Содержание

1 Билет 1. Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений 3

1.1 Основные понятия . . . 3
1.2 Простейшие типы уравнений первого порядка . . . 4
1.2.1 Уравнения в полных дифференциалах . . . 4
1.2.2 Уравнения с разделяющимися переменными . . . 5
1.2.3 Однородные уравнения . . . 6
1.2.4 Линейные уравнения первого порядка . . . 6
1.3 Уравнение Бернулли и Риккати . . . 8
1.3.1 Уравнение Бернулли . . . 8
1.3.2 Уравнение Риккати . . . 8
1.4 Методы понижения порядка дифференциальных уравнений . . . 8
1.5 Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной . . . 10

2 Билет 2. Задача Коши 12

2.1 Принцип сжимающих отображений . . . 12
2.2 Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений . . . 14
2.3 Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения n-го порядка в нормальном виде . . . 17
2.4 Теоремы о продолжении решения для нормальной системы дифференциальных уравнений . . . 18
2.5 Непрерывная зависимость от параметров решения задачи Коши для нормальной системы ДУ . . . 19
2.6 Дифференцируемость решения по параметру. . . . 20
2.7 Задача Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Особое решение . . . 20

3 Билет 3. Линейный дифференциальные уравнения и линейныесистемы диффуренциальных уравнений с постоянными коэффициентами 22

3.1 Вводная часть . . . 22
3.1.1 Понятие кольца. Рассмотрение понятия многочленов . . . 22
3.1.2 Многочлен . . . 23
3.2 Линейные уравнения с потоянными коэффициентами . . . 26
3.3 Неоднородные линейные уравнения . . . 28
3.4 Уравнение Эйлера . . . 30
3.5 Матричная экспонента, ее свойства и применение к решению нормальных линейных систем . . . 31
3.5.1 Матричная экспонента . . . 31
3.5.2 Свойства матричной экспоненты . . . 31
3.5.3 Применение к решению нормальных линейных систем . . . 33

4 Билет 4. Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами 34

4.1 Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной линейной системы уравнений и для линейного уравнения n-го порядка в нормальном виде . . . 34

4.2 Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы . . . 36
4.3 Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем . . 38
4.4 Определитель Вронского и его свойства . . . 38
4.4.1 Определитель Вронского . . . 38
4.4.2 Свойства Вронскиана . . . 39
4.5 Фундаментальная система решений и общее решение нормальной линейной однородной системы уравнений . . . 39
4.6 Линейная неоднородная система уравнений в случае, когда неоднородность представлена векторным квазимногочленом . . . 46
4.7 Формула Лиувилля-Остроградского для нормальной линейной однородной системы уравнений и для линейного однородного уравнения n-го порядка. . 46
4.8 Метод вариации постоянных для линейной неоднородной системы уравнений и для линейного неоднородного уравнения n-го порядка. . . . 47
4.9 Теорема Штурма . . . 49
4.10 Следствия из теоремы Штурма . . . 51

5 Билет 5. Автономные системы дифференциальных уравнений 52
5.1 Основные определения . . . 52
5.2 Типы фазовых траекторий . . . 53
5.3 Групповые свойства автономных систем . . . 53
5.4 Понятия фазового потока и фазового объема . . . 54
5.5 Теорема Лиувилля . . . 55
5.6 Теорема Пуанкаре . . . 56

1 Билет 1. Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений

1.1 Основные понятия

Определение 1.1. *Уравнение вида*

$$F(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением, где x – аргумент, $y(x)$ – неизвестная функция, F – известная функция.

Определение 1.2. *Если это уравнение удается разрешить относительно старшей производной, такое дифференциальное уравнение называется разрешённым относительно старшей производной и записывается в виде*

$$y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

Порядок уравнения определяется порядком старшей производной от y.

Определение 1.3. *Функция $y = \varphi(x)$ называется решением ДУ, если она n раз дифференцируема и*

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0 \quad \forall x,$$

где определена функция $\varphi(x)$ с её производными.

Определение 1.4. *Система n уравнений*

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f_1(t, x^1(t), \dots, x^n(t)) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f_n(t, x^1(t), \dots, x^n(t)) \end{cases} \tag{1}$$

где $x^1(t), \dots, x^n(t)$ – искомые функции, называется нормальной системой ДУ n-го порядка.

Утверждение 1.1. *Рассмотрим ДУ $y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$ n-ого порядка. Это уравнение эквивалентно следующей нормальной системе ДУ:*

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = v_2 \\ \dot{v}_2 = v_3 \\ \dots \\ \dot{v}_{n-1} = v_n \\ \dot{v}_n = f_n(x, v_1, v_2, \dots, v_n) \end{cases} \Leftrightarrow y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \tag{2}$$

Доказательство. Введем обозначения: $y = v_1(x)$, $y' = v_2(x)$, $y'' = v_3(x)$, …, $y^{(n-1)} = v_n(x)$. Тогда имеем $\dot{v}_1 = v_2,\ \dot{v}_2 = v_3,\ \dots, \dot{v}_n = f(x, v_1, v_2, \dots, v_n)$, то есть получилась нормальная система дифференциальных уравнений n-ого порядка с неизвестными v_i.

Обратными заменами системы уравнений можно получить исходное дифференциальное уравнение $y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$. ■

Определение 1.5. *Рассмотрим уравнение 1-ого порядка $y' = f(x, y(x))$. Тогда задача решить это уравнение с условием $y(x_0) = y_0$ называется задачей Коши.*

Определение 1.6. *Пусть $\varphi(x)$ – решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y(x))$. График решения $\varphi(x)$ называется интегральной кривой. В силу определения функции $f(x, y)$ на множестве Ω, вся интегральная кривая будет лежать в Ω.*

Определение 1.7. *Проведём через каждую точку интегральной кривой $(x_0, y_0) \in \Omega$ малый отрезок с углом наклона по отношению к оси x равным α, причём $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0, y_0)$. Получим так называемое поле направлений.*

Из построения интегральной кривой следует, что интегральная кривая в каждой своей точке касается поля напрвлений. Верно и обратное: кривая, касающаяся в каждой своей точке поля направлений, является интегральной кривой.

1.2 Простейшие типы уравнений первого порядка

1.2.1 Уравнения в полных дифференциалах

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$. Тогда кривая

$$\gamma = \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \ t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \tag{3}$$

называется интегральной кривой рассматриваемого уравнения, если $\forall t : t \in [t_1; t_2]$ выполнено

$$P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'_t + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'_t = 0. \tag{4}$$

Определение 1.8. *Дифференциальное уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если $\exists F(x, y) : P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y)$.*

Тогда $dF(x, y) = 0 \Rightarrow F(x, y) = const$, то есть $F(x, y)$ определяет неявную функцию $y(x)$.

Теорема 1.1. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в области D. Для того, чтобы уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ являлось уравнением в полных дифференциалах, необходимо выполнение условия $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $(x,y) \in D$. Если же область D ещё и одвосвязна, то условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ является достаточным.*

Доказательство. Пусть $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ – уравнение в полных дифференциалах, тогда $\exists F(x, y) : P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y) \Rightarrow P = \frac{\partial F}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$. По условию P и Q – непрерывно дифференцируемы, тогда $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ – непрерывные функции, значит

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \ (x, y) \in D. \tag{5}$$

Пусть теперь D – односвязная область. Рассмотрим значение интеграла

$$F = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x;y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

который берётся по кривой γ, лежащей в D и соединяющей точки (x_0, y_0) и $(x; y)$. Пусть $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда по теореме о независимости интеграла от пути интегрирования выходит, что значение интеграла не зависит от пути интегрирования γ, а является функцией от (x, y), значит $F = F(x, y)$ – функция и $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y)$. ■

Определение 1.9. *Непрерывно дифференцируемая функция $\mu(x,y) \neq 0$ в области G называется интегрирующим множителем для уравнения в полных дифференциалах $\mu(x,y)(P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = 0$, если исходное уравнение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ не является уравнением в полных дифференциалах.*

Если $\mu(x,y)$ – интегрирующий множитель, то для достаточного условия имеем

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \Leftrightarrow P\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Полученное уравнение не легче исходного, так как теперь задача свелась к нахождению μ. Обычно интегрирующий множитель ищут в виде $\mu(x),\ \mu(y),\ \mu(x^2+y^2),\ \mu(x^\alpha, y^\beta)$.

1.2.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим ДУ вида $P(y)dx + Q(x)dy = 0$, где $P(y) \in C^1_{[y_1;y_2]}$, $Q(x) \in C^1_{[x_1;x_2]}$. Если $\exists y_0 :$ $P(y_0) = 0$ или $\exists x_0 : Q(x_0) = 0$, тогда

$$\begin{cases} x = t \\ y = y_0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_0 \\ y = t \end{cases} \tag{6}$$

являются интегральными кривыми рассматриваемого ДУ соответственно. Если же выполняется $P(x,y) \neq 0$ и $Q(x,y) \neq 0$, то применим к уравнению интегрирующий множитель

$$\mu(x,y) = \frac{1}{P(x,y)Q(x,y)},$$

получив уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{dx}{Q(x)} + \frac{dy}{P(y)} = 0. \tag{7}$$

Значение $\mu(x,y)$ действительно является интегрирующим множителем, так как выполняется

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{Q(x)}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{P(y)}\right) = 0. \tag{8}$$

Тогда

$$dF(x,y) = \frac{dx}{Q(x)} + \frac{dy}{P(y)} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{Q(x)} \Rightarrow F(x,y) = \int\limits_{x_1}^{x} \frac{dt}{Q(t)} + C(y), \tag{9}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{P(y)} = C'(y) \Rightarrow C(y) = \int\limits_{y_1}^{y} \frac{dt}{P(t)} + C_1 \Rightarrow F(x,y) = \int\limits_{x_1}^{x} \frac{dt}{Q(t)} + \int\limits_{y_1}^{y} \frac{dt}{P(t)} + C_1 = const. \tag{10}$$

Определение 1.10. *Если дифференциальное уравнение вида $P_1(x,y)dx + Q_1(x,y)dy = 0$ может быть сведено к виду $P(y)dx + Q(x)dy = 0$, то такое уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными.*

Утверждение 1.2. *Задача Коши уравнения с разделяющимися переменными $P(y)dx + Q(x)dy = 0$ задаётся в виде $y(x_1) = y_1$, а её решение в виде*

$$\int\limits_{x_1}^{x} \frac{dt}{Q(t)} + \int\limits_{y_1}^{y} \frac{dt}{P(t)} = 0. \tag{11}$$

1.2.3 Однородные уравнения

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$y' = y\left(\frac{y}{x}\right),$$

которое назовём уравнением с однородной правой частью. Сделаем замену $v(x) = \frac{y}{x}$, тогда $y(x) = v(x)\cdot x$, $y'_x = x \cdot v'_x + v = g(v)$, откуда имеем $x\frac{dv}{dx} = g(v) - v$. Если $\exists g(v_0) = v_0$, то v_0 – решение уравнения $x\frac{dv}{dx} = g(v) - v$. Если же $v \neq g(v)$, тогда

$$\frac{dv}{g(v) - v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|x| + C = \int\limits_{v_0}^{v} \frac{dt}{g(t) - t}. \tag{12}$$

Таким образом, найдено решение исходного уравнения с однородной правой частью в квадратурах.

Определение 1.11. *Функция $F(x^1, x^2, \dots, x^n)$ называется однородной степени m, если $\forall \lambda > 0 \longrightarrow F(\lambda x^1, \lambda x^2, \dots, \lambda x^n) = \lambda^m F(x^1, x^2, \dots, x^n)$.*

Пример 1.1. *Рассмотрим уравнение $P(x, y)dx = Q(x, y)dy$. Если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции степени m, тогда*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = \frac{x^m P(1, \frac{y}{x})}{x^m Q(1, \frac{y}{x})} = \frac{P(1, \frac{y}{x})}{Q(1, \frac{y}{x})} = g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{13}$$

Таким образом исходное уравнение свелось к уравнению с однородной правой частью.

1.2.4 Линейные уравнения первого порядка

Определение 1.12. *Дифференциальное уравнение вида $y' + a(x)y = f(x)$ – линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Дифференциальное уравнение вида $y' + a(x)y = 0$ – линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка. При этом $a(x) \in C^1_{I(x)}$, $f(x) \in C_{I(x)}$, где $I(x)$ – область, на которой определены функции $a(x)$ и $f(x)$.*

Введём оператор $L = \frac{d}{dx} + a(x)$, который действует на множество непрерывно дифференцируемых функций $\varphi \in C^1_{I(x)}$. Тогда уравнение $y' + a(x)y = f(x)$ переписывается в виде $L(y) = f(x)$, а уравнение $y' + a(x)y = 0$ переписывается в виде $L(y) = 0$.

Теорема 1.2. *Введённые оператор $L = \frac{d}{dx} + a(x)$ – линейный оператор.*

Доказательство. Рассмотрим линейную комбинацию $c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$:

$$L(c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)) = (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)' + a(x)(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1 L(\varphi_1) + c_2 L(\varphi_2) \tag{14}$$

Таким образом, $L(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1 L(\varphi_1) + c_2 L(\varphi_2)$, то есть L – линейный оператор. ■

Утверждение 1.3. *Решением уравнения $y' + a(x)y = 0$ является*

$$y = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt}, \ C \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Доказательство. Найдём решение уравнения $y' + a(x)y = 0$:

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx \Rightarrow \ln|y| = -\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt + \ln C \Rightarrow |y| = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt},\ C > 0 \tag{16}$$

Раскрывая модуль и объединяя полученное решение с нулевым ($y \equiv 0$), имеем

$$y = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt},\ C \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

■

Утверждение 1.4. *Решением уравнения $y' + a(x)y = f(x)$ является*

$$y = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt},\ C \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Доказательство. Найдём решение уравнения $y' + a(x)y = f(x)$: воспользуемся уже найденным решением однородного уравнения, применяя метод вариации постоянной. То есть будем искать решение в виде

$$y = C(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt}. \tag{19}$$

Подставим это решение в исходное уравнение:

$$C'(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} - a(x)C(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} + a(x)C(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} = f(x) \tag{20}$$

$$C'(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} = f(x) \Rightarrow C(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)e^{\int\limits_{x_0}^{t} a(s)ds} + C_0 \tag{21}$$

Таким образом найден вид $C(x)$. Теперь подставим эту функцию:

$$y = C_0e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} + e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt}\int\limits_{x_0}^{x} f(t)e^{\int\limits_{x_0}^{t} a(s)ds} \tag{22}$$

$$y = C_0e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} + \int\limits_{x_0}^{x} f(t)e^{-\int\limits_{x_0}^{t} a(s)ds} \tag{23}$$

Из полученного решения видно, что оно является суммой решения однородного уравнения и частного решения. ■

Утверждение 1.5. *Если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – некоторые решения уравнения $y' + a(x)y = f(x)$, то $z(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ – решение однородного уравнения $y' + a(x)y = 0$.*

Доказательство. По условию $\varphi_1' + a(x)\varphi_1 = f(x)$, $\varphi_2' + a(x)\varphi_2 = f(x)$, откуда очевидно, что $(\varphi_1 - \varphi_2)' + a(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$. Обозначив $z = \varphi_1 - \varphi_2$, получим $z' + a(x)z = 0$, то есть z – решение однородного уравнения. ■

1.3 Уравнение Бернулли и Риккати

1.3.1 Уравнение Бернулли

Определение 1.13. *Д.у. вида* $\boxed{y' + a(x)\cdot y = y^r \cdot f(x)}^{(24)}$*, где* $a(x), f(x) \in C^1, r \in \mathbb{R}, r \neq 1$ *называется уравнением Бернулли.*

Утверждение 1.6. *Если* $r > 0$*, то* $y \equiv 0$ *- тривиальное решение. Пусть* $y \neq 0$*, разделим ДУ на* $y^r \Rightarrow \frac{y'}{y^r} + a(x)\cdot y^{1-r} = f(x)$*. Замена:* $u(x) = y^{1-r} \Rightarrow u' = (1-r)\cdot y^{-r}\cdot y' \Rightarrow$
$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{1-r}\cdot u' + a(x)\cdot u = f(x)}$ *- свелось к линейному уравнению.*

1.3.2 Уравнение Риккати

Определение 1.14. *Д.у. вида* $\boxed{y' + a(x)\cdot y^2 + b(x)\cdot y + c(x)}^{(25)}$*, где* $a(x), b(x) \in C^1_{I(x)}$*,* $c(x) \in C_{I(x)}$ *называется уравнением Риккати.*

Утверждение 1.7. *В общем случае уравнение Риккати не допускает решений в квадратурах, однако, если известно некоторое решение* $y = \varphi(x)$*, то сделав замену* $y = u + \varphi$*, получаем:* $\varphi' = u\varphi^2 + b\varphi + c$
$\varphi' + u' = u\varphi^2 + 2a\varphi u + au^2 + b\varphi + bu + c \Rightarrow u' = au^2 + (2a\varphi + b)u$ *- свелось к уравнению Бернулли.*

1.4 Методы понижения порядка дифференциальных уравнений

Утверждение 1.8. *Рассмотрим множество преобразований плоскости* $\boxed{\bar{x} = \varphi(x,y,\lambda), \bar{y} = \psi(x,y,\lambda)}^{(26)}$*. В (26) каждому* $\lambda \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ *соответствует некоторое преобразование, например,* $\bar{x} = \lambda x, \bar{y} = \lambda y, \lambda > 0$ *- гомотетия. Множество преобразований (26) является группой преобразований, если оно содержит любую композицию (26) , т.е.* $\exists \lambda_0 : \varphi(\varphi(x,y,\lambda_1), \psi(x,y,\lambda_2)) = \varphi(x,y,\lambda_0)$*, содержит тождественное преобразование, т.е.* $\exists \lambda_0 : \varphi(x,y,\lambda_0) = x;\ \psi(x,y,\lambda_0) = y$*, и вместе с любым преобразованием содержит и обратное:* $\forall \lambda \in \mathcal{D}\colon \exists\ \lambda_0\colon x = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda_0);\ y = \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda_0)$
Т.о. если (26) - группа, то $x = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda),\ y = \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda)$*; если в ДУ* $y' = f(x,y)$ *осуществить переход к новым координатам, то*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'_{\bar{x}}d\bar{x} + \psi'_{\bar{y}}d\bar{y}}{\varphi'_{\bar{x}}d\bar{x} + \varphi'_{\bar{y}}d\bar{y}} = f(\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda), \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda)) = \tilde{f}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\psi'_{\bar{x}} + \psi'_{\bar{y}}\cdot\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}}{\varphi'_{\bar{x}} + \varphi'_{\bar{y}}\cdot\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}} = \tilde{f}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda) \Rightarrow \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{\tilde{f}\cdot\varphi'_{\bar{x}} - \psi'_{\bar{x}}}{\psi'_{\bar{y}} - \tilde{f}\cdot\varphi'_{\bar{y}}} \tag{27}$$

(27) является записью $y' = f(x,y)$ *в новых координатах. Говорят, что* $y' = f(x,y)$ *допускает группу* $x = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda),\ y = \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda)$*, если оно не изменяется при переходе к новым переменным, т.е.* $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{y})$.

Следствие 1.2.1. *Рассматриваем уравнения вида* $\boxed{F(x, y, y', y'') = 0}^{(28)}$

1. $\boxed{F(x,y'',y') = 0}^{(29)}$ *Замена* $y'(x) = v(x) \Rightarrow y''(x) = v'(x)$ *и (29) в этом случае имеет вид* $F(x, v(x), v'(x)) = 0 \xrightarrow[\text{решаем}]{} V(x) = y(x,c_1)$*. Тогда решение (29) запишется в виде*

$\frac{dy}{dx} = g(x,c_1) \Rightarrow y(x) = c_2 + \int g(x,c_1)dx$. *Заметим, что* (29) *допускает группу сдвига* $x = \bar{x},\ y = \bar{y} + y_0$

2. $\boxed{F(y,y',y'') = 0}^{(30)}$ *(не содержит явно* x*). Замена:* $y' = V(y)$*, тогда* $y'' = \frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dx} = V\frac{dV}{dy} \Rightarrow F(y,V,y\frac{dV}{dy}) = 0$ *- ДУ первого порядка.* *Решение* $V(y) = g(y,c_1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = g(y,c_1) \Rightarrow$ *Решение* (30)*:* $\int \frac{dy}{g(y,c_1)} = x + c_2$. *Заметим, что* (30) *допускает группу сдвигов* $x = \bar{x} + x_0,\ y = \bar{y}$

3. $\boxed{F(x,y'',y',y) = 0 \text{ и } F - \text{однородная степени } m \text{ по } y'',\ y',\ y}$, *т.е.* $\forall\lambda > 0 \rightarrow$ $F(x,\lambda y'',\lambda y',\lambda y) = \lambda^m \cdot F(x,y'',y',y)$. *В таком случае ДУ допускает группу* $x = \bar{x}, y = \lambda\bar{y}$. *Замена:* $z(x) = \frac{y'}{y} \Rightarrow y' = z(x)y$
$\Rightarrow y'' = z'y + zy' = z'y + z^2y = y\cdot(z' + z^2) \Rightarrow F(x,y,zy,y(z'+z^2)) = 0$
$\Rightarrow y^m \cdot F(x,1,z,z'+z^2) = 0$ *- относительно* z *имеем ур-ние первого порядка.* *Если его решение* $z(x) = g(x,c_1)$*, то* $\frac{y'}{y} = g(x,c_1) \Rightarrow \frac{dy}{y} = g(x,c_1)dx \Rightarrow$ $\ln|y| = \int g(x,c_1)dx + c_2$

4*. *Будем говорить, что функция* $F(x,y,y'',...,y^{(n)})$ *является квазиоднородной функцией степени* r*, если* $\exists\alpha \in \mathbb{R} : \forall\lambda > 0 : F(\lambda x,\lambda^\alpha y,\lambda^{\alpha-1}y',...,\lambda^{\alpha-n}y^{(n)}) =$ $= \lambda^r \cdot F(x,y,...,y^{(n)})$. *Рассмотрим множество преобразований:*

$$\begin{cases} x = \lambda\bar{x} \\ y = \lambda^\alpha\bar{y} \end{cases}, \quad \text{где } \lambda > 0 \tag{31}$$

Такое множество преобразований перепишем в виде:

$$\begin{cases} x = e^\beta\cdot\bar{x} \\ y = e^{\alpha\beta}\bar{y} \end{cases}$$

Если F *в* (30) *является квазиоднородной, то* (30) *допускает группу растяжений* (31)*:*

$$\boxed{F(x,y'',y',y) = 0} \xrightarrow[\text{преобр.}]{} F(\lambda\bar{x},\lambda^\alpha\bar{y},\lambda^{\alpha-1}\bar{y'},\lambda^{\alpha-2}\bar{y''}) = \lambda^r\cdot F(\bar{x},\bar{y},\bar{y'},\bar{y''}) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$F(\bar{x},\bar{y},\bar{y'},\bar{y''}) = 0$$

$$\text{Замена: } \begin{cases} x = e^t \\ y = z(t)\cdot e^{2t} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{z'_t\cdot e^{\alpha t} + z\cdot\alpha\cdot e^{\alpha t}}{e^t} = e^{(\alpha-1)t}\cdot(z'_t + \alpha z)$$

$$\Downarrow$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(\alpha-1)\cdot e^{(\alpha-1)t}\cdot(z'_t+\alpha z) + e^{(\alpha-1)t}\cdot(z''_{tt}+\alpha z'_t)}{e^t} =$$

$$= e^{(\alpha-2)t}\cdot(z''_{tt} + (2\alpha-1)\cdot z'_t + \alpha\cdot(\alpha-1)z)$$

$$\Downarrow$$

$$F(e^t; z\cdot e^{\alpha t}; e^{(\alpha-1)t}\cdot(z'_t+\alpha z); e^{(\alpha-2)t}(z''_{tt} + (2\alpha-1)z'_t + \alpha\cdot(\alpha-1)z)) =$$

$= e^{rt}\cdot F(1;z;z'_t+\alpha z;z''_{tt}+(2\alpha-1)z'_t+\alpha\cdot(\alpha-1)z) = 0$ *- не содерж.* x*, т.е. свелось к случаю 2*

1.5 Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной

Утверждение 1.9. *Рассмотрим* $\boxed{F(x,y,y')=0}^{(32)}$ *, где* $F(x,y,y')$ *как функция трёх переменных является непрерывно дифференцируемой в области* $G \subset \mathbb{R}^3$
Решение уравнения $F(x,y,y')=0$ *будем представлять как кривую в параметрическом виде:*

$$\gamma: \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} t \in [t_1,t_2],\ \varphi(t),\psi(t) \in C^1_{[t_1,t_2]} \tag{33}$$

Кривая (33), *является интегральной кривой* (32) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow F\left(\varphi(t),\psi(t),\frac{\psi'_t}{\varphi'_t}\right)=0 \ \ \forall t \in [t_1,t_2] \tag{34}$$

Будем решать эквивалентную систему положив $p=\frac{dy}{dt}$*:*

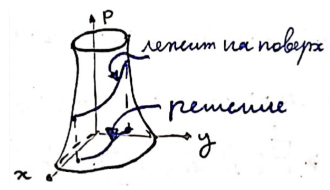
$$\begin{cases} F(x,y,p)=0 \\ dy=pdx \end{cases} \tag{35}$$

Утверждение 1.10. *Уравнение* (32) *эквивалентно системе* (35).

Доказательство. Пусть γ - интегр. кривая (32). Положим $p=\frac{\psi'}{\varphi'}=\frac{dy}{dx}$ - второе уравнение в системе (35) выполнено, а первое выполнено в силу подстановки в (34). Обратно, пусть $x(t)=\varphi(t),\ y(t)=\psi(t), p$ - решение (34). $\Rightarrow$ Из второго уравнения системы:
$p=\frac{\psi'_t}{\varphi'_t} \rightarrow$ Подставляем в первое уравнение системы и получаем само уравнение (34)

$\blacksquare$

Утверждение 1.11. *Рассмотрим метод решения* (32), *который называется методом введения параметра.*
Первое ур-ние в системе (35) *рассмотрим как задающее в* $\mathbb{R}^3_{(x,y,p)}$ *гладкую поверхность S, для которой параметрическое представление имеет вид:*



$$\begin{cases} x=\varphi(u,v) \\ y=\psi(u,v) \\ p=\chi(u,v) \end{cases} \Rightarrow F(\varphi(u,v);\psi(u,v);\chi(u,v)) \equiv 0$$

Потребуем, чтобы rank $\begin{pmatrix} \dfrac{\delta\varphi}{\delta u} & \dfrac{\delta\psi}{\delta u} & \dfrac{\delta\chi}{\delta u} \\ \dfrac{\delta\varphi}{\delta v} & \dfrac{\delta\psi}{\delta v} & \dfrac{\delta\chi}{\delta v} \end{pmatrix} = 2,\ \forall u,v \in G$ *т.е. S была простой гладкой пов.*

Тогда остаётся удовлетворить второму уравнению системы (35)*:*

$$\frac{\delta\psi}{\delta u}du+\frac{\delta\psi}{\delta v}dv=\chi\cdot\left(\frac{\delta\varphi}{\delta u}du+\frac{\delta\varphi}{\delta v}dv\right) \Rightarrow \left(\frac{\delta\psi}{\delta u}-\chi\frac{\delta\varphi}{\delta v}\right)du=\left(\chi\frac{\delta\varphi}{\delta v}-\frac{\delta\psi}{\delta v}\right)dv \tag{36}$$

Если $P(u,v) \neq 0\ \forall(u,v) \in G$*, то из* (36) *получаем Д.У.:* $\dfrac{du}{dv} = \dfrac{Q(u,v)}{P(u,v)}$

Его решение $u = u(v,c)$*, тогда* $\begin{cases} x = \varphi(u(v,c),v) = x(v,c) \\ y = \psi(u(v,c),v) = y(v,c) \end{cases}$ *- является параметрическим представлением решения* (32)

Если же существует связь между u *и* v*:* $u = f(v), P(f(v),v) = Q(f(v),v) = 0\ \forall v \in G$*, то* $u = f(v)$ *явл. решением* $\left(\chi\frac{\delta\varphi}{\delta v} - \frac{\delta\psi}{\delta v}\right)dv$*, а*

$$\begin{cases} x = x(v) \\ y = y(v) \end{cases} \text{ - явл. решением } (36)$$

2 Билет 2. Задача Коши

2.1 Принцип сжимающих отображений

Работаем в $E = \mathbb{R}^n$ - пространство точек с n координатами. E - аффинное пространство, а $\vec{E}$ – его присоединенное линейное пространство, состоящее из векторов, натянутых на точки E.

Определение 2.1. *Пусть L - это векторное пространство, и на нем задано отображение $\|\cdot\| : L \longrightarrow \mathbb{R}$ такое, что:*

1. $\forall x \in L \longmapsto \|x\| \geqslant 0$. *А также* $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
2. $\forall x \in L \;\&\; \forall \lambda \in \mathbb{R} \longmapsto \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3. $\forall x, y \in L \longmapsto \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *- неравенство треугольника.*

Тогда данное отображение называется нормой, а пространство L нормированным.

Пример 2.1. *Приведем пример норм. Пусть $a(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда норму можно определить, допустим, так:*

$$\|a\|_1 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}. \tag{37}$$

Или так:

$$\|a\|_2 = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j|. \tag{38}$$

И тогда можно ввести понятие эквивалентности норм.

Определение 2.2. *Пусть снова L - линейное пространство. Тогда нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на L называются эквивалентными, если $\exists C_1, C_2 > 0 :\ \forall x \in L \longmapsto C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1$.*

Как видно, для определенных выше двух норм это соотношение удовлетворяется.

Утверждение 2.1. *В конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.*

Рассмотрим множество функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$ для некоторых неравных $a, b \in \mathbb{R}$ и обозначим данное множество $C[a; b]$. Понятно, что $C[a; b]$ является линейным пространством. Тогда введем на нем норму.

Определение 2.3. *Нормой функции $f(x) \in C[a; b]$ будем называть число*

$$\|f(x)\| = \max_{x \in [a;b]} |f(x)|.$$

Определение 2.4. *Набор функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x) \in C[a; b]$ будем называть вектор-функцией и обозначать $f(x) = \vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))^T$.*

Определение 2.5. *Вектор-функция $f(x)$ называется непрерывной (дифференцируемой, непрерывно дифференцируемой и т.п.), если все ее компоненты непрерывны (дифференцируемы, непрерывно дифференцируемы и т.п.).*

Определение 2.6. *Модулем вектор-функции $f(x)$ назовем число*

$$|f(x)| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} f_j^2(x)}. \tag{39}$$

Норму вектор-функции можно определить как

$$\|f(x)\|_1 = \max_{x\in[a;b]} |f(x)|.$$

Или же как

$$\|f(x)\|_2 = \max_{j=1,\dots,n} \max_{x\in[a;b]} f_j(x).$$

Понятно, что эти две нормы эквивалентны.

Определение 2.7. *Пусть имеется функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, где $f_n(x) \in C[a;b]$ - линейное пространство функций с нормой (1 или 2 – неважно). Тогда говорят, что данная последовательность сходится к функции $f(x)$ по норме, если:*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0. \tag{40}$$

Аналогично все то же самое и точно так же определяется и для вектор-функций $f(x) = \vec{f}(x) \in C[a;b]^n$.

Определение 2.8. *Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется фундаментальной, если:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n \geqslant N \ \& \ \forall m \geqslant N \longmapsto \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon. \tag{41}$$

Определение 2.9. *Функциональное пространство L называется полным по [данной] норме, если любая фундаментальная функциональная последовательность данного пространства сходится по норме к функции из этого же пространства L.*

Теорема 2.1. *Функциональное пространство $C[a;b]$ с нормой $\|\cdot\|_1$ является полным.*

Доказательство. Возьмем произвольную функциональную последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ из нашего пространства непрерывных функции. Тогда из определения фундаментальности следует, что $\|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$.

Однако $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon \ \forall x \in [a;b]$.

А значит, последовательность $f_n(x)$ сходится к некоторой $f(x)$, причем равномерно на $[a;b]$ (числовая последовательность $\|f_n(x)\|$ мажорирует функциональную последовательность $f_n(x)$).

Так как $f_n(x) \in C[a;b]$ – непрерывны $\forall n \in \mathbb{N}$, и последовательность сходится равномерно на $[a;b]$, то предельная функция $f(x)$ также является непрерывной на $[a;b]$, а значит, $f(x) \in C[a;b]$.

Таким образом, последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f(x) \in C[a;b]$. В силу произвольности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ заключаем, что функциональное пространство $C[a;b]$ с нормой $\|\cdot\|_1$ является полным. ■

Определение 2.10. *Полное нормированное линейное пространство называется Банаховым. Обозначается B.*

Определение 2.11. *Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ называется сходящемся по норме, если последовательность его частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ является сходящейся по норме.*

Определение 2.12. *Пусть $\forall x \in M \subseteq B$ определен элемент $Ax \in B$. Тогда говорят, что на множестве B задан оператор A с областью определения M.*

Будем рассматривать уравнение $x = Ax$.

Определение 2.13. *Множество* $M \subseteq B$ *называется ограниченным, если* $\exists C > 0$ *такое, что* $\forall x \in M \longmapsto \|x\| \leqslant C$.

Определение 2.14. *Оператор* A *называется сжатием на* M*, если:*

1. $\forall x \in M \longmapsto Ax \in M$;
2. $\exists k \in (0;1): \ \forall x, y \in M \longmapsto \|Ax - Ay\| \leqslant k\|x - y\|$.

Теорема 2.2 (Принцип сжимающих отображений)**.** *Пусть множество* $M \subseteq B$ *является ограниченным и замкнутым, а оператор* A *является сжатием. Тогда решение уравнения* $x = Ax$ *существует и единственно.*

Доказательство. Будем использовать итерационный метод, согласно которому мы выбираем начальное x_0, а затем строим последовательность $x_n = Ax_{n-1}$. Тогда, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = Ax$, то $x = Ax$.

Пусть $x_n = S_n = x_0 + (x_1 - x_0) + \ldots + (x_n - x_{n-1})$. Докажем, что $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant 2Ck^n$ для некоторого $C > 0$, ограничивающего последовательность x_n. Сделаем это по индукции.

База индукции: $\|x_1 - x_0\| \leqslant \|x_1\| + \|x_0\| \leqslant 2C$.

Предположим, что $\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant 2Ck^{n-1}$. Тогда получаем, что $\|x_{n+1} - x_n\| = \|Ax_n - Ax_{n-1}\| \leqslant k\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant 2Ck^n$.

И получаем, что $x_0 + \sum\limits_{j=1}^{\infty}(x_j - x_{j-1}) \leqslant x_0 + \sum\limits_{j=1}^{\infty} 2Ck^{n-1} < \infty$.

А значит $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. А поскольку M замкнуто, то $x \in M$.

Теперь рассмотрим разность $\|Ax_n - Ax\| \leqslant k\|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Это означает, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = Ax$.

Учитывая, что $x_{n+1} = Ax_n$, то, перейдя к пределу с обеих частей равенства, мы получаем, что итерационный метод сходится к решению уравнения $x = Ax$. И таким образом, доказано существование решения. Теперь докажем его единственность.

Пойдем от противного: пусть x и y – два разных решения. Тогда $\|x - y\| = \|Ax - Ay\| \leqslant k\|x - y\|$. Учитывая, что $k \in (0;1)$, то данная ситуация возможна тогда и только тогда, когда $\|x - y\| = 0$. Следовательно, $x = y$, что противоречит тому, что это два разных решения. Итак, теорема доказана. ■

2.2 Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений

Определение 2.15. *Система вида*

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(t, \bar{x}) \\ \dot{x}^2 = f^2(t, \bar{x}) \\ \ldots \\ \dot{x}^n = f^n(t, \bar{x}) \end{cases} \tag{42}$$

называется нормальной системой дифференциальных уравнений n-ого порядка.

Определение 2.16. *Система*

$$\begin{cases} x^1(t_0) = x_0^1 \\ x^2(t_0) = x_0^2 \\ \ldots \\ x^n(t_0) = x_0^n \end{cases} \tag{43}$$

называется начальным условием

Утверждение 2.2. *Решить задачу Коши означает решить нормальную систему дифференциальных уравнений при заданном начальном условии*

Теорема 2.3 (Теорема Коши о существовании и единственности решения)**.** *Пусть* $\forall i, j = \overline{1, n}$ *функции* $f^i, \dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}$ *непрерывны в области* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$*, тогда,* $\forall (t_0, \overline{x_0}) \in \Omega\ \exists h > 0 : \forall t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ *решение задачи Коши существует и единственно.*

Лемма 2.1. *Если* $\bar{f}(t, \bar{x})$ *- непрерывны на* Ω*, то система уравнений*

$$\overline{x}(t) = \overline{x_0} + \int\limits_{t_0}^{t} \bar{f}(\tau, \overline{x}(\tau))d\tau \tag{44}$$

эквивалентна задаче Коши.

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ - решение (42) при условии (43), тогда

$$\dot{\varphi}^i = f^i(t, \varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t))$$

Проинтегрируем полученное равенство по отрезку $[t_0, t]$

$$\int\limits_{t_0}^{t} \dot{\varphi}^i(\tau)d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} f^i(\tau, \varphi^1(\tau), \ldots, \varphi^n(\tau))d\tau$$

$$\varphi^i(t) - \varphi^i(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} f^i(\tau, \bar{\varphi}(\tau))d\tau$$

$$\varphi^i(t) = x_0^i + \int\limits_{t_0}^{t} f^i(\tau, \bar{\varphi}(\tau))d\tau$$

Теперь пусть $\bar{\varphi}(t)$ - решение (44). Тогда

$$\varphi^i(t) \equiv x_0^i + \int\limits_{t_0}^{t} f^i(\tau, \bar{\varphi}(\tau))d\tau$$

Отсюда видно, что функция $\varphi^i(t)$ - дифференцируемы. Тогда

$$\begin{cases} \dot{\varphi}^i(t) = f^i(t, \bar{\varphi}(t)) \\ \varphi^i(t_0) = x_0^i \end{cases} \tag{45}$$

■

Следствие 2.3.1. *Из 2 части леммы следует, что решение задачи Коши непрерывно дифференцируемо.*

Введем оператор $A(\bar{x}) = \bar{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau))d\tau$. Тогда систему интегральных уравнений (44) можно записать в виде

$$\bar{x}(t) = A(\bar{x}) \tag{46}$$

Лемма 2.2.
$$\left\| \int\limits_{t_0}^{t} \bar{x}(\tau)d\tau \right\| \leq \left| \int\limits_{t_0}^{t} \|\bar{x}(\tau)\| d\tau \right|$$

Доказательство.
$$\left| \int\limits_{t_0}^{t} x^i(\tau)d\tau \right| \leq \left| \int\limits_{t_0}^{t} \left| x^i(\tau) \right| d\tau \right| \leq \left| \int\limits_{t_0}^{t} \|\bar{x}(\tau)\| d\tau \right| \tag{47}$$

Таким образом $max\{|\int\limits_{t_0}^{t} x^i(\tau)d\tau|\} = ||\int\limits_{t_0}^{t} \bar{x}(\tau)d\tau|| \leq |\int\limits_{t_0}^{t} \|\bar{x}(\tau)\|d\tau|$ ■

Лемма 2.3. *(Адамара) Пусть* $\bar{f}(\bar{x}), \dfrac{\partial f^i}{\partial x_j}$ *непрерывны в* $\Omega \subset \mathbb{R}$ *- замкнутой, ограниченной, выпуклой области. Тогда* $\forall i = \overline{1,n}, \bar{y} \in \Omega \hookrightarrow \|\bar{f}(\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x})\| \leq n^{3/2}K_1\|\overline{y - x}\|$*, где* $K_1 = max_{i,j=\overline{1,n}}\{max_{x\in\Omega}\left\{\left|\dfrac{\partial f^i}{\partial x_j}\right|\right\}\}$

Доказательство. $|\bar{f}| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(f^i)^2}$, $\|\bar{f}\|_C = max_{x\in\Omega}\{|\bar{f}(\bar{x})|\}$

Ω - компакт, поэтому непрерывность частных производных позволяет говорить о существовании K_1. Возьмем производные точки $\bar{x}$ и $\bar{y}$ и соединим их отрезком $\bar{x} + t(\bar{y} - \bar{x})$, где $t \in [0, 1]$. Рассмотрим значение компоненты f^i на отрезке:

$$f^i(\bar{x} + t(\bar{y} - \bar{x})) = f^i(t)$$

$f^i(t)$ - дифференцируема, тогда

$$|f^i(\bar{y}) - f^i(\bar{x})| = |f^i(1) - f^i(0)| = \left|\frac{df}{dt}(t^*) \cdot (1-0)\right| =$$
$$= \left|\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(t^*) \cdot (y^j - x^j)\right| \leq \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(t^*)\right| \cdot \left|(y^j - x^j)\right| \leq K_1\|\bar{y} - \bar{x}\| \cdot n$$

Теперь рассмотрим вектор-функцию

$$|\bar{f}(\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x})| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(f^k(\bar{y}) - f^k(\bar{x}))^2} \leq K_1 n^{3/2}\|\bar{y} - \bar{x}\|$$
$$\Rightarrow \|\bar{f}(\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x})\| \leq K_1 n^{3/2}\|\bar{y} - \bar{x}\|$$

■

Доказательство. (Основная теорема)

Докажем, что $A(\bar{x})$ из системы (46) является сжатием.

Рассмотрим $\Pi = \{\|\bar{x}(t) - \bar{x}_0(t)\| \leq b, |t - t_0| \leq a\} \subset \Omega$. Определим $K = \|\bar{f}\|_C = max_\Pi|\bar{f}|$. K_1 тоже определено в силу условий.

Рассмотрим $\Pi_h = \{\|\bar{x}(t) - \bar{x}_0(t)\| \leq b, |t - t_0| \leq h \leq a\}$

Банахово пространство B - множество функций $\bar{x}(t)$ непрерывных на отрезке $|t - t_0| \leq \leq h$. $M \subset B$ - множество функций $\|\bar{x}(t) - \bar{x}_0\| \leq b$. M ограничено, так как $\forall \bar{x}(t) \in M \hookrightarrow \|\bar{x}(t)\| = \|\bar{x}(t) - \bar{x}_0 + \bar{x}_0\| \leq b + \|\bar{x}_0\| = C$

Докажем, что M замкнуто. Пусть $\bar{x}_n(t), n = 1, 2, \dots$ - последовательность точек в M, такая что $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{x}_n(t) = \bar{x}(t)$. $\|\bar{x}(t)\| = \|\bar{x}(t) - \bar{x}_n + \bar{x}_n\| \leq \|\bar{x}(t) - \bar{x}_n\| + \|\bar{x}_n\| \leq \varepsilon + b \Rightarrow \bar{x}(t) \in M$

Подберем h так, чтобы $A : M \to M$. То есть $\|A(\bar{x}) - \bar{x}_0\| \leq b$.

$$\|A(\bar{x}) - \bar{x}_0\| = \| \int\limits_{t_0}^{t} \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau \| \leq | \int\limits_{t_0}^{t} \|\bar{f}\| d\tau | \leq Kh$$

Получаем условие $h \leq b/K$

Чтобы доказать, что A - сжатие, рассмотрим норму

$$\|A(\bar{y}) - A(\bar{x})\| = \| \int\limits_{t_0}^{t} (\bar{f}(\tau, \bar{y}(\tau)) - \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau))) d\tau \| \leq$$

$$\leq | \int\limits_{t_0}^{t} \|\bar{f}(\tau, \bar{y}) - \bar{f}(\tau, \bar{x})\| d\tau | \leq K_1 n^{3/2} \|\overline{y - x}\| \cdot | \int\limits_{t_0}^{t} d\tau | \leq K_1 h n^{3/2} \|\overline{y - x}\|$$

Откуда второе условие: $h < \dfrac{1}{n^{3/2} K_1}$

Тогда оператор A будет сжатием. Соответственно решение задачи Коши существует и единственно.

■

2.3 Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения n-го порядка в нормальном виде

Определение 2.17. *Уравнение вида*

$$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \tag{48}$$

называется уравнением n-го порядка в нормальной форме.

Определение 2.18. *Система*

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \tag{49}$$

называется начальным условием уравнения n-го порядка в нормальной форме.

Утверждение 2.3. *Решить задачу Коши означает найти такое решение (48), которое удовлетворяет условию (49)*

Теорема 2.4 (Теорема Коши о существовании и единственности решения)**.** *Если* $f, \dfrac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ *непрерывны в* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$*, тогда* $\forall (x_0, \bar{y}_0) \in \Omega \exists h > 0 : \forall x \in [x_0 + h, x_0 - h]$ *решение задачи Коши существует и единственно.*

Доказательство. Введем следующие функции: $y(x) = v_1(x), y'(x) = v_2(x), \ldots, y^{(n-1)}(x) = v_n(x)$. Таким образом получаем систему уравнений в нормальной форме

$$\begin{cases} \dfrac{dv_1}{dx} = v_2 \\ \ldots \\ \dfrac{dv_n}{dx} = f(x, \bar{v}) \end{cases} \tag{50}$$

А для нее решение существует и единственно. ■

2.4 Теоремы о продолжении решения для нормальной системы дифференциальных уравнений

Теоремы Коши носят существенно локальный характер. Решение и единственность задачи Коши будет существовать на отрезке Пеано. Теперь сделаем отход от единственности и докажем, что $\vec{\varphi}(t)$ и $\vec{\psi}(t)$ есть решение задачи Коши, то они будут совпадать на промежутке, где они оба определены (отход от локальности).

Теорема 2.5. *Пусть $\vec{\varphi}(t)$ решение $(1) \wedge (2)$ определенно на $[a, b]$, а $\vec{\psi}(t)$ решение $(1) \wedge (2)$ определенно на $[c, d]$. Тогда $\vec{\varphi}(t) \equiv \vec{\psi}(t)$ на $[r_1, r_2] = [a, b] \cap [c, d]$.*

Доказательство. От противного: $\exists t^* \in [r_1, r_2]$, где $\vec{\varphi}(t^*) \neq \vec{\psi}(t^*)$, тогда $t^* \neq t_0$ и предположим, что $t^* > t_0$. Рассмотрим множество N точек такое, что $t \in [r_1, r_2]$ и $\vec{\varphi}(t) = \vec{\psi}(t)$.
Покажем, что <u>множество замкнуто</u>:
Рассмотрим сходящуюся послед-сть $t_1 \ldots t_n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \bar{t}$. Нужно показать, что $\bar{t} \in \mathbb{N}$:
Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{\varphi}(t_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \vec{\psi}(t_n)$ (равны по выбору множества N). И из непрерывности выбранных функций получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{\varphi}(t_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \vec{\psi}(t_n) = \vec{\varphi}(\bar{t}) = \vec{\psi}(\bar{t}) \Rightarrow$ замкнутость.
Из замкнутости и ограниченности мн-ва $N \Rightarrow \exists \widetilde{t} = sup\ N, \widetilde{t} \in N$. Мы пришли к противоречию, а именно t^* по начальному предположению должна быть точной верхней гранью. ■

Определение 2.19. *$\vec{\varphi}(t)$ определена на $\langle a, b\rangle$ и решение $(1) \wedge (2)$, если $\exists \vec{\psi}(t)$ на $\langle a, b_1\rangle \supset \langle a, b\rangle$, и решение $(1) \wedge (2)$ и $\vec{\varphi}(t) \equiv \vec{\psi}(t)$ на $\langle a, b\rangle$, тогда $\vec{\varphi}(t)$ называется продолжаемым вправо, а $\vec{\psi}(t)$ продолжением решения $\vec{\varphi}(t)$ задачи Коши*

Определение 2.20. *Решение, которое нельзя продолжить ни вправо, ни влево называется непродолжаемым решением*

Примечание. *По сути данная теорема является усилением задачи Коши. Вместо отрезка Пеано мы получили, что решение задачи Коши может быть продолжено на промежуток, где они оба определены.*

Теорема 2.6. *Пусть имеется задача Коши $(1) \wedge (2)$ и $\vec{f}(t, \vec{x}), \dfrac{\partial f^i}{\partial x_j}, i, j = \overline{1, n}$ непрерывны в Ω с $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда $\forall (t_0, \vec{x_0}) \in \Omega\ \exists!$ непродолжаемое решение задачи $(1) \wedge (2)$.*

Доказательство. Рассмотрим множество решений задач Коши $(1) \wedge (2)$. Каждое решение задачи определенно на промежутке $\langle R_1, R_2\rangle$, тогда пусть $T_1 = inf\ R_1, T_2 = sup\ R_2$. Построим решение задачи $(1) \wedge (2)$ на (T_1, T_2):
Выберем $t^* > t_0$, тогда $\exists\ \vec{\psi}(t)$, чей промежуток содержит t^* (в силу выбора промкежутка (T_1, T_2)). Положим $\vec{\varphi}(t^*) \overset{def}{=} \vec{\psi}(t^*)$. Покажем, что так можем сделать, что значение $\vec{\varphi}(t^*)$ не

зависит от выбора $\vec{\psi}(t)$:
Пусть $\vec{\hat{\psi}}(t)$ решение задачи Коши (1) $\wedge$ (2) содержащее t^*, тогда $\vec{\hat{\psi}}(t^*) = \vec{\psi}(t^*)$ из теоремы сущ. и единст. решения задачи Коши (будут совпадать на промежутке, где они определены и при этом t^* принадлежит этому промежутку).
Построение вниз проводится аналогично. И так, $\vec{\varphi}(t)$ решение (1) $\wedge$ (2) на $T_1 < t < T_2$. Это решение является продолжением любого из множества решений задачи Коши. Допустим, $\vec{\tilde{\varphi}}(t)$ решение (1) $\wedge$ (2) на $r_1 \leq t \leq r_2$ и $T_1 \leq r_1 \leq r_2 \leq T_2 \Rightarrow \vec{\tilde{\varphi}}(t) = \vec{\varphi}(t)$ (продолжение решения по доказанной выше теоремы).
Покажем, что $\vec{\psi}(t)$ является непродолжаемым решением (1) $\wedge$ (2): Допустим, что имеется ещё одно решение $\vec{\chi}(t)$, определённое на $(\gamma_1; \gamma_2)$ и оно является продолжением $\vec{\varphi}(t)$. Тогда, либо $\gamma_1 < T_1$, либо $\gamma_2 > T_2$, что невозможно, т.к. $T_1 = inf\ R_1, T_2 = sup\ R_2$ по построению.
Покажем, что непродолжаемое решение $\vec{\varphi}(t)$ является единственным:
От противного, пусть $\exists\ \vec{\varphi}(t)$ непродолжаемое решение на (T_1, T_2) и $\vec{\psi}(t)$ на $(\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2)$. Для определённости $\widetilde{T}_1 < T_1$, тогда рассмотрим такое решение $\vec{\chi}(t) = \left[\begin{array}{l} \vec{\psi}(t) \text{ на } (\widetilde{T}_1, T_1), \\ \vec{\varphi}(t) \text{ на } (T_1, T_2); \end{array}\right. \Rightarrow \vec{\varphi}(t)$ – продолжение $\vec{\psi}(t)$, противоречие. Аналогично строя остальные решения получаем, что $\vec{\varphi}(t) = \vec{\psi}(t)$ ■

Примечание. *В теореме не сказано, как определить T_1 и T_2. Если усилить условия теоремы, а именно Ω есть ограниченная область, то любое непродолжаемое решение выходит на границу этой области.*
Из этих утверждений следует, что если под интегральной кривой понимать график непродолжаемого решения, то через каждую точку $(x_0, y_0) \in \Omega$ проходит только одна кривая.

2.5 Непрерывная зависимость от параметров решения задачи Коши для нормальной системы ДУ

Рассматриваем уравнение
$$y = f(x, y, \mu) \tag{51}$$
с задачей Коши $y(x_0, \mu) = y_0$, где μ – параметр.

Теорема 2.7. *Пусть $\mathcal{G}$ – область в пр-ве (z, y, μ). Если ф-ции $f(x, y, \mu)$, $\dfrac{\partial f(x, y, \mu)}{\partial y}$ непрерывны в области по совокупности переменных и точка $(x_0, y_0, \mu_0) \in \mathcal{G}$, то решение задачи Коши (51 $y(x, \mu)$) непрерывно по совокупности переменных $(x; \mu)$ в некоторой области $|x - x_0| \leq h, |\mu - \mu_0| \leq \delta$*

Доказательство. Аналогично доказательство основной теоремы(**!!!!!Здесь можно вставить ссылку на основную теорему!!!!!!**) сведем задачу Коши к эквивалентной её интегральному уравнению
$$y(x, \mu) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau, \mu)) d\tau, \tag{52}$$
или в операторной форме:
$$y(x, \mu) = A(y(x, \mu)), \tag{53}$$
где $A(y(x, \mu)) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau, \mu)) d\tau$.
Выберем параллелепипед $\prod = \{|x - x_0| \leq a,\ |\mu - \mu_0| \leq \delta, |y - y_0| \leq b\}$, целиком лежащей

в области $\mathcal{G}$. В силу условий теоремы $\exists\ K = \max\limits_{\Pi} |f(x, y, \mu)|$, $C = \max\limits_{\Pi} \left|\dfrac{\partial f(x, y, \mu)}{\partial y}\right|$.
Применим к (53) принцим сжатых отображений. В качестве B возьмём пр-во ф-ций $y(x, \mu)$ непрерывных в прямоугольнике $\{|x - x_0| \le h,\ |\mu - \mu_0| \le \delta\}$, где $h > 0$ будет выбрано с нормой $||y(x, \mu)|| = \max\limits_{|x-x_0|\le h} |y(\mu, x)|$. В качестве $M \subset B$ возьмём множество функций из B таких, что $||y(x, \mu) - y_0||_C \le b$.

1) Нужно, чтобы $A(y(x, \mu)) \in M$, если $y(x, \mu) \in M$. $||A(y) - y_0|| = \left|\left|\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau, \mu))d\tau\right|\right| \le \left|\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau, \mu))d\tau\right| \le K \cdot h\ \Rightarrow$ Необходимо, чтобы $K \cdot h < b\ \Rightarrow h = min\ \{a, \frac{b}{K}\}$.

2) Нужно, чтобы A_x было сжатием, т. е. $||A\varphi - A\psi|| \le k \cdot ||\varphi - \psi||$, $0 < k < 1$.

$$||A\varphi - A\psi|| = \left|\left|\int_{x_0}^{x} \Big(f(\tau, \varphi(\tau, \mu)) - f(\tau, \psi(\tau, \mu))\Big) \cdot d\tau\right|\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} ||f(\tau, \varphi(\tau, \mu)) - f(\tau, \psi(\tau, \mu))|| \cdot d\tau\right| \le$$

$\{$По лемме Адамара$\} \le C \cdot h \cdot 1 \cdot ||\varphi - \psi||\ \Rightarrow$ Необходимо, чтобы $C \cdot h < 1\ \Rightarrow h < \dfrac{1}{C}$.

Т. е. при $\begin{cases} h \le min\ \ \{a, \frac{b}{K} r\}, \\ h < \dfrac{1}{C}. \end{cases}$ оператор A являетсяс сжатием и обладает единственным решением операторного уравнения $y(x, \mu) = A(y(x, \mu))$, а значит и задача Коши (51). Причём решение $y(x, \mu)$ непрерывно по совокупности переменных. ■

2.6 Дифференцируемость решения по параметру.

Пусть $y(x, \mu)$ является решением задачи Коши (51). Введем ф-цию $z(x, \mu)$: $z(x, \mu) = \dfrac{\partial y(x, \mu)}{\partial \mu}$

Теорема 2.8. *Если $f(x, y, \mu)$ как функция трёх переменных в области $\mathcal{G}$ пр-ва (x, y, μ) p раз непрерывно дифференцируема по (y, μ) и $p - 1$ раз непрерывно дифференцируема по x, тогда решение задачи Коши (51) $y(x, \mu)$ является p раз непрерывно дифференцируема по совокупности (x, μ).*

Доказательство. В 15 лекции от 10.12.20 года лектор сказал, что доказывать не будет . Запись текущего года на ютубе отсутствует. В Федорюке проводится доказательство для $p = 1$ (см следствие). ■

Следствие 2.8.1. $\dfrac{\partial}{\partial \mu}\Big(\dfrac{dy}{dx}\Big) = \dfrac{\partial}{\partial \mu}\Big(f(x, y(x, \mu), \mu)\Big) = \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial \mu} + \dfrac{\partial f}{\partial \mu}$
с задачей Коши: $\dfrac{\partial z}{\partial \mu}(x_0) = \dfrac{\partial y_0}{\partial \mu}. \Rightarrow \dfrac{d}{dx}\Big(\dfrac{\partial y}{\partial \mu}\Big) = \boxed{z'_x = \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot z + \dfrac{\partial f}{\partial \mu}}$ *− уравнение в вариациях для* (51).

Примечание. *Уравнение в вариациях всегда линейное.*

2.7 Задача Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Особое решение

Рассматриваем уравнение

$$F(x, y, y') = 0, \tag{54}$$

где $F(x, y, y')$ как функция трёх переменных является непрерывно дифференцируемой функцией в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$.

Особое решение $\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$ Дискр. крив.

Теорема 2.9. *Пусть $F \in C^1$ в $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ в точке $M(x_0, y_0, y_0') \in \mathcal{D}$ выполнено $F(x_0, y_0, y_0') = 0$ и $\dfrac{\partial F(x_0, y_0, y_0')}{\partial y'} \neq 0$. Тогда $\exists h > 0 \ : \ \forall x \in [x_0 - h; x_0 + h]$ существует и единственно решение (54), удовлетворяющая условиям*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'. \tag{55}$$

Доказательство. Из условий теоремы о неявной функции существует окрестность U точки (x_0, y_0), в которой существует $f(x, y) \in C^1_U$ такая, что

$$y' = f(x, y). \tag{56}$$

При этом

$$F(x, y, f(x, y)) \equiv 0,\ f(x_0, y_0) = y_0'. \tag{57}$$

Согласно основной теореме, существует отрезок Пеано, принадлжащий проекции U на ось абсцисс, на котором существует и единственно решение (56), удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

Пусть это решение есть $y = \varphi(x)$, $y_0 = \varphi(x_0)$. Тогда $y' = \varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$, и из (57) следует, что $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0$, $\varphi'(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0)) = y_0' \Rightarrow y = \varphi(x)$ – решение задачи (54) $\wedge$ (55) ■

Примечание. *Второе условие в (55) возникает из-за неоднозначности разрешения $F(x, y, y') = 0$, относительно y' в точке $\dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0$. Так, в ДУ $(y')^2 = 4x^2$ $\forall (x, y) : y' = \pm 2x$. Второе условие (55) определяет одно из условий (фактически выбор ДУ).*

На плоскости $(x; y)$ рассмотрим кривую γ, определяемую системой уравнений, каждое из которых определяет поверхность.

$$\begin{cases} F(x, y, y') &= 0, \\ \dfrac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} &= 0. \end{cases} \tag{58}$$

Определение 2.21. *Кривая (58) называется дискриминантной кривой.*

Примечание. *По опредлению дискриминантной кривой, в каждой точке нарушается единственность решения (54). В приведённом выше примере дискриминантная кривая есть $x = 0$ и решение задачи $y(0) = C$, $y' = 0$ будет иметь четыре решения:*

$$y = x^2 + C,\ y = -x^2 + C,\ y = \begin{bmatrix} x^2 + C,\ x \leq 0 \\ -x^2 + C, x > 0 \end{bmatrix} \ y = \begin{bmatrix} -x^2 + C,\ x \leq 0, \\ x^2 + C, x > 0. \end{bmatrix}$$

Определение 2.22. *Решение ДУ называется особым, если в каждой ему принадлежащей точке его касается другое решение ДУ, отличное от него в любой достаточно малой окрестности этой точки.*

Примечание. *Т. е. особым решением являются ветви дискриминантной кривой, которые являются решением этого уравнения.*

3 Билет 3. Линейный дифференциальные уравнения и линейныесистемы диффуренциальных уравнений с постоянными коэффициентами

3.1 Вводная часть

3.1.1 Понятие кольца. Рассмотрение понятия многочленов

Определение 3.1. *Кольцом K называют множество, на котором определены две операции: сложение и умножение, сопоставляющее кпорядоченным парам элементов их "сумму "произведение являющихся элементами этого же множества.*

Действия $+$ и $\cdot$ удовлетворяют условиям:(первые 6 для любого кольца):

1. $(a+b)+c = a+(b+c) \quad \forall a,b,c \in K$
2. $a+b = b+a \quad \forall a,b \in K$
3. $\exists 0 \in K: \quad a+0 = a \quad \forall a \in K$
4. $\forall\ a\ \in\ K\ \exists\ -a\ \in\ K : a+(-a) = 0\ \forall a\ \in\ K$
5. $(a+b)\cdot c = ac+bc \quad \forall a,b,c \in K$
6. $c\cdot(a+b) = ca+cb \quad \forall a,b,c \in K$
7. $(ab)c = a(bc) \quad \forall a,b,c \in K$
8. $ab = ba \quad \forall a,b \in K$
9. $\exists 1 \in K : a\cdot 1 = 1\cdot a = a \quad \forall a \in K$
10. $\exists a^{-1} \in K : a^{-1}a = aa^{-1} = 1 \quad \forall a \in K$

Утверждение 3.1. *Если $a+x = a+y$, то $x = y$*

Доказательство.

$(-a)+(a+x) = (-a)+(a+y) \Rightarrow \big((-a)+a\big)+x = \big((-a)+a\big)+y = 0+x = x = x+y = y$

Отсюда следует единственность нуля и противоположного элемента:

$$(-a) \neq (-a)'$$

$$0 = a+(-a) = a+(-a)' \Rightarrow (-a) = (-a)'$$

■

Утверждение 3.2. $a\cdot 0 = 0\cdot a = 0 \quad \forall a$

Доказательство. $a\cdot 0+0 = a\cdot 0 = a(0+0) \Rightarrow a\cdot 0 = 0$; аналогично $0+0\cdot a = 0\cdot a = (0+0)\cdot a = 0\cdot a+0\cdot a \Rightarrow 0\cdot a = 0$ ■

Утверждение 3.3. *Единица единственна*

Доказательство. Пусть $1 \neq 1' : 1 = 1\cdot 1' = 1'\cdot 1 = 1'$ ■

- Кольцо называется ассоциативным, если выполнено условие 7; коммутативным, если выполненно 8. Если выполнено условие 9, то говорят о кольце с единицей.

- Ассоциативное кольцо называется областно целостным, если из $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \bigvee b = 0$

- Полем называется коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, в котором каждый отличный от нуля элемент имеет обратный.

Утверждение 3.4. *Любое поле является областно целостным*

Доказательство. $ab = 0, \quad a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} \cdot (ab) = a^{-1} \cdot 0 = 0 = (a^{-1}a) \cdot b = 1 \cdot b = b \Rightarrow b = 0$ ■

3.1.2 Многочлен

Пусть A – коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Одночленом от x с коэффициентом их A называется выражение $ax^m, \; a \in A, \; m \in \mathbf{N}$. По определению положим, что $ax^0 = 0$. Выражение ax^m будем рассматривать как символ, для которого выпоняется по определению:

$$ax^m + bx^m = (a+b)x^m$$

$$ax^m \cdot ax^n = ax^{m+n}$$

Выражение, состоящее из нескольких одночленов, соединенных знаком + назовем многочленом от x с коэффициентом из A. Без нарушения общности, в силу коммутативности сложения запишем в каноническом виде: $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$

1. Многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ и $Q_m(x) = b_0 + b_1x \dots + b_mx^m$ считаем равными в том и только в том случае, если $n = m$ и $a_k = b_k, \quad k = \overline{1,n}$

2. Суммой двух многочленов $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ называется многочлен, получившейся посредством объединения одночленов соответствующих слагаемых:

   $P(n) + Q_m(x) = (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x^1 + \dots + b_mx^m) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \dots + c_sx^s, \quad x = ma$

   $c_s = a_s + b_s$,$a_s = 0$, если $s > n$ и $b_s = 0$, если $s > m$

   Так определенное сложение многочленов коммутативно и ассоциативно.

   Имеется нулевой элемент $0 = 0 \cdot x + \dots + 0 \cdot x^n$, а также противоположный $\big(-P_n(x)\big) = (-a_0) + (-a_1)x + + \dots + (-a^n)x^n$

3. Произведением двух многочленов называют многочлен, составленный их произведения всех членов первого сомножителя на все члены второго.

$$P_n(x) \cdot Q_m(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots + \Big(\sum_{j=k+l} a_kb_l\Big)x^j + \dots + a_nb_mx^{n+m}$$

- Покажем, что так определенное умножение будет коммутативно и ассоциативно:

$$P_n(x) \cdot Q_m(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots + \Big(\sum_{j=k+l} a_kb_l\Big)x^j + \dots + a_nb_mx^{n+m}$$

   В сумме $\sum\limits_{j=k+l} a_kb_l$ заменим $k \leftrightarrow l \Rightarrow \sum\limits_{j=k+l} b_ka_l = \sum\limits_{j=k+l} b_la_k = \sum\limits_{j=k+l} a_lb_k \underset{1)}{\Rightarrow} P_n(x) \cdot Q_m(x) = Q_m(x) \cdot P_n(x) \Rightarrow$ коммутативно.

Пусть $R_s(x) = c_0+c_1x+\dots+c_sx^{\Rightarrow}(P_n(x)\cdot Q_m(x))\cdot R_s(x) = \big((a-)b_0)c_0\big)+\Big(\sum\limits_{\gamma=j+\sigma}\Big(\sum\limits_{j=k+l} a_kb_l\Big)c_\sigma\Big)x^\gamma+$ $+(a_nb_m)c_Sx^{n+m+s}),\quad j=1,\dots,n+m+s-1$. Так как $\sum\limits_{\gamma=j+\sigma}\Big(\sum\limits_{j=k+l} a_kb_l\Big)c_\sigma\Big) = \sum\limits_{\gamma=k+l+\sigma} a_k(b_lc_\sigma)$.

Пусть $l' = l+\sigma \Rightarrow \sum\limits_{\gamma=k+l+\sigma} a_k(b_lc_\sigma) = \sum\limits_{\gamma=k+l'} a_k\Big(\sum\limits_{l'=l+\sigma} b_lc_\sigma\Big) \underset{1)}{\Rightarrow} (P_n(x)\cdot Q_m(x))R_s(x) =$ $P_n(x)\cdot(Q_m(x)\cdot R_s(x))) -$ ассоциативно.

- Дистрибутивность аналогично (везде используются свойства одночленов)

  Таким образом так построенное множество многочленов от x над A будетт ассоциативным и коммутативным кольцом $A(x)$. Роль единицы в $A(x)$ играет единица их A.

  При построении кольца многочленов вмпесто x полоожим $p = \frac{d}{dx} -$ оператор дифференцирования, который действует на множестве бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций. $p\cdot f(x) = p(f(x)) = \frac{df}{dx} = f',\ p^2(f) = f'',\dots,p^n n(x) = f^{(n)}$; Справедлива формула $p^s\cdot p^m(f) = p^s\cdot(p^m(f)) = p^s\cdot(f^{(m)}) = f^{(m+s)} = p^{m+s}(f)$

  По определению, множество бесконечно дифференцируемых еомплекснозначных функций $\varPhi$ является кольцом, содержащим поле $\mathbb{C}$. В качестве элементов кольца A будем брать числа из $\mathbb{C}$. Роль операторного одночлена в таком случае будет играть $ap^m,\ a\in\mathbb{C};\ \ ap^m = p^m a$, так как $ap^m(f) = af^{(m)} = f^{(m)}\cdot a = p^m(f)\cdot a$; По определению положим $ap^0 = a$, что корректно, так как $ap^0 f = ap^0(f) = af = a\cdot f = a(f)$. Приведение подобных слагаемых для одночленов определим как $ap^m + bp^m = (a+b)p^m$, поскольку $(ap^{(m)})(f) + bp^{(m)})(f) = af^{(m)} + b^{(m)} = (a+b)f^{(m)} = ((a+b)p^m)(f)$

  Аналогично вводим выражение, состоящее из нескольких операторных одночленов, соединенных знаком $+$, называемое операторным многочленом от p с коэффициентом из $\mathbb{C}$. Из свойств дифференцирования следует, что в общем виде можно записать $L_n(p) = a_0 + a_1p + \dots + a_np^n$

  Абсолютно аналогично доказываем, что замена x на p дает множество операторных многочленов от p, которое будет кольцом из $\mathbb{C}$

- Пусть $x\in\mathbb{C}$. Значение многочлена $P_n(x)$ на $\mathbb{C}$ определим как число $P_n(x) = a_0 + a_1z + \dots + a_n^{zn}\in\mathbb{C}$.

  Понятие значения иногочлена можно обобщить на случай, когда B является ассоциативным кольцом, содержащим кольцо A, в случае, когда элементы A коммутируют с элементами из B.

  В таком случае можно опредеоить степень элемента кольца B. Пусть $a\in B,\ \ a^1 = a,\ a^2 = a\cdot a,\dots,a^n = a^{n-1}\cdot a$

  Теорема 3.1. $\forall k\in\mathbb{N},\forall m\in\mathbb{N}\to a^k\cdot a^m = a^k + m$

- Значение операторного многочлена $L_n(p)$ определим на коммутативном и ассоциативном кольце $\varPhi -$ бесконечно дифференцируемой комплекснозначной функцией от $x\in\mathbf{R}:\ \ f(x)$

$$L_n(F) = L_n(p)(f) = a_0f + a_1f' + \dots + a_nf^{(n)}\in\varPhi$$

- Если $F(p) = L_n(p) + M_m(p)$ определим сумму на множемтве дифф. операторов:

  $F(p) = (a_0+b_0)f+(a_1+b_1)f'+\dots+c_sf = L_n(p)(f)+M_m(p)(f) \Rightarrow (L_n(p)+M_m(p))(f) = (M_m(p)+N_m$

  коммутативно, ассоциативность аналогично/.

- $(L_n(p)M_m(p))(f) = (a_0b_0p^0 + (a_0b_1 + a_1b_0)p + \dots + (\sum\limits_{j=k+l} a_kb_l)p^j + \dots + a_nb_mp^{m+n})(f) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)f' + \dots + (\sum\limits_{j=k+l} a_kb_l)f^{(j)} + \dots + a_nb_mf^{(n+m)} = (a_0p^0 + a_1p + \dots + a_np^n) \cdot (b_0f + b_1f' + \dots + b_mf^{(m)}) = = L_n(p) \cdot (M_m(f)) -$ опредеоление действия произведения операторов на множестве Φ. Так как $a_0b_0f + + (a_0b_1 + a_1b_0)f' + \dots + (\sum\limits_{j=k+l} a_kb_l)f^{(j)} + \dots + a_nb_mf^{(m+n)} = M_m(p) \cdot (a_0f + a_1f' + \dots a_nf^{(n)}) \Rightarrow (L_n(p) \cdot M_m(p)) = = (M_m(p) \cdot L_n(p)) -$ коммутативность.

- Покажем ассоциативность и дистрибутивность

$$L_n(p) \cdot M_m(p)K_s(p)(f) = (L_n(p) \cdot M_m(p))(K_s(p)(f)) = L_n(p)(M_m(p)(K_s(p)(f))) = L_n(p)(Q_m(p)R_s(p) \tag{59}$$

ассоциативность.

$$L_n(p) + M_m(p)K_s(p)(f) = L_n(p)(K_s(p)(f)) + M_m(p)(K_s(p)(f)) = (L_n(p)K_s(p))(f) + ()M_m(p)K_s(p)(f$$

дистрибутивность $\cdot$ и $+$.

Таким образом множество значений операторных многочленов является кольцом, которое содержится в Φ

- Если для $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ из $A(x)$ $\exists R_s(x) \in A(x): \; P_n(x) = Q_m(x) \cdot R_s(x)$, то говорят, что $P_n(x)$ делится на $Q_m(x)$.

Теорема 3.2.

$P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \in A(x), c \in A \Rightarrow \exists! Q_m(x), r \in \mathbb{C} : P_n(x) = (x-c)Q_m(x) + r$

Теорема 3.3. *(Безу) $P_n(x)$ делится на $x - c \Leftrightarrow P_n(c) = 0$*

Теорема 3.4. *Если кольцо A является областью целостности, то число корней $P_n(x)$ не превосходит n*

Теорема 3.5. *Основная теорема алгебры*

Любой многочлен $P_n(x)$ над $\mathbb{C}$ имеет хотя бы один корень

Утверждение 3.5. *Из 3 и 5теоремы*

$$\forall P_n(x) \to P_n(x) = a_n(x - c_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (x - c_k)^{l_k} \tag{60}$$

- Взаимооднозначное соответствие φ кольца K на кольцо K' называется изморфизмом, если $\forall a \in K$ и $\forall b \in K' \to$

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \qquad \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \tag{61}$$

Из (61) следуетЮ что образом нуля кольца K будет еуль K: $\varphi(a) = a' \in K'$ и $\varphi(0) = c', \; \varphi(a) = a' = \varphi(a + o) = \; = \varphi(a) + \varphi(0) = a' + c' \Rightarrow c' = 0$

Если кольцо K имеет единицу, то $\varphi(1)$,будет еденицей кольца K': $\varphi(a) = a' = \varphi(1 \cdot a) = \varphi(1) \cdot \varphi(a) = \; = \varphi(1)a' \Rightarrow \varphi(1) -$ еденица K'

- Обратное отображение φ^{-1} кольца K' на K существует и будет изоморфно.

  Рассмотрим отображение φ, которое множеству значений $P_n(x)$ над $\mathbb{C}$ ставит в соответствие множество значений $L_n(p)$ на множестве бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций Φ по принципу:

  $$\varphi(P_m(z)) = \varphi(a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 z^0) = L_n(p)(f) = a_n f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \dots + a_0 f;$$

  Покажем что отображение является изоморфизмом.

  Отображение взаимооднозначно по построению.

  $$\varphi(P_n(z)+Q_m(z)) = \varphi(a_0+a_1z+\dots+a_nz^n+b_0+b_1z+\dots+b_mz^m) = \varphi(a_0+b_0+(a_1+b_1)z+\dots+(a_s+b_s)z^s)$$

  $$= (a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)p + \dots + (a_s + b_s)p^s)(f) = L_n(p) + L_m(p)(f)$$

  $$\varphi(P_n(z)\cdot Q_m(z)) = \varphi(a_0b_0+\sum_{j=k+l} a_kb_lz^j+a_nb_mz^{m+n}) = (a_0b_0+\sum_{j=k+l} a_kb_lp^j+a_nb_mp^{m+n}) = L_n(p)\cdot Q_m(p)$$

  Т.о. φ − изоморфизм. Тогда из (61):

  $$\varphi(P_n(x)) = \varphi(a_n(z-c_1)^{l_1}\cdot \dots \cdot (z-c_k)^{l_k}) = L_n(p)(f) = a_n\cdot(p-c_1)^{l_1}\cdot\dots\cdot(p-c_k)^{l_k}(f)$$

  В итоге $L_n(p) = a_n\cdot(p-c_1)^{l_1}\cdot\dots\cdot(p-c_k)^{l_k}$, где $c_1,\dots,c_k$ − корни$P_n(z)$

3.2 Линейные уравнения с потоянными коэффициентами

Рассмотрим ДУ вида: $a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0$, $a_n \neq 0$, где $a_i = const$ $\forall i = \overline{1,n}$. Через введенный ранее дифференциальный оператор $L_n(p) = a_np^n + \dots + a_0p^0$ уравнение записывается в виде

$$L_n(p)(y(x)) = 0 \tag{2.1}$$

Было доказано, что $L_n(p)$ является изоиорфизмом характеристического многочлена (2.1): $P_n(\lambda) = a_n\lambda^n + \dots + a_0 = a_n(\lambda-\lambda_1)^{l1}\cdot\dots\cdot(\lambda-\lambda_k)^{l_k}$ и поэтому для $L_n(p)$ справедливо разложение

$$L_n(p) = a_n(p-\lambda_1)^{l1}\cdot\dots\cdot(p-\lambda_k)^{l_k},\quad p = \frac{d}{dx} \tag{2.2}$$

Задача: найти ФСР (2.1). Из записи $L_n(p)$ ясно, что решением(2.1) будут функции из Φ, котрые являются корнями $L_n(p)$

Лемма 3.1. *Для любой n раз дифференцируемой на промежутке функции $f(x)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ выполняется "формула сдвига"*

$$L_n(p)(e^{\lambda x}f) = e^{\lambda x}\cdot L_n(p+\lambda)(f) \tag{2.3}$$

Доказательство. Докажем по индукции. База $n = 1$:

$$L_1(p)(e^{\lambda x}f) = (a_1p^1+a_0)(e^{\lambda x}f) = e^{\lambda x}(a_0f+a_1(\lambda f+f')) = e^{\lambda x}(a_1(p+\lambda)+a_0)(f) = e^{\lambda x}L_1(p+\lambda)(f)$$

Пусть (2.3) справедлива для $k = n-1$, то есть $L_{n-1}(p)(e^{\lambda x}f) = e^{\lambda x}L_{n-1}(p+\lambda)(f)$

Обозначим $L_n(p) = p-\lambda_1$, тогда по формуле (2.2) :

$$L_n(p) = a_n(p-\lambda_1)\cdot(p-\lambda_1)^{l_1-1}\cdot\dots\cdot(p-\lambda_m)^{l_m}\cdot\dots\cdot(p-\lambda_k)^{l_k} = L_1(p)\cdot L_{n-1}(p) = L_{n-1}(p)\cdot L_1(p)$$

Тогда $L_n(p)(e^{\lambda x}f) = L_{n-1}(p)\cdot L_1(p)(e^{\lambda x}f(x)) = L_{n-1}(p)(L_1(p)(e^{\lambda x}f)) \underset{\text{база}}{=} L_{n-1}(p)(e^{\lambda x}\cdot(p+\lambda)(f))$

Обозначим через $g(x) = L_1(p+\lambda)(f(x))$, имеем:

$$L_n(p)(e^{\lambda x}f) = L_{n-1}(p)(e^{\lambda x}g(x)) \underset{\text{индукция}}{=} e^{\lambda x}L-n-1(p+\lambda)(g) = e^{\lambda x}L_{n-1}(p+\lambda)(L_1(p+\lambda)(f)) = e^{\lambda x}(L_{n-1}(p$$

■

Теорема 3.6. *Если λ_m является корнем $L_n(\lambda)$ кратности l_m, то функции $e^{\lambda_m x}, xe^{\lambda_m x}, \ldots, x^{l_m-1}e^{\lambda_m x}$ являюься решениями* (2.2)

Доказательство. Из коммутативности и ассоциативности кольца операторных многочленов и формулы (2.3): $L_n(p) = a_n(p-\lambda_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (p-\lambda_m)^{l_m} \cdot \ldots \cdot (p-\lambda_k)^{l_k} = L_{n-l_m}(p)(p-\lambda_m)^{l_m}$

Воспользуемся формулой сдвига для $x^s e^{\lambda_m x}$:

$$L_n(p)(x^s e^{\lambda_m x}) = e^{\lambda x} \cdot L_{n-l_m}(p+\lambda_m) \cdot p^{l_m}(x^s) = e^{\lambda_m x} \cdot L_{n-l_m}(p+\lambda_m)(x^s)^{(l_m)} = \begin{cases} 0, \ \forall s \leqslant l_{m-1} \\ e^{\lambda_m x} \cdot P_{n-l_m}(x), s \geqslant l_m \end{cases}$$

где P_{n-l_m} многочлен степени не ниже $n - l_m$

Таким образом $x^s e_m^\lambda x, \quad s = \overline{q, l_{m-1}}$ являются корнями $L{-}n(p)$, а значит и решениями(2.1) ■

Из доказанной теоремы следует:

$$\left\{ \{e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{l_1-1}e^{\lambda_1 x}\}, \ldots, \{e^{\lambda_m x}, \ldots, x^{l_m-1}e^{\lambda_m x}\}, \ldots, \{e^{\lambda_k x}, \ldots, x^{l_k-q}e^{\lambda_k x}\} \right\} \tag{2.4}$$

будут решениями (2.2). Всего таких функций n штук. Докажем линейную независимость систем функций (2.4)

Лемма 3.2. *Система $q, x, \ldots, x^m$ линейно независима.*

Доказательство. Рассмотрим линейную комбинацию функций $C_0 + C_1 x + \cdots + C_n x^n = 0$

От противного: пусть $\exists C_0, \ldots, C_n : \quad \sum\limits_{i=0}^{n} C_i^2 \neq 0 : C_0 + C_1 x + \cdots + C_n x^n = 0 \quad \forall x$

Так как у многочлена степени n не более чем n нулей, то получаем противоречие ■

Теорема 3.7. *Система функций $P_{n1}(x)e^{\lambda_1 x}, \ldots, P_{ns}(x)e^{\lambda_s x}$, где $P_{ni}(x)$ является многочленом степени n_i, а все $\lambda_i \in \mathbb{C}$ разные, является ЛНЗ.*

Доказательство. Выражение $P_n(x)e^{\lambda x}$ – квазисногочлен степени n, $\lambda \in \mathbb{C}$, коэффициенты $P_n(x) \in \mathit{\Phi}$ Рассмотрим $(P_n(x)e^{\lambda x})' = \lambda \cdot P_n(x)e^{\lambda x} + e^{\lambda x}\overline{P}_{n-1}(x) = e^{\lambda x}(\lambda P_n(x) + \overline{P}_{n-1}(x)) = \widetilde{P}_n(e^{\lambda x})$

То есть, если будем дифференцировать степень n, то останемся в множестве квазимногочленов степени n.

Докажем по индукции. База $n = 1 -$ выполнена по Лемме (3.2). Пусть выполнено для $n = s{-}1$: система из $s{-}1$ квазимногочленов является ЛНЗ системой: $P_{n_1}(x)e^{\lambda_1 x}, \ldots, P_{n_{s-1}} -$ ЛНЗ.

Для n. От противного: пусть система $P_{n_1}(x)e^{\lambda_1 x}, \ldots, P_{n_{s-1}}, P_{n_s}(x)e^{\lambda_s x}$ является линейно зависимой, тогда $\exists C_1, \ldots, C_l, \ldots, C_s$:

$$C_1 P_{n_1}(x)e^{\lambda_1 x} + C_2 P_{n_2}(x)e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_l P_{n_l}(x)e^{\lambda_l x} + \cdots + C_s P_{n_s}(x)e^{\lambda_s}x = 0 \tag{2.5}$$

и хотя бы одна константа, например $C_l \neq 0$ Из (2.5), перенося C_l вправо и деля на $C_l e^{\lambda_l x}$ получаем:

$$\overline{C_1}P_{n_1}(x)e^{\omega_1 x} + \cdots + \overline{C_s}P_{n_s}(x)e^{\omega_s x} = -P_{n_l}(x)$$

где $\overline{C_i} = \frac{C_i}{C_l \neq 0}, \omega_i = \lambda_i - \lambda_l$

Продифференцируем n_{l+1} раз последнее тождество. Перенумеровав $s-1$ слагаемое в левой частЮ получим $\overline{C}_1 \cdot \widetilde{P}_n(x)e^{\omega_1 x} + \cdots + \overline{C}_{s-1} \cdot \widetilde{P}_{n_{s-1}}(x)e^{\omega_{s-1}x} = 0$

По определению индукции последнее равенство возможно, только если все $\overline{C}_i = 0$, $\overline{C}_i = \frac{C_i}{C_l}; C_l \neq 0 \Rightarrow C_i = 0, i = 1, \ldots, l-1, l+1, \ldots, s \underset{(2.5)}{\Rightarrow} C_l = 0 -$ противоречие рпедположению индукции о линейносй независимости системы $P_{n_1}(x)e^{\lambda_1 x}, \ldots, P_{n_{s-1}}(x)e^{\lambda_{s-1}x}$ ■

Таким образом ФСР дифференциального уравнения (2.1) будет состоять из функций набора

$$\Big\{\{e^{\lambda_1 x},\ldots,x^{l_1-1}e^{\lambda_1 x}\},\ldots,\{e^{\lambda_m x},\ldots,x^{l_m-1}e^{\lambda_m x}\},\ldots,\{e^{\lambda_k x},\ldots,x^{l_k-q}e^{\lambda_k x}\}\Big\},$$

где $\lambda_1,\ldots,\lambda_m,\ldots,\lambda_k -$ корни характеристического многочлена $P_n(\lambda)$ кратности $l_1,\ldots,l_m,\ldots,l_k$

Общее решение (2.1) будет иметь вид

$$y_0 = e^{\lambda_1 x}\Big(\sum_{m=1}^{l_1-1} C_m^1 x^m\Big) + \cdots + e^{\lambda_k x}\Big(\sum_{m=1}^{l_k-1} C_m^k x^m\Big) \tag{2.6}$$

Фигурирующие в (2.6) константы C_i^j, вообще говоря, могут быть комплексными, если корни $P_n(\lambda)$ являются комплекснозначными. Если изначально ставится задача $-$ найти решение ДУ во множестве действительных функций действительного переменного, то в случае комплексных корней возникает задача выделить из множества комплексных решений действительное. Это осуществимо, так как коэффициенты $P_n(\lambda)$ являются действительными числами.

Пусть $\lambda_m = \alpha + \beta i -$ корень характеристического многочлена кратности i. Ему соответствуют $\varphi_m^i = x^i e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$; $\varphi_m^i,\overline{\varphi}_m^i -$ ЛНЗ, $i = \overline{0,l-1}$

Рассмотрим функции

$$\Psi_m^i = \frac{\varphi_m^i + \overline{\varphi}_m^i}{2} = e^{\alpha x}\cdot x^i\cos\beta x = Re(\varphi_m^i)$$

$$\chi_m^i = \frac{\varphi_m^i - \overline{\varphi}_m^i}{2} = e^{\alpha x}\cdot x^i\sin\beta x = Im(\varphi_m^i)$$

Так как любая суперпозиция решений (2.2) в силу его линейности тоже является решением, то χ_m^i и Ψ_m^i являются линейно независимыми и действительными решениями (2.2). Таким образом, чтобы получить действительную ФСР, необходимо все φ_m^i и $\overline{\varphi_m^i}$, $i = \overline{0,l_m}$ $m = \overline{1,k}$ отвечающих паре комплексных корней характеристического многочлена $\alpha \pm i\beta$ кратности l заменить на вещественные $Re(\varphi_m^i)$ и (φ_m^i). Если считать, что $\lambda_i = \alpha_i \pm i\beta_i -$ корень $P_n(\lambda)$ кратности l_i, то общее решение (2.2) имеет вид:

$$y_0 = e^{\alpha_1 x}\Big(\sum_{j=0}^{l_1-1} x^j(A_j^1\cos\beta_1 x + B_j^1\sin\beta_1 x)\Big) + \cdots + e^{\lambda_k x}\Big(\sum_{j=0}^{l_k-1} x^j(A_j^k\cos\beta_k x + B_j^k\sin\beta_k x)\Big) \tag{2.7}$$

3.3 Неоднородные линейные уравнения

Рассмотрим уравнение вида: $L_n(p)(y(x)) = f(x)$

Лемма 3.3. *Пусть неоднородность имеет вид* $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} f_k(x)$ *и* $y_k^s(x) -$ *частное решение*

$L_n(p)(y(x)) = f_k(x)$, $k = \overline{1,m}$, *то есть* $L_n(p)(y_k^s(x)) = f_k(x)$

Тогда частное решение уравнения имеет вид $y^s(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} y_n^s(x)$.

Доказательство. $L_n(p)\Big(\sum\limits_{k=1}^{m} y_k^s(x)\Big) \underset{linearL}{=} \sum\limits_{k=1}^{m} L_n(p)(y_k^s(x)) = \sum\limits_{k=1}^{m} f_k(x) = f(x)$ ■

Примечание. *Утверждение леммы остается верным и в случае переменных коэффициентов в* $L_n(p)$.

Определение 3.2. *Пусть* $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} P_{n_i}(x)e^{\lambda x}$, *где* P_{n_i} – *многочлен степени* n_i *с комплексными коэффициентами,* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Тогда* $f(x)$ *называется квазимногочленом.*

Рассмотрим ДУ:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny = L_n(p)(y(x)) = (b_kx^k+b_{k-1}x^{k-1}+\dots+b_0)e^{\lambda x} = P_k(x)e^{\lambda x} \quad (1)$$

Теорема 3.8. *Частное решение* (1) *можно найти в виде*

$$y^s(x) = x^r(C_kx^k + C_{k-1}x^{k-1} + \dots + C_0)e^{\lambda x} \quad (2)$$

где $r = l_m$, *если* $\lambda = \lambda_m$, $m = \overline{1,s}$ – *корень* $P_n(\lambda)$

$r = 0$, *если* $\lambda \neq \lambda_m$; *Неопределенность константы* $C_k \dots, C_0$ *находятся из системы с треугольной матрицей.*

Доказательство. • $\lambda_m = \lambda$

Подставим (2) в (1) и воспользуемся формулой сдвига.

$y^s(x)x^r(C_kx^k + C_{k-1}x^{k-1} + \dots + C_0)e^{\lambda x}$

Оператор примет вид:

$$L_n(p)(y^s(x)) = (a_n(p-\lambda_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(p-\lambda_s)^{l_s})(y^s(x)) = L_{n-l_m}(p)\cdot\underset{\text{(к оперетору)}}{(p-\lambda_m)^{l_m}}(y^s(x)) \underset{\text{формула сдвига}}{=}$$

$$= e^{\lambda_m x}L_{n-l_m}(p+\lambda_m)\frac{d^{l_m}}{dx^{l_m}}(C_kx^{r+k} + C_{k-1}x^{r+k-1} + \dots + C_0x^r)$$

Уравнение в таком виде имеет вид:

$$e^{\lambda x}L_{n-l_m}(p)(p+\lambda_m)\frac{d^{l_m}}{dx^{l_m}}(C_kx^{r+k}+C_{k-1}^{r+k-1}+\dots+C_0x^r) \equiv e^{\lambda_m x}(b_kx^k+b_{k-1}x^{k-1}+\dots+b_0)$$

где $L_{n-l_m}(p+\lambda_m) = a_0(p+\lambda_m)^0 + \dots + a_{n-l_m}(p+\lambda_m)^{n-l_m} = d_0p^0 + \dots + d_{n-l_m}p^{n-l_m}$

Сократим на $e^{\lambda_m x}$ и выполним дифференцирование $\frac{d^{l_m}}{dx^{l_m}}$ с учетом того, что $r = l_m$

$$(d_0p^0+\dots+d_{n-l_m}p^{n-l_m})(A_kC_kx^k+A_{k-1}C_{k-1}x^{k-1}+\dots) = A_kC_kd_0x^k+(kA_kC_kd_1+A_{k-1}C_{k-1}d_0)x^{k-1}+\dots$$

$$\equiv b_kx^k + b_{k-1}x^{k-1} + \dots$$

где $A_k = (k+l_m)(k+l_m-1)\cdot\ldots\cdot(k+1)$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x и получим систему

$$\text{система с треугольной матрицей} \begin{cases} A_kC_kd_0 = b_k \\ A_{k-1}C_{k-1}d_0 + kA_kC_kd_1 = b_{k-1} \end{cases} \quad (62)$$

• $\lambda \neq \lambda_m$

$$y^s = e^{\lambda x}(C_kx^k + C_{k-1}x^{k-1} + \dots + C_0)$$

После формулы сдвига $e^{\lambda x}L_n(p+\lambda)(f) \Rightarrow$

$$L_n(p+\lambda_m) = (a_0(p+\lambda_m)^0 + \dots + a_n(p+\lambda_m)^n) = d_0p^0 + d_1p + \dots + d_np^n \Rightarrow$$

уравнение примет вид:

$$e^{\lambda x}(d_0p^0+d_1p+\dots+d_np^n)(C_kx^k+C_{k-1}x^{k-1}+\dots+C_0)\equiv(b_kx^k+b_{k-1}x^{k-1}+\dots+b_0)e^{\lambda x}\Rightarrow$$

$$C_kd_0x^k+(kC_kd_1+C_{k-1}d_0)x^{k-1}+\dots\equiv b_kx^k+b_{k-1}x^{k-1}+\dots$$

После приравнивая коэффициентов при одинаковых степенях x:

$$\text{Система с треугольной матрицей}\begin{cases}C_kd_0=b_k\\ C_{k-1}d_0+kC_kd_1=b_{k-1}\end{cases}\tag{63}$$

■

3.4 Уравнение Эйлера

Примечание. *Источник: В. М. Ипатова, О. А. Пыркова, В. Н. Седов "ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ"*

Определение 3.3. *Уравнением Эйлера называется линейное дифференциальное уравнение с переменными к оэффициентам вида* $a_k(x)=b_kx^{n-k},\ \ k=\overline{0,n}$, *где* $b_0,b_1,\dots,b_n$ *− заданные числа, причем* $b_0\neq 0$:

$$b_0x^ny^{(n)}+b_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\dots+n_{n-1}xy'+b_ny=f(x)\tag{3.1}$$

Заменой $x=e^t\ \ (t=lnx)$ (3.1) сводится к линейному дифференциальному уравнению с постояннными коэффициентами. Действительно,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}=e^{-t}\frac{dy}{dt},\quad\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\Big(\frac{dy}{dx}\Big)=e^{-t}\frac{d}{dt}\Big(e^{-t}\frac{dy}{dt}\Big)=e^{-2t}\Big(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\Big)$$

Допустим, что $k-$я производная имеет вид

$$\frac{d^ky}{dx^k}=e^{-kt}\Big(\frac{d^ky}{dt^k}+\alpha_1\frac{d^ky}{dt^k}+\dots+\alpha_{k-1}\frac{dy}{dt}\Big)=\frac{1}{x^k}\Big(\frac{d^ky}{dt^k}+\alpha_1\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}+\dots+\alpha_{k-1}\frac{dy}{dt}\Big)\ \text{где}\ \ \alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{k-1}-\text{постоя}$$

Тогда $(k+1)-$я производная будет равна

$$\frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}}=\frac{d}{dx}\Big(\frac{d^ky}{dx^k}\Big)=e^{-t}\frac{d}{dt}\Big(\frac{d^ky}{dx^k}\Big)=e^{-(k+1)t}\Big(\frac{d^{k+1}y}{dt^{k+1}}+(\alpha_1-k)\frac{d^ky}{dt^k}+\dots+k\alpha_{k-1}\frac{dy}{dt}\Big)=\tag{64}$$

$$=\frac{1}{x^{k+1}}\Big(\frac{d^{k+1}y}{dt^{k+1}}+(\alpha_1-k)\frac{d^ky}{dt^k}+\dots+k\alpha_{k-1}\frac{dy}{dt}\Big)\tag{65}$$

Так как в преобразованном уравнении, в случае отсутствия кратных корней характеристического уравнения, решения имеют вид $y=e^{\lambda t}$, следовательно, в исходном уравнении они имеют вид $y=x^{\lambda}$. Поэтому можно непосредственно подставить его в уравнение Эйлера (3.1). Поскольку $x^k\frac{d^kx^\lambda}{dxk}=\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-k+1)$ при $k\leqslant\lambda$, то характеристическое уравнение имеет вид

$$b_0\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)+\dots+b_{n-1}\lambda(\lambda-1)+b_{n-1}\lambda+b_n=1\tag{3.2}$$

Каждому простому корню λ уравнения (3.2) соответствует частное решение однородного уравнения Эйлера x^λ; каждому действительному корню λ кратности $l\quad(l\geqslant 2)$ сооответсвует l линейно независимых частных решений однородного уравнения Эйлера $x^\lambda,x^\lambda\ln x,\dots,x^\lambda(\ln x)^{l-1}$. В случае невещественных корней λ надо учитывать, что $x^{i\beta}=e^{i\beta\ln x}$, таким образом паре комплексно сопряженных корней$\alpha\pm i\beta$ уравнения (3.2) будут соответствовать два решения однородного уравнения Эйлера $x^\alpha\cos(\beta\ln x)$ и $x^\alpha\sin(\beta\ln x)$

3.5 Матричная экспонента, ее свойства и применение к решению нормальных линейных систем

3.5.1 Матричная экспонента

Необходимо решить ОЛДУ вида:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x},\ \vec{x}(t_0) = \vec{x_0}, \tag{66}$$

Если $A(t) = ||a^i_j||$, $a^i_j \in \mathbf{R}$, $i,j = 1, \dots, n$, тогда:

$$\vec{x_0} = E\vec{x_0},\ \vec{x_1} = E\vec{x_0} + \frac{t-t_0}{1!}A\vec{x_0} = \left(E + \frac{t-t_0}{1!}A\right)\vec{x_0},$$

$$\vec{x_n} = \left(E + \frac{t-t_0}{1!}A + \ \dots \ + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n\right)\vec{x_0},$$

Этот процесс будет сходиться к задаче Коши с решением:

$$\vec{x} = \left(E + \frac{t-t_0}{1!}A + \ \dots \ + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n + \ \dots\right)\vec{x_0} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n\right)\vec{x_0},$$

при условии, что $A^0 = E$.

Определение 3.4. *Матричной экспонентой называют следующий степенной ряд:*

$$e^{(t-t_0)A} = E + \frac{t-t_0}{1!}A + \ \dots \ + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n + \ \dots \ = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n.$$

3.5.2 Свойства матричной экспоненты

Это квадратная матрица, по размерам аналогична матрице A, и каждый элемент этой матрицы представляет из себя степенной ряд с радиусом сходимости $+\infty$.

1. Решение задачи Коши для (66), если $A = const$:

$$\vec{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{x_0},\ (\vec{x}(t_0) = \vec{x_0}).$$

2. $e^{0A} = E$.

3. $e^{(t_1+t_2)A} = e^{t_1A}e^{t_2A} \Rightarrow e^{t_1A}e^{t_2A} = e^{t_2A}e^{t_1A}$ (коммутативность).

4. $\left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}$.

5. $\left(e^{tA}\right)' = Ae^{tA} = e^{tA}A$.

Доказательство. Так как квадратные матрицы составляют определенное кольцо, то $A^{n+m} = A^nA^m = A^mA^n$.

1.

2. $e^{tA} = E + \frac{t-t_0}{1!}A + \ \dots \ + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n + \ \dots$, если $t = 0$:

$$e^{0A} = E + 0 + \dots = E$$

3. рассматриваем (66), если $\vec{x}(t)$ - решение этого ДУ, то $\vec{x}(t+t_0)$ тоже решение этого ДУ $\forall t_0 \in \mathbf{R}$. $(u = t+t_0)$:

$$\frac{d\vec{x}(t+t_0)}{dt} = \frac{d\vec{x}}{du}\frac{du}{dt} = \frac{d\vec{x}}{du} = A\vec{x}(u) = A\vec{x}(t+t_0).$$

Тогда (66), с задачей Коши $\vec{x}(0) = \vec{x_0}$ имеет решение:

$$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x_0},$$

$$\vec{x}(t+t_0) = e^{(t+t_0)}\vec{x_0} \text{ - решение } \frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}.$$

Рассмотрим тогда тоже самое уравнение для функции $z(t)$:

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = A\vec{z}, \text{ с задачей Коши } \vec{z}(0) = e^{t_0 A}\vec{x_0} \Rightarrow \vec{z}(t) = e^{tA}(e^{t_0 A}\vec{x_0}) = (e^{tA}e^{t_0 A})\vec{x_0}.$$

Рассмотрим это решение в нуле:

$$\vec{x}(0+t_0) = e^{t_0 A}\vec{x_0},$$

из основной теоремы следует, что $\vec{x}(t+t_0) = \vec{z}(t)\ \forall t$.

Тогда и получается основная формула:

$$\vec{x}(t+t_0) = e^{(t+t_0)A}\vec{x_0} = (e^{tA}e^{t_0 A})\vec{x_0}$$

4. $E = e^{0A} = e^{(t-t)A} = e^{tA}e^{-tA} = E \Rightarrow \left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}$.

5. Берем представление матричной экспоненты в виде степенного ряда, который можно дифференцировать, тогда получаем:

$$(e^{tA})' = A + tA^2 + \ \dots\ + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n + \ \dots = A\left(E + tA + \ \dots\ + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1}\right),$$

$$(e^{tA})' = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

■

Примечание. Формула $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$ не имеет места, кроме случая, если $AB = BA$ (т.е. матрицы коммутативны).

3.5.3 Применение к решению нормальных линейных систем

Теорема 3.9. *Пусть S - матрица перехода от исходного базиса к новому базису. Тогда в новой базисе $\overline{A} = S^{-1}AS$, или $A = S\overline{A}S^{-1}$. И главное:*

$$e^{tA} = S^{-1}e^{t\overline{A}}S.$$

Доказательство.

$$e^{tA} = \left(E + tA + \ \dots \ + \frac{t^n}{n!}A^n\right) = \left(E + tS^{-1}e^{t\overline{A}}S + \ \dots \ + \frac{t^n}{n!}(S^{-1}e^{t\overline{A}}S)^n\right),$$
$$(S\overline{A}S^{-1})^n = S\overline{A}^n S^{-1},\ SES^{-1} = SS^{-1} = E$$
$$e^{tA} = S^{-1}e^{t\overline{A}}S.$$

■

Для решения нормальных линейных систем методом матричной экспоненты мы будем находить собственные вектора.

Матрица A в базисе из собственных векторов (если они соответствуют действительным собственным значениям) будет иметь диагональный вид. Произведение диагональной матрицы на диагональную – диагональная. Тогда для случая без кратных корней:

$$e^{tA} = E + t \cdot diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + \frac{t^n}{n!} \cdot diag(\lambda_1^n, \dots, \lambda_n^n).$$

$$e^{tA} = diag(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}).$$

Если λ – корень кратности l, то матрица A приводится к Жордановой клетке (диагональная матрица с единицами над главной диагональю).

$$A = \lambda E + B \Rightarrow B = A - \lambda E.$$

$$e^{tA} = e^{t(\lambda E+B)} = e^{t\lambda E}e^{tB},\ e^{t\lambda E} = diag(e^{t\lambda}, \dots, e^{t\lambda}), e^{tB} = E + tB + \ \dots \ + \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}B^{l-1} + 0$$

$$\text{тогда } e^{tA} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t & & \dots & \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} \\ & & & \dots & \\ 0 & & & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Метод решения линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами (матричный метод вариации постоянной)

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}(t), \quad \text{решение будем искать в виде } \ \vec{x}(t) = e^{tA}\vec{C}(t),$$

$$\text{тогда } Ae^{tA}\vec{C}(t) + e^{tA}\dot{\vec{C}}(t) = Ae^{tA}\vec{C} + \vec{f}(t),$$

$$e^{tA}\dot{\vec{C}}(t) = \vec{f}(t) \ \Rightarrow \dot{\vec{C}}(t) = (e^{tA})^{-1}\vec{f}(t) = e^{-tA}\vec{f}(t).$$

4 Билет 4. Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

4.1 Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной линейной системы уравнений и для линейного уравнения n-го порядка в нормальном виде

Рассматривается система вида

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{q}(t), \tag{67}$$

где $A = ||a^i_j(t)||$, $i,j = \vec{1,n}$ – матрица, $\vec{q}(t)$ – заданная вектор-фенкция. Наряду с векторной записью также будем использовать координатную запись $\dot{x}^i = \sum\limits_{j=1}^{n} a^i_j x^j + q^i(t)$, $i = \vec{1,n}$.

Необходимым условием линейности является факт того, что все A^i_j и q^i зависят только от t и не зависят от $\vec{x}$.

Для (67) ставится задача Коши:

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x_0}.$$

Теорема 4.1. ***Основная теорема для линейных систем.*** *Пусть* $a^i_j(t)$, $i,j = \vec{1,n}$ *и* $\vec{q}(t)$ *в* (67) *непрерывны на отрезке* $[a;b]$. *Тогда рпешение задачи Коши существует и единственно на всем отрезке* $[a;b]$.

Предварительные замечания:

Пусть вектор-функция $\vec{f}(x) \in B$ и A – линейный оператор, действубщий из B в B, т.е. $A(\vec{f} + \vec{g}) = A\vec{f} + A\vec{g}$.

Определим норму оператора:

$$||A|| = \sup_{\vec{\varphi} \in B,\ \vec{\varphi} \neq \vec{0}} \frac{||A(\vec{\varphi})||}{||\vec{\varphi}||}.$$

Тогда получаем неравенство: $||A||$
$leqslant||A||||\vec{\varphi}||$.

Нормой для вектор-функции выберем $||\vec{x}(t)|| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(\max\limits_{t \in [a;b]} x^i(t))$, а нормой для оператора $||A|| == \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(\max\limits_{t \in [a;b]} \sum\limits_{j=1}^{n} |a^i_j(t)|)$

Доказательство. Определим $\vec{g}(t) = \vec{x_0} + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{q}(S)dS$ и построим итерационную процедуру.

Т.к $q^i(t) \in C_{[a;b]}$ $\forall i = \vec{1,n} \Rightarrow \exists ||\vec{q}||_c = M_1$. Тогда $||\vec{g}||_c = ||\vec{x_0} + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{q}(S)dS|| \leqslant ||\vec{x_0}|| + || \int\limits_{t_0}^{t} \vec{q}(S)dS|| \leqslant ||\vec{x_0}|| + M_1(b-a) = C$.

Рассмотрим интегральное уравнение $\vec{x} = \vec{g} + \int\limits_{t_0}^{t} A(s)\vec{x}(s)ds$.

Аналогично основной лемме доказывается, что последнее интегральное уравнение эквивалентно задаче (67).

Итерационная процедура: $\vec{x_0} = \vec{g}$; $\vec{x_k} = \vec{g} + \int\limits_{t_0}^{t} A(s)\vec{x_{k-1}}(s)ds$, $k = 0{,}1, \ \ldots$

Оценим норму:

$$||\vec{x_1} - \vec{x_0}|| = ||\int\limits_{t_0}^{t} A(s)\vec{g}(s)ds|| \leqslant |\int\limits_{t_0}^{t} ||A(s)\vec{g}(s)||ds| \leqslant |\int\limits_{t_0}^{t} ||A(s)|| \cdot ||\vec{g}(s)||ds| \leqslant C_1C|t - t_0|;$$

Таким образом $||\vec{x_1} - \vec{x_0}|| \leqslant C_1C|t - t_0|$.

Теперь докажем по индукции неравенство: $||\vec{x_k} - \vec{x_{k-1}}|| \leqslant \frac{CC_1^k}{k!}|t - t_0|^k$.

Базой индукции выступает полученное выше неравенство. Предположим, что верно для $n = k$, т.е.: $||\vec{x_k} - \vec{x_{k-1}}|| \leqslant \frac{CC_1^k}{k!}|t - t_0|^k$.

Докажем для

$$n = k + 1: \ ||\vec{x_{k+1}} - \vec{x_k}|| = ||\int\limits_{t_0}^{t} A(s)(\vec{x_k}(s) - \vec{x_{k-1}}(s))ds|| \leqslant |\int\limits_{t_0}^{t} ||A(s)(\vec{x_k}(s) - \vec{x_{k-1}}(s))||ds| \leqslant$$

$$\leqslant |\int\limits_{t_0}^{t} ||A(s)|| \cdot ||(\vec{x_k}(s) - \vec{x_{k-1}}(s))||ds| \leqslant C|\int\limits_{t_0}^{t} \frac{C_1C^k|s - t_0|^k}{k!}ds| = \frac{C^{k+1}C_1|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!}$$

Т.к. $|t - t_0| \leqslant (b - a)$, то предыдущее неравенство можно усилить $||\vec{x_k} - \vec{x_{k-1}}|| \leqslant \frac{C_1C^k}{k!}(b - a)^k$.

Функциональная последовательно $\vec{x_k}$ сходиться равномерно, т.к. сходится равномерно ряд $\vec{x_0} + (\vec{x_1} - \vec{x_0}) + \ \ldots \ + (\vec{x_k} - \vec{x_{k-1}}) + \ \ldots$, который межорируется сходящимся рядом $||\vec{x_0}|| + ||(\vec{x_1} - \vec{x_0})|| + \ldots + ||(\vec{x_k} - \vec{x_{k-1}})|| + \cdots \leqslant ||\vec{x_0}|| + C_1 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{C^k|b-a|^k}{k!} = ||\vec{x_0}|| + C_1e^{C(b-a)} < \infty \Rightarrow$ Существует (в сиду банаховости пр-ва) непрерывно дифф. $\vec{\varphi(t)} : \exists \lim\limits_{n \to \infty} \vec{x_n} = \varphi(t)$.

Рассмотрим $||\int\limits_{t_0}^{t} A\vec{x_n}dS - \int\limits_{t_0}^{t} A\vec{\varphi}dS|| = ||\int\limits_{t_0}^{t} A(\vec{x_n} - \vec{\varphi})dS|| \leqslant ||A|| \cdot |\int\limits_{t_0}^{t} ||\vec{x_n} - \vec{\varphi}||dS|$, где $||\vec{x_n} - \vec{\varphi}|| \to_{n \to \infty} 0$.

Т.о. итерационная процедура сходится в силу существования пределов слева и справа.

Полученное решение эквивалентно решению задачи (67). В отличии от основной теоремы для нормальных систем ДУ: $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t, \vec{x})$, где существование было получено только на отрезке Пеано, для СЛДУ существование решения доказано для всего отрезка $[a; b]$ – промежутка, где $a_j^i(t)$ и $\vec{q}(t)$ непрерывны. В нашем случае $\vec{f}$ соответствует $\vec{f} = A\vec{x} + \vec{q}$. Она непрерывна, т.к. полученное решение $\vec{x}(t)$ непрерывно. Условие непрерывности $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ также выполнены, т.к. в нашем случае $\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_{ij}(t)$ – непр. на $[a; b]$. Отсюда следует единственность, т.к. два решения задачи (67), согласно основной теореме для нормальныэ систем, совпадает на промежутке, где они оба определены. В нашем случае это $[a; b]$.

Т.о. теорема не носит локальных характер.

$\blacksquare$

4.2 Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы

Будем рассматривать однородную систему ДУ вида:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}; \quad \dot{x}^i = \sum_{k=1}^{n} a^i_k x^k; \quad i,k = \overline{1,n} \tag{68}$$

Утверждение 4.1. *Для однородных систем линейных уравнений верен принцип суперпозиций, т.е если система функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – решение системы уравнений, то любая их линейная комбинация тоже является решением.*

Доказательство. Введем оператор L такой, что $L = \frac{d}{dt} - A$. Тогда однородная система ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ запишется в виде $L(\vec{x}) = 0$, неоднородная система ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} - A\vec{x} = q(t)$ запишется в виде $L(\vec{x}) = q(t)$.

Пусть вектор-функции $\vec{\varphi}(t)$ и $\vec{\psi}(t)$ являются решениями системы $L(\vec{x}) = 0$, в таком случае справедливо

$$L(\vec{\varphi}(t)) = 0; \quad L(\vec{\psi}(t)) = 0$$

Рассмотрим вектор-функцию $\vec{\chi}(t) = a\vec{\varphi}(t) + b\vec{\psi}(t)$, где a и b – произвольные коэффициенты. Применим оператор L к получившейся вектор-функции:

$$\begin{aligned} L(\vec{\chi}(t)) = \frac{d}{dt}\left(a\vec{\varphi}(t) + b\vec{\psi}(t)\right) - A\left(a\vec{\varphi}(t) + b\vec{\psi}(t)\right) = \\ = a\left(\frac{d}{dt}\vec{\varphi}(t) - A\vec{\varphi}(t)\right) + b\left(\frac{d}{dt}\vec{\psi}(t) - A\vec{\psi}(t)\right) = \\ = aL(\vec{\varphi}(t)) + bL(\vec{\psi}(t)) = 0 \end{aligned}$$

■

Определение 4.1. *Пусть имеется система вектор-функций $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$*

$$\vec{\varphi}_i(t) = \begin{pmatrix} \varphi^1_i(t) \\ \dots \\ \varphi^n_i(t) \end{pmatrix} \tag{69}$$

непрерывна на $I(x)$, тогда такая система называется линейно-зависимой на I, если

$$\exists\ C_1, \dots, C_n : \sum_{i=1}^{n} |C_i| \neq 0\ \&\ \sum_{i=1}^{n} C_i\vec{\varphi}_i(t) = 0\ \forall t \in I$$

В противном случае, система вектор-функций называется линейно-независимой, то есть условие

$$\sum_{i=1}^{n} C_i\vec{\varphi}_i(t) = 0\ \forall t \in I$$

выполняется только при $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$.

Определение 4.2. *Пусть система вектор-функций $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$ линейно-независима на I и каждая вектор-функция $\vec{\varphi}_i(t)$ является решением системы ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$.Тогда такая система вектор-функций называется фундаментальной системой решений (ФСР) данной системы ДУ.*

Теорема 4.2. *Рассмотрим систему ДУ* $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$. *Если матрица* A *является непрерывной на отрезке* $[a, b]$, *то система имеет ФСР на этом отрезке.*

Доказательство. матрица A является непрерывной на отрезке $[a, b]$, тогда, согласно основной теореме, на отрезке $[a, b]$ существует единственное решение задачи Коши.

Пусть система функций $\vec{\varphi_1}(t), \vec{\varphi_2}(t), \ldots, \vec{\varphi_n}(t)$ является решением системы при следующих заданных условиях:

$$\vec{\varphi_1}(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{\varphi_2}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},\ \ldots,\ \vec{\varphi_n}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{70}$$

тогда вронскиан такой системы в точке t_0:

$$W(t_0) = |\vec{\varphi_1}(t_0), \vec{\varphi_2}(t_0), \ldots, \vec{\varphi_n}(t_0)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \tag{71}$$

тогда, из свойства вронскиана следует, что данная система функций является линейно-независимой, а так как каждая функция является решением системы ДУ, эта система вектор-функций и есть ФСР системы ДУ. ∎

Теорема 4.3. *Пусть система вектор-функций* $\vec{\varphi}_1(t), \ldots, \vec{\varphi}_n(t)$ *является ФСР системы ДУ, тогда любое решение этой системы ДУ можно представить, как линейную комбинацию компонентов ФСР:* $\vec{x}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + \cdots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$, *где* $C_1, dots, C_n$ *– произвольные постоянные.*

Доказательство. Так как для системы ДУ справедлив принцип суперпозиции, то вектор-функция $x\vec{(t)} = C_1\vec{\varphi}_1(t) + \cdots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$.

Предположим теперь, что существует функция $\vec{\chi}(t)$ такая, что она является решением системы ДУ, но не представима в виде $C_1\vec{\varphi}_1(t) + \cdots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$. Пусть значение этой функции в точке t_0:

$$\vec{\chi}(t_0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_1(t_0) \\ \chi_2(t_0) \\ \ldots \\ \chi_n(t_0) \end{pmatrix} \tag{72}$$

Теперь составим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} C_1\varphi_1^1(t_0) + C_2\varphi_2^1(t_0) + \cdots + C_n\varphi_n^1(t_0) = \alpha_1 \\ C_1\varphi_1^2(t_0) + C_2\varphi_2^2(t_0) + \cdots + C_n\varphi_n^2(t_0) = \alpha_2 \\ \ldots \\ C_1\varphi_1^n(t_0) + C_2\varphi_2^n(t_0) + \cdots + C_n\varphi_n^n(t_0) = \alpha_3 \end{cases} \tag{73}$$

где $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ – являются неизвестными, который надо найти. Определителем этой системы является

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} \varphi_1^1(t_0) & \varphi_2^1(t_0) & \ldots & \varphi_n^1(t_0) \\ \varphi_1^2(t_0) & \varphi_2^2(t_0) & \ldots & \varphi_n^2(t_0) \\ & & \ldots & \\ \varphi_1^n(t_0) & \varphi_2^n(t_0) & \ldots & \varphi_n^n(t_0) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{74}$$

данный определитель не равен 0, поскольку функции $\vec{\varphi}_i$ $i = \overrightarrow{1n}$ являются ФСР системы ДУ, поэтому числа $C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_n$ определяются однозначно.

С этими числами рассмотрим решение исходной системы ДУ, назовем его $\vec{z}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$. Поскольку $\vec{\chi}(t)$ и $\vec{z}(t)$ – являются решениями системы ДУ, по принципу суперпозиции функция $\vec{\psi}(t) = \vec{z}(t) - \vec{\chi}(t)$ так же является решением этой системы ДУ.

Заметим, что значение этой функции в точке t_0: $\vec{\psi}(t_0) = \vec{z}(t_0) - \vec{\chi}(t_0) = 0$, заметим так же, что $\vec{0}$ является решением однородной системы системы $\frac{d}{dt}\vec{x} - A\vec{x}$. Тогда, в силу теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши, выполняется:

$$\vec{\psi}(t) = 0\ \forall\ t \in I\ \Rightarrow$$
$$\vec{\psi}(t) = \vec{z}(t) - \vec{\chi}(t) \equiv 0\ \forall\ t \in I\ \Rightarrow$$
$$\vec{z}(t) = \vec{\chi}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + C_2\vec{\varphi}_2(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$$

Мы получили противоречие с предположением о невозможности линейного представления решения $\vec{\chi}(t)$ через функции ФСР, таким образом, мы доказали, что любое решение системы ДУ можно представить, как линейную комбинацию компонентов ФСР. ■

Определение 4.3. *Решение системы ДУ вида* $\vec{x}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$*, где* $C_1, dots, C_n$ *называется общим решением сисстемы ДУ.*

4.3 Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем

Введем оператор L такой, что $L = \frac{d}{dt} - A$. Тогда однородная система ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ запишется в виде $L(\vec{x}) = 0$, неоднородная система ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} - A\vec{x} = q(t)$ запишется в виде $L(\vec{x}) = q(t)$.

Утверждение 4.2. *Общее решение неоднородной системф ДУ* $\frac{d\vec{x}}{dt} - A\vec{x} = q(t)$ *представляет собой следующее выражение:*

$$\vec{x} = \vec{x}^s + \vec{x}_0^{об} \tag{75}$$

где $\vec{x}^s$ *– частное решение линейного неоднородного уравнение, т. е.* $L(\vec{x}^s) = q(t)$*, а* $\vec{x}_0^{об}$ *– общее решение системы линейный* ***однородных*** *уравнений* $L(\vec{x}_0^{об}) = 0$*. Таким образом, получаем:*

$$L(\vec{x}) = L(\vec{x}^s + \vec{x}_0^{об}) = L(\vec{x}^s) + L(\vec{x}_0^{об}) = q(t) + 0$$

4.4 Определитель Вронского и его свойства

4.4.1 Определитель Вронского

Определение 4.4. *Пусть на* I *определена система вектор-функций* $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$*, тогда определитель*

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1^1(t) \dots \varphi_n^1(t) \\ \dots \qquad \dots \\ \varphi_1^n(t) \dots \varphi_n^n(t) \end{vmatrix} \tag{76}$$

называется определителем Вронского, где

$$\vec{\varphi}_i = \begin{pmatrix} \varphi_i^1 \\ \dots \\ \varphi_i^n \end{pmatrix} \tag{77}$$

другими словами

$$W(t) = \left|\vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_n\right| \tag{78}$$

Теорема 4.4. *Если* $\exists\ t_0 \in I:\ W(t_0) \neq 0$*, то система является линейно независимой на* I*. Обратное неверно, пример:*

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix},\ \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ \text{ЛНЗ, но}\ \ W(t) = 0 \tag{79}$$

Доказательство. Будем доказывать от противного: пусть система является линейно-зависимой, тогда $\exists\ C_1, \ldots, C_n : C_1\vec{\varphi}_1(t) + \cdots + C_n\vec{\varphi}_n(t) = 0\ \forall t \in I$. Тогда в определителе Вронского $W(t)$ есть хотя бы два линейно-зависимых столбца, так как $\vec{\varphi}_i(t)$ являются столбцами определителя, но тогда получам, что $W(t) = 0\ \forall t \in I$ (хотя предпологалось, что $\exists\ t_0 \in I:\ W(t_0) \neq 0$). Таким образом, мы получили противоречие, откуда следует, что система является линейно независимой на I. ∎

4.4.2 Свойства Вронскиана

1. Если $\exists\ t_0 \in I:\ W(t_0) \neq 0$, то система является линейно независимой на I (см. доказательство теоремы).

2. Пусть вектор-функции $\vec{\varphi}_1(t), \ldots, \vec{\varphi}_n(t)$ являются решениями системы ДУ, и существует точка $t_0 \in I:\ W(t_0) = 0$, тогда система $\vec{\varphi}_1(t), \ldots, \vec{\varphi}_n(t)$ является линейно-зависимой.

   Доказательство. Поскольку $W(t_0) = 0$ столбцы этой матрицы являются линейно-зависимыми, то есть

   $$\exists\ C_1, C_2, \ldots, C_n:\ \sum_{i=1}^{n} C_i^2 \neq 0\ \&\ \sum_{i=1}^{n} C_i\vec{\varphi}_i(t_0) = 0$$

   Используя данные коэффициенты, построим функцию $\vec{x}(t) = C_i\vec{\varphi}_i(t)$. Заметим, что во-первых $\vec{x}(t_0) = 0$, а во-вторых данная функция является решением системы ДУ в силу теоремы о суперпозиции. Тогда, в силу теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши выполняется: $\vec{x}(t) = C_i\vec{\varphi}_i(t) = 0\ \forall\ t \in I$, что означает, что система $\vec{\varphi}_i$ является линейнозависимой. ∎

4.5 Фундаментальная система решений и общее решение нормальной линейной однородной системы уравнений

Рассмотрим систему вида

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{f}, \tag{80}$$

где $A = ||a^i_j||,\ i, j = \overline{1, n}$ - матрица системы, причём a^i_j - числа; $\vec{f}(t) = \begin{Vmatrix} f^1(t) \\ \cdots \\ f^n(t) \end{Vmatrix}$ - вектор-столбец неоднородной системы; $\vec{x}(t) = \begin{Vmatrix} x^1(t) \\ \cdots \\ x^n(t) \end{Vmatrix}$ - вектор-столбец искомых функций.

Наряду с вышеприведённой записью также будем рассматривать запись вида:

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a^i_j x^j(t) + f^i,\ i = \overline{1, n}$$

Основная идея решения систем дифференциальных уравнений вида (80), состоит в том, что матрица системы рассматривается как матрица линейного преобразования линейного пространства $\vec{\mathbb{R}}^n$ (пространство, присоединнёное к аффинному $\mathbb{R}^n$), заданная в исходном базисе.

Пусть $S = \left\|\sigma^i_j\right\|$, $i, j = \overline{1, n}$ - матрица перехода от исходного базиса $\left\|\vec{e_1}, ..., \vec{e_n}\right\|$ к базису. Эти соотношения связаны выражением $\left\|\vec{e_1}, ..., \vec{e_n}\right\| = \left\|\vec{e'_1}, ..., \vec{e'_n}\right\| \cdot S$ или $\vec{e'_i} = \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma^k_i \vec{e_k}$, а координаты векторов в новом и старом базисе связаны формулой $\vec{x} = S\vec{x'}$ или $x^i = \sum\limits_{m=1}^{n} \sigma^i_m x'^m$.

Матрица перехода S обратима, поэтому $\exists S^{-1} = \left\|\tau^i_j\right\|$, $i, j = \overline{1, n}$, причём $SS^{-1} = S^{-1}S = E$, т.е. $\sum\limits_{k=1}^{n} \tau^i_k \sigma^k_j = \delta^i_j$. Тогда $\vec{x'} = S^{-1}\vec{x}$. Преобразуем исходную систему, умножив её справа на S^{-1}.

$$S^{-1}\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(S^{-1}\vec{x}) = S^{-1}A\vec{x} + S^{-1}\vec{f}$$

Подставив $\vec{x} = S\vec{\bar{x}}$, получим $\frac{d\vec{\bar{x}}}{dt} = \bar{A}\vec{x} + \vec{\bar{f}}$, где $\vec{\bar{f}}(t) = S^{-1}\vec{f}(t)$, а $\bar{A} = S^{-1}AS$ является матрицей преобразования A в новом базисе. Уравнение имеет **ковариантный вид**, поэтому задачи свелись к нахождению базиса, в котором система имела бы наиболее простой вид.

Пусть A - матрица системы (80) является матрицей линейного преобразования линейного пространства $\vec{\mathbb{R}}^n$, т.е. $\forall\vec{x} \in \vec{\mathbb{R}}^n \mapsto A\vec{x} = \vec{y} \in \vec{\mathbb{R}}^n$, тогда $A = \left\|A\vec{e_1}, ..., A\vec{e_n}\right\|$, т.е столбцы матрицы A являются компонентами образов базисных векторов.

Определение 4.5. *Подпространство $L \subset \vec{\mathbb{R}}^n$ называется* ***инвариантным*** *подпространством относительно преобразования A, если $\forall\vec{x} \in L \mapsto A\vec{x} \in L$.*

Пусть $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_s, \vec{e}_{s+1}, ..., \vec{e}_n$ - базис в $\vec{\mathbb{R}}^n$, а $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_s$ - базис в L.
Тогда $\forall i = \overline{1, s} \mapsto A\vec{e_i} = \sum\limits_{k=1}^{s} \gamma^k_i \vec{e_k}$ и матрица A в этом базисе будет иметь вид:

$$A = \begin{Vmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{Vmatrix}, \text{ где } A_1 = \begin{Vmatrix} \gamma^1_1 & \cdots & \gamma^1_s \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma^s_1 & \cdots & \gamma^s_s \end{Vmatrix}, \ O \text{ - нулевая матрица размером } (n-s) \times s.$$

Если $\vec{\mathbb{R}}^n = L^1 \oplus ... \oplus L^k$ и L^i, $i = \overline{1, k}$ - инвариантные подпространства, то в базисе, который является базисом-объединения всех базисотв инваритных подпространств, прямая сумма которых равна $\vec{\mathbb{R}}^n$, матрица будет иметь вид:

$$A = \begin{Vmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & A_k \end{Vmatrix}$$

A_i, $i = \overline{1, k}$ - квадратная матрица размерами $l_i < n$, которая является сужением матрицы преобразования A на инвариантное подпространство L_i

В таком случае искомую вектор-функцию можно переписать в виде:

$$\vec{x}(t) = \begin{Vmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^{l_1} \\ \dots \\ x^{l_1+\ldots+l_{i-1}+1} \\ x^{l_1+\ldots+l_i} \\ \dots \\ x^{l_1+..l_k+1} \\ \dots \\ x^n \end{Vmatrix}$$

Обозначим через $X_i = \begin{Vmatrix} x^{l_1+\ldots+l_{i-1}+1} \\ \dots \\ x^{l_1+..+l_{i-1}+l_i} \end{Vmatrix}$

Тогда система (80) распадается на k систем, порядок которых $l_i < n$:
$\dot{\vec{X}}_i = A_i\vec{X}_i + \vec{f}_i(t),\ i = \overline{1,k}$

Для приведения матрицы линейного преобразования к клеточно-диагональному виду нужно найти собственные векторы линейного преобразования. Вектор $\vec{x} \neq 0$ называется собственным вектором линейного преобразования, матрица которого равна A, если $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Пусть $A = \left\|a^i_j\right\|,\ i,j = \overline{1,n}$, а $\begin{Vmatrix} x^1 \\ \cdots \\ x^n \end{Vmatrix}$ - компоненты собственного вектора. Тогда компоненты собственного вектора должны удовлетворять системе однородных линеней-ных уравнений вида $||A - \lambda E||\vec{x} = 0$. Чтобы эта система имела ненулевое решение необходимо, чтобы $\det||A - \lambda E|| = P_n(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\operatorname{trace} A + ... + \det A = 0$.
$P_n(\lambda)$ - характерестический многочлен матрицы A.

Случай простых корней характеристического многочлена

Рассмотрим однорудную систему с постоянными коэффициентами

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \tag{81}$$

. Задача состоит в том, чтобы найти вектор функции $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$, которые будут образовывать ФСР нашей системы.

Корни характеристического многочлена $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ простые и действительные.

Таким $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ соответствуют собственные векторы $\vec{h}_1, \ldots, \vec{h}_n$ ($A\vec{h}_i = \lambda_i\vec{h}_i$) Можно показать, что собственные вектора, соответствующие разным собственным значениям линейно независимы, поэтому существует базис из собственных векторов $\vec{h}_1, \ldots, \vec{h}_n$, в котором матрица A имеет вид: $\bar{A} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ & & 0 & \lambda_n \end{Vmatrix}$ Тогда система (81) будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}^1}{dt} = \lambda_1\vec{x}^1 \\ \cdots \\ \dfrac{d\vec{x}^n}{dt} = \lambda_n\vec{x}^n \end{cases} \Longrightarrow$$

вектор-функции $\varphi_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix} e^{\lambda_1 t}, ..., \varphi_n = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{Vmatrix} e^{\lambda_n t}$ образует ФСР этой системы, т.к. являются линейно независимыми решениями. Матрица перехода в этом случае $S = \left\| \vec{h}_1, ..., \vec{h}_n \right\|$. Тогда получим, что

$$\vec{x}_1 = \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t}, ..., \vec{x}_n = \vec{h}_n e^{\lambda_n t} \tag{82}$$

является ФСР (81), т.к. $\vec{x}_i$, $i = \overline{1, n}$ из (82) являются решениями (81), линейная независимость вектор-функций $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n$ следует из того, что вронскиан (82) при $t = 0$ является $detS \neq 0$ (свойство 10 вронскиана). Тогда любое решение (81) представимо в виде

$$\vec{x} = c_1 \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + ... + c_n \vec{h}_n e^{\lambda_n t} \tag{83}$$

Можно доказать, что $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n$ - ФСР иначе:

Лемма 4.1. *Система функций $e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t}$, где все λ_i - разные, является линейно независимой.*

Доказательство. Составим линейную комбинацию, равную нулю: $c_1 e^{\lambda_1 t} + ... + c_n e^{\lambda_n t} = 0$ - продифференцируем $(n-1)$ раз и запишем получившуюся систему для поиска $c_1, ..., c_n$

$$\begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + ... + c_n e^{\lambda_n t} = 0 \\ \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} + ... + \lambda_n c_n e^{\lambda_n t} = 0 \\ \cdots \\ \lambda_1^{n-1} c_1 e^{\lambda_1 t} + ... + \lambda_n^{n-1} c_n e^{\lambda_n t} = 0 \end{cases}$$

Система является однородной, поэтому имеет тривиальное решение, но единственное ли оно?

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 t + ... + \lambda_n t} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 t + ... + \lambda_n t} \prod_{1 \leq j < i \geq n} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$$

Полученный определитель это определитель Вандермонда, который равен нулю только, если какая-то пара λ_i, λ_j совпадёт. Значит определитель не равен нулю по условию $\Rightarrow$ система имеет только тривиальное решение по теореме Крамера $\Rightarrow$ система линейно независима. ■

Лемма 4.2. *Система $\vec{\varphi}_1 = \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t}, ..., \vec{\varphi}_n = \vec{h}_n e^{\lambda_n t}$ является ФСР.*

Доказательство. $\vec{\varphi}_i = \vec{h}_i e^{\lambda_i t}$ является решением по построению. Рассмотрим $W(t)$: $W(t) = \left| \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} ... \vec{h}_n e^{\lambda_n t} \right|$, при $t = 0$: $W(0) = \left| \vec{h}_1 ... \vec{h}_n \right| \neq 0$, т.к. собственные вектора линейно независимые. Следовательно, по 10 свойству определителя Вронского система линейно независимая. ■

Итак, общее решение системы (81) записывается в виде:

$$\boxed{\vec{x}_0^{\text{об}} = c_1 \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + ... + c_n \vec{h}_n e^{\lambda_n t}}$$

Корни характеристического многочлена $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ простые, но среди них есть комплексные.

Пусть есть комплексные собственное число $\lambda_k = r_k + i\omega_k$ и ему соответствующий комплесный собственный вектор $\vec{h}_k + i\vec{d}_k$, где $\vec{h}_k$, $\vec{d}_k$ - действительные вектора. Так как характеристический многочлен это многочлен с действительными коэффициентами, то комплексгый корень идет вместе с комплексно ему сопряженным, т.е. $\bar{\lambda}_k = r_k - i\omega_k$ тоже является корнем характеристического многочлена.

Взяв комплексное сопряжение над равенством $A(\vec{h}_k + i\vec{d}_k) = (r_k + i\omega_k)(\vec{h}_k + i\vec{d}_k)$:

$$\overline{A(\vec{h}_k + i\vec{d}_k)} = A(\vec{h}_k - i\vec{d}_k) = \overline{(r_k + i\omega_k)(\vec{h}_k + i\vec{d}_k)} = (r_k - i\omega_k)(\vec{h}_k - i\vec{d}_k)$$

Т.е. $\vec{h}_k - i\vec{d}_k$ является собственным вектором для $\vec{\lambda}_k = r_k - i\omega_k$.

Аналогично случайно действительных простых корней система принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}_1}{dt} = \lambda_1 \vec{x}_1 \\ \ldots \\ \dfrac{d\vec{x}_k}{dt} = (r_k + i\omega_k)\vec{x}_k \\ \dfrac{d\vec{x}_{k+1}}{dt} = (r_k - i\omega_k)\vec{x}_{k+1} \\ \ldots \\ \dfrac{d\vec{x}_n}{dt} = \lambda_n \vec{x}_n \end{cases}$$

ФСР такой системы будет комплексной: $\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} e^{\lambda_1 t}$; ...; $\begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix} e^{r_k t}(cos\omega_k t + isin\omega_k t)$;

$\begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix} e^{r_k t}(cos\omega_k t - isin\omega_k t)$; ...; $\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} e^{\lambda_n t}$

Т.к. матрица перехода $S = \left\| \vec{h}_1, \ldots, \vec{h}_k + i\vec{d}_k, \vec{h}_k - i\vec{d}_k, \ldots, \vec{h}_n \right\|$, то комплексная ФСР (81) будет: $\vec{h}_1 e^{\lambda_1 t}$, ..., $(\vec{h}_k + i\vec{d}_k)e^{r_k t}(cos\omega_k t + isin\omega_k t)$, $(\vec{h}_k - i\vec{d}_k)e^{r_k t}(cos\omega_k t - isin\omega_k t)$, ..., $\vec{h}_n e^{\lambda_n t}$

Рассмотрим систему функций, у которых первые $k-1$ функции являются функциями построенной выше системы. В качестве k-ой и $k+1$-ой функций возьмём:

$$\vec{q}_k = \frac{1}{2}((\vec{h}_k + i\vec{d}_k)e^{r_k t}(cos\omega_k t + isin\omega_k t) + (\vec{h}_k - i\vec{d}_k)e^{r_k t}(cos\omega_k t - isin\omega_k t)) = e^{r_k t}(\vec{h}_k cos\omega_k t - \vec{d}_k sin\omega_k t)$$

$$\vec{q}_{k+1} = \frac{1}{2i}((\vec{h}_k+i\vec{d}_k)e^{r_k t}(cos\omega_k t+isin\omega_k t)-(\vec{h}_k-i\vec{d}_k)e^{r_k t}(cos\omega_k t-isin\omega_k t)) = e^{r_k t}(\vec{h}_k sin\omega_k t+\vec{d}_k cos\omega_k t)$$

Остальные вектор-функции оставим прежними. Так построенная система будет линейно независимой, т.к. была получена линейными комбинациями линейно независимых вектор-функций. Каждая функция данной системы будет решением (81) по построению и принципу суперпозиции $\Rightarrow$ полученная система является ФСР (81) и содержит только действительные функции $\Rightarrow$

$$\boxed{\vec{x}_0^{\text{об}} = c_1\vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + ... + c_k e^{r_k t}(\vec{h}_k cos\omega_k t - \vec{d}_k sin\omega_k t) + c_{k+1}e^{r_k t}(\vec{h}_k sin\omega_k t + \vec{d}_k cos\omega_k t) + ... + c_n\vec{h}_n e^{\lambda_n t}}$$

Случай кратных корней характеристического многочлена

В общем случае по основной теореме алгебры характеристический многочлен представляется в виде: $P_n(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\,\mathrm{trace}\,A + ... + detA = (\lambda-\lambda_1)^{k_1}\cdot ... \cdot(\lambda-\lambda_m)^{k_m}$, где $\lambda_1, ..., \lambda_m$ являются собственными числами матрицы A, $k_i \geq 1$, $i = \overline{1,m}$. В таком случае количество собственных вектором может быть меньше размерности пространства, поэтому матрица может быть не диагонализируема.

Определение 4.6. *Множество $R_s = \ker(A-\lambda_s E)^{k_s}$, $s = \overline{1,m}$, где λ_s - корень кратности k_s характеристического многочлена, называется **корневым пространством***

Одно из утверждений теоремы Жордана: $\vec{R}^n = R_1 \oplus ... \oplus R_m$ пространство раскладывается в прямую сумму корневых подпространств, а также $dimR_s = k_s$. Следовательно, если выбрать базис, как объединение базисов корневых подпространств, то исходная система распадается на m систем порядка k_s, $s = \overline{1,m}$, связывающих $k_s \leq n$ функций. Рассмотрим одну из таких систем.

Обозначим $\lambda_s = \bar{\lambda}$, $k_s = l$, перенумеруем и переобозначим искомые функции $x^{k_1+...+k_{s-1}+1} = \bar{x}_1$, ..., $x^{k_1+...+k_{s-1}+l} = \bar{x}^l$ Тогда имеем задачу: решить систему

$$\dot{\vec{\bar{x}}} = \bar{A}\vec{\bar{x}} \tag{84}$$

где $\bar{A}$ является сужением A на подпространство $R_s = \ker(A-\bar{\lambda}E)^l = \ker B^l$, т.е. $\forall\vec{\bar{x}} \in R_s \mapsto B^l\vec{\bar{x}} = 0$ по определению ядра.

Имеет место вложенность: $0 \subset \ker B \subset \ker B^2 \subset ... \subset \ker B^l$, т.к. $\forall\vec{\bar{x}} : B^{i-1}(\vec{\bar{x}}) = 0 \mapsto B^i(\vec{\bar{x}}) = B(B^{i-1}(\vec{\bar{x}})) = 0$

Обозначим $T_i = \ker B^i$, $i = \overline{1,k}$, где $k \leq l$

Примечание. *Неравенство $k \leq l$ связано с тем, что может оказаться, что $\forall\vec{\bar{x}} \in R_s \mapsto B^k\vec{\bar{x}} = 0$ и строить T_i невозможно*

Для $i = \overline{1,k}$ определим множество $\mathcal{V}^i = \{\vec{\bar{x}} \in \mathcal{V}^i : B^i\vec{\bar{x}} = 0, B^{i-1}\vec{\bar{x}} \neq 0\}$. Заметим, что $\mathcal{V}^1$ является по построению собственным подпространством A.

В силу определения B^i и $\mathcal{V}^i$: $\mathcal{V}^i = \ker B^i \setminus \ker B^{i-1}$, $i = \overline{2,k}$. По построению $R_s = \mathcal{V}^1 \oplus ... \oplus \mathcal{V}^k$. Осталось выбрать базис в $\mathcal{V}^i$, $i = \overline{2,k}$.

Теорема 4.5. *Пусть $i > j$, тогда $\forall\vec{h}_i \in \mathcal{V}^i\, \exists\vec{h}_j \in \mathcal{V}^j : \vec{h}_j = B^{i-j}\vec{h}_i$.*

Доказательство. Построим такой $\vec{h}_j$ и покажем, что он лежит в $\mathcal{V}^j$.

$$B^j\vec{h}_j = B^j(B^{i-j}(h_i)) = (B^jB^{i-j})(\vec{h}_i) = B^i\vec{h}_i = 0$$
$$B^{j-1}\vec{h}_j = B^{j-1}(B^{i-j}(h_i)) = (B^{j-1}B^{i-j})(\vec{h}_i) = B^{i-1}\vec{h}_i \neq 0$$

■

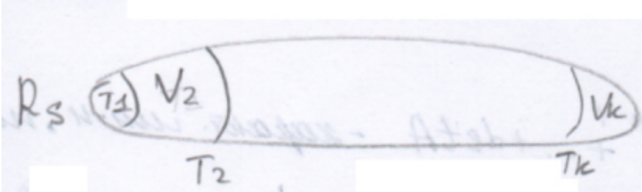


Рис. 1

Построение соответствующего базиса начинается с определения собственных векторов A, соответствующих числу $\bar{\lambda}$. Для этого решается уравнение $(\bar{A} - \bar{\lambda}E)\vec{\bar{x}} = B\vec{\bar{x}} = 0$.

Рассмотрим случай, когда имеется только один собственный вектор $\vec{e}$. В этом случае $k = l$ (наше подпространство будет представимо в виде 1 жордановой клетки). Вектор $\vec{e}$ образует базис в $\mathcal{V} = T_1$. Вектор $\vec{h}_1 \in \mathcal{V}^2$ найдём как решение $B\vec{h}_1 = \vec{e}$, по доказанной выше теореме такое уравнение имеет решение. Вектор $\vec{h}_1$ называется **присоединенным** к вектору $\vec{e}$. Вектора $\vec{e}$ и $\vec{h}_1$ образуют базис в T_2. Определим векторы $\vec{h}_i$, $i = \overline{2, l-1}$ из уравнений $B\vec{h}_i = \vec{h}_{i-1}$. Так построенные векторы $\vec{e}, \vec{h}_1, ..., \vec{h}_{l-1}$ образует базис в R_s. Этот базис называется жордановой цепью.

Запишем матрицу системы в этом базисе. Все построенные векторы находим из уравнений: $\bar{A}\vec{e} = \bar{\lambda}\vec{e}$, $\bar{A}\vec{h}_1 = \vec{e} + \bar{\lambda}\vec{h}_1$, ..., $\vec{A}\vec{h}_{l-1} = \vec{h}_{l-2} + \bar{\lambda}\vec{h}_{l-1}$

$$\bar{A} = \begin{Vmatrix} \bar{\lambda} & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \bar{\lambda} & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \bar{\lambda} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \bar{\lambda} \end{Vmatrix} \text{ - жорданова клетка размер } l$$

В таком базисе системе имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}^{\,1}}{dt} = \bar{\lambda}\bar{x}^{\,1} + \bar{x}^{\,2} \\ \dots \\ \dfrac{d\bar{x}^{\,n-1}}{dt} = \bar{\lambda}\bar{x}^{\,n-1} + \bar{x}^{\,n} \\ \dfrac{d\bar{x}^{\,n}}{dt} = \bar{\lambda}\bar{x}^{\,n} \end{cases} \tag{85}$$

Замена: $\bar{x}^{\,i} = \bar{y}^{\,i}e^{\bar{\lambda}t}$, $i = \overline{1, l} \Rightarrow \dot{\bar{y}}^i e^{\bar{\lambda}t} + \bar{\lambda}\dot{\bar{y}}^i e^{\bar{\lambda}t} = \lambda\dot{\bar{y}}^i e^{\bar{\lambda}t} + \dot{\bar{y}}^{i+1} e^{\bar{\lambda}t} \Rightarrow$ Система преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{y}^{\,1}}{dt} = \bar{y}^{\,2} \\ \dfrac{d\bar{y}^{\,2}}{dt} = \bar{y}^{\,3} \\ \dots \\ \dfrac{d\bar{y}^{\,l-1}}{dt} = \bar{y}^{\,l} \\ \dfrac{d\bar{y}^{\,l}}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{y} = \begin{Vmatrix} c_l\dfrac{t^{l-1}}{(l-1)!} + c_{l-1}\dfrac{t^{l-2}}{(l-2)!} + ... + c_2\dfrac{t}{1!} + c_1 \\ \dots \\ \dots \\ c_l t + c_{l-1} \\ c_l \end{Vmatrix} \Rightarrow \tag{86}$$

$$\Rightarrow \vec{\bar{x}} = \begin{Vmatrix} c_l \dfrac{t^{l-1}}{(l-1)!} + c_{l-1}\dfrac{t^{l-2}}{(l-2)!} + ... + c_2\dfrac{t}{1!} + c_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ c_l t + c_{l-1} \\ c_l \end{Vmatrix} \cdot e^{\bar{\lambda} t}$$

Переходим к старому базису:

$$\vec{x}(t) = \left\| \vec{e}, \vec{h}_1, ..., \vec{h}_{l-1} \right\| \cdot \begin{Vmatrix} c_l \dfrac{t^{l-1}}{(l-1)!} + c_{l-1}\dfrac{t^{l-2}}{(l-2)!} + ... + c_2\dfrac{t}{1!} + c_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ c_l t + c_{l-1} \\ c_l \end{Vmatrix} \cdot e^{\bar{\lambda} t} \Rightarrow$$

$$\vec{x}_0^{\text{об}} = \vec{e}\left(c_1 + ... + c_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}\right) e^{\bar{\lambda} t} + ... + \vec{h}_{l-1} c_l e^{\bar{\lambda} t} =$$

$$= \boxed{c_1 \vec{e} e^{\bar{\lambda} t} + c_2(\vec{e}t + \vec{h}_1) e^{\bar{\lambda} t} + ... + c_l \left[\vec{e}\frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + \vec{h}_1 \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + ... + \vec{h}_{l-1}\right]} \quad (87)$$

Полагая последовательно $c_1 = 1, c_2 = ... = c_n = 0$; ...; $c_1 = ... = c_{i-1} = c_{i+1} = ... = c_n = 0$, $c_i = 1$, $i = \overline{2, n}$ получим функции:

$\vec{\varphi}_1 = \vec{e} e^{\bar{\lambda} t}$, $\vec{\varphi}_1 = (\vec{e}t + \vec{h}_1) e^{\bar{\lambda} t}$, ..., $\vec{\varphi}_{l-1} = \left(\vec{e}\dfrac{t^{l-1}}{(l-1)!} + \vec{h}_1 \dfrac{t^{l-2}}{(l-2)!} + ... + \vec{h}_{l-1}\right) e^{\bar{\lambda} t}$. Они являются решениями по построению, $W(0) = \left| ||\vec{e}, ..., \vec{h}_{l-1}|| \right| \neq 0 \Rightarrow \vec{\varphi}_1, ..., \vec{\varphi}_{l-1}$ - линейно независимы $\Rightarrow \vec{\varphi}_1, ..., \vec{\varphi}_{l-1}$ - ФСР.

4.6 Линейная неоднородная система уравнений в случае, когда неоднородность представлена векторным квазимногочленом

4.7 Формула Лиувилля-Остроградского для нормальной линейной однородной системы уравнений и для линейного однородного уравнения n-го порядка.

Следующее свойство вронскиана рассмотрим в виде теоремы. Для начала докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 4.3. *[Формула Эйлера дифференцирования определителя]*

Детерминант матрицы представим в виде: $\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & ... & a_n^1 \\ a_1^i & ... & a_n^i \\ ... & ... & ... \\ a_1^n & ... & a_n^n \end{vmatrix} = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} \cdot {a_k}^i {M_i}^k$ *Тогда для*

$$\dot{\Delta}(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot \dot{a}_j^i M_i^j$$

Теорема 4.6. *[Формула Лиувилля-Остроградского]*
Пусть $W(x)$– вронскиан решений $\vec{\varphi_1}(t), ..., \vec{\varphi_n}(t)$ однородной системы $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$. Тогда имеет место формула:

$$\dot{W(t)} = W(t) \cdot trA$$

где $trA = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kk}(t)$

Доказательство. Зафиксируем среди системы решений функцию $\vec{\varphi_j} = \begin{pmatrix} \varphi_j^1 \\ \varphi_j^2 \\ ... \\ \varphi_j^n \end{pmatrix}$. Рассмотрим i - ую компоненту φ_j^i решения $\vec{\varphi_j}$. Поскольку $\vec{\varphi_j}$ решение, то $\frac{d\vec{\varphi_j}}{dt} = A\vec{\varphi_j} \Rightarrow$

$$\frac{d\varphi_j^i}{dt} = \dot{\varphi_j^i} = \sum_{k=1}^{n} a_k^i \varphi_j^k$$

Рассмотрим вранскиан $W(t)$, продифференцируем его по t

$$\dot{W}(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot \dot{\varphi_j^i} M_j^i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_k^i \varphi_j^k M_j^i$$

Переставим суммы местами

$$\dot{W}(t) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_k^i \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \varphi_j^k M_j^i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_k^i \delta_i^k W(t) = W(t)\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_k^i \delta_i^k = W(t)\sum_{k=1}^{n} a_k^k$$

$$\dot{W}(t) = W(t) \cdot trA$$

∎

Также можно решить это уравнение и переписать в виде

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} trA(u)du\right)$$

4.8 Метод вариации постоянных для линейной неоднородной системы уравнений и для линейного неоднородного уравнения n-го порядка.

$$\text{Рассмотрим } y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x). \tag{88}$$

$\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ – Ф.С.Р. однородного уравнения $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = 0$. Это означает, что

$$\forall k = \overline{1,n} \hookrightarrow \varphi_k^{(n)} + a_1(x)\varphi_k^{(n-1)} + ... + a_n(x)\varphi_k \equiv 0 \tag{89}$$

Перепишем уравнение (88) в эквивалентном виде. Для этого сделаем следующие замены: $y = v_1,\ y^{(1)} = v_2,\ ...,\ y^{(n-1)} = v_n$. Тогда получим:

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dx} = v_2, \\ \frac{dv_2}{dx} = v_3, \\ ..., \\ \frac{dv_n}{dx} = f(x) - a_1(x)v_n - ... - a_n(x)v_1. \end{cases} \tag{90}$$

Будем искать решение (88) в виде

$$y(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + ... + C_n(x)\varphi_n(x)$$

Тогда получается, что решение эквивалентной системы будем искать в виде

$$\vec{v}(x) = \begin{Vmatrix} v_1(x) \\ ... \\ v_n(x) \end{Vmatrix} = C_1(x) \begin{Vmatrix} \varphi_1(x) \\ ... \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) \end{Vmatrix} + ... + C_n(x) \begin{Vmatrix} \varphi_n(x) \\ ... \\ \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{Vmatrix} \tag{91}$$

Рассмотрим функцию $v_k(x) = C_1(x)\varphi_1^{(k-1)} + ... + C_n(x)\varphi_n^{(k-1)}$. Продифференцируем эту функцию по x:

$$\forall k = \overline{1, n-1} \hookrightarrow \dot{v_k}(x) = \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(k-1)} + ... + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(k-1)} + C_1(x)\varphi_1^{(k)} + ... + C_n(x)\varphi_n^{(k)} \tag{92}$$

С другой стороны $\dot{v_k}(x) = v_{k+1} = C_1(x)\varphi_1^{(k)} + ... + C_n(x)\varphi_n^{(k)}$. Тогда получаем

$$\dot{v_k}(x) = C_1(x)\varphi_1^{(k)} + ... + C_n(x)\varphi_n^{(k)} = \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(k-1)} + ... + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(k-1)} + C_1(x)\varphi_1^{(k)} + ... + C_n(x)\varphi_n^{(k)} \tag{93}$$

$$\forall k = \overline{1, n-1} \hookrightarrow \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(k-1)} + ... + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(k-1)} = 0 \tag{94}$$

$$k = n: \ \dot{v_n}(x) = \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + ... + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-1)} + C_1(x)\varphi_1^{(n)} + ... + C_n(x)\varphi_n^{(n)} =$$
$$= f(x) - a_1(x)\left(C_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + ... + C_n(x)\varphi_n^{(n-1)}\right) - ... - a_n(x)\left(C_1(x)\varphi_1 + ... + C_n(x)\varphi_n\right)$$

$$\dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + ... + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-1)} + C_1(x)\left(\varphi_1^{(n)} + a_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + ... + a_n(x)\varphi_1\right) + ... +$$
$$+ C_n(x)\left(\varphi_n^{(n)} + a_1(x)\varphi_n^{(n-1)} + ... + a_n(x)\varphi_n\right) = f(x)$$

Из уравнения (89) следует что выражения в скобках равны нулю, тогда получим

$$k = n: \ \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + ... + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-1)} = f(x)$$

Т.е. мы получили следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{C}_1(x)\varphi_1 + ... + \dot{C}_n(x)\varphi_n = 0, \\ ... \\ \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-2)} + ... + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-2)} = 0, \\ \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + ... + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \tag{95}$$

Система (95) это линейная система для определения $\dot{C}_1, \ ..., \ \dot{C}_n$. Определитель этой системы $\Delta = W(x) \neq 0$, а значит система разрешима единственным образом.

4.9 Теорема Штурма

Рассмотрим на промежутке $I = I(x)$ следующее уравнение:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \tag{96}$$

где $a(x) \in C^1_{I(x)}$, $b(x) \in C^1_{I(x)}$.

Решение (96) такое, что $y(x)$ тождественно не равно нулю на $I(x)$ называется нетривиальным , а точка $x_0 \in I$ такая, что $y(x_0) = 0$ называется нулём нетривиального решения $y(x)$.

Уравнение (96) приводится к виду:

$$z'' + q(x)z = 0. \tag{97}$$

Для этого сделаем замену $y(x) = c(x) \cdot z(x)$, где $z(x)$ - решение уравнения выше (далее будем считать, что $c = c(x)$ и $z = z(x)$:

$$z'' \cdot c + 2c' \cdot z' + c'' \cdot z + a(x)(c' \cdot z + z' \cdot c) + b(x) \cdot c \cdot z = 0,$$

здесь выберем $c \neq 0$ так, что бы для z' выполнялось:

$$z'(2c' + a(x)c) = 0.$$

Тогда получаем линейное однородное уравнение $\Rightarrow\ 2c' + a(x)c = 0$, которое можно преобразовать в:

$$\frac{dc}{c} = -\frac{a(x)}{x}dx \ \Rightarrow\ c(x) = c_0 \cdot exp\left[-\frac{1}{2}\int a(x)dx\right] > 0. \tag{98}$$

Возьмем $c_0 = 1 \ \Rightarrow\ c \cdot z'' + (c'' + c'a + bc)z = 0$, тогда можемм ввести $q(x)$ такое, что:

$$q(x) = \frac{c'' + c'a}{c} + b.$$

Также заметим, что из (98) следует, что $c(x) > 0$. Тогда в силу замены $y = c(x) \cdot z$, $x_0 \in I$ является нулём $y(x)$ тогда и только тогда, когда x_0 является нулём $z(x)$.

Определение 4.7. *Точка x_0 является нулём $f(x) \in C^\infty$ кратности k, если $f(x_0) = f'(x_0) = ... = f^{(k-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(k)}(x_0) \neq 0$.*

Лемма 4.4. *Все нули нетривиального решения (97) (также как и для (96)) являются простыми, т.е. $k = 1$.*

Доказательство. От противного: пусть x_0 является нулём кратности 2, тогда $z(x_0) = z'(x_0) = 0$. Тогда в силу основной теоремы $z(x) = 0 \forall x \in I$ - противоречие, т.к. $z(x)$ - нетривиальное решение по условию. ■

Лемма 4.5. *Пусть M - множество нулей нетривиального решения $y(x)$ на нечетном промежутке $[x_1; x_2]$. Множество M не имеет предельной точки.*

Доказательство. От противного: пусть M - множество нулей. Пусть x_0 - предельная точка и $\exists x_k$:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \in [x_1; x_2],\ y(x_k) = 0,\ k = 1{,}2{,}...$$

Так как $y(x)$ - непрерывно, то $\lim\limits_{k\to\infty} y(x_k) = 0 = y(\lim\limits_{k\to\infty} x_k) = y(x_0) \ \Rightarrow\ y(x_0) = 0.$

Рассмотрим $[x_k; x_{k+1}]$ и $y(x)$ на нём, т.к. $y(x_k) = y(x_{k+1}) = 0$, то по теореме Ролля $\exists c_k : x_k \leq c_k \leq x_{k+1} : y'(c_k) = 0$ и т.к. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \lim\limits_{k\to\infty} x_{k+1} = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} c_k = x_0$. Из этого может получить, что так как $y'(x)$ - непрерывна, то:

$$\lim_{k\to\infty} y'(c_k) = 0 = y'(\lim_{k\to\infty} c_k) = y'(x_0) = 0$$

Так как по предложению $x_0 \in [x_1; x_2]$ и $y_0(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$ - получим задачу Коши для $x_0 \in [x_1; x_2] \Rightarrow$ в силу теорем существования и единственности решения задачи Коши: $y \equiv 0$ - единственное решение на $[x_1; x_2]$ - получим противоречие с нетривиальным решением. ■

Теорема 4.7 (Теорема Штурма)**.** *Рассмотрим уравнения:*

$$y'' + q(x)y = 0 \tag{99}$$

$$z'' + Q(x)z = 0, \tag{100}$$

где уравнение (99) будем называть быстрым, а (100) - медленным.

Пусть

$$q(x) \in C^1_{I(x)}, Q(x) \in C^1_{I(x)}, \forall x \in I \to q(x) \leq Q(x).$$

Пусть $y(x)$ - нетривиальное решение (99), z(x) - нетривиальное решение (100). Если $x_1, x_2 \in I$ - последовательное нули $y(x)$б то либо $\exists x_0 \in (x_1; x_2)$, в которой $z(x_0) = 0$, либо $z(x_1) = z(x_2) = 0$.

Доказательство. Пусть x_1, x_2 - два соседних нуля $y(x)$, т.е. $y(x) \neq 0$ на $(x_1; x_2)$, пусть для определённости $y(x) > 0$.

По определению:

$$y'(x_1) = \lim_{x\to x_1} \frac{y(x) - y(x_1)}{x - x_1} \geq 0;\ y'(x_2) = \lim_{x\to x_2} \frac{y(x) - y(x_2)}{x - x_2}.$$

В силу Леммы 4.4 нули x_1 и x_2 должны быть однократными, т.е. $y'(x_1) \neq 0$, $y'(x_2) \neq 0$. Таким образом $y'(x_1) > 0$, $y'(x_2) < 0$.

Умножим (100) на $z(x)$, а (99) на y(x) и вычтем из первого второе:

$$zy'' + qyz - yz''' - Qyz = 0;\ zy'' - yz'' = (zy' - yz')' = (Q - q)zy.$$

Проинтегрируем полученное тождество на $[x_1; x_2]$:

$$(zy' - yz')\Big|_{x_1}^{x_2} = \int\limits_{x_1}^{x_2} (Q(x) - q(x))zydx;$$

$$z(x_2)y'(x_2) - y(x_2)z'(x_2) - z(x_!)y'(x_1) + y(x_1)z'(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} (Q(x) - q(x))zydx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(x_2)y'(x_2) - z(x_1)y'(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} (Q(x) - q(x))zydx, \tag{101}$$

здесь $z(x_2)y'(x_2) < 0$, $z(x_1)y'(x_1) > 0$, $(Q(x) - q(x)) > 0$ и $y > 0$.

Предположим противное - пусть теорема Штурма не верна. Тогда возможны варианты:

1. $z > 0 \forall x \in [x_1; x_2]$. Тогда левая часть (101) отрицательна, а правая положительна - противоречие.

2. $z > 0 \forall x \in [x_1; x_2)$, $z(x_2) = 0$ - аналогично.

3. $z > 0 \forall x \in (x_1; x_2]$ $z(x_1) = 0$ - аналогично.

Таким образом $\exists x_0 \in (x_1; x_2) : \ z(x_0) = 0$. Если $z(x_1) = z(x_2)$, то может быть, что $Q(x) \equiv q(x) \Rightarrow z(x) = const \cdot y(x)$, либо:

$$\exists x* \in (x_1; x_2) : \ Q(x*) > q(x*),$$

в силу непрерывности $Q(x)$ и $q(x) \exists \triangle$:

$$\int\limits_{x*-\triangle}^{x*+\triangle} (Q(x) - q(x)) z(x) y(x) dx = 0,$$

значит $\exists x_0$, где $z(x)$ меняет знак $\Rightarrow z(x_0) = 0$ ■

4.10 Следствия из теоремы Штурма

Следствие 4.7.1. *Пусть есть уравнение:*

$$y'' + q(x) y = 0; \ q(x) \le 0 \forall x \in I(x),$$

тогда любое нетривиальное решение (100) на I имеет не более одного нуля.

Доказательство. В качестве второго уравнения можно взять $z'' + Q(x) z = 0$, здесь Q(x) = 0. Пусть решение уравнения (100) имеет нули x_1 и x_2 $Q(x) \ge q(x) \Rightarrow 0 \ge q(x)$. Тогда по теореме Штурма любое решение (99) должно иметь ноль на $(x_1; x_2)$. В качестве решения можем вщять $z \equiv 1$, которое не и имеет нулей $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ для решения (100) не может быть больше одного нуля. ■

Следствие 4.7.2. *Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - два линейно независимых нетривиальных решения (100), $x_1, x_2 \in I$ - два соседних нуля $\varphi(x)$, тогда $\psi(x)$ имеет только один нуль на $(x_1; x_2)$.*

Доказательство. Применим теорему Штурма к двум одинаковым уравнениям ($Q(x) \le Q(x)$). По теореме Штурма $\psi(x)$ на $(x_1; x_2)$ имеет хотя бы один нуль. Общих нулей $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ иметь не могут, так как они линейно независимые ($W(x_1) = 0$, если бы $\varphi(x_1) = \psi(x_1) = 0$, что означало бы, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - ЛЗ). Итак, $\psi(x)$ имеет нуль x_0 на $(x_1; x_2)$.

Докажем, что такой нуль единственный - от противного: пусть нулей два для $\psi(x) : x*$ и $\overline{x}$. Если нулей $\psi(x)$ два, то по теореме Штурма для $\varphi(x)$ будет ноль между $x*$ и $\overline{x}$ - противоречие тому, что x_1 и x_2 соседние нули $\varphi(x)$. ■

Таким образом нули решений (96) перемешаются.

5 Билет 5. Автономные системы дифференциальных уравнений

5.1 Основные определения

Система ДУ вида:

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, ..., x^n); \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}); \quad \dot{x}^i = f^i(\vec{x}) \qquad i = \overline{1,n} \tag{102}$$

Называется автономной системой ДУ, если $\vec{f} = \{f_i(x^1, ..., x^n)\},\ i = \overline{1,n}$ не зависит явно от аргумента t; $x^j = x^j(t),\ j = \overline{1,n}$ являются интегральными кривыми (102).
$\vec{x}(t) = \{x^j(t)\} \in \mathbb{R}^{n+1} = t \times \mathbb{R}^n$

Определение 5.1. *Пусть $\vec{x}(t)$ является решением* (102)*. Кривая γ в $\mathbb{R}^n$ называется фазовой траекторией* (102)*. Само $\mathbb{R}^n$ называется фазовым пространством* (102)*.*

$$\gamma = \begin{cases} x^1 = x^1(t) \\ x^2 = x^2(t) \\ .... \\ x^n = x^n(t) \end{cases} \tag{103}$$

Будем предполагать, что $\vec{f} = \{f^i(x^1, ..., x^n)\} \in \mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n, i = \overline{1,n}$ непрерывно дифференцируемые функции по всей совокупности переменных.

Теорема 5.1. *Если $\varphi(t)$ решение* (102)*, то $\varphi(t+\tau)$ $\forall \tau = const \in \mathbb{R}$ тоже решение* (102)

Доказательство.
Пусть $u = t + \tau : \dfrac{d(\varphi(t+\tau))}{dt} = |t+\tau = u| = \dfrac{d\varphi(u)}{du}\dfrac{du}{dt} = \dfrac{d\varphi(u)}{dt} = f(\varphi(u)) = f(\varphi(t+\tau))-$
$-$ т.е. $\varphi(t+\tau)$ – решение ■

Следствие 5.1.1. *Пусть $\vec{\varphi}(t_0, \vec{x}_0)$ – решение* (102)*, такое что $\vec{\varphi}(t, t_0, \vec{x}_0) = \vec{x}_0$. В силу доказанной теоремы $\vec{\varphi}(t+\tau, t_0+\tau, \vec{x}_0)$ тоже решение* (102)*. (Формально заменяем $t+\tau$ на u, $t_0+\tau$ на u_0), причём $\vec{\varphi}(t_0+\tau, t_0+\tau, \vec{x}_0) = \vec{x}_0$. Тогда, если $\vec{f}(x^1,...,x^n)$ является непрерывной функцией n переменных вместе с $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}$, то показанные решения совпадают по основной теореме.*
$\vec{\varphi}(t+\tau, t_0+\tau, \vec{x}_0) \equiv \vec{\varphi}(t, t_0, \vec{x}_0)$. *Положим, в силу произвольности τ, $\tau = -t_0 \Rightarrow$*
$\Rightarrow \vec{\varphi}(t, t_0, \vec{x}_0) = \vec{\varphi}(t - t_0, 0, \vec{x}_0) = \vec{\varphi}(t - t_0, \vec{x}_0)$
Т.о. положение движущейся по фазовой траектории точки определяется начальным положением $\vec{x}_0$ в момент времени t_0 и длительностью $t - t_0$, отсчитываемого от начального момента времени t_0, но не самим этим моментом. (Т.е. начальный момент не существенен и можно положить его равным нулю).

Теорема 5.2. *Фазовые траектории либо не имеют общих точек, либо совпадают*

Доказательство.
Пусть $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – решения (102), причём $x_0 = \varphi(t_1) = \psi(t_2)$ Рассмотрим $\chi(t) = \psi(t + (t_2 - t_1))$, согласно предыдущей теореме $\chi(t)$ тоже явл. реш. (102), причём $\chi(t_1) \overset{\text{по постр.}}{=\!=\!=} x_0 = \psi(t_2) =$
$= \varphi(t_1) \Rightarrow$ По основной теореме $\varphi(t) \equiv \chi(t) \overset{def}{=} \psi(t + (t_2 - t_1)) \Rightarrow$ траектории $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ совпали. ■

Согласно доказаному можно считать, что фазовое пространство (102) "склеено"из фазовых траекторий.

5.2 Типы фазовых траекторий

Определение 5.2. *Точка* $\vec{a} \in \vec{\mathbb{R}}^n$ *называется положением равновесия* (102)*, если* $\vec{f}(\vec{a}) = 0 \ \ (f^i(a^1, ..., a^n) = 0, \ i = \overline{1, n})$

Утверждение 5.1. *Если* $\vec{a} \in \vec{\mathbb{R}}^n$ *– положение равновесия* (102)*, то* $\vec{x}(t) = \vec{a}, -\infty < t < +\infty$ *является решением* (102)

Доказательство.
$\vec{x}(t) \equiv \vec{a} \overset{(102)}{\Rightarrow} 0 = \dfrac{d\vec{x}}{dt} = \dfrac{d\vec{a}}{dt} = f(\vec{a}) = 0 \Rightarrow$ удовлетворяет (102) ■

Т.о. точка равновесия $\vec{a} \in \vec{\mathbb{R}}^n$ является фазовой траекторией (102)

Следствие 5.2.1. *Решение* (102) *не может прийти в положение равновесия за конечное время.*

Доказательство.
Пусть это не так и фазовая траектория пришла в положение равновесия за конечное время. Т.о., т.к. положение равновесия тоже является фазовой траекторией, то они пересекаются, что невозможно $\Rightarrow$ противоречие ■

Теорема 5.3. *Фазовые траектории принадлежат одному из трёх типов:*

1. *Точка (равновесия)*
2. *Фазовая траектория, отличная от точки, есть гладкая кривая*
3. *Замкнутая кривая(цикл) – периодическая*

5.3 Групповые свойства автономных систем

1. $\vec{\varphi}(t_1 + t_2, \vec{x}_0) = \varphi(t_2, \vec{\varphi}(t_1, \vec{x}_0)) = \vec{\varphi}(t_1, \vec{\varphi}(t_2, \vec{x}_0))$

   Доказательство.
   Рассмотрим $\vec{\varphi}(t, \vec{\varphi}(t_1, \vec{x}_0))$ – решение (102); $\vec{\varphi}(t + t_1; \vec{x}_0)$ – тоже решение (102)

   $$\left.\begin{aligned} &\vec{\varphi}(0, \vec{\varphi}(t_1, \vec{x}_0)) = \vec{\varphi}(t_1, \vec{x}_0) \\ &\vec{\varphi}(0 + t_1, \vec{x}_0) = \vec{\varphi}(t_1, \vec{x}_0) \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{основная теорема}} \vec{\varphi}(t + t_1; \vec{x}_0) \equiv \vec{\varphi}(t, \vec{\varphi}(t_1, \vec{x}_0))$$

   Аналогично, $\vec{\varphi}(t + t_2, \vec{x}_0) \equiv \vec{\varphi}(t, \vec{\varphi}(t_2, \vec{x}_0))$ ■

2. $\vec{\varphi}(-t; \vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)) = \vec{x}_0$

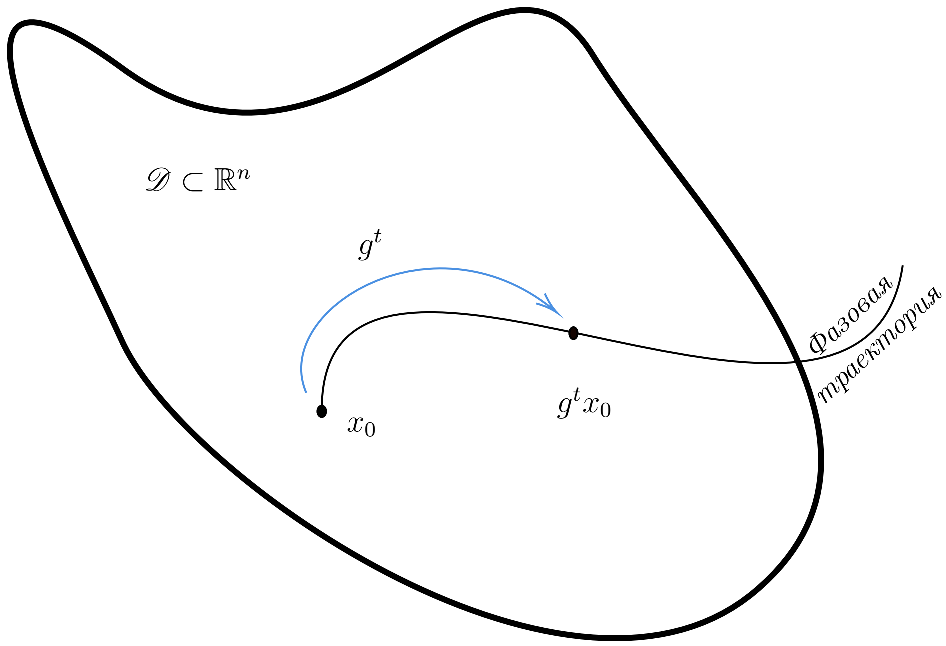
   Доказательство.
   Из 1): $\vec{\varphi}(t + \tau, \vec{x}_0) = \vec{\varphi}(\tau, \vec{\varphi}(t, \vec{x}_0))$. В силу произвольности τ при $\tau = -t$:
   $\vec{\varphi}(-t, \vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)) \overset{1)}{=} \vec{\varphi}(0, \vec{x}_0) = \vec{x}_0$ ■

5.4 Понятия фазового потока и фазового объема

Определение 5.3. *Рассматриваем давно привычную нам систему* $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$.

Пусть $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n$ *– это область в ее фазовом пространстве. Возьмем произвольную точку* $\vec{x}_0 \in \mathscr{D}$ *и выпустим из нее фазовую траекторию. Таким образом, с течением времени* t *мы будем двигаться по этой траектории. Обозначим точку на данной траектории в момент времени* t *как* $g^t\vec{x}_0$.

Теперь можно определить преобразование области $\mathscr{D}$: $\forall\vec{x}_0 \in \mathscr{D}$ *сделаем отображение* $\vec{x}_0 \to g^t\vec{x}_0$. *Получаем* $\mathscr{D} \to g^t\mathscr{D}$. *Другими словами, каждую точку* $\mathscr{D}$ *сносим по фазовой траектории на время* t.



Так вот преобразование g^t *и называется фазовым потоком.*

Перечислим несколько полезных свойств введенного нами фазового потока:

- $g^{t_1+t_2} = g^{t_1} \cdot g^{t_2} = g^{t_2} \cdot g^{t_1}$;
- $g^t \cdot g^{-t} = g^{-t} \cdot g^t = \mathrm{Id}$ – тождественное преобразование;
- Фазовый поток является группой;
- И еще сильнее, фазовый поток – однопараметрическая группа, то есть каждому числу $t \in \mathbb{R}$ соответствует единственное преобразование $g^t:\ \mathscr{D} \to g^t\mathscr{D}$.

Определение 5.4. *Пусть у нас опять есть область* $\mathscr{D}$ *фазового пространства* $\mathbb{R}^n$. *Подействуем на* $\mathscr{D}$ *фазовым потоком* g^t. *Тогда* $\mathscr{D}(t) = g^t\mathscr{D}$ *и* $\vec{x} = g^t\vec{x}_0$. *Определим следующую величину как фазовый объем:*

$$V_{\mathscr{D}}(t) = \int\limits_{\mathscr{D}(t)} d\vec{x} = \int\limits_{g^t\mathscr{D}} d(g^t\vec{x}_0).$$

5.5 Теорема Лиувилля

Теорема 5.4. *В автономной системе дифференциальных уравнений* $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$ *производная фазового объема* $V_{\mathscr{D}}(t)$ *области* $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n$ *фазового пространства может быть вычислена по формуле:*

$$\frac{dV_{\mathscr{D}}(t)}{dt} = \int\limits_{\mathscr{D}} \operatorname{div} \vec{f} \cdot d\vec{y},$$

где $\operatorname{div} \vec{f} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f^i}{\partial x^i}$ *– дивергенция* $\vec{f}$*, а* $\vec{y} = \vec{x}(0)$.

Доказательство.
Докажем, что производная равна этому при $t = 0$, а в силу автономности системы это будет верно в каждой точке.

Пишем производную по определению: $\dfrac{dV_{\mathscr{D}}}{dt}(0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{V_{\mathscr{D}}(t) - V_{\mathscr{D}}(0)}{t}$.

Из системы имеем $\vec{x} = \vec{y} + \int\limits_0^t \vec{f}(\tau) d\tau$.

При малых значениях t получаем следующее: $x^i = y^i + f^i(\vec{y})t + o(t), t \to 0$.

На все это дело можно смотреть как на замену координат $x^i \longrightarrow y^i$. Тогда получаем следующее выражение для фазового объема:

$$V_{\mathscr{D}}(t) = \int\limits_{\mathscr{D}(t)} d\vec{x} \overset{\mathscr{D}(0)=\mathscr{D}}{=\!=\!=} \int\limits_{\mathscr{D}} |J| d\vec{y},$$

где $J = \dfrac{\partial(x^1, x^2, \ldots, x^n)}{\partial(y^1, y^2, \ldots, y^n)}$ – якобиан преобразования.

Посчитаем этот якобиан:

$$J = \begin{vmatrix} 1 + \dfrac{\partial f^1}{\partial y^1} t & \dfrac{\partial f^1}{\partial y^2} t & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial y^n} t \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial y^1} t & 1 + \dfrac{\partial f^2}{\partial y^2} t & \cdots & \dfrac{\partial f^2}{\partial y^n} t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial y^1} t & \dfrac{\partial f^n}{\partial y^2} t & \cdots & 1 + \dfrac{\partial f^n}{\partial y^n} t \end{vmatrix} = \left(1 + \frac{\partial f^1}{\partial y^1} t\right)\left(1 + \frac{\partial f^2}{\partial y^2} t\right) \ldots \left(1 + \frac{\partial f^n}{\partial y^n} t\right) + o(t).$$

Здесь мы все, что имеет множители $t^2, t^3, \ldots, t^n$, завернули в $o(t)$. Однако если раскрыть скобки, то такие слагаемые все еще остаются. Раскроем эти скобки и опять впихнем все ненужное в $o(t)$:

$$J = 1 + \left(\frac{\partial f^1}{\partial y^1} + \frac{\partial f^2}{\partial y^2} + \cdots + \frac{\partial f^n}{\partial y^n}\right) t + o(t) = 1 + t \operatorname{div} \vec{f} + o(t).$$

Ну, а теперь считаем эту производную:

$$\frac{dV_{\mathscr{D}}}{dt} = \lim_{t\to 0} \frac{V_{\mathscr{D}}(t) - V_{\mathscr{D}}(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\int_{\mathscr{D}} \left(1 + t \operatorname{div} \vec{f} + o(t)\right) d\vec{y} - \int_{\mathscr{D}} d\vec{y}}{t} = \int\limits_{\mathscr{D}} \operatorname{div} \vec{f} \cdot d\vec{y}.$$

■

5.6 Теорема Пуанкаре

Теорема 5.5. *Пускай g^t – непрерывное взаимнооднозначное отображение, сохраняющее фазовый объем и переводящее ограниченную область $\mathscr{D}$ саму в себя, то есть $g^t\mathscr{D} = \mathscr{D}$. Тогда:*

$$\forall x_0 \in \mathscr{D} \longmapsto \forall U(x_0) \ \ \exists \overline{x} \in U(x_0): \ g^n\overline{x} \in U(x_0) \quad (n = t_0),$$

где $U(x_0)$ – некоторая окрестность точки x_0.

Другими словами, для любой окрестности U любой точки x_0 области $\mathscr{D}$ найдется точка $\overline{x}$, возвращающаяся обратно в эту же окрестность.