1 Матричная экспонента, ее свойства и применение к решению нормальных линейных систем

1.1 Матричная экспонента

Необходимо решить ОЛДУ вида:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x},\ \vec{x}(t_0) = \vec{x_0},$$

Если $A(t) = ||a^i_j||$, $a^i_j \in \mathbf{R}$, $i,j = 1, \ldots, n$, тогда:

$$\vec{x_0} = E\vec{x_0},\ \vec{x_1} = E\vec{x_0} + \frac{t-t_0}{1!}A\vec{x_0} = \left(E + \frac{t-t_0}{1!}A\right)\vec{x_0},$$
$$\vec{x_n} = \left(E + \frac{t-t_0}{1!}A + \ \ldots \ + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n\right)\vec{x_0},$$

Этот процесс будет сходиться к задаче Коши с решением:

$$\vec{x} = \left(E + \frac{t-t_0}{1!}A + \ \ldots \ + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n + \ \ldots\right)\vec{x_0} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n\right)\vec{x_0},$$

при условии, что $A^0 = E$.

Определение 1.1. *Матричной экспонентой называют следующий степенной ряд:*

$$e^{(t-t_0)A} = E + \frac{t-t_0}{1!}A + \ \ldots \ + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n + \ \ldots \ = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n.$$

1.2 Свойства матричной экспоненты

Это квадратная матрица, по размерам аналогична матрице A, и каждый элемент этой матрицы представляет из себя степенной ряд с радиусом сходимости $+\infty$.

1. Решение задачи Коши для (1.1), если $A = const$:
$$\vec{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{x_0},\ (\vec{x}(t_0) = \vec{x_0}).$$
2. $e^{0A} = E$.
3. $e^{(t_1+t_2)A} = e^{t_1A}e^{t_2A} \Rightarrow e^{t_1A}e^{t_2A} = e^{t_2A}e^{t_1A}$ (коммутативность).
4. $\left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}$.
5. $\left(e^{tA}\right)' = Ae^{tA} = e^{tA}A$.

Доказательство. Так как квадратные матрицы составляют определенное кольцо, то $A^{n+m} = A^nA^m = A^mA^n$.

1.
2. $e^{tA} = E + \frac{t-t_0}{1!}A + \ \ldots \ + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n + \ \ldots$, если $t = 0$:
$$e^{0A} = E + 0 + \cdots = E$$

3. рассматриваем (1.1), если $\vec{x}(t)$ - решение этого ДУ, то $\vec{x}(t+t_0)$ тоже решение этого ДУ $\forall t_0 \in \mathbf{R}$. $(u = t + t_0)$:

$$\frac{d\vec{x}(t+t_0)}{dt} = \frac{d\vec{x}}{du}\frac{du}{dt} = \frac{d\vec{x}}{du} = A\vec{x}(u) = A\vec{x}(t+t_0).$$

Тогда (1.1), с задачей Коши $\vec{x}(0) = \vec{x_0}$ имеет решение:

$$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x_0},$$
$$\vec{x}(t+t_0) = e^{(t+t_0)}\vec{x_0} \text{ - решение } \frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}.$$

Рассмотрим тогда тоже самое уравнение для функции $z(t)$:

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = A\vec{z}, \text{ с задачей Коши } \vec{z}(0) = e^{t_0A}\vec{x_0} \Rightarrow \vec{z}(t) = e^{tA}(e^{t_0A}\vec{x_0}) = (e^{tA}e^{t_0A})\vec{x_0}.$$

Рассмотрим это решение в нуле:

$$\vec{x}(0+t_0) = e^{t_0A}\vec{x_0},$$

из основной теоремы следует, что $\vec{x}(t+t_0) = \vec{z}(t)\ \forall t$.

Тогда и получается основная формула:

$$\vec{x}(t+t_0) = e^{(t+t_0)A}\vec{x_0} = (e^{tA}e^{t_0A})\vec{x_0}$$

4. $E = e^{0A} = e^{(t-t)A} = e^{tA}e^{-tA} = E \Rightarrow \left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}$.

5. Берем представление матричной экспоненты в виде степенного ряда, который можно дифференцировать, тогда получаем:

$$(e^{tA})' = A + tA^2 + \ \dots\ + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n + \ \dots = A\left(E + tA + \ \dots\ + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1}\right),$$

$$(e^{tA})' = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

■

Примечание. Формула $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$ не имеет места, кроме случая, если $AB = BA$ (т.е. матрицы коммутативны).

1.3 Применение к решению нормальных линейных систем