Содержание

1 Билет 1. Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений

1.1 Основные понятия

Определение 1.1. *Уравнение вида*

$$F(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением, где x – аргумент, $y(x)$ – неизвестная функция, F – известная функция.

Определение 1.2. *Если это уравнение удается разрешить относительно старшей производной, такое дифференциальное уравнение называется разрешённым относительно старшей производной и записывается в виде*

$$y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

Порядок уравнения определяется порядком старшей производной от y.

Определение 1.3. *Функция $y = \varphi(x)$ называется решением ДУ, если она n раз дифференцируема и*

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0 \quad \forall x,$$

где определена функция $\varphi(x)$ с её производными.

Определение 1.4. *Система n уравнений*

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f_1(t, x^1(t), \dots, x^n(t)) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f_n(t, x^1(t), \dots, x^n(t)) \end{cases} \tag{1}$$

где $x^1(t), \dots, x^n(t)$ – искомые функции, называется нормальной системой ДУ n-го порядка.

Утверждение 1.1. *Рассмотрим ДУ $y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$ n-ого порядка. Это уравнение эквивалентно следующей нормальной системе ДУ:*

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = v_2 \\ \dot{v}_2 = v_3 \\ \dots \\ \dot{v}_{n-1} = v_n \\ \dot{v}_n = f_n(x, v_1, v_2, \dots, v_n) \end{cases} \Leftrightarrow y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \tag{2}$$

Доказательство. Введем обозначения: $y = v_1(x)$, $y' = v_2(x)$, $y'' = v_3(x)$, $\dots$, $y^{(n-1)} = v_n(x)$. Тогда имеем $\dot{v}_1 = v_2,\ \dot{v}_2 = v_3,\ \dots, \dot{v}_n = f(x, v_1, v_2, \dots, v_n)$, то есть получилась нормальная система дифференциальных уравнений n-ого порядка с неизвестными v_i.

Обратными заменами системы уравнений можно получить исходное дифференциальное уравнение $y^{(n)}(x) = f(x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$. ■

Определение 1.5. *Рассмотрим уравнение 1-ого порядка $y' = f(x, y(x))$. Тогда задача решить это уравнение с условием $y(x_0) = y_0$ называется задачей Коши.*

Определение 1.6. *Пусть $\varphi(x)$ – решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y(x))$. График решения $\varphi(x)$ называется интегральной кривой. В силу определения функции $f(x, y)$ на множестве Ω, вся интегральная кривая будет лежать в Ω.*

Определение 1.7. *Проведём через каждую точку интегральной кривой $(x_0, y_0) \in \Omega$ малый отрезок с углом наклона по отношению к оси x равным α, причём $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0, y_0)$. Получим так называемое поле направлений.*

Из построения интегральной кривой следует, что интегральная кривая в каждой своей точке касается поля напрвлений. Верно и обратное: кривая, касающаяся в каждой своей точке поля направлений, является интегральной кривой.

1.2 Простейшие типы уравнений первого порядка

1.2.1 Уравнения в полных дифференциалах

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$. Тогда кривая

$$\gamma = \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \ t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \tag{3}$$

называется интегральной кривой рассматриваемого уравнения, если $\forall t : t \in [t_1; t_2]$ выполнено

$$P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'_t + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'_t = 0. \tag{4}$$

Определение 1.8. *Дифференциальное уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если $\exists F(x, y) : P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y)$.*

Тогда $dF(x, y) = 0 \Rightarrow F(x, y) = const$, то есть $F(x, y)$ определяет неявную функцию $y(x)$.

Теорема 1.1. *Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в области D. Для того, чтобы уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ являлось уравнением в полных дифференциалах, необходимо выполнение условия $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $(x,y) \in D$. Если же область D ещё и одвосвязна, то условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ является достаточным.*

Доказательство. Пусть $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ – уравнение в полных дифференциалах, тогда $\exists F(x, y) : P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y) \Rightarrow P = \frac{\partial F}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$. По условию P и Q – непрерывно дифференцируемы, тогда $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ – непрерывные функции, значит

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \ (x, y) \in D. \tag{5}$$

Пусть теперь D – односвязная область. Рассмотрим значение интеграла

$$F = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x;y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

который берётся по кривой γ, лежащей в D и соединяющей точки (x_0, y_0) и $(x; y)$. Пусть $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда по теореме о независимости интеграла от пути интегрирования выходит, что значение интеграла не зависит от пути интегрирования γ, а является функцией от (x, y), значит $F = F(x, y)$ – функция и $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y)$. ■

Определение 1.9. *Непрерывно дифференцируемая функция $\mu(x, y) \neq 0$ в области G называется интегрирующим множителем для уравнения в полных дифференциалах $\mu(x, y)(P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = 0$, если исходное уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ не является уравнением в полных дифференциалах.*

Если $\mu(x, y)$ – интегрирующий множитель, то для достаточного условия имеем

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \Leftrightarrow P\frac{\partial\mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{\partial\mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Полученное уравнение не легче исходного, так как теперь задача свелась к нахождению μ. Обычно интегрирующий множитель ищут в виде $\mu(x),\ \mu(y),\ \mu(x^2 + y^2),\ \mu(x^\alpha, y^\beta)$.

1.2.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим ДУ вида $P(y)dx + Q(x)dy = 0$, где $P(y) \in C^1_{[y_1;y_2]}$, $Q(x) \in C^1_{[x_1;x_2]}$. Если $\exists y_0 : P(y_0) = 0$ или $\exists x_0 : Q(x_0) = 0$, тогда

$$\begin{cases} x = t \\ y = y_0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_0 \\ y = t \end{cases} \tag{6}$$

являются интегральными кривыми рассматриваемого ДУ соответственно. Если же выполняется $P(x, y) \neq 0$ и $Q(x, y) \neq 0$, то применим к уравнению интегрирующий множитель

$$\mu(x, y) = \frac{1}{P(x, y)Q(x, y)},$$

получив уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{dx}{Q(x)} + \frac{dy}{P(y)} = 0. \tag{7}$$

Значение $\mu(x, y)$ действительно является интегрирующим множителем, так как выполняется

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{Q(x)}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{P(y)}\right) = 0. \tag{8}$$

Тогда

$$dF(x, y) = \frac{dx}{Q(x)} + \frac{dy}{P(y)} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{Q(x)} \Rightarrow F(x, y) = \int\limits_{x_1}^{x} \frac{dt}{Q(t)} + C(y), \tag{9}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{P(y)} = C'(y) \Rightarrow C(y) = \int\limits_{y_1}^{y} \frac{dt}{P(t)} + C_1 \Rightarrow F(x, y) = \int\limits_{x_1}^{x} \frac{dt}{Q(t)} + \int\limits_{y_1}^{y} \frac{dt}{P(t)} + C_1 = const. \tag{10}$$

Определение 1.10. *Если дифференциальное уравнение вида $P_1(x, y)dx + Q_1(x, y)dy = 0$ может быть сведено к виду $P(y)dx + Q(x)dy = 0$, то такое уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными.*

Утверждение 1.2. *Задача Коши уравнения с разделяющимися переменными $P(y)dx + Q(x)dy = 0$ задаётся в виде $y(x_1) = y_1$, а её решение в виде*

$$\int\limits_{x_1}^{x} \frac{dt}{Q(t)} + \int\limits_{y_1}^{y} \frac{dt}{P(t)} = 0. \tag{11}$$

1.2.3 Однородные уравнения

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$y' = y\left(\frac{y}{x}\right),$$

которое назовём уравнением с однородной правой частью. Сделаем замену $v(x) = \frac{y}{x}$, тогда $y(x) = v(x)\cdot x$, $y'_x = x\cdot v'_x + v = g(v)$, откуда имеем $x\frac{dv}{dx} = g(v) - v$. Если $\exists g(v_0) = v_0$, то v_0 – решение уравнения $x\frac{dv}{dx} = g(v) - v$. Если же $v \neq g(v)$, тогда

$$\frac{dv}{g(v) - v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|x| + C = \int\limits_{v_0}^{v} \frac{dt}{g(t) - t}. \tag{12}$$

Таким образом, найдено решение исходного уравнения с однородной правой частью в квадратурах.

Определение 1.11. *Функция $F(x^1, x^2, \dots, x^n)$ называется однородной степени m, если $\forall\lambda > 0 \longrightarrow F(\lambda x^1, \lambda x^2, \dots, \lambda x^n) = \lambda^m F(x^1, x^2, \dots, x^n)$.*

Пример 1.1. *Рассмотрим уравнение $P(x, y)dx = Q(x, y)dy$. Если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции степени m, тогда*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = \frac{x^m P(1, \frac{y}{x})}{x^m Q(1, \frac{y}{x})} = \frac{P(1, \frac{y}{x})}{Q(1, \frac{y}{x})} = g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{13}$$

Таким образом исходное уравнение свелось к уравнению с однородной правой частью.

1.2.4 Линейные уравнения первого порядка

Определение 1.12. *Дифференциальное уравнение вида $y' + a(x)y = f(x)$ – линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Дифференциальное уравнение вида $y' + a(x)y = 0$ – линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка. При этом $a(x) \in C^1_{I(x)}$, $f(x) \in C_{I(x)}$, где $I(x)$ – область, на которой определены функции $a(x)$ и $f(x)$.*

Введём оператор $L = \frac{d}{dx} + a(x)$, который действует на множество непрерывно дифференцируемых функций $\varphi \in C^1_{I(x)}$. Тогда уравнение $y' + a(x)y = f(x)$ переписывается в виде $L(y) = f(x)$, а уравнение $y' + a(x)y = 0$ переписывается в виде $L(y) = 0$.

Теорема 1.2. *Введённые оператор $L = \frac{d}{dx} + a(x)$ – линейный оператор.*

Доказательство. Рассмотрим линейную комбинацию $c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$:

$$L(c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)) = (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)' + a(x)(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1 L(\varphi_1) + c_2 L(\varphi_2) \tag{14}$$

Таким образом, $L(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1 L(\varphi_1) + c_2 L(\varphi_2)$, то есть L – линейный оператор. ∎

Утверждение 1.3. *Решением уравнения $y' + a(x)y = 0$ является*

$$y = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt}, \; C \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Доказательство. Найдём решение уравнения $y' + a(x)y = 0$:

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx \Rightarrow \ln|y| = -\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt + \ln C \Rightarrow |y| = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt},\ C > 0 \tag{16}$$

Раскрывая модуль и объединяя полученное решение с нулевым ($y \equiv 0$), имеем

$$y = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt},\ C \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

■

Утверждение 1.4. *Решением уравнения* $y' + a(x)y = f(x)$ *является*

$$y = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt},\ C \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Доказательство. Найдём решение уравнения $y' + a(x)y = f(x)$: воспользуемся уже найденным решением однородного уравнения, применяя метод вариации постоянной. То есть будем искать решение в виде

$$y = C(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt}. \tag{19}$$

Подставим это решение в исходное уравнение:

$$C'(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} - a(x)C(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} + a(x)C(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} = f(x) \tag{20}$$

$$C'(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} = f(x) \Rightarrow C(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)e^{\int\limits_{x_0}^{t} a(s)ds} + C_0 \tag{21}$$

Таким образом найден вид $C(x)$. Теперь подставим эту функцию:

$$y = C_0e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} + e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt}\int\limits_{x_0}^{x} f(t)e^{\int\limits_{x_0}^{t} a(s)ds} \tag{22}$$

$$y = C_0e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} + \int\limits_{x_0}^{x} f(t)e^{-\int\limits_{x_0}^{t} a(s)ds} \tag{23}$$

Из полученного решения видно, что оно является суммой решения однородного уравнения и частного решения. ■

Утверждение 1.5. *Если* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$ *– некоторые решения уравнения* $y' + a(x)y = f(x)$, *то* $z(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ *– решение однородного уравнения* $y' + a(x)y = 0$.

Доказательство. По условию $\varphi_1' + a(x)\varphi_1 = f(x)$, $\varphi_2' + a(x)\varphi_2 = f(x)$, откуда очевидно, что $(\varphi_1 - \varphi_2)' + a(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$. Обозначив $z = \varphi_1 - \varphi_2$, получим $z' + a(x)z = 0$, то есть z – решение однородного уравнения. ■

1.3 Уравнение Бернулли и Риккати

1.3.1 Уравнение Бернулли

Определение 1.13. *Д.у. вида* $\boxed{y' + a(x) \cdot y = y^r \cdot f(x)}^{(24)}$*, где* $a(x), f(x) \in C^1, r \in \mathbb{R}, r \neq 1$ *называется уравнением Бернулли.*

Утверждение 1.6. *Если* $r > 0$*, то* $y \equiv 0$ *- тривиальное решение. Пусть* $y \neq 0$*, разделим ДУ на* $y^r \Rightarrow \frac{y'}{y^r} + a(x) \cdot y^{1-r} = f(x)$*. Замена:* $u(x) = y^{1-r} \Rightarrow u' = (1-r) \cdot y^{-r} \cdot y' \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{1}{1-r} \cdot u' + a(x) \cdot u = f(x)$ *- свелось к линейному уравнению.*

1.3.2 Уравнение Риккати

Определение 1.14. *Д.у. вида* $\boxed{y' + a(x) \cdot y^2 + b(x) \cdot y + c(x)}^{(25)}$*, где* $a(x), b(x) \in C^1_{I(x)}$*,* $c(x) \in C_{I(x)}$ *называется уравнением Риккати.*

Утверждение 1.7. *В общем случае уравнение Риккати не допускает решений в квадратурах, однако, если известно некоторое решение* $y = \varphi(x)$*, то сделав замену* $y = u + \varphi$*, получаем:* $\varphi' = u\varphi^2 + b\varphi + c$
$\varphi' + u' = u\varphi^2 + 2a\varphi u + au^2 + b\varphi + bu + c \Rightarrow u' = au^2 + (2a\varphi + b)u$ *- свелось к уравнению Бернулли.*

1.4 Методы понижения порядка дифференциальных уравнений

Утверждение 1.8. *Рассмотрим множество преобразований плоскости* $\boxed{\bar{x} = \varphi(x,y,\lambda), \bar{y} = \psi(x,y,\lambda)}^{(26)}$*. В (26) каждому* $\lambda \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ *соответствует некоторое преобразование, например,* $\bar{x} = \lambda x, \bar{y} = \lambda y, \lambda > 0$ *- гомотетия. Множество преобразований (26) является группой преобразований, если оно содержит любую композицию (26) , т.е.* $\exists \lambda_0 : \varphi(\varphi(x,y,\lambda_1), \psi(x,y,\lambda_2)) = \varphi(x,y,\lambda_0)$*, содержит тождественное преобразование, т.е.* $\exists \lambda_0 : \varphi(x,y,\lambda_0) = x;\ \psi(x,y,\lambda_0) = y$*, и вместе с любым преобразованием содержит и обратное:* $\forall \lambda \in \mathcal{D}\colon \exists\ \lambda_0\colon x = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda_0);\ y = \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda_0)$
Т.о. если (26) - группа, то $x = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda),\ y = \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda)$*; если в ДУ* $y' = f(x,y)$ *осуществить переход к новым координатам, то*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'_{\bar{x}} d\bar{x} + \psi'_{\bar{y}} d\bar{y}}{\varphi'_{\bar{x}} d\bar{x} + \varphi'_{\bar{y}} d\bar{y}} = f(\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda), \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda)) = \tilde{f}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\psi'_{\bar{x}} + \psi'_{\bar{y}} \cdot \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}}{\varphi'_{\bar{x}} + \varphi'_{\bar{y}} \cdot \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}} = \tilde{f}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda) \Rightarrow \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{\tilde{f} \cdot \varphi'_{\bar{x}} - \psi'_{\bar{x}}}{\psi'_{\bar{y}} - \tilde{f} \cdot \varphi'_{\bar{y}}} \tag{27}$$

(27) является записью $y' = f(x,y)$ *в новых координатах. Говорят, что* $y' = f(x,y)$ *допускает группу* $x = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda),\ y = \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda)$*, если оно не изменяется при переходе к новым переменным, т.е.* $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{y})$*.*

Следствие 1.2.1. *Рассматриваем уравнения вида* $\boxed{F(x, y, y', y'') = 0}^{(28)}$

1. $\boxed{F(x,y'',y') = 0}^{(29)}$ *Замена* $y'(x) = v(x) \Rightarrow y''(x) = v'(x)$ *и (29) в этом случае имеет вид* $F(x, v(x), v'(x)) = 0 \xrightarrow[\text{решаем}]{} V(x) = y(x,c_1)$*. Тогда решение (29) запишется в виде*

$\frac{dy}{dx} = g(x, c_1) \Rightarrow y(x) = c_2 + \int g(x,c_1)dx$. *Заметим, что* (29) *допускает группу сдвига* $x = \bar{x},\ y = \bar{y} + y_0$

2. $\boxed{F(y,y',y'') = 0}^{(30)}$ *(не содержит явно* x*). Замена:* $y' = V(y)$*, тогда* $y'' = \frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dx} = V\frac{dV}{dy} \Rightarrow F(y, V, y\frac{dV}{dy}) = 0$ *- ДУ первого порядка.*
Решение $V(y) = g(y,c_1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = g(y,c_1) \Rightarrow$ *Решение* (30)*:* $\int \frac{dy}{g(y,c_1)} = x + c_2$.
Заметим, что (30) *допускает группу сдвигов* $x = \bar{x} + x_0,\ y = \bar{y}$

3. $\boxed{F(x,y'',y',y) = 0 \text{ и } F - \text{однородная степени } m \text{ по } y'',\ y',\ y}$*, т.е.* $\forall\lambda > 0 \rightarrow$ $F(x, \lambda y'', \lambda y', \lambda y) = \lambda^m \cdot F(x, y'', y', y)$. *В таком случае ДУ допускает группу* $x = \bar{x}, y = \lambda\bar{y}$. *Замена:* $z(x) = \frac{y'}{y} \Rightarrow y' = z(x)y$
$\Rightarrow y'' = z'y + zy' = z'y + z^2y = y \cdot (z' + z^2) \Rightarrow F(x, y, zy, y(z' + z^2)) = 0$
$\Rightarrow y^m \cdot F(x, 1, z, z' + z^2) = 0$ *- относительно* z *имеем ур-ние первого порядка.*
Если его решение $z(x) = g(x, c_1)$*, то* $\frac{y'}{y} = g(x, c_1) \Rightarrow \frac{dy}{y} = g(x, c_1)dx \Rightarrow$
$\ln|y| = \int g(x, c_1)dx + c_2$

4*. *Будем говорить, что функция* $F(x, y, y'', ..., y^{(n)})$ *является квазиоднородной функцией степени* r*, если* $\exists\alpha \in \mathbb{R} : \forall\lambda > 0 : F(\lambda x, \lambda^\alpha y, \lambda^{\alpha-1}y', ..., \lambda^{\alpha-n}y^{(n)}) =$
$= \lambda^r \cdot F(x, y, ..., y^{(n)})$.
Рассмотрим множество преобразований:

$$\begin{cases} x = \lambda\bar{x} \\ y = \lambda^\alpha\bar{y} \end{cases}, \quad \text{где } \lambda > 0 \tag{31}$$

Такое множество преобразований перепишем в виде:

$$\begin{cases} x = e^\beta \cdot \bar{x} \\ y = e^{\alpha\beta}\bar{y} \end{cases}$$

Если F *в* (30) *является квазиоднородной, то* (30) *допускает группу растяжений* (31)*:*

$$\boxed{F(x, y'', y', y) = 0} \xrightarrow[\text{преобр.}]{} F(\lambda\bar{x}, \lambda^\alpha\bar{y}, \lambda^{\alpha-1}\bar{y}', \lambda^{\alpha-2}\bar{y}'') = \lambda^r \cdot F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'') = 0$$

$$\Downarrow$$

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'') = 0$$

$$\text{Замена: } \begin{cases} x = e^t \\ y = z(t) \cdot e^{2t} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{z'_t \cdot e^{\alpha t} + z \cdot \alpha \cdot e^{\alpha t}}{e^t} = e^{(\alpha-1)t} \cdot (z'_t + \alpha z)$$

$$\Downarrow$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(\alpha - 1) \cdot e^{(\alpha-1)t} \cdot (z'_t + \alpha z) + e^{(\alpha-1)t} \cdot (z''_{tt} + \alpha z'_t)}{e^t} =$$

$$= e^{(\alpha-2)t} \cdot (z''_{tt} + (2\alpha - 1) \cdot z'_t + \alpha \cdot (\alpha - 1)z)$$

$$\Downarrow$$

$$F(e^t; z \cdot e^{\alpha t}; e^{(\alpha-1)t} \cdot (z'_t + \alpha z); e^{(\alpha-2)t}(z''_{tt} + (2\alpha - 1)z'_t + \alpha \cdot (\alpha - 1)z)) =$$

$= e^{rt} \cdot F(1; z; z'_t + \alpha z; z''_{tt} + (2\alpha - 1)z'_t + \alpha \cdot (\alpha - 1)z) = 0$ *- не содерж.* x*, т.е. свелось к случаю 2*

1.5 Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной

Утверждение 1.9. *Рассмотрим* $\boxed{F(x,y,y') = 0}^{(32)}$ *, где* $F(x,y,y')$ *как функция трёх переменных является непрерывно дифференцируемой в области* $G \subset \mathbb{R}^3$
Решение уравнения $F(x,y,y') = 0$ *будем представлять как кривую в параметрическом виде:*

$$\gamma: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} t \in [t_1, t_2],\ \varphi(t), \psi(t) \in C^1_{[t_1,t_2]} \tag{33}$$

Кривая (33)*, является интегральной кривой* (32) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow F\left(\varphi(t), \psi(t), \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}\right) = 0 \ \ \forall t \in [t_1, t_2] \tag{34}$$

Будем решать эквивалентную систему положив $p = \frac{dy}{dt}$*:*

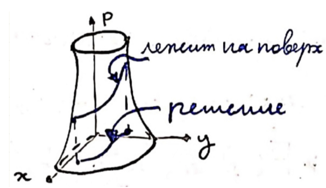
$$\begin{cases} F(x,y,p) = 0 \\ dy = pdx \end{cases} \tag{35}$$

Утверждение 1.10. *Уравнение* (32) *эквивалентно системе* (35).

Доказательство. Пусть γ - интегр. кривая (32). Положим $p = \frac{\psi'}{\varphi'} = \frac{dy}{dx}$ - второе уравнение в системе (35) выполнено, а первое выполнено в силу подстановки в (34). Обратно, пусть $x(t) = \varphi(t),\ y(t) = \psi(t), p$ - решение (34). $\Rightarrow$ Из второго уравнения системы:
$p = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} \rightarrow$ Подставляем в первое уравнение системы и получаем само уравнение (34)

■

Утверждение 1.11. *Рассмотрим метод решения* (32)*, который называется методом введения параметра.*
Первое ур-ние в системе (35) *рассмотрим как задающее в* $\mathbb{R}^3_{(x,y,p)}$ *гладкую поверхность S, для которой параметрическое представление имеет вид:*



$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \\ p = \chi(u,v) \end{cases} \Rightarrow F(\varphi(u,v); \psi(u,v); \chi(u,v)) \equiv 0$$

Потребуем, чтобы $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \frac{\delta\varphi}{\delta u} & \frac{\delta\psi}{\delta u} & \frac{\delta\chi}{\delta u} \\ \frac{\delta\varphi}{\delta v} & \frac{\delta\psi}{\delta v} & \frac{\delta\chi}{\delta v} \end{pmatrix} = 2,\ \forall u, v \in G$ *т.е. S была простой гладкой пов.*

Тогда остаётся удовлетворить второму уравнению системы (35)*:*

$$\frac{\delta\psi}{\delta u}du + \frac{\delta\psi}{\delta v}dv = \chi \cdot \left(\frac{\delta\varphi}{\delta u}du + \frac{\delta\varphi}{\delta v}dv\right) \Rightarrow \left(\frac{\delta\psi}{\delta u} - \chi\frac{\delta\varphi}{\delta v}\right)du = \left(\chi\frac{\delta\varphi}{\delta v} - \frac{\delta\psi}{\delta v}\right)dv \tag{36}$$

Если $P(u,v) \neq 0 \ \forall (u,v) \in G$, *то из* (36) *получаем Д.У.:* $\dfrac{du}{dv} = \dfrac{Q(u,v)}{P(u,v)}$

Его решение $u = u(v,c)$, *тогда* $\begin{cases} x = \varphi(u(v,c),v) = x(v,c) & \text{- является параметрическим} \\ y = \psi(u(v,c),v) = y(v,c) & \text{представлением решения (32)} \end{cases}$

Если же существует связь между u *и* v: $u = f(v), P(f(v),v) = Q(f(v),v) = 0 \ \forall v \in G$, *то* $u = f(v)$ *явл. решением* $\left(\chi \frac{\delta\varphi}{\delta v} - \frac{\delta\psi}{\delta v}\right) dv$, *а*

$$\begin{cases} x = x(v) \\ y = y(v) \end{cases} \text{ - явл. решением (36)}$$

2 Билет 2. Задача Коши

2.1 Принцип сжимающих отображений

Работаем в $E = \mathbb{R}^n$ - пространство точек с n координатами. E - аффинное пространство, а $\vec{E}$ – его присоединенное линейное пространство, состоящее из векторов, натянутых на точки E.

Определение 2.1. *Пусть L - это векторное пространство, и на нем задано отображение $\|\cdot\| : L \longrightarrow \mathbb{R}$ такое, что:*

1. $\forall x \in L \longmapsto \|x\| \geqslant 0$. *А также* $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
2. $\forall x \in L \,\&\, \forall \lambda \in \mathbb{R} \longmapsto \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3. $\forall x, y \in L \longmapsto \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ - *неравенство треугольника.*

Тогда данное отображение называется нормой, а пространство L нормированным.

Пример 2.1. *Приведем пример норм. Пусть $a(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда норму можно определить, допустим, так:*

$$\|a\|_1 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}. \tag{37}$$

Или так:

$$\|a\|_2 = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j|. \tag{38}$$

И тогда можно ввести понятие эквивалентности норм.

Определение 2.2. *Пусть снова L - линейное пространство. Тогда нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на L называются эквивалентными, если $\exists C_1, C_2 > 0 :\ \forall x \in L \longmapsto C_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1$.*

Как видно, для определенных выше двух норм это соотношение удовлетворяется.

Утверждение 2.1. *В конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.*

Рассмотрим множество функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$ для некоторых неравных $a, b \in \mathbb{R}$ и обозначим данное множество $C[a; b]$. Понятно, что $C[a; b]$ является линейным пространством. Тогда введем на нем норму.

Определение 2.3. *Нормой функции $f(x) \in C[a; b]$ будем называть число*

$$\|f(x)\| = \max_{x \in [a;b]} |f(x)|.$$

Определение 2.4. *Набор функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x) \in C[a; b]$ будем называть вектор-функцией и обозначать $f(x) = \vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))^T$.*

Определение 2.5. *Вектор-функция $f(x)$ называется непрерывной (дифференцируемой, непрерывно дифференцируемой и т.п.), если все ее компоненты непрерывны (дифференцируемы, непрерывно дифференцируемы и т.п.).*

Определение 2.6. *Модулем вектор-функции $f(x)$ назовем число*

$$|f(x)| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} f_j^2(x)}. \tag{39}$$

Норму вектор-функции можно определить как

$$\|f(x)\|_1 = \max_{x\in[a;b]} |f(x)|.$$

Или же как

$$\|f(x)\|_2 = \max_{j=1,\ldots,n} \max_{x\in[a;b]} f_j(x).$$

Понятно, что эти две нормы эквивалентны.

Определение 2.7. *Пусть имеется функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, где $f_n(x) \in C[a;b]$ - линейное пространство функций с нормой (1 или 2 – неважно). Тогда говорят, что данная последовательность сходится к функции $f(x)$ по норме, если:*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0. \tag{40}$$

Аналогично все то же самое и точно так же определяется и для вектор-функций $f(x) = \vec{f}(x) \in C[a;b]^n$.

Определение 2.8. *Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется фундаментальной, если:*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n \geqslant N\ \&\ \forall m \geqslant N \longmapsto \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon. \tag{41}$$

Определение 2.9. *Функциональное пространство L называется полным по [данной] норме, если любая фундаментальная функциональная последовательность данного пространства сходится по норме к функции из этого же пространства L.*

Теорема 2.1. *Функциональное пространство $C[a;b]$ с нормой $\|\cdot\|_1$ является полным.*

Доказательство. Возьмем произвольную функциональную последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ из нашего пространства непрерывных функции. Тогда из определения фундаментальности следует, что $\|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$.

Однако $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon\ \forall x \in [a;b]$.

А значит, последовательность $f_n(x)$ сходится к некоторой $f(x)$, причем равномерно на $[a;b]$ (числовая последовательность $\|f_n(x)\|$ мажорирует функциональную последовательность $f_n(x)$).

Так как $f_n(x) \in C[a;b]$ – непрерывны $\forall n \in \mathbb{N}$, и последовательность сходится равномерно на $[a;b]$, то предельная функция $f(x)$ также является непрерывной на $[a;b]$, а значит, $f(x) \in C[a;b]$.

Таким образом, последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f(x) \in C[a;b]$. В силу произвольности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ заключаем, что функциональное пространство $C[a;b]$ с нормой $\|\cdot\|_1$ является полным. ■

Определение 2.10. *Полное нормированное линейное пространство называется Банаховым. Обозначается B.*

Определение 2.11. *Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ называется сходящемся по норме, если последовательность его частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ является сходящейся по норме.*

Определение 2.12. *Пусть $\forall x \in M \subseteq B$ определен элемент $Ax \in B$. Тогда говорят, что на множестве B задан оператор A с областью определения M.*

Будем рассматривать уравнение $x = Ax$.

Определение 2.13. *Множество $M \subseteq B$ называется ограниченным, если $\exists C > 0$ такое, что $\forall x \in M \longmapsto \|x\| \leqslant C$.*

Определение 2.14. *Оператор A называется сжатием на M, если:*

1. $\forall x \in M \longmapsto Ax \in M$;

2. $\exists k \in (0;1) : \ \forall x, y \in M \longmapsto \|Ax - Ay\| \leqslant k\|x - y\|$.

Теорема 2.2 (Принцип сжимающих отображений). *Пусть множество $M \subseteq B$ является ограниченным и замкнутым, а оператор A является сжатием. Тогда решение уравнения $x = Ax$ существует и единственно.*

Доказательство. Будем использовать итерационный метод, согласно которому мы выбираем начальное x_0, а затем строим последовательность $x_n = Ax_{n-1}$. Тогда, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = Ax$, то $x = Ax$.

Пусть $x_n = S_n = x_0 + (x_1 - x_0) + \ldots + (x_n - x_{n-1})$. Докажем, что $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant 2Ck^n$ для некоторого $C > 0$, ограничивающего последовательность x_n. Сделаем это по индукции.

База индукции: $\|x_1 - x_0\| \leqslant \|x_1\| + \|x_0\| \leqslant 2C$.

Предположим, что $\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant 2Ck^{n-1}$. Тогда получаем, что $\|x_{n+1} - x_n\| = \|Ax_n - Ax_{n-1}\| \leqslant k\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant 2Ck^n$.

И получаем, что $x_0 + \sum\limits_{j=1}^{\infty}(x_j - x_{j-1}) \leqslant x_0 + \sum\limits_{j=1}^{\infty} 2Ck^{n-1} < \infty$.

А значит $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. А поскольку M замкнуто, то $x \in M$.

Теперь рассмотрим разность $\|Ax_n - Ax\| \leqslant k\|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Это означает, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = Ax$.

Учитывая, что $x_{n+1} = Ax_n$, то, перейдя к пределу с обеих частей равенства, мы получаем, что итерационный метод сходится к решению уравнения $x = Ax$. И таким образом, доказано существование решения. Теперь докажем его единственность.

Пойдем от противного: пусть x и y – два разных решения. Тогда $\|x - y\| = \|Ax - Ay\| \leqslant k\|x - y\|$. Учитывая, что $k \in (0;1)$, то данная ситуация возможна тогда и только тогда, когда $\|x - y\| = 0$. Следовательно, $x = y$, что противоречит тому, что это два разных решения. Итак, теорема доказана. ∎

2.2 Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений

Определение 2.15. *Система вида*

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(t, \bar{x}) \\ \dot{x}^2 = f^2(t, \bar{x}) \\ \ldots \\ \dot{x}^n = f^n(t, \bar{x}) \end{cases} \tag{42}$$

называется нормальной системой дифференциальных уравнений n-ого порядка.

Определение 2.16. *Система*

$$\begin{cases} x^1(t_0) = x_0^1 \\ x^2(t_0) = x_0^2 \\ \ldots \\ x^n(t_0) = x_0^n \end{cases} \tag{43}$$

называется начальным условием

Утверждение 2.2. *Решить задачу Коши означает решить нормальную систему дифференциальных уравнений при заданном начальном условии*

Теорема 2.3 (Теорема Коши о существовании и единственности решения)**.** *Пусть* $\forall i, j = \overline{1, n}$ *функции* $f^i, \dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}$ *непрерывны в области* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$*, тогда,* $\forall (t_0, \overline{x_0}) \in \Omega \ \exists h > 0 : \forall t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ *решение задачи Коши существует и единственно.*

Лемма 2.1. *Если* $\bar{f}(t, \bar{x})$ *- непрерывны на* Ω*, то система уравнений*

$$\overline{x}(t) = \overline{x_0} + \int\limits_{t_0}^{t} \bar{f}(\tau, \overline{x}(\tau)) d\tau \tag{44}$$

эквивалентна задаче Коши.

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ - решение (42) при условии (43), тогда

$$\dot{\varphi}^i = f^i(t, \varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t))$$

Проинтегрируем полученное равенство по отрезку $[t_0, t]$

$$\int\limits_{t_0}^{t} \dot{\varphi}^i(\tau) d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} f^i(\tau, \varphi^1(\tau), \ldots, \varphi^n(\tau)) d\tau$$

$$\varphi^i(t) - \varphi^i(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} f^i(\tau, \bar{\varphi}(\tau)) d\tau$$

$$\varphi^i(t) = x_0^i + \int\limits_{t_0}^{t} f^i(\tau, \bar{\varphi}(\tau)) d\tau$$

Теперь пусть $\bar{\varphi}(t)$ - решение (44). Тогда

$$\varphi^i(t) \equiv x_0^i + \int\limits_{t_0}^{t} f^i(\tau, \bar{\varphi}(\tau)) d\tau$$

Отсюда видно, что функция $\varphi^i(t)$ - дифференцируемы. Тогда

$$\begin{cases} \dot{\varphi}^i(t) = f^i(t, \bar{\varphi}(t)) \\ \varphi^i(t_0) = x_0^i \end{cases} \tag{45}$$

■

Следствие 2.3.1. *Из 2 части леммы следует, что решение задачи Коши непрерывно дифференцируемо.*

Введем оператор $A(\bar{x}) = \bar{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau$. Тогда систему интегральных уравнений (44) можно записать в виде

$$\bar{x}(t) = A(\bar{x}) \tag{46}$$

Лемма 2.2.

$$\left\| \int\limits_{t_0}^{t} \bar{x}(\tau) d\tau \right\| \leq \left| \int\limits_{t_0}^{t} \|\bar{x}(\tau)\| d\tau \right|$$

Доказательство.

$$\left| \int\limits_{t_0}^{t} x^i(\tau) d\tau \right| \leq \left| \int\limits_{t_0}^{t} \left| x^i(\tau) \right| d\tau \right| \leq \left| \int\limits_{t_0}^{t} \|\bar{x}(\tau)\| d\tau \right| \tag{47}$$

Таким образом $max\{|\int\limits_{t_0}^{t} x^i(\tau)d\tau|\} = ||\int\limits_{t_0}^{t} \bar{x}(\tau)d\tau|| \leq |\int\limits_{t_0}^{t} \|\bar{x}(\tau)\|d\tau|$ ■

Лемма 2.3. *(Адамара) Пусть* $\bar{f}(\bar{x}), \dfrac{\partial f^i}{\partial x_j}$ *непрерывны в* $\Omega \subset \mathbb{R}$ *- замкнутой, ограниченной, выпуклой области. Тогда* $\forall i = \overline{1,n}, \bar{y} \in \Omega \hookrightarrow \|\bar{f}(\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x})\| \leq n^{3/2} K_1 \|\overline{y - x}\|$*, где* $K_1 = max_{i,j=\overline{1,n}}\{max_{x\in\Omega}\left\{\left|\dfrac{\partial f^i}{\partial x_j}\right|\right\}\}$

Доказательство. $|\bar{f}| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(f^i)^2}$, $\|\bar{f}\|_C = max_{x\in\Omega}\{|\bar{f}(\bar{x})|\}$

Ω - компакт, поэтому непрерывность частных производных позволяет говорить о существовании K_1. Возьмем производные точки $\bar{x}$ и $\bar{y}$ и соединим их отрезком $\bar{x} + t(\bar{y} - \bar{x})$, где $t \in [0, 1]$. Рассмотрим значение компоненты f^i на отрезке:

$$f^i(\bar{x} + t(\bar{y} - \bar{x})) = f^i(t)$$

$f^i(t)$ - дифференцируема, тогда

$$|f^i(\bar{y}) - f^i(\bar{x})| = |f^i(1) - f^i(0)| = \left| \frac{df}{dt}(t^*) \cdot (1 - 0) \right| =$$
$$= \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(t^*) \cdot (y^j - x^j) \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(t^*) \right| \cdot \left|(y^j - x^j)\right| \leq K_1 \|\bar{y} - \bar{x}\| \cdot n$$

Теперь рассмотрим вектор-функцию

$$|\bar{f}(\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x})| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(f^k(\bar{y}) - f^k(\bar{x}))^2} \leq K_1 n^{3/2} \|\bar{y} - \bar{x}\|$$
$$\Rightarrow \|\bar{f}(\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x})\| \leq K_1 n^{3/2} \|\bar{y} - \bar{x}\|$$

■

Доказательство. (Основная теорема)

Докажем, что $A(\bar{x})$ из системы (46) является сжатием.

Рассмотрим $\Pi = \{\|\bar{x}(t) - \bar{x}_0(t)\| \leq b, |t - t_0| \leq a\} \subset \Omega$. Определим $K = \|\bar{f}\|_C = max_\Pi |\bar{f}|$. K_1 тоже определено в силу условий.

Рассмотрим $\Pi_h = \{\|\bar{x}(t) - \bar{x}_0(t)\| \leq b, |t - t_0| \leq h \leq a\}$

Банахово пространство B - множество функций $\bar{x}(t)$ непрерывных на отрезке $|t - t_0| \leq$ $\leq h$. $M \subset B$ - множество функций $\|\bar{x}(t) - \bar{x}_0\| \leq b$. M ограничено, так как $\forall \bar{x}(t) \in M \hookrightarrow$ $\|\bar{x}(t)\| = \|\bar{x}(t) - \bar{x}_0 + \bar{x}_0\| \leq b + \|\bar{x}_0\| = C$

Докажем, что M замкнуто. Пусть $\bar{x}_n(t), n = 1, 2, \dots$ - последовательность точек в M, такая что $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{x}_n(t) = \bar{x}(t)$. $\|\bar{x}(t)\| = \|\bar{x}(t) - \bar{x}_n + \bar{x}_n\| \le \|\bar{x}(t) - \bar{x}_n\| + \|\bar{x}_n\| \le \varepsilon + b \Rightarrow \bar{x}(t) \in M$

Подберем h так, чтобы $A : M \to M$. То есть $\|A(\bar{x}) - \bar{x}_0\| \le b$.

$$\|A(\bar{x}) - \bar{x}_0\| = \| \int\limits_{t_0}^{t} \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau \| \le | \int\limits_{t_0}^{t} \|\bar{f}\| d\tau | \le Kh$$

Получаем условие $h \le b/K$

Чтобы доказать, что A - сжатие, рассмотрим норму

$$\|A(\bar{y}) - A(\bar{x})\| = \| \int\limits_{t_0}^{t} (\bar{f}(\tau, \bar{y}(\tau)) - \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau))) d\tau \| \le$$

$$\le | \int\limits_{t_0}^{t} \|\bar{f}(\tau, \bar{y}) - \bar{f}(\tau, \bar{x})\| d\tau | \le K_1 n^{3/2} \|\overline{y - x}\| \cdot | \int\limits_{t_0}^{t} d\tau | \le K_1 h n^{3/2} \|\overline{y - x}\|$$

Откуда второе условие: $h < \dfrac{1}{n^{3/2} K_1}$

Тогда оператор A будет сжатием. Соответственно решение задачи Коши существует и единственно.

■

2.3 Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения n-го порядка в нормальном виде

Определение 2.17. *Уравнение вида*

$$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \tag{48}$$

называется уравнением n-го порядка в нормальной форме.

Определение 2.18. *Система*

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \tag{49}$$

называется начальным условием уравнения n-го порядка в нормальной форме.

Утверждение 2.3. *Решить задачу Коши означает найти такое решение (48), которое удовлетворяет условию (49)*

Теорема 2.4 (Теорема Коши о существовании и единственности решения)**.** *Если* $f, \dfrac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ *непрерывны в* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$*, тогда* $\forall (x_0, \bar{y}_0) \in \Omega \exists h > 0 : \forall x \in [x_0 + h, x_0 - h]$ *решение задачи Коши существует и единственно.*

Доказательство. Введем следующие функции: $y(x) = v_1(x), y'(x) = v_2(x), \dots, y^{(n-1)}(x) = v_n(x)$. Таким образом получаем систему уравнений в нормальной форме

$$\begin{cases} \dfrac{dv_1}{dx} = v_2 \\ \dots \\ \dfrac{dv_n}{dx} = f(x, \bar{v}) \end{cases} \tag{50}$$

А для нее решение существует и единственно. ■

3 Билет 3. Линейный дифференциальные уравнения и линейныесистемы диффуренциальных уравнений с постоянными коэффициентами

3.1 Матричная экспонента, ее свойства и применение к решению нормальных линейных систем

3.1.1 Матричная экспонента

Необходимо решить ОЛДУ вида:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x},\ \vec{x}(t_0) = \vec{x_0}, \tag{51}$$

Если $A(t) = ||a_j^i||$, $a_j^i \in \mathbf{R}$, $i,j = 1,\dots,n$, тогда:

$$\vec{x_0} = E\vec{x_0},\ \vec{x_1} = E\vec{x_0} + \frac{t-t_0}{1!}A\vec{x_0} = \left(E + \frac{t-t_0}{1!}A\right)\vec{x_0},$$
$$\vec{x_n} = \left(E + \frac{t-t_0}{1!}A + \ \dots\ + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n\right)\vec{x_0},$$

Этот процесс будет сходиться к задаче Коши с решением:

$$\vec{x} = \left(E + \frac{t-t_0}{1!}A + \ \dots\ + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n + \ \dots\right)\vec{x_0} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n\right)\vec{x_0},$$

при условии, что $A^0 = E$.

Определение 3.1. *Матричной экспонентой называют следующий степенной ряд:*

$$e^{(t-t_0)A} = E + \frac{t-t_0}{1!}A + \ \dots\ + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n + \ \dots\ = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n.$$

3.1.2 Свойства матричной экспоненты

Это квадратная матрица, по размерам аналогична матрице A, и каждый элемент этой матрицы представляет из себя степенной ряд с радиусом сходимости $+\infty$.

1. Решение задачи Коши для (51), если $A = const$:

$$\vec{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{x_0},\ (\vec{x}(t_0) = \vec{x_0}).$$

2. $e^{0A} = E$.

3. $e^{(t_1+t_2)A} = e^{t_1A}e^{t_2A} \Rightarrow e^{t_1A}e^{t_2A} = e^{t_2A}e^{t_1A}$ (коммутативность).

4. $\left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}$.

5. $\left(e^{tA}\right)' = Ae^{tA} = e^{tA}A$.

Доказательство. Так как квадратные матрицы составляют определенное кольцо, то $A^{n+m} = A^nA^m = A^mA^n$.

1.

2. $e^{tA} = E + \frac{t-t_0}{1!}A + \ \dots \ + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n + \ \dots$, если $t = 0$:
$$e^{0A} = E + 0 + \dots = E$$

3. рассматриваем (51), если $\vec{x}(t)$ - решение этого ДУ, то $\vec{x}(t+t_0)$ тоже решение этого ДУ $\forall t_0 \in \mathbf{R}$. $(u = t + t_0)$:
$$\frac{d\vec{x}(t+t_0)}{dt} = \frac{d\vec{x}}{du}\frac{du}{dt} = \frac{d\vec{x}}{du} = A\vec{x}(u) = A\vec{x}(t+t_0).$$
Тогда (51), с задачей Коши $\vec{x}(0) = \vec{x_0}$ имеет решение:
$$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x_0},$$
$$\vec{x}(t+t_0) = e^{(t+t_0)}\vec{x_0} \text{ - решение } \frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}.$$
Рассмотрим тогда тоже самое уравнение для функции $z(t)$:
$$\frac{d\vec{z}}{dt} = A\vec{z}, \text{ с задачей Коши } \vec{z}(0) = e^{t_0A}\vec{x_0} \Rightarrow \vec{z}(t) = e^{tA}(e^{t_0A}\vec{x_0}) = (e^{tA}e^{t_0A})\vec{x_0}.$$
Рассмотрим это решение в нуле:
$$\vec{x}(0+t_0) = e^{t_0A}\vec{x_0},$$
из основной теоремы следует, что $\vec{x}(t+t_0) = \vec{z}(t)\ \forall t$.

Тогда и получается основная формула:
$$\vec{x}(t+t_0) = e^{(t+t_0)A}\vec{x_0} = (e^{tA}e^{t_0A})\vec{x_0}$$

4. $E = e^{0A} = e^{(t-t)A} = e^{tA}e^{-tA} = E \Rightarrow \left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}$.

5. Берем представление матричной экспоненты в виде степенного ряда, который можно дифференцировать, тогда получаем:
$$(e^{tA})' = A + tA^2 + \ \dots \ + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n + \ \dots = A\left(E + tA + \ \dots \ + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1}\right),$$
$$(e^{tA})' = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

■

Примечание. Формула $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$ не имеет места, кроме случая, если $AB = BA$ (т.е. матрицы коммутативны).

3.1.3 Применение к решению нормальных линейных систем

Теорема 3.1. *Пусть S - матрица перехода от исходного базиса к новому базису. Тогда в новой базисе $\overline{A} = S^{-1}AS$, или $A = S\overline{A}S^{-1}$. И главное:*

$$e^{tA} = S^{-1}e^{t\overline{A}}S.$$

Доказательство.

$$e^{tA} = \left(E + tA + \ \dots \ + \frac{t^n}{n!}A^n\right) = \left(E + tS^{-1}e^{t\overline{A}}S + \ \dots \ + \frac{t^n}{n!}(S^{-1}e^{t\overline{A}}S)^n\right),$$
$$(S\overline{A}S^{-1})^n = S\overline{A}^n S^{-1},\ SES^{-1} = SS^{-1} = E$$
$$e^{tA} = S^{-1}e^{t\overline{A}}S.$$

■

Для решения нормальных линейных систем методом матричной экспоненты мы будем находить собственные вектора.

Матрица A в базисе из собственных векторов (если они соответствуют действительным собственным значениям) будет иметь диагональный вид. Произведение диагональной матрицы на диагональную – диагональная. Тогда для случая без кратных корней:

$$e^{tA} = E + t\cdot diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + \frac{t^n}{n!}\cdot diag(\lambda_1^n, \dots, \lambda_n^n).$$

$$e^{tA} = diag(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}).$$

Если λ – корень кратности l, то матрица A приводится к Жордановой клетке (диагональная матрица с единицами над главной диагональю).

$$A = \lambda E + B \Rightarrow B = A - \lambda E.$$

$$e^{tA} = e^{t(\lambda E + B)} = e^{t\lambda E}e^{tB},\ e^{t\lambda E} = diag(e^{t\lambda}, \dots, e^{t\lambda}), e^{tB} = E + tB + \ \dots \ + \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}B^{l-1} + 0$$

$$\text{тогда } e^{tA} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t & & \dots & \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} \\ & & & \dots & \\ 0 & & & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Метод решения линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами (матричный метод вариации постоянной)

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}(t), \quad \text{решение будем искать в виде } \ \vec{x}(t) = e^{tA}\vec{C}(t),$$

$$\text{тогда } Ae^{tA}\vec{C}(t) + e^{tA}\dot{\vec{C}}(t) = Ae^{tA}\vec{C} + \vec{f}(t),$$

$$e^{tA}\dot{\vec{C}}(t) = \vec{f}(t) \ \Rightarrow \dot{\vec{C}}(t) = (e^{tA})^{-1}\vec{f}(t) = e^{-tA}\vec{f}(t).$$

4 Билет 4. Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

4.1 Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной линейной системы уравнений и для линейного уравнения n-го порядка в нормальном виде

Рассматривается система вида

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{q}(t), \tag{52}$$

где $A = ||a^i_j(t)||$, $i,j = \vec{1,n}$ – матрица, $\vec{q}(t)$ – заданная вектор-фенкция. Наряду с векторной записью также будем использовать координатную запись $\dot{x}^i = \sum\limits_{j=1}^{n} a^i_j x^j + q^i(t)$, $i = \vec{1,n}$.

Необходимым условием линейности является факт того, что все A^i_j и q^i зависят только от t и не зависят от $\vec{x}$.

Для (52) ставится задача Коши:

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x_0}.$$

Теорема 4.1. ***Основная теорема для линейных систем.*** *Пусть* $a^i_j(t)$, $i,j = \vec{1,n}$ *и* $\vec{q}(t)$ *в* (52) *непрерывны на отрезке* $[a;b]$. *Тогда рпешение задачи Коши существует и единственно на всем отрезке* $[a;b]$.

Предварительные замечания:

Пусть вектор-функция $\vec{f}(x) \in B$ и A – линейный оператор, действубщий из B в B, т.е. $A(\vec{f} + \vec{g}) = A\vec{f} + A\vec{g}$.

Определим норму оператора:

$$||A|| = \sup_{\vec{\varphi} \in B,\ \vec{\varphi} \neq \vec{0}} \frac{||A(\vec{\varphi})||}{||\vec{\varphi}||}.$$

Тогда получаем неравенство: $||A||$
$leqslant||A||||\vec{\varphi}||$.

Нормой для вектор-функции выберем $||\vec{x}(t)|| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\max\limits_{t\in[a;b]} x^i(t))$, а нормой для оператора $||A|| == \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\max\limits_{t\in[a;b]} \sum\limits_{j=1}^{n} |a^i_j(t)|)$

Доказательство. Определим $\vec{g}(t) = \vec{x_0} + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{q}(S)dS$ и построим итерационную процедуру.

Т.к $q^i(t) \in C_{[a;b]}$ $\forall i = \vec{1,n} \Rightarrow \exists ||\vec{q}||_c = M_1$. Тогда $||\vec{g}||_c = ||\vec{x_0} + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{q}(S)dS|| \leqslant ||\vec{x_0}|| + || \int\limits_{t_0}^{t} \vec{q}(S)dS|| \leqslant ||\vec{x_0}|| + M_1(b-a) = C$.

Рассмотрим интегральное уравнение $\vec{x} = \vec{g} + \int\limits_{t_0}^{t} A(s)\vec{x}(s)ds$.

Аналогично основной лемме доказывается, что последнее интегральное уравнение эквивалентно задаче (52).

Итерационная процедура: $\vec{x_0} = \vec{g}$; $\vec{x_k} = \vec{g} + \int\limits_{t_0}^{t} A(s)\vec{x_{k-1}}(s)ds$, $k = 0{,}1, \ \ldots$

Оценим норму:

$$||\vec{x_1} - \vec{x_0}|| = ||\int\limits_{t_0}^{t} A(s)\vec{g}(s)ds|| \leqslant |\int\limits_{t_0}^{t} ||A(s)\vec{g}(s)||ds| \leqslant |\int\limits_{t_0}^{t} ||A(s)|| \cdot ||\vec{g}(s)||ds| \leqslant C_1C|t - t_0|;$$

Таким образом $||\vec{x_1} - \vec{x_0}|| \leqslant C_1C|t - t_0|$.

Теперь докажем по индукции неравенство: $||\vec{x_k} - \vec{x_{k-1}}|| \leqslant \frac{CC_1^k}{k!}|t - t_0|^k$.

Базой индукции выступает полученное выше неравенство. Предположим, что верно для $n = k$, т.е.: $||\vec{x_k} - \vec{x_{k-1}}|| \leqslant \frac{CC_1^k}{k!}|t - t_0|^k$.

Докажем для

$$n = k + 1: \ ||\vec{x_{k+1}} - \vec{x_k}|| = ||\int\limits_{t_0}^{t} A(s)(\vec{x_k}(s) - \vec{x_{k-1}}(s))ds|| \leqslant |\int\limits_{t_0}^{t} ||A(s)(\vec{x_k}(s) - \vec{x_{k-1}}(s))||ds| \leqslant$$

$$\leqslant |\int\limits_{t_0}^{t} ||A(s)|| \cdot ||(\vec{x_k}(s) - \vec{x_{k-1}}(s))||ds| \leqslant C|\int\limits_{t_0}^{t} \frac{C_1C^k|s - t_0|^k}{k!}ds| = \frac{C^{k+1}C_1|t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!}$$

Т.к. $|t - t_0| \leqslant (b - a)$, то предыдущее неравенство можно усилить $||\vec{x_k} - \vec{x_{k-1}}|| \leqslant \frac{C_1C^k}{k!}(b - a)^k$.

Функциональная последовательно $\vec{x_k}$ сходиться равномерно, т.к. сходится равномерно ряд $\vec{x_0} + (\vec{x_1} - \vec{x_0}) + \ \ldots \ + (\vec{x_k} - \vec{x_{k-1}}) + \ \ldots$, который межорируется сходящимся рядом $||\vec{x_0}|| + ||(\vec{x_1} - \vec{x_0})|| + \ldots + ||(\vec{x_k} - \vec{x_{k-1}})|| + \cdots \leqslant ||\vec{x_0}|| + C_1 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{C^k|b-a|^k}{k!} = ||\vec{x_0}|| + C_1e^{C(b-a)} < \infty \Rightarrow$ Существует (в сиду банаховости пр-ва) непрерывно дифф. $\vec{\varphi(t)} : \exists \lim\limits_{n\to\infty} \vec{x_n} = \varphi(t)$.

Рассмотрим $||\int\limits_{t_0}^{t} A\vec{x_n}dS - \int\limits_{t_0}^{t} A\vec{\varphi}dS|| = ||\int\limits_{t_0}^{t} A(\vec{x_n} - \vec{\varphi})dS|| \leqslant ||A|| \cdot |\int\limits_{t_0}^{t} ||\vec{x_n} - \vec{\varphi}||dS|$, где $||\vec{x_n} - \vec{\varphi}|| \to_{n\to\infty} 0$.

Т.о. итерационная процедура сходится в силу существования пределов слева и справа.

Полученное решение эквивалентно решению задачи (52). В отличии от основной теоремы для нормальных систем ДУ: $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t, \vec{x})$, где существование было получено только на отрезке Пеано, для СЛДУ существование решения доказано для всего отрезка $[a; b]$ – промежутка, где $a_j^i(t)$ и $\vec{q}(t)$ непрерывны. В нашем случае $\vec{f}$ соответствует $\vec{f} = A\vec{x} + \vec{q}$. Она непрерывна, т.к. полученное решение $\vec{x}(t)$ непрерывно. Условие непрерывности $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ также выполнены, т.к. в нашем случае $\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_{ij}(t)$ – непр. на $[a; b]$. Отсюда следует единственность, т.к. два решения задачи (52), согласно основной теореме для нормальныэ систем, совпадает на промежутке, где они оба определены. В нашем случае это $[a; b]$.

Т.о. теорема не носит локальных характер.

$\blacksquare$

4.2 Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы

Будем рассматривать однородную систему ДУ вида:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}; \quad \dot{x}^i = \sum_{k=1}^{n} a^i_k x^k; \quad i,k = \overline{1,n} \tag{53}$$

Утверждение 4.1. *Для однородных систем линейных уравнений верен принцип суперпозиций, т.е если система функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ – решение системы уравнений, то любая их линейная комбинация тоже является решением.*

Доказательство. Введем оператор L такой, что $L = \frac{d}{dt} - A$. Тогда однородная система ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ запишется в виде $L(\vec{x}) = 0$, неоднородная система ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} - A\vec{x} = q(t)$ запишется в виде $L(\vec{x}) = q(t)$.

Пусть вектор-функции $\vec{\varphi}(t)$ и $\vec{\psi}(t)$ являются решениями системы $L(\vec{x}) = 0$, в таком случае справедливо

$$L(\vec{\varphi}(t)) = 0; \quad L(\vec{\psi}(t)) = 0$$

Рассмотрим вектор-функцию $\vec{\chi}(t) = a\vec{\varphi}(t) + b\vec{\psi}(t)$, где a и b – произвольные коэффициенты. Применим оператор L к получившейся вектор-функции:

$$\begin{aligned} L(\vec{\chi}(t)) &= \frac{d}{dt}\left(a\vec{\varphi}(t) + b\vec{\psi}(t)\right) - A\left(a\vec{\varphi}(t) + b\vec{\psi}(t)\right) = \\ &= a\left(\frac{d}{dt}\vec{\varphi}(t) - A\vec{\varphi}(t)\right) + b\left(\frac{d}{dt}\vec{\psi}(t) - A\vec{\psi}(t)\right) = \\ &= aL(\vec{\varphi}(t)) + bL(\vec{\psi}(t)) = 0 \end{aligned}$$

■

Определение 4.1. *Пусть имеется система вектор-функций $\vec{\varphi}_1(t), \ldots, \vec{\varphi}_n(t)$*

$$\vec{\varphi}_i(t) = \begin{pmatrix} \varphi^1_i(t) \\ \ldots \\ \varphi^n_i(t) \end{pmatrix} \tag{54}$$

непрерывна на $I(x)$, тогда такая система называется линейно-зависимой на I, если

$$\exists\ C_1, \ldots, C_n : \sum_{i=1}^{n} |C_i| \neq 0 \ \& \ \sum_{i=1}^{n} C_i\vec{\varphi}_i(t) = 0 \ \forall t \in I$$

В противном случае, система вектор-функций называется линейно-независимой, то есть условие

$$\sum_{i=1}^{n} C_i\vec{\varphi}_i(t) = 0 \ \forall t \in I$$

выполняется только при $C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0$.

Определение 4.2. *Пусть система вектор-функций $\vec{\varphi}_1(t), \ldots, \vec{\varphi}_n(t)$ линейно-независима на I и каждая вектор-функция $\vec{\varphi}_i(t)$ является решением системы ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$. Тогда такая система вектор-функций называется фундаментальной системой решений (ФСР) данной системы ДУ.*

Теорема 4.2. *Рассмотрим систему ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$. Если матрица A является непрерывной на отрезке $[a, b]$, то система имеет ФСР на этом отрезке.*

Доказательство. матрица A является непрерывной на отрезке $[a, b]$, тогда, согласно основной теореме, на отрезке $[a, b]$ существует единственное решение задачи Коши.

Пусть система функций $\vec{\varphi_1}(t), \vec{\varphi_2}(t), \ldots, \vec{\varphi_n}(t)$ является решением системы при следующих заданных условиях:

$$\vec{\varphi_1}(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{\varphi_2}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \vec{\varphi_n}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{55}$$

тогда вронскиан такой системы в точке t_0:

$$W(t_0) = |\vec{\varphi_1}(t_0), \vec{\varphi_2}(t_0), \ldots, \vec{\varphi_n}(t_0)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \tag{56}$$

тогда, из свойства вронскиана следует, что данная система функций является линейно-независимой, а так как каждая функция является решением системы ДУ, эта система вектор-функций и есть ФСР системы ДУ. ■

Теорема 4.3. *Пусть система вектор-функций $\vec{\varphi}_1(t), \ldots, \vec{\varphi}_n(t)$ является ФСР системы ДУ, тогда любое решение этой системы ДУ можно представить, как линейную комбинацию компонентов ФСР: $\vec{x}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + \cdots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$, где $C_1, dots, C_n$ – произвольные постоянные.*

Доказательство. Так как для системы ДУ справедлив принцип суперпозиции, то вектор-функция $\vec{x(t)} = C_1\vec{\varphi}_1(t) + \cdots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$.

Предположим теперь, что существует функция $\vec{\chi}(t)$ такая, что она является решением системы ДУ, но не представима в виде $C_1\vec{\varphi}_1(t) + \cdots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$. Пусть значение этой функции в точке t_0:

$$\vec{\chi}(t_0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_1(t_0) \\ \chi_2(t_0) \\ \ldots \\ \chi_n(t_0) \end{pmatrix} \tag{57}$$

Теперь составим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} C_1\varphi_1^1(t_0) + C_2\varphi_2^1(t_0) + \cdots + C_n\varphi_n^1(t_0) = \alpha_1 \\ C_1\varphi_1^2(t_0) + C_2\varphi_2^2(t_0) + \cdots + C_n\varphi_n^2(t_0) = \alpha_2 \\ \ldots \\ C_1\varphi_1^n(t_0) + C_2\varphi_2^n(t_0) + \cdots + C_n\varphi_n^n(t_0) = \alpha_3 \end{cases} \tag{58}$$

где $C_1, \ C_2, \ \ldots, \ C_n$ – являются неизвестными, который надо найти. Определителем этой системы является

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} \varphi_1^1(t_0) & \varphi_2^1(t_0) & \ldots & \varphi_n^1(t_0) \\ \varphi_1^2(t_0) & \varphi_2^2(t_0) & \ldots & \varphi_n^2(t_0) \\ & & \ldots & \\ \varphi_1^n(t_0) & \varphi_2^n(t_0) & \ldots & \varphi_n^n(t_0) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{59}$$

данный определитель не равен 0, поскольку функции $\vec{\varphi_i}$ $i = \vec{1n}$ являются ФСР системы ДУ, поэтому числа $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ определяются однозначно.

С этими числами рассмотрим решение исходной системы ДУ, назовем его $\vec{z}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + \cdots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$. Поскольку $\vec{\chi}(t)$ и $\vec{z}(t)$ – являются решениями системы ДУ, по принципу суперпозиции функция $\vec{\psi}(t) = \vec{z}(t) - \vec{\chi}(t)$ так же является решением этой системы ДУ.

Заметим, что значение этой функции в точке t_0: $\vec{\psi}(t_0) = \vec{z}(t_0) - \vec{\chi}(t_0) = 0$, заметим так же, что $\vec{0}$ является решением однородной системы системы $\frac{d}{dt}\vec{x} - A\vec{x}$. Тогда, в силу теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши, выполняется:

$$\vec{\psi}(t) = 0 \ \forall\ t \in I\ \Rightarrow$$
$$\vec{\psi}(t) = \vec{z}(t) - \vec{\chi}(t) \equiv 0 \ \forall\ t \in I\ \Rightarrow$$
$$\vec{z}(t) = \vec{\chi}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + C_2\vec{\varphi}_2(t) + \cdots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$$

Мы получили противоречие с предположением о невозможности линейного представления решения $\vec{\chi}(t)$ через функции ФСР, таким образом, мы доказали, что любое решение системы ДУ можно представить, как линейную комбинацию компонентов ФСР. ■

Определение 4.3. *Решение системы ДУ вида* $\vec{x}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t)+\cdots+C_n\vec{\varphi}_n(t)$*, где* $C_1, dots, C_n$ *называется общим решением сисстемы ДУ.*

4.3 Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем

Введем оператор L такой, что $L = \frac{d}{dt} - A$. Тогда однородная система ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ запишется в виде $L(\vec{x}) = 0$, неоднородная система ДУ $\frac{d\vec{x}}{dt} - A\vec{x} = q(t)$ запишется в виде $L(\vec{x}) = q(t)$.

Утверждение 4.2. *Общее решение неоднородной системф ДУ* $\frac{d\vec{x}}{dt} - A\vec{x} = q(t)$ *представляет собой следующее выражение:*

$$\vec{x} = \vec{x}^s + \vec{x}_0^{об} \tag{60}$$

где $\vec{x}^s$ *– частное решение линейного неоднородного уравнение, т. е.* $L(\vec{x}^s) = q(t)$*, а* $\vec{x}_0^{об}$ *– общее решение системы линейный* ***однородных*** *уравнений* $L(\vec{x}_0^{об}) = 0$*. Таким образом, получаем:*

$$L(\vec{x}) = L(\vec{x}^s + \vec{x}_0^{об}) = L(\vec{x}^s) + L(\vec{x}_0^{об}) = q(t) + 0$$

4.4 Определитель Вронского и его свойства

4.4.1 Определитель Вронского

Определение 4.4. *Пусть на* I *определена система вектор-функций* $\vec{\varphi}_1(t), \ldots, \vec{\varphi}_n(t)$*, тогда определитель*

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1^1(t) \ldots \varphi_n^1(t) \\ \ldots \qquad \ldots \\ \varphi_1^n(t) \ldots \varphi_n^n(t) \end{vmatrix} \tag{61}$$

называется определителем Вронского, где

$$\vec{\varphi_i} = \begin{pmatrix} \varphi_i^1 \\ \ldots \\ \varphi_i^n \end{pmatrix} \tag{62}$$

другими словами

$$W(t) = \left|\vec{\varphi}_1, \ldots, \vec{\varphi}_n\right| \tag{63}$$

Теорема 4.4. *Если $\exists\ t_0 \in I:\ W(t_0) \neq 0$, то система является линейно независимой на I. Обратное неверно, пример:*

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix},\ \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ \text{ЛНЗ, но}\ \ W(t) = 0 \tag{64}$$

Доказательство. Будем доказывать от противного: пусть система является линейно-зависимой, тогда $\exists\ C_1, \dots, C_n : C_1\vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t) = 0\ \forall t \in I$. Тогда в определителе Вронского $W(t)$ есть хотя бы два линейно-зависимых столбца, так как $\vec{\varphi}_i(t)$ являются столбцами определителя, но тогда получам, что $W(t) = 0\ \forall t \in I$ (хотя предпологалось, что $\exists\ t_0 \in I:\ W(t_0) \neq 0$). Таким образом, мы получили противоречие, откуда следует, что система является линейно независимой на I. ∎

4.4.2 Свойства Вронскиана

1. Если $\exists\ t_0 \in I:\ W(t_0) \neq 0$, то система является линейно независимой на I (см. доказательство теоремы).

2. Пусть вектор-функции $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$ являются решениями системы ДУ, и существует точка $t_0 \in I:\ W(t_0) = 0$, тогда система $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$ является линейно-зависимой.

   Доказательство. Поскольку $W(t_0) = 0$ столбцы этой матрицы являются линейно-зависимыми, то есть

   $$\exists\ C_1, C_2, \dots, C_n:\ \sum_{i=1}^{n} C_i^2 \neq 0\ \&\ \sum_{i=1}^{n} C_i\vec{\varphi}_i(t_0) = 0$$

   Используя данные коэффициенты, построим функцию $\vec{x}(t) = C_i\vec{\varphi}_i(t)$. Заметим, что во-первых $\vec{x}(t_0) = 0$, а во-вторых данная функция является решением системы ДУ в силу теоремы о суперпозиции. Тогда, в силу теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши выполняется: $\vec{x}(t) = C_i\vec{\varphi}_i(t) = 0\ \forall\ t \in I$, что означает, что система $\vec{\varphi}_i$ является линейнозависимой. ∎

4.5 Формула Лиувилля-Остроградского для нормальной линейной однородной системы уравнений и для линейного однородного уравнения n-го порядка.

Следующее свойство вронскиана рассмотрим в виде теоремы. Для начала докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 4.1. *[Формула Эйлера дифференцирования определителя]*

Детерминант матрицы представим в виде: $\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^i & \dots & a_n^i \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} \cdot {a_k}^i {M_i}^k$ *Тогда для*

$$\dot{\Delta}(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot \dot{a}_j^i M_i^j$$

Теорема 4.5. *[Формула Лиувилля-Остроградского]*
Пусть $W(x)-$ вронскиан решений $\vec{\varphi_1}(t), ..., \vec{\varphi_n}(t)$ однородной системы $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$. Тогда имеет место формула:

$$\dot{W(t)} = W(t) \cdot trA$$

где $trA = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kk}(t)$

Доказательство. Зафиксируем среди системы решений функцию $\vec{\varphi_j} = \begin{pmatrix} \varphi_j^1 \\ \varphi_j^2 \\ ... \\ \varphi_j^n \end{pmatrix}$. Рассмотрим i - ую компоненту φ_j^i решения $\vec{\varphi_j}$. Поскольку $\vec{\varphi_j}$ решение, то $\frac{d\vec{\varphi_j}}{dt} = A\vec{\varphi_j} \Rightarrow$

$$\frac{d\varphi_j^i}{dt} = \dot{\varphi_j^i} = \sum_{k=1}^{n} a_k^i \varphi_j^k$$

Рассмотрим вранскиан $W(t)$, продифференцируем его по t

$$\dot{W}(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j} \cdot \dot{\varphi_j^i} M_j^i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+j} \cdot a_k^i \varphi_j^k M_j^i$$

Переставим суммы местами

$$\dot{W}(t) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_k^i \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\varphi_j^k M_j^i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_k^i \delta_i^k W(t) = W(t)\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_k^i \delta_i^k = W(t)\sum_{k=1}^{n} a_k^k$$

$$\dot{W}(t) = W(t) \cdot trA$$

■

Также можно решить это уравнение и переписать в виде

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} trA(u)du\right)$$

4.6 Метод вариации постоянных для линейной неоднородной системы уравнений и для линейного неоднородного уравнения n-го порядка.

$$\text{Рассмотрим } y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x). \quad (65)$$

$\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ – Ф.С.Р. однородного уравнения $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = 0$. Это означает, что

$$\forall k = \overline{1,n} \hookrightarrow \varphi_k^{(n)} + a_1(x)\varphi_k^{(n-1)} + ... + a_n(x)\varphi_k \equiv 0 \quad (66)$$

Перепишем уравнение (65) в эквивалентном виде. Для этого сделаем следующие замены: $y = v_1$, $y^{(1)} = v_2$, ..., $y^{(n-1)} = v_n$. Тогда получим:

$$
\begin{cases}
\frac{dv_1}{dx} = v_2, \\
\frac{dv_2}{dx} = v_3, \\
..., \\
\frac{dv_n}{dx} = f(x) - a_1(x)v_n - ... - a_n(x)v_1.
\end{cases} \tag{67}
$$

Будем искать решение (65) в виде

$$
y(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + ... + C_n(x)\varphi_n(x)
$$

Тогда получается, что решение эквивалентной системы будем искать в виде

$$
\vec{v}(x) = \begin{Vmatrix} v_1(x) \\ ... \\ v_n(x) \end{Vmatrix} = C_1(x) \begin{Vmatrix} \varphi_1(x) \\ ... \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) \end{Vmatrix} + ... + C_n(x) \begin{Vmatrix} \varphi_n(x) \\ ... \\ \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{Vmatrix} \tag{68}
$$

Рассмотрим функцию $v_k(x) = C_1(x)\varphi_1^{(k-1)} + ... + C_n(x)\varphi_n^{(k-1)}$. Продифференцируем эту функцию по x:

$$
\forall k = \overline{1, n-1} \hookrightarrow \dot{v_k}(x) = \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(k-1)} + ... + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(k-1)} + C_1(x)\varphi_1^{(k)} + ... + C_n(x)\varphi_n^{(k)} \tag{69}
$$

С другой стороны $\dot{v_k}(x) = v_{k+1} = C_1(x)\varphi_1^{(k)} + ... + C_n(x)\varphi_n^{(k)}$. Тогда получаем

$$
\dot{v_k}(x) = C_1(x)\varphi_1^{(k)} + ... + C_n(x)\varphi_n^{(k)} = \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(k-1)} + ... + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(k-1)} + C_1(x)\varphi_1^{(k)} + ... + C_n(x)\varphi_n^{(k)} \tag{70}
$$

$$
\forall k = \overline{1, n-1} \hookrightarrow \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(k-1)} + ... + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(k-1)} = 0 \tag{71}
$$

$$
\begin{aligned}
k = n:\ \dot{v_n}(x) = \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + ... + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-1)} + C_1(x)\varphi_1^{(n)} + ... + C_n(x)\varphi_n^{(n)} = \\
= f(x) - a_1(x)\left(C_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + ... + C_n(x)\varphi_n^{(n-1)}\right) - ... - a_n(x)\left(C_1(x)\varphi_1 + ... + C_n(x)\varphi_n\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + ... + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-1)} + C_1(x)\left(\varphi_1^{(n)} + a_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + ... + a_n(x)\varphi_1\right) + ... + \\
+ C_n(x)\left(\varphi_n^{(n)} + a_1(x)\varphi_n^{(n-1)} + ... + a_n(x)\varphi_n\right) = f(x)
\end{aligned}
$$

Из уравнения (66) следует что выражения в скобках равны нулю, тогда получим

$$
k = n:\ \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + ... + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-1)} = f(x)
$$

Т.е. мы получили следующую систему уравнений:

$$
\begin{cases}
\dot{C}_1(x)\varphi_1 + ... + \dot{C}_n(x)\varphi_n = 0, \\
... \\
\dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-2)} + ... + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-2)} = 0, \\
\dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + ... + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-1)} = f(x).
\end{cases} \tag{72}
$$

Система (72) это линейная система для определения $\dot{C}_1,\ ...,\ \dot{C}_n$. Определитель этой системы $\Delta = W(x) \neq 0$, а значит система разрешима единственным образом.

4.7 Теорема Штурма

Рассмотрим на промежутке $I = I(x)$ следующее уравнение:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \tag{73}$$

где $a(x) \in C^1_{I(x)}$, $b(x) \in C^1_{I(x)}$.

Решение (73) такое, что $y(x)$ тождественно не равно нулю на $I(x)$ называется нетривиальным , а точка $x_0 \in I$ такая, что $y(x_0) = 0$ называется нулём нетривиального решения $y(x)$.

Уравнение (73) приводится к виду:

$$z'' + q(x)z = 0. \tag{74}$$

Для этого сделаем замену $y(x) = c(x) \cdot z(x)$, где $z(x)$ - решение уравнения выше (далее будем считать, что $c = c(x)$ и $z = z(x)$:

$$z'' \cdot c + 2c' \cdot z' + c'' \cdot z + a(x)(c' \cdot z + z' \cdot c) + b(x) \cdot c \cdot z = 0,$$

здесь выберем $c \neq 0$ так, что бы для z' выполнялось:

$$z'(2c' + a(x)c) = 0.$$

Тогда получаем линейное однородное уравнение $\Rightarrow$ $2c' + a(x)c = 0$, которое можно преобразовать в:

$$\frac{dc}{c} = -\frac{a(x)}{x}dx \;\Rightarrow\; c(x) = c_0 \cdot exp\left[-\frac{1}{2}\int a(x)dx\right] > 0. \tag{75}$$

Возьмем $c_0 = 1 \;\Rightarrow\; c \cdot z'' + (c'' + c'a + bc)z = 0$, тогда можемм ввести $q(x)$ такое, что:

$$q(x) = \frac{c'' + c'a}{c} + b.$$

Также заметим, что из (75) следует, что $c(x) > 0$. Тогда в силу замены $y = c(x) \cdot z$, $x_0 \in I$ является нулём $y(x)$ тогда и только тогда, когда x_0 является нулём $z(x)$.

Определение 4.5. *Точка x_0 является нулём $f(x) \in C^\infty$ кратности k, если $f(x_0) = f'(x_0) = ... = f^{(k-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(k)}(x_0) \neq 0$.*

Лемма 4.2. *Все нули нетривиального решения (74) (также как и для (73)) являются простыми, т.е. $k = 1$.*

Доказательство. От противного: пусть x_0 является нулём кратности 2, тогда $z(x_0) = z'(x_0) = 0$. Тогда в силу основной теоремы $z(x) = 0 \forall x \in I$ - противоречие, т.к. $z(x)$ - нетривиальное решение по условию. ■

Лемма 4.3. *Пусть M - множество нулей нетривиального решения $y(x)$ на нечетном промежутке $[x_1; x_2]$. Множество M не имеет предельной точки.*

Доказательство. От противного: пусть M - множество нулей. Пусть x_0 - предельная точка и $\exists x_k$:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \in [x_1; x_2],\; y(x_k) = 0,\; k = 1,2,...$$

Так как $y(x)$ - непрерывно, то $\lim\limits_{k\to\infty} y(x_k) = 0 = y(\lim\limits_{k\to\infty} x_k) = y(x_0) \;\Rightarrow\; y(x_0) = 0.$

Рассмотрим $[x_k; x_{k+1}]$ и $y(x)$ на нём, т.к. $y(x_k) = y(x_{k+1}) = 0$, то по теореме Ролля $\exists c_k : x_k \le c_k \le x_{k+1} : y'(c_k) = 0$ и т.к. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \lim\limits_{k\to\infty} x_{k+1} = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} c_k = x_0$. Из этого может получить, что так как $y'(x)$ - непрерывна, то:

$$\lim_{k\to\infty} y'(c_k) = 0 = y'(\lim_{k\to\infty} c_k) = y'(x_0) = 0$$

Так как по предложению $x_0 \in [x_1; x_2]$ и $y_0(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$ - получим задачу Коши для $x_0 \in [x_1; x_2] \Rightarrow$ в силу теорем существования и единственности решения задачи Коши: $y \equiv 0$ - единственное решение на $[x_1; x_2]$ - получим противоречие с нетривиальным решением. ■

Теорема 4.6 (Теорема Штурма)**.** *Рассмотрим уравнения:*

$$y'' + q(x)y = 0 \tag{76}$$

$$z'' + Q(x)z = 0, \tag{77}$$

где уравнение (76) будем называть быстрым, а (77) - медленным.

Пусть

$$q(x) \in C^1_{I(x)}, Q(x) \in C^1_{I(x)}, \forall x \in I \to q(x) \le Q(x).$$

Пусть $y(x)$ - нетривиальное решение (76), z(x) - нетривиальное решение (77). Если $x_1, x_2 \in I$ - последовательное нули $y(x)$б то либо $\exists x_0 \in (x_1; x_2)$, в которой $z(x_0) = 0$, либо $z(x_1) = z(x_2) = 0$.

Доказательство. Пусть x_1, x_2 - два соседних нуля $y(x)$, т.е. $y(x) \neq 0$ на $(x_1; x_2)$, пусть для определённости $y(x) > 0$.

По определению:

$$y'(x_1) = \lim_{x\to x_1} \frac{y(x) - y(x_1)}{x - x_1} \ge 0;\; y'(x_2) = \lim_{x\to x_2} \frac{y(x) - y(x_2)}{x - x_2}.$$

В силу Леммы 4.2 нули x_1 и x_2 должны быть однократными, т.е. $y'(x_1) \neq 0$, $y'(x_2) \neq 0$. Таким образом $y'(x_1) > 0$, $y'(x_2) < 0$.

Умножим (77) на $z(x)$, а (76) на y(x) и вычтем из первого второе:

$$zy'' + qyz - yz''' - Qyz = 0;\; zy'' - yz'' = (zy' - yz')' = (Q - q)zy.$$

Проинтегрируем полученное тождество на $[x_1; x_2]$:

$$(zy' - yz')\Big|_{x_1}^{x_2} = \int\limits_{x_1}^{x_2} (Q(x) - q(x))zydx;$$

$$z(x_2)y'(x_2) - y(x_2)z'(x_2) - z(x_!)y'(x_1) + y(x_1)z'(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} (Q(x) - q(x))zydx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(x_2)y'(x_2) - z(x_1)y'(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} (Q(x) - q(x))zydx, \tag{78}$$

здесь $z(x_2)y'(x_2) < 0$, $z(x_1)y'(x_1) > 0$, $(Q(x) - q(x)) > 0$ и $y > 0$.

Предположим противное - пусть теорема Штурма не верна. Тогда возможны варианты:

1. $z > 0 \forall x \in [x_1; x_2]$. Тогда левая часть (78) отрицательна, а правая положительна - противоречие.

2. $z > 0 \forall x \in [x_1; x_2)$, $z(x_2) = 0$ - аналогично.

3. $z > 0 \forall x \in (x_1; x_2]$ $z(x_1) = 0$ - аналогично.

Таким образом $\exists x_0 \in (x_1; x_2) :\ z(x_0) = 0$. Если $z(x_1) = z(x_2)$, то может быть, что $Q(x) \equiv q(x) \Rightarrow z(x) = const \cdot y(x)$, либо:

$$\exists x* \in (x_1; x_2) :\ Q(x*) > q(x*),$$

в силу непрерывности $Q(x)$ и $q(x) \exists \triangle$:

$$\int\limits_{x*-\triangle}^{x*+\triangle} (Q(x) - q(x))z(x)y(x)dx = 0,$$

значит $\exists x_0$, где $z(x)$ меняет знак $\Rightarrow z(x_0) = 0$ ■

4.8 Следствия из теоремы Штурма

Следствие 4.6.1. *Пусть есть уравнение:*

$$y'' + q(x)y = 0;\ q(x) \leq 0 \forall x \in I(x),$$

тогда любое нетривиальное решение (77) на I имеет не более одного нуля.

Доказательство. В качестве второго уравнения можно взять $z'' + Q(x)z = 0$, здесь Q(x) = 0. Пусть решение уравнения (77) имеет нули x_1 и x_2 $Q(x) \geq q(x) \Rightarrow 0 \geq q(x)$. Тогда по теореме Штурма любое решение (76) должно иметь ноль на $(x_1; x_2)$. В качестве решения можем вщять $z \equiv 1$, которое не и имеет нулей $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ для решения (77) не может быть больше одного нуля. ■

Следствие 4.6.2. *Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - два линейно независимых нетривиальных решения (77), $x_1, x_2 \in I$ - два соседних нуля $\varphi(x)$, тогда $\psi(x)$ имеет только один нуль на $(x_1; x_2)$.*

Доказательство. Применим теорему Штурма к двум одинаковым уравнениям ($Q(x) \leq Q(x)$). По теореме Штурма $\psi(x)$ на $(x_1; x_2)$ имеет хотя бы один нуль. Общих нулей $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ иметь не могут, так как они линейно независимые ($W(x_1) = 0$, если бы $\varphi(x_1) = \psi(x_1) = 0$, что означало бы, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - ЛЗ). Итак, $\psi(x)$ имеет нуль x_0 на $(x_1; x_2)$.

Докажем, что такой нуль единственный - от противного: пусть нулей два для $\psi(x) : x*$ и $\overline{x}$. Если нулей $\psi(x)$ два, то по теореме Штурма для $\varphi(x)$ будет ноль между $x*$ и $\overline{x}$ - противоречие тому, что x_1 и x_2 соседние нули $\varphi(x)$. ■

Таким образом нули решений (73) перемешаются.