

1 Элементы группового анализа ДУ

Уравнение первого порядка в общем виде:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad (1)$$

Если выполняется $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow F(x,y) = const$ – решение уравнения в полных дифференциалах.

Если же $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, то ищется интегрирующий множитель $\mu(x,y)$:
 $\mu P dx + \mu Q dy = 0$ – уже уравнение в полных дифференциалах.

$$P \frac{\partial \mu}{\partial y} - Q \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \frac{\partial Q}{\partial x} - \mu \frac{\partial P}{\partial y} \quad (2)$$

$$P(y)dx + \varphi(x)dy = 0, \quad (3)$$

уравнение с разделяющимися переменными.

Если ДУ может быть приведено к виду (3), то оно интегрируемо. Рассмотрим, к каким переменным нужно перейти, чтобы уравнение $y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y)$ свелось бы к уравнению с разделяющимися переменными.

1.1 Однопараметрические группы

Пусть имеется множество взаимно однозначных преобразований $\mathbb{R}^n : \tau(\mathbb{R}^n)$. Это множество образуем группу (относительно композиции). Каждому $a \in \mathbb{R}$ соответствием φ сопоставим преобразование $g_a = \varphi(a) \in \tau(\mathbb{R}^n)$.

Следует ответить, что ассоциативность следует из ассоциативности матричного умножения.

Причем $\varphi(a+b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ и $\varphi(0) = E$, т.е. φ осуществляет изоморфизм коммутативной группы \mathbb{R} на группу $\tau(\mathbb{R}^n)$. Образ $\varphi(R) \in \tau(\mathbb{R}^n)$ называется однопараметрической группой преобразований.

Было доказано, что однопараметрической группой будет фазовый поток автономной системы ДУ. Эта группа $g_a = g_a(M(\vec{x})) = M(\vec{x})$ задается в виде:

$$\vec{x}^i = \varphi^i(x^1, \dots, x^n) = \varphi^i(\vec{x}, a), i = 1, n \text{ или}$$

$$\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{x}, a) \quad (4)$$

Т.к. группа коммутативна, то $\vec{\varphi}(\vec{x}, a+b) = \vec{\varphi}(\vec{\varphi}(\vec{x}, a), b) = \vec{\varphi}(\vec{\varphi}(\vec{x}, b), a)$, а $\vec{\varphi}(\vec{x}, 0) = \vec{x}$.

Будем предполагать, что вектор-функция $\vec{\varphi}(\vec{x}, a)$ непрерывно дифференцируема по всем своим аргументам.

Рассмотрим однопараметрическую группу преобразований плоскости $(x,y)(\mathbb{R}^2)$ –

$$\begin{aligned} g_a = g_a(M(x,y)) \Rightarrow \vec{x} = \varphi(x,y,a), \vec{y} = \psi(x,y,a), \\ \varphi(x,y,0) = x, \psi(x,y,0) = y \end{aligned} \quad (5)$$

Определение 1.1. *траекторией (или орбита группы) – параметрическое представление кривой γ , проходящей через (x,y) , при фиксированных x,y (5).*

Кривая γ при сделанных предположениях является **гладкой кривой**, поэтому с ней можно связать векторное поле, т.е. в каждой точке $M(x,y)$ поставим в соответствие вектор $\vec{h}(\xi(x,y), \zeta(x,y))$, касательный к γ , проходящей через эту точку.

Компоненты вектора \vec{h} , касательного к кривой γ в точке (x, y) равны

$$\xi(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial a} \Big|_{a \rightarrow 0}, \quad \zeta(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial a} \Big|_{a \rightarrow 0},$$

а само векторное поле определено как отображение:

$$(x, y) \rightarrow \partial g_a(M(x, y)) = \vec{h}(\xi(x, y), \zeta(x, y)) = \frac{dg_a}{da} \Big|_{a \rightarrow 0} \quad (6)$$

Это векторное поле называется **касательным векторным полем** группы. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \frac{dg_{a+b}(M)}{db} \Big|_{b \rightarrow 0} &= \frac{d(g_a \cdot g_b)}{db} \Big|_{b \rightarrow 0} = \frac{d(g_b \cdot g_a)}{db} \Big|_{b \rightarrow 0} = \\ &= \left(\frac{dg_a}{db} \Big|_{b \rightarrow 0} \right) g_a = \partial g_a(g_a(M(x, y))) = \partial g_a(x, y, a) = \vec{h}(\xi(x, y), \zeta(x, y)). \end{aligned} \quad (7)$$

Т.к. $\vec{h}(\xi(x, y), \zeta(x, y))$ является касательным к γ при фиксированном a , то кривая γ является **фазовой траекторией** автономной системы.

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{da} = \xi(\vec{x}, \vec{y}) = \varphi'_a(\vec{x}, \vec{y}), \\ \frac{d\vec{y}}{da} = \zeta(\vec{x}, \vec{y}) = \psi'_a(\vec{x}, \vec{y}), \end{cases} \quad (8)$$

Система (8) (она может записываться в виде $\partial_a g(x, y, a) = \vec{h}(g_a(x, y, a))$) называется **уравнением Ли**.

Ранее было получено, что любая автономная система определяет однопараметрическую группу преобразований (фазовый поток).

$$\text{Оператор } X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \zeta \frac{\partial}{\partial y} - \text{генератор группы.} \quad (9)$$

Т.к. $X(u) = \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \zeta \frac{\partial u}{\partial y}$, то становится ясно, что генератор группы является оператором дифференцирования в силу системы Ли (группы Ли) или оператором дифференцирования по направлению векторного поля группы.

Определение 1.2. Функция $F(x, y)$ называется **инвариантом группы** (5), если $F(\vec{x}, \vec{y}) = F(x, y) \forall a$, т.е. F постоянна на любой траектории (5).

Т.о., если функция $F(x, y)$ является инвариантом группы, то $X(F(x, y)) = \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \zeta \frac{\partial F}{\partial y} = \xi \cdot 0 + \zeta \cdot 0 = 0$, и т.о. инвариант группы (5) является просто первым интегралом (8).

Рассмотрим группы $\vec{x} = x + a$, $\vec{y} = y$ — группа смещений \Rightarrow генератор группы $X = 1 \frac{\partial}{\partial x} + 0 \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}$, а инвариантом этой группы является любой $F(x, y) = f(y)$.

Теорема 1.1. Любая однопараметрическая группа с генератором 9 может быть с помощью подходящей замены

$$t = t(x, y), \quad u = u(x, y) \quad (10)$$

приведена к группе смещений

$$\vec{t} = t + a, \vec{u} = u. \quad (11)$$

Замечание: в новых переменных генератор имеет вид $X = \frac{\partial}{\partial t}$, и инвариант группы остается инвариантом и в новых переменных (см. инвариантность ПИ относительно гладкой замены).

Доказательство. Имеется

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} + \zeta \frac{\partial}{\partial y} = \xi \left(\frac{\partial}{\partial t} t'_x + \frac{\partial}{\partial u} u'_x \right) + \zeta \left(\frac{\partial}{\partial t} t'_y + \frac{\partial}{\partial u} u'_y \right) = X(t) \frac{\partial}{\partial t} + X(u) \frac{\partial}{\partial u}.$$

Отсюда получаем, что функции (10), которые приводят группу к группе смещений, должны удовлетворять условиям:

$$X(t) = 1 \Rightarrow \xi \frac{\partial t}{\partial x} + \zeta \frac{\partial t}{\partial y} = 1; \quad X(u) = 0 \Rightarrow \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \zeta \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (12)$$

Так, определенные переменные t и u называются **каноническими переменными**.

Заметим, что переменные и являются инвариантом исходной группы, поскольку $X(u) = 0$

■

Теорема 1.2. Орбиты группы либо совпадают, либо не пересекаются.

Доказательство. Пусть произошло пересечение: $g_a(M, a) = g_b(M_1, b)$, причем M_1 не принадлежит орбите точки M . Пусть $b < a$, подействуем g_{-b} на последнее равенство:

$$g_{-b}(g_a(M, 1)) = g_{-b}(g_b(M_1, b)) \Rightarrow g_{-b+a}(M, a) = E(M_1) \Rightarrow$$

т. M_1 принадлежит орбите т. M – противоречие.

■

Рассмотрим ДУ:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (13)$$

Будем говорить, что группа g_a является **группой симметрии** ДУ (13) (или (13) допускает группу g_a), если форма ДУ (13) остается неизменной после замены переменных при замене

$$\begin{cases} \bar{x} = \varphi(x, y, a), \\ \bar{y} = \psi(x, y, a) \end{cases} \quad (14)$$

т.е. $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{y})$, где f то же самое, что и в (13).

Если ДУ (13) допускает группу, то тогда $f(\bar{x}, \bar{y}) = f(x, y) \forall a$, и правая часть (13) является инвариантом группы. Тогда, перейдя к каноническим переменным, получим, что в таких переменных t и u уравнение примет вид:

$$\frac{du}{dt} = g(u), \quad (15)$$

т.е. получили уравнение с разделяющимися переменными.