

1 Билет 7. Элементы вариационного исчисления

1.1 Основные понятия

Определение 1.1. Пусть M - множество функций $y(x)$, а \mathcal{J} - отображение M в \mathbb{R} такое, что $\mathcal{J} = \{\mathcal{J}(y(x)) \in \mathbb{R} : \forall y(x) \in M\}$. Такое отображение называется **функционалом**, а a - область его определения.

$$\forall y(x) \in C^1_{[a;b]} \text{ рассмотрим функционал } \boxed{\mathcal{J}(y(x)) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx}$$

Будем считать, что $F(x, y(x), y'(x))$ как функцию трех независимых переменных $x_1 = x, x_2 = y(x), x_3 = y'(x)$, непрерывна вместе с $\frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}, i, j = \overline{1, 3}$

Постановка вариационной задачи

Вариационная задача состоит в том, чтобы среди функций $y(x) \in D \subset C^1_{[a;b]}$ (в случае наличия дополнительного условия) найти такую функцию $y_0(x)$, что $\mathcal{J}(y_0(x))$ принимает минимальное (максимальное) значение. Будет рассматривать $y(x) \in C^1_{[a;b]}$.

Определение 1.2. Множество функций D , которые удовлетворяет свойствам, которые мы наложим, называется **множеством варьируемых функций**.

Определение 1.3. $y_0(x)$ такое что $\mathcal{J}(y_0(x)) \leq \mathcal{J}(y(x)) [\mathcal{J}(y_0(x)) \geq \mathcal{J}(y(x))] \forall y(x) \in D$ называется **абсолютным экстремумом** \mathcal{J} .

Введём норму на $C^1_{[a;b]}$ для определения типа экстремумов: $\|y(x)\| = \max_{x \in [a;b]} |y(x)| + \max_{x \in [a;b]} |y'(x)|$ - все свойства нормы выполнены.

Определение 1.4. Пусть $y(x) \in D$. Функцию $\delta y(x) \in C^1_{[a;b]}$ будем называть **допустимой вариацией** $y(x)$, если $\forall y: y + \delta y \in D$

Определение 1.5. Множество функций $V_\varepsilon(y_0(x)) = \{y(x) \in C^1_{[a;b]} : \|y(x) - y_0(x)\| \leq \varepsilon\}$ будем называть **ε -окрестностью** $y_0(x)$

Основной принцип

Пусть $y_0(x) \in D$ фиксирована, а $\delta y(x)$ какая-либо фиксированная допустимая вариация такая, что $\forall t \in [-1; 1] \mapsto y_0(x) + t\delta y(x) \in D \Rightarrow$

$$\mathcal{J}(y(x)) = \mathcal{J}(y_0(x) + t\delta y(x)) = \int_a^b F(x, y_0(x) + t\delta y(x), y'_0(x) + t(\delta y(x))') dx = \mathcal{J}(t)$$

В силу определения F , у него существуют 1 и 2 непрерывные производные по t , т.е $\mathcal{J}(t)$ - дважды непрерывно дифференцируемая по t функция. Следовательно из формулы Тейлора:

$$\mathcal{J}(y_0 + t\delta y(x)) = \mathcal{J}(0) + \frac{d\mathcal{J}}{dt}(0) + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathcal{J}}{dt^2}(0) \cdot t^2 + o(t^2) = [\text{обозначим } (\delta y(x))' = \delta y'] \boxed{=}$$

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt}(t) = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0 + t\delta y, y'_0 + t\delta y') \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y_0 + t\delta y, y'_0 + t\delta y') \delta y' \right] dx$$

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt}(0) = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0, y'_0) \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y_0, y'_0) \delta y' \right] dx = \delta \mathcal{J} \text{- первая вариация} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathcal{J}}{dt^2}(t) = \int_a^b & \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y_0 + t\delta y, y'_0 + t\delta y') \delta y^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}(x, y_0 + t\delta y, y'_0 + t\delta y') \delta y \delta y' + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y_0 + t\delta y, y'_0 + t\delta y') \delta y'^2 \right] dx \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 \mathcal{J}}{dt^2}(0) = \int_a^b \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y_0, y'_0) \delta y^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}(x, y_0, y'_0) \delta y \delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y_0, y'_0) \delta y'^2 \right] dx = \delta^2 \mathcal{J} \quad (2)$$

$\delta^2 \mathcal{J}$ - вторая вариация

$$\boxed{=} \mathcal{J}(y_0) + \delta \mathcal{J} \cdot t + \delta^2 \mathcal{J} \cdot t^2 + o(t^2)$$

Определение 1.6. Функция $y_0(x) \in D$ называется слабым экстремумом функционала \mathcal{J} , если $\exists \varepsilon > 0 : \mathcal{J}(y_0(x)) \leq \mathcal{J}(y(x)) [\mathcal{J}(y_0(x)) \geq \mathcal{J}(y(x))] \forall y(x) \in V_\varepsilon(y_0(x))$, т.е. $\forall y(x) : \|y(x) - y_0(x)\| \leq \varepsilon$

Теорема 1.1 (Основная теорема). Пусть $y_0(x) \in D \subset C_{[a,b]}^1$ является слабым экстремумом функционала $\mathcal{J}(y(x))$. Тогда первая вариация $\delta \mathcal{J}(y_0, \delta y) = 0$ \forall допустимой δy

Доказательство. Не нарушая общности рассуждений докажем для минимума.

При $\delta y = 0$ из (1) следует, что $\delta \mathcal{J}(y_0, \delta y) = 0$. Пусть какая-либо допустимая $\delta y \neq 0$. Т.к. $y_0(x)$ - слабый экстремум \mathcal{J} , то $\exists \varepsilon > 0 : \forall y(x) = y_0(x) + t\delta y(x) : \|y(x) - y_0(x)\| < \varepsilon \mapsto \mathcal{J}(y_0) \leq \mathcal{J}(y)$. Зафиксируем $\delta y \neq 0$. Т.к. $\|y(x) - y_0(x)\| = \|y_0 + t\delta y(x) - y_0(x)\| < \varepsilon$, то $\|t \cdot \delta y\| < \varepsilon$. Таким образом $t \in \left(-\frac{\varepsilon}{\|\delta y(x)\|}; \frac{\varepsilon}{\|\delta y(x)\|} \right)$

Т.к $y_0(x)$ - локальный минимум, то $\mathcal{J}(y_0) \leq \mathcal{J}(y)$ или $\mathcal{J}(0) \leq \mathcal{J}(t) \forall t \in \left[-\frac{\varepsilon}{\|\delta y(x)\|}; \frac{\varepsilon}{\|\delta y(x)\|} \right]$

Таким образом $\mathcal{J}(t)$ является непрерывно дифференцируемой функцией t , достигающий минимум при $t = 0$. Следовательно по теореме Ферма $\frac{d\mathcal{J}}{dt}(0) = 0 = \delta \mathcal{J}$

Ввиду произвольности δy теорема доказана. ■

Лемма 1.1 (Основная лемма вариационного исчисления). Пусть $f(x) \in C_{[a,b]}^1$ и $\int_a^b f(x) \cdot h(x) dx = 0 \forall h \in C_{[a,b]}^1$ и такой, что $h(a) = h(b) = 0$. Тогда $f(x) = 0 \forall x \in [a; b]$

Доказательство. От противного: пусть $\exists x_0 \in [a; b] : f(x_0) \neq 0$. Тогда в силу непрерывности функции $f(x)$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \mapsto f(x) \neq 0$. Для определенности рассмотрим $f(x) > 0 \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$. Если так случилось, что $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \not\subset [a; b]$, то уменьшим δ , не нарушив при этом это условие: $f(x) > 0$ на отрезке ненулевой длины.

Обозначим $I_\delta = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ и рассмотрим

$$h_\delta(x) = \begin{cases} [(x - x_0 + \delta)(x - x_0 - \delta)]^2 & x \in I_\delta \\ 0 & x \notin I_\delta \end{cases} \quad (3)$$

Т.к. $h_\delta(x) > 0 \forall x \in I_\delta$, то $\int_a^b f(x) \cdot h_\delta(x) dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) \cdot h_\delta(x) dx > 0$ - противоречие с условием $\int_a^b f(x) \cdot h(x) dx = 0 \Rightarrow \nexists x_0 \in [a; b] : f(x_0) \neq 0$ ■

Примечание. Лемма остаётся в силе, если в условии леммы $\int_a^b f(x) \cdot h(x) dx = 0 \forall h \in C_{[a;b]}^n$ и $h^{(i)}(a) = h^{(i)}(b) = 0, i = \overline{0, n-1}$. В (4) достаточно взять

$$h_\delta(x) = \begin{cases} [(x - x_0 + \delta)(x - x_0 - \delta)]^{2n} & x \in I_\delta \\ 0 & x \notin I_\delta \end{cases} \quad (\text{Модифицированная лемма}) \quad (4)$$

1.2 Простейшие задачи вариационного исчисления

1.2.1 Задача с закрепленными концами

Требуется найти экстремум функционала $\mathcal{J}(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx$ среди функций $y(x) \in C_{[a;b]}^1$ таких, что $y(a) = A, y(b) = B$, а где A и B являются заданными константами. Таким образом экстремум ищется на множестве $D = \{y(x) : y(a) = A, y(b) = B\} \subset C_{[a;b]}^1$. Пусть $y_0(x)$ - экстремум нашего функционала. Через $H_\delta(y_0)$ обозначим $\delta y(x) \in C_{[a;b]}^1 : \delta y(a) = \delta y(b) = 0$. Покажем, что $H_\delta(y_0)$ является множеством допустимых вариаций: $\forall \delta y(x) \in H_\delta(y_0)$ для $y(x) = y_0(x) + \delta y(x) \mapsto y(a) = A, y(b) = B \Rightarrow y_0(x) + \delta y \in D$

Теорема 1.2. Пусть $y_0(x) \in C_{[a;b]}^2$ является слабым экстремумом функционала \mathcal{J} на D . Тогда $y_0(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа.

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0 \quad (5)$$

$$\text{Обозначение: } \frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0(x), y_0'(x)) = \frac{\partial F}{\partial y}; \quad \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = \frac{\partial F}{\partial y'}$$

Доказательство. Т.к. $y_0(x)$ является слабым экстремумом, то $\forall \delta y(x) \in H_\delta(y_0) \mapsto$

$$\delta \mathcal{J} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y'}_{\text{проинтегрируем по частям}} \right) dx = 0 \quad (\text{по основной теореме})$$

Концы закреплены:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx &= \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx = - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx \\ \delta \mathcal{J} &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) \delta y dx = 0 \quad \forall \delta y \in H_\delta(y_0) \end{aligned}$$

Заметим, что $\forall \delta y \in H_\delta(y_0)$ и $\delta \mathcal{J}$ удовлетворяют условиям основной леммы \Rightarrow

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

■

Примечание. Требование $y_0(x) \in C_{[a;b]}^2$ является естественным, т.к. (5) для $y_0(x)$ является ДУ второго порядка: $\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y_0(x), y'_0(x)) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y''$

Определение 1.7. Функцию $y_0(x)$, удовлетворяющую уравнению Эйлера и условиям множества D будем называть **допустимой экстремалью**.

1.2.2 Функционалы, зависящие от вектор-функции

Рассмотрим

$$\mathcal{J}(\vec{y}) = \int_a^b F(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y'_1(x), y'_2(x), \dots, y'_n(x)) dx = \int_a^b F(x, \vec{y}(x), \vec{y}'(x)) dx, \quad (6)$$

где $\vec{y}(x) = \|y_1, \dots, y_n\|$, $\vec{y}'(x) = \|y'_1, \dots, y'_n\|$

Рассмотрим задачу с закрепленными концами:

$$\vec{y}(a) = \vec{A} = \|y_1(a), \dots, y_n(a)\| = \|A_1, \dots, A_n\|, \vec{y}(b) = \vec{B} = \|y_1(b), \dots, y_n(b)\| = \|B_1, \dots, B_n\| \quad (7)$$

Считаем, что $F(x, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n)$ - дважды непрерывно дифференцирована по совокупности переменных $a \leq x \leq b$, $-\infty < y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n < +\infty$. Минимум (6)^(7),

без нарушения общности будем искать в классе $y_i(x) \in C_{[a;b]}^1$, $i = \overline{1, n}$. Введём $|\vec{y}| = \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$

и $\|\vec{y}'\| = \max_{x \in [a;b]} |\vec{y}'| + \max_{x \in [a;b]} \|\vec{y}'\|$

Множество допустимых вариаций $H_\delta(\vec{y}_0) = \delta \vec{y}(x) = \|\delta y_1(x), \dots, \delta y_n(x)\| : \delta \vec{y}(a) = \delta \vec{y}(b) = 0$

Пусть $\vec{y}_0(x) \in C_{[a;b]}^1$ - слабый минимум ($\Rightarrow \delta \mathcal{J} = 0$), (6)^(7). При условии (7) получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\vec{y}_0(x) + t \delta \vec{y}(x)) &= \int_a^b F(x, \vec{y}_0(x) + t \delta \vec{y}(x), \vec{y}'_0(x) + t(\delta \vec{y}(x))') dx = \mathcal{J}(t) = \mathcal{J}(0) + t \cdot \delta \mathcal{J} + o(t) = \\ &= \mathcal{J}(0) + \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_k} \delta y_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial y'_k} (\delta y_k)' \right) dx + o(t) = \mathcal{J}(0) + \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_k} \right) \delta y_k \right) dx + \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial y'_k}(b) \underbrace{(\delta y_k(b))}_{=0} \right) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial y'_k}(a) \underbrace{(\delta y_k(a))}_{=0} \right) + o(t) \\ \delta \mathcal{J} &= \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_k} \right) \delta y_k \right) dx = 0 \quad \boxed{\forall \delta \vec{y}(x) \in H_\delta(\vec{y}_0)} \end{aligned}$$

Итак, $\delta J = 0 \forall \delta \vec{y}(x) \in H_\delta(\vec{y}_0)$, тогда в силу произвольности выбора $\delta \vec{y}(x)$: пусть $\delta y_1 = \delta y_2 = \dots = \delta y_{k-1} = 0$, $\delta y_k = ((x-a)(x-b))^2$, $\delta y_{k+1} = \dots = \delta y_n = 0$.

Тогда

$$\delta J = 0 + \int_a^b \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_k} \right) \delta y_k dx + 0 = 0$$

\Rightarrow Основная лемма \Rightarrow проходим все $k = \overline{1, n}$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_k} = 0, \quad k = \overline{1, n} \quad (\text{Система уравнений Эйлера-Лагранжа})}$$