

1 Билет номер 5

1.1 Устойчивость по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость

Рассматривается общая система дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(t, x^1, \dots, x^n) \quad (1)$$

Пусть $\bar{x} = \bar{\varphi}(t, \bar{x}_0)$ – решение этой системы, такое что $\bar{\varphi}(t_0, \bar{x}_0) = \bar{x}_0$. А $\psi(t, \bar{x}_0)$ – произвольное решение, такое что $\psi(t, \bar{x}_0) = \bar{x}_0$.

Определение 1.1. Решение $\bar{x} = \bar{\varphi}(t, \bar{x}_0)$ называется *устойчивым по Ляпунову*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \bar{x}_0 : |\bar{x}_0 - \bar{x}_0| < \delta \rightarrow |\bar{\psi}(t, \bar{x}_0) - \bar{\varphi}(t_0, \bar{x}_0)| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, +\infty]$$

Определение 1.2. Решение $\bar{x} = \bar{\varphi}(t, \bar{x}_0)$ называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову, а так же

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \bar{x}_0 : |\bar{x}_0 - \bar{x}_0| < \delta \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{\psi}(t, \bar{x}_0) - \bar{\varphi}(t_0, \bar{x}_0)| = 0$$

1.2 Автономные линейные системы

Пусть в конечномерном линейном пространстве B линейный оператор задается матрицей $A = \|a_{ij}(t)\|$. Если a_{ij} ограничены, тогда норма матрицы

$$\|A\| = \max_{i,j=1,n} | \sup_{t \in I(t)} (a_{ij}(t)) |$$

Можно записать следующее неравенство:

$$\|A\bar{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\bar{x}\|$$

Теперь рассмотрим систему однородных уравнений, где A постоянна

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} \quad (2)$$

Тогда $\bar{x} = 0$ – решение.

Лемма 1.1. Если однородная линейная система имеет неограниченное решение, то нулевое решение не устойчиво.

Доказательство. Будем рассматривать систему (2). Пусть решение $\bar{\varphi}(t, \bar{x}_0)$ неограниченно. То есть

$$\forall M > 0 \exists t^* : |\bar{\varphi}(t^*, \bar{x}_0)| > M$$

Обратим определение устойчивости нулевого приближения

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \exists \bar{x}_0 : |\bar{x}_0| < \delta, \exists t^* \in [t_0, +\infty) : |\bar{\varphi}(t^*, \bar{x}_0)| > \varepsilon$$

■

Теорема 1.1. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – собственные числа матрицы A кратности l_1, \dots, l_k соответственно. Тогда

1. Если $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, i = \overline{1, k}$, то нулевое решение асимптотически устойчиво.

2. Пусть $Re(\lambda_i) < 0, i \neq l, Re(\lambda_l) = 0$. И существует базис из собственных векторов e_{l_1}, \dots, e_{l_k} . Тогда нулевое решение устойчиво по Ляпунову.
3. Если $\exists l : Re(\lambda_l) > 0$, или $Re(\lambda_l) = 0$, но собственные вектора не образуют базис, тогда нулевое решение не устойчиво

Доказательство. Рассмотрим решение $\bar{\varphi}(t, \bar{x}_0)$, такое что $\bar{\varphi}(0, \bar{x}_0) = \bar{x}_0$. Тогда

$$\bar{x}(t) = e^{tA} \cdot \bar{x}_0$$

где

$$e^{tA} = S \left\| \begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 t} P_{ij}^1(t) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{\lambda_2 t} P_{ij}^2(t) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & 0 & e^{\lambda_k t} P_{ij}^k(t) \end{array} \right\| S^{-1} = \|e^{\lambda_s t} P_{ij}(t)\|$$

S – матрица перехода к Жорданову базису. P_{ij} – многочлены степени m

$$m \leq \max_{s=1, k} (l_s - 1)$$

Рассмотрим случаи по порядку:

1. $e^{(\alpha_s + i\omega_s)t} P_{ij}^s(t)$ – элемент e^{tA} . $e^{(\alpha_s + i\omega_s)t} P_{ij}^s(t) = e^{\alpha_s t} (\cos(\omega_s t) + i \sin(\omega_s t)) P_{ij}^s(t)$. Тогда $|e^{(\alpha_s + i\omega_s)t} P_{ij}^s(t)| = e^{\alpha_s t} |P_{ij}^s(t)|$. Положим $\alpha = \inf_{i=1, k} |\alpha_i|$. Распишем

$$e^{tA} = e^{-\alpha t} (e^{\alpha t} e^{tA}) = e^{-\alpha t} \Phi(t)$$

Произвольный элемент матрицы $\Phi(t)$

$$\Phi_{ij}(t) = e^{-rt} P_{ij}(t)$$

где $r > 0$. Отсюда видно, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-rt} P_{ij}(t) = 0$$

Тогда все элементы матрицы $\Phi(t)$ ограничены. Обозначим норму этой матрицы

$$m = \|\Phi(t)\|$$

Для произвольного ε возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{m}$. Теперь возьмем норму решения $\bar{x}(t)$.

$$\|\bar{x}(t)\| = \|e^{tA} \cdot \bar{x}_0\| \leq \|e^{tA}\| \cdot \|\bar{x}_0\| = e^{-\alpha t} \|\Phi(t)\| \cdot \|\bar{x}_0\| \leq e^{-\alpha t} m \|\bar{x}_0\| \leq e^{-\alpha t} m \delta \leq e^{-\alpha t} \varepsilon$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} \varepsilon = 0$$

2. В данном случае $P_{ij}^l = const$, тогда $e^{-\alpha t}$ не будет. Следовательно $\|\bar{x}(t)\| \leq \varepsilon$ – устойчивость по Ляпунову.
- 3.

■