
Принцип сжимающих отображений

Работаем в $E = \mathbb{R}^n$ - пространстве точек с n координатами. E - аффинное пространство, а \vec{E} - его присоединенное линейное пространство, состоящее из векторов, натянутых на точки E .

Определение 0.1. Пусть L - это векторное пространство, и на нем задано отображение $\|\cdot\| : L \rightarrow \mathbb{R}$ такое, что:

1. $\forall x \in L \mapsto \|x\| \geq 0$. А также $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
2. $\forall x \in L \ \& \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3. $\forall x, y \in L \mapsto \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ - неравенство треугольника.

Тогда данное отображение называется нормой, а пространство L нормированным.

Пример 0.1. Приведем пример норм. Пусть $a(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда норму можно определить, допустим, так:

$$\|a\|_1 = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}.$$

Или так:

$$\|a\|_2 = \max_{j=1, \dots, n} |x_j|.$$

И тогда можно ввести понятие эквивалентности норм.

Определение 0.2. Пусть снова L - линейное пространство. Тогда нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на L называются эквивалентными, если $\exists C_1, C_2 > 0 : \forall x \in L \mapsto C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1$.

Как видно, для определенных выше двух норм это соотношение удовлетворяется.

Утверждение 0.1. В конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.

Рассмотрим множество функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$ для некоторых неравных $a, b \in \mathbb{R}$ и обозначим данное множество $C[a; b]$. Понятно, что $C[a; b]$ является линейным пространством. Тогда введем на нем норму.

Определение 0.3. Нормой функции $f(x) \in C[a; b]$ будем называть число

$$\|f(x)\| = \max_{x \in [a; b]} |f(x)|.$$

Определение 0.4. Набор функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) \in C[a; b]$ будем называть вектор-функцией и обозначать $f(x) = \vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T$.

Определение 0.5. Вектор-функция $f(x)$ называется непрерывной (дифференцируемой, непрерывно дифференцируемой и т.п.), если все ее компоненты непрерывны (дифференцируемы, непрерывно дифференцируемы и т.п.).

Определение 0.6. Модулем вектор-функции $f(x)$ назовем число

$$|f(x)| = \sqrt{\sum_{j=1}^n f_j^2(x)}.$$

Норму вектор-функции можно определить как

$$\|f(x)\|_1 = \max_{x \in [a; b]} |f(x)|.$$

Или же как

$$\|f(x)\|_2 = \max_{j=1, \dots, n} \max_{x \in [a; b]} f_j(x).$$

Понятно, что эти две нормы эквивалентны.

Определение 0.7. Пусть имеется функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$, где $f_n(x) \in C[a; b]$ - линейное пространство функций с нормой (1 или 2 - неважно). Тогда говорят, что данная последовательность сходится к функции $f(x)$ по норме, если:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0.$$

Аналогично все то же самое и точно так же определяется и для вектор-функций $f(x) = \vec{f}(x) \in C[a; b]^n$.

Определение 0.8. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ называется фундаментальной, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \ \& \ \forall m \geq N \mapsto \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon.$$

Определение 0.9. Функциональное пространство L называется полным по [данной] норме, если любая фундаментальная функциональная последовательность данного пространства сходится по норме к функции из этого же пространства L .

Теорема 0.1. Функциональное пространство $C[a; b]$ с нормой $\|\cdot\|_1$ является полным.

Доказательство. Возьмем произвольную функциональную последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ из нашего пространства непрерывных функции. Тогда из определения фундаментальности следует, что $\|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$.

Однако $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon \ \forall x \in [a; b]$.

А значит, последовательность $f_n(x)$ сходится к некоторой $f(x)$, причем равномерно на $[a; b]$ (числовая последовательность $\|f_n(x)\|$ мажорирует функциональную последовательность $f_n(x)$).

Так как $f_n(x) \in C[a; b]$ - непрерывны $\forall n \in \mathbb{N}$, и последовательность сходится равномерно на $[a; b]$, то предельная функция $f(x)$ также является непрерывной на $[a; b]$, а значит, $f(x) \in C[a; b]$.

Таким образом, последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ сходится к $f(x) \in C[a; b]$. В силу произвольности $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ заключаем, что функциональное пространство $C[a; b]$ с нормой $\|\cdot\|_1$ является полным. ■

Определение 0.10. Полное нормированное линейное пространство называется Банаховым. Обозначается B .

Определение 0.11. Функциональный ряд $\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ называется сходящимся по норме,

если последовательность его частичных сумм $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ является сходящейся по норме.

Определение 0.12. Пусть $\forall x \in M \subseteq B$ определен элемент $Ax \in B$. Тогда говорят, что на множестве B задан оператор A с областью определения M .

Будем рассматривать уравнение $x = Ax$.

Определение 0.13. Множество $M \subseteq B$ называется ограниченным, если $\exists C > 0$ такое, что $\forall x \in M \mapsto \|x\| \leq C$.

Определение 0.14. Оператор A называется сжатием на M , если:

1. $\forall x \in M \mapsto Ax \in M$;
2. $\exists k \in (0; 1) : \forall x, y \in M \mapsto \|Ax - Ay\| \leq k\|x - y\|$.

Теорема 0.2 (Принцип сжимающих отображений). Пусть множество $M \subseteq B$ является ограниченным и замкнутым, а оператор A является сжатием. Тогда решение уравнения $x = Ax$ существует и единственно.

Доказательство. Будем использовать итерационный метод, согласно которому мы выбираем начальное x_0 , а затем строим последовательность $x_n = Ax_{n-1}$. Тогда, если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax$, то $x = Ax$.

Пусть $x_n = S_n = x_0 + (x_1 - x_0) + \dots + (x_n - x_{n-1})$. Докажем, что $\|x_{n+1} - x_n\| \leq 2Ck^n$ для некоторого $C > 0$, ограничивающего последовательность x_n . Сделаем это по индукции.

База индукции: $\|x_1 - x_0\| \leq \|x_1\| + \|x_0\| \leq 2C$.

Предположим, что $\|x_n - x_{n-1}\| \leq 2Ck^{n-1}$. Тогда получаем, что $\|x_{n+1} - x_n\| = \|Ax_n - Ax_{n-1}\| \leq k\|x_n - x_{n-1}\| \leq 2Ck^n$.

И получаем, что $x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (x_j - x_{j-1}) \leq x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} 2Ck^{j-1} < \infty$.

А значит $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. А поскольку M замкнуто, то $x \in M$.

Теперь рассмотрим разность $\|Ax_n - Ax\| \leq k\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Это означает, что $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax$.

Учитывая, что $x_{n+1} = Ax_n$, то, перейдя к пределу с обеих частей равенства, мы получаем, что итерационный метод сходится к решению уравнения $x = Ax$. И таким образом, доказано существование решения. Теперь докажем его единственность.

Пойдем от противного: пусть x и y – два разных решения. Тогда $\|x - y\| = \|Ax - Ay\| \leq k\|x - y\|$. Учитывая, что $k \in (0; 1)$, то данная ситуация возможна тогда и только тогда, когда $\|x - y\| = 0$. Следовательно, $x = y$, что противоречит тому, что это два разных решения. Итак, теорема доказана. ■