1 Билет 7. Элементы вариационного исчисления

1.1 Основные понятия

Определение 1.1. *Пусть M - множество функций $y(x)$, а $\mathcal{J}$ - отображение M в $\mathbb{R}$ такое, что $\mathcal{J} = \{\mathcal{J}(y(x)) \in \mathbb{R} : \forall y(x) \in M\}$. Такое отображение называется* ***функционалом****, а - область его определения.*

$\forall y(x) \in C^1_{[a;b]}$ рассмотрим функционал $\boxed{\mathcal{J}(y(x)) = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))dx}$

Будем считать, что $F(x, y(x), y'(x))$ как функцию трех независимых переменных $x_1 = x$, $x_2 = y(x)$, $x_3 = y'(x)$, непрерывна вместе с $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$, $i,j = \overline{1,3}$

Постановка вариационной задачи

Вариационная задача состоит в том, чтобы среди функций $y(x) \in D \subset C^1_{[a;b]}$ (в случае наличия дополнительного условия) найти такую функцию $y_0(x)$, что $\mathcal{J}(y_0(x))$ принимает минимальное (максимальное) значение. Будет рассматривать $y(x) \in C^1_{[a;b]}$.

Определение 1.2. *Множество функций D, которые удовлетворяет свойствам, которые мы наложим, называется* ***множеством варьируемых функций****.*

Определение 1.3. *$y_0(x)$ такое что $\mathcal{J}(y_0(x)) \le \mathcal{J}(y(x))[\mathcal{J}(y_0(x)) \ge \mathcal{J}(y(x))]\, \forall y(x) \in D$ называется* ***абсолютным экстремумом*** *$\mathcal{J}$.*

Введём норму на $C^1_{[a;b]}$ для определения типа экстремумов: $\|y(x)\| = \max\limits_{x\in[a;b]} |y(x)| + \max\limits_{x\in[a;b]} |y'(x)|$ - все свойства нормы выполнены.

Определение 1.4. *Пусть $y(x) \in D$. Функцию $\delta y(x) \in C^1_{[a;b]}$ будем называть* ***допустимый вариацией*** *$y(x)$, если $\forall y$: $y + \delta y \in D$*

Определение 1.5. *Множество функций $V_\varepsilon(y_0(x)) = \{y(x) \in C^1_{[a;b]} : \|y(x) - y_0(x)\| \le \varepsilon\}$ будем называть* ***ε-окрестностью*** $\mathbf{y_0(x)}$

Основной принцип

Пусть $y_0(x) \in D$ фиксирована, а $\delta y(x)$ какая-либо фиксированная допустимая вариация такая, что $\forall t \in [-1; 1] \mapsto y_0(x) + t\delta y(x) \in D \Rightarrow$

$$\mathcal{J}(y(x)) = \mathcal{J}(y_0(x) + t\delta y(x)) = \int\limits_a^b F(x, y_0(x) + t\delta y(x), y_0'(x) + t(\delta y(x))')dx = \mathcal{J}(t)$$

В силу определения F, у него существуют 1 и 2 непрерывные производные по t, т.е $\mathcal{J}(t)$ - дважды непрерывно дифференцируемая по t функция. Следовательно из формулы Тейлора:

$$\mathcal{J}(y_0 + t\delta y(x)) = \mathcal{J}(0) + \frac{d\mathcal{J}}{dt}(0) + \frac{1}{2}\frac{d^2\mathcal{J}}{dt^2}(0) \cdot t^2 + o(t^2) = [\text{ обозначим } (\delta y(x))' = \delta y' \,] \boxed{=}$$

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt}(t) = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0 + t\delta y, y_0' + t\delta y')\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y_0 + t\delta y, y_0' + t\delta y')\delta y'\right] dx$$

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt}(0) = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0, y_0')\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y_0, y_0')\delta y'\right] dx = \delta\mathcal{J}\text{- первая вариация} \tag{1}$$

$$\frac{d^2\mathcal{J}}{dt^2}(t) = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y_0 + t\delta y, y_0' + t\delta y')\delta y^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}(x, y_0 + t\delta y, y_0' + t\delta y')\delta y \delta y' + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y_0 + t\delta y, y_0' + t\delta y')\delta y'^2\right] dx$$

$$\frac{d^2\mathcal{J}}{dt^2}(0) = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y_0, y_0')\delta y^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}(x, y_0, y_0')\delta y \delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y_0, y_0')\delta y'^2\right] dx = \delta^2\mathcal{J} \tag{2}$$

$\delta^2\mathcal{J}$- вторая вариация

$$\boxed{=}\ \mathcal{J}(y_0) + \delta\mathcal{J} \cdot t + \delta^2\mathcal{J} \cdot t^2 + o(t^2)$$

Определение 1.6. *Функция $y_0(x) \in D$ называется слабым экстремумом функцианала $\mathcal{J}$, если $\exists \varepsilon > 0 : \mathcal{J}(y_0(x)) \leq \mathcal{J}(y(x))\, [\mathcal{J}(y_0(x)) \geq \mathcal{J}(y(x))]\, \forall y(x) \in V_\varepsilon(y_0(x))$, т.е. $\forall y(x)$: $\|y(x) - y_0(x)\| \leq \varepsilon$*

Теорема 1.1 (Основная теорема)**.** *Пусть $y_0(x) \in D \subset C^1_{[a;b]}$ является слабым экстремумом функцианала $\mathcal{J}(y(x))$. Тогда первая вариация $\delta\mathcal{J}(y_0, \delta y) = 0$ $\boxed{\forall \text{ допустимой } \delta y}$*

Доказательство. Не нарушая общности рассуждений докажем для минимума.

При $\delta y = 0$ из (1) следует, что $\delta\mathcal{J}(y_0, \delta y) = 0$. Пусть какая-либо допустимая $\delta y \neq 0$. Т.к. $y_0(x)$ - слабый экстремум $\mathcal{J}$, то $\exists \varepsilon > 0 : \forall y(x) = y_0(x) + t\delta y(x) : \|y(x) - y_0(x)\| < \varepsilon \mapsto \mathcal{J}(y_0) \leq \mathcal{J}(y)$. Зафиксируем $\delta y \neq 0$. Т.к. $\|y(x) - y_0(x)\| = \|y_0 + t\delta y(x) - y_0(x)\| < \varepsilon$, то $\|t \cdot \delta y\| < \varepsilon$. Таким образом $t \in \left(-\frac{\varepsilon}{\|\delta y(x)\|}; \frac{\varepsilon}{\|\delta y(x)\|}\right)$

Т.к $y_0(x)$ - локальный минимум, то $\mathcal{J}(y_0) \leq \mathcal{J}(y)$ или $\mathcal{J}(0) \leq \mathcal{J}(t)\, \forall t \in \left[-\frac{\varepsilon}{\|\delta y(x)\|}; \frac{\varepsilon}{\|\delta y(x)\|}\right]$

Таким образом $\mathcal{J}(t)$ является непрерывно дифференцируемой функцией t, достигающий минимум при $t = 0$. Следовательно по теореме Ферма $\frac{d\mathcal{J}}{dt}(0) = 0 = \delta\mathcal{J}$

Ввиду произвольности δy теорема доказана. ■

Лемма 1.1 (Основная лемма вариационного исчисления)**.** *Пусть $f(x) \in C^1_{[a;b]}$ и $\int\limits_a^b f(x) \cdot h(x)dx = 0\, \forall h \in C^1_{[a;b]}$ и такой, что $h(a) = h(b) = 0$. Тогда $f(x) = 0\, \forall x \in [a; b]$*

Доказательство. От противного: пусть $\exists x_0 \in [a; b] : f(x_0) \neq 0$. Тогда в силу непрерывности функции $f(x)$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \mapsto f(x) \neq 0$. Для определенности рассмотрим $f(x) > 0\, \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$. Если так случилось, что $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \not\subset [a; b]$, то уменьшим δ, не нарушив при этом это условие: $f(x) > 0$ на отрезке ненулевой длины.

Обозначим $I_\delta = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ и рассмотрим

$$h_\delta(x) = \begin{cases} [(x - x_0 + \delta)(x - x_0 - \delta)]^2 & x \in I_\delta \\ 0 & x \notin I_\delta \end{cases} \tag{3}$$

Т.к. $h_\delta(x) > 0\,\forall x \in I_\delta$, то $\int\limits_a^b f(x)\cdot h_\delta(x)dx = \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\cdot h_\delta(x)dx > 0$ - противоречие с условием $\int\limits_a^b f(x)\cdot h(x)dx = 0 \Rightarrow \nexists x_0 \in [a;b] : f(x_0) \neq 0$ ■

Примечание. *Лемма остаётся в силе, если в условии леммы* $\int\limits_a^b f(x)\cdot h(x)dx = 0\,\forall h \in C^n_{[a;b]}$ *и* $h^{(i)}(a) = h^{(i)}(b) = 0$, $i = \overline{0, n-1}$. *В (4) достаточно взять*

$$h_\delta(x) = \begin{cases} [(x-x_0+\delta)(x-x_0-\delta)]^{2n} & x \in I_\delta \\ 0 & x \notin I_\delta \end{cases} \text{ (Модифицированная лемма)} \tag{4}$$

1.2 Простейшие задачи вариационного исчисления

1.2.1 Задача с закрепленными концами

Требуется найти экстремум функционала $\mathcal{J}(y) = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$ среди функций $y(x) \in C^1_{[a;b]}$ таких, что $y(a) = A$, $y(b) = B$, а где A и B являются заданными константами. Таким образом экстремум ищется на множестве $D = y(x) : y(a) = A, y(b) = B \subset C^1_{[a;b]}$.
Пусть $y_0(x)$ - экстремум нашего функционала. Через $H_\delta(y_0)$ обозначим $\delta y(x) \in C^1_{[a;b]} : \delta y(a) = \delta y(b) = 0$
Покажем, что $H_\delta(y_0)$ является множеством допустимых вариаций: $\forall \delta y(x) \in H_\delta(y_0)$ для $y(x) = y_0(x) + \delta y(x) \mapsto y(a) = A, y(b) = B \Rightarrow y_0(x) + \delta y \in D$

Теорема 1.2. *Пусть* $y_0(x) \in C^2_{[a;b]}$ *является слабым экстремумом функцианала* $\mathcal{J}$ *на* D. *Тогда* $y_0(x)$ *удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа.*

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0 \tag{5}$$

Обозначение: $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0(x), y_0'(x)) = \frac{\partial F}{\partial y}$; $\frac{\partial F}{\partial y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = \frac{\partial F}{\partial y'}$

Доказательство. Т.к. $y_0(x)$ является слабым экстремумом, то $\forall \delta y(x) \in H_\delta(y_0) \mapsto$

$$\delta\mathcal{J} = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'}_{\text{проинтегрируем по частям}} \right) dx = 0 \text{ (по основной теореме)}$$

Концы закреплены:

$$\int\limits_a^b \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' dx = \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_a^b - \int\limits_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y dx = -\int\limits_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y dx$$

$$\delta\mathcal{J} = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right) dx = 0 \;\; \forall \delta y \in H_\delta(y_0)$$

Заметим, что $\forall \delta y \in H_\delta(y_0)$ и $\delta\mathcal{J}$ удовлетворяют уловиям основной леммы $\Rightarrow$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

■

Примечание. *Требование $y_0(x) \in C^2_{[a;b]}$ является естественным, т.к. (5) для $y_0(x)$ является ДУ второго порядка:* $\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y''$

Определение 1.7. *Функцию $y_0(x)$, удовлетворяющую уравнению Эйлера и условиям множества D будем называть **допустимой экстремалью**.*

1.2.2 Функционалы, зависящие от вектор-функции

Рассмотрим

$$\mathcal{J}(\vec{y}) = \int\limits_a^b F(x, y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), ..., y_n'(x))dx = \int\limits_a^b F(x, \vec{y}(x), \vec{y}\,'(x))dx, \quad (6)$$

где $\vec{y}(x) = \|y_1, ..., y_n\|$, $\vec{y}\,'(x) = \|y_1', ..., y_n'\|$

Рассмотрим задачу с закрепленными концами:

$$\vec{y}(a) = \vec{A} = \|y_1(a), ..., y_n(a)\| = \|A_1, ..., A_n\|, \vec{y}(b) = \vec{B} = \|y_1(b), ..., y_n(b)\| = \|B_1, ..., B_n\| \quad (7)$$

Считаем, что $F(x, y_1, ..., y_n, z_1, ..., z_n)$ - дважды непрерывно дифференцированна по совокупности переменных $a \le x \le b$, $-\infty < y_1, ..., y_n, z_1, ..., z_n < +\infty$. Минимум (6)$\wedge$(7), без нарушения общности будем искать в классе $y_i(x) \in C^1_{[a;b]}$, $i = \overline{1, n}$. Введём $|\vec{y}| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2}$ и $\|\vec{y}\| = \max\limits_{x \in [a;b]} |\vec{y}| + \max\limits_{x \in [a;b]} \|\vec{y}\,'\|$

Множество допустимых вариаций $H_\delta(\vec{y}_0) = \delta\vec{y}(x) = \|\delta y_1(x), ..., \delta y_n(x)\| : \delta\vec{y}(a) = \delta\vec{y}(b) = 0$

Пусть $\vec{y}_0(x) \in C^1_{[a;b]}$ - слабый минимум ($\Rightarrow \delta\mathcal{J} = 0$), (6)$\wedge$(7). При условии (7) получаем:

$$\mathcal{J}(\vec{y}_0(x) + t\delta\vec{y}(x)) = \int\limits_a^b F(x, \vec{y}_0(x) + t\delta\vec{y}(x), \vec{y}\,'_0(x) + t(\delta\vec{y}(x))')dx = \mathcal{J}(t) = \mathcal{J}(0) + t \cdot \delta\mathcal{J} + o(t) =$$

$$= \mathcal{J}(0) + \int\limits_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_k} \delta y_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_k'} (\delta y_k)' \right) dx + o(t) = \mathcal{J}(0) + \int\limits_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\delta y_k'} \right) \delta y_k \right) dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial y_k'}(b) \underbrace{(\delta y_k(b))}_{=0} \right) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial y_k'}(a) \underbrace{(\delta y_k(a))}_{=0} \right) + o(t)$$

$$\delta\mathcal{J} = \int\limits_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_k'} \right) \delta y_k \right) dx = 0 \ \boxed{\forall \delta\vec{y}(x) \in H_\delta(\vec{y}_0)}$$

Итак, $\delta J = 0 \ \forall \delta\vec{y}(x) \in H_\delta(\vec{y}_0)$, тогда в силу произвольности выбора $\delta\vec{y}(x)$: пусть $\delta y_1 = \delta y_2 = ... = \delta y_{k-1} = 0$, $\delta y_k = ((x-a)(x-b))^2, \delta y_{k+1} = ... = \delta y_n = 0$.

Тогда

$$\delta J = 0 + \int\limits_a^b \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_k'} \right) \delta y_k dx + 0 = 0$$

$\Rightarrow$ Основная лемма $\Rightarrow$ проходим все $k = \overline{1, n}$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_k'} = 0, \ k = \overline{1, n} \text{ (Система уравнений Эйлера-Лагранжа)}}$$

1.2.3 Задача со свободными концами

Рассмотрим нахождение экстремума функцианала $\mathcal{J}(y) = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$ среди $y(x) \in C^1_{[a,b]}$. В этом случае $D = C^1_{[a;b]}$, $H_\delta(y_0) = \delta y(x) \in C^n_{[a;b]}$, т.е на $\delta y(x)$ не наложено условий. На F наложены обычные условия: дважды непрерывной дифференцируемости всех переменных в совокупности.

Пусть $y_0(x) \in C^2_{[a;b]}$ является минимум функционала. $y = y_0 + t \cdot \delta y$

$$\delta\mathcal{J} = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}(\delta y)'\right)dx = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\delta y'}\right)\delta y dx + \frac{\partial F}{\partial y'}(y_0(b))\delta y(b) - \frac{\partial F}{\partial y'}(y_0(a))\delta y(a) = 0$$

По основной теореме $\forall \delta y(x) \in C^1_{[a;b]}$

В силу произвольности δy:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y'} = 0, & (1) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'}(b; y_0(b); y_0'(b)) = 0, & (2) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'}(b; y_0(a); y_0'(a)) = 0, & (3) \end{cases}$$

Таким образом, если $y_0(x) \in C^2_{[a;b]}$ является слабым экстремумом функцианала со свободными концами, то $y_0(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера (1) с граничными условиями (2 и 3)