1 Билет 4

1.1 Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы

Будем рассматривать однородную систему ДУ вида:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}; \quad \dot{x}^i = \sum_{k=1}^{n} a^i_k x^k; \quad i,k = \overline{1,n} \tag{1}$$

Утверждение 1.1. *Для однородных систем линейных уравнений верен принцип суперпозиций, т.е если система функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – решение системы уравнений, то любая их линейная комбинация тоже является решением.*

Доказательство. Введем оператор L такой, что $L = \frac{d}{dt} - A$. Тогда однородная система ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ запишется в виде $L(\vec{x}) = 0$, неоднородная система ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} - A\vec{x} = q(t)$ запишется в виде $L(\vec{x}) = q(t)$.

Пусть вектор-функции $\vec{\varphi}(t)$ и $\vec{\psi}(t)$ являются решениями системы $L(\vec{x}) = 0$, в таком случае справедливо

$$L(\vec{\varphi}(t)) = 0; \quad L(\vec{\psi}(t)) = 0$$

Рассмотрим вектор-функцию $\vec{\chi}(t) = a\vec{\varphi}(t) + b\vec{\psi}(t)$, где a и b – произвольные коэффициенты. Применим оператор L к получившейся вектор-функции:

$$\begin{aligned} L(\vec{\chi}(t)) &= \frac{d}{dt}\left(a\vec{\varphi}(t) + b\vec{\psi}(t)\right) - A\left(a\vec{\varphi}(t) + b\vec{\psi}(t)\right) = \\ &= a\left(\frac{d}{dt}\vec{\varphi}(t) - A\vec{\varphi}(t)\right) + b\left(\frac{d}{dt}\vec{\psi}(t) - A\vec{\psi}(t)\right) = \\ &= aL(\vec{\varphi}(t)) + bL(\vec{\psi}(t)) = 0 \end{aligned}$$

■

Определение 1.1. *Пусть имеется система вектор-функций $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$*

$$\vec{\varphi}_i(t) = \begin{pmatrix} \varphi^1_i(t) \\ \dots \\ \varphi^n_i(t) \end{pmatrix} \tag{2}$$

непрерывна на $I(x)$, тогда такая система называется линейно-зависимой на I, если

$$\exists\ C_1, \dots, C_n : \sum_{i=1}^{n} |C_i| \neq 0\ \&\ \sum_{i=1}^{n} C_i\vec{\varphi}_i(t) = 0\ \forall t \in I$$

В противном случае, система вектор-функций называется линейно-независимой, то есть условие

$$\sum_{i=1}^{n} C_i\vec{\varphi}_i(t) = 0\ \forall t \in I$$

выполняется только при $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$.

Определение 1.2. *Пусть система вектор-функций $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$ линейно-независима на I и каждая вектор-функция $\vec{\varphi}_i(t)$ является решением системы ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$.Тогда такая система вектор-функций называется фундаментальной системой решений (ФСР) данной системы ДУ.*

Теорема 1.1. *Рассмотрим систему ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$. Если матрица A является непрерывной на отрезке $[a, b]$, то система имеет ФСР на этом отрезке.*

Доказательство. матрица A является непрерывной на отрезке $[a, b]$, тогда, согласно основной теореме, на отрезке $[a, b]$ существует единственное решение задачи Коши.

Пусть система функций $\vec{\varphi_1}(t), \vec{\varphi_2}(t), \dots, \vec{\varphi_n}(t)$ является решением системы при следующих заданных условиях:

$$\vec{\varphi_1}(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{\varphi_2}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},\ \dots,\ \vec{\varphi_n}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

тогда вронскиан такой системы в точке t_0:

$$W(t_0) = |\vec{\varphi_1}(t_0), \vec{\varphi_2}(t_0), \dots, \vec{\varphi_n}(t_0)| = \begin{vmatrix} 1\ 0\ \dots\ 0 \\ 0\ 1\ \dots\ 0 \\ \dots \\ 0\ 0\ \dots\ 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \tag{4}$$

тогда, из свойства вронскиана следует, что данная система функций является линейно-независимой, а так как каждая функция является решением системы ДУ, эта система вектор-функций и есть ФСР системы ДУ. ∎

Теорема 1.2. *Пусть система вектор-функций $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$ является ФСР системы ДУ, тогда любое решение этой системы ДУ можно представить, как линейную комбинацию компонентов ФСР: $\vec{x}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$, где $C_1, dots, C_n$ – произвольные постоянные.*

Доказательство. Так как для системы ДУ справедлив принцип суперпозиции, то вектор-функция $\vec{x(t)} = C_1\vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$.

Предположим теперь, что существует функция $\vec{\chi}(t)$ такая, что она является решением системы ДУ, но не представима в виде $C_1\vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$. Пусть значение этой функции в точке t_0:

$$\vec{\chi}(t_0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_1(t_0) \\ \chi_2(t_0) \\ \dots \\ \chi_n(t_0) \end{pmatrix} \tag{5}$$

Теперь составим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} C_1\varphi_1^1(t_0) + C_2\varphi_2^1(t_0) + \dots + C_n\varphi_n^1(t_0) = \alpha_1 \\ C_1\varphi_1^2(t_0) + C_2\varphi_2^2(t_0) + \dots + C_n\varphi_n^2(t_0) = \alpha_2 \\ \dots \\ C_1\varphi_1^n(t_0) + C_2\varphi_2^n(t_0) + \dots + C_n\varphi_n^n(t_0) = \alpha_3 \end{cases} \tag{6}$$

где $C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_n$ – являются неизвестными, который надо найти. Определителем этой системы является

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} \varphi_1^1(t_0)\ \varphi_2^1(t_0)\ \dots\ \varphi_n^1(t_0) \\ \varphi_1^2(t_0)\ \varphi_2^2(t_0)\ \dots\ \varphi_n^2(t_0) \\ \dots \\ \varphi_1^n(t_0)\ \varphi_2^n(t_0)\ \dots\ \varphi_n^n(t_0) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{7}$$

данный определитель не равен 0, поскольку функции $\vec{\varphi_i}$ $i = \vec{1n}$ являются ФСР системы ДУ, поэтому числа $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ определяются однозначно.

С этими числами рассмотрим решение исходной системы ДУ, назовем его $\vec{z}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + \cdots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$. Поскольку $\vec{\chi}(t)$ и $\vec{z}(t)$ – являются решениями системы ДУ, по принципу суперпозиции функция $\vec{\psi}(t) = \vec{z}(t) - \vec{\chi}(t)$ так же является решением этой системы ДУ.

Заметим, что значение этой функции в точке t_0: $\vec{\psi}(t_0) = \vec{z}(t_0) - \vec{\chi}(t_0) = 0$, заметим так же, что $\vec{0}$ является решением однородной системы системы $\frac{d}{dt}\vec{x} - A\vec{x}$. Тогда, в силу теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши, выполняется:

$$\vec{\psi}(t) = 0\ \forall\ t \in I\ \Rightarrow$$
$$\vec{\psi}(t) = \vec{z}(t) - \vec{\chi}(t) \equiv 0\ \forall\ t \in I\ \Rightarrow$$
$$\vec{z}(t) = \vec{\chi}(t) = C_1\vec{\varphi_1}(t) + C_2\vec{\varphi_2}(t) + \cdots + C_n\vec{\varphi_n}(t)$$

Мы получили противоречие с предположением о невозможности линейного представления решения $\vec{\chi}(t)$ через функции ФСР, таким образом, мы доказали, что любое решение системы ДУ можно представить, как линейную комбинацию компонентов ФСР. ■

Определение 1.3. *Решение системы ДУ вида $\vec{x}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + \cdots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$, где $C_1, dots, C_n$ называется общим решением сисстемы ДУ.*

1.2 Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем

Введем оператор L такой, что $L = \frac{d}{dt} - A$. Тогда однородная система ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ запишется в виде $L(\vec{x}) = 0$, неоднородная система ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} - A\vec{x} = q(t)$ запишется в виде $L(\vec{x}) = q(t)$.

Утверждение 1.2. *Общее решение неоднородной системф ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} - A\vec{x} = q(t)$ представляет собой следующее выражение:*

$$\vec{x} = \vec{x}^s + \vec{x}_0^{об} \tag{8}$$

где $\vec{x}^s$ – частное решение линейного неоднородного уравнение, т. е. $L(\vec{x}^s) = q(t)$, а $\vec{x}_0^{об}$ – общее решение системы линейный ***однородных*** *уравнений $L(\vec{x}_0^{об}) = 0$. Таким образом, получаем:*

$$L(\vec{x}) = L(\vec{x}^s + \vec{x}_0^{об}) = L(\vec{x}^s) + L(\vec{x}_0^{об}) = q(t) + 0$$

Определитель Вронского

Определение 1.4. *Пусть на I определена система вектор-функций $\vec{\varphi}_1(t), \ldots, \vec{\varphi}_n(t)$, тогда определитель*

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1^1(t) \ldots \varphi_n^1(t) \\ \ldots \qquad \ldots \\ \varphi_1^n(t) \ldots \varphi_n^n(t) \end{vmatrix} \tag{9}$$

называется определителем Вронского, где

$$\vec{\varphi_i} = \begin{pmatrix} \varphi_i^1 \\ \ldots \\ \varphi_i^n \end{pmatrix} \tag{10}$$

другими словами

$$W(t) = \left|\vec{\varphi_1}, \ldots, \vec{\varphi_n}\right| \tag{11}$$

Теорема 1.3. *Если $\exists\ t_0 \in I:\ W(t_0) \neq 0$, то система является линейно независимой на I. Обратное неверно, пример:*

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix},\ \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ЛНЗ, но } W(t) = 0 \tag{12}$$

Доказательство. Будем доказывать от противного: пусть система является линейно-зависимой, тогда $\exists\ C_1, \dots, C_n : C_1\vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t) = 0\ \forall t \in I$. Тогда в определителе Вронского $W(t)$ есть хотя бы два линейно-зависымих столбца, так как $\vec{\varphi}_i(t)$ являются столбцами определителя, но тогда получам, что $W(t) = 0\ \forall t \in I$ (хотя предпологалось, что $\exists\ t_0 \in I:\ W(t_0) \neq 0$). Таким образом, мы получили противоречие, откуда следует, что система является линейно независимой на I. ■

Свойства Вронскиана

1. Если $\exists\ t_0 \in I:\ W(t_0) \neq 0$, то система является линейно независимой на I (см. доказательство теоремы).

2. Пусть вектор-функции $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$ являются решениями системы ДУ, и существует точка $t_0 \in I:\ W(t_0) = 0$, тогда система $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$ является линейно-зависимой.

   Доказательство. Поскольку $W(t_0) = 0$ столбцы этой матрицы являются линейно-зависимыми, то есть

   $$\exists\ C_1, C_2, \dots, C_n:\ \sum_{i=1}^{n} C_i^2 \neq 0\ \&\ \sum_{i=1}^{n} C_i\vec{\varphi}_i(t_0) = 0$$

   Используя данные коэффициенты, построим функцию $\vec{x}(t) = C_i\vec{\varphi}_i(t)$. Заметим, что во-первых $\vec{x}(t_0) = 0$, а во-вторых данная функция является решением системы ДУ в силу теоремы о суперпозиции. Тогда, в силу теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши выполняется: $\vec{x}(t) = C_i\vec{\varphi}_i(t) = 0\ \forall\ t \in I$, что означает, что система $\vec{\varphi}_i$ является линейнозависимой. ■