1 Билет 7. Элементы вариационного исчисления

1.1 Основные понятия

Определение 1.1. *Пусть M - множество функций $y(x)$, а $\mathcal{J}$ - отображение M в $\mathbb{R}$ такое, что $\mathcal{J} = \{\mathcal{J}(y(x)) \in \mathbb{R} : \forall y(x) \in M\}$. Такое отображение называется* ***функционалом****, а - область его определения.*

$\forall y(x) \in C^1_{[a;b]}$ рассмотрим функционал $\boxed{\mathcal{J}(y(x)) = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))dx}$

Будем считать, что $F(x, y(x), y'(x))$ как функцию трех независимых переменных $x_1 = x$, $x_2 = y(x)$, $x_3 = y'(x)$, непрерывна вместе с $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$, $i,j = \overline{1,3}$

Постановка вариационной задачи

Вариационная задача состоит в том, чтобы среди функций $y(x) \in D \subset C^1_{[a;b]}$ (в случае наличия дополнительного условия) найти такую функцию $y_0(x)$, что $\mathcal{J}(y_0(x))$ принимает минимальное (максимальное) значение. Будет рассматривать $y(x) \in C^1_{[a;b]}$.

Определение 1.2. *Множество функций D, которые удовлетворяет свойствам, которые мы наложим, называется* ***множеством варьируемых функций****.*

Определение 1.3. *$y_0(x)$ такое что $\mathcal{J}(\dagger_\prime(\S)) \leq \mathcal{J}(\dagger(\S))[\mathcal{J}(y_0(x)) \geq \mathcal{J}(y(x))] \forall y(x) \in D$ называется* ***абсолютным экстремумом*** *$\mathcal{J}$.*

Введём норму на $C^1_{[a;b]}$ для определения типа экстремумов: $\|y(x)\| = \max\limits_{x\in[a;b]} |y(x)| + \max\limits_{x\in[a;b]} |y'(x)|$ - все свойства нормы выполнены.

Определение 1.4. *Пусть $y(x) \in D$. Функцию $\delta y(x) \in C^1_{[a;b]}$ будем называть* ***допустимый вариацией*** *$y(x)$, если $\forall y$: $y + \delta y \in D$*

Определение 1.5. *Множество функций $V_\varepsilon(y_0(x)) = \{y(x) \in C^1_{[a;b]} : \|y(x) - y_0(x)\| \leq \varepsilon\}$ будем называть* ***ε-окрестностью*** $\mathbf{y_0(x)}$

Основной принцип

Пусть $y_0(x) \in D$ фиксирована, а $\delta y(x)$ какая-либо фиксированная допустимая вариация такая, что $\forall t \in [-1; 1] \mapsto y_0(x) + t\delta y(x) \in D \Rightarrow$

$$\mathcal{J}(y(x)) = \mathcal{J}(y_0(x) + t\delta y(x)) = \int\limits_a^b F(x, y_0(x) + t\delta y(x), y_0'(x) + t(\delta y(x))')dx = \mathcal{J}(t)$$

В силу определения F, у него существуют 1 и 2 непрерывные производные по t, т.е $\mathcal{J}(t)$ - дважды непрерывно дифференцируемая по t функция. Следовательно из формулы Тейлора:

$$\mathcal{J}(y_0 + t\delta y(x)) = \mathcal{J}(0) + \frac{d\mathcal{J}}{dt}(0) + \frac{1}{2}\frac{d^2\mathcal{J}}{dt^2}(0) \cdot t^2 + o(t^2) = [\text{ обозначим } (\delta y(x))' = \delta y' \,] \boxed{=}$$

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt}(t) = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0 + t\delta y, y_0' + t\delta y')\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y_0 + t\delta y, y_0' + t\delta y')\delta y'\right] dx$$

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt}(0) = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0, y_0')\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y_0, y_0')\delta y'\right] dx = \delta\mathcal{J}\text{- первая вариация} \tag{1}$$

$$\frac{d^2\mathcal{J}}{dt^2}(t) = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y_0 + t\delta y, y_0' + t\delta y')\delta y^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}(x, y_0 + t\delta y, y_0' + t\delta y')\delta y \delta y' + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 F}{\partial {y'}^2}(x, y_0 + t\delta y, y_0' + t\delta y'){\delta y'}^2\right] dx$$

$$\frac{d^2\mathcal{J}}{dt^2}(0) = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y_0, y_0')\delta y^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}(x, y_0, y_0')\delta y \delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial {y'}^2}(x, y_0, y_0'){\delta y'}^2\right] dx = \delta^2\mathcal{J} \tag{2}$$

$\delta^2\mathcal{J}$- вторая вариация

$$\boxed{=}\ \mathcal{J}(y_0) + \delta\mathcal{J} \cdot t + \delta^2\mathcal{J} \cdot t^2 + o(t^2)$$

Определение 1.6. *Функция $y_0(x) \in D$ называется слабым экстремумом функцианала $\mathcal{J}$, если $\exists \varepsilon > 0 : \mathcal{J}(y_0(x)) \le \mathcal{J}(y(x))\, [\mathcal{J}(y_0(x)) \ge \mathcal{J}(y(x))]\, \forall y(x) \in V_\varepsilon(y_0(x))$, т.е. $\forall y(x)$: $\|y(x) - y_0(x)\| \le \varepsilon$*

Теорема 1.1 (Основная теорема). *Пусть $y_0(x) \in D \subset C^1_{[a;b]}$ является слабым экстремумом функцианала $\mathcal{J}(y(x))$. Тогда первая вариация $\delta\mathcal{J}(y_0, \delta y) = 0$ $\boxed{\forall \text{ допустимой } \delta y}$*

Доказательство. Не нарушая общности рассуждений докажем для минимума.

При $\delta y = 0$ из (1) следует, что $\delta\mathcal{J}(y_0, \delta y) = 0$. Пусть какая-либо допустимая $\delta y \ne 0$. Т.к. $y_0(x)$ - слабый экстремум $\mathcal{J}$, то $\exists \varepsilon > 0 : \forall y(x) = y_0(x) + t\delta y(x) : \|y(x) - y_0(x)\| < \varepsilon \mapsto \mathcal{J}(y_0) \le \mathcal{J}(y)$. Зафиксируем $\delta y \ne 0$. Т.к. $\|y(x) - y_0(x)\| = \|y_0 + t\delta y(x) - y_0(x)\| < \varepsilon$, то $\|t \cdot \delta y\| < \varepsilon$. Таким образом $t \in \left(-\frac{\varepsilon}{\|\delta y(x)\|}; \frac{\varepsilon}{\|\delta y(x)\|}\right)$

Т.к $y_0(x)$ - локальный минимум, то $\mathcal{J}(y_0) \le \mathcal{J}(y)$ или $\mathcal{J}(0) \le \mathcal{J}(t)\ \forall t \in \left[-\frac{\varepsilon}{\|\delta y(x)\|}; \frac{\varepsilon}{\|\delta y(x)\|}\right]$

Таким образом $\mathcal{J}(t)$ является непрервывно дифференцируемой функцией t, достигающий минимум при $t = 0$. Следовательно по теореме Ферма $\frac{d\mathcal{J}}{dt}(0) = 0 = \delta\mathcal{J}$

Ввиду произвольности δy теорема доказана. ■

Лемма 1.1 (Основная лемма вариационного исчисления). *Пусть $f(x) \in C^1_{[a;b]}$ и $\int\limits_a^b f(x) \cdot h(x)dx = 0\, \forall h \in C^1_{[a;b]}$ и такой, что $h(a) = h(b) = 0$. Тогда $f(x) = 0\, \forall x \in [a; b]$*

Доказательство. От противного: пусть $\exists x_0 \in [a; b] : f(x_0) \ne 0$. Тогда в силу непрерывности функции $f(x)$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \mapsto f(x) \ne 0$. Для определенности рассмотрим $f(x) > 0\, \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$. Если так случилось, что $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \not\subset [a; b]$, то уменьшим δ, не нарушив при этом это условие: $f(x) > 0$ на отрезке ненулевой длины.

Обозначим $I_\delta = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ и рассмотрим

$$h_\delta(x) = \begin{cases} [(x - x_0 + \delta)(x - x_0 - \delta)]^2 & x \in I_\delta \\ 0 & x \notin I_\delta \end{cases} \tag{3}$$

Т.к. $h_\delta(x) > 0\, \forall x \in I_\delta$, то $\int\limits_a^b f(x) \cdot h_\delta(x) dx = \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) \cdot h_\delta(x) dx > 0$ - противоречие с условием $\int\limits_a^b f(x) \cdot h(x) dx = 0 \Rightarrow \nexists x_0 \in [a;b] : f(x_0) \neq 0$ ■

Примечание. *Лемма остаётся в силе, если в условии леммы* $\int\limits_a^b f(x) \cdot h(x) dx = 0\, \forall h \in C^n_{[a;b]}$ *и* $h^{(i)}(a) = h^{(i)}(b) = 0$, $i = \overline{0, n-1}$. *В* (4) *достаточно взять*

$$h_\delta(x) = \begin{cases} \left[(x - x_0 + \delta)(x - x_0 - \delta)\right]^{2n} & x \in I_\delta \\ 0 & x \notin I_\delta \end{cases} \quad \textit{(Модифицированная лемма)} \tag{4}$$