $v_k(x) = C_1(x)\varphi_1^{(k-1)} + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(k-1)}$ . Продифференцируем эту функцию по  $x$ :

$$\forall k = \overline{1, n-1} \hookrightarrow \dot{v}_k(x) = \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(k-1)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(k-1)} + C_1(x)\varphi_1^{(k)} + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(k)} \quad (69)$$

С другой стороны  $\dot{v}_k(x) = v_{k+1} = C_1(x)\varphi_1^{(k)} + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(k)}$ . Тогда получаем

$$v_k(x) = C_1(x)\varphi_1^{(k)} + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(k)} = \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(k-1)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(k-1)} + C_1(x)\varphi_1^{(k)} + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(k)} \quad (70)$$

$$\forall k = \overline{1, n-1} \hookrightarrow \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(k-1)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(k-1)} = 0 \quad (71)$$

$$\begin{aligned} k = n : \dot{v}_n(x) &= \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-1)} + C_1(x)\varphi_1^{(n)} + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(n)} = \\ &= f(x) - a_1(x) \left( C_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(n-1)} \right) - \dots - a_n(x) (C_1(x)\varphi_1 + \dots + C_n(x)\varphi_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-1)} + C_1(x) \left( \varphi_1^{(n)} + a_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + \dots + a_n(x)\varphi_1 \right) + \dots + \\ + C_n(x) \left( \varphi_n^{(n)} + a_1(x)\varphi_n^{(n-1)} + \dots + a_n(x)\varphi_n \right) = f(x) \end{aligned}$$

Из уравнения (66) следует что выражения в скобках равны нулю, тогда получим

$$k = n : \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-1)} = f(x)$$

Т.е. мы получили следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{C}_1(x)\varphi_1 + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n = 0, \\ \dots \\ \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-2)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-2)} = 0, \\ \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \quad (72)$$

Система (72) это линейная система для определения  $\dot{C}_1, \dots, \dot{C}_n$ . Определитель этой системы  $\Delta = W(x) \neq 0$ , а значит система разрешима единственным образом.