Формула Лиувилля-Остроградского для нормальной линейной однородной системы уравнений

Следующее свойство вронскиана рассмотрим в виде теоремы. Для начала докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 0.1. *[Формула Эйлера дифференцирования определителя]*

Детерминант матрицы представим в виде: $\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & ... & a_n^1 \\ a_1^i & ... & a_n^i \\ ... & ... & ... \\ a_1^n & ... & a_n^n \end{vmatrix} = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} \cdot {a_k}^i {M_i}^k$ *Тогда для*

$$\dot{\Delta}(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot \dot{a_j^i} M_i^j$$

Теорема 0.1. *[Формула Лиувилля-Остроградского]*
Пусть $W(x)-$ *вронскиан решений* $\vec{\varphi_1}(t), ..., \vec{\varphi_n}(t)$ *однородной системы* $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$. *Тогда имеет место формула:*

$$\dot{W(t)} = W(t) \cdot trA$$

где $trA = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kk}(t)$

Доказательство. Зафиксируем среди системы решений функцию $\vec{\varphi_j} = \begin{pmatrix} \varphi_j^1 \\ \varphi_j^2 \\ ... \\ \varphi_j^n \end{pmatrix}$. Рассмотрим i - ую компоненту φ_j^i решения $\vec{\varphi_j}$. Поскольку $\vec{\varphi_j}$ решение, то $\frac{d\vec{\varphi_j}}{dt} = A\vec{\varphi_j} \Rightarrow$

$$\frac{d\varphi_j^i}{dt} = \dot{\varphi_j^i} = \sum_{k=1}^{n} a_k^i \varphi_j^k$$

Рассмотрим вранскиан $W(t)$, продифференцируем его по t

$$\dot{W}(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot \dot{\varphi_j^i} M_j^i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_k^i \varphi_j^k M_j^i$$

Переставим суммы местами

$$\dot{W}(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_k^i \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \varphi_j^k M_j^i = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_k^i \delta_i^k W(t) = W(t) \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_k^i \delta_i^k = W(t) \sum_{k=1}^{n} a_k^k$$

$$\dot{W}(t) = W(t) \cdot trA$$

■