Билет 4

Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы

Будем рассматривать однородную систему ДУ вида:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x};\quad \dot{x}^i = \sum_{k=1}^{n} a_k^i x^k;\quad i,k = \overline{1,n}$$

Утверждение 0.1. *Для однородных систем линейных уравнений верен принцип суперпозиций, т.е если система функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ – решение системы уравнений, то любая их линейная комбинация тоже является решением.*

Определение 0.1. *Пусть имеется система вектор-функций $\vec{\varphi}_1(t), \ldots, \vec{\varphi}_n(t)$*

$$\vec{\varphi}_i(t) = \begin{pmatrix} \varphi_i^1(t) \\ \ldots \\ \varphi_i^n(t) \end{pmatrix}$$

непрерывна на $I(x)$, тогда такая система называется линейно-зависимой на I, если

$$\exists\ C_1, \ldots, C_n : \sum_{i=1}^{n} |C_i| \neq 0\ \&\ \sum_{i=1}^{n} C_i\vec{\varphi}_i(t) = 0\ \forall t \in I$$

В противном случае, система вектор-функций называется линейно-независимой, то есть условие

$$\sum_{i=1}^{n} C_i\vec{\varphi}_i(t) = 0\ \forall t \in I$$

выполняется только при $C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0$.

Определение 0.2. *Пусть система вектор-функций $\vec{\varphi}_1(t), \ldots, \vec{\varphi}_n(t)$ линейно-независима на I и каждая вектор-функция $\vec{\varphi}_i(t)$ является решением системы ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$.Тогда такая система вектор-функций называется фундаментальной системой решений (ФСР) данной системы ДУ.*

Теорема 0.1. *Рассмотрим систему ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$. Если матрица A является непрерывной на отрезке $[a,b]$, то система имеет ФСР на этом отрезке.*

Теорема 0.2. *Пусть система вектор-функций $\vec{\varphi}_1(t), \ldots, \vec{\varphi}_n(t)$ является ФСР системы ДУ, тогда любое решение этой системы ДУ можно представить, как линейную комбинацию компонентов ФСР: $\vec{x}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + \cdots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$, где $C_1, dots, C_n$ – произвольные постоянные.*

Определение 0.3. *Решение системы ДУ вида $\vec{x}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + \cdots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$, где $C_1, dots, C_n$ называется общим решением сисстемы ДУ.*

Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем

Введем оператор L такой, что $L = \frac{d}{dt} - A$. Тогда однородная система ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ запишется в виде $L(\vec{x}) = 0$, неоднородная система ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} - A\vec{x} = q(t)$ запишется в виде $L(\vec{x}) = q(t)$.

Утверждение 0.2. *Общее решение неоднородной системф ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} - A\vec{x} = q(t)$ представляет собой следующее выражение:*

$$\vec{x} = \vec{x}^s + \vec{x}_0^{об}$$

где $\vec{x}^s$ – частное решение линейного неоднородного уравнение, т. е. $L(\vec{x}^s) = q(t)$, а $\vec{x}_0^{об}$ – общее решение системы линейный ***однородных*** *уравнений $L(\vec{x}_0^{об}) = 0$. Таким образом, получаем:*

$$L(\vec{x}) = L(\vec{x}^s + \vec{x}_0^{об}) = L(\vec{x}^s) + L(\vec{x}_0^{об}) = q(t) + 0$$

Определитель Вронского

Определение 0.4. *Пусть на I определена система вектор-функций $\vec{\varphi}_1(t), \ldots, \vec{\varphi}_n(t)$, тогда определитель*

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1^1(t) \ldots \varphi_n^1(t) \\ \ldots \qquad \ldots \\ \varphi_1^n(t) \ldots \varphi_n^n(t) \end{vmatrix}$$

называется определителем Вронского.

Теорема 0.3. *Если $\exists\ t_0 \in I:\ W(t_0) \neq 0$, то система является линейно независимой на I. Обратное неверно, пример:*

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix},\ \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ \text{ЛНЗ, но}\ \ W(t) = 0$$

Доказательство. Будем доказывать от противного: пусть система является линейно-зависимой, тогда $\exists\ C_1, \ldots, C_n : C_1\vec{\varphi}_1(t) + \cdots + C_n\vec{\varphi}_n(t) = 0\ \forall t \in I$. Тогда в определителе Вронского $W(t)$ есть хотя бы два линейно-зависимых столбца, так как $\vec{\varphi}_i(t)$ являются столбцами определителя, но тогда получам, что $W(t) = 0\ \forall t \in I$ (хотя предпологалось, что $\exists\ t_0 \in I:\ W(t_0) \neq 0$). Таким образом, мы получили противоречие, откуда следует, что система является линейно независимой на I. ■

Свойства Вронскиана

1. Если $\exists\ t_0 \in I:\ W(t_0) \neq 0$, то система является линейно независимой на I (см. доказательство теоремы).

2. Пусть вектор-функции $\vec{\varphi}_1(t), \ldots, \vec{\varphi}_n(t)$ являются решениями системы ДУ, и существует точка $t_0 \in I:\ W(t_0) = 0$, тогда система $\vec{\varphi}_1(t), \ldots, \vec{\varphi}_n(t)$ является линейно-зависимой.