

Московский Физико-Технический Институт  
(государственный университет)

## PHYSTEX CLUB

(При поддержке студсовета ФРКТ)

### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. БИЛЕТЫ.

(По лекциям АЛЕКСАНДРА МИХАЙЛОВИЧА БИШАЕВА)

**Над файлом работали:**

Баранников Андрей Б01-001  
Овсянников Михаил Б01-001  
Филиппенко Павел Б01-001  
Курневич Станислав Б01-002  
Лепарский Роман Б01-003  
Паншин Артём Б01-005  
Глаз Роман Б01-007  
Дурнов Алексей Б01-007  
Талашкевич Даниил Б01-009  
Сибгатуллин Булат Б01-007  
Руденко Данила Б01-006  
Старченко Иван Б01-005



Version 1.3

Долгопрудный, 2022

# Содержание

<b>1</b>	<b>Билет 1. Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений</b>	<b>4</b>
1.1	Основные понятия . . . . .	4
1.2	Простейшие типы уравнений первого порядка . . . . .	5
1.2.1	Уравнения в полных дифференциалах . . . . .	5
1.2.2	Уравнения с разделяющимися переменными . . . . .	6
1.2.3	Однородные уравнения . . . . .	7
1.2.4	Линейные уравнения первого порядка . . . . .	7
1.3	Уравнения Бернулли и Риккати . . . . .	9
1.3.1	Уравнение Бернулли . . . . .	9
1.3.2	Уравнение Риккати . . . . .	9
1.4	Методы понижения порядка дифференциальных уравнений . . . . .	9
1.5	Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Билет 2. Задача Коши</b>	<b>13</b>
2.1	Принцип сжимающих отображений . . . . .	13
2.2	Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений . . . . .	15
2.3	Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения $n$ -го порядка в нормальном виде . . . . .	18
2.4	Теоремы о продолжении решения для нормальной системы дифференциальных уравнений . . . . .	19
2.5	Непрерывная зависимость от параметров решения задачи Коши для нормальной системы ДУ . . . . .	20
2.6	Дифференцируемость решения по параметру . . . . .	21
2.7	Задача Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Особое решение . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Билет 3. Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами</b>	<b>23</b>
3.1	Вводная часть . . . . .	23
3.1.1	Понятие кольца. Рассмотрение понятия многочленов . . . . .	23
3.1.2	Многочлен . . . . .	24
3.2	Линейные уравнения с постоянными коэффициентами . . . . .	27
3.3	Неоднородные линейные уравнения . . . . .	30
3.4	Уравнение Эйлера . . . . .	31
3.5	Матричная экспонента, ее свойства и применение к решению нормальных линейных систем . . . . .	32
3.5.1	Матричная экспонента . . . . .	32
3.5.2	Свойства матричной экспоненты . . . . .	33
3.5.3	Применение к решению нормальных линейных систем . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Билет 4. Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами</b>	<b>36</b>
4.1	Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной линейной системы уравнений и для линейного уравнения $n$ -го порядка в нормальном виде . . . . .	36

4.2	Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы . . . . .	38
4.3	Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем . .	40
4.4	Определитель Вронского и его свойства . . . . .	40
4.4.1	Определитель Вронского . . . . .	40
4.4.2	Свойства Вронскиана . . . . .	41
4.5	Фундаментальная система решений и общее решение нормальной линейной однородной системы уравнений . . . . .	41
4.6	Линейная неоднородная система уравнений в случае, когда неоднородность представлена векторным квазимногочленом (без доказательства) . . . . .	48
4.7	Формула Лиувилля-Остроградского для нормальной линейной однородной системы уравнений и для линейного однородного уравнения $n$ -го порядка. .	49
4.8	Метод вариации постоянных для линейной неоднородной системы уравнений и для линейного неоднородного уравнения $n$ -го порядка. . . . .	50
4.9	Устойчивость по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость . . . . .	51
4.10	Автономные линейные системы . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Билет 5. Автономные системы дифференциальных уравнений</b>	<b>53</b>
5.1	Основные определения . . . . .	53
5.2	Типы фазовых траекторий . . . . .	54
5.3	Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия двумерной автономной нелинейной системы. . . . .	55
5.4	Классификация положений равновесия линейной автономной системы второго порядка. . . . .	55
5.5	Теорема о выпрямлении траекторий. . . . .	61
5.6	Устойчивость по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость . . . . .	61
5.7	Автономные линейные системы . . . . .	61
5.8	Групповые свойства автономных систем . . . . .	63
5.9	Понятия фазового потока и фазового объема . . . . .	63
5.10	Теорема Лиувилля . . . . .	64
5.11	Теорема Пуанкаре . . . . .	65
<b>6</b>	<b>Билет 6. Первые интегралы автономных систем</b>	<b>66</b>
6.1	Основные определения . . . . .	66
6.2	Критерий первого интеграла . . . . .	66
6.3	Теорема о числе независимых первых интегралов . . . . .	66
6.4	Применение первых интегралов для понижения порядка системы . . . . .	68
6.5	Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка . .	69
6.5.1	Общее решение линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка . . . . .	69
6.5.2	Задача Коши для уравнения в частных производных первого порядка	70
6.5.3	Примеры решения задач . . . . .	73
<b>7</b>	<b>Билет 7. Элементы вариационного исчисления</b>	<b>75</b>
7.1	Основные понятия . . . . .	75
7.2	Простейшие задачи вариационного исчисления . . . . .	77
7.2.1	Задача с закрепленными концами . . . . .	77
7.2.2	Функционалы, зависящие от вектор-функции . . . . .	78
7.2.3	Задача со свободными концами . . . . .	79
7.3	Функционалы, зависящие от высших производных . . . . .	79
7.4	Условные вариационные принципы. Изопериметрическая задача. . . . .	80

7.5	Задача Лагранжа . . . . .	82
<b>8</b>	<b>Дополнительные пункты</b>	<b>83</b>
8.1	Элементы группового анализа ДУ . . . . .	83
8.2	Однопараметрические группы . . . . .	83
8.3	Построение Жорданова базиса . . . . .	86

# 1. Билет 1. Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений

## 1.1. Основные понятия

**Определение 1.1.** Уравнение вида

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением, где  $x$  – аргумент,  $y(x)$  – неизвестная функция,  $F$  – известная непрерывная функция в области  $D$ .

**Определение 1.2.** Если это уравнение удастся разрешить относительно старшей производной, такое дифференциальное уравнение называется разрешённым относительно старшей производной и записывается в виде

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

Порядок уравнения определяется порядком старшей производной от  $y$ .

**Определение 1.3.** Функция  $y = \varphi(x)$  называется решением ДУ, если она  $n$  раз дифференцируема и

$$\forall x \in G \rightarrow F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0, \quad (x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in D,$$

где  $G$  – область определения функции  $\varphi(x)$  с её производными.

**Определение 1.4.** Система  $n$  уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f_1(t, x^1(t), \dots, x^n(t)) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f_n(t, x^1(t), \dots, x^n(t)) \end{cases} \quad (1)$$

где  $x^1(t), \dots, x^n(t)$  – искомые функции, а  $f_i$  – некоторые непрерывные функции, называется нормальной системой ДУ  $n$ -го порядка.

**Утверждение 1.1.** Рассмотрим ДУ  $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$   $n$ -ого порядка. Это уравнение эквивалентно следующей нормальной системе ДУ:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = v_2 \\ \dot{v}_2 = v_3 \\ \dots \\ \dot{v}_{n-1} = v_n \\ \dot{v}_n = f_n(x, v_1, v_2, \dots, v_n) \end{cases} \Leftrightarrow y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad (2)$$

*Доказательство.* Введём обозначения:  $y = v_1(x)$ ,  $y' = v_2(x)$ ,  $y'' = v_3(x)$ ,  $\dots$ ,  $y^{(n-1)} = v_n(x)$ . Тогда имеем  $\dot{v}_1 = v_2$ ,  $\dot{v}_2 = v_3$ ,  $\dots$ ,  $\dot{v}_n = f(x, v_1, v_2, \dots, v_n)$ , то есть получилась нормальная система дифференциальных уравнений  $n$ -ого порядка с неизвестными  $v_i$ .

Обратными заменами системы уравнений можно получить исходное дифференциальное уравнение  $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$ . ■

**Определение 1.5.** Рассмотрим уравнение 1-ого порядка  $y' = f(x, y(x))$ . Тогда задача решить это уравнение с условием  $y(x_0) = y_0$  называется задачей Коши.

**Определение 1.6.** Пусть  $\varphi(x)$  – решение дифференциального уравнения  $y' = f(x, y(x))$ . График решения  $\varphi(x)$  называется интегральной кривой. В силу определения функции  $f(x, y)$  на множестве  $\Omega$ , вся интегральная кривая будет лежать в  $\Omega$ .

**Определение 1.7.** Проведём через каждую точку интегральной кривой  $(x_0, y_0) \in \Omega$  малый отрезок с углом наклона по отношению к оси  $x$  равным  $\alpha$ , причём  $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0, y_0)$ . Получим так называемое поле направлений.

Из построения интегральной кривой следует, что интегральная кривая в каждой своей точке касается поля направлений. Верно и обратное: кривая, касающаяся в каждой своей точке поля направлений, является интегральной кривой.

## 1.2. Простейшие типы уравнений первого порядка

### 1.2.1. Уравнения в полных дифференциалах

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение:  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ , причём функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  непрерывны в некоторой области  $D$  и  $\forall (x_0, y_0) \in D \rightarrow |P(x_0, y_0)| + |Q(x_0, y_0)| > 0$ . Тогда кривая

$$\gamma = \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (3)$$

называется интегральной кривой рассматриваемого уравнения, если  $\forall t : t \in [t_1; t_2]$  функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  непрерывно дифференцируемы,  $(\varphi(t), \psi(t)) \in D$ ,  $(\varphi'_t)^2 + (\psi'_t)^2 > 0$  и выполнено

$$P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'_t + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'_t = 0. \quad (4)$$

**Определение 1.8.** Дифференциальное уравнение  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  называется уравнением в полных дифференциалах, если  $\exists F(x, y) : P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y)$ .

Тогда  $dF(x, y) = 0 \Rightarrow F(x, y) = \text{const}$ , то есть  $F(x, y)$  определяет неявную функцию  $y(x)$ .

**Теорема 1.1.** Пусть функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  непрерывно дифференцируемы в области  $D$ . Для того, чтобы уравнение  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  являлось уравнением в полных дифференциалах, необходимо выполнение условия  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ,  $(x, y) \in D$ . Если же область  $D$  ещё и одновязна, то условие  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  является достаточным.

*Доказательство.* Пусть  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  – уравнение в полных дифференциалах, тогда  $\exists F(x, y) : P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y) \Rightarrow P = \frac{\partial F}{\partial x}$ ,  $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$ . По условию  $P$  и  $Q$  – непрерывно дифференцируемы, тогда  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  – непрерывные функции, значит

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (x, y) \in D. \quad (5)$$

Пусть теперь  $D$  – односвязная область. Рассмотрим значение интеграла

$$F = \int_{(x_0, y_0)}^{(x; y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

который берётся по кусочно гладкой кривой  $\gamma$ , лежащей в  $D$  и соединяющей точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x; y)$ . Пусть  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ . Тогда по теореме о независимости интеграла от пути интегрирования выходит, что значение интеграла не зависит от пути интегрирования  $\gamma$ , а является функцией от  $(x, y)$ , значит  $F = F(x, y)$  – функция и  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y)$ . ■

**Определение 1.9.** Непрерывно дифференцируемая функция  $\mu(x, y) \neq 0$  в области  $G$  называется интегрирующим множителем для уравнения  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ , если уравнение  $\mu(x, y)(P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = 0$  – уравнение в полных дифференциалах, а исходное уравнение  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  не является уравнением в полных дифференциалах.

Если  $\mu(x, y)$  – интегрирующий множитель, то для достаточного условия имеем (с учётом требований теоремы выше)

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \Leftrightarrow P \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \frac{\partial P}{\partial y} = Q \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Полученное уравнение не легче исходного, так как теперь задача свелась к нахождению  $\mu$ . Обычно интегрирующий множитель ищут в виде  $\mu(x)$ ,  $\mu(y)$ ,  $\mu(x^2 + y^2)$ ,  $\mu(x^\alpha, y^\beta)$ .

### 1.2.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим ДУ вида  $P(y)dx + Q(x)dy = 0$ , где  $P(y) \in C^1_{[y_1; y_2]}$ ,  $Q(x) \in C^1_{[x_1; x_2]}$ . Если  $\exists y_0 : P(y_0) = 0$  или  $\exists x_0 : Q(x_0) = 0$ , тогда

$$\begin{cases} x = t \\ y = y_0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_0 \\ y = t \end{cases} \quad (6)$$

являются интегральными кривыми рассматриваемого ДУ соответственно. Если же выполняется  $P(x, y) \neq 0$  и  $Q(x, y) \neq 0$ , то применим к уравнению интегрирующий множитель

$$\mu(x, y) = \frac{1}{P(x, y)Q(x, y)},$$

получив уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{dx}{Q(x)} + \frac{dy}{P(y)} = 0. \quad (7)$$

Значение  $\mu(x, y)$  действительно является интегрирующим множителем, так как выполняется

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{Q(x)} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{P(y)} \right) = 0. \quad (8)$$

Тогда

$$dF(x, y) = \frac{dx}{Q(x)} + \frac{dy}{P(y)} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{Q(x)} \Rightarrow F(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{dt}{Q(t)} + C(y), \quad (9)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{P(y)} = C'(y) \Rightarrow C(y) = \int_{y_0}^y \frac{dt}{P(t)} \Rightarrow F(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{dt}{Q(t)} + \int_{y_0}^y \frac{dt}{P(t)} = const. \quad (10)$$

Точка  $(x_0, y_0)$  – произвольная точка в области определения функций  $P$  и  $Q$ .

**Определение 1.10.** Если дифференциальное уравнение вида  $P_1(x, y)dx + Q_1(x, y)dy = 0$  может быть сведено к виду  $P(y)dx + Q(x)dy = 0$ , то такое уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными.

**Утверждение 1.2.** Задача Коши уравнения с разделяющимися переменными  $P(y)dx + Q(x)dy = 0$  задаётся в виде  $y(x_1) = y_1$ , а её решение в виде

$$\int_{x_1}^x \frac{dt}{Q(t)} + \int_{y_1}^y \frac{dt}{P(t)} = 0. \quad (11)$$

### 1.2.3. Однородные уравнения

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right),$$

которое назовём уравнением с однородной правой частью, где  $g(z)$  – непрерывная функция на некотором промежутке. Сделаем замену  $v(x) = \frac{y}{x}$ , тогда  $y(x) = v(x) \cdot x$ ,  $y'_x = x \cdot v'_x + v = g(v)$ , откуда имеем  $x \frac{dv}{dx} = g(v) - v$ . Если  $\exists v_0 : g(v_0) = v_0$ , то  $v_0$  – решение уравнения  $x \frac{dv}{dx} = g(v) - v$ . Если же  $v \neq g(v)$ , тогда

$$\frac{dv}{g(v) - v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln |x| + C = \int_{v_0}^v \frac{dt}{g(t) - t}. \quad (12)$$

Таким образом, найдено решение исходного уравнения с однородной правой частью в квадратурах.

**Определение 1.11.** Функция  $F(x^1, x^2, \dots, x^n)$  называется однородной степени  $m$ , если  $\forall \lambda > 0 \rightarrow F(\lambda x^1, \lambda x^2, \dots, \lambda x^n) = \lambda^m F(x^1, x^2, \dots, x^n)$ .

**Пример 1.1.** Рассмотрим уравнение  $P(x, y)dx = Q(x, y)dy$ . Если  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  – однородные функции степени  $m$ , тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = \frac{x^m P(1, \frac{y}{x})}{x^m Q(1, \frac{y}{x})} = \frac{P(1, \frac{y}{x})}{Q(1, \frac{y}{x})} = g\left(\frac{y}{x}\right) \quad (13)$$

Таким образом исходное уравнение свелось к уравнению с однородной правой частью.

### 1.2.4. Линейные уравнения первого порядка

**Определение 1.12.** Дифференциальное уравнение вида  $y' + a(x)y = f(x)$  – линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Дифференциальное уравнение вида  $y' + a(x)y = 0$  – линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка. При этом  $a(x) \in C_{I(x)}$ ,  $f(x) \in C_{I(x)}$ , где  $I(x)$  – область, на которой определены функции  $a(x)$  и  $f(x)$ .

Введём оператор  $L = \frac{d}{dx} + a(x)$ , который действует на множество непрерывно дифференцируемых функций  $\varphi \in C_{I(x)}^1$ . Тогда уравнение  $y' + a(x)y = f(x)$  переписывается в виде  $L(y) = f(x)$ , а уравнение  $y' + a(x)y = 0$  переписывается в виде  $L(y) = 0$ .

**Теорема 1.2.** Введённый оператор  $L = \frac{d}{dx} + a(x)$  – линейный оператор.

*Доказательство.* Рассмотрим линейную комбинацию  $c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$ :

$$L(c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)) = (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)' + a(x)(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1L(\varphi_1) + c_2L(\varphi_2) \quad (14)$$

Таким образом,  $L(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1L(\varphi_1) + c_2L(\varphi_2)$ , то есть  $L$  – линейный оператор. ■

**Утверждение 1.3.** Решением уравнения  $y' + a(x)y = 0$  является

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (15)$$



*Доказательство.* Найдём решение уравнения  $y' + a(x)y = 0$ :

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx \Rightarrow \ln |y| = - \int_{x_0}^x a(t)dt + \ln C \Rightarrow |y| = Ce^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}, \quad C > 0 \quad (16)$$

Раскрывая модуль и объединяя полученное решение с нулевым ( $y \equiv 0$ ), имеем

$$y = Ce^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

■

**Утверждение 1.4.** Решением уравнения  $y' + a(x)y = f(x)$  является

$$y = C_0 e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} + \int_{x_0}^x f(t) e^{-\int_t^x a(s)ds} dt, \quad C_0 \in \mathbb{R}. \quad (18)$$

*Доказательство.* Найдём решение уравнения  $y' + a(x)y = f(x)$ : воспользуемся уже найденным решением однородного уравнения, применяя метод вариации постоянной. То есть будем искать решение в виде

$$y = C(x) e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt}. \quad (19)$$

Подставим это решение в исходное уравнение:

$$C'(x) e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} - a(x)C(x) e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} + a(x)C(x) e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} = f(x) \quad (20)$$

$$C'(x) e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} = f(x) \Rightarrow C(x) = \int_{x_0}^x f(t) e^{\int_t^x a(s)ds} dt + C_0 \quad (21)$$

Таким образом найден вид  $C(x)$ . Теперь подставим эту функцию:

$$y = C_0 e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} + e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} \int_{x_0}^x f(t) e^{\int_t^x a(s)ds} dt \quad (22)$$

$$y = C_0 e^{-\int_{x_0}^x a(t)dt} + \int_{x_0}^x f(t) e^{-\int_t^x a(s)ds} dt \quad (23)$$

Из полученного решения видно, что оно является суммой решения однородного уравнения и частного решения. ■

**Утверждение 1.5.** Если  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  – некоторые решения уравнения  $y' + a(x)y = f(x)$ , то  $z(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$  – решение однородного уравнения  $y' + a(x)y = 0$ .

*Доказательство.* По условию  $\varphi_1' + a(x)\varphi_1 = f(x)$ ,  $\varphi_2' + a(x)\varphi_2 = f(x)$ , откуда очевидно, что  $(\varphi_1 - \varphi_2)' + a(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ . Обозначив  $z = \varphi_1 - \varphi_2$ , получим  $z' + a(x)z = 0$ , то есть  $z$  – решение однородного уравнения. ■

### 1.3. Уравнения Бернулли и Риккати

#### 1.3.1. Уравнение Бернулли

**Определение 1.13.** ДУ вида  $y' + a(x) \cdot y = y^r \cdot f(x)$ <sup>(24)</sup>, где  $a(x), f(x)$  – непрерывные функции на  $(\alpha, \beta)$ ,  $r \in \mathbb{R}, r \neq 1$  называется уравнением Бернулли.

**Утверждение 1.6.** Если  $r > 0$ , то  $y \equiv 0$  – тривиальное решение. Пусть  $y \neq 0$ , разделим ДУ на  $y^r \Rightarrow \frac{y'}{y^r} + a(x) \cdot y^{1-r} = f(x)$ . Замена:  $u(x) = y^{1-r} \Rightarrow u' = (1-r) \cdot y^{-r} \cdot y' \Rightarrow \frac{1}{1-r} \cdot u' + a(x) \cdot u = f(x)$  – свелось к линейному уравнению.

#### 1.3.2. Уравнение Риккати

**Определение 1.14.** ДУ вида  $y' + a(x) \cdot y^2 + b(x) \cdot y = c(x)$ <sup>(25)</sup>, где  $a(x), b(x), c(x)$  – непрерывные функции на  $(\alpha, \beta)$ , называется уравнением Риккати.

**Утверждение 1.7.** В общем случае уравнение Риккати не допускает решений в квадратурах, однако, если известно некоторое решение  $y = \varphi(x)$ , то сделав замену  $y = u + \varphi$ , получаем:  $\varphi' + a\varphi^2 + b\varphi = c$   
 $\varphi' + u' + a\varphi^2 + 2a\varphi u + au^2 + b\varphi + bu = c \Rightarrow u' = -au^2 - (2a\varphi + b)u$  – свелось к уравнению Бернулли.

### 1.4. Методы понижения порядка дифференциальных уравнений

**Утверждение 1.8.** Рассмотрим множество преобразований плоскости

$\bar{x} = \varphi(x, y, \lambda), \bar{y} = \psi(x, y, \lambda)$ <sup>(26)</sup>. В (26) каждому  $\lambda \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$  соответствует некоторое преобразование, например,  $\bar{x} = \lambda x, \bar{y} = \lambda y, \lambda > 0$  – гомотетия. Множество преобразований (26) является группой преобразований, если оно содержит любую композицию (26), т.е.

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \exists \lambda_0 : \forall x, y \rightarrow \varphi(\varphi(x, y, \lambda_1), \psi(x, y, \lambda_1), \lambda_2) = \varphi(x, y, \lambda_0), \\ \psi(\varphi(x, y, \lambda_1), \psi(x, y, \lambda_1), \lambda_2) = \psi(x, y, \lambda_0),$$

если содержит тождественное преобразование, т.е.

$$\exists \lambda_0 : \forall x, y \rightarrow \varphi(x, y, \lambda_0) = x; \psi(x, y, \lambda_0) = y,$$

и если вместе с любым преобразованием содержит и обратное:

$$\forall \lambda \in \mathcal{D} : \exists \lambda_0 : x = \varphi(\bar{x}, \bar{y}, \lambda_0); y = \psi(\bar{x}, \bar{y}, \lambda_0)$$

Таким образом, если (26) – группа, то  $x = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda), y = \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda)$ ; если в ДУ  $y' = f(x, y)$  осуществить переход к новым координатам, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\bar{\psi}'_{\bar{x}} d\bar{x} + \bar{\psi}'_{\bar{y}} d\bar{y}}{\bar{\varphi}'_{\bar{x}} d\bar{x} + \bar{\varphi}'_{\bar{y}} d\bar{y}} = f(\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda), \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda)) = \tilde{f}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\bar{\psi}'_{\bar{x}} + \bar{\psi}'_{\bar{y}} \cdot \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}}{\bar{\varphi}'_{\bar{x}} + \bar{\varphi}'_{\bar{y}} \cdot \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}} = \tilde{f}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda) \Rightarrow \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{\tilde{f} \cdot \bar{\varphi}'_{\bar{x}} - \bar{\psi}'_{\bar{x}}}{\bar{\psi}'_{\bar{y}} - \tilde{f} \cdot \bar{\varphi}'_{\bar{y}}} \quad (27)$$

(27) является записью  $y' = f(x, y)$  в новых координатах. Говорят, что  $y' = f(x, y)$  допускает группу  $x = \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda), y = \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda)$ , если оно не изменяется при переходе к новым переменным, т.е.  $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \tilde{f}(\bar{x}, \bar{y})$ .

**Следствие 1.2.1.** Рассматриваем уравнения вида  $\boxed{F(x, y, y', y'') = 0}^{(28)}$

1.  $\boxed{F(x, y', y'') = 0}^{(29)}$  Замена  $y'(x) = v(x) \Rightarrow y''(x) = v'(x)$  и (29) в этом случае имеет вид  $F(x, v(x), v'(x)) = 0 \xrightarrow{\text{решаем}} V(x) = g(x, c_1)$ . Тогда решение (29) запишется в виде  $\frac{dy}{dx} = g(x, c_1) \Rightarrow y(x) = c_2 + \int g(x, c_1) dx$ . Заметим, что (29) допускает группу сдвига  $x = \bar{x}, y = \bar{y} + y_0$ .
2.  $\boxed{F(y, y', y'') = 0}^{(30)}$  (не содержит явно  $x$ ). Замена:  $y' = V(y)$ , тогда  $y'' = \frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dy} \frac{dy}{dx} = V \frac{dV}{dy} \Rightarrow F(y, V, y \frac{dV}{dy}) = 0$  - ДУ первого порядка. Решение  $V(y) = g(y, c_1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = g(y, c_1) \Rightarrow$  Решение (30):  $\int \frac{dy}{g(y, c_1)} = x + c_2$ . Заметим, что (30) допускает группу сдвигов  $x = \bar{x} + x_0, y = \bar{y}$ .
3.  $\boxed{F(x, y, y', y'') = 0}$  и  $F$  - однородная степени  $m$  по  $y, y', y''$ , т.е.  $\forall \lambda > 0 \rightarrow F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'') = \lambda^m \cdot F(x, y, y', y'')$ . В таком случае ДУ допускает группу  $x = \bar{x}, y = \lambda \bar{y}$ . Замена:  $z(x) = \frac{y'}{y} \Rightarrow y' = z(x)y \Rightarrow y'' = z'y + zy' = z'y + z^2y = y \cdot (z' + z^2) \Rightarrow F(x, y, zy, y(z' + z^2)) = 0 \Rightarrow y^m \cdot F(x, 1, z, z' + z^2) = 0$  - относительно  $z$  имеем уравнение первого порядка. Если его решение  $z(x) = g(x, c_1)$ , то  $\frac{y'}{y} = g(x, c_1) \Rightarrow \frac{dy}{y} = g(x, c_1) dx \Rightarrow \ln |y| = \int g(x, c_1) dx + c_2$
- 4\*. Будем говорить, что функция  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$  является квазиоднородной функцией степени  $r$ , если  $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall \lambda > 0 : F(\lambda x, \lambda^\alpha y, \lambda^{\alpha-1} y', \dots, \lambda^{\alpha-n} y^{(n)}) = \lambda^r \cdot F(x, y, \dots, y^{(n)})$ .  
Рассмотрим множество преобразований:

$$\begin{cases} x = \lambda \bar{x} \\ y = \lambda^\alpha \bar{y} \end{cases}, \quad \text{где } \lambda > 0 \quad (31)$$

Такое множество преобразований перепишем в виде:

$$\begin{cases} x = e^\beta \cdot \bar{x} \\ y = e^{\alpha\beta} \bar{y} \end{cases}$$

Если  $F$  в (28) является квазиоднородной, то (28) допускает группу растяжений (31):

$$\boxed{F(x, y, y', y'') = 0} \xrightarrow{\text{преобр.}} F(\lambda \bar{x}, \lambda^\alpha \bar{y}, \lambda^{\alpha-1} \bar{y}', \lambda^{\alpha-2} \bar{y}'') = \lambda^r \cdot F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'') = 0$$

$\Downarrow$

$$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'') = 0$$

$$\text{Замена: } \begin{cases} x = e^t \\ y = z(t) \cdot e^{\alpha t} \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{z'_t \cdot e^{\alpha t} + z \cdot \alpha \cdot e^{\alpha t}}{e^t} = e^{(\alpha-1)t} \cdot (z'_t + \alpha z)$$

$\Downarrow$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(\alpha-1) \cdot e^{(\alpha-1)t} \cdot (z'_t + \alpha z) + e^{(\alpha-1)t} \cdot (z''_{tt} + \alpha z'_t)}{e^t} =$$

$$= e^{(\alpha-2)t} \cdot (z''_{tt} + (2\alpha - 1) \cdot z'_t + \alpha \cdot (\alpha - 1)z)$$

$\Downarrow$

$$F(e^t; z \cdot e^{\alpha t}; e^{(\alpha-1)t} \cdot (z'_t + \alpha z); e^{(\alpha-2)t}(z''_{tt} + (2\alpha - 1)z'_t + \alpha \cdot (\alpha - 1)z)) = \\ = e^{rt} \cdot F(1; z; z'_t + \alpha z; z''_{tt} + (2\alpha - 1)z'_t + \alpha \cdot (\alpha - 1)z) = 0$$

– не содержит  $t$ , т.е. свелось к случаю 2

## 1.5. Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной

**Утверждение 1.9.** Рассмотрим  $\boxed{F(x, y, y') = 0}^{(32)}$ , где  $F(x, y, y')$  как функция трёх переменных является непрерывно дифференцируемой в области  $D \subset \mathbb{R}^3$ .

Решение уравнения  $F(x, y, y') = 0$  будем представлять как кривую в параметрическом виде:

$$\gamma: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in [t_1, t_2], \quad \varphi(t), \psi(t) \in C^1_{[t_1, t_2]} \quad (33)$$

Кривая (33), является интегральной кривой (32)  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow F\left(\varphi(t), \psi(t), \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}\right) = 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2] \quad (34)$$

Будем решать эквивалентную систему положив  $p = \frac{dy}{dx}$ :

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ dy = p dx \end{cases} \quad (35)$$

**Утверждение 1.10.** Уравнение (32) эквивалентно системе (35).

*Доказательство.* Пусть  $\gamma$  – интегр. кривая (33). Положим  $p = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} = \frac{dy}{dx}$  – второе уравнение в системе (35) выполнено, а первое выполнено в силу подстановки в (34). Обратно, пусть  $x(t) = \varphi(t)$ ,  $y(t) = \psi(t)$ ,  $p$  – решение (34).  $\Rightarrow$  Из второго уравнения системы:

$p = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} \rightarrow$  Подставляем в первое уравнение системы и получаем само уравнение (34). ■

**Утверждение 1.11.** Рассмотрим метод решения (32), который называется методом введения параметра.

Первое уравнение в системе (35) рассмотрим как задающее в  $\mathbb{R}^3_{(x,y,p)}$  гладкую поверхность  $S$ , для которой параметрическое представление имеет вид:



$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \Rightarrow F(\varphi(u, v); \psi(u, v); \chi(u, v)) \equiv 0 \\ p = \chi(u, v) \end{cases}$$

Потребуем, чтобы

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial v} \end{pmatrix} = 2, \quad \forall u, v \in G$$

т.е. чтобы  $S$  была простой гладкой поверхностью. Тогда остаётся удовлетворить второму уравнению системы (35):

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv = \chi \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv \right) \Rightarrow \left( \frac{\partial \psi}{\partial u} - \chi \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) du = \left( \chi \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) dv \quad (36)$$

Если  $P(u, v) \neq 0 \quad \forall (u, v) \in G$ , то из (36) получаем ДУ:  $\frac{du}{dv} = \frac{Q(u, v)}{P(u, v)}$

Его решение  $u = u(v, c)$ , тогда  $\begin{cases} x = \varphi(u(v, c), v) = x(v, c) \\ y = \psi(u(v, c), v) = y(v, c) \end{cases}$  – является параметрическим представлением решения (32)

Если же существует связь между  $u$  и  $v$ :  $u = f(v)$ ,  $P(f(v), v) = Q(f(v), v) = 0 \quad \forall v \in G$ , то  $u = f(v)$  явл. решением  $\left( \chi \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) dv$ , а

$$\begin{cases} x = x(v) \\ y = y(v) \end{cases} \quad - \text{явл. решением (36)}$$

## 2. Билет 2. Задача Коши

### 2.1. Принцип сжимающих отображений

Работаем в  $E = \mathbb{R}^n$  – пространстве точек с  $n$  координатами.  $E$  – аффинное пространство, а  $\vec{E}$  – его присоединенное линейное пространство, состоящее из векторов, натянутых на точки  $E$ .

**Определение 2.1.** Пусть  $L$  – это векторное пространство, и на нем задано отображение  $\|\cdot\| : L \rightarrow \mathbb{R}$  такое, что:

1.  $\forall x \in L \mapsto \|x\| \geq 0$ . А также  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ;
2.  $\forall x \in L \ \& \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ ;
3.  $\forall x, y \in L \mapsto \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  – неравенство треугольника.

Тогда данное отображение называется нормой, а пространство  $L$  нормированным.

**Пример 2.1.** Приведем пример норм. Пусть  $a(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Тогда норму можно определить, допустим, так:

$$\|a\|_1 = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}. \quad (37)$$

Или так:

$$\|a\|_2 = \max_{j=1, \dots, n} |x_j|. \quad (38)$$

И тогда можно ввести понятие эквивалентности норм.

**Определение 2.2.** Пусть снова  $L$  – линейное пространство. Тогда нормы  $\|\cdot\|_1$  и  $\|\cdot\|_2$  на  $L$  называются эквивалентными, если  $\exists C_1, C_2 > 0 : \forall x \in L \mapsto C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1$ .

Как видно, для определенных выше двух норм это соотношение удовлетворяется.

**Утверждение 2.1.** В конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.

Рассмотрим множество функций, непрерывных на отрезке  $[a; b]$  для некоторых неравных  $a, b \in \mathbb{R}$  и обозначим данное множество  $C[a; b]$ . Понятно, что  $C[a; b]$  является линейным пространством. Тогда введем на нем норму.

**Определение 2.3.** Нормой функции  $f(x) \in C[a; b]$  будем называть число

$$\|f(x)\| = \max_{x \in [a; b]} |f(x)|.$$

**Определение 2.4.** Набор функций  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) \in C[a; b]$  будем называть вектор-функцией и обозначать  $f(x) = \vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T$ .

**Определение 2.5.** Вектор-функция  $f(x)$  называется непрерывной (дифференцируемой, непрерывно дифференцируемой и т.п.), если все ее компоненты непрерывны (дифференцируемы, непрерывно дифференцируемы и т.п.).

**Определение 2.6.** Модулем вектор-функции  $f(x)$  назовем число

$$|f(x)| = \sqrt{\sum_{j=1}^n f_j^2(x)}. \quad (39)$$

Норму вектор-функции можно определить как

$$\|f(x)\|_1 = \max_{x \in [a; b]} |f(x)|.$$

Или же как

$$\|f(x)\|_2 = \max_{j=1, \dots, n} \max_{x \in [a; b]} f_j(x).$$

Понятно, что эти две нормы эквивалентны.

**Определение 2.7.** Пусть имеется функциональная последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ , где  $f_n(x) \in C[a; b]$  – линейное пространство функций с нормой (1 или 2 – неважно). Тогда говорят, что данная последовательность сходится к функции  $f(x)$  по норме, если:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0. \quad (40)$$

Аналогично все то же самое и точно так же определяется и для вектор-функций  $f(x) = \vec{f}(x) \in C^n[a; b]$ .

**Определение 2.8.** Функциональная последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  называется фундаментальной, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \ \& \ \forall m \geq N \mapsto \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon. \quad (41)$$

**Определение 2.9.** Функциональное пространство  $L$  называется полным по [данной] норме, если любая фундаментальная функциональная последовательность данного пространства сходится по норме к функции из этого же пространства  $L$ .

**Теорема 2.1.** Функциональное пространство  $C[a; b]$  с нормой  $\|\cdot\|_1$  является полным.

*Доказательство.* Возьмем произвольную функциональную последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  из нашего пространства непрерывных функции. Тогда из определения фундаментальности следует, что  $\|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$ .

Однако  $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon \ \forall x \in [a; b]$ .

А значит, последовательность  $f_n(x)$  сходится к некоторой  $f(x)$ , причем равномерно на  $[a; b]$  (числовая последовательность  $\|f_n(x)\|$  мажорирует функциональную последовательность  $f_n(x)$ ).

Так как  $f_n(x) \in C[a; b]$  – непрерывны  $\forall n \in \mathbb{N}$ , и последовательность сходится равномерно на  $[a; b]$ , то предельная функция  $f(x)$  также является непрерывной на  $[a; b]$ , а значит,  $f(x) \in C[a; b]$ .

Таким образом, последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  сходится к  $f(x) \in C[a; b]$ . В силу произвольности  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  заключаем, что функциональное пространство  $C[a; b]$  с нормой  $\|\cdot\|_1$  является полным. ■

**Определение 2.10.** Полное нормированное линейное пространство называется Банаховым. Обозначается  $B$ .

**Определение 2.11.** Функциональный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  называется сходящимся по норме,

если последовательность его частичных сумм  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$  является сходящейся по норме.

**Определение 2.12.** Пусть  $\forall x \in M \subseteq B$  определен элемент  $Ax \in B$ . Тогда говорят, что на множестве  $B$  задан оператор  $A$  с областью определения  $M$ .

Будем рассматривать уравнение  $x = Ax$ .

**Определение 2.13.** Множество  $M \subseteq B$  называется ограниченным, если  $\exists C > 0$  такое, что  $\forall x \in M \mapsto \|x\| \leq C$ .

**Определение 2.14.** Оператор  $A$  называется сжатием на  $M$ , если:

1.  $\forall x \in M \mapsto Ax \in M$ ;
2.  $\exists k \in (0; 1) : \forall x, y \in M \mapsto \|Ax - Ay\| \leq k\|x - y\|$ .

**Теорема 2.2** (Принцип сжимающих отображений). Пусть множество  $M \subseteq B$ , причём  $M \neq \emptyset$ , является ограниченным и замкнутым, а оператор  $A$  является сжатием. Тогда решение уравнения  $x = Ax$  существует и единственно.

*Доказательство.* Будем использовать итерационный метод, согласно которому мы выберем начальное  $x_0$ , а затем строим последовательность  $x_n = Ax_{n-1}$ . Тогда, если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  и  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax$ , то  $x = Ax$ .

Пусть  $x_n = S_n = x_0 + (x_1 - x_0) + \dots + (x_n - x_{n-1})$ . Докажем, что  $\|x_{n+1} - x_n\| \leq 2Ck^n$  для некоторого  $C > 0$ , ограничивающего последовательность  $x_n$ . Сделаем это по индукции.

База индукции:  $\|x_1 - x_0\| \leq \|x_1\| + \|x_0\| \leq 2C$ .

Предположим, что  $\|x_n - x_{n-1}\| \leq 2Ck^{n-1}$ . Тогда получаем, что  $\|x_{n+1} - x_n\| = \|Ax_n - Ax_{n-1}\| \leq k\|x_n - x_{n-1}\| \leq 2Ck^n$ .

И получаем, что  $\|x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (x_j - x_{j-1})\| \leq \|x_0\| + \sum_{j=1}^{\infty} 2Ck^{j-1} < \infty$ .

А значит  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . А поскольку  $M$  замкнуто, то  $x \in M$ .

Теперь рассмотрим разность  $\|Ax_n - Ax\| \leq k\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Это означает, что  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax$ .

Учитывая, что  $x_{n+1} = Ax_n$ , то, перейдя к пределу с обеих частей равенства, мы получаем, что итерационный метод сходится к решению уравнения  $x = Ax$ . И таким образом, доказано существование решения. Теперь докажем его единственность.

Пойдем от противного: пусть  $x$  и  $y$  — два разных решения. Тогда  $\|x - y\| = \|Ax - Ay\| \leq k\|x - y\|$ . Учитывая, что  $k \in (0; 1)$ , то данная ситуация возможна тогда и только тогда, когда  $\|x - y\| = 0$ . Следовательно,  $x = y$ , что противоречит тому, что это два разных решения. Итак, теорема доказана. ■

## 2.2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений

**Определение 2.15.** Система вида

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(t, \bar{x}) \\ \dot{x}^2 = f^2(t, \bar{x}) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f^n(t, \bar{x}) \end{cases} \quad (42)$$

называется нормальной системой дифференциальных уравнений  $n$ -ого порядка.

**Определение 2.16.** Система

$$\begin{cases} x^1(t_0) = x_0^1 \\ x^2(t_0) = x_0^2 \\ \dots \\ x^n(t_0) = x_0^n \end{cases} \quad (43)$$

называется начальным условием



**Утверждение 2.2.** Решить задачу Коши означает решить нормальную систему дифференциальных уравнений при заданном начальном условии

**Теорема 2.3** (Теорема Коши о существовании и единственности решения). Пусть  $\forall i, j = \overline{1, n}$  функции  $f^i, \frac{\partial f^i}{\partial x^j}$  непрерывны в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , тогда,  $\forall (t_0, \bar{x}_0) \in \Omega \exists h > 0 : \forall t \in [t_0 - h, t_0 + h]$  решение задачи Коши существует и единственно.

**Лемма 2.1.** Если  $\bar{f}(t, \bar{x})$  - непрерывны на  $\Omega$ , то система уравнений

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_0 + \int_{t_0}^t \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau \quad (44)$$

эквивалентна задаче Коши.

*Доказательство.* Пусть  $\varphi(t)$  - решение (42) при условии (43), тогда

$$\dot{\varphi}^i = f^i(t, \varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t))$$

Проинтегрируем полученное равенство по отрезку  $[t_0, t]$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \dot{\varphi}^i(\tau) d\tau &= \int_{t_0}^t f^i(\tau, \varphi^1(\tau), \dots, \varphi^n(\tau)) d\tau \\ \varphi^i(t) - \varphi^i(t_0) &= \int_{t_0}^t f^i(\tau, \bar{\varphi}(\tau)) d\tau \\ \varphi^i(t) &= x_0^i + \int_{t_0}^t f^i(\tau, \bar{\varphi}(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

Теперь пусть  $\bar{\varphi}(t)$  - решение (44). Тогда

$$\varphi^i(t) \equiv x_0^i + \int_{t_0}^t f^i(\tau, \bar{\varphi}(\tau)) d\tau$$

Отсюда видно, что функция  $\varphi^i(t)$  - дифференцируема. Тогда

$$\begin{cases} \dot{\varphi}^i(t) = f^i(t, \bar{\varphi}(t)) \\ \varphi^i(t_0) = x_0^i \end{cases} \quad (45)$$

■

**Следствие 2.3.1.** Из 2 части леммы следует, что решение задачи Коши непрерывно дифференцируемо.

Введем оператор  $A(\bar{x}) = \bar{x}_0 + \int_{t_0}^t \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau$ . Тогда систему интегральных уравнений (44) можно записать в виде

$$\bar{x}(t) = A(\bar{x}) \quad (46)$$

**Лемма 2.2.**

$$\left\| \int_{t_0}^t \bar{x}(\tau) d\tau \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|\bar{x}(\tau)\| d\tau \right|$$

*Доказательство.*

$$\left| \int_{t_0}^t x^i(\tau) d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |x^i(\tau)| d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t \|\bar{x}(\tau)\| d\tau \right| \quad (47)$$

Таким образом  $\max\{|\int_{t_0}^t x^i(\tau) d\tau|\} = \|\int_{t_0}^t \bar{x}(\tau) d\tau\| \leq |\int_{t_0}^t \|\bar{x}(\tau)\| d\tau|$  ■

**Лемма 2.3.** (Адамара) Пусть  $\bar{f}(\bar{x}), \frac{\partial f^i}{\partial x_j}$  непрерывны в  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  - замкнутой, ограниченной, выпуклой области. Тогда  $\forall i = \overline{1, n}, \bar{y} \in \Omega \hookrightarrow \|\bar{f}(\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x})\| \leq n^{3/2} K_1 \|\bar{y} - \bar{x}\|$ , где  $K_1 = \max_{i,j=\overline{1,n}} \{\max_{x \in \Omega} \left\{ \left| \frac{\partial f^i}{\partial x_j} \right| \right\}\}$

*Доказательство.*  $|\bar{f}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (f^i)^2}$ ,  $\|\bar{f}\|_C = \max_{x \in \Omega} \{|\bar{f}(\bar{x})|\}$

$\Omega$  - компакт, поэтому непрерывность частных производных позволяет говорить о существовании  $K_1$ . Возьмем произвольные точки  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  и соединим их отрезком  $\bar{x} + t(\bar{y} - \bar{x})$ , где  $t \in [0, 1]$ . Рассмотрим значение компоненты  $f^i$  на отрезке:

$$f^i(\bar{x} + t(\bar{y} - \bar{x})) = f^i(t)$$

$f^i(t)$  - дифференцируема, тогда

$$\begin{aligned} |f^i(\bar{y}) - f^i(\bar{x})| &= |f^i(1) - f^i(0)| = \left| \frac{df}{dt}(t^*) \cdot (1 - 0) \right| = \\ &= \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(t^*) \cdot (y^j - x^j) \right| \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(t^*) \right| \cdot |y^j - x^j| \leq K_1 \|\bar{y} - \bar{x}\| \cdot n \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим вектор-функцию

$$\begin{aligned} |\bar{f}(\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x})| &= \sqrt{\sum_{k=1}^n (f^k(\bar{y}) - f^k(\bar{x}))^2} \leq K_1 n^{3/2} \|\bar{y} - \bar{x}\| \\ \Rightarrow \|\bar{f}(\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x})\| &\leq K_1 n^{3/2} \|\bar{y} - \bar{x}\| \end{aligned}$$
■

*Доказательство.* (Основная теорема)

Докажем, что  $A(\bar{x})$  из системы (46) является сжатием.

Рассмотрим  $\Pi = \{\|\bar{x}(t) - \bar{x}_0(t)\| \leq b, |t - t_0| \leq a\} \subset \Omega$ . Определим  $K = \|\bar{f}\|_C = \max_{\Pi} |\bar{f}|$ .  $K_1$  тоже определено в силу условий.

Рассмотрим  $\Pi_h = \{\|\bar{x}(t) - \bar{x}_0(t)\| \leq b, |t - t_0| \leq h \leq a\}$

Банахово пространство  $B$  - множество функций  $\bar{x}(t)$  непрерывных на отрезке  $|t - t_0| \leq h$ .  $M \subset B$  - множество функций  $\|\bar{x}(t) - \bar{x}_0\| \leq b$ .  $M$  ограничено, так как  $\forall \bar{x}(t) \in M \hookrightarrow \|\bar{x}(t)\| = \|\bar{x}(t) - \bar{x}_0 + \bar{x}_0\| \leq b + \|\bar{x}_0\| = C$

Докажем, что  $M$  замкнуто. Пусть  $\bar{x}_n(t), n = 1, 2, \dots$  - последовательность точек в  $M$ , такая что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n(t) = \bar{x}(t)$ .  $\|\bar{x}(t)\| = \|\bar{x}(t) - \bar{x}_n + \bar{x}_n\| \leq \|\bar{x}(t) - \bar{x}_n\| + \|\bar{x}_n\| \leq \varepsilon + b \Rightarrow \bar{x}(t) \in M$   
 Подберем  $h$  так, чтобы  $A : M \rightarrow M$ . То есть  $\|A(\bar{x}) - \bar{x}_0\| \leq b$ .

$$\|A(\bar{x}) - \bar{x}_0\| = \left\| \int_{t_0}^t \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|\bar{f}\| d\tau \right| \leq Kh$$

Получаем условие  $h \leq b/K$

Чтобы доказать, что  $A$  - сжатие, рассмотрим норму

$$\begin{aligned} \|A(\bar{y}) - A(\bar{x})\| &= \left\| \int_{t_0}^t (\bar{f}(\tau, \bar{y}(\tau)) - \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau))) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|\bar{f}(\tau, \bar{y}) - \bar{f}(\tau, \bar{x})\| d\tau \right| \leq K_1 n^{3/2} \|\bar{y} - \bar{x}\| \cdot \left| \int_{t_0}^t d\tau \right| \leq K_1 h n^{3/2} \|\bar{y} - \bar{x}\| \end{aligned}$$

Откуда второе условие:  $h < \frac{1}{n^{3/2} K_1}$

Тогда оператор  $A$  будет сжатием. Соответственно решение задачи Коши существует и единственно. ■

### 2.3. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения $n$ -го порядка в нормальном виде

**Определение 2.17.** Уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \quad (48)$$

называется уравнением  $n$ -го порядка в нормальной форме.

**Определение 2.18.** Система

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad (49)$$

называется начальным условием уравнения  $n$ -го порядка в нормальной форме.

**Утверждение 2.3.** Решить задачу Коши означает найти такое решение (48), которое удовлетворяет условию (49)

**Теорема 2.4** (Теорема Коши о существовании и единственности решения). Если  $f, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$  непрерывны в  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , тогда  $\forall (x_0, \bar{y}_0) \in \Omega \exists h > 0 : \forall x \in [x_0 + h, x_0 - h]$  решение задачи Коши существует и единственно.

*Доказательство.* Введем следующие функции:  $y(x) = v_1(x), y'(x) = v_2(x), \dots, y^{(n-1)}(x) = v_n(x)$ . Таким образом получаем систему уравнений в нормальной форме

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dx} = v_2 \\ \dots \\ \frac{dv_n}{dx} = f(x, \bar{v}) \end{cases} \quad (50)$$

А для нее решение существует и единственно. ■

## 2.4. Теоремы о продолжении решения для нормальной системы дифференциальных уравнений

Теоремы Коши носят существенно локальный характер. Решение и единственность задачи Коши будет существовать на отрезке Пеано. Теперь сделаем отход от единственности и докажем, что  $\vec{\varphi}(t)$  и  $\vec{\psi}(t)$  есть решение задачи Коши, то они будут совпадать на промежутке, где они оба определены (отход от локальности).

**Теорема 2.5.** Пусть  $\vec{\varphi}(t)$  решение (1)  $\wedge$  (2) определено на  $[a, b]$ , а  $\vec{\psi}(t)$  решение (1)  $\wedge$  (2) определено на  $[c, d]$ . Тогда  $\vec{\varphi}(t) \equiv \vec{\psi}(t)$  на  $[r_1, r_2] = [a, b] \cap [c, d]$ .

*Доказательство.* От противного:  $\exists t^* \in [r_1, r_2]$ , где  $\vec{\varphi}(t^*) \neq \vec{\psi}(t^*)$ , тогда  $t^* \neq t_0$  и предположим, что  $t^* > t_0$ . Рассмотрим множество  $N$  точек такое, что  $t \in [r_1, r_2]$  и  $\vec{\varphi}(t) = \vec{\psi}(t)$ .

Покажем, что множество замкнуто:

Рассмотрим сходящуюся последовательность  $t_1 \dots t_n \in N$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \bar{t}$ . Нужно показать, что  $\bar{t} \in N$ :

Рассмотрим  $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{\varphi}(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{\psi}(t_n)$  (равны по выбору множества  $N$ ). И из непрерывности выбранных функций получаем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{\varphi}(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{\psi}(t_n) = \vec{\varphi}(\bar{t}) = \vec{\psi}(\bar{t}) \Rightarrow$  замкнутость.

Из замкнутости и ограниченности мн-ва  $N \Rightarrow \exists \bar{t} = \sup N, \bar{t} \in N$ . Мы пришли к противоречию, а именно  $t^*$  по начальному предположению должна быть точной верхней гранью. ■

**Определение 2.19.**  $\vec{\varphi}(t)$  определена на  $\langle a, b \rangle$  и решение (1)  $\wedge$  (2), если  $\exists \vec{\psi}(t)$  на  $\langle a, b_1 \rangle \supset \langle a, b \rangle$ , и решение (1)  $\wedge$  (2) и  $\vec{\varphi}(t) \equiv \vec{\psi}(t)$  на  $\langle a, b \rangle$ , тогда  $\vec{\varphi}(t)$  называется продолжаемым вправо, а  $\vec{\psi}(t)$  продолжением решения  $\vec{\varphi}(t)$  задачи Коши

**Определение 2.20.** Решение, которое нельзя продолжить ни вправо, ни влево называется непродолжаемым решением

**Примечание.** По сути данная теорема является усилением задачи Коши. Вместо отрезка Пеано мы получили, что решение задачи Коши может быть продолжено на промежутке, где они оба определены.

**Теорема 2.6.** Пусть имеется задача Коши (1)  $\wedge$  (2) и  $\vec{f}(t, \vec{x}), \frac{\partial f^i}{\partial x_j}, i, j = \overline{1, n}$  непрерывны в  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Тогда  $\forall (t_0, \vec{x}_0) \in \Omega \exists!$  непродолжаемое решение задачи (1)  $\wedge$  (2).

*Доказательство.* Рассмотрим множество решений задач Коши (1)  $\wedge$  (2). Каждое решение задачи определено на промежутке  $\langle R_1, R_2 \rangle$ , тогда пусть  $T_1 = \inf R_1, T_2 = \sup R_2$ . Построим решение задачи (1)  $\wedge$  (2) на  $(T_1, T_2)$ :

Выберем  $t^* > t_0$ , тогда  $\exists \vec{\psi}(t)$ , чей промежуток содержит  $t^*$  (в силу выбора промежутка  $(T_1, T_2)$ ). Положим  $\vec{\varphi}(t^*) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\psi}(t^*)$ . Покажем, что так можем сделать, что значение  $\vec{\varphi}(t^*)$  не

зависит от выбора  $\vec{\psi}(t)$ :

Пусть  $\vec{\psi}(t)$  решение задачи Коши (1)  $\wedge$  (2) содержащее  $t^*$ , тогда  $\vec{\psi}(t^*) = \vec{\psi}(t^*)$  из теоремы сущ. и единст. решения задачи Коши (будут совпадать на промежутке, где они определены и при этом  $t^*$  принадлежит этому промежутку).

Построение вниз проводится аналогично. И так,  $\vec{\varphi}(t)$  решение (1)  $\wedge$  (2) на  $T_1 < t < T_2$ . Это решение является продолжением любого из множества решений задачи Коши. Допустим,  $\vec{\varphi}(t)$  решение (1)  $\wedge$  (2) на  $r_1 \leq t \leq r_2$  и  $T_1 \leq r_1 \leq r_2 \leq T_2 \Rightarrow \vec{\varphi}(t) = \vec{\varphi}(t)$  (продолжение решения по доказанной выше теореме).

Покажем, что  $\vec{\psi}(t)$  является непродолжаемым решением (1)  $\wedge$  (2): Допустим, что имеется ещё одно решение  $\vec{\chi}(t)$ , определённое на  $(\gamma_1; \gamma_2)$  и оно является продолжением  $\vec{\varphi}(t)$ . Тогда, либо  $\gamma_1 < T_1$ , либо  $\gamma_2 > T_2$ , что невозможно, т.к.  $T_1 = \inf R_1, T_2 = \sup R_2$  по построению. Покажем, что непродолжаемое решение  $\vec{\varphi}(t)$  является единственным:

От противного, пусть  $\exists \vec{\varphi}(t)$  непродолжаемое решение на  $(T_1, T_2)$  и  $\vec{\psi}(t)$  на  $(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2)$ . Для определённости  $\tilde{T}_1 < T_1$ , тогда рассмотрим такое решение  $\vec{\chi}(t) = \begin{cases} \vec{\psi}(t) & \text{на } (\tilde{T}_1, T_1), \\ \vec{\varphi}(t) & \text{на } (T_1, T_2); \end{cases} \Rightarrow \vec{\varphi}(t)$

– продолжение  $\vec{\psi}(t)$ , противоречие. Аналогично строя остальные решения получаем, что  $\vec{\varphi}(t) = \vec{\psi}(t)$  ■

**Примечание.** В теореме не сказано, как определить  $T_1$  и  $T_2$ . Если усилить условия теоремы, а именно  $\Omega$  есть ограниченная область, то любое непродолжаемое решение выходит на границу этой области.

Из этих утверждений следует, что если под интегральной кривой понимать график непродолжаемого решения, то через каждую точку  $(x_0, y_0) \in \Omega$  проходит только одна кривая.

## 2.5. Непрерывная зависимость от параметров решения задачи Коши для нормальной системы ДУ

Рассматриваем уравнение

$$y = f(x, y, \mu) \quad (51)$$

с задачей Коши  $y(x_0, \mu) = y_0$ , где  $\mu$  – параметр.

**Теорема 2.7.** Пусть  $\mathcal{G}$  – область в пр-ве  $(z, y, \mu)$ . Если ф-ции  $f(x, y, \mu)$ ,  $\frac{\partial f(x, y, \mu)}{\partial y}$  непрерывны в области по совокупности переменных и точка  $(x_0, y_0, \mu_0) \in \mathcal{G}$ , то решение задачи Коши (51  $y(x, \mu)$ ) непрерывно по совокупности переменных  $(x; \mu)$  в некоторой области  $|x - x_0| \leq h, |\mu - \mu_0| \leq \delta$

*Доказательство.* Аналогично доказательство основной теоремы 2.3 сведем задачу Коши к эквивалентной её интегральному уравнению

$$y(x, \mu) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, y(\tau, \mu)) d\tau, \quad (52)$$

или в операторной форме:

$$y(x, \mu) = A(y(x, \mu)), \quad (53)$$

где  $A(y(x, \mu)) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, y(\tau, \mu)) d\tau$ .

Выберем параллелепипед  $\Pi = \{|x - x_0| \leq a, |\mu - \mu_0| \leq \delta, |y - y_0| \leq b\}$ , целиком лежащей

в области  $\mathcal{G}$ . В силу условий теоремы  $\exists K = \max_{\Pi} |f(x, y, \mu)|$ ,  $C = \max_{\Pi} \left| \frac{\partial f(x, y, \mu)}{\partial y} \right|$ .

Применим к (53) принцип сжатых отображений. В качестве  $B$  возьмём пр-во ф-ций  $y(x, \mu)$  непрерывных в прямоугольнике  $\{|x - x_0| \leq h, |\mu - \mu_0| \leq \delta\}$ , где  $h > 0$  будет выбрано с нормой  $\|y(x, \mu)\| = \max_{|x-x_0| \leq h} |y(\mu, x)|$ . В качестве  $M \subset B$  возьмём множество функций из  $B$  таких, что  $\|y(x, \mu) - y_0\|_C \leq b$ .

1) Нужно, чтобы  $A(y(x, \mu)) \in M$ , если  $y(x, \mu) \in M$ .  $\|A(y) - y_0\| = \left\| \int_{x_0}^x f(\tau, y(\tau, \mu)) d\tau \right\| \leq \left| \int_{x_0}^x f(\tau, y(\tau, \mu)) d\tau \right| \leq K \cdot h \Rightarrow$  Необходимо, чтобы  $K \cdot h < b \Rightarrow h = \min \{a, \frac{b}{K}\}$ .

2) Нужно, чтобы  $A_x$  было сжатием, т. е.  $\|A\varphi - A\psi\| \leq k \cdot \|\varphi - \psi\|$ ,  $0 < k < 1$ .

$$\begin{aligned} \|A\varphi - A\psi\| &= \left\| \int_{x_0}^x \left( f(\tau, \varphi(\tau, \mu)) - f(\tau, \psi(\tau, \mu)) \right) \cdot d\tau \right\| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x \|f(\tau, \varphi(\tau, \mu)) - f(\tau, \psi(\tau, \mu))\| \cdot d\tau \right| \leq \\ &\leq (\text{По лемме Адамара}) \leq C \cdot h \cdot 1 \cdot \|\varphi - \psi\| \Rightarrow \end{aligned}$$

Необходимо, чтобы  $C \cdot h < 1 \Rightarrow h < \frac{1}{C}$ . Т. е. при  $\begin{cases} h \leq \min \{a, \frac{b}{Kr}\}, \\ h < \frac{1}{C}. \end{cases}$  оператор  $A$

является сжатием и обладает единственным решением операторного уравнения  $y(x, \mu) = A(y(x, \mu))$ , а значит и задача Коши (51). Причём решение  $y(x, \mu)$  непрерывно по совокупности переменных. ■

## 2.6. Дифференцируемость решения по параметру

Пусть  $y(x, \mu)$  является решением задачи Коши (51). Введем функцию  $z(x, \mu)$ :  $z(x, \mu) = \frac{\partial y(x, \mu)}{\partial \mu}$

**Теорема 2.8.** Если  $f(x, y, \mu)$  как функция трёх переменных в области  $\mathcal{G}$  пр-ва  $(x, y, \mu)$   $p$  раз непрерывно дифференцируема по  $(y, \mu)$  и  $p - 1$  раз непрерывно дифференцируема по  $x$ , тогда решение задачи Коши (51)  $y(x, \mu)$  является  $p$  раз непрерывно дифференцируема по совокупности  $(x, \mu)$ .

*Доказательство.* В 15 лекции от 10.12.20 года лектор сказал, что доказывать не будет. Запись текущего года на ютубе отсутствует. В Федорюке проводится доказательство для  $p = 1$  (см следствие). ■

**Следствие 2.8.1.**  $\frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{\partial}{\partial \mu} \left( f(x, y(x, \mu), \mu) \right) = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial f}{\partial \mu}$

С задачей Коши:  $\frac{\partial z}{\partial \mu}(x_0) = \frac{\partial y_0}{\partial \mu} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial y}{\partial \mu} \right) = \boxed{z'_x = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot z + \frac{\partial f}{\partial \mu}} - \text{уравнение в вариациях для (51)}.$$

**Примечание.** Уравнение в вариациях всегда линейное.

## 2.7. Задача Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Особое решение

Рассматриваем уравнение

$$F(x, y, y') = 0, \quad (54)$$

где  $F(x, y, y')$  как функция трёх переменных является непрерывно дифференцируемой функцией в области  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ .

**Теорема 2.9.** Пусть  $F \in C^1$  в  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$  в точке  $M(x_0, y_0, y'_0) \in \mathcal{D}$  выполнено  $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$  и  $\frac{\partial F(x_0, y_0, y'_0)}{\partial y'} \neq 0$ . Тогда  $\exists h > 0 : \forall x \in [x_0 - h; x_0 + h]$  существует и единственно решение (54), удовлетворяющая условиям

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0. \quad (55)$$

*Доказательство.* Из условий теоремы о неявной функции существует окрестность  $U$  точки  $(x_0, y_0)$ , в которой существует  $f(x, y) \in C_U^1$  такая, что

$$y' = f(x, y). \quad (56)$$

При этом

$$F(x, y, f(x, y)) \equiv 0, f(x_0, y_0) = y'_0. \quad (57)$$

Согласно основной теореме, существует отрезок Пеано, принадлежащий проекции  $U$  на ось абсцисс, на котором существует и единственно решение (56), удовлетворяющее условию  $y(x_0) = y_0$ .

Пусть это решение есть  $y = \varphi(x)$ ,  $y_0 = \varphi(x_0)$ . Тогда  $y' = \varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$ , и из (57) следует, что  $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0$ ,  $\varphi'(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0)) = y'_0 \Rightarrow y = \varphi(x)$  – решение задачи (54)  $\wedge$  (55) ■

**Примечание.** Второе условие в (55) возникает из-за неоднозначности разрешения  $F(x, y, y') = 0$ , относительно  $y'$  в точке  $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ . Так, в ДУ  $(y')^2 = 4x^2 \quad \forall (x, y) : y' = \pm 2x$ . Второе условие (55) определяет одно из условий (фактически выбор ДУ).

На плоскости  $(x; y)$  рассмотрим кривую  $\gamma$ , определяемую системой уравнений, каждое из которых определяет поверхность.

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0. \end{cases} \quad (58)$$

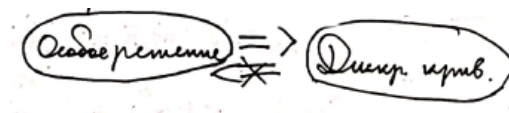
**Определение 2.21.** Кривая (58) называется дискриминантной кривой.

**Примечание.** По определению дискриминантной кривой, в каждой точке нарушается единственность решения (54). В приведённом выше примере дискриминантная кривая есть  $x = 0$  и решение задачи  $y(0) = C$ ,  $y' = 0$  будет иметь четыре решения:

$$y = x^2 + C, y = -x^2 + C, y = \begin{cases} x^2 + C, & x \leq 0 \\ -x^2 + C, & x > 0 \end{cases} \quad y = \begin{cases} -x^2 + C, & x \leq 0 \\ x^2 + C, & x > 0. \end{cases}$$

**Определение 2.22.** Решение ДУ называется особым, если в каждой ему принадлежащей точке его касается другое решение ДУ, отличное от него в любой достаточно малой окрестности этой точки.

**Примечание.** Т. е. особым решением являются ветви дискриминантной кривой, которые являются решением этого уравнения.



### 3. Билет 3. Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

#### 3.1. Вводная часть

##### 3.1.1. Понятие кольца. Рассмотрение понятия многочленов

**Определение 3.1.** Кольцом  $K$  называют множество, на котором определены две операции: сложение и умножение, сопоставляющее упорядоченным парам элементов их "сумму", "произведение", являющимся элементами этого же множества.

Рассмотрим кольцо, в котором действия  $+$  и  $\cdot$  удовлетворяют следующим условиям (первые 6 – определение кольца):

1.  $(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in K$
2.  $a + b = b + a \quad \forall a, b \in K$
3.  $\exists 0 \in K : a + 0 = a \quad \forall a \in K$
4.  $\forall a \in K \exists -a \in K : a + (-a) = 0 \quad \forall a \in K$
5.  $(a + b) \cdot c = ac + bc \quad \forall a, b, c \in K$
6.  $c \cdot (a + b) = ca + cb \quad \forall a, b, c \in K$
7.  $(ab)c = a(bc) \quad \forall a, b, c \in K$
8.  $ab = ba \quad \forall a, b \in K$
9.  $\exists 1 \in K : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in K$
10.  $\exists a^{-1} \in K : a^{-1}a = aa^{-1} = 1 \quad \forall a \in K$

**Утверждение 3.1.** Если  $a + x = a + y$ , то  $x = y$

*Доказательство.*

$$(-a) + (a + x) = (-a) + (a + y) \Rightarrow ((-a) + a) + x = ((-a) + a) + y = 0 + x = x = 0 + y = y$$

Отсюда следует единственность нуля и противоположного элемента:

$$(-a) \neq (-a)'$$

$$0 = a + (-a) = a + (-a)' \Rightarrow (-a) = (-a)'$$

■

**Утверждение 3.2.**  $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \quad \forall a$

*Доказательство.*  $a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0 = a(0 + 0) \Rightarrow a \cdot 0 = 0$ ; аналогично  $0 + 0 \cdot a = 0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a \Rightarrow 0 \cdot a = 0$

■



### Утверждение 3.3. Единица единственна

Доказательство. Пусть  $1 \neq 1' : 1 = 1 \cdot 1' = 1' \cdot 1 = 1'$  ■

- Кольцо называется ассоциативным, если выполнено условие 7; коммутативным, если выполнено 8. Если выполнено условие 9, то говорят о кольце с единицей.
- Ассоциативное кольцо называется областно целостным, если из  $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$
- Полем называется коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, в котором каждый отличный от нуля элемент имеет обратный.

### Утверждение 3.4. Любое поле является областно целостным

Доказательство.  $ab = 0, a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} \cdot (ab) = a^{-1} \cdot 0 = 0 = (a^{-1}a) \cdot b = 1 \cdot b = b \Rightarrow b = 0$  ■

#### 3.1.2. Многочлен

Пусть  $A$  — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Одночленом от  $x$  с коэффициентом из  $A$  называется выражение  $ax^m$ ,  $a \in A$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . По определению положим, что  $ax^0 = a$ . Выражение  $ax^m$  будем рассматривать как символ, для которого выполняется по определению:

$$\begin{aligned} ax^m + bx^m &= (a + b)x^m \\ ax^m \cdot bx^n &= a \cdot bx^{m+n} \end{aligned}$$

Выражение, состоящее из нескольких одночленов, соединенных знаком  $+$  назовем многочленом от  $x$  с коэффициентами из  $A$ . Без нарушения общности, в силу коммутативности сложения запишем в каноническом виде:  $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$

1. Многочлены  $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  и  $Q_m(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$  считаем равными в том и только в том случае, если  $n = m$  и  $a_k = b_k$ ,  $k = \overline{1, n}$
2. Суммой двух многочленов  $P_n(x)$  и  $Q_n(x)$  называется многочлен, получившейся посредством объединения одночленов соответствующих слагаемых:

$$P(x) + Q_m(x) = (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \dots + c_sx^s$$

$$x = \max\{n, m\}$$

$$c_s = a_s + b_s, a_s = 0, \text{ если } s > n \text{ и } b_s = 0, \text{ если } s > m$$

Так определенное сложение многочленов коммутативно и ассоциативно.

Имеется нулевой элемент  $0 = 0 \cdot x + \dots + 0 \cdot x^n$ , а также противоположный  $(-P_n(x)) = (-a_0) + (-a_1)x + \dots + (-a_n)x^n$

3. Произведением двух многочленов называют многочлен, составленный из произведения всех членов первого сомножителя на все члены второго.

$$P_n(x) \cdot Q_m(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots + \left( \sum_{j=k+l} a_kb_l \right) x^j + \dots + a_nb_mx^{n+m}$$

- Покажем, что так определенное умножение будет коммутативно и ассоциативно:

$$P_n(x) \cdot Q_m(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \dots + \left( \sum_{j=k+l} a_kb_l \right) x^j + \dots + a_nb_mx^{n+m}$$

В сумме  $\sum_{j=k+l} a_kb_l$  заменим  $k \leftrightarrow l \Rightarrow \sum_{j=k+l} b_ka_l = \sum_{j=k+l} b_la_k = \sum_{j=k+l} a_lb_k \stackrel{(1)}{\Rightarrow} P_n(x) \cdot Q_m(x) = Q_m(x) \cdot P_n(x) \Rightarrow$  коммутативно.

Пусть  $R_s(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_sx^s \Rightarrow (P_n(x) \cdot Q_m(x)) \cdot R_s(x) = ((a - 0)b_0)c_0 + \left( \sum_{\gamma=j+\sigma} \left( \sum_{j=k+l} a_kb_l \right) c_\sigma \right) x^\gamma + (a_nb_m)c_sx^{n+m+s}$ ,  $j = 1, \dots, n + m + s - 1$ . Так как

$$\sum_{\gamma=j+\sigma} \left( \sum_{j=k+l} a_kb_l \right) c_\sigma = \sum_{\gamma=k+l+\sigma} a_k(b_lc_\sigma).$$

Пусть  $l' = l + \sigma \Rightarrow \sum_{\gamma=k+l+\sigma} a_k(b_lc_\sigma) = \sum_{\gamma=k+l'} a_k \left( \sum_{l'=l+\sigma} b_lc_\sigma \right) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} (P_n(x) \cdot Q_m(x)) R_s(x) = P_n(x) \cdot (Q_m(x) \cdot R_s(x))$  — ассоциативно.

- Дистрибутивность аналогично (везде используются свойства одночленов)

Таким образом так построенное множество многочленов от  $x$  над  $A$  будет ассоциативным и коммутативным кольцом  $A(x)$ . Роль единицы в  $A(x)$  играет единица из  $A$ .

При построении кольца многочленов вместо  $x$  положим  $p = \frac{d}{dx}$  — оператор дифференцирования, который действует на множестве бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций.  $p \cdot f(x) = p(f(x)) = \frac{df}{dx} = f'$ ,  $p^2(f) = f''$ ,  $\dots$ ,  $p^n(x) = f^{(n)}$ ; Справедлива формула  $p^s \cdot p^m(f) = p^s \cdot (p^m(f)) = p^s \cdot (f^{(m)}) = f^{(m+s)} = p^{m+s}(f)$ .

По определению, множество бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций  $\Phi$  является кольцом, содержащим поле  $\mathbb{C}$ . В качестве элементов кольца  $A$  будем брать числа из  $\mathbb{C}$ . Роль операторного одночлена в таком случае будет играть  $ap^m$ ,  $a \in \mathbb{C}$ ;  $ap^m = p^ma$ , так как  $ap^m(f) = af^{(m)} = f^{(m)} \cdot a = p^m(f) \cdot a$ ; По определению положим  $ap^0 = a$ , что корректно, так как  $ap^0f = ap^0(f) = af = a \cdot f = a(f)$ . Приведение подобных слагаемых для одночленов определим как  $ap^m + bp^m = (a + b)p^m$ , поскольку  $(ap^{(m)})(f) + bp^{(m)}(f) = af^{(m)} + bf^{(m)} = (a + b)f^{(m)} = ((a + b)p^m)(f)$ .

Аналогично вводим выражение, состоящее из нескольких операторных одночленов, соединенных знаком  $+$ , называемое операторным многочленом от  $p$  с коэффициентами из  $\mathbb{C}$ . Из свойств дифференцирования следует, что в общем виде можно записать  $L_n(p) = a_0 + a_1p + \dots + a_np^n$

Абсолютно аналогично доказываем, что замена  $x$  на  $p$  дает множество операторных многочленов от  $p$ , которое будет кольцом из  $\mathbb{C}$

- Пусть  $x \in \mathbb{C}$ . Значение многочлена  $P_n(x)$  на  $\mathbb{C}$  определим как число  $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{C}$ .

Понятие значения многочлена можно обобщить на случай, когда  $B$  является ассоциативным кольцом, содержащим кольцо  $A$ , в случае, когда элементы  $A$  коммутируют с элементами из  $B$ .

В таком случае можно определить степень элемента кольца  $B$ . Пусть  $a \in B$ ,  $a^1 = a$ ,  $a^2 = a \cdot a$ ,  $\dots$ ,  $a^n = a^{n-1} \cdot a$

**Теорема 3.1.**  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} \rightarrow a^k \cdot a^m = a^{k+m}$

- Значение операторного многочлена  $L_n(p)$  определим на коммутативном и ассоциативном кольце  $\Phi$  — бесконечно дифференцируемой комплекснозначной функцией от  $x \in \mathbb{R}$ :  $f(x)$

$$L_n(F) = L_n(p)(f) = a_0 f + a_1 f' + \dots + a_n f^{(n)} \in \Phi$$

- Если  $F(p) = L_n(p) + M_m(p)$  определим сумму на множестве дифф. операторов:

$$F(p) = (a_0 + b_0)f + (a_1 + b_1)f' + \dots + c_s f = L_n(p)(f) + M_m(p)(f) \Rightarrow (L_n(p) + M_m(p))(f) = \\ = (M_m(p) + N_m(p))(f)$$

коммутативно, ассоциативность аналогично.

- $(L_n(p)M_m(p))(f) = (a_0 b_0 p^0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)p + \dots + \left(\sum_{j=k+l} a_k b_l\right) p^j + \dots + a_n b_m p^{m+n})(f) = \\ a_0 b_0 f + (a_0 b_1 + a_1 b_0)f' + \dots + \left(\sum_{j=k+l} a_k b_l\right) f^{(j)} + \dots + a_n b_m f^{(n+m)} = (a_0 p^0 + a_1 p + \dots + a_n p^n) \cdot \\ (b_0 f + b_1 f' + \dots + b_m f^{(m)}) = L_n(p) \cdot (M_m(f))$  — определение действия произведения операторов на множестве  $\Phi$ . Так как  $a_0 b_0 f + (a_0 b_1 + a_1 b_0)f' + \dots + \left(\sum_{j=k+l} a_k b_l\right) f^{(j)} + \dots + a_n b_m f^{(m+n)} = M_m(p) \cdot (a_0 f + a_1 f' + \dots + a_n f^{(n)}) \Rightarrow (L_n(p) \cdot M_m(p)) = (M_m(p) \cdot L_n(p))$  — коммутативность.

- Покажем ассоциативность и дистрибутивность

$$L_n(p) \cdot M_m(p) K_s(p)(f) = (L_n(p) \cdot M_m(p))(K_s(p)(f)) = \\ = L_n(p)(M_m(p)(K_s(p)(f))) = L_n(p)(Q_m(p)R_s(p))(f)$$

ассоциативность.

$$(L_n(p) + M_m(p)K_s(p))(f) = L_n(p)(K_s(p)(f)) + M_m(p)(K_s(p)(f)) = \\ = (L_n(p)K_s(p))(f) + (M_m(p)K_s(p))(f)$$

дистрибутивность  $\cdot$  и  $+$ .

Таким образом, множество значений операторных многочленов является кольцом, которое содержится в  $\Phi$ .

- Если для  $P_n(x)$  и  $Q_m(x)$  из  $A(x)$   $\exists R_s(x) \in A(x)$ :  $P_n(x) = Q_m(x) \cdot R_s(x)$ , то говорят, что  $P_n(x)$  делится на  $Q_m(x)$ .

### Теорема 3.2.

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in A(x), c \in A \Rightarrow \exists! Q_m(x), r \in \mathbb{C} : P_n(x) = (x-c)Q_m(x) + r$$

.

**Теорема 3.3.** (Безу)  $P_n(x)$  делится на  $x - c \Leftrightarrow P_n(c) = 0$ .

**Теорема 3.4.** Если кольцо  $A$  является областью целостности, то число корней  $P_n(x)$  не превосходит  $n$ .

**Теорема 3.5. Основная теорема алгебры**

Любой многочлен  $P_n(x)$  над  $\mathbb{C}$  имеет хотя бы один корень.

**Утверждение 3.5.** Из 3 и 5 теоремы

$$\forall P_n(x) \rightarrow P_n(x) = a_n(x - c_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x - c_k)^{l_k} \quad (59)$$

- Взаимнооднозначное соответствие  $\varphi$  кольца  $K$  на кольцо  $K'$  называется изоморфизмом, если  $\forall a \in K$  и  $\forall b \in K' \rightarrow$

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \quad \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \quad (60)$$

Из (60) следует, что образом нуля кольца  $K$  будет нуль  $K'$ :  $\varphi(a) = a' \in K'$  и  $\varphi(0) = c'$ ,  $\varphi(a) = a' = \varphi(a + 0) = \varphi(a) + \varphi(0) = a' + c' \Rightarrow c' = 0$

Если кольцо  $K$  имеет единицу, то  $\varphi(1)$  будет единицей кольца  $K'$ :  $\varphi(a) = a' = \varphi(1 \cdot a) = \varphi(1) \cdot \varphi(a) = \varphi(1)a' \Rightarrow \varphi(1) =$  единица  $K'$ .

- Обратное отображение  $\varphi^{-1}$  кольца  $K'$  на  $K$  существует и будет изоморфно.

Рассмотрим отображение  $\varphi$ , которое множеству значений  $P_n(x)$  над  $\mathbb{C}$  ставит в соответствие множество значений  $L_n(p)$  на множестве бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций  $\Phi$  по принципу:

$$\varphi(P_n(z)) = \varphi(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 z^0) = L_n(p)(f) = a_n f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \dots + a_0 f;$$

Покажем, что отображение является изоморфизмом.

Отображение взаимнооднозначно по построению.

$$\begin{aligned} \varphi(P_n(z) + Q_m(z)) &= \varphi(a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m) = \\ &= \varphi(a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)z + \dots + (a_s + b_s)z^s) = \\ &= (a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)p + \dots + (a_s + b_s)p^s)(f) = L_n(p) + L_m(p)(f) \\ \varphi(P_n(z) \cdot Q_m(z)) &= \varphi(a_0 b_0 + \sum_{j=k+l} a_k b_l z^j + a_n b_m z^{m+n}) = \\ &= (a_0 b_0 + \sum_{j=k+l} a_k b_l p^j + a_n b_m p^{m+n})(f) = L_n(p) \cdot Q_m(p)(f) \end{aligned}$$

Таким образом,  $\varphi$  — изоморфизм. Тогда из (60):

$$\varphi(P_n(x)) = \varphi(a_n(z - c_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (z - c_k)^{l_k}) = L_n(p)(f) = a_n \cdot (p - c_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (p - c_k)^{l_k}(f)$$

В итоге  $L_n(p) = a_n \cdot (p - c_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (p - c_k)^{l_k}$ , где  $c_1, \dots, c_k$  — корни  $P_n(z)$ .

### 3.2. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим ДУ вида:  $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0$ ,  $a_n \neq 0$ , где  $a_i = \text{const} \quad \forall i = \overline{1, n}$ . Через введенный ранее дифференциальный оператор  $L_n(p) = a_n p^n + \dots + a_0 p^0$  уравнение записывается в виде

$$L_n(p)(y(x)) = 0 \quad (2.1)$$

Было доказано, что  $L_n(p)$  является изоморфизмом характеристического многочлена (2.1):  $P_n(\lambda) = a_n \lambda^n + \dots + a_0 = a_n(\lambda - \lambda_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{l_k}$  и поэтому для  $L_n(p)$  справедливо разложение

$$L_n(p) = a_n(p - \lambda_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (p - \lambda_k)^{l_k}, \quad p = \frac{d}{dx} \quad (2.2)$$

Задача: найти ФСР (2.1). Из записи  $L_n(p)$  ясно, что решением(2.1) будут функции из  $\Phi$ , которые являются корнями  $L_n(p)$ .

**Лемма 3.1.** Для любой  $n$  раз дифференцируемой на промежутке функции  $f(x)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  выполняется "формула сдвига"

$$L_n(p)(e^{\lambda x} f) = e^{\lambda x} \cdot L_n(p + \lambda)(f) \quad (2.3)$$

*Доказательство.* Докажем по индукции. База  $n = 1$ :

$$L_1(p)(e^{\lambda x} f) = (a_1 p^1 + a_0)(e^{\lambda x} f) = e^{\lambda x} (a_0 f + a_1 (\lambda f + f')) = e^{\lambda x} (a_1 (p + \lambda) + a_0)(f) = e^{\lambda x} L_1(p + \lambda)(f)$$

Пусть (2.3) справедлива для  $k = n - 1$ , то есть  $L_{n-1}(p)(e^{\lambda x} f) = e^{\lambda x} L_{n-1}(p + \lambda)(f)$

Обозначим  $L_n(p) = p - \lambda_1$ , тогда по формуле (2.2) :

$$L_n(p) = a_n(p - \lambda_1) \cdot (p - \lambda_1)^{l_1-1} \cdot \dots \cdot (p - \lambda_m)^{l_m} \cdot \dots \cdot (p - \lambda_k)^{l_k} = L_1(p) \cdot L_{n-1}(p) = L_{n-1}(p) \cdot L_1(p)$$

$$\text{Тогда } L_n(p)(e^{\lambda x} f) = L_{n-1}(p) \cdot L_1(p)(e^{\lambda x} f(x)) = L_{n-1}(p)(L_1(p)(e^{\lambda x} f)) \underset{\text{база}}{=} L_{n-1}(p)(e^{\lambda x} \cdot (p + \lambda)(f))$$

Обозначим через  $g(x) = L_1(p + \lambda)(f(x))$ , имеем:

$$\begin{aligned} L_n(p)(e^{\lambda x} f) &= L_{n-1}(p)(e^{\lambda x} g(x)) \underset{\text{индукция}}{=} e^{\lambda x} L_{n-1}(p + \lambda)(g) = \\ &= e^{\lambda x} L_{n-1}(p + \lambda)(L_1(p + \lambda)(f)) = e^{\lambda x} (L_{n-1}(p + \lambda) \cdot L_1(p + \lambda))(f) = e^{\lambda x} \cdot L_n(p + \lambda)(f(x)) \end{aligned}$$

■

**Теорема 3.6.** Если  $\lambda_m$  является корнем  $L_n(\lambda)$  кратности  $l_m$ , то функции  $e^{\lambda_m x}, x e^{\lambda_m x}, \dots, x^{l_m-1} e^{\lambda_m x}$  являются решениями (2.2)

*Доказательство.* Из коммутативности и ассоциативности кольца операторных многочленов и формулы (2.3):  $L_n(p) = a_n(p - \lambda_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (p - \lambda_m)^{l_m} \cdot \dots \cdot (p - \lambda_k)^{l_k} = L_{n-l_m}(p)(p - \lambda_m)^{l_m}$

Воспользуемся формулой сдвига для  $x^s e^{\lambda_m x}$  :

$$\begin{aligned} L_n(p)(x^s e^{\lambda_m x}) &= e^{\lambda_m x} \cdot L_{n-l_m}(p + \lambda_m) \cdot p^{l_m}(x^s) = \\ &= e^{\lambda_m x} \cdot L_{n-l_m}(p + \lambda_m)(x^s)^{(l_m)} = \begin{cases} 0, & \forall s \leq l_m - 1 \\ e^{\lambda_m x} \cdot P_{n-l_m}(x), & s \geq l_m \end{cases}, \end{aligned}$$

где  $P_{n-l_m}$  многочлен степени не ниже  $n - l_m$ .

Таким образом  $x^s e_m^\lambda x$ ,  $s = \overline{q, l_m-1}$  являются корнями  $L-n(p)$ , а значит и решениями (2.1)

■

Из доказанной теоремы следует:

$$\left\{ \{e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{l_1-1} e^{\lambda_1 x}\}, \dots, \{e^{\lambda_m x}, \dots, x^{l_m-1} e^{\lambda_m x}\}, \dots, \{e^{\lambda_k x}, \dots, x^{l_k-q} e^{\lambda_k x}\} \right\} \quad (2.4)$$

будут решениями (2.2). Всего таких функций  $n$  штук. Докажем линейную независимость систем функций (2.4).

**Лемма 3.2.** Система  $1, x, \dots, x^m$  линейно независима.

*Доказательство.* Рассмотрим линейную комбинацию функций  $C_0 + C_1 x + \dots + C_n x^n = 0$

От противного: пусть  $\exists C_0, \dots, C_n : \sum_{i=0}^n C_i^2 \neq 0 : C_0 + C_1 x + \dots + C_n x^n = 0 \quad \forall x$

Так как у многочлена степени  $n$  не более чем  $n$  нулей, то получаем противоречие. ■

**Теорема 3.7.** Система функций  $P_{n1}(x)e^{\lambda_1 x}, \dots, P_{ns}(x)e^{\lambda_s x}$ , где  $P_{ni}(x)$  является многочленом степени  $n_i$ , а все  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  разные, является ЛНЗ.

*Доказательство.* Выражение  $P_n(x)e^{\lambda x}$  — квазимногочлен степени  $n$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , коэффициенты  $P_n(x) \in \Phi$ . Рассмотрим  $(P_n(x)e^{\lambda x})' = \lambda \cdot P_n(x)e^{\lambda x} + e^{\lambda x} \overline{P}_{n-1}(x) = e^{\lambda x}(\lambda P_n(x) + \overline{P}_{n-1}(x)) = \tilde{P}_n(e^{\lambda x})$ .

То есть, если будем дифференцировать степень  $n$ , то останемся в множестве квазимногочленов степени  $n$ .

Докажем по индукции. База  $n = 1$  — выполнена по Лемме (3.2). Пусть выполнено для  $n = s-1$ : система из  $s-1$  квазимногочленов является ЛНЗ системой:  $P_{n1}(x)e^{\lambda_1 x}, \dots, P_{n_{s-1}}(x)e^{\lambda_{s-1} x}$  — ЛНЗ.

Для  $n$ . От противного: пусть система  $P_{n1}(x)e^{\lambda_1 x}, \dots, P_{n_{s-1}}(x)e^{\lambda_{s-1} x}, P_{ns}(x)e^{\lambda_s x}$  является линейно зависимой, тогда  $\exists C_1, \dots, C_l, \dots, C_s$ :

$$C_1 P_{n1}(x)e^{\lambda_1 x} + C_2 P_{n2}(x)e^{\lambda_2 x} + \dots + C_l P_{nl}(x)e^{\lambda_l x} + \dots + C_s P_{ns}(x)e^{\lambda_s x} = 0 \quad (2.5)$$

и хотя бы одна константа, например  $C_l \neq 0$ . Из (2.5), перенося  $C_l$  вправо и деля на  $C_l e^{\lambda_l x}$  получаем:

$$\overline{C}_1 P_{n1}(x)e^{\omega_1 x} + \dots + \overline{C}_s P_{ns}(x)e^{\omega_s x} = -P_{nl}(x)$$

где  $\overline{C}_i = \frac{C_i}{C_l e^{\lambda_l x - \lambda_i x}}$ ,  $\omega_i = \lambda_i - \lambda_l$ .

Продифференцируем  $n_{l+1}$  раз последнее тождество. Перенумеровав  $s-1$  слагаемое в левой части получим  $\overline{C}_1 \cdot \tilde{P}_n(x)e^{\omega_1 x} + \dots + \overline{C}_{s-1} \cdot \tilde{P}_{n_{s-1}}(x)e^{\omega_{s-1} x} = 0$ .

По определению индукции последнее равенство возможно, только если все  $\overline{C}_i = 0$ ,  $\overline{C}_i = \frac{C_i}{C_l}$ ;  $C_l \neq 0 \Rightarrow C_i = 0, i = 1, \dots, l-1, l+1, \dots, s \Rightarrow C_l = 0$  — противоречие предположению индукции о линейной независимости системы  $P_{n1}(x)e^{\lambda_1 x}, \dots, P_{n_{s-1}}(x)e^{\lambda_{s-1} x}$ . ■

Таким образом ФСР дифференциального уравнения (2.1) будет состоять из функций набора

$$\left\{ \{e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{l_1-1} e^{\lambda_1 x}\}, \dots, \{e^{\lambda_m x}, \dots, x^{l_m-1} e^{\lambda_m x}\}, \dots, \{e^{\lambda_k x}, \dots, x^{l_k-1} e^{\lambda_k x}\} \right\},$$

где  $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \dots, \lambda_k$  — корни характеристического многочлена  $P_n(\lambda)$  кратности  $l_1, \dots, l_m, \dots, l_k$ .

Общее решение (2.1) будет иметь вид

$$y_0 = e^{\lambda_1 x} \left( \sum_{m=1}^{l_1-1} C_m^1 x^m \right) + \dots + e^{\lambda_k x} \left( \sum_{m=1}^{l_k-1} C_m^k x^m \right) \quad (2.6)$$

Фигурирующие в (2.6) константы  $C_i^j$ , вообще говоря, могут быть комплексными, если корни  $P_n(\lambda)$  являются комплекснозначными. Если изначально ставится задача — найти решение ДУ во множестве действительных функций действительного переменного, то в случае комплексных корней возникает задача выделить из множества комплексных решений действительное. Это осуществимо, так как коэффициенты  $P_n(\lambda)$  являются действительными числами.

Пусть  $\lambda_m = \alpha + \beta i$  — корень характеристического многочлена кратности  $i$ . Ему соответствуют  $\varphi_m^i = x^i e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$ ;  $\varphi_m^i, \overline{\varphi}_m^i$  — ЛНЗ,  $i = \overline{0, l-1}$

Рассмотрим функции

$$\Psi_m^i = \frac{\varphi_m^i + \overline{\varphi}_m^i}{2} = e^{\alpha x} \cdot x^i \cos \beta x = \operatorname{Re}(\varphi_m^i)$$

$$\chi_m^i = \frac{\varphi_m^i - \overline{\varphi}_m^i}{2} = e^{\alpha x} \cdot x^i \sin \beta x = \operatorname{Im}(\varphi_m^i)$$

Так как любая суперпозиция решений (2.2) в силу его линейности тоже является решением, то  $\chi_m^i$  и  $\Psi_m^i$  являются линейно независимыми и действительными решениями (2.2). Таким образом, чтобы получить действительную ФСР, необходимо все  $\varphi_m^i$  и  $\overline{\varphi}_m^i$ ,  $i = \overline{0, l_m}$ ,  $m = \overline{1, k}$ , отвечающих паре комплексных корней характеристического многочлена  $\alpha \pm i\beta$  кратности  $l$ , заменить на вещественные  $\operatorname{Re}(\varphi_m^i)$  и  $(\varphi_m^i)$ . Если считать, что  $\lambda_i = \alpha_i \pm i\beta_i$  — корень  $P_n(\lambda)$  кратности  $l_i$ , то общее решение (2.2) имеет вид:

$$y_0 = e^{\alpha_1 x} \left( \sum_{j=0}^{l_1-1} x^j (A_j^1 \cos \beta_1 x + B_j^1 \sin \beta_1 x) \right) + \dots + e^{\lambda_k x} \left( \sum_{j=0}^{l_k-1} x^j (A_j^k \cos \beta_k x + B_j^k \sin \beta_k x) \right) \quad (2.7)$$

### 3.3. Неоднородные линейные уравнения

Рассмотрим уравнение вида:  $L_n(p)(y(x)) = f(x)$ .

**Лемма 3.3.** Пусть неоднородность имеет вид  $f(x) = \sum_{k=1}^m f_k(x)$  и  $y_k^s(x)$  — частное решение

$$L_n(p)(y(x)) = f_k(x), \quad k = \overline{1, m}, \text{ то есть } L_n(p)(y_k^s(x)) = f_k(x)$$

$$\text{Тогда частное решение уравнения имеет вид } y^s(x) = \sum_{k=1}^m y_k^s(x).$$

$$\text{Доказательство. } L_n(p) \left( \sum_{k=1}^m y_k^s(x) \right) \stackrel{\text{linearL}}{=} \sum_{k=1}^m L_n(p)(y_k^s(x)) = \sum_{k=1}^m f_k(x) = f(x) \quad \blacksquare$$

**Примечание.** Утверждение леммы остается верным и в случае переменных коэффициентов в  $L_n(p)$ .

**Определение 3.2.** Пусть  $f(x) = \sum_{i=1}^n P_{n_i}(x)e^{\lambda x}$ , где  $P_{n_i}$  — многочлен степени  $n_i$  с комплексными коэффициентами,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Тогда  $f(x)$  называется квазимногочленом.

Рассмотрим ДУ:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = L_n(p)(y(x)) = (b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_0) e^{\lambda x} = P_k(x) e^{\lambda x} \quad (1)$$

**Теорема 3.8.** Частное решение (1) можно найти в виде

$$y^s(x) = x^r (C_k x^k + C_{k-1} x^{k-1} + \dots + C_0) e^{\lambda x} \quad (2)$$

где  $r = l_m$ , если  $\lambda = \lambda_m$ ,  $m = \overline{1, s}$  — корень  $P_n(\lambda)$

$r = 0$ , если  $\lambda \neq \lambda_m$ ; Неопределенность константы  $C_k, \dots, C_0$  находятся из системы с треугольной матрицей.

**Доказательство.** •  $\lambda_m = \lambda$

Подставим (2) в (1) и воспользуемся формулой сдвига.

$$y^s(x) x^r (C_k x^k + C_{k-1} x^{k-1} + \dots + C_0) e^{\lambda x}$$

Оператор примет вид:

$$L_n(p)(y^s(x)) = (a_n(p-\lambda_1)^{l_1} \dots (p-\lambda_s)^{l_s})(y^s(x)) = L_{n-l_m}(p) \cdot (p-\lambda_m)^{l_m}(y^s(x)) \stackrel{\text{формула сдвига}}{=} \quad \text{(к оператору)}$$

$$= e^{\lambda_m x} L_{n-l_m}(p + \lambda_m) \frac{d^{l_m}}{dx^{l_m}} (C_k x^{r+k} + C_{k-1} x^{r+k-1} + \dots + C_0 x^r)$$

Уравнение в таком виде имеет вид:

$$e^{\lambda x} L_{n-l_m}(p)(p + \lambda_m) \frac{d^{l_m}}{dx^{l_m}} (C_k x^{r+k} + C_{k-1} x^{r+k-1} + \dots + C_0 x^r) \equiv e^{\lambda_m x} (b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_0)$$

где  $L_{n-l_m}(p + \lambda_m) = a_0(p + \lambda_m)^0 + \dots + a_{n-l_m}(p + \lambda_m)^{n-l_m} = d_0 p^0 + \dots + d_{n-l_m} p^{n-l_m}$

Сократим на  $e^{\lambda_m x}$  и выполним дифференцирование  $\frac{d^{l_m}}{dx^{l_m}}$  с учетом того, что  $r = l_m$

$$\begin{aligned} (d_0 p^0 + \dots + d_{n-l_m} p^{n-l_m}) (A_k C_k x^k + A_{k-1} C_{k-1} x^{k-1} + \dots) = \\ = A_k C_k d_0 x^k + (k A_k C_k d_1 + A_{k-1} C_{k-1} d_0) x^{k-1} + \dots \equiv \\ \equiv b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots \end{aligned}$$

где  $A_k = (k + l_m)(k + l_m - 1) \cdot \dots \cdot (k + 1)$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  и получим систему

$$\text{система с треугольной матрицей} \begin{cases} A_k C_k d_0 = b_k \\ A_{k-1} C_{k-1} d_0 + k A_k C_k d_1 = b_{k-1} \end{cases} \quad (61)$$

- $\lambda \neq \lambda_m$

$$y^s = e^{\lambda x} (C_k x^k + C_{k-1} x^{k-1} + \dots + C_0)$$

После формулы сдвига  $e^{\lambda x} L_n(p + \lambda)(f) \Rightarrow$

$$L_n(p + \lambda_m) = (a_0(p + \lambda_m)^0 + \dots + a_n(p + \lambda_m)^n) = d_0 p^0 + d_1 p + \dots + d_n p^n \Rightarrow$$

уравнение примет вид:

$$\begin{aligned} e^{\lambda x} (d_0 p^0 + d_1 p + \dots + d_n p^n) (C_k x^k + C_{k-1} x^{k-1} + \dots + C_0) \equiv (b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_0) e^{\lambda x} \Rightarrow \\ C_k d_0 x^k + (k C_k d_1 + C_{k-1} d_0) x^{k-1} + \dots \equiv b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots \end{aligned}$$

После приравнивая коэффициентов при одинаковых степенях  $x$ :

$$\text{Система с треугольной матрицей} \begin{cases} C_k d_0 = b_k \\ C_{k-1} d_0 + k C_k d_1 = b_{k-1} \end{cases} \quad (62)$$

■

### 3.4. Уравнение Эйлера

**Примечание.** Источник: В. М. Ипатов, О. А. Пыркова, В. Н. Седов "Дифференциальные уравнения. Методы решений"

**Определение 3.3.** Уравнением Эйлера называется линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами вида  $a_k(x) = b_k x^{n-k}$ ,  $k = \overline{0, n}$ , где  $b_0, b_1, \dots, b_n$  — заданные числа, причем  $b_0 \neq 0$ :

$$b_0 x^n y^{(n)} + b_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} x y' + b_n y = f(x) \quad (3.1)$$



Заменой  $x = e^t$  ( $t = \ln x$ ) (3.1) сводится к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Действительно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt} = e^{-t} \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = e^{-t} \frac{d}{dt} \left( e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) = e^{-2t} \left( \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

Допустим, что  $k$ -я производная имеет вид

$$\frac{d^k y}{dx^k} = e^{-kt} \left( \frac{d^k y}{dt^k} + \alpha_1 \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}} + \dots + \alpha_{k-1} \frac{dy}{dt} \right) = \frac{1}{x^k} \left( \frac{d^k y}{dt^k} + \alpha_1 \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}} + \dots + \alpha_{k-1} \frac{dy}{dt} \right)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$  — постоянные. Тогда  $(k+1)$ -я производная будет равна

$$\frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^k y}{dx^k} \right) = e^{-t} \frac{d}{dt} \left( \frac{d^k y}{dx^k} \right) = e^{-(k+1)t} \left( \frac{d^{k+1} y}{dt^{k+1}} + (\alpha_1 - k) \frac{d^k y}{dt^k} + \dots + k \alpha_{k-1} \frac{dy}{dt} \right) = \quad (63)$$

$$= \frac{1}{x^{k+1}} \left( \frac{d^{k+1} y}{dt^{k+1}} + (\alpha_1 - k) \frac{d^k y}{dt^k} + \dots + k \alpha_{k-1} \frac{dy}{dt} \right) \quad (64)$$

Так как в преобразованном уравнении, в случае отсутствия кратных корней характеристического уравнения, решения имеют вид  $y = e^{\lambda t}$ , следовательно, в исходном уравнении они имеют вид  $y = x^\lambda$ . Поэтому можно непосредственно подставить его в уравнение Эйлера (3.1). Поскольку  $x^k \frac{d^k x^\lambda}{dx^k} = \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-k+1)$  при  $k \leq \lambda$ , то характеристическое уравнение имеет вид

$$b_0 \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-n+1) + \dots + b_{n-1} \lambda(\lambda-1) + b_{n-1} \lambda + b_n = 1 \quad (3.2)$$

Каждому простому корню  $\lambda$  уравнения (3.2) соответствует частное решение однородного уравнения Эйлера  $x^\lambda$ ; каждому действительному корню  $\lambda$  кратности  $l$  ( $l \geq 2$ ) соответствует  $l$  линейно независимых частных решений однородного уравнения Эйлера  $x^\lambda, x^\lambda \ln x, \dots, x^\lambda (\ln x)^{l-1}$ . В случае не вещественных корней  $\lambda$  надо учитывать, что  $x^{i\beta} = e^{i\beta \ln x}$ , таким образом паре комплексно сопряженных корней  $\alpha \pm i\beta$  уравнения (3.2) будут соответствовать два решения однородного уравнения Эйлера  $x^\alpha \cos(\beta \ln x)$  и  $x^\alpha \sin(\beta \ln x)$ .

### 3.5. Матричная экспонента, ее свойства и применение к решению нормальных линейных систем

#### 3.5.1. Матричная экспонента

Необходимо решить ОЛДУ вида:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \quad (65)$$

Если  $A(t) = \|a_{ij}^i\|$ ,  $a_{ij}^i \in \mathbf{R}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , тогда:

$$\begin{aligned} \vec{x}_0 &= E\vec{x}_0, \quad \vec{x}_1 = E\vec{x}_0 + \frac{t-t_0}{1!} A\vec{x}_0 = \left( E + \frac{t-t_0}{1!} A \right) \vec{x}_0, \\ \vec{x}_n &= \left( E + \frac{t-t_0}{1!} A + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!} A^n \right) \vec{x}_0, \end{aligned}$$

Этот процесс будет сходиться к задаче Коши с решением:

$$\vec{x} = \left( E + \frac{t-t_0}{1!} A + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!} A^n + \dots \right) \vec{x}_0 = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} A^n \right) \vec{x}_0,$$

при условии, что  $A^0 = E$ .

**Определение 3.4.** Матричной экспонентой называют следующий степенной ряд:

$$e^{(t-t_0)A} = E + \frac{t-t_0}{1!}A + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n.$$

### 3.5.2. Свойства матричной экспоненты

Это квадратная матрица, по размерам аналогична матрице  $A$ , и каждый элемент этой матрицы представляет из себя степенной ряд с радиусом сходимости  $+\infty$ .

1. Решение задачи Коши для (65), если  $A = \text{const}$ :

$$\vec{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{x}_0, \quad (\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0).$$

$$2. e^{0A} = E.$$

$$3. e^{(t_1+t_2)A} = e^{t_1A}e^{t_2A} \Rightarrow e^{t_1A}e^{t_2A} = e^{t_2A}e^{t_1A} \text{ (коммутативность)}.$$

$$4. (e^{tA})^{-1} = e^{-tA}.$$

$$5. (e^{tA})' = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

*Доказательство.* Так как квадратные матрицы составляют определенное кольцо, то  $A^{n+m} = A^nA^m = A^mA^n$ .

1.

$$2. e^{tA} = E + \frac{t-t_0}{1!}A + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}A^n + \dots, \text{ если } t = 0 :$$

$$e^{0A} = E + 0 + \dots = E$$

3. рассматриваем (65), если  $\vec{x}(t)$  - решение этого ДУ, то  $\vec{x}(t+t_0)$  тоже решение этого ДУ  $\forall t_0 \in \mathbf{R}$ . ( $u = t+t_0$ ) :

$$\frac{d\vec{x}(t+t_0)}{dt} = \frac{d\vec{x}}{du} \frac{du}{dt} = \frac{d\vec{x}}{du} = A\vec{x}(u) = A\vec{x}(t+t_0).$$

Тогда (65), с задачей Коши  $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$  имеет решение:

$$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x}_0,$$

$$\vec{x}(t+t_0) = e^{(t+t_0)A}\vec{x}_0 - \text{решение } \frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}.$$

Рассмотрим тогда тоже самое уравнение для функции  $z(t)$ :

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = A\vec{z}, \text{ с задачей Коши } \vec{z}(0) = e^{t_0A}\vec{x}_0 \Rightarrow \vec{z}(t) = e^{tA}(e^{t_0A}\vec{x}_0) = (e^{tA}e^{t_0A})\vec{x}_0.$$

Рассмотрим это решение в нуле:

$$\vec{x}(0+t_0) = e^{t_0A}\vec{x}_0,$$

из основной теоремы следует, что  $\vec{x}(t+t_0) = \vec{z}(t) \forall t$ .

Тогда и получается основная формула:

$$\vec{x}(t+t_0) = e^{(t+t_0)A}\vec{x}_0 = (e^{tA}e^{t_0A})\vec{x}_0$$

$$4. E = e^{0A} = e^{(t-t)A} = e^{tA}e^{-tA} = E \Rightarrow (e^{tA})^{-1} = e^{-tA}.$$

5. Берем представление матричной экспоненты в виде степенного ряда, который можно дифференцировать, тогда получаем:

$$(e^{tA})' = A + tA^2 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n + \dots = A \left( E + tA + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1} \right),$$

$$(e^{tA})' = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

■

**Примечание.** Формула  $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$  не имеет места, кроме случая, если  $AB = BA$  (т.е. матрицы коммутативны).

### 3.5.3. Применение к решению нормальных линейных систем

**Теорема 3.9.** Пусть  $S$  - матрица перехода от исходного базиса к новому базису. Тогда в новой базисе  $\bar{A} = S^{-1}AS$ , или  $A = S\bar{A}S^{-1}$ . И главное:

$$e^{tA} = S^{-1}e^{t\bar{A}}S.$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \left( E + tA + \dots + \frac{t^n}{n!}A^n \right) = \left( E + tS^{-1}e^{t\bar{A}}S + \dots + \frac{t^n}{n!}(S^{-1}e^{t\bar{A}}S)^n \right), \\ (S\bar{A}S^{-1})^n &= S\bar{A}^nS^{-1}, SES^{-1} = SS^{-1} = E \\ e^{tA} &= S^{-1}e^{t\bar{A}}S. \end{aligned}$$

■

Для решения нормальных линейных систем методом матричной экспоненты мы будем находить собственные вектора.

Матрица  $A$  в базисе из собственных векторов (если они соответствуют действительным собственным значениям) будет иметь диагональный вид. Произведение диагональной матрицы на диагональную – диагональная. Тогда для случая без кратных корней:

$$e^{tA} = E + t \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + \frac{t^2}{2!} \cdot \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2).$$

$$e^{tA} = \text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}).$$

Если  $\lambda$  – корень кратности  $l$ , то матрица  $A$  приводится к Жордановой клетке (диагональная матрица с единицами над главной диагональю).

$$A = \lambda E + B \Rightarrow B = A - \lambda E.$$

$$e^{tA} = e^{t(\lambda E + B)} = e^{t\lambda E}e^{tB}, e^{t\lambda E} = \text{diag}(e^{t\lambda}, \dots, e^{t\lambda}), e^{tB} = E + tB + \dots + \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}B^{l-1} + 0$$

$$\text{тогда } e^{tA} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} \\ & & \dots & & \\ 0 & & \dots & & 1 \end{pmatrix}$$

**Метод решения линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами** (матричный метод вариации постоянной)

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}(t), \quad \text{решение будем искать в виде } \vec{x}(t) = e^{tA}\vec{C}(t),$$

$$\text{тогда } Ae^{tA}\vec{C}(t) + e^{tA}\dot{\vec{C}}(t) = Ae^{tA}\vec{C} + \vec{f}(t),$$

$$e^{tA}\dot{\vec{C}}(t) = \vec{f}(t) \Rightarrow \dot{\vec{C}}(t) = (e^{tA})^{-1}\vec{f}(t) = e^{-tA}\vec{f}(t).$$

## 4. Билет 4. Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

### 4.1. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной линейной системы уравнений и для линейного уравнения $n$ -го порядка в нормальном виде

Рассматривается система вида

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{q}(t), \quad (66)$$

где  $A = \|a_{ij}^i(t)\|$ ,  $i, j = 1, \vec{n}$  – матрица,  $\vec{q}(t)$  – заданная вектор-функция. Наряду с векторной записью также будем использовать координатную запись  $x^i = \sum_{j=1}^n a_{ij}^i x^j + q^i(t)$ ,  $i = 1, \vec{n}$ .

**Необходимым условием линейности** является факт того, что все  $A_{ij}^i$  и  $q^i$  зависят только от  $t$  и не зависят от  $\vec{x}$ .

Для (66) ставится задача Коши:

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0.$$

**Теорема 4.1. Основная теорема для линейных систем.** Пусть  $a_{ij}^i(t)$ ,  $i, j = 1, \vec{n}$  и  $\vec{q}(t)$  в (66) непрерывны на отрезке  $[a; b]$ . Тогда решение задачи Коши существует и единственно на всем отрезке  $[a; b]$ .

#### Предварительные замечания:

Пусть вектор-функция  $\vec{f}(x) \in B$  и  $A$  – линейный оператор, действующий из  $B$  в  $B$ , т.е.  $A(\vec{f} + \vec{g}) = A\vec{f} + A\vec{g}$ .

**Определим норму оператора:**

$$\|A\| = \sup_{\vec{\varphi} \in B, \vec{\varphi} \neq \vec{0}} \frac{\|A(\vec{\varphi})\|}{\|\vec{\varphi}\|}.$$

Тогда получаем неравенство:  $\|A\|$

$\leq \|A\| \|\vec{\varphi}\|$ .

Нормой для вектор-функции выберем  $\|\vec{x}(t)\| = \max_{1 \leq i \leq n} (\max_{t \in [a; b]} x^i(t))$ , а нормой для опера-

тора  $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} (\max_{t \in [a; b]} \sum_{j=1}^n |a_{ij}^i(t)|)$

*Доказательство.* Определим  $\vec{g}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t \vec{q}(S) dS$  и построим итерационную процедуру.

Т.к.  $q^i(t) \in C_{[a; b]} \forall i = 1, \vec{n} \Rightarrow \exists \|\vec{q}\|_c = M_1$ . Тогда  $\|\vec{g}\|_c = \|\vec{x}_0 + \int_{t_0}^t \vec{q}(S) dS\| \leq \|\vec{x}_0\| +$

$\|\int_{t_0}^t \vec{q}(S) dS\| \leq \|\vec{x}_0\| + M_1(b - a) = C$ .

Рассмотрим интегральное уравнение  $\vec{x} = \vec{g} + \int_{t_0}^t A(s)\vec{x}(s)ds$ .

Аналогично основной лемме доказывается, что последнее интегральное уравнение эквивалентно задаче (66).

Итерационная процедура:  $\vec{x}_0 = \vec{g}$ ;  $\vec{x}_k = \vec{g} + \int_{t_0}^t A(s)x_{k-1}(s)ds$ ,  $k = 0, 1, \dots$

Оценим норму:

$$\|\vec{x}_1 - \vec{x}_0\| = \left\| \int_{t_0}^t A(s)\vec{g}(s)ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)\vec{g}(s)\|ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)\| \cdot \|\vec{g}(s)\|ds \right| \leq C_1 C |t - t_0|;$$

Таким образом  $\|\vec{x}_1 - \vec{x}_0\| \leq C_1 C |t - t_0|$ .

Теперь докажем по индукции неравенство:  $\|\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}\| \leq \frac{C C_1^k}{k!} |t - t_0|^k$ .

Базой индукции выступает полученное выше неравенство. Предположим, что верно для  $n = k$ , т.е.:  $\|\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}\| \leq \frac{C C_1^k}{k!} |t - t_0|^k$ .

Докажем для

$$\begin{aligned} n = k + 1 : \|\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k\| &= \left\| \int_{t_0}^t A(s)(\vec{x}_k(s) - \vec{x}_{k-1}(s))ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)(\vec{x}_k(s) - \vec{x}_{k-1}(s))\|ds \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)\| \cdot \|(\vec{x}_k(s) - \vec{x}_{k-1}(s))\|ds \right| \leq C \left| \int_{t_0}^t \frac{C_1 C^k |s - t_0|^k}{k!} ds \right| = \frac{C^{k+1} C_1 |t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

Т.к.  $|t - t_0| \leq (b - a)$ , то предыдущее неравенство можно усилить  $\|\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}\| \leq \frac{C_1 C^k}{k!} (b - a)^k$ .

Функциональная последовательность  $\vec{x}_k$  сходится равномерно, т.к. сходится равномерно ряд  $\vec{x}_0 + (\vec{x}_1 - \vec{x}_0) + \dots + (\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}) + \dots$ , который межорируется сходящимся рядом  $\|\vec{x}_0\| + \|(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)\| + \dots + \|(\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1})\| + \dots \leq \|\vec{x}_0\| + C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C^k |b-a|^k}{k!} = \|\vec{x}_0\| + C_1 e^{C(b-a)} < \infty \Rightarrow$

Существует (в силу банаховости пр-ва) непрерывно дифф.  $\varphi(t) : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n = \varphi(t)$ .

Рассмотрим  $\left\| \int_{t_0}^t A \vec{x}_n dS - \int_{t_0}^t A \vec{\varphi} dS \right\| = \left\| \int_{t_0}^t A(\vec{x}_n - \vec{\varphi}) dS \right\| \leq \|A\| \cdot \left| \int_{t_0}^t \|\vec{x}_n - \vec{\varphi}\| dS \right|$ , где  $\|\vec{x}_n - \vec{\varphi}\| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ .

Т.о. итерационная процедура сходится в силу существования пределов слева и справа.

Полученное решение эквивалентно решению задачи (66). В отличие от основной теоремы для нормальных систем ДУ:  $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t, \vec{x})$ , где существование было получено только на отрезке Пеано, для СЛДУ существование решения доказано для всего отрезка  $[a; b]$  – промежутка, где  $a_j^i(t)$  и  $\vec{q}(t)$  непрерывны. В нашем случае  $\vec{f}$  соответствует  $\vec{f} = A\vec{x} + \vec{q}$ . Она непрерывна, т.к. полученное решение  $\vec{x}(t)$  непрерывно. Условие непрерывности  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  также выполнены, т.к. в нашем случае  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_{ij}(t)$  – непр. на  $[a; b]$ . Отсюда следует единственность, т.к. два решения задачи (66), согласно основной теореме для нормальных систем, совпадают на промежутке, где они оба определены. В нашем случае это  $[a; b]$ .

Т.о. теорема не носит локальных характер.

■

## 4.2. Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы

Будем рассматривать однородную систему ДУ вида:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}; \quad \dot{x}^i = \sum_{k=1}^n a_k^i x^k; \quad i, k = \overline{1, n} \quad (67)$$

**Утверждение 4.1.** Для однородных систем линейных уравнений верен принцип суперпозиций, т.е. если система функций  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  – решение системы уравнений, то любая их линейная комбинация тоже является решением.

*Доказательство.* Введем оператор  $L$  такой, что  $L = \frac{d}{dt} - A$ . Тогда однородная система ДУ  $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$  запишется в виде  $L(\vec{x}) = 0$ , неоднородная система ДУ  $\frac{d\vec{x}}{dt} - A\vec{x} = q(t)$  запишется в виде  $L(\vec{x}) = q(t)$ .

Пусть вектор-функции  $\vec{\varphi}(t)$  и  $\vec{\psi}(t)$  являются решениями системы  $L(\vec{x}) = 0$ , в таком случае справедливо

$$L(\vec{\varphi}(t)) = 0; \quad L(\vec{\psi}(t)) = 0$$

Рассмотрим вектор-функцию  $\vec{\chi}(t) = a\vec{\varphi}(t) + b\vec{\psi}(t)$ , где  $a$  и  $b$  – произвольные коэффициенты. Применим оператор  $L$  к получившейся вектор-функции:

$$\begin{aligned} L(\vec{\chi}(t)) &= \frac{d}{dt} (a\vec{\varphi}(t) + b\vec{\psi}(t)) - A(a\vec{\varphi}(t) + b\vec{\psi}(t)) = \\ &= a \left( \frac{d}{dt} \vec{\varphi}(t) - A\vec{\varphi}(t) \right) + b \left( \frac{d}{dt} \vec{\psi}(t) - A\vec{\psi}(t) \right) = \\ &= aL(\vec{\varphi}(t)) + bL(\vec{\psi}(t)) = 0 \end{aligned}$$

■

**Определение 4.1.** Пусть имеется система вектор-функций  $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$

$$\vec{\varphi}_i(t) = \begin{pmatrix} \varphi_i^1(t) \\ \dots \\ \varphi_i^n(t) \end{pmatrix} \quad (68)$$

непрерывна на  $I(x)$ , тогда такая система называется линейно-зависимой на  $I$ , если

$$\exists C_1, \dots, C_n : \sum_{i=1}^n |C_i| \neq 0 \ \& \ \sum_{i=1}^n C_i \vec{\varphi}_i(t) = 0 \ \forall t \in I$$

В противном случае, система вектор-функций называется линейно-независимой, то есть условие

$$\sum_{i=1}^n C_i \vec{\varphi}_i(t) = 0 \ \forall t \in I$$

выполняется только при  $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$ .

**Определение 4.2.** Пусть система вектор-функций  $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$  линейно-независима на  $I$  и каждая вектор-функция  $\vec{\varphi}_i(t)$  является решением системы ДУ  $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ . Тогда такая система вектор-функций называется фундаментальной системой решений (ФСР) данной системы ДУ.

**Теорема 4.2.** Рассмотрим систему ДУ  $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ . Если матрица  $A$  является непрерывной на отрезке  $[a, b]$ , то система имеет ФСР на этом отрезке.

*Доказательство.* матрица  $A$  является непрерывной на отрезке  $[a, b]$ , тогда, согласно основной теореме, на отрезке  $[a, b]$  существует единственное решение задачи Коши.

Пусть система функций  $\vec{\varphi}_1(t), \vec{\varphi}_2(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$  является решением системы при следующих заданных условиях:

$$\vec{\varphi}_1(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\varphi}_2(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{\varphi}_n(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (69)$$

тогда вронскиан такой системы в точке  $t_0$ :

$$W(t_0) = |\vec{\varphi}_1(t_0), \vec{\varphi}_2(t_0), \dots, \vec{\varphi}_n(t_0)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad (70)$$

тогда, из свойства вронскиана следует, что данная система функций является линейно-независимой, а так как каждая функция является решением системы ДУ, эта система вектор-функций и есть ФСР системы ДУ. ■

**Теорема 4.3.** Пусть система вектор-функций  $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$  является ФСР системы ДУ, тогда любое решение этой системы ДУ можно представить, как линейную комбинацию компонентов ФСР:  $\vec{x}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$ , где  $C_1, \dots, C_n$  – произвольные постоянные.

*Доказательство.* Так как для системы ДУ справедлив принцип суперпозиции, то вектор-функция  $\vec{x}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$ .

Предположим теперь, что существует функция  $\vec{\chi}(t)$  такая, что она является решением системы ДУ, но не представима в виде  $C_1\vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$ . Пусть значение этой функции в точке  $t_0$ :

$$\vec{\chi}(t_0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_1(t_0) \\ \chi_2(t_0) \\ \dots \\ \chi_n(t_0) \end{pmatrix} \quad (71)$$

Теперь составим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} C_1\varphi_1^1(t_0) + C_2\varphi_2^1(t_0) + \dots + C_n\varphi_n^1(t_0) = \alpha_1 \\ C_1\varphi_1^2(t_0) + C_2\varphi_2^2(t_0) + \dots + C_n\varphi_n^2(t_0) = \alpha_2 \\ \dots \\ C_1\varphi_1^n(t_0) + C_2\varphi_2^n(t_0) + \dots + C_n\varphi_n^n(t_0) = \alpha_n \end{cases} \quad (72)$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  – являются неизвестными, который надо найти. Определителем этой системы является

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} \varphi_1^1(t_0) & \varphi_2^1(t_0) & \dots & \varphi_n^1(t_0) \\ \varphi_1^2(t_0) & \varphi_2^2(t_0) & \dots & \varphi_n^2(t_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^n(t_0) & \varphi_2^n(t_0) & \dots & \varphi_n^n(t_0) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (73)$$



данный определитель не равен 0, поскольку функции  $\vec{\varphi}_i$   $i = 1, \dots, n$  являются ФСР системы ДУ, поэтому числа  $C_1, C_2, \dots, C_n$  определяются однозначно.

С этими числами рассмотрим решение исходной системы ДУ, назовем его  $\vec{z}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$ . Поскольку  $\vec{\chi}(t)$  и  $\vec{z}(t)$  – являются решениями системы ДУ, по принципу суперпозиции функция  $\vec{\psi}(t) = \vec{z}(t) - \vec{\chi}(t)$  так же является решением этой системы ДУ.

Заметим, что значение этой функции в точке  $t_0$ :  $\vec{\psi}(t_0) = \vec{z}(t_0) - \vec{\chi}(t_0) = 0$ , заметим так же, что  $\vec{0}$  является решением однородной системы системы  $\frac{d}{dt}\vec{x} - A\vec{x}$ . Тогда, в силу теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши, выполняется:

$$\begin{aligned}\vec{\psi}(t) &= 0 \quad \forall t \in I \Rightarrow \\ \vec{\psi}(t) &= \vec{z}(t) - \vec{\chi}(t) \equiv 0 \quad \forall t \in I \Rightarrow \\ \vec{z}(t) &= \vec{\chi}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + C_2\vec{\varphi}_2(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t)\end{aligned}$$

Мы получили противоречие с предположением о невозможности линейного представления решения  $\vec{\chi}(t)$  через функции ФСР, таким образом, мы доказали, что любое решение системы ДУ можно представить, как линейную комбинацию компонентов ФСР. ■

**Определение 4.3.** *Решение системы ДУ вида  $\vec{x}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n\vec{\varphi}_n(t)$ , где  $C_1, \dots, C_n$  называется общим решением системы ДУ.*

### 4.3. Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем

Введем оператор  $L$  такой, что  $L = \frac{d}{dt} - A$ . Тогда однородная система ДУ  $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$  запишется в виде  $L(\vec{x}) = 0$ , неоднородная система ДУ  $\frac{d\vec{x}}{dt} - A\vec{x} = q(t)$  запишется в виде  $L(\vec{x}) = q(t)$ .

**Утверждение 4.2.** *Общее решение неоднородной системы ДУ  $\frac{d\vec{x}}{dt} - A\vec{x} = q(t)$  представляет собой следующее выражение:*

$$\vec{x} = \vec{x}^s + \vec{x}_0^{ob} \quad (74)$$

где  $\vec{x}^s$  – частное решение линейного неоднородного уравнения, т. е.  $L(\vec{x}^s) = q(t)$ , а  $\vec{x}_0^{ob}$  – общее решение системы линейных **однородных** уравнений  $L(\vec{x}_0^{ob}) = 0$ . Таким образом, получаем:

$$L(\vec{x}) = L(\vec{x}^s + \vec{x}_0^{ob}) = L(\vec{x}^s) + L(\vec{x}_0^{ob}) = q(t) + 0$$

### 4.4. Определитель Вронского и его свойства

#### 4.4.1. Определитель Вронского

**Определение 4.4.** *Пусть на  $I$  определена система вектор-функций  $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$ , тогда определитель*

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1^1(t) & \dots & \varphi_n^1(t) \\ \dots & & \dots \\ \varphi_1^n(t) & \dots & \varphi_n^n(t) \end{vmatrix} \quad (75)$$

называется определителем Вронского, где

$$\vec{\varphi}_i = \begin{pmatrix} \varphi_i^1 \\ \dots \\ \varphi_i^n \end{pmatrix} \quad (76)$$

другими словами

$$W(t) = |\vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_n| \quad (77)$$

**Теорема 4.4.** Если  $\exists t_0 \in I : W(t_0) \neq 0$ , то система является линейно независимой на  $I$ . Обратное неверно, пример:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ЛНЗ, но } W(t) = 0 \quad (78)$$

*Доказательство.* Будем доказывать от противного: пусть система является линейно-зависимой, тогда  $\exists C_1, \dots, C_n : C_1 \vec{\varphi}_1(t) + \dots + C_n \vec{\varphi}_n(t) = 0 \forall t \in I$ . Тогда в определителе Вронского  $W(t)$  есть хотя бы два линейно-зависимых столбца, так как  $\vec{\varphi}_i(t)$  являются столбцами определителя, но тогда получаем, что  $W(t) = 0 \forall t \in I$  (хотя предполагалось, что  $\exists t_0 \in I : W(t_0) \neq 0$ ). Таким образом, мы получили противоречие, откуда следует, что система является линейно независимой на  $I$ . ■

#### 4.4.2. Свойства Вронскиана

1. Если  $\exists t_0 \in I : W(t_0) \neq 0$ , то система является линейно независимой на  $I$  (см. доказательство теоремы).
2. Пусть вектор-функции  $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$  являются решениями системы ДУ, и существует точка  $t_0 \in I : W(t_0) = 0$ , тогда система  $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$  является линейно-зависимой.

*Доказательство.* Поскольку  $W(t_0) = 0$  столбцы этой матрицы являются линейно-зависимыми, то есть

$$\exists C_1, C_2, \dots, C_n : \sum_{i=1}^n C_i^2 \neq 0 \text{ \& } \sum_{i=1}^n C_i \vec{\varphi}_i(t_0) = 0$$

Используя данные коэффициенты, построим функцию  $\vec{x}(t) = C_i \vec{\varphi}_i(t)$ . Заметим, что во-первых  $\vec{x}(t_0) = 0$ , а во-вторых данная функция является решением системы ДУ в силу теоремы о суперпозиции. Тогда, в силу теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши выполняется:  $\vec{x}(t) = C_i \vec{\varphi}_i(t) = 0 \forall t \in I$ , что означает, что система  $\vec{\varphi}_i$  является линейнозависимой. ■

### 4.5. Фундаментальная система решений и общее решение нормальной линейной однородной системы уравнений

Рассмотрим систему вида

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{f}, \quad (79)$$

где  $A = \|a_j^i\|$ ,  $i, j = \overline{1, n}$  - матрица системы, причём  $a_j^i$  - числа;  $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f^1(t) \\ \dots \\ f^n(t) \end{pmatrix}$  - вектор-

столбец неоднородной системы;  $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ \dots \\ x^n(t) \end{pmatrix}$  - вектор-столбец искомых функций.

Наряду с вышеприведённой записью также будем рассматривать запись вида:

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_j^i x^j(t) + f^i, \quad i = \overline{1, n}$$

Основная идея решения систем дифференциальных уравнений вида (79), состоит в том, что матрица системы рассматривается как матрица линейного преобразования линейного пространства  $\vec{\mathbb{R}}^n$  (пространство, присоединённое к аффинному  $\mathbb{R}^n$ ), заданная в исходном базисе.

Пусть  $S = \|\sigma_j^i\|$ ,  $i, j = \overline{1, n}$  - матрица перехода от исходного базиса  $\|\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\|$  к базису. Эти соотношения связаны выражением  $\|\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\| = \|\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\| \cdot S$  или  $\vec{e}_i = \sum_{k=1}^n \sigma_i^k \vec{e}_k$ , а координаты векторов в новом и старом базисе связаны формулой  $\vec{x} = S\vec{x}'$  или  $x^i = \sum_{m=1}^n \sigma_m^i x'^m$ .

Матрица перехода  $S$  обратима, поэтому  $\exists S^{-1} = \|\tau_j^i\|$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , причём  $SS^{-1} = S^{-1}S = E$ , т.е.  $\sum_{k=1}^n \tau_k^i \sigma_j^k = \delta_j^i$ . Тогда  $\vec{x}' = S^{-1}\vec{x}$ . Преобразуем исходную систему, умножив её справа на  $S^{-1}$ .

$$S^{-1} \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(S^{-1}\vec{x}) = S^{-1}A\vec{x} + S^{-1}\vec{f}$$

Подставив  $\vec{x} = S\vec{x}'$ , получим  $\frac{d\vec{x}'}{dt} = \bar{A}\vec{x}' + \bar{\vec{f}}$ , где  $\bar{\vec{f}}(t) = S^{-1}\vec{f}(t)$ , а  $\bar{A} = S^{-1}AS$  является матрицей преобразования  $A$  в новом базисе. Уравнение имеет **ковариантный вид**, поэтому задачи свелись к нахождению базиса, в котором система имела бы наиболее простой вид.

Пусть  $A$  - матрица системы (79) является матрицей линейного преобразования линейного пространства  $\vec{\mathbb{R}}^n$ , т.е.  $\forall \vec{x} \in \vec{\mathbb{R}}^n \mapsto A\vec{x} = \vec{y} \in \vec{\mathbb{R}}^n$ , тогда  $A = \|A\vec{e}_1, \dots, A\vec{e}_n\|$ , т.е. столбцы матрицы  $A$  являются компонентами образов базисных векторов.

**Определение 4.5.** Подпространство  $L \subset \vec{\mathbb{R}}^n$  называется **инвариантным подпространством** относительно преобразования  $A$ , если  $\forall \vec{x} \in L \mapsto A\vec{x} \in L$ .

Пусть  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_s, \vec{e}_{s+1}, \dots, \vec{e}_n$  - базис в  $\vec{\mathbb{R}}^n$ , а  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_s$  - базис в  $L$ .

Тогда  $\forall i = \overline{1, s} \mapsto A\vec{e}_i = \sum_{k=1}^s \gamma_i^k \vec{e}_k$  и матрица  $A$  в этом базисе будет иметь вид:

$$A = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{vmatrix}, \text{ где } A_1 = \begin{vmatrix} \gamma_1^1 & \dots & \gamma_s^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_1^s & \dots & \gamma_s^s \end{vmatrix}, \text{ } O - \text{ нулевая матрица размером } (n-s) \times s.$$

Если  $\vec{\mathbb{R}}^n = L^1 \oplus \dots \oplus L^k$  и  $L^i$ ,  $i = \overline{1, k}$  - инвариантные подпространства, то в базисе, который является базисом-объединения всех базисов инвариантных подпространств, прямая сумма которых равна  $\vec{\mathbb{R}}^n$ , матрица будет иметь вид:

$$A = \begin{vmatrix} A_1 & O & \dots & O \\ O & A_2 & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & \dots & A_k \end{vmatrix}$$

$A_i$ ,  $i = \overline{1, k}$  - квадратная матрица размерами  $l_i < n$ , которая является сужением матрицы преобразования  $A$  на инвариантное подпространство  $L_i$

В таком случае искомую вектор-функцию можно переписать в виде:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^{l_1} \\ \dots \\ x^{l_1+\dots+l_{i-1}+1} \\ x^{l_1+\dots+l_i} \\ \dots \\ x^{l_1+\dots+l_k+1} \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}$$

$$\text{Обозначим через } X_i = \begin{pmatrix} x^{l_1+\dots+l_{i-1}+1} \\ \dots \\ x^{l_1+\dots+l_{i-1}+l_i} \end{pmatrix}$$

Тогда система (79) распадается на  $k$  систем, порядок которых  $l_i < n$ :

$$\dot{\vec{X}}_i = A_i \vec{X}_i + \vec{f}_i(t), \quad i = \overline{1, k}$$

Для приведения матрицы линейного преобразования к клеточно-диагональному виду нужно найти собственные векторы линейного преобразования. Вектор  $\vec{x} \neq 0$  называется собственным вектором линейного преобразования, матрица которого равна  $A$ , если

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}. \text{ Пусть } A = \|a_{ij}^i\|, \quad i, j = \overline{1, n}, \text{ а } \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} - \text{компоненты собственного вектора. Тогда}$$

компоненты собственного вектора должны удовлетворять системе однородных линейных уравнений вида  $\|A - \lambda E\|\vec{x} = 0$ . Чтобы эта система имела ненулевое решение необходимо, чтобы  $\det \|A - \lambda E\| = P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{trace } A + \dots + \det A = 0$ .

$P_n(\lambda)$  - характеристический многочлен матрицы  $A$ .

### Случай простых корней характеристического многочлена

Рассмотрим однородную систему с постоянными коэффициентами

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \quad (80)$$

. Задача состоит в том, чтобы найти вектор функции  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ , которые будут образовывать ФСР нашей системы.

**Корни характеристического многочлена  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  простые и действительные.**

Таким  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  соответствуют собственные векторы  $\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_n$  ( $A\vec{h}_i = \lambda_i \vec{h}_i$ ). Можно показать, что собственные вектора, соответствующие разным собственным значениям линейно независимы, поэтому существует базис из собственных векторов  $\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_n$ , в котором матрица  $A$  имеет вид:  $\bar{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$  Тогда система (80) будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}^1}{dt} = \lambda_1 \vec{x}^1 \\ \dots \\ \frac{d\vec{x}^n}{dt} = \lambda_n \vec{x}^n \end{cases} \Rightarrow$$

вектор-функции  $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}, \dots, \varphi_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda_n t}$  образует ФСР этой системы, т.к. явля-

ются линейно независимыми решениями. Матрица перехода в этом случае  $S = \|\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_n\|$ . Тогда получим, что

$$\vec{x}_1 = \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \vec{x}_n = \vec{h}_n e^{\lambda_n t} \quad (81)$$

является ФСР (80), т.к.  $\vec{x}_i, i = \overline{1, n}$  из (81) являются решениями (80), линейная независимость вектор-функций  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  следует из того, что вронскиан (81) при  $t = 0$  является  $\det S \neq 0$  (свойство 10 вронскиана). Тогда любое решение (80) представимо в виде

$$\vec{x} = c_1 \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n \vec{h}_n e^{\lambda_n t} \quad (82)$$

Можно доказать, что  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  - ФСР иначе:

**Лемма 4.1.** Система функций  $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ , где все  $\lambda_i$  - разные, является линейно независимой.

*Доказательство.* Составим линейную комбинацию, равную нулю:  $c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t} = 0$  - продифференцируем  $(n - 1)$  раз и запишем получившуюся систему для поиска  $c_1, \dots, c_n$

$$\begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t} = 0 \\ \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + \lambda_n c_n e^{\lambda_n t} = 0 \\ \dots \\ \lambda_1^{n-1} c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + \lambda_n^{n-1} c_n e^{\lambda_n t} = 0 \end{cases}$$

Система является однородной, поэтому имеет тривиальное решение, но единственное ли оно?

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 t + \dots + \lambda_n t} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 t + \dots + \lambda_n t} \prod_{1 \leq j < i \leq n} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$$

Полученный определитель это определитель Вандермонда, который равен нулю только, если какая-то пара  $\lambda_i, \lambda_j$  совпадёт. Значит определитель не равен нулю по условию  $\Rightarrow$  система имеет только тривиальное решение по теореме Крамера  $\Rightarrow$  система линейно независима. ■

**Лемма 4.2.** Система  $\vec{\varphi}_1 = \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \vec{\varphi}_n = \vec{h}_n e^{\lambda_n t}$  является ФСР.

*Доказательство.*  $\vec{\varphi}_i = \vec{h}_i e^{\lambda_i t}$  является решением по построению. Рассмотрим  $W(t)$ :  $W(t) = \|\vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} \dots \vec{h}_n e^{\lambda_n t}\|$ , при  $t = 0$ :  $W(0) = \|\vec{h}_1 \dots \vec{h}_n\| \neq 0$ , т.к. собственные вектора линейно независимые. Следовательно, по 10 свойству определителя Вронского система линейно независима. ■

Итак, общее решение системы (80) записывается в виде:

$$\boxed{\vec{x}_0^{\text{об}} = c_1 \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n \vec{h}_n e^{\lambda_n t}}$$

**Корни характеристического многочлена  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  простые, но среди них есть комплексные.**

Пусть есть комплексные собственное число  $\lambda_k = r_k + i\omega_k$  и ему соответствующий комплексный собственный вектор  $\vec{h}_k + i\vec{d}_k$ , где  $\vec{h}_k, \vec{d}_k$  - действительные вектора. Так как характеристический многочлен это многочлен с действительными коэффициентами, то комплексный корень идет вместе с комплексно ему сопряженным, т.е.  $\bar{\lambda}_k = r_k - i\omega_k$  тоже является корнем характеристического многочлена.

Взяв комплексное сопряжение над равенством  $A(\vec{h}_k + i\vec{d}_k) = (r_k + i\omega_k)(\vec{h}_k + i\vec{d}_k)$ :

$$\overline{A(\vec{h}_k + i\vec{d}_k)} = A(\vec{h}_k - i\vec{d}_k) = \overline{(r_k + i\omega_k)(\vec{h}_k + i\vec{d}_k)} = (r_k - i\omega_k)(\vec{h}_k - i\vec{d}_k)$$

Т.е.  $\vec{h}_k - i\vec{d}_k$  является собственным вектором для  $\bar{\lambda}_k = r_k - i\omega_k$ .

Аналогично случайно действительных простых корней система принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}_1}{dt} = \lambda_1 \vec{x}_1 \\ \dots \\ \frac{d\vec{x}_k}{dt} = (r_k + i\omega_k) \vec{x}_k \\ \frac{d\vec{x}_{k+1}}{dt} = (r_k - i\omega_k) \vec{x}_{k+1} \\ \dots \\ \frac{d\vec{x}_n}{dt} = \lambda_n \vec{x}_n \end{cases}$$

$$\text{ФСР такой системы будет комплексной: } \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} e^{\lambda_1 t}; \dots; \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} e^{r_k t} (\cos \omega_k t + i \sin \omega_k t);$$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} e^{r_k t} (\cos \omega_k t - i \sin \omega_k t); \dots; \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} e^{\lambda_n t}$$

Т.к. матрица перехода  $S = \left\| \vec{h}_1, \dots, \vec{h}_k + i\vec{d}_k, \vec{h}_k - i\vec{d}_k, \dots, \vec{h}_n \right\|$ , то комплексная ФСР (80) будет:  $\vec{h}_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, (\vec{h}_k + i\vec{d}_k) e^{r_k t} (\cos \omega_k t + i \sin \omega_k t), (\vec{h}_k - i\vec{d}_k) e^{r_k t} (\cos \omega_k t - i \sin \omega_k t), \dots, \vec{h}_n e^{\lambda_n t}$

Рассмотрим систему функций, у которых первые  $k-1$  функции являются функциями построенной выше системы. В качестве  $k$ -ой и  $k+1$ -ой функций возьмём:

$$\vec{q}_k = \frac{1}{2} ((\vec{h}_k + i\vec{d}_k) e^{r_k t} (\cos \omega_k t + i \sin \omega_k t) + (\vec{h}_k - i\vec{d}_k) e^{r_k t} (\cos \omega_k t - i \sin \omega_k t)) = e^{r_k t} (\vec{h}_k \cos \omega_k t - \vec{d}_k \sin \omega_k t)$$

$$\vec{q}_{k+1} = \frac{1}{2i}((\vec{h}_k + i\vec{d}_k)e^{r_k t}(\cos\omega_k t + i\sin\omega_k t) - (\vec{h}_k - i\vec{d}_k)e^{r_k t}(\cos\omega_k t - i\sin\omega_k t)) = e^{r_k t}(\vec{h}_k \sin\omega_k t + \vec{d}_k \cos\omega_k t)$$

Остальные вектор-функции оставим прежними. Так построенная система будет линейно независимой, т.к. была получена линейными комбинациями линейно независимых вектор-функций. Каждая функция данной системы будет решением (80) по построению и принципу суперпозиции  $\Rightarrow$  полученная система является ФСР (80) и содержит только действительные функции  $\Rightarrow$

$$\vec{x}_0^{об} = c_1 \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_k e^{r_k t}(\vec{h}_k \cos\omega_k t - \vec{d}_k \sin\omega_k t) + c_{k+1} e^{r_k t}(\vec{h}_k \sin\omega_k t + \vec{d}_k \cos\omega_k t) + \dots + c_n \vec{h}_n e^{\lambda_n t}$$

### Случай кратных корней характеристического многочлена

В общем случае по основной теореме алгебры характеристический многочлен представляется в виде:  $P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{trace } A + \dots + \det A = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{k_m}$ , где  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  являются собственными числами матрицы  $A$ ,  $k_i \geq 1$ ,  $i = \overline{1, m}$ . В таком случае количество собственных векторов может быть меньше размерности пространства, поэтому матрица может быть не диагонализируема.

**Определение 4.6.** Множество  $R_s = \ker(A - \lambda_s E)^{k_s}$ ,  $s = \overline{1, m}$ , где  $\lambda_s$  - корень кратности  $k_s$  характеристического многочлена, называется **корневым пространством**

Одно из утверждений теоремы Жордана:  $\vec{R}^n = R_1 \oplus \dots \oplus R_m$  пространство раскладывается в прямую сумму корневых подпространств, а также  $\dim R_s = k_s$ . Следовательно, если выбрать базис, как объединение базисов корневых подпространств, то исходная система распадается на  $m$  систем порядка  $k_s$ ,  $s = \overline{1, m}$ , связывающих  $k_s \leq n$  функций. Рассмотрим одну из таких систем.

Обозначим  $\lambda_s = \bar{\lambda}$ ,  $k_s = l$ , перенумеруем и переобозначим искомые функции  $x^{k_1 + \dots + k_{s-1} + 1} = \bar{x}_1, \dots, x^{k_1 + \dots + k_{s-1} + l} = \bar{x}^l$  Тогда имеем задачу: решить систему

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A} \bar{x} \quad (83)$$

где  $\bar{A}$  является сужением  $A$  на подпространство  $R_s = \ker(A - \bar{\lambda} E)^l = \ker B^l$ , т.е.  $\forall \bar{x} \in R_s \mapsto B^l \bar{x} = 0$  по определению ядра.

Имеет место вложенность:  $0 \subset \ker B \subset \ker B^2 \subset \dots \subset \ker B^l$ , т.к.  $\forall \bar{x} : B^{i-1}(\bar{x}) = 0 \mapsto B^i(\bar{x}) = B(B^{i-1}(\bar{x})) = 0$

Обозначим  $T_i = \ker B^i$ ,  $i = \overline{1, k}$ , где  $k \leq l$

**Примечание.** Неравенство  $k \leq l$  связано с тем, что может оказаться, что  $\forall \bar{x} \in R_s \mapsto B^k \bar{x} = 0$  и строить  $T_i$  невозможно

Для  $i = \overline{1, k}$  определим множество  $\mathcal{V}^i = \{\bar{x} \in \mathcal{V}^i : B^i \bar{x} = 0, B^{i-1} \bar{x} \neq 0\}$ . Заметим, что  $\mathcal{V}^1$  является по построению собственным подпространством  $A$ .

В силу определения  $B^i$  и  $\mathcal{V}^i$ :  $\mathcal{V}^i = \ker B^i \setminus \ker B^{i-1}$ ,  $i = \overline{2, k}$ . По построению  $R_s = \mathcal{V}^1 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}^k$ . Осталось выбрать базис в  $\mathcal{V}^i$ ,  $i = \overline{2, k}$ .

**Теорема 4.5.** Пусть  $i > j$ , тогда  $\forall \vec{h}_i \in \mathcal{V}^i \exists \vec{h}_j \in \mathcal{V}^j : \vec{h}_j = B^{i-j} \vec{h}_i$ .

*Доказательство.* Построим такой  $\vec{h}_j$  и покажем, что он лежит в  $\mathcal{V}^j$ .

$$\begin{aligned} B^j \vec{h}_j &= B^j(B^{i-j}(\vec{h}_i)) = (B^j B^{i-j})(\vec{h}_i) = B^i \vec{h}_i = 0 \\ B^{j-1} \vec{h}_j &= B^{j-1}(B^{i-j}(\vec{h}_i)) = (B^{j-1} B^{i-j})(\vec{h}_i) = B^{i-1} \vec{h}_i \neq 0 \end{aligned}$$

■



Рис. 1

Построение соответствующего базиса начинается с определения собственных векторов  $A$ , соответствующих числу  $\bar{\lambda}$ . Для этого решается уравнение  $(\bar{A} - \bar{\lambda}E)\vec{x} = B\vec{x} = 0$ .

Рассмотрим случай, когда имеется только один собственный вектор  $\vec{e}$ . В этом случае  $k = l$  (наше подпространство будет представимо в виде 1 жордановой клетки). Вектор  $\vec{e}$  образует базис в  $\mathcal{V} = T_1$ . Вектор  $\vec{h}_1 \in \mathcal{V}^2$  найдём как решение  $B\vec{h}_1 = \vec{e}$ , по доказанной выше теореме такое уравнение имеет решение. Вектор  $\vec{h}_1$  называется **присоединённым** к вектору  $\vec{e}$ . Векторы  $\vec{e}$  и  $\vec{h}_1$  образуют базис в  $T_2$ . Определим векторы  $\vec{h}_i, i = \overline{2, l-1}$  из уравнений  $B\vec{h}_i = \vec{h}_{i-1}$ . Так построенные векторы  $\vec{e}, \vec{h}_1, \dots, \vec{h}_{l-1}$  образует базис в  $R_s$ . Этот базис называется жордановой цепью.

Запишем матрицу системы в этом базисе. Все построенные векторы находим из уравнений:  $\bar{A}\vec{e} = \bar{\lambda}\vec{e}, \bar{A}\vec{h}_1 = \vec{e} + \bar{\lambda}\vec{h}_1, \dots, \bar{A}\vec{h}_{l-1} = \vec{h}_{l-2} + \bar{\lambda}\vec{h}_{l-1}$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \bar{\lambda} & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \bar{\lambda} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} - \text{жорданова клетка размер } l$$

В таком базисе системе имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}^1}{dt} = \bar{\lambda}\bar{x}^1 + \bar{x}^2 \\ \dots \\ \frac{d\bar{x}^{n-1}}{dt} = \bar{\lambda}\bar{x}^{n-1} + \bar{x}^n \\ \frac{d\bar{x}^n}{dt} = \bar{\lambda}\bar{x}^n \end{cases} \quad (84)$$

Замена:  $\bar{x}^i = \bar{y}^i e^{\bar{\lambda}t}, i = \overline{1, l} \Rightarrow \dot{\bar{y}}^i e^{\bar{\lambda}t} + \bar{\lambda}\bar{y}^i e^{\bar{\lambda}t} = \lambda\dot{\bar{y}}^i e^{\bar{\lambda}t} + \dot{\bar{y}}^{i+1} e^{\bar{\lambda}t} \Rightarrow$  Система преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{y}^1}{dt} = \bar{y}^2 \\ \frac{d\bar{y}^2}{dt} = \bar{y}^3 \\ \dots \\ \frac{d\bar{y}^{l-1}}{dt} = \bar{y}^l \\ \frac{d\bar{y}^l}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{y} = \begin{pmatrix} c_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + c_{l-1} \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \dots + c_2 \frac{t}{1!} + c_1 \\ \dots \\ \dots \\ c_l t + c_{l-1} \\ c_l \end{pmatrix} \Rightarrow \quad (85)$$



$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} c_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + c_{l-1} \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \dots + c_2 \frac{t}{1!} + c_1 \\ \dots \\ \dots \\ c_l t + c_{l-1} \\ c_l \end{pmatrix} \cdot e^{\bar{\lambda}t}$$

Переходим к старому базису:

$$\vec{x}(t) = \left\| \vec{e}, \vec{h}_1, \dots, \vec{h}_{l-1} \right\| \cdot \begin{pmatrix} c_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + c_{l-1} \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \dots + c_2 \frac{t}{1!} + c_1 \\ \dots \\ \dots \\ c_l t + c_{l-1} \\ c_l \end{pmatrix} \cdot e^{\bar{\lambda}t} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \vec{x}_0^{ob} &= \vec{e} \left( c_1 + \dots + c_l \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \right) e^{\bar{\lambda}t} + \dots + \vec{h}_{l-1} c_l e^{\bar{\lambda}t} = \\ &= \boxed{c_1 \vec{e} e^{\bar{\lambda}t} + c_2 (\vec{e}t + \vec{h}_1) e^{\bar{\lambda}t} + \dots + c_l \left[ \vec{e} \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + \vec{h}_1 \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \dots + \vec{h}_{l-1} \right]} \quad (86) \end{aligned}$$

Полагая последовательно  $c_1 = 1, c_2 = \dots = c_n = 0; \dots; c_1 = \dots = c_{i-1} = c_{i+1} = \dots = c_n = 0, c_i = 1, i = \overline{2, n}$  получим функции:

$$\vec{\varphi}_1 = \vec{e} e^{\bar{\lambda}t}, \vec{\varphi}_1 = (\vec{e}t + \vec{h}_1) e^{\bar{\lambda}t}, \dots, \vec{\varphi}_{l-1} = \left( \vec{e} \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} + \vec{h}_1 \frac{t^{l-2}}{(l-2)!} + \dots + \vec{h}_{l-1} \right) e^{\bar{\lambda}t}. \text{ Они}$$

являются решениями по построению,  $W(0) = \left\| \vec{e}, \dots, \vec{h}_{l-1} \right\| \neq 0 \Rightarrow \vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_{l-1}$  - линейно независимы  $\Rightarrow \vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_{l-1}$  - ФСР.

#### 4.6. Линейная неоднородная система уравнений в случае, когда неоднородность представлена векторным квазимногочленом (без доказательства)

**Источник:** Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления

**Определение 4.7.** *Вектор-квазимногочленом* называется вектор-функция  $f(t) = e^{\mu t} P_m(t)$ , где  $\mu$  - заданное комплексное число,  $P_m(t)$  - вектор-многочлен степени  $m$ , коэффициентами которого служат  $n$ -мерные векторы.

**Теорема 4.6.** *Если в системе  $\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t)$   $f(t) = e^{\mu t} P_m(t)$ , где  $P_m(t)$  - вектор-многочлен степени  $m$ , тогда для этой системы всегда существует решение вида*

$$x(t) = e^{\mu t} Q_{m+k}(t)$$

где  $Q_{m+k}$  - вектор-многочлен степени  $(m+k)$ , причём  $k = 0$ , если  $\mu$  - не собственное значение  $A$ , и  $k$  не превосходит наибольшей длины жордановой цепочки для  $\mu$ , если  $\mu$  - собственное значение  $A$ , а коэффициентами  $Q_{m+k}(t)$  служат  $n$ -мерные числовые вектора.

#### 4.7. Формула Лиувилля-Остроградского для нормальной линейной однородной системы уравнений и для линейного однородного уравнения $n$ -го порядка.

Следующее свойство вронскиана рассмотрим в виде теоремы. Для начала докажем вспомогательное утверждение.

**Лемма 4.3.** [Формула Эйлера дифференцирования определителя]

Детерминант матрицы представим в виде:  $\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^i & \dots & a_n^i \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} \cdot a_k^i M_i^k$  Тогда

для

$$\dot{\Delta}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot \dot{a}_j^i M_i^j$$

**Теорема 4.7.** [Формула Лиувилля-Остроградского]

Пусть  $W(x)$  — вронскиан решений  $\vec{\varphi}_1(t), \dots, \vec{\varphi}_n(t)$  однородной системы  $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ . Тогда имеет место формула:

$$\dot{W}(t) = W(t) \cdot \text{tr} A$$

$$\text{где } \text{tr} A = \sum_{k=1}^n a_{kk}(t)$$

*Доказательство.* Зафиксируем среди системы решений функцию  $\vec{\varphi}_j = \begin{pmatrix} \varphi_j^1 \\ \varphi_j^2 \\ \dots \\ \varphi_j^n \end{pmatrix}$ . Рассмотрим  $i$ -ую компоненту  $\varphi_j^i$  решения  $\vec{\varphi}_j$ . Поскольку  $\vec{\varphi}_j$  решение, то  $\frac{d\vec{\varphi}_j}{dt} = A\vec{\varphi}_j \Rightarrow$

$$\frac{d\varphi_j^i}{dt} = \dot{\varphi}_j^i = \sum_{k=1}^n a_k^i \varphi_j^k$$

Рассмотрим вронскиан  $W(t)$ , продифференцируем его по  $t$

$$\dot{W}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot \dot{\varphi}_j^i M_j^i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_k^i \varphi_j^k M_j^i$$

Переставим суммы местами

$$\dot{W}(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_k^i \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \varphi_j^k M_j^i = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_k^i \delta_i^k W(t) = W(t) \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_k^i \delta_i^k = W(t) \sum_{k=1}^n a_k^k$$

$$\dot{W}(t) = W(t) \cdot \text{tr} A$$

■

Также можно решить это уравнение и переписать в виде

$$W(t) = W(t_0) \exp \left( \int_{t_0}^t \text{tr} A(u) du \right)$$

#### 4.8. Метод вариации постоянных для линейной неоднородной системы уравнений и для линейного неоднородного уравнения $n$ -го порядка.

$$\text{Рассмотрим } y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x). \quad (87)$$

$\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  – Ф.С.Р. однородного уравнения  $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$ . Это означает, что

$$\forall k = \overline{1, n} \hookrightarrow \varphi_k^{(n)} + a_1(x)\varphi_k^{(n-1)} + \dots + a_n(x)\varphi_k \equiv 0 \quad (88)$$

Перепишем уравнение (87) в эквивалентном виде. Для этого сделаем следующие замены:  $y = v_1$ ,  $y^{(1)} = v_2$ , ...,  $y^{(n-1)} = v_n$ . Тогда получим:

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dx} = v_2, \\ \frac{dv_2}{dx} = v_3, \\ \dots, \\ \frac{dv_n}{dx} = f(x) - a_1(x)v_n - \dots - a_n(x)v_1. \end{cases} \quad (89)$$

Будем искать решение (87) в виде

$$y(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + \dots + C_n(x)\varphi_n(x)$$

Тогда получается, что решение эквивалентной системы будем искать в виде

$$\vec{v}(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ \dots \\ v_n(x) \end{pmatrix} = C_1(x) \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \dots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} + \dots + C_n(x) \begin{pmatrix} \varphi_n(x) \\ \dots \\ \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \quad (90)$$

Рассмотрим функцию  $v_k(x) = C_1(x)\varphi_1^{(k-1)} + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(k-1)}$ . Продифференцируем эту функцию по  $x$ :

$$\forall k = \overline{1, n-1} \hookrightarrow \dot{v}_k(x) = \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(k-1)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(k-1)} + C_1(x)\varphi_1^{(k)} + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(k)} \quad (91)$$

С другой стороны  $\dot{v}_k(x) = v_{k+1} = C_1(x)\varphi_1^{(k)} + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(k)}$ . Тогда получаем

$$v_k(x) = C_1(x)\varphi_1^{(k)} + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(k)} = \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(k-1)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(k-1)} + C_1(x)\varphi_1^{(k)} + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(k)} \quad (92)$$

$$\forall k = \overline{1, n-1} \hookrightarrow \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(k-1)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(k-1)} = 0 \quad (93)$$

$$\begin{aligned} k = n : v_n(x) &= \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-1)} + C_1(x)\varphi_1^{(n)} + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(n)} = \\ &= f(x) - a_1(x) \left( C_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(n-1)} \right) - \dots - a_n(x) (C_1(x)\varphi_1 + \dots + C_n(x)\varphi_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-1)} + C_1(x) \left( \varphi_1^{(n)} + a_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + \dots + a_n(x)\varphi_1 \right) + \dots + \\ + C_n(x) \left( \varphi_n^{(n)} + a_1(x)\varphi_n^{(n-1)} + \dots + a_n(x)\varphi_n \right) = f(x) \end{aligned}$$

Из уравнения (88) следует что выражения в скобках равны нулю, тогда получим

$$k = n : \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-1)} = f(x)$$

Т.е. мы получили следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{C}_1(x)\varphi_1 + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n = 0, \\ \dots \\ \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-2)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-2)} = 0, \\ \dot{C}_1(x)\varphi_1^{(n-1)} + \dots + \dot{C}_n(x)\varphi_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \quad (94)$$

Система (94) это линейная система для определения  $\dot{C}_1, \dots, \dot{C}_n$ . Определитель этой системы  $\Delta = W(x) \neq 0$ , а значит система разрешима единственным образом.

#### 4.9. Устойчивость по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость

Рассматривается общая система дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(t, x^1, \dots, x^n) \quad (95)$$

Пусть  $\bar{x} = \bar{\varphi}(t, \bar{x}_0)$  – решение этой системы, такое что  $\bar{\varphi}(t_0, \bar{x}_0) = \bar{x}_0$ . А  $\psi(t, \bar{\tilde{x}}_0)$  – произвольное решение, такое что  $\psi(t, \bar{\tilde{x}}_0) = \bar{\tilde{x}}_0$ .

**Определение 4.8.** Решение  $\bar{x} = \bar{\varphi}(t, \bar{x}_0)$  называется *устойчивым по Ляпунову*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \bar{x}_0 : |\bar{\tilde{x}}_0 - \bar{x}_0| < \delta \rightarrow |\bar{\psi}(t, \bar{\tilde{x}}_0) - \bar{\varphi}(t_0, \bar{x}_0)| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, +\infty]$$

**Определение 4.9.** Решение  $\bar{x} = \bar{\varphi}(t, \bar{x}_0)$  называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову, а так же

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \bar{x}_0 : |\bar{\tilde{x}}_0 - \bar{x}_0| < \delta \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{\psi}(t, \bar{\tilde{x}}_0) - \bar{\varphi}(t_0, \bar{x}_0)| = 0$$

#### 4.10. Автономные линейные системы

Пусть в конечномерном линейном пространстве  $B$  линейный оператор задается матрицей  $A = \|a_{ij}(t)\|$ . Если  $a_{ij}$  ограничены, тогда норма матрицы

$$\|A\| = \max_{i,j=1,n} \sup_{t \in I(t)} |a_{ij}(t)|$$

Можно записать следующее неравенство:

$$\|A\bar{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\bar{x}\|$$

Теперь рассмотрим систему однородных уравнений, где  $A$  постоянна

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} \quad (96)$$

Тогда  $\bar{x} = 0$  – решение.

**Лемма 4.4.** Если однородная линейная система имеет неограниченное решение, то нулевое решение не устойчиво.

*Доказательство.* Будем рассматривать систему (112). Пусть решение  $\bar{\varphi}(t, \bar{x}_0)$  неограниченно. То есть

$$\forall M > 0 \exists t^* : |\bar{\varphi}(t^*, \bar{x}_0)| > M$$

Обратим определение устойчивости нулевого приближения

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \exists \bar{x}_0 : |\bar{x}_0| < \delta, \exists t^* \in [t_0, +\infty) : |\bar{\varphi}(t^*, \bar{x}_0)| > \varepsilon$$

Воспользуемся неограниченностью решения

$$\forall C > 0 \rightarrow \bar{\psi}(t, \bar{x}_0) = C \cdot \bar{\varphi}(t, \bar{x}_0) - \text{неограниченно}$$

Теперь для произвольного  $\delta > 0$  возьмем  $C = \frac{\delta}{2|\bar{x}_0|}$

$$|\bar{\psi}(t_0, \bar{x}_0)| = C \cdot |\bar{\varphi}(t_0, \bar{x}_0)| = \frac{\delta|\bar{x}_0|}{2|\bar{x}_0|} = \frac{\delta}{2}$$

Таким образом

$$\exists \varepsilon_0, \exists t : |\bar{\psi}(t, \bar{x}_0)| > \varepsilon_0$$

■

**Теорема 4.8.** Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  – собственные числа матрицы  $A$  кратности  $l_1, \dots, l_k$  соответственно. Тогда

1. Если  $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, i = \overline{1, k}$ , то нулевое решение асимптотически устойчиво.
2. Пусть  $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, i \neq l, \operatorname{Re}(\lambda_l) = 0$ . И существует базис из собственных векторов  $e_{l_1}, \dots, e_{l_k}$ . Тогда нулевое решение устойчиво по Ляпунову.
3. Если  $\exists l : \operatorname{Re}(\lambda_l) > 0$ , или  $\operatorname{Re}(\lambda_l) = 0$ , но собственные вектора не образуют базис, тогда нулевое решение не устойчиво

*Доказательство.* Рассмотрим решение  $\bar{\varphi}(t, \bar{x}_0)$ , такое что  $\bar{\varphi}(0, \bar{x}_0) = \bar{x}_0$ . Тогда

$$\bar{x}(t) = e^{tA} \cdot \bar{x}_0$$

где

$$e^{tA} = S \left\| \begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 t} P_{ij}^1(t) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{\lambda_2 t} P_{ij}^2(t) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & 0 & e^{\lambda_k t} P_{ij}^k(t) \end{array} \right\| S^{-1} = \|e^{\lambda_s t} P_{ij}(t)\|$$

$S$  – матрица перехода к Жорданову базису.  $P_{ij}$  – многочлены степени  $m$

$$m \leq \max_{s=\overline{1, k}} (l_s - 1)$$

Рассмотрим случаи по порядку:

1.  $e^{(\alpha_s + i\omega_s)t} P_{ij}^s(t)$  – элемент  $e^{tA}$ .  $e^{(\alpha_s + i\omega_s)t} P_{ij}^s(t) = e^{\alpha_s t} (\cos(\omega_s t) + i \sin(\omega_s t)) P_{ij}^s(t)$ . Тогда  $|e^{(\alpha_s + i\omega_s)t} P_{ij}^s(t)| = e^{\alpha_s t} |P_{ij}^s(t)|$ . Положим  $\alpha = \inf_{i=\overline{1, k}} |\alpha_i|$ . Распишем

$$e^{tA} = e^{-\alpha t} (e^{\alpha t} e^{tA}) = e^{-\alpha t} \Phi(t)$$

Произвольный элемент матрицы  $\Phi(t)$

$$\Phi_{ij}(t) = e^{-rt} P_{ij}(t)$$

где  $r > 0$ . Отсюда видно, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-rt} P_{ij}(t) = 0$$

Тогда все элементы матрицы  $\Phi(t)$  ограничены. Обозначим норму этой матрицы

$$m = \|\Phi(t)\|$$

Для произвольного  $\varepsilon$  возьмем  $\delta = \frac{\varepsilon}{m}$ . Теперь возьмем норму решения  $\bar{x}(t)$ .

$$\|\bar{x}(t)\| = \|e^{tA} \cdot \bar{x}_0\| \leq \|e^{tA}\| \cdot \|\bar{x}_0\| = e^{-\alpha t} \|\Phi(t)\| \cdot \|\bar{x}_0\| \leq e^{-\alpha t} m \|\bar{x}_0\| \leq e^{-\alpha t} m \delta \leq e^{-\alpha t} \varepsilon$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} \varepsilon = 0$$

2. В данном случае  $P_{ij}^l = \text{const}$ , тогда  $e^{-\alpha t}$  не будет. Следовательно  $\|\bar{x}(t)\| \leq \varepsilon$  – устойчивость по Ляпунову.
3.  $\text{Re}(\lambda_s) > 0$ . Тогда решение

$$\bar{\varphi}(t, \bar{x}_0) = e^{(\alpha_s + i\omega_s)t} \cdot C - \text{неограниченно}$$

А если  $\text{Re}(\lambda_s) = 0$ , но в базисе присутствуют присоединенные вектора, тогда решение принимает вид  $P_{ij}(t)$  – неограниченно при  $t \rightarrow +\infty$

■

## 5. Билет 5. Автономные системы дифференциальных уравнений

### 5.1. Основные определения

Система ДУ вида:

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, \dots, x^n); \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}); \quad \dot{x}^i = f^i(\vec{x}) \quad i = \overline{1, n} \quad (97)$$

Называется автономной системой ДУ, если  $\vec{f} = \{f_i(x^1, \dots, x^n)\}$ ,  $i = \overline{1, n}$  не зависит явно от аргумента  $t$ ;  $x^j = x^j(t)$ ,  $j = \overline{1, n}$  являются интегральными кривыми (97).

$$\vec{x}(t) = \{x^j(t)\} \in \mathbb{R}^{n+1} = t \times \mathbb{R}^n$$

**Определение 5.1.** Пусть  $\vec{x}(t)$  является решением (97). Кривая  $\gamma$  в  $\mathbb{R}^n$  называется фазовой траекторией (97). Само  $\mathbb{R}^n$  называется фазовым пространством (97).

$$\gamma = \begin{cases} x^1 = x^1(t) \\ x^2 = x^2(t) \\ \dots \\ x^n = x^n(t) \end{cases} \quad (98)$$

Будем предполагать, что  $\vec{f} = \{f^i(x^1, \dots, x^n)\} \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $i = \overline{1, n}$  непрерывно дифференцируемые функции по всей совокупности переменных.

**Теорема 5.1.** Если  $\varphi(t)$  решение (97), то  $\varphi(t + \tau) \forall \tau = \text{const} \in \mathbb{R}$  тоже решение (97)

*Доказательство.*

Пусть  $u = t + \tau$  :  $\frac{d(\varphi(t + \tau))}{dt} = |t + \tau = u| = \frac{d\varphi(u)}{du} \frac{du}{dt} = \frac{d\varphi(u)}{dt} = f(\varphi(u)) = f(\varphi(t + \tau))$  – т.е.  $\varphi(t + \tau)$  – решение ■

**Следствие 5.1.1.** Пусть  $\vec{\varphi}(t_0, \vec{x}_0)$  – решение (97), такое что  $\vec{\varphi}(t, t_0, \vec{x}_0) = \vec{x}_0$ . В силу доказанной теоремы  $\vec{\varphi}(t + \tau, t_0 + \tau, \vec{x}_0)$  тоже решение (97). (Формально заменяем  $t + \tau$  на  $u$ ,  $t_0 + \tau$  на  $u_0$ ), причём  $\vec{\varphi}(t_0 + \tau, t_0 + \tau, \vec{x}_0) = \vec{x}_0$ . Тогда, если  $\vec{f}(x^1, \dots, x^n)$  является непрерывной функцией  $n$  переменных вместе с  $\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}$ , то показанные решения совпадают по основной теореме.

$\vec{\varphi}(t + \tau, t_0 + \tau, \vec{x}_0) \equiv \vec{\varphi}(t, t_0, \vec{x}_0)$ . Положим, в силу произвольности  $\tau$ ,  $\tau = -t_0 \Rightarrow \vec{\varphi}(t, t_0, \vec{x}_0) = \vec{\varphi}(t - t_0, 0, \vec{x}_0) = \vec{\varphi}(t - t_0, \vec{x}_0)$

Т.о. положение движущейся по фазовой траектории точки определяется начальным положением  $\vec{x}_0$  в момент времени  $t_0$  и длительностью  $t - t_0$ , отсчитываемого от начального момента времени  $t_0$ , но не самим этим моментом. (Т.е. начальный момент не существует и можно положить его равным нулю).

**Теорема 5.2.** Фазовые траектории либо не имеют общих точек, либо совпадают

*Доказательство.*

Пусть  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  – решения (97), причём  $x_0 = \varphi(t_1) = \psi(t_2)$  Рассмотрим  $\chi(t) = \psi(t + (t_2 - t_1))$ , согласно предыдущей теореме  $\chi(t)$  тоже явл. реш. (97), причём  $\chi(t_1) \stackrel{\text{по постр.}}{=} x_0 = \psi(t_2) =$

$= \varphi(t_1) \Rightarrow$  По основной теореме  $\varphi(t) \equiv \chi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(t + (t_2 - t_1)) \Rightarrow$  траектории  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  совпали. ■

Согласно доказанному можно считать, что фазовое пространство (97) "склеено" из фазовых траекторий.

## 5.2. Типы фазовых траекторий

**Определение 5.2.** Точка  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  называется положением равновесия (97), если  $\vec{f}(\vec{a}) = 0$  ( $f^i(a^1, \dots, a^n) = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ )

**Утверждение 5.1.** Если  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  – положение равновесия (97), то  $\vec{x}(t) = \vec{a}$ ,  $-\infty < t < +\infty$  является решением (97)

*Доказательство.*

$\vec{x}(t) \equiv \vec{a} \stackrel{(97)}{\Rightarrow} 0 = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{f}(\vec{a}) = 0 \Rightarrow$  удовлетворяет (97) ■

Т.о. точка равновесия  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  является фазовой траекторией (97)

**Следствие 5.2.1.** Решение (97) не может прийти в положение равновесия за конечное время.

*Доказательство.*

Пусть это не так и фазовая траектория пришла в положение равновесия за конечное время. Т.о., т.к. положение равновесия тоже является фазовой траекторией, то они пересекаются, что невозможно  $\Rightarrow$  противоречие ■

**Теорема 5.3.** Фазовые траектории принадлежат одному из трёх типов:

1. Точка (равновесия)
2. Фазовая траектория, отличная от точки, есть гладкая кривая
3. Замкнутая кривая (цикл) – периодическая

### 5.3. Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия двумерной автономной нелинейной системы.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x, y) \end{cases} \quad (99)$$

Пусть  $M_0(x_0, y_0)$  – положение равновесия данной системы, т. е. выполнено:  $\begin{cases} \frac{dx}{dt}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{dy}{dt}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$

Для того, чтобы было проще исследовать фазовые траектории линеаризуем систему нелинейных автономных уравнений. Сделать это нам позволяет соответствующая теорема (дается без доказательства)

**Теорема 5.4.** *Если линеаризация нелинейной системы в начале координат ( $x = 0$ ) является простой автономной системой и  $x = 0$  не является центром для исходной системы, то в окрестности  $x = 0$  нелинейная система и ее линеаризация качественно эквивалентны.*

Тогда, мы можем формально линеаризовать систему, используя известные методы:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(y - y_0) + o(\rho) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(y - y_0) + o(\rho) \end{cases} \quad (100)$$

где  $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ . В итоге, стандартной заменой  $x = \bar{x} + x_0$  и  $y = \bar{y} + y_0$  приводим систему к линейному виду.

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = \alpha_{11}\bar{x} + \alpha_{12}\bar{y} \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = \alpha_{21}\bar{x} + \alpha_{22}\bar{y} \end{cases} \quad (101)$$

С этого момента, мы будем изучать виды фазовых траекторий и их поведение в окрестности положения равновесия для систем вида:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \quad (102)$$

с положением равновесия в точке  $M_0(0, 0)$ .

### 5.4. Классификация положений равновесия линейной автономной системы второго порядка.

Рассмотрим автономную однородную систему линейных ДУ (102) и введем матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (103)$$

Получим собственные значения этой матрицы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \text{trace } A \cdot \lambda - \det A = 0 \Rightarrow \quad (104)$$



$$\lambda = \frac{\text{trace } A \pm \sqrt{\text{trace}^2 A - 4 \det A}}{2}$$

Фазовый портрет системы зависит от собственных значений матрицы  $A$ . Рассмотрим различные виды фазовых траекторий в зависимости от собственных значений.

1. Собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  (или  $\text{trace}^2 A - 4 \det A > 0$ )

Тогда, в базисе собственных значений матрица  $A$  примет вид:  $\bar{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

система (102) будет иметь вид:  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda_1 x \\ \frac{dy}{dt} = \lambda_2 y \end{cases}$

и решения данной системы в базисе собственных векторов:  $\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$

Решение системы в исходном базисе:  $\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} h_1 \\ y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} h_2 \end{cases}$

где  $h_1, h_2$  – собственные векторы матрицы  $A$ . Общий вид этого решения справедлив для всех случаев, при которых  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Рассмотрим фазовые портреты.**

- (a)  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$  и  $|\lambda_1| < |\lambda_2|$

Заметим прежде всего, что при  $c_1 \neq 0, c_2 = 0$  и при  $c_1 = 0, c_2 \neq 0$  мы получаем прямые линии с направляющими векторами  $h_1$  и  $h_2$ . Поэтому вектора  $h_1$  и  $h_2$  являются решениями системы.

Теперь, рассмотрим, что будет при  $c_1 \neq 0$  и  $c_2 \neq 0$ . Из  $\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \Rightarrow$

$t = \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{x}{c_1}$  подставляем выражение для  $y$  и получаем **в базисе собственных векторов**  $y = c|x|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = c|x|^r$ , где  $r = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0$ .

Таким образом мы приходим к выводу, что фазовые траектории в данном случае – есть параболы (с показателем  $r > 0$ ), причем при  $t \rightarrow 0$  фазовые траектории стремятся к положению равновесия.

**Определение 5.3.** *Положение равновесия, при котором собственные значения матрицы  $A$  одного знака и фазовые траектории направлены к положению равновесия называются **устойчивым узлом** рис 2.*

**Примечание.** *В случае, когда положение равновесия является узлом, фазовые траектории касаются оси с меньшим по модулю собственным числом.*

- (b)  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$  и  $|\lambda_1| < |\lambda_2|$

Расположение и вид траекторий (как и принцип их нахождения) остаются такими же, как и в первом случае, но направление движения по траекториям при  $t \rightarrow +\infty$  меняется на противоположное.

**Определение 5.4.** *Положение равновесия, при котором собственные значения матрицы  $A$  одного знака и фазовые траектории направлены от положения равновесия называются **неустойчивым узлом** рис 3.*

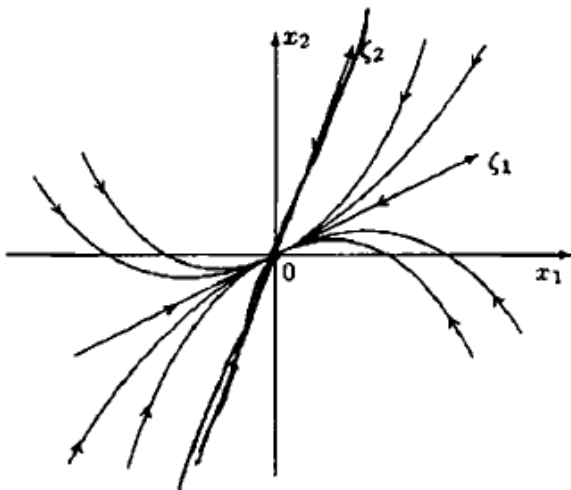


Рис. 2: Устойчивый узел,  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

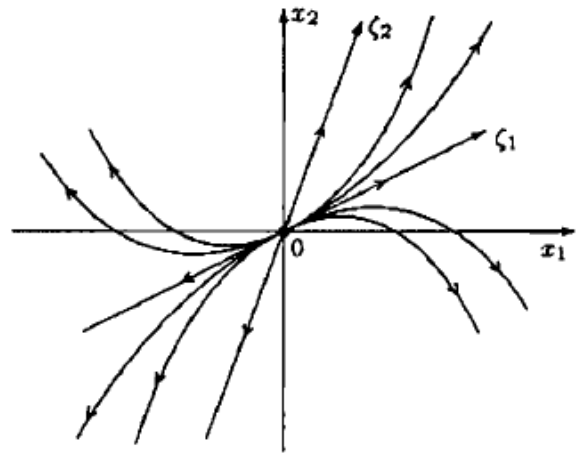


Рис. 3: Неустойчивый узел  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

(с)  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

В этом случае при  $c_1 = c_2 = 0$  получаем положение равновесия  $x = 0$ , при  $c_1 \neq 0, c_2 = 0$  и при  $c_1 = 0, c_2 \neq 0$  мы получаем прямые линии с направляющими векторами  $h_1$  и  $h_2$ . Для  $c_1 \neq 0$  и  $c_2 \neq 0$  аналогично первому случаю получим  $y = c|x|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = c|x|^r$ , только в этом случае  $r = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$ , поэтому траектории – это кривые типа гиперболы. При этом оси с направляющими векторами  $h_1$  и  $h_2$  служат асимптотами траекторий типа гипербол и называются **сепаратисами** 4.

Положение равновесия в этом случае называется седлом системы.

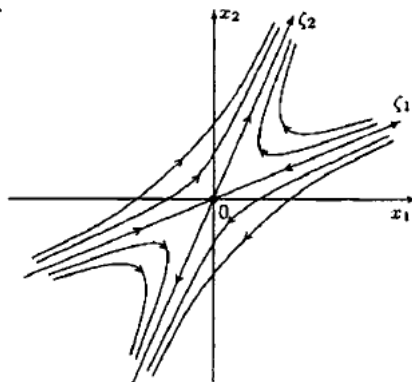


Рис. 4: Седло  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

(d)  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , причем существует базис плоскости из собственных векторов  $h_1$  и  $h_2$  матрицы  $A$ .

В этом случае решения системы в базисе собственных векторов: 
$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

каждое такое решение описывает в фазовой плоскости луч, выходящий из начала координат, причем движение по лучу при  $t \rightarrow +\infty$  идет к нулю для  $\lambda < 0$  и от нуля для  $\lambda > 0$ .

При  $\lambda < 0$  положение равновесия называется **устойчивым дикритическим (или звездным) узлом**, а при  $\lambda > 0$  **неустойчивым дикритическим (или звездным) узлом** рис 5 и 6.

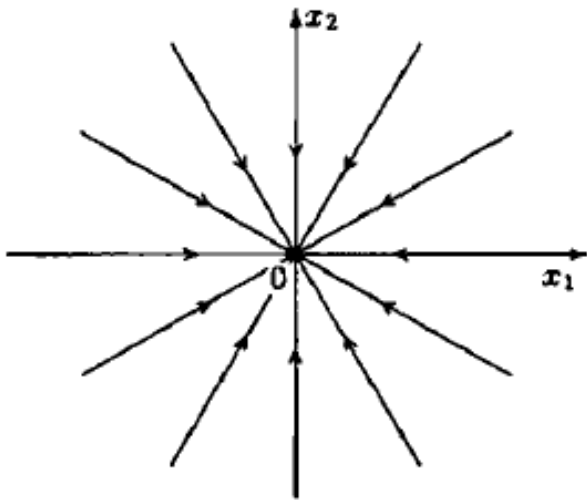


Рис. 5: Устойчивый дикритический узел,  $\lambda < 0$

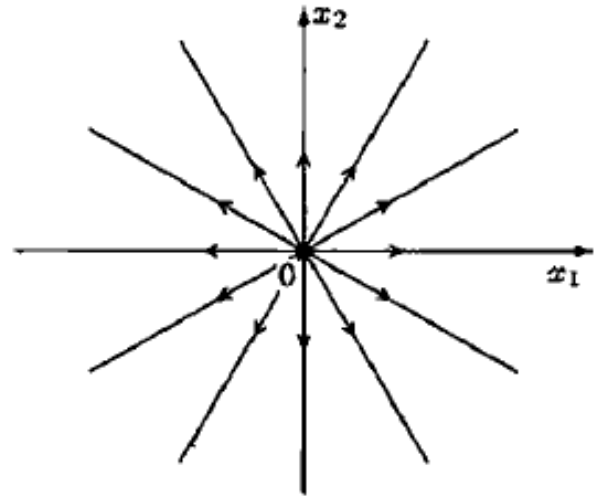


Рис. 6: Неустойчивый дикритический узел  $\lambda > 0$

- (е)  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , причем существует базис плоскости из собственного вектора  $h_1$  и присоединенного к нему вектора  $h_2$  матрицы  $A$ .

В этом случае 
$$\begin{cases} x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

Из этой системы видно, что прямая с направляющим собственным вектором будет являться решением, а прямая с направляющим присоединенным вектором решением являться не будет.

Подобные фазовые траектории называются устойчивыми и неустойчивыми вырожденными узлами рис 7 и 8.

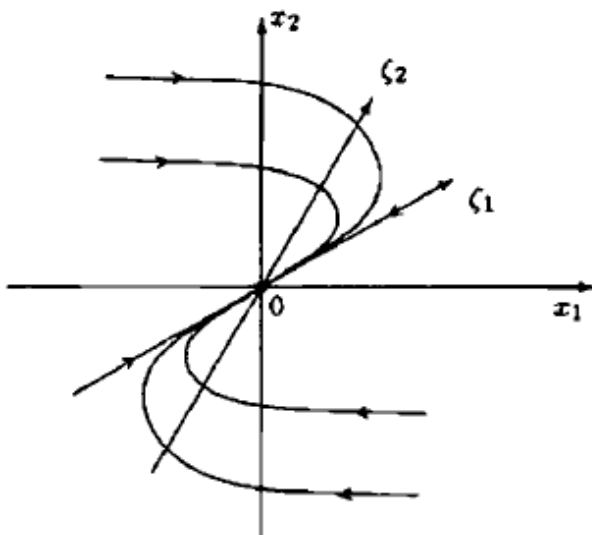


Рис. 7: Устойчивый вырожденный узел,  $\lambda < 0$

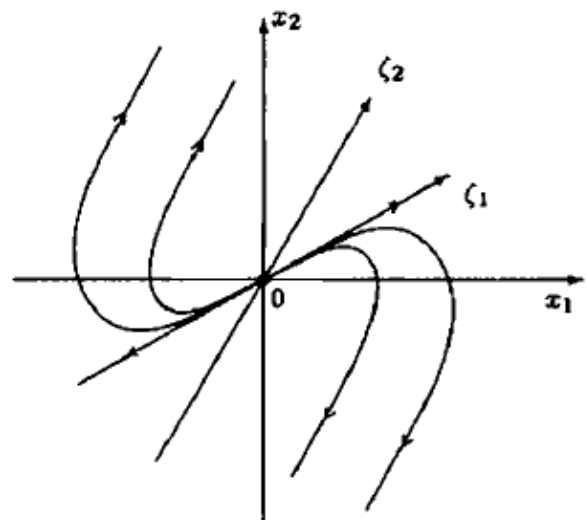


Рис. 8: Неустойчивый вырожденный узел  $\lambda > 0$

2. Собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  (или  $\text{trace}^2 A - 4 \det A < 0$ )

В этом случае собственные значения матрица  $A$  будут комплексными, запишем и с следующим виде:  $\lambda_{1,2} = r \pm i\omega$ . Так же, запишем выражения для собственных векторов матрицы:  $\vec{h}_{1,2} = \vec{a} \pm i\vec{b}$ . Тогда решение в базисе собственных векторов запишется в следующем виде:  $\begin{cases} x(t) = c_1 e^{rt} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \\ y(t) = c_2 e^{rt} (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) \end{cases}$  где  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ . Выделим действительное решение. Один из способов выделения действительного решения: положим комплексные константы таковыми:  $c_1 = ce^{i\varphi}$ ,  $c_2 = \overline{c_1} = ce^{-i\varphi}$ , где  $c \in \mathbb{R}$ . Подставим константы в решение и получим:

$$\begin{cases} x(t) = ce^{rt} e^{i(\omega t + \varphi)} \\ y(t) = ce^{rt} e^{-i(\omega t + \varphi)} \end{cases} \quad (105)$$

это вид решения в базисе собственных векторов, перейдем обратно в исходный базис и получим:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a} + i\vec{b} \\ \vec{a} - i\vec{b} \end{pmatrix} e^{rt} \begin{pmatrix} e^{i(\omega t + \varphi)} \\ e^{-i(\omega t + \varphi)} \end{pmatrix} \quad (106)$$

отсюда несложно выразить:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ce^{rt} (2\vec{a} \cos(\omega t + \varphi) - 2\vec{b} \sin(\omega t + \varphi)) \quad (107)$$

переходя к базису независимых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  получим:

$$\begin{cases} x = ce^{rt} \cos \chi \\ y = ce^{rt} \sin \chi \end{cases} \quad (108)$$

где  $\chi = \omega t + \varphi$ . Чтобы понять вид фазовой траектории перейдем к полярным координатам:

$$\begin{cases} \rho = ce^{r \frac{\chi - \varphi}{\omega}} \\ \chi = \omega t + \varphi \end{cases} \quad (109)$$

рассмотрим полученные уравнения и выделим два принципиальных случая.

(a)  $r \neq 0$

В этом случае видно, что фазовая траектория представляет собой спираль, причем если  $r > 0$  спираль раскручивается, а если  $r < 0$  – закручивается. Такое положение равновесия называется **фокусом** рис 9, 10, 11, 12. Заметим, что направление закручивания (или раскручивания) определяется направлением фазовой скорости.

(b)  $r = 0$

В этом случае в базисе векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  фазовые траектории будут представлять собой окружности, что видно из уравнений  $\begin{cases} x = c \cos \chi \\ y = c \sin \chi \end{cases}$  соответственно, в исходном базисе траекториями будут концентрические эллипсы. Подобное положение равновесия называется **центром системы** рис 13, 14.

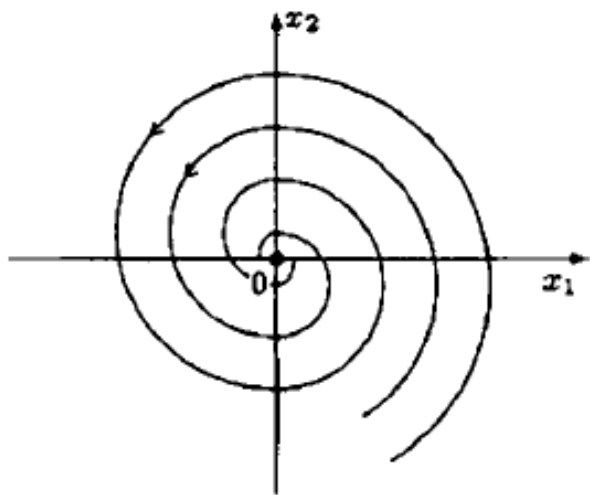


Рис. 9: Устойчивый фокус

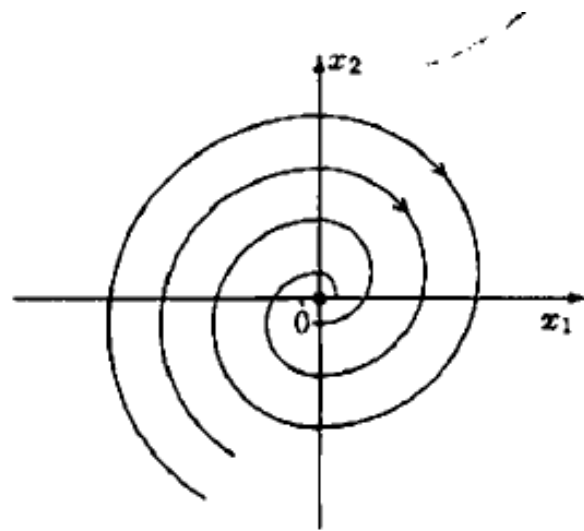


Рис. 10: Устойчивый фокус

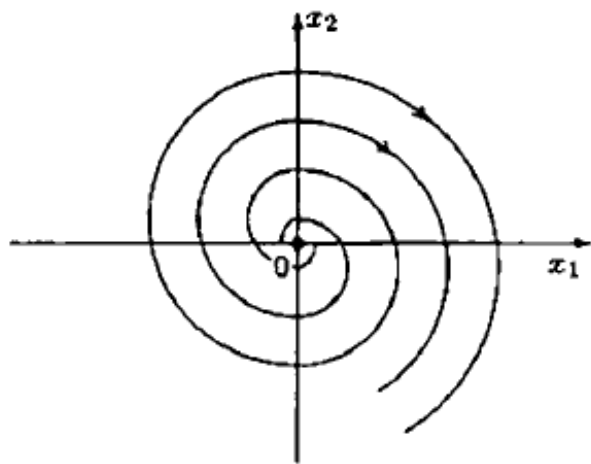


Рис. 11: Неустойчивый фокус

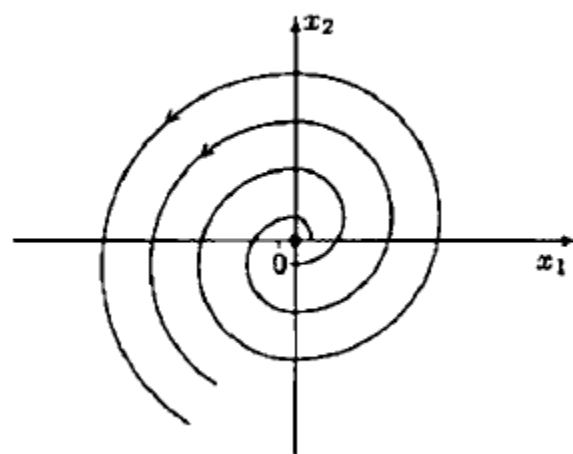


Рис. 12: Неустойчивый фокус

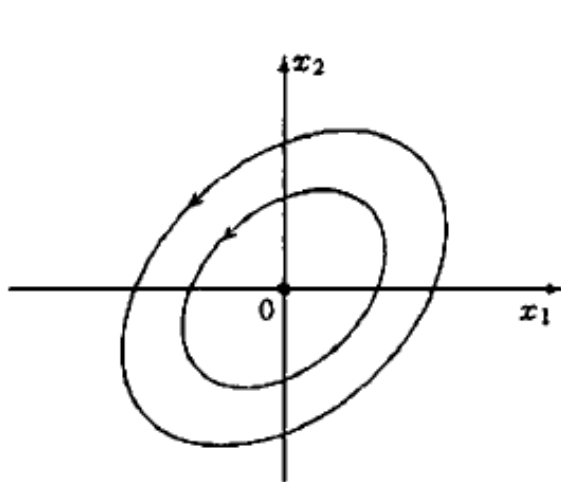


Рис. 13: Центр системы

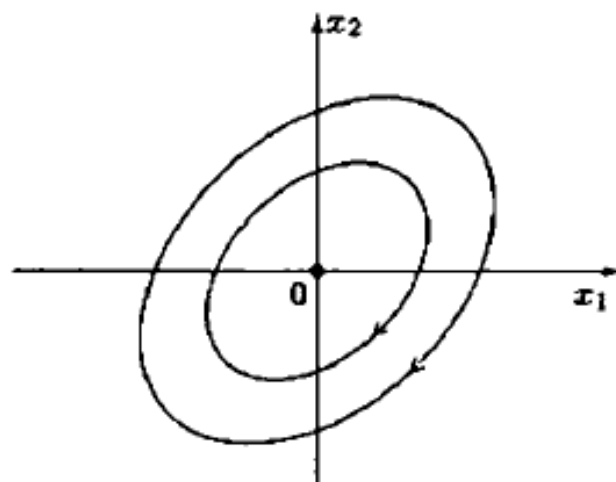


Рис. 14: Центр системы

## 5.5. Теорема о выпрямлении траекторий.

Пусть точка  $x_0$  не является особой точкой автономной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x) \quad (110)$$

т. е.  $f(x_0) \neq 0$ ,  $x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ , где  $D$  – область фазового пространства.

Пусть при этом  $\varphi(t, x_0)$  – решение этой системы, такое, что  $\varphi(0) = x_0$ . В этом случае справедлива **теорема о выпрямлении** (дается без доказательства):

**Теорема 5.5.** *Существует окрестность точки  $x_0$ , такая что в этой окрестности фазовая траектория с точностью до  $o(t)$  является прямой линией с направляющим вектором  $\vec{q} = \frac{\vec{f}(x)}{|f(x)|}$ .*

## 5.6. Устойчивость по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость

Рассматривается общая система дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(t, x^1, \dots, x^n) \quad (111)$$

Пусть  $\bar{x} = \bar{\varphi}(t, \bar{x}_0)$  – решение этой системы, такое что  $\bar{\varphi}(t_0, \bar{x}_0) = \bar{x}_0$ . А  $\bar{\psi}(t, \bar{x}_0)$  – произвольное решение, такое что  $\bar{\psi}(t, \bar{x}_0) = \bar{x}_0$ .

**Определение 5.5.** *Решение  $\bar{x} = \bar{\varphi}(t, \bar{x}_0)$  называется **устойчивым по Ляпунову**, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \bar{x}_0 : |\bar{x}_0 - \bar{x}_0| < \delta \rightarrow |\bar{\psi}(t, \bar{x}_0) - \bar{\varphi}(t_0, \bar{x}_0)| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, +\infty]$$

**Определение 5.6.** *Решение  $\bar{x} = \bar{\varphi}(t, \bar{x}_0)$  называется **асимптотически устойчивым**, если оно устойчиво по Ляпунову, а так же*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \bar{x}_0 : |\bar{x}_0 - \bar{x}_0| < \delta \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{\psi}(t, \bar{x}_0) - \bar{\varphi}(t_0, \bar{x}_0)| = 0$$

## 5.7. Автономные линейные системы

Пусть в конечномерном линейном пространстве  $B$  линейный оператор задается матрицей  $A = \|a_{ij}(t)\|$ . Если  $a_{ij}$  ограничены, тогда норма матрицы

$$\|A\| = \max_{i,j=1,n} \sup_{t \in I(t)} |a_{ij}(t)|$$

Можно записать следующее неравенство:

$$\|A\bar{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\bar{x}\|$$

Теперь рассмотрим систему однородных уравнений, где  $A$  постоянна

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} \quad (112)$$

Тогда  $\bar{x} = 0$  – решение.

**Лемма 5.1.** *Если однородная линейная система имеет неограниченное решение, то нулевое решение не устойчиво.*

*Доказательство.* Будем рассматривать систему (112). Пусть решение  $\bar{\varphi}(t, \bar{x}_0)$  неограниченно. То есть

$$\forall M > 0 \exists t^* : |\bar{\varphi}(t^*, \bar{x}_0)| > M$$

Обратим определение устойчивости нулевого приближения

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \exists \bar{x}_0 : |\bar{x}_0| < \delta, \exists t^* \in [t_0, +\infty) : |\bar{\varphi}(t^*, \bar{x}_0)| > \varepsilon$$

Воспользуемся неограниченностью решения

$$\forall C > 0 \rightarrow \bar{\psi}(t, \bar{x}_0) = C \cdot \bar{\varphi}(t, \bar{x}_0) - \text{неограниченно}$$

Теперь для произвольного  $\delta > 0$  возьмем  $C = \frac{\delta}{2|\bar{x}_0|}$

$$|\bar{\psi}(t_0, \bar{x}_0)| = C \cdot |\bar{\varphi}(t_0, \bar{x}_0)| = \frac{\delta|\bar{x}_0|}{2|\bar{x}_0|} = \frac{\delta}{2}$$

Таким образом

$$\exists \varepsilon_0, \exists t : |\bar{\psi}(t, \bar{x}_0)| > \varepsilon_0$$

■

**Теорема 5.6.** Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  – собственные числа матрицы  $A$  кратности  $l_1, \dots, l_k$  соответственно. Тогда

1. Если  $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, i = \overline{1, k}$ , то нулевое решение асимптотически устойчиво.
2. Пусть  $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, i \neq l, \operatorname{Re}(\lambda_l) = 0$ . И существует базис из собственных векторов  $e_{l_1}, \dots, e_{l_k}$ . Тогда нулевое решение устойчиво по Ляпунову.
3. Если  $\exists l : \operatorname{Re}(\lambda_l) > 0$ , или  $\operatorname{Re}(\lambda_l) = 0$ , но собственные вектора не образуют базис, тогда нулевое решение не устойчиво

*Доказательство.* Рассмотрим решение  $\bar{\varphi}(t, \bar{x}_0)$ , такое что  $\bar{\varphi}(0, \bar{x}_0) = \bar{x}_0$ . Тогда

$$\bar{x}(t) = e^{tA} \cdot \bar{x}_0$$

где

$$e^{tA} = S \left\| \begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 t} P_{ij}^1(t) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{\lambda_2 t} P_{ij}^2(t) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & e^{\lambda_k t} P_{ij}^k(t) \end{array} \right\| S^{-1} = \|e^{\lambda_s t} P_{ij}(t)\|$$

$S$  – матрица перехода к Жорданову базису.  $P_{ij}$  – многочлены степени  $m$

$$m \leq \max_{s=\overline{1, k}} (l_s - 1)$$

Рассмотрим случаи по порядку:

1.  $e^{(\alpha_s + i\omega_s)t} P_{ij}^s(t)$  – элемент  $e^{tA}$ .  $e^{(\alpha_s + i\omega_s)t} P_{ij}^s(t) = e^{\alpha_s t} (\cos(\omega_s t) + i \sin(\omega_s t)) P_{ij}^s(t)$ . Тогда  $|e^{(\alpha_s + i\omega_s)t} P_{ij}^s(t)| = e^{\alpha_s t} |P_{ij}^s(t)|$ . Положим  $\alpha = \inf_{i=\overline{1, k}} |\alpha_i|$ . Распишем

$$e^{tA} = e^{-\alpha t} (e^{\alpha t} e^{tA}) = e^{-\alpha t} \Phi(t)$$

Произвольный элемент матрицы  $\Phi(t)$

$$\Phi_{ij}(t) = e^{-rt} P_{ij}(t)$$

где  $r > 0$ . Отсюда видно, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-rt} P_{ij}(t) = 0$$

Тогда все элементы матрицы  $\Phi(t)$  ограничены. Обозначим норму этой матрицы

$$m = \|\Phi(t)\|$$

Для произвольного  $\varepsilon$  возьмем  $\delta = \frac{\varepsilon}{m}$ . Теперь возьмем норму решения  $\bar{x}(t)$ .

$$\|\bar{x}(t)\| = \|e^{tA} \cdot \bar{x}_0\| \leq \|e^{tA}\| \cdot \|\bar{x}_0\| = e^{-\alpha t} \|\Phi(t)\| \cdot \|\bar{x}_0\| \leq e^{-\alpha t} m \|\bar{x}_0\| \leq e^{-\alpha t} m \delta \leq e^{-\alpha t} \varepsilon$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha t} \varepsilon = 0$$

2. В данном случае  $P_{ij}^l = \text{const}$ , тогда  $e^{-\alpha t}$  не будет. Следовательно  $\|\bar{x}(t)\| \leq \varepsilon$  – устойчивость по Ляпунову.
3.  $\text{Re}(\lambda_s) > 0$ . Тогда решение

$$\bar{\varphi}(t, \bar{x}_0) = e^{(\alpha_s + i\omega_s)t} \cdot C - \text{неограниченно}$$

А если  $\text{Re}(\lambda_s) = 0$ , но в базисе присутствуют присоединенные вектора, тогда решение принимает вид  $P_{ij}(t)$  – неограниченно при  $t \rightarrow +\infty$

■

## 5.8. Групповые свойства автономных систем

1.  $\bar{\varphi}(t_1 + t_2, \bar{x}_0) = \varphi(t_2, \bar{\varphi}(t_1, \bar{x}_0)) = \bar{\varphi}(t_1, \bar{\varphi}(t_2, \bar{x}_0))$

*Доказательство.*

Рассмотрим  $\bar{\varphi}(t, \bar{\varphi}(t_1, \bar{x}_0))$  – решение (97);  $\bar{\varphi}(t + t_1; \bar{x}_0)$  – тоже решение (97)

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\varphi}(0, \bar{\varphi}(t_1, \bar{x}_0)) = \bar{\varphi}(t_1, \bar{x}_0) \\ \bar{\varphi}(0 + t_1, \bar{x}_0) = \bar{\varphi}(t_1, \bar{x}_0) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{основная теорема}} \bar{\varphi}(t + t_1; \bar{x}_0) \equiv \bar{\varphi}(t, \bar{\varphi}(t_1, \bar{x}_0))$$

Аналогично,  $\bar{\varphi}(t + t_2, \bar{x}_0) \equiv \bar{\varphi}(t, \bar{\varphi}(t_2, \bar{x}_0))$

■

2.  $\bar{\varphi}(-t; \bar{\varphi}(t, \bar{x}_0)) = \bar{x}_0$

*Доказательство.*

Из 1):  $\bar{\varphi}(t + \tau, \bar{x}_0) = \bar{\varphi}(\tau, \bar{\varphi}(t, \bar{x}_0))$ . В силу произвольности  $\tau$  при  $\tau = -t$ :

$$\bar{\varphi}(-t, \bar{\varphi}(t, \bar{x}_0)) \stackrel{1)}{=} \bar{\varphi}(0, \bar{x}_0) = \bar{x}_0$$

■

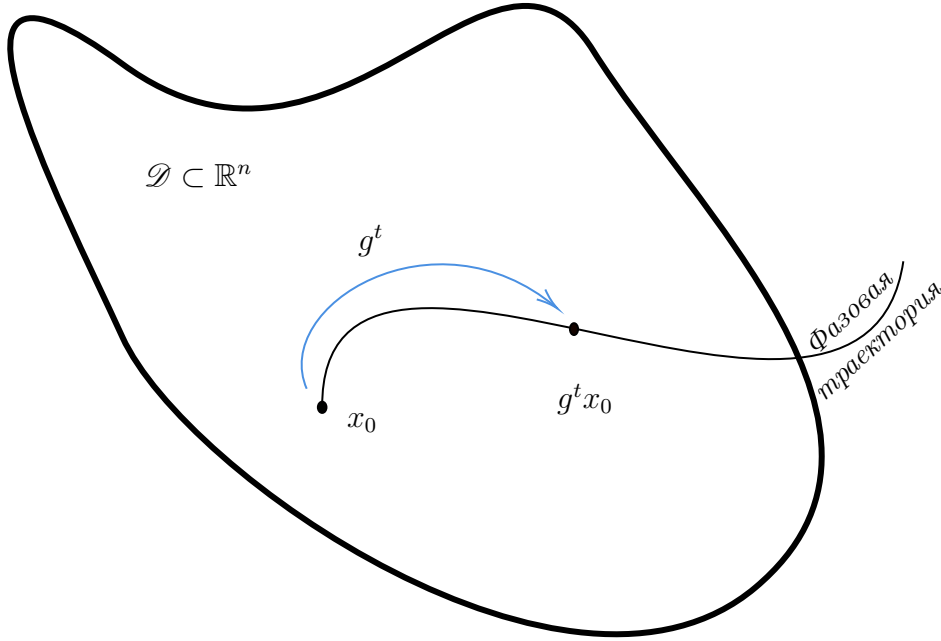
## 5.9. Понятия фазового потока и фазового объема

**Определение 5.7.** Рассматриваем давно привычную нам систему  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$ .

Пусть  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  – это область в ее фазовом пространстве. Возьмем произвольную точку  $\bar{x}_0 \in \mathcal{D}$  и выпустим из нее фазовую траекторию. Таким образом, с течением времени  $t$  мы будем двигаться по этой траектории. Обозначим точку на данной траектории в момент времени  $t$  как  $g^t \bar{x}_0$ .



Теперь можно определить преобразование области  $\mathcal{D}$ :  $\forall \vec{x}_0 \in \mathcal{D}$  сделаем отображение  $\vec{x}_0 \rightarrow g^t \vec{x}_0$ . Получаем  $\mathcal{D} \rightarrow g^t \mathcal{D}$ . Другими словами, каждую точку  $\mathcal{D}$  сносим по фазовой траектории на время  $t$ .



Так вот преобразование  $g^t$  и называется фазовым потоком.

Перечислим несколько полезных свойств введенного нами фазового потока:

- $g^{t_1+t_2} = g^{t_1} \cdot g^{t_2} = g^{t_2} \cdot g^{t_1}$ ;
- $g^t \cdot g^{-t} = g^{-t} \cdot g^t = \text{Id}$  – тождественное преобразование;
- Фазовый поток является группой;
- И еще сильнее, фазовый поток – однопараметрическая группа, то есть каждому числу  $t \in \mathbb{R}$  соответствует единственное преобразование  $g^t : \mathcal{D} \rightarrow g^t \mathcal{D}$ .

**Определение 5.8.** Пусть у нас опять есть область  $\mathcal{D}$  фазового пространства  $\mathbb{R}^n$ . Подействуем на  $\mathcal{D}$  фазовым потоком  $g^t$ . Тогда  $\mathcal{D}(t) = g^t \mathcal{D}$  и  $\vec{x} = g^t \vec{x}_0$ . Определим следующую величину как фазовый объем:

$$V_{\mathcal{D}}(t) = \int_{\mathcal{D}(t)} d\vec{x} = \int_{g^t \mathcal{D}} d(g^t \vec{x}_0).$$

## 5.10. Теорема Лиувилля

**Теорема 5.7.** В автономной системе дифференциальных уравнений  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$  производная фазового объема  $V_{\mathcal{D}}(t)$  области  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  фазового пространства может быть вычислена по формуле:

$$\frac{dV_{\mathcal{D}}(t)}{dt} = \int_{\mathcal{D}} \text{div } \vec{f} \cdot d\vec{y},$$

$$\text{где } \operatorname{div} \vec{f} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^i} - \text{дивергенция } \vec{f}, \text{ а } \vec{y} = \vec{x}(0).$$

*Доказательство.*

Докажем, что производная равна этому при  $t = 0$ , а в силу автономности системы это будет верно в каждой точке.

$$\text{Пишем производную по определению: } \frac{dV_{\mathcal{D}}}{dt}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_{\mathcal{D}}(t) - V_{\mathcal{D}}(0)}{t}.$$

$$\text{Из системы имеем } \vec{x} = \vec{y} + \int_0^t \vec{f}(\tau) d\tau.$$

При малых значениях  $t$  получаем следующее:  $x^i = y^i + f^i(\vec{y})t + o(t), t \rightarrow 0$ .

На все это дело можно смотреть как на замену координат  $x^i \rightarrow y^i$ . Тогда получаем следующее выражение для фазового объема:

$$V_{\mathcal{D}}(t) = \int_{\mathcal{D}(t)} d\vec{x} \stackrel{\mathcal{D}(0)=\mathcal{D}}{=} \int_{\mathcal{D}} |J| d\vec{y},$$

где  $J = \frac{\partial(x^1, x^2, \dots, x^n)}{\partial(y^1, y^2, \dots, y^n)}$  – якобиан преобразования.

Посчитаем этот якобиан:

$$J = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial f^1}{\partial y^1} t & \frac{\partial f^1}{\partial y^2} t & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial y^n} t \\ \frac{\partial f^2}{\partial y^1} t & 1 + \frac{\partial f^2}{\partial y^2} t & \dots & \frac{\partial f^2}{\partial y^n} t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial y^1} t & \frac{\partial f^n}{\partial y^2} t & \dots & 1 + \frac{\partial f^n}{\partial y^n} t \end{vmatrix} = \left(1 + \frac{\partial f^1}{\partial y^1} t\right) \left(1 + \frac{\partial f^2}{\partial y^2} t\right) \dots \left(1 + \frac{\partial f^n}{\partial y^n} t\right) + o(t).$$

Здесь мы все, что имеет множители  $t^2, t^3, \dots, t^n$ , завернули в  $o(t)$ . Однако если раскрыть скобки, то такие слагаемые все еще остаются. Раскроем эти скобки и опять впишем все ненужное в  $o(t)$ :

$$J = 1 + \left( \frac{\partial f^1}{\partial y^1} + \frac{\partial f^2}{\partial y^2} + \dots + \frac{\partial f^n}{\partial y^n} \right) t + o(t) = 1 + t \operatorname{div} \vec{f} + o(t).$$

Ну, а теперь считаем эту производную:

$$\frac{dV_{\mathcal{D}}}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V_{\mathcal{D}}(t) - V_{\mathcal{D}}(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathcal{D}} \left(1 + t \operatorname{div} \vec{f} + o(t)\right) d\vec{y} - \int_{\mathcal{D}} d\vec{y}}{t} = \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \vec{f} \cdot d\vec{y}.$$

■

## 5.11. Теорема Пуанкаре

**Теорема 5.8.** Пусть  $g^t$  – непрерывное взаимнооднозначное отображение, сохраняющее фазовый объем и переводящее ограниченную область  $\mathcal{D}$  саму в себя, то есть  $g^t \mathcal{D} = \mathcal{D}$ . Тогда:

$$\forall x_0 \in \mathcal{D} \mapsto \forall U(x_0) \exists \bar{x} \in U(x_0) : g^n \bar{x} \in U(x_0) \quad (n = t_0),$$

где  $U(x_0)$  – некоторая окрестность точки  $x_0$ .

Другими словами, для любой окрестности  $U$  любой точки  $x_0$  области  $\mathcal{D}$  найдется точка  $\bar{x}$ , возвращающаяся обратно в эту же окрестность.

## 6. Билет 6. Первые интегралы автономных систем

### 6.1. Основные определения

**Определение 6.1.** Рассмотрим неавтономную систему дифференциальных уравнений  $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, t)$ . Пусть в некоторой области  $G \subset \mathbb{R}_{t, \vec{x}}^{n+1}$  выполнены условия основной теоремы. Пусть функция  $u(t, \vec{x})$  непрерывно дифференцируема в  $G$ , а  $\vec{x} = \vec{x}(t)$  – решение системы. Тогда величину

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} f_i(t, \vec{x}) = \frac{\partial u}{\partial t} + (\nabla u, \vec{f}) \quad (113)$$

будем называть производной функции  $u$  в силу системы, или производной Ли.

Для автономной системы  $\frac{du}{dt} = (\nabla u, \vec{f})$ .

**Определение 6.2.** Первым интегралом автономной системы  $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$  в области  $\mathcal{D}$  ее фазового пространства называется функция  $u = u(\vec{x})$ , сохраняющая постоянное значение вдоль каждой траектории из  $\mathcal{D}$ , то есть  $u = C = \text{const}$  для каждой траектории в области  $\mathcal{D}$ .

### 6.2. Критерий первого интеграла

**Теорема 6.1.** Для того, чтобы некоторая функция  $u(\vec{x})$  была первым интегралом системы  $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$ , необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла соотношению  $(\nabla u, \vec{f}) = 0$ .

*Доказательство.*

*Необходимость*

Пусть  $u = u(\vec{x})$  – первый интеграл системы. Тогда:

$$0 = \frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} f_i(\vec{x}) = (\nabla u, \vec{f}) \quad (114)$$

*Достаточность*

Пусть условие выполнено. Тогда:

$$0 = (\nabla u, \vec{f}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} f_i(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \dot{x}_i = \frac{du}{dt}, \quad (115)$$

откуда и следует, что  $u$  – первый интеграл системы. ■

### 6.3. Теорема о числе независимых первых интегралов

**Определение 6.3.** Система первых интегралов  $u_1(\vec{x}), u_2(\vec{x}), \dots, u_k(\vec{x})$ , где  $k < n$  называется **функционально независимой** в области  $\mathcal{D}$ , если:

$$\text{rank} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = \text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_k}{\partial x_1} & \frac{\partial u_k}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} = k \quad (116)$$

Другими словами, если их градиенты  $\nabla u_i(\vec{x})$  **линейно** независимы.

**Примечание.** Из линейной зависимости первых интегралов следует их функциональная зависимость. Обратное утверждение неверно.

**Теорема 6.2.** Пусть точка  $M(\vec{x}_0) \in \mathcal{D}$  **не** является положением равновесия системы  $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$ . Тогда в окрестности  $U(\vec{x}_0)$  этой точки существуют  $n - 1$  функционально независимых первых интегралов системы. Теорема имеет локальный характер.

*Доказательство.*

Пусть  $\vec{x}(t)$  является решением:  $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ .

Так как  $M \in \mathcal{D}$  не является положением равновесия, то через нее проходит единственная фазовая траектория, и хотя бы одна из компонент  $\vec{f}(\vec{x}_0)$  не равна нулю. Пускай без ограничения общности это будет  $f_n(\vec{x}_0)$ .

В силу непрерывности  $f_n(\vec{x})$  существует окрестность  $U(\vec{x}_0)$ , в которой  $f_n(\vec{x}) \neq 0$ .

Поделим каждое уравнение нашей системы на последнее. Получим следующее:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dx_n} = \frac{f_1}{f_n} = \tilde{f}_1 \\ \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{f_2}{f_n} = \tilde{f}_2 \\ \vdots \\ \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{f_{n-1}}{f_n} = \tilde{f}_{n-1} \end{cases} \quad (117)$$

Все  $\tilde{f}_i$  непрерывно дифференцируемы, поэтому существует окрестность  $U(\vec{x}_0)$ , где выполнены условия основной теоремы. Значит  $\forall \xi \in U(\vec{x}_0) \exists!$  решение системы выше такое, что при  $x_n = \xi_n$  мы имеем  $x_1(\xi_n) = \xi_1, x_2(\xi_n) = \xi_2, \dots, x_{n-1}(\xi_n) = \xi_{n-1}$ .

Давайте запишем это решение. Оно имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) \\ x_2 = \varphi_2(x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) \\ \vdots \\ x_{n-1} = \varphi_{n-1}(x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) \end{cases} \quad (118)$$

На все это дело можно смотреть как на систему уравнений относительно  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ . Якобиан этой системы имеет вид:

$$J(x_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_{n-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial \xi_{n-1}} \end{vmatrix} \quad (119)$$

В силу того, что  $J(x_n^0) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = |E| = 1 \neq 0$ , и все производные  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_k}$  непрерывны,

то существует окрестность точки  $\vec{\xi}$ , в которой  $J(x_n) \neq 0$ . Тогда по теореме о неявно заданной функции можно разрешить систему относительно  $\xi_k$ :

$$\begin{cases} \xi_1 = \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \xi_{n-1} = \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (120)$$

Проинтегрируем формально последнее уравнение системы  $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$  с условием, что при  $t = \tau$ :  $x_n(\tau) = \xi_n$ :

$$x_n = \xi_n + \int_{\tau}^t f_n(\vec{x}(\tau)) d\tau = x_n(t). \quad (121)$$

Подставим это и (118) в (120). Тогда:

$$\begin{aligned} \forall k = \overline{1, n} : \text{const} = \xi_k &= \psi_k(x_n, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \\ &= \psi_k(x_n, \varphi_1(x_n, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}), \varphi_2(x_n, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}), \dots, \varphi_{n-1}(x_n, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})) = \\ &= \psi_k(\tilde{\varphi}_1(t + \tau, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}), \tilde{\varphi}_2(t + \tau, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}), \dots, \tilde{\varphi}_{n-1}(t + \tau, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})) \end{aligned} \quad (122)$$

Так как  $\vec{\xi}$  – произвольная точка из окрестности  $U$ , где выполняется основная теорема, то функции  $\tilde{\varphi}_1(t + \tau, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}), \tilde{\varphi}_2(t + \tau, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}), \dots, \tilde{\varphi}_{n-1}(t + \tau, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$  являются решениями исходной системы. Тогда система (120) является системой первых интегралов.

Таких интегралов  $n - 1$  штук. Причем:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_{n-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{vmatrix} = \frac{1}{J(x_n)} \neq 0. \quad (123)$$

Откуда следует, что данная система первых интегралов функционально независима. ■

## 6.4. Применение первых интегралов для понижения порядка системы

**Теорема 6.3.** Пусть  $u_1(\vec{x}), u_2(\vec{x}), \dots, u_k(\vec{x})$ , где  $k < n$  – система первых интегралов системы  $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$ . Тогда порядок системы может быть понижен на  $k$ .

*Доказательство.*

Если  $u_1, u_2, \dots, u_k$  – первые интегралы, то они постоянны на любом решении системы. На систему первых интегралов

$$\begin{cases} u_1(\vec{x}) = C_1 \\ u_2(\vec{x}) = C_2 \\ \vdots \\ u_k(\vec{x}) = C_k \end{cases} \quad (124)$$

можно смотреть как на систему уравнений относительно неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , где  $C_1, C_2, \dots, C_k$  – известные константы.

Система первых интегралов функционально независима, поэтому ранг матрицы Якоби равен  $k$ . Пусть базисный минор матрицы Якоби расположен в первых  $k$  столбцах (иначе просто меняем порядок переменных). Тогда по теореме о неявно заданной функции получаем:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_{k+1}, \dots, x_n, C_1, \dots, C_k) \\ \vdots \\ x_k = \varphi_k(x_{k+1}, \dots, x_n, C_1, \dots, C_k) \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x}_{k+1} = f_{k+1}(\varphi_1, \dots, \varphi_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(\varphi_1, \dots, \varphi_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \end{cases} \quad (125)$$

Решив последнюю систему относительно  $x_{k+1}, \dots, x_n$ , то есть понизив порядок системы на  $k$ , найдем остальные  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . ■

## 6.5. Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка

### 6.5.1. Общее решение линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка

**Определение 6.4.** Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^n f^i(\vec{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x^i} = F(\vec{x}, u) \quad (126)$$

Функция  $u(\vec{x})$  называется решением уравнения (126), если  $u(\vec{x}) \in C^1(\mathbb{R}^n)$  и после подстановки в (126) получается тождество, причём  $f^i(\vec{x}, u) \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$  – некоторые заданные функции. Уравнение (126) называется квазилинейным уравнением в частных производных первого порядка.

**Определение 6.5.** Рассмотрим систему ДУ:

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(\vec{x}, u) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f^n(\vec{x}, u) \end{cases} \quad (127)$$

Система (127) называется характеристической системой уравнения (126), а  $\vec{x}(t)$  – фазовые кривые (127) – называются характеристиками (126).

Основное свойство характеристик состоит в том, что уравнение для  $u(\vec{x})$  в силу (127) имеет вид

$$\frac{du}{dt} = F(\vec{x}(t), u) -$$

обыкновенное ДУ. Действительно, пусть  $u$  – решение (126), тогда

$$\frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x^i} f^i = F(\vec{x}(t), u)$$

Будем рассматривать уравнения вида

$$\sum_{i=1}^n f^i(\vec{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x^i} = F(\vec{x}, u) \quad (128)$$

**Определение 6.6.** Уравнения вида (128) называются линейными однородными уравнениями первого порядка в частных производных. Характеристической системой для (128) будем называть систему вида

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(\vec{x}) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f^n(\vec{x}) \end{cases} \quad (129)$$

**Теорема 6.4.** Пусть  $\nu_1(\vec{x}) = C_1, \dots, \nu_k(\vec{x}) = C_k$  являются независимыми первыми интегралами системы (129). Тогда функция  $u(\vec{x}) = F(\nu_1(\vec{x}), \dots, \nu_k(\vec{x}))$  является решением уравнения (128).

*Доказательство.* Запишем уравнение (128) следующим способом:

$$\sum_{i=1}^n f^i(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^n f^i(\vec{x}) \sum_{l=1}^k \frac{\partial u}{\partial \nu_l} \frac{\partial \nu_l}{\partial x^i} = \sum_{l=1}^k \frac{\partial u}{\partial \nu_l} \sum_{i=1}^n f^i(\vec{x}) \frac{\partial \nu_l}{\partial x^i} = 0$$

Получили тождество, значит  $u(\vec{x}) = F(\nu_1(\vec{x}), \dots, \nu_k(\vec{x}))$  действительно решение уравнения (128). ■

**Теорема 6.5.** Пусть функция  $u(\vec{x}) = F(\nu_1(\vec{x}), \dots, \nu_k(\vec{x}))$  является решением уравнения (128). Тогда  $\nu_1(\vec{x}) = C_1, \dots, \nu_k(\vec{x}) = C_k$  являются независимыми первыми интегралами системы (129).

*Доказательство.* Так как  $u(\vec{x})$  – решение, то

$$\sum_{i=1}^n f^i \frac{\partial u}{\partial x^i} = 0$$

Значит  $u(\vec{x})$  – первый интеграл системы (129) по критерию первого интеграла. Этот первый интеграл может зависеть только от независимых переменных  $\nu_1(\vec{x}), \dots, \nu_k(\vec{x})$ , причём  $u(\nu_1(\vec{x}), \dots, \nu_k(\vec{x})) = C_0$ , где  $\nu_1(\vec{x}), \dots, \nu_k(\vec{x})$  – первые интегралы системы (129). ■

### 6.5.2. Задача Коши для уравнения в частных производных первого порядка

Пусть  $S : g(\vec{x}) = 0$  – гладкая поверхность в  $\mathbb{R}^n$  и

$$\nabla g = \left\| \frac{\partial g}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x^n} \right\| \neq \vec{0}$$

**Определение 6.7.** Точка  $\vec{a} \in S$  называется некритической точкой поверхности, если в системе (129)  $\vec{f}(\vec{a}) \neq \vec{0}$  и  $(\nabla g(\vec{a}), \vec{f}(\vec{a})) \neq 0$  (фазовые траектории не лежат на  $S$ ).

Пусть на  $S$  задана функция  $U_0(\vec{x})$  и  $U_0(\vec{x}) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ .

Задача Коши: найти такое решение  $u(\vec{x})$  уравнения (128), что  $u(\vec{x}) = U_0(\vec{x}) \forall \vec{x} \in S$ .

**Теорема 6.6.** Пусть на гладкой поверхности  $S$  задана непрерывно дифференцируемая функция  $U_0(\vec{x})$ . Тогда если точка  $\vec{a}_0 \in S$  является некритической, то существует окрестность этой точки, в которой решение задачи Коши  $u(\vec{x}) = U_0(\vec{x})$  для уравнения (128) существует и единственно.

*Доказательство.* Запишем параметризацию поверхности  $S$  в  $\mathbb{R}^n$ :  $x^i = \varphi^i(u_1, \dots, u_{n-1})$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Поверхность  $S$  может быть параметризована, поскольку требование  $\nabla g \neq \vec{0}$  означает, что

$$\text{rank} \left\| \frac{\partial g}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x^n} \right\| = 1 \neq 0.$$

Значит по теореме о неявной функции параметризация поверхности  $S$  задаётся следующим образом:

$$\begin{cases} x^1 = \varphi(x^2, \dots, x^n) \\ x^2 = x^2 \\ \dots \\ x^n = x^n \end{cases}$$

Значит  $u(\vec{x}) = u(x^1, \dots, x^n) = u(\varphi(x^2, \dots, x^n), \dots, x^n) = U_0(x^2, \dots, x^n)$ .

Так как  $\vec{a}_0 \in S$  является некритической по условию, то существует такая окрестность этой точки  $\mathcal{U}(\vec{a}_0)$ , где существуют  $n - 1$  независимых первых интегралов системы (129):  $\nu_1(\vec{x}) = C_1, \dots, \nu_{n-1}(\vec{x}) = C_{n-1}$ , а общее решение уравнения (128)  $u = u(\nu_1(\vec{x}), \dots, \nu_{n-1}(\vec{x}))$ .

Рассмотрим систему уравнений относительно  $x^1, \dots, x^n$ :

$$\begin{cases} \nu_1(\vec{x}) = C_1 \\ \dots \\ \nu_{n-1}(\vec{x}) = C_{n-1} \\ g(\vec{x}) = 0 \end{cases} \quad (130)$$

Допустим, что систему удалось разрешить и была получена параметризация поверхности  $S$   $g(\vec{x}) = 0$ :

$$\begin{cases} x_S^1 = x_S^1(C_1, \dots, C_{n-1}) \\ \dots \\ x_S^n = x_S^n(C_1, \dots, C_{n-1}) \end{cases}$$

Рассмотрим

$$J(\vec{a}_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \nu_1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \nu_1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^n} \\ \frac{\partial g}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x^n} \end{vmatrix}(\vec{a}_0)$$

Так как  $\vec{f}(\vec{a}_0) \neq 0$ , то умножим  $i$ -ый столбец определителя  $J(\vec{a}_0)$  на  $r^i = f^i(\vec{a}_0)$  и прибавим к первому столбцу все те столбцы, которые умножились  $r^i = f^i(\vec{a}_0) \neq 0$ . Учтём, что  $\forall i = 1, n-1$ :

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \nu_i}{\partial x^j}(\vec{a}_0) f^j(\vec{a}_0) = 0$$

так как  $\nu_i$  – первый интеграл. Преобразованный определитель будет выглядеть следующим образом:

$$J'(\vec{a}_0) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \nu_1}{\partial x^2} r^2 & \dots & \frac{\partial \nu_1}{\partial x^n} r^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^2} r^2 & \dots & \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^n} r^n \\ (\nabla g, \vec{f}) & \frac{\partial g}{\partial x^2} r^2 & \dots & \frac{\partial g}{\partial x^n} r^n \end{vmatrix}(\vec{a}_0) = (-1)^{n+1} (\nabla g, \vec{f}) \begin{vmatrix} \frac{\partial \nu_1}{\partial x^2} r^2 & \dots & \frac{\partial \nu_1}{\partial x^n} r^n \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^2} r^2 & \dots & \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^n} r^n \end{vmatrix} \neq 0$$

Утверждение справедливо, так как  $(\nabla g, \vec{f}) \neq 0$  в нехарактеристической точке  $\vec{a}_0$  и

$$\text{rank} \begin{vmatrix} \frac{\partial \nu_1}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial \nu_1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^n} \end{vmatrix} = n - 1$$

так как первые интегралы функционально независимы.

Таким образом в силу непрерывности рассматриваемых функций существует окрестность  $\mathcal{U}(\vec{a}_0)$  в которой исходный определитель

$$J(\vec{a}_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \nu_1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \nu_1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \nu_{n-1}}{\partial x^n} \\ \frac{\partial g}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x^n} \end{vmatrix} \neq 0,$$



то есть определитель матрицы Якоби исходной системы (130) не равен нулю. Тогда по теореме о системе неявных функций система однозначно разрешима и существуют единственным образом определённые функции  $x_S^1 = x_S^1(C_1, \dots, C^{n-1}), \dots, x_S^2 = x_S^2(C_1, \dots, C^{n-1})$ , а значит  $u = u(x_S^1(C_1, \dots, C^{n-1}), \dots, x_S^n(C_1, \dots, C^{n-1}))$  является решением уравнения (128) и  $u(\vec{x}_S) = U_0(\vec{x}) \forall \vec{x} \in S$ . Единственность следует из однозначности решения. ■

Рассмотрим уравнение

$$a(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + c(x, y)z = f(x, y) \quad (131)$$

Функция  $z(x, y)$  – искомая функция, а функции  $a(x, y)$ ,  $b(x, y)$ ,  $c(x, y)$  непрерывно дифференцируемы в некоторой области  $D$ . Имеется кривая

$$\gamma = \begin{cases} x = \varphi(s) \\ y = \psi(s) \end{cases}, \quad s \in I = [s_1, s_2],$$

которая является непрерывно дифференцируемой в  $I$  и  $(\varphi'(s), \psi'(s)) \neq (0, 0) \forall s \in I$ . На кривой  $\gamma$  задано значение функции  $z|_\gamma = h(s)$ , то есть  $z(\varphi(s), \psi(s)) = h(s)$  и  $h(s)$  непрерывно дифференцируемая функция при  $s \in I$ .

Характеристическая система для уравнения (131) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x, y) \\ \dot{y} = b(x, y) \end{cases} \quad (132)$$

**Теорема 6.7.** Пусть кривая  $\gamma$  в каждой своей точке не касается характеристик. Тогда задача Коши для (131) и (132) однозначно разрешима в некоторой окрестности кривой  $\gamma$ .

*Доказательство.* Касательным вектором к фазовым траекториям (132) является вектор  $\vec{\varphi} = (a(x, y), b(x, y))$ , поэтому если кривая  $\gamma$  в каждой своей точке не касается фазовых характеристик, то  $\vec{\varphi} \nparallel \vec{\tau} = (\varphi'(s), \psi'(s))$ , а значит

$$\begin{vmatrix} a(\varphi(s), \psi(s)) & \varphi'(s) \\ b(\varphi(s), \psi(s)) & \psi'(s) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall s \in I \quad (133)$$

Выпустим из каждой точки кривой  $\gamma$  характеристику, то есть решим систему (132) с начальными условиями  $x|_{t=0} = \varphi(s), y|_{t=0} = \psi(s)$ . Пусть  $x = x(t, s)$ ,  $y = y(t, s)$  – некоторые решения системы.

Уравнение (131) в силу системы (132) имеет вид  $\frac{dz}{dt} + cz = f$ . Поставим задачу Коши для этого уравнения с  $z|_{t=0} = h(s)$ . По основной теореме и теореме о непрерывной зависимости решения от параметра (от начальных данных) существует решение поставленной задачи  $z = \omega(t, s)$  – непрерывно дифференцируемая функция в  $G \subset D$ . На соотношения  $x = x(t, s)$ ,  $y = y(t, s)$  можно смотреть как на систему уравнений относительно  $t$  и  $s$ , выразим их через  $x$  и  $y$ .

Так как

$$I(t, s) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a(x(t, s), y(t, s)) & \frac{\partial x}{\partial s}(t, s) \\ b(x(t, s), y(t, s)) & \frac{\partial y}{\partial s}(t, s) \end{vmatrix}$$

$$I(0, s) = \begin{vmatrix} a(\varphi(s), \psi(s)) & \varphi'(s) \\ b(\varphi(s), \psi(s)) & \psi'(s) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall s \in I,$$

поскольку  $I(t, s)$  – непрерывная от  $t$  и  $s$  функция. Тогда

$$I(0, s) = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \varphi'(s) & \psi'(s) \\ a(x, y) & b(x, y) \end{array} \right|_{(x, y) \in \gamma} \neq 0.$$

Поэтому существует окрестность кривой  $\gamma$ , в которой  $I(t, s) \neq 0$ . Тогда по теореме о неявных функциях можно выразить  $t = t(x, y)$ ,  $s = s(x, y)$  и подставить их в выражение для решения  $z = \omega(t, s) = \omega(t(x, y), s(x, y)) = \tilde{\omega}(x, y)$  – доказано существование решения.

Докажем единственность решения. Пусть имеется ещё одно решения задачи Коши для уравнения (131) с начальным условием  $z|_{\gamma} = h(s)$ , то есть  $z(\varphi(s), \psi(s)) = h(s)$  и  $h(s)$  непрерывно дифференцируемая функция при  $s \in I$ . Тогда, следуя тем же самым рассуждениям, получим существование решения  $z = \tilde{\omega}(x, y)$ . Пусть  $\bar{z} = \tilde{\omega} - \tilde{\omega}$ . Как уже было показано, уравнение (131) вместе с (132) при решении  $\bar{z}$  имеет вид

$$\frac{d\bar{z}}{dt} + c\bar{z} = 0, \quad \bar{z}|_{t=0} = 0.$$

По основной теореме  $z \equiv 0$  – единственное решение, то есть  $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}$ . Доказана единственность решения. ■

Важно понимать, что для решения однородного линейного уравнения в частных производных определяют только функционально независимые первые интегралы характеристической системы. Тогда как при решении уравнения типа (131) используют выражения для характеристик, то есть сами решения характеристических уравнений.

### 6.5.3. Примеры решения задач

1.

$$2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Характеристическая система для этого уравнения имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = 2 \\ \dot{y} = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} \Rightarrow 3x - 2y = C - \text{первый интеграл} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = f(3x - 2y) - \text{общее решение}$$

Поставим задачу Коши:  $u = 10$ ,  $3x - 2y = 1$  (характеристика), откуда  $10 = f(1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = 10 \cdot (3x - 2y)^2 - \text{решение} \\ u = 10 \cdot \frac{\sin(3x - 2y)^2}{\sin 1} - \text{тоже решение} \end{cases}$$

Решение не однозначно, так как задача Коши была задана на характеристике.

Поставим задачу Коши:  $u = \cos x$ ,  $3x - 2y = 1$ , откуда  $\cos x \neq \cos x = f(1) = \cos 1$  – противоречие, так как  $u \neq \cos x$  в начальных условиях.

2.

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = -z \tag{134}$$

Характеристическая система для этого уравнения имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = a \\ \dot{y} = b \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \Rightarrow bx - ay = \text{const} - \text{первый интеграл} \Rightarrow$$

В силу характеристической системы уравнений имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = -z - \text{соотношение на характеристике } z \Rightarrow \ln |z| = -t + C,$$

где  $C$  является константой на характеристике  $c = g(bx - ay) \Rightarrow$

$$\Rightarrow z = F(bx - ay)e^{-t} = F(bx - ay)e^{-\frac{x-x_0}{a}} = F(bx - ay)e^{-\frac{y-y_0}{b}},$$

где  $x_0, y_0$  – произвольные постоянные.

Рассмотрим задачу Коши  $z(2, y) = \sin y, x_0 = 2$ , тогда

$$F(bx - ay) = \tilde{F}\left(y - \frac{(x-2)b}{a}\right) \Rightarrow z = \tilde{F}\left(y - \frac{(x-2)b}{a}\right) e^{-\frac{x-2}{a}}$$

При  $x = 2$   $\tilde{F}(y) = \sin y \Rightarrow$

$$z = \sin\left(y - \frac{(x-2)b}{a}\right) e^{-\frac{x-2}{a}}$$

3. Для уравнения (134) поставим задачу Коши:  $bx - ay = 2$  (на характеристике),  $z = e^{-\frac{x-5}{a}}, x_0 = 5 \Rightarrow F(2) = 1$ , то есть начальным условиям удовлетворяет любая функция  $F$  такая, что  $F(2) = 1$  – неоднозначное решение.
4. Для уравнения (134) поставим задачу Коши:  $bx - ay = 2$  (на характеристике),  $z = \sin\left(\frac{x-x_0}{a}\right)$  – решение не существует, так как

$$\frac{e^{-\frac{x-x_0}{a}}}{\sin\left(\frac{x-x_0}{a}\right)} \neq \text{const} = F(2)$$

5. Рассмотрим уравнение Хопфа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u > 0, \quad u(0, x) = \varphi(x)$$

Уравнение характеристик:

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{dx}{d\tau} = u(x, t) - \text{нелинейное уравнение, так как характеристика содержит искомое решение}$$

Замена: независимую  $x$  будем считать искомой функцией  $x = x(t, u)$ .

$$u = -\frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial u, x}{\partial t, x}}{\frac{\partial u, t}{\partial x, t}} = \frac{\partial(u, x)}{\partial(u, t)} = \left| \frac{\frac{\partial u}{\partial u}}{\frac{\partial u}{\partial u}} \quad \frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{\frac{\partial t}{\partial t}} \right| = \left| \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial u}} \quad \frac{0}{\frac{\partial x}{\partial t}} \right| = \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)_u \Rightarrow x - ut = c(u) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = F(x - ut) - \text{общее решение (распространение волны)}$$

## 7. Билет 7. Элементы вариационного исчисления

### 7.1. Основные понятия

**Определение 7.1.** Пусть  $M$  - множество функций  $y(x)$ , а  $\mathcal{J}$  - отображение  $M$  в  $\mathbb{R}$  такое, что  $\mathcal{J} = \{\mathcal{J}(y(x)) \in \mathbb{R} : \forall y(x) \in M\}$ . Такое отображение называется **функционалом**, а  $a$  - область его определения.

$\forall y(x) \in C_{[a;b]}^1$  рассмотрим функционал  $\mathcal{J}(y(x)) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx$

Будем считать, что  $F(x, y(x), y'(x))$  как функцию трех независимых переменных  $x_1 = x, x_2 = y(x), x_3 = y'(x)$ , непрерывна вместе с  $\frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}, i, j = \overline{1, 3}$

### Постановка вариационной задачи

Вариационная задача состоит в том, чтобы среди функций  $y(x) \in D \subset C_{[a;b]}^1$  (в случае наличия дополнительного условия) найти такую функцию  $y_0(x)$ , что  $\mathcal{J}(y_0(x))$  принимает минимальное (максимальное) значение. Будет рассматривать  $y(x) \in C_{[a;b]}^1$ .

**Определение 7.2.** Множество функций  $D$ , которые удовлетворяет свойствам, которые мы наложим, называется **множеством варьируемых функций**.

**Определение 7.3.**  $y_0(x)$  такое что  $\mathcal{J}(y_0(x)) \leq \mathcal{J}(y(x)) [\mathcal{J}(y_0(x)) \geq \mathcal{J}(y(x))] \forall y(x) \in D$  называется **абсолютным экстремумом**  $\mathcal{J}$ .

Введём норму на  $C_{[a;b]}^1$  для определения типа экстремумов:  $\|y(x)\| = \max_{x \in [a;b]} |y(x)| + \max_{x \in [a;b]} |y'(x)|$  - все свойства нормы выполнены.

**Определение 7.4.** Пусть  $y(x) \in D$ . Функцию  $\delta y(x) \in C_{[a;b]}^1$  будем называть **допустимой вариацией**  $y(x)$ , если  $\forall y: y + \delta y \in D$

**Определение 7.5.** Множество функций  $V_\varepsilon(y_0(x)) = \{y(x) \in C_{[a;b]}^1 : \|y(x) - y_0(x)\| \leq \varepsilon\}$  будем называть  **$\varepsilon$ -окрестностью**  $y_0(x)$

### Основной принцип

Пусть  $y_0(x) \in D$  фиксирована, а  $\delta y(x)$  какая-либо фиксированная допустимая вариация такая, что  $\forall t \in [-1; 1] \mapsto y_0(x) + t\delta y(x) \in D \Rightarrow$

$$\mathcal{J}(y(x)) = \mathcal{J}(y_0(x) + t\delta y(x)) = \int_a^b F(x, y_0(x) + t\delta y(x), y_0'(x) + t(\delta y(x))') dx = \mathcal{J}(t)$$

В силу определения  $F$ , у него существуют 1 и 2 непрерывные производные по  $t$ , т.е  $\mathcal{J}(t)$  - дважды непрерывно дифференцируемая по  $t$  функция. Следовательно из формулы Тейлора:

$$\mathcal{J}(y_0 + t\delta y(x)) = \mathcal{J}(0) + \frac{d\mathcal{J}}{dt}(0) + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathcal{J}}{dt^2}(0) \cdot t^2 + o(t^2) = [ \text{обозначим } (\delta y(x))' = \delta y' ] \boxed{=}$$

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt}(t) = \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0 + t\delta y, y_0' + t\delta y') \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y_0 + t\delta y, y_0' + t\delta y') \delta y' \right] dx$$

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt}(0) = \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0, y'_0) \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y_0, y'_0) \delta y' \right] dx = \delta\mathcal{J} \text{- первая вариация} \quad (135)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathcal{J}}{dt^2}(t) = \int_a^b & \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y_0 + t\delta y, y'_0 + t\delta y') \delta y^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}(x, y_0 + t\delta y, y'_0 + t\delta y') \delta y \delta y' + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y_0 + t\delta y, y'_0 + t\delta y') \delta y'^2 \right] dx \end{aligned}$$

$$\frac{d^2\mathcal{J}}{dt^2}(0) = \int_a^b \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y_0, y'_0) \delta y^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}(x, y_0, y'_0) \delta y \delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y_0, y'_0) \delta y'^2 \right] dx = \delta^2\mathcal{J} \quad (136)$$

$\delta^2\mathcal{J}$ - вторая вариация

$$\boxed{\equiv} \mathcal{J}(y_0) + \delta\mathcal{J} \cdot t + \delta^2\mathcal{J} \cdot t^2 + o(t^2)$$

**Определение 7.6.** Функция  $y_0(x) \in D$  называется слабым экстремумом функционала  $\mathcal{J}$ , если  $\exists \varepsilon > 0 : \mathcal{J}(y_0(x)) \leq \mathcal{J}(y(x)) [\mathcal{J}(y_0(x)) \geq \mathcal{J}(y(x))] \forall y(x) \in V_\varepsilon(y_0(x))$ , т.е.  $\forall y(x) : \|y(x) - y_0(x)\| \leq \varepsilon$

**Теорема 7.1** (Основная теорема). Пусть  $y_0(x) \in D \subset C_{[a,b]}^1$  является слабым экстремумом функционала  $\mathcal{J}(y(x))$ . Тогда первая вариация  $\delta\mathcal{J}(y_0, \delta y) = 0$   $\forall$  допустимой  $\delta y$

*Доказательство.* Не нарушая общности рассуждений докажем для минимума.

При  $\delta y = 0$  из (135) следует, что  $\delta\mathcal{J}(y_0, \delta y) = 0$ . Пусть какая-либо допустимая  $\delta y \neq 0$ . Т.к.  $y_0(x)$  - слабый экстремум  $\mathcal{J}$ , то  $\exists \varepsilon > 0 : \forall y(x) = y_0(x) + t\delta y(x) : \|y(x) - y_0(x)\| < \varepsilon \mapsto \mathcal{J}(y_0) \leq \mathcal{J}(y)$ . Зафиксируем  $\delta y \neq 0$ . Т.к.  $\|y(x) - y_0(x)\| = \|y_0 + t\delta y(x) - y_0(x)\| < \varepsilon$ , то  $\|t \cdot \delta y\| < \varepsilon$ . Таким образом  $t \in \left( -\frac{\varepsilon}{\|\delta y(x)\|}; \frac{\varepsilon}{\|\delta y(x)\|} \right)$

Т.к  $y_0(x)$  - локальный минимум, то  $\mathcal{J}(y_0) \leq \mathcal{J}(y)$  или  $\mathcal{J}(0) \leq \mathcal{J}(t) \forall t \in \left[ -\frac{\varepsilon}{\|\delta y(x)\|}; \frac{\varepsilon}{\|\delta y(x)\|} \right]$

Таким образом  $\mathcal{J}(t)$  является непрерывно дифференцируемой функцией  $t$ , достигающий минимум при  $t = 0$ . Следовательно по теореме Ферма  $\frac{d\mathcal{J}}{dt}(0) = 0 = \delta\mathcal{J}$

Ввиду произвольности  $\delta y$  теорема доказана. ■

**Лемма 7.1** (Основная лемма вариационного исчисления). Пусть  $f(x) \in C_{[a,b]}^1$  и  $\int_a^b f(x) \cdot h(x) dx = 0 \forall h \in C_{[a,b]}^1$  и такой, что  $h(a) = h(b) = 0$ . Тогда  $f(x) = 0 \forall x \in [a; b]$

*Доказательство.* От противного: пусть  $\exists x_0 \in [a; b] : f(x_0) \neq 0$ . Тогда в силу непрерывности функции  $f(x)$   $\exists \delta > 0$  такое, что  $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \mapsto f(x) \neq 0$ . Для определенности рассмотрим  $f(x) > 0 \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ . Если так случилось, что  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \not\subset [a; b]$ , то уменьшим  $\delta$ , не нарушив при этом это условие:  $f(x) > 0$  на отрезке ненулевой длины.

Обозначим  $I_\delta = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$  и рассмотрим

$$h_\delta(x) = \begin{cases} [(x - x_0 + \delta)(x - x_0 - \delta)]^2 & x \in I_\delta \\ 0 & x \notin I_\delta \end{cases} \quad (137)$$

Т.к.  $h_\delta(x) > 0 \forall x \in I_\delta$ , то  $\int_a^b f(x) \cdot h_\delta(x) dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) \cdot h_\delta(x) dx > 0$  - противоречие с условием  $\int_a^b f(x) \cdot h(x) dx = 0 \Rightarrow \nexists x_0 \in [a; b] : f(x_0) \neq 0$  ■

**Примечание.** Лемма остаётся в силе, если в условии леммы  $\int_a^b f(x) \cdot h(x) dx = 0 \forall h \in C_{[a;b]}^n$  и  $h^{(i)}(a) = h^{(i)}(b) = 0, i = \overline{0, n-1}$ . В (138) достаточно взять

$$h_\delta(x) = \begin{cases} [(x - x_0 + \delta)(x - x_0 - \delta)]^{2n} & x \in I_\delta \\ 0 & x \notin I_\delta \end{cases} \quad (\text{Модифицированная лемма}) \quad (138)$$

## 7.2. Простейшие задачи вариационного исчисления

### 7.2.1. Задача с закрепленными концами

Требуется найти экстремум функционала  $\mathcal{J}(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx$  среди функций  $y(x) \in C_{[a;b]}^1$  таких, что  $y(a) = A, y(b) = B$ , а где  $A$  и  $B$  являются заданными константами. Таким образом экстремум ищется на множестве  $D = \{y(x) : y(a) = A, y(b) = B\} \subset C_{[a;b]}^1$ . Пусть  $y_0(x)$  - экстремум нашего функционала. Через  $H_\delta(y_0)$  обозначим  $\delta y(x) \in C_{[a;b]}^1 : \delta y(a) = \delta y(b) = 0$ . Покажем, что  $H_\delta(y_0)$  является множеством допустимых вариаций:  $\forall \delta y(x) \in H_\delta(y_0)$  для  $y(x) = y_0(x) + \delta y(x) \mapsto y(a) = A, y(b) = B \Rightarrow y_0(x) + \delta y \in D$

**Теорема 7.2.** Пусть  $y_0(x) \in C_{[a;b]}^2$  является слабым экстремумом функционала  $\mathcal{J}$  на  $D$ . Тогда  $y_0(x)$  удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа.

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0 \quad (139)$$

$$\text{Обозначение: } \frac{\partial F}{\partial y}(x, y_0(x), y_0'(x)) = \frac{\partial F}{\partial y}; \quad \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = \frac{\partial F}{\partial y'}$$

*Доказательство.* Т.к.  $y_0(x)$  является слабым экстремумом, то  $\forall \delta y(x) \in H_\delta(y_0) \mapsto$

$$\delta \mathcal{J} = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y'}_{\text{проинтегрируем по частям}} \right) dx = 0 \quad (\text{по основной теореме})$$

Концы закреплены:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx &= \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx = - \int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx \\ \delta \mathcal{J} &= \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) \delta y dx = 0 \quad \forall \delta y \in H_\delta(y_0) \end{aligned}$$

Заметим, что  $\forall \delta y \in H_\delta(y_0)$  и  $\delta \mathcal{J}$  удовлетворяют условиям основной леммы  $\Rightarrow$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

■

**Примечание.** Требование  $y_0(x) \in C_{[a;b]}^2$  является естественным, т.к. (139) для  $y_0(x)$  является ДУ второго порядка:  $\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y''$

**Определение 7.7.** Функцию  $y_0(x)$ , удовлетворяющую уравнению Эйлера и условиям множества  $D$  будем называть **допустимой экстремалью**.

### 7.2.2. Функционалы, зависящие от вектор-функции

Рассмотрим

$$\mathcal{J}(\vec{y}) = \int_a^b F(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x)) dx = \int_a^b F(x, \vec{y}(x), \vec{y}'(x)) dx, \quad (140)$$

где  $\vec{y}(x) = \|y_1, \dots, y_n\|$ ,  $\vec{y}'(x) = \|y_1', \dots, y_n'\|$

Рассмотрим задачу с закрепленными концами:

$$\vec{y}(a) = \vec{A} = \|y_1(a), \dots, y_n(a)\| = \|A_1, \dots, A_n\|, \vec{y}(b) = \vec{B} = \|y_1(b), \dots, y_n(b)\| = \|B_1, \dots, B_n\| \quad (141)$$

Считаем, что  $F(x, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n)$  - дважды непрерывно дифференцируема по совокупности переменных  $a \leq x \leq b$ ,  $-\infty < y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n < +\infty$ . Минимум (140)  $\wedge$  (141), без нарушения общности будем искать в классе  $y_i(x) \in C_{[a;b]}^1$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Введём  $|\vec{y}| = \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$

и  $\|\vec{y}\| = \max_{x \in [a;b]} |\vec{y}| + \max_{x \in [a;b]} \|\vec{y}'\|$

Множество допустимых вариаций  $H_\delta(\vec{y}_0) = \delta \vec{y}(x) = \|\delta y_1(x), \dots, \delta y_n(x)\| : \delta \vec{y}(a) = \delta \vec{y}(b) = 0$

Пусть  $\vec{y}_0(x) \in C_{[a;b]}^1$  - слабый минимум ( $\Rightarrow \delta \mathcal{J} = 0$ ), (140)  $\wedge$  (141). При условии (141) получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\vec{y}_0(x) + t \delta \vec{y}(x)) &= \int_a^b F(x, \vec{y}_0(x) + t \delta \vec{y}(x), \vec{y}_0'(x) + t(\delta \vec{y}(x))') dx = \mathcal{J}(t) = \mathcal{J}(0) + t \cdot \delta \mathcal{J} + o(t) = \\ &= \mathcal{J}(0) + \int_a^b \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_k} \delta y_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_k'} (\delta y_k)' \right) dx + o(t) = \mathcal{J}(0) + \int_a^b \left( \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_k'} \right) \delta y_k \right) dx + \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial y_k'}(b) \underbrace{(\delta y_k(b))}_{=0} \right) - \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial y_k'}(a) \underbrace{(\delta y_k(a))}_{=0} \right) + o(t) \\ \delta \mathcal{J} &= \int_a^b \left( \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_k'} \right) \delta y_k \right) dx = 0 \quad \boxed{\forall \delta \vec{y}(x) \in H_\delta(\vec{y}_0)} \end{aligned}$$

Итак,  $\delta \mathcal{J} = 0 \quad \forall \delta \vec{y}(x) \in H_\delta(\vec{y}_0)$ , тогда в силу произвольности выбора  $\delta \vec{y}(x)$ : пусть  $\delta y_1 = \delta y_2 = \dots = \delta y_{k-1} = 0$ ,  $\delta y_k = ((x-a)(x-b))^2$ ,  $\delta y_{k+1} = \dots = \delta y_n = 0$ .

Тогда

$$\delta \mathcal{J} = 0 + \int_a^b \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_k'} \right) \delta y_k dx + 0 = 0$$

$\Rightarrow$  Основная лемма  $\Rightarrow$  проходим все  $k = \overline{1, n}$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_k'} = 0, \quad k = \overline{1, n} \quad (\text{Система уравнений Эйлера-Лагранжа})}$$

### 7.2.3. Задача со свободными концами

Рассмотрим нахождение экстремума функционала  $\mathcal{J}(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx$  среди  $y(x) \in C_{[a,b]}^1$ . В этом случае  $D = C_{[a,b]}^1$ ,  $H_\delta(y_0) = \delta y(x) \in C_{[a,b]}^1$ , т.е. на  $\delta y(x)$  не наложено условий. На  $F$  наложены обычные условия: дважды непрерывной дифференцируемости всех переменных в совокупности.

Пусть  $y_0(x) \in C_{[a,b]}^2$  является минимум функционала.  $y = y_0 + t \cdot \delta y$

$$\delta \mathcal{J} = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} (\delta y)' \right) dx = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx + \frac{\partial F}{\partial y'}(y_0(b)) \delta y(b) - \frac{\partial F}{\partial y'}(y_0(a)) \delta y(a) = 0$$

По основной теореме  $\forall \delta y(x) \in C_{[a,b]}^1$

В силу произвольности  $\delta y$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, & (1) \\ \frac{\partial F}{\partial y'}(b; y_0(b); y_0'(b)) = 0, & (2) \\ \frac{\partial F}{\partial y'}(b; y_0(a); y_0'(a)) = 0, & (3) \end{cases}$$

Таким образом, если  $y_0(x) \in C_{[a,b]}^2$  является слабым экстремумом функционала со свободными концами, то  $y_0(x)$  удовлетворяет уравнению Эйлера (1) с граничными условиями (2 и 3)

### 7.3. Функционалы, зависящие от высших производных

Рассмотрим функционал

$$\mathcal{J}(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx \quad (2.3)$$

с условием

$$y(a) = A_0, \dots, y^{(n-1)}(a) = A_{n-1}; \quad y(b) = B_0, \dots, y^{(n-1)}(b) = B_{n-1} \quad (2.4)$$

Будем считать, что  $F(x, z_0, \dots, z_n)$   $n$  раз дифференцируема по совокупности всех переменных на  $a \leq x \leq b$ ;  $-\infty < z_0, \dots, z_n < \infty$ . Пусть  $y(x) \in C_{[a,b]}^n$ . Норму на этом множестве функций определим как

$$\|y\| = \sum_{k=0}^n \max_{x \in [a,b]} |y^{(k)}(x)|$$

Пусть  $y_0(x)$  является слабым минимумом 2.3  $\wedge$  2.4.

Множество допустимых вариаций:  $H_\delta(y_0) = \{\delta y(x) \in C_{[a,b]}^n, \delta y^{(i)}(a) = \delta y^{(i)}(b) = 0, i = \overline{1, n-1}\} \Rightarrow \mathcal{D} = \{y_0(x) + t \delta y(x) : \delta y(x) \in H_\delta(y_0)\}$  (доказательство аналогично).

$$\mathcal{J}(y_0(x) + t \delta y(x)) = \int_a^b F(x, y_0(x) + t \delta y(x); \dots; y_0^{(n)}(x) + t(\delta y(x))^{(n)}) dx = \mathcal{J}(t) = \mathcal{J}(0) + \delta \mathcal{J} t + o(t)$$

$$, \text{ где } \delta \mathcal{J} = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \dots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \delta y^{(n)} \right), \text{ где } \frac{\partial F}{\partial y^{(i)}} = \frac{\partial F(x, y_0(x), \dots, y_0^{(n)})}{\partial y^{(i)}}; \quad i = \overline{0, n}$$



Определение слабого максимума 2.3 аналогично определено в пункте 1.

Аналогично доказывается, что если  $y_0(x)$  — слабый минимум 2.3  $\wedge$  2.4, то  $\forall \delta y(x) \in H_\delta(y_0) \rightarrow \mathcal{J} = 0$ .

*Доказательство.* Если  $\delta y(x) \in H_\delta(y_0)$ , то

$$\begin{aligned} \forall k = \overline{1, n} \rightarrow \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} (\delta y)^{(k)} dx &= \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}(b) (\delta y(b))^{(k-1)} (= 0) - \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}(a) (\delta y(a))^{(k-1)} (= 0) - \int_a^b \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} (\delta y)^{(k-1)} dx \\ &= [\text{аналогично}] = \int_a^b \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} (\delta y)^{(k-2)} dx = \dots = \int_a^b \left(-\frac{d}{dx}\right)^k \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} \delta y dx \end{aligned}$$

. Тогда, если  $y_0(x)$  слабый минимум 2.3  $\wedge$  2.4, то имеем:

$$\delta \mathcal{J} = \int_a^b \left( \sum_{k=0}^n \left(-\frac{d}{dx}\right)^k \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} \delta y \right) dx = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} + \dots + \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) dx = 0 \quad (2.5)$$

■

Тогда, если  $y_0(x) \in C_{[a;b]}^{n+1}$  — слабый экстремум 2.3  $\wedge$  2.4, то из 2.5 и из основной леммы следует, что  $y_0(x)$  удовлетворяет **уравнению Эйлера**:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} + \dots + \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0 \quad (2.6)$$

#### 7.4. Условные вариационные принципы. Изопериметрическая задача.

Среди функций  $y(x) \in C_{[a;b]}^1$  найти такую, что  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$ , которая дает экстремум функционалу

$$\mathcal{J}(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (3.1)$$

и на которой функционалы  $\mathcal{G}(y) = \int_a^b g(x, y(x), y'(x)) dx$  принимает заданное значение  $l$ :

$$\mathcal{G}(y) = \int_a^b g(x, y(x), y'(x)) dx = l \quad (3.2)$$

Пусть  $F$  и  $g$  дважды непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных  $D = \{y(x) \in C_{[a;b]}^1 : y(a) = A, y(b) = B, G(y(x)) = l\}$   $H_\delta(y_0) = \{\delta y \in C_{[a;b]}^1 : \delta y(a) = \delta y(b) = 0\}$

**Теорема 7.3.** Пусть  $y_0(x) \in C_{[a;b]}^2$  и является слабым экстремумом 3.1 на множестве  $D$  и  $\exists \delta y_0 \in H_\delta(y_0(x)) : \delta \mathcal{G}(y_0, \delta y_0) \neq 0$ .

Положим  $\Phi = \mathcal{J} + \lambda \mathcal{G}$ . Тогда  $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \delta \Phi(y_0, \delta y) = 0 \quad \forall \delta y \in H_\delta(y_0)$

*Доказательство.* Пусть  $y_0(x) \in D$  является слабым экстремумом 3.1 на  $D$  и по условию теоремы  $\exists \delta y_0 \in H_\delta(y_0) : \delta \mathcal{G}(y_0, \delta y_0) \neq 0$ . Рассмотрим числа  $t_1, t_2$  и  $y(x) = y_0(x) + t_1 \delta y_0 + t_2 \delta y \in D$ , где  $\delta y_0$  зафиксированно. При фиксировании  $\delta y : \mathcal{J}(y_0(x) + t_1 \delta y_0 + t_2 \delta y) = \mathcal{J}(t_1, t_2)$  и

$$\mathcal{G}(y_0(x) + t_1 \delta y_0 + t_2 \delta y) = \mathcal{G}(t_1, t_2) = l \quad (3.3)$$

По условию  $y_0(x)$  — экстремум  $\mathcal{J}(y(x)) \Rightarrow$  при  $t_1 = t_2 = 0$   $\mathcal{J}(t_1, t_2)$  имеет экстремум при условии 3.2.

Из 3.2 и условия теоремы: в

$$\begin{aligned} y(x) = y_0 + t_1 \delta y_0 + t_2 \delta y &\Rightarrow \delta \mathcal{G}(y_0, \delta y_0) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t_1} \\ \delta \mathcal{G}(y_0, \delta y_0) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t_1} \Big|_{t_1=t_2=0} &= \int_a^b \left( \frac{\partial g}{\partial y} \delta y_0 + \frac{\partial g}{\partial y'} (\delta y_0)' \right) dx \neq 0 = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t_1} \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t_2} \Big|_{t_1=t_2=0} &= \int_a^b \left( \frac{\partial g}{\partial y} \delta y + \frac{\partial g}{\partial y'} (\delta y)' \right) dx \neq 0 = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t_2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Так как в 3.4  $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t_1} \neq 0$ , то по теореме о неявно заданной функции можно сказать, что 3.3 определяет неявную функцию  $t_1 = t_1(t_2)$ . По теореме о неявной функции эта функция непрерывно дифференцируема в окрестности точки  $(0; 0)$  и

$$\frac{dt_1}{dt_2} \Big|_{t_2=0} = - \frac{\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t_2}}{\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t_1}} \quad (3.5)$$

Функция  $\mathcal{J}(t_1(t_2); t_2) = \bar{\mathcal{J}}(t_2)$  при  $t_2 = 0$  имеет экстремум по условию. Тогда

$$\frac{d\mathcal{J}(t_1(t_2); t_2)}{dt_2} \Big|_{t_2=0} = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t_2} + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t_1} \cdot \frac{dt_1}{dt_2} \Big|_{t_2=0} = 0 \quad (3.6)$$

В силу 3.5 продолжим 3.6:  $\frac{d\mathcal{J}}{dt_2} \Big|_{t_2=0} = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t_2} - \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t_1} \cdot \frac{\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t_2}}{\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t_1}} = 0$

Обозначим через  $\lambda = - \frac{\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t_1}}{\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t_1}} \xrightarrow{3.6}$

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t_2} + \lambda \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t_2} = 0 \quad \forall \delta y \quad (3.8)$$

В 3.6 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t_1} &= \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t_1} \Big|_{t_1=t_2=0} = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \delta y_0 + \frac{\partial F}{\partial y'} (\delta y_0)' \right) dx, \\ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t_2} &= \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t_2} \Big|_{t_1=t_2=0} = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} (\delta y)' \right) dx \end{aligned} \quad (3.7)$$

Введем  $\Phi \mathcal{J} + \lambda \mathcal{G} \Rightarrow \delta \Phi \Big|_{t_2=0} = \frac{d\mathcal{J}}{dt_2} + \lambda \frac{d\mathcal{G}}{dt_2} = 0$  (3.8), тогда в силу 3.4 и 3.7

$$\begin{aligned} \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} (\delta y)' \right) dx + \lambda \int_a^b \left( \frac{\partial g}{\partial y} \delta y + \frac{\partial g}{\partial y'} (\delta y)' \right) dx &= 0 \Rightarrow \\ \delta \Phi &= \int_a^b \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \right) \delta y + \left( \frac{\partial F}{\partial y'} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y'} \right) \delta y' \right] dx = 0 \quad \forall \delta y \in h_\delta(y_0) \Rightarrow \end{aligned}$$

аналогично получаем уравнение Эйлера

$$\frac{\partial(\mathcal{F} + \lambda \mathcal{G})}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial(\mathcal{F} + \lambda \mathcal{G})}{\partial y'} = 0$$

В силу произвольности  $\delta y \in H_\delta(y_0)$  теорема доказана ■

## 7.5. Задача Лагранжа

Среди всех кривых  $y = y(x)$ ,  $z = z(x)$ , лежащих на поверхности  $g(x, y, z) = 0$  ( $g(x, y(x), z(x)) = 0$ ) найти те, которые дают экстремум функционалу  $\mathcal{J} = \int_a^b F(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)) dx$ .

Концы кривых закреплены, т.е.  $y(a) = A_1$ ,  $y(b) = B_1$ ,  $z(a) = A_2$ ,  $z(b) = B_2$ . Должно выполняться  $g(a, A_1, A_2) = g(b, B_1, B_2) = 0$ . К обычным условиям на  $F$ ,  $y(x)$ ,  $z(x)$  добавляется условие, что  $g(x, y, z)$  должна быть непрерывно дифференцируемой по совокупности переменных и  $(g'_y)^2 + (g'_x)^2 \neq 0 \quad \forall x \in [a; b]$ , т.е.  $g$  — простая гладкая поверхность без особых точек, назовем ее  $S$ ;

Среди всех кривых, лежащих на  $S$  и имеющих заданные концы, найти те, которые дают минимум  $\mathcal{J}$

**Теорема 7.4.** Пусть кривая  $j : a \leq x \leq b$ ,  $y_0 = y_0(x)$ ,  $z_0 = z_0(x)$  является слабым экстремумом Лагранжа. Тогда  $\exists \lambda = \lambda(x) : \text{первая вариация } F + \lambda g, \text{ т.е. } \delta(F + \lambda g) = 0 \quad \forall \delta y, \delta z$  ( $y$  является стационарной кривой для  $\int_a^b (F + \lambda g) dx$ ), т.е.

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \lambda(x) g'_y = 0 & - \text{ для } y(x) \\ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z'} + \lambda(x) g'_z = 0 & - \text{ для } z(x) \end{cases}$$

*Доказательство.*  $y(x) = y_0(x) + \delta y$ ;  $z(x) = z_0(x) + \delta z$ . Рассматриваем кривые, лежащие на поверхности, т.е.  $g(x; y_0 + t\delta y; z_0 + t\delta z) = 0 \Rightarrow g(x, y_0(x), z_0(x)) + g'_y \delta y t + g'_z \delta z t + o(t^2) = 0$ , т.к. экстремаль лежит на  $S$

$\Rightarrow$   
 $t \rightarrow \infty$

$$g'_y \delta y t g'_z \delta z = 0 \quad (3.9)$$

Таким образом в задаче Лагранжа допустимые вариации  $\delta y, \delta z$  всегда связаны условием 3.9. Пусть  $g'_z \neq 0$ . Тогда

$$\forall x : \delta z = -\frac{g'_y}{g'_z} \delta y \neq 0 \Rightarrow (\delta z)' = -\left(\frac{g'_y}{g'_z}\right) \delta y - \left(\frac{g'_y}{g'_z}\right)' (\delta y)'$$

В таком случае:

$$\delta \mathcal{J} = \int_a^b (F'_y \delta y + F'_{y'} (\delta y)' + F'_z \delta z + F'_{z'} (\delta z)') dx = \int_a^b \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{g'_y}{g'_z} \frac{\partial F}{\partial z} - \left( \frac{g'_y}{g'_z} \right)' \frac{\partial F}{\partial z'} \right) \delta y + \left( \frac{\partial F}{\partial y'} - \left( \frac{g'_y}{g'_z} \right) \frac{\partial F}{\partial z'} \right) \delta y' \right] dx =$$

интегрируем по частям и учитываем закрепленные концы

$$= \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \left( \frac{g'_y}{g'_z} \right) \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right) - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z'} \right) \delta y dx = 0, \text{ так как слабый экстремум } \forall \delta y, \delta z, 3.9 \text{ осн. лемма} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \left( \frac{g'_y}{g'_z} \right) \left( \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z'} \right) = 0$$

Обозначим  $\lambda(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z'}}{g'_z} \Rightarrow$  уравнение для  $y(x)$  принимает вид из условия

Аналогично, выражая  $\delta, y(\delta y)'$

$$-\lambda(x) g'_z - \left( \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z'} \right) = 0 \quad - \text{ уравнение для } z(x)$$

■

## 8. Дополнительные пункты

### 8.1. Элементы группового анализа ДУ

Уравнение первого порядка в общем виде:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad (142)$$

Если выполняется  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow F(x,y) = \text{const}$  – решение уравнения в полных дифференциалах.

Если же  $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ , то ищется интегрирующий множитель  $\mu(x,y)$  :  
 $\mu P dx + \mu Q dy = 0$  – уже уравнение в полных дифференциалах.

$$P \frac{\partial \mu}{\partial y} - Q \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \frac{\partial Q}{\partial x} - \mu \frac{\partial P}{\partial y} \quad (143)$$

$$P(y)dx + \varphi(x)dy = 0, \quad (144)$$

уравнение с разделяющимися переменными.

Если ДУ может быть приведено к виду (144), то оно интегрируемо. Рассмотрим, к каким переменным нужно перейти, чтобы уравнение  $y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y)$  свелось бы к уравнению с разделяющимися переменными.

### 8.2. Однопараметрические группы

Пусть имеется множество взаимно однозначных преобразований  $\mathbb{R}^n : \tau(\mathbb{R}^n)$ . Это множество образуем группу (относительно композиции). Каждому  $a \in \mathbb{R}$  соответствием  $\varphi$  сопоставим преобразование  $g_a = \varphi(a) \in \tau(\mathbb{R}^n)$ .

Следует ответить, что ассоциативность следует из ассоциативности матричного умножения.

Причем  $\varphi(a+b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$  и  $\varphi(0) = E$ , т.е.  $\varphi$  осуществляет изоморфизм коммутативной группы  $\mathbb{R}$  на группу  $\tau(\mathbb{R}^n)$ . Образ  $\varphi(R) \in \tau(\mathbb{R}^n)$  называется однопараметрической группой преобразований.

Было доказано, что однопараметрической группой будет фазовый поток автономной системы ДУ. Эта группа  $g_a = g_a(M(\vec{x})) = M(\vec{\varphi})$  задается в виде:

$$\vec{x}^i = \varphi^i(x^1, \dots, x^n) = \varphi^i(\vec{x}, a), \quad i = 1, n \text{ или}$$

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(\vec{x}, a) \quad (145)$$

Т.к. группа коммутативна, то  $\vec{\varphi}(\vec{x}, a+b) = \vec{\varphi}(\vec{\varphi}(\vec{x}, a), b) = \vec{\varphi}(\vec{\varphi}(\vec{x}, b), a)$ , а  $\vec{\varphi}(\vec{x}, 0) = \vec{x}$ .

Будем предполагать, что вектор-функция  $\vec{\varphi}(\vec{x}, a)$  непрерывно дифференцируема по всем своим аргументам.

Рассмотрим однопараметрическую группу преобразований плоскости  $(x,y)(\mathbb{R}^2)$  –

$$g_a = g_a(M(x,y)) \Rightarrow \vec{x} = \varphi(x,y,a), \quad \vec{y} = \psi(x,y,a), \quad (146)$$
$$\varphi(x,y,0) = x, \quad \psi(x,y,0) = y$$

**Определение 8.1.** *траекторией (или орбита группы) – параметрическое представление кривой  $\gamma$ , проходящей через  $(x,y)$ , при фиксированных  $x,y$  (146).*

Кривая  $\gamma$  при сделанных предположениях является **гладкой кривой**, поэтому с ней можно связать векторное поле, т.е. в каждой точке  $M(x,y)$  поставим в соответствие вектор  $\vec{h}(\xi(x,y), \zeta(x,y))$ , касательный к  $\gamma$ , проходящей через эту точку.

Компоненты вектора  $\vec{h}$ , касательного к кривой  $\gamma$  в точке  $(x,y)$  равны

$$\xi(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial a}|_{a \rightarrow 0}, \quad \zeta(x,y) = \frac{\partial \psi}{\partial a}|_{a \rightarrow 0},$$

а само векторное поле определено как отображение:

$$(x,y) \rightarrow \partial g_a(M(x,y)) = \vec{h}(\xi(x,y), \zeta(x,y)) = \frac{dg_a}{da}|_{a \rightarrow 0} \quad (147)$$

Это векторное поле называется **касательным векторным полем** группы.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \frac{dg_{a+b}(M)}{db}|_{b \rightarrow 0} &= \frac{d(g_a \cdot g_b)}{db}|_{b \rightarrow 0} = \frac{d(g_b \cdot g_a)}{db}|_{b \rightarrow 0} = \\ &= \left(\frac{dg_a}{db}|_{b \rightarrow 0}\right)g_a = \partial g_a(g_a(M(x,y))) = \partial g_a(x,y,a) = \vec{h}(\xi(x,y), \zeta(x,y)). \end{aligned} \quad (148)$$

Т.к.  $\vec{h}(\xi(x,y), \zeta(x,y))$  является касательным к  $\gamma$  при фиксированном  $a$ , то кривая  $\gamma$  является **фазовой траекторией** автономной системы.

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{da} = \xi(\vec{x}, \vec{y}) = \varphi'_a(\vec{x}, \vec{y}), \\ \frac{d\vec{y}}{da} = \zeta(\vec{x}, \vec{y}) = \psi'_a(\vec{x}, \vec{y}), \end{cases} \quad (149)$$

Система (149) (она может записываться в виде  $\partial_a g(x,y,a) = \vec{h}(g_a(x,y,a))$ ) называется **уравнением Ли**.

Ранее было получено, что любая автономная система определяет однопараметрическую группу преобразований (фазовый поток).

$$\text{Оператор } X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \zeta \frac{\partial}{\partial y} - \text{генератор группы.} \quad (150)$$

Т.к.  $X(u) = \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \zeta \frac{\partial u}{\partial y}$ , то становится ясно, что генератор группы является оператором дифференцирования в силу системы Ли (группы Ли) или оператором дифференцирования по направлению векторного поля группы.

**Определение 8.2.** Функция  $F(x,y)$  называется **инвариантом группы** (146), если  $F(\vec{x}, \vec{y}) = F(x,y) \forall a$ , т.е.  $F$  постоянна на любой траектории (146).

Т.о., если функция  $F(x,y)$  является инвариантом группы, то  $X(F(x,y)) = \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \zeta \frac{\partial F}{\partial y} = \xi \cdot 0 + \zeta \cdot 0 = 0$ , и т.о. инвариант группы (146) является просто первым интегралом (149).

Рассмотрим группы  $\vec{x} = x + a$ ,  $\vec{y} = y$  — группа смещений  $\Rightarrow$  генератор группы  $X = 1 \frac{\partial}{\partial x} + 0 \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}$ , а инвариантом этой группы является любой  $F(x,y) = f(y)$ .

**Теорема 8.1.** Любая однопараметрическая группа с генератором 150 может быть с помощью подходящей замены

$$t = t(x,y), \quad u = u(x,y) \quad (151)$$

приведена к группе смещений

$$\vec{t} = t + a, \vec{u} = u. \quad (152)$$

**Замечание:** в новых переменных генератор имеет вид  $X = \frac{\partial}{\partial t}$ , и инвариант группы остается инвариантом и в новых переменных (см. инвариантность ПИ относительно гладкой замены).

*Доказательство.* Имеется

$$\xi \frac{\partial}{\partial x} + \zeta \frac{\partial}{\partial y} = \xi \left( \frac{\partial}{\partial t} t'_x + \frac{\partial}{\partial u} u'_x \right) + \zeta \left( \frac{\partial}{\partial t} t'_y + \frac{\partial}{\partial u} u'_y \right) = X(t) \frac{\partial}{\partial t} + X(u) \frac{\partial}{\partial u}.$$

Отсюда получаем, что функции (151), которые приводят группу к группе смещений, должны удовлетворять условиям:

$$X(t) = 1 \Rightarrow \xi \frac{\partial t}{\partial x} + \zeta \frac{\partial t}{\partial y} = 1; \quad X(u) = 0 \Rightarrow \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \zeta \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (153)$$

Так, определенные переменные  $t$  и  $u$  называются **каноническими переменными**.

Заметим, что переменные и являются инвариантом исходной группы, поскольку  $X(u) = 0$

■

**Теорема 8.2.** Орбиты группы либо совпадают, либо не пересекаются.

*Доказательство.* Пусть произошло пересечение:  $g_a(M, a) = g_b(M_1, b)$ , причем  $M_1$  не принадлежит орбите точки  $M$ . Пусть  $b < a$ , подействуем  $g_{-b}$  на последнее равенство:

$$g_{-b}(g_a(M, 1)) = g_{-b}(g_b(M_1, b)) \Rightarrow g_{-b+a}(M, a) = E(M_1) \Rightarrow$$

т.  $M_1$  принадлежит орбите т.  $M$  – противоречие.

■

Рассмотрим ДУ:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (154)$$

Будем говорить, что группа  $g_a$  является **группой симметрии** ДУ (154) (или (154) допускает группу  $g_a$ ), если форма ДУ (154) остается неизменной после замены переменных при замене

$$\begin{cases} \bar{x} = \varphi(x, y, a), \\ \bar{y} = \psi(x, y, a) \end{cases} \quad (155)$$

т.е.  $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{y})$ , где  $f$  то же самое, что и в (154).

Если ДУ (154) допускает группу, то тогда  $f(\bar{x}, \bar{y}) = f(x, y) \forall a$ , и правая часть (154) является инвариантом группы. Тогда, перейдя к каноническим переменным, получим, что в таких переменных  $t$  и  $u$  уравнение примет вид:

$$\frac{du}{dt} = g(u), \quad (156)$$

т.е. получили уравнение с разделяющимися переменными.

### 8.3. Построение Жорданова базиса

Для характеристического многочлена справедливо разложение:

$$\frac{1}{P_n(\lambda)} = \frac{1}{(\lambda - \lambda_1)^{k_1} \dots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}} = \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^{k_i} \frac{A_l^i}{(\lambda - \lambda_i)^l}, \quad A_l^i \in \mathbb{R}$$

После сложения по внутренней сумме:

$$\frac{1}{P_n(\lambda)} = \frac{1}{(\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{k_m}} = \frac{f_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)^{k_1}} + \dots + \frac{f_s(\lambda)}{(\lambda - \lambda_s)^{k_s}} + \dots + \frac{f_m(\lambda)}{(\lambda - \lambda_m)^{k_m}}$$

где  $f_s(\lambda)$  – многочлен степени не выше  $k_{s-1}$ ,  $s = \overline{1, m}$ . Умножим на  $P_n(\lambda)$ :

$$1 = Q_1(\lambda) + \dots + Q_m(\lambda)$$

$$Q_s(\lambda) = f_s(\lambda) \cdot \frac{P_n(\lambda)}{(\lambda - \lambda_s)^{k_s}} = f_s(\lambda) \cdot (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_{s-1})^{k_{s-1}} \cdot (\lambda - \lambda_{s+1})^{k_{s+1}} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{k_m} \quad (157)$$

Рассмотрим множество квадратных матриц одного порядка. Это множество является ассоциативным кольцом с единицей, поэтому

$$A^n \cdot A^m = A^{n+m} = A^m \cdot A^n; \quad A^0 \stackrel{\text{def}}{=} E$$

Определено коммутативное и ассоциативное сложение матриц. Нулевую матрицу примем за ноль. Согласно свойствам умножения матриц на числа:

$$A^k \cdot \alpha = \alpha A^k, \quad \alpha A^k + \beta A^k = (\alpha + \beta) A^k$$

Таким образом правила приведения подобных членов аналогично правилу для многочленов.

$$A^k + (-1 \cdot A^k) = A^k + (-A^k) = 0$$

В качестве символа  $x$  в определении многочлена можно взять квадратную матрицу  $A$  и получить множество матричных многочленов  $\{P_n(A)\}$

$$P_n(A) = a_0 E + a_1 A + \dots + a_n A^n$$

На множестве  $\{P_n(A)\}$  сложение и умножение определяются как обычные матричные действия, поэтому  $\{P_n(A)\}$  является кольцом.

1.  $P_n(A) + P_m(A) = P_m(A) + P_n(A)$
2.  $(P_n(A) + P_m(A)) + P_s(A) = P_n(A) + (P_m(A) + P_s(A))$
3.  $P_n(A) \cdot P_m(A) = P_m(A) \cdot P_n(A)$
4.  $(P_n(A) \cdot P_m(A)) \cdot P_s(A) = P_n(A) \cdot (P_m(A) \cdot P_s(A))$
5.  $P_n(A) \cdot (P_m(A) + P_s(A)) = P_n(A) \cdot P_m(A) + P_n(A) \cdot P_s(A)$

За ноль в этом множестве принимается нулевая матрица.

**Определение 8.3.** *Отображение  $\varphi$  кольца  $K$  на кольцо  $K'$  называется гомоморфизмом, если  $\forall a \in K, \forall b \in K$ :*

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b); \quad \varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$$

В отличие от изоморфизма гомоморфизм не обязательно является взаимно однозначным отображением, т.е. не предполагается, что образы  $K$  заполняют все кольцо  $K'$ , и различным элементам из  $K$  соответствуют разные элементы из  $K'$ .

В силу определения множеств  $\{P_n(A)\}$  и  $\{P_n(\lambda)\}$ , кольца  $\{P_n(A)\}$  и  $\{P_n(\lambda)\}$  гомоморфны:

$$\varphi : \varphi(P_n(\lambda)) \longrightarrow P_n(A)$$

Неоднозначность отображения  $\varphi$  возникает в силу того, что существуют такие квадратные матрицы  $A \neq 0 : \exists n \in \mathbb{N} : A^n = 0 \forall m \geq n$ .

**Теорема 8.3** (Гамильтона-Кэли). Пусть  $P_n(\lambda)$  — характеристический многочлен матрицы  $A$ , тогда  $P_n(A) = 0$ .

В силу построения гомоморфизма между  $\{P_n(A)\}$  и  $\{P_n(\lambda)\}$  имеет место разложение:

$$P_n(A) = A^n + a_1 \cdot A^{n-1} + \dots + a_o \cdot E = (A - \lambda_1 E)^{k_1} \cdot \dots \cdot (A - \lambda_m E)^{k_m}$$

где  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  — корни  $P_n(A)$ .

Поддействуем гомоморфизмом  $\varphi$  на (157) :

$$E = Q_1(A) + \dots + Q_m(A)$$

$$Q_s(A) = f_s(A) \cdot (A - \lambda_1 E)^{k_1} \cdot \dots \cdot (A - \lambda_{s-1} E)^{k_{s-1}} \cdot (A - \lambda_{s+1} E)^{k_{s+1}} \cdot \dots \cdot (A - \lambda_m E)^{k_m} \quad (158)$$

$Q_s(A)$  — линейные преобразования

Порядок сомножителей в (158) не важен, т.к. матрицы  $(A - \lambda_s E)$  такого вида перестановочны между собой.

Рассмотрим  $Q_i(A)$ . Покажем, что  $\forall i, j = \overline{1, m} \mapsto$

$$Q_i(A) \cdot Q_j(A) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ Q_i^2, i = j \end{cases} \quad \text{и } Q_i(A) = Q_i^2(A) \quad (159)$$

*Доказательство.*  $Q_i(A) \cdot Q_j(A) = f_i(A) \cdot f_j(A) \cdot (A - \lambda_1 E)^{k_1} \cdot \dots \cdot (A - \lambda_{i-1} E)^{k_{i-1}} \cdot (A - \lambda_{i+1} E)^{k_{i+1}} \cdot \dots \cdot (A - \lambda_m E)^{k_m} \cdot (A - \lambda_1 E)^{k_1} \cdot \dots \cdot (A - \lambda_{j-1} E)^{k_{j-1}} \cdot (A - \lambda_{j+1} E)^{k_{j+1}} \cdot \dots \cdot (A - \lambda_m E)^{k_m} = M(A) \cdot P_n(A) = (\text{Теорема Гамильтона-Кэли}) = 0$

В силу (158):

$$\begin{aligned} \vec{x} = E\vec{x} &= Q_1(\vec{x}) + \dots + Q_i(\vec{x}) + \dots + Q_m(\vec{x}) \\ \Rightarrow Q_i(\vec{x}) &= (Q_i Q_1)(\vec{x}) + \dots + (Q_i^2)(\vec{x}) + \dots + (Q_i Q_n)(\vec{x}) = Q_i^2(\vec{x}) \end{aligned}$$

■

Пусть  $R_i = \text{Im} Q_i(A)$ ,  $i = \overline{1, m}$  — образ  $Q_i(A)$ . Из (159) следует, что  $R_i$  — инвариантное подпространство  $A$ . Тогда, если  $\vec{x} \in R_i \rightarrow \exists \vec{y} \in A$ ,  $Q_i(\vec{y}) = \vec{x}$ , то  $A(\vec{x}) = A(Q_i(\vec{y})) = (A \cdot Q_i)(\vec{y}) = (Q_i A)(\vec{y}) = Q_i(A(\vec{y})) \in R_i$  — инвариантное подпространство.

При доказательстве (159) было получено, что:

$$\vec{x} = E\vec{x} = Q_1(\vec{x}) + \dots + Q_i(\vec{x}) + \dots + Q_m(\vec{x}) = \vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_i + \dots + \vec{x}_m \quad (160)$$

где  $\vec{x}_i = Q_i(\vec{x}) \in R_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

(159) означает, что  $\vec{R}^n$  является суммой подпространств  $R_i$ . Покажем, что такое разложение единственно:



*Доказательство.* Предположим, что хотя бы для одного  $k = \overline{1, m}$   $\exists \vec{y}_k = Q_k(z_k) \neq \vec{x}_k$  :  
 $\vec{x} = \sum_{k=1}^m Q_k(\vec{z}_k) = \vec{y}_1 + \dots + \vec{y}_i + \dots + \vec{y}_m$ . Тогда  $Q_i(\vec{x}) = \vec{x}_i = Q_i\left(\sum_{k=1}^m Q_k(\vec{z}_k)\right) \stackrel{Th \text{ Г.К.}}{=} Q_i^2(\vec{z}_i) =$   
 $Q_i(\vec{z}_i) = \vec{y}_i \Rightarrow \vec{x}_i = \vec{y}_i$  ■

Т.к. единственное разложение эквивалентно тому, что сумма подпространств прямая, то:

$$\vec{R}^n = R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_m$$

Тогда  $A$  в таком базисе будет иметь вид:

$$\left\| \begin{array}{cccc} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_m \end{array} \right\|$$

Подпространства  $R_i$  называются корневыми подпространствами  $\vec{R}^n$ .

**Теорема 8.4.**  $\forall s = \overline{1, m} : R_s = \ker(A - \lambda_s E)^{k_s} \quad \forall \vec{x} \in R_i \mapsto (A - \lambda_i E)^{k_i} \vec{x} = 0$

*Доказательство.* Пусть  $\vec{x} \in R_s \Rightarrow \exists \vec{y} \in R_s : \vec{x} = Q_i(\vec{y})$  в силу инвариантности  $R_s$ . Тогда  
 $(A - \lambda_s E)^{k_s} \vec{x} = (A - \lambda_s E)^{k_s} \cdot f_s(A) \cdot (A - \lambda_1 E)^{k_1} \cdot \dots \cdot (A - \lambda_{s-1} E)^{k_{s-1}} \cdot (A - \lambda_{s+1} E)^{k_{s+1}} \cdot \dots \cdot$   
 $(A - \lambda_m E)^{k_m} \vec{y} = f_s(A) \cdot P_n(A) \vec{y} = 0 \Rightarrow R_s \subseteq \ker(A - \lambda_s E)^{k_s}$ .

Пусть  $\vec{x} \in \ker(A - \lambda_s E)^{k_s}$ . Тогда  $\forall j \neq s : Q_j(\vec{x}) = 0$ , поскольку множитель  $(A - \lambda_s E)^{k_s}$  как множитель входит в представление  $Q_j$ . Поэтому из (160) в этом случае:  $\vec{x} = 0 + \dots + Q_s(\vec{x}) + \dots + 0 \Rightarrow \vec{x} \in R_s \Rightarrow \ker(A - \lambda_s E)^{k_s} \subseteq R_s$  ■

Рассмотрим структуру корневого подпространства. Покажем, что

$$\dim(R_s = \ker(A - \lambda_s E)^{k_s}) = k_s$$

**Лемма 8.1.** Пусть  $B$  является линейным преобразованием  $\vec{R}^n$  и  $R = \ker(B^l)$ ,  $n < l$ . Тогда, если  $\exists \vec{x} \in R : B^{l-1} \vec{x} \neq 0$ , то  $\dim R \geq l$ .

*Доказательство.* Рассмотрим систему векторов  $\vec{x}, B\vec{x}, \dots, B^{l-1} \vec{x} \in R$ . Ни один из векторов этой системы не равен нулю. Покажем, что эта система линейно независима. С этой целью рассмотрим нулевую линейную комбинацию этих векторов.

$$a_0 \vec{x} + a_1(B\vec{x}) + \dots + a_{n-1}(B^{l-1} \vec{x}) = 0 \quad (161)$$

Подействуем последовательно  $l - 1$  раз преобразованием  $B$  на (161):

$$\begin{cases} a_0(B\vec{x}) + a_1(B^2 \vec{x}) + \dots + a_{n-2}(B^{l-1} \vec{x}) = 0 \\ \dots \\ a_0(B^{l-2} \vec{x}) + a_1(B^{l-1} \vec{x}) + 0 + \dots + 0 = 0 \\ a_0(B^{l-1} \vec{x}) = 0 \end{cases}$$

$$(B^{l-1} \vec{x}) \neq 0 \text{ по условию} \Rightarrow a_0 = a_1 = \dots = a_{l-1} = 0 \Rightarrow \text{Вектора ЛНЗ}$$

Таким образом в  $R$  лежит как минимум  $l$  ЛНЗ векторов, а значит базис в  $R$  не может содержать меньше, чем  $l$  векторов  $\Rightarrow \dim R \geq l$ .

Было доказано, что пространства  $R_i$ ,  $i = \overline{1, s}$  образуют прямую сумму, равную  $\vec{R}^n$ , поэтому размерность  $\vec{R}^n$  является суммой размерностей подпространств, которые составляют эту прямую сумму. Т.к.  $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$ , то  $\forall i \mapsto \dim R_i = k_i$ , поскольку если  $\exists j : \dim R_j > k_j$ , то тогда должно существовать  $R_i$ , у которого размерность меньше, чем  $k_i$ , что в силу леммы невозможно. ■

Пусть  $\{\vec{e}_1^{\{\lambda_l\}}, \dots, \vec{e}_{k_l}^{\{\lambda_l\}}\}$ ,  $l = \overline{1, m}$  является базисом в корневом подпространстве  $R_l = \text{Ker}(A - \lambda_l E)^{k_l}$ . Тогда в базисе образованном из объединения базисов корневых подпространств систем  $\vec{x} = A\vec{x}$  имеет вид:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \sum_{j=1}^{k_l} \gamma_j^5 \vec{x}^j, \quad l = \overline{1, m}, \quad (162)$$

где  $A\vec{e}_j^{(\lambda_l)} = \sum_{s=1}^{kl} \gamma_j^s \vec{e}_s^{(\lambda_l)}$ .

Дальнейшее рассмотрение будет связано с выбором базиса (Жорданова) в корневом подпространстве  $R_i$  так, чтобы упростить (162).

Рассмотрим сужение преобразования  $A$  на подпространство  $R_i$ . Обозначим  $k_l = l$ ,  $\lambda_i = \bar{\lambda}$ , а  $A - \bar{\lambda}E = B$ , тогда  $\forall \vec{x} \in R_i : B^l(\vec{x}) = 0$  по определению  $R_i$ .

Выполним вложение:

$$0 \subseteq \text{Ker} B \subseteq \text{Ker} B^2 \subseteq \dots \subseteq \text{Ker} B^{i-1} \subseteq \text{Ker} B^i \subseteq \dots \subseteq \text{Ker} B^l.$$

Действительно,  $\forall \vec{x} : B^{i-1}(\vec{x}) = 0 \mapsto B^i(\vec{x}) = B(B^{i-1}(\vec{x})) = B(\vec{0}) = 0$

Обозначим  $T_i = \text{Ker} B^i$ ,  $i = \overline{1, l}$  и определим:

$$\nu^i : \nu^i = \{\vec{x} : B^i \vec{x} = 0, B^{i-1} \vec{x} \neq 0\}, \quad i = \overline{1, m} \leq l$$

По построению получаем, что  $\nu^i = T_i \setminus T_{i-1}$ ,  $i = 2, 3, \dots, m$ .

**Теорема 8.5.** Пусть  $j \ll i \leq m$ , тогда:

$$\forall \vec{h}_i \in \nu^i \exists \vec{h}_j \in \nu^j : \vec{h}_j = B^{i-j} \vec{h}_i \quad (163)$$

*Доказательство.* Построим такой  $\vec{h}_j$  и покажем, что он лежит в  $\nu_j$ .

$$B^j \vec{h}_j = B^j(B_{i-j}(\vec{h}_i)) = (B^{i-j} \cdot B^j)(\vec{h}_i) = B^i \vec{h}_i = 0;$$

$$B^{j-1} \vec{h}_j = B^{j-1}(B^{j-1}(\vec{h}_i)) = (B^{i-j} \cdot B^{j-1})(\vec{h}_i) = B^{i-1} \vec{h}_i \neq 0,$$

Таким образом  $\vec{h}_j \in \nu^j$  по определению  $\nu^j$ . ■

**Определение 8.4.** Система векторов  $\{\vec{h}_i^\alpha\} \in \nu^i$ ,  $\alpha = 1, \dots, r$  называется линейно независимой относительно  $T_{i-1}$ , если  $\alpha_1 \vec{h}_i^1 + \dots + \alpha_r \vec{h}_i^r \in T_{i-1}$  тогда и только тогда, когда  $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$

*Доказательство.* Из теоремы 10 следует, что если система векторов  $\{\vec{h}_i^\alpha\} \in \nu^i$ ,  $\alpha = \overline{1, r}$  линейно независима относительно  $T_{i-1}$ , то система векторов  $\{\vec{h}_j^\alpha = B^{i-j}(\vec{h}_i^\alpha)\} \in \nu^j$ ,  $\alpha = \overline{1, r}$  будет линейно независимой относительно  $T_{j-1}$ .

Действительно, пусть вектор  $\alpha_1 \vec{h}_i^1 + \dots + \alpha_r \vec{h}_i^r \in T_{i-1}$ . Тогда

$$B^{j-1}(\alpha_1 \vec{h}_j^1 + \dots + \alpha_r \vec{h}_j^r) = 0 = B^{j-1}(B^{i-j}(\alpha_1 \vec{h}_i^1 + \dots + \alpha_r \vec{h}_i^r)) = B^{i-1}(\alpha_1 \vec{h}_i^1 + \dots + \alpha_r \vec{h}_i^r)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \vec{h}_j^1 + \dots + \alpha_r \vec{h}_j^r \in T_{j-1} \Leftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$$
■

Перейдем к построению Жорданова базиса. Пусть в (163)  $i = 1, j = 0$ .  $B\bar{h}_1 = 0$ . Тогда  $\nu = \text{Ker} B = T_1$  является собственным подпространством преобразования  $A$  и векторы  $h_1, \alpha = \overline{1, r}$  являются ЛНЗ собственными векторами  $A$ , соответствующими числу  $\bar{\lambda}$ . Если ранг  $B$  (сужение  $A - \bar{\lambda}E$  на  $\text{Ker}(A - \bar{\lambda}E)^l$ ) равен  $m \leq l - 1$ , тогда  $r = l - m \geq 1$ , и векторы  $\vec{h}_1^1, \dots, \vec{h}_1^r$  образуют базис в  $T_1$ .

Допустим  $\text{rang} B = l - 1$ . Тогда существует только один собственный вектор  $\vec{h}_1^1$  и  $T_1$ , является одномерным собственным подпространством. Дальнейшее построение будем вести по индукции. При  $i = 1$  базис в  $\nu^1 = T_1$  состоит из одного собственного вектора  $\vec{h}_1^1$ . Предположим, что при  $k = i - 1 < l$  базис в  $\nu^{i-1}$  также состоит из одного вектора  $\vec{h}_{i-1}^1$ . В силу Теоремы 8.5 уравнение  $B\vec{h}_i^1 = \vec{h}_{i-1}^1, c^1 \in \mathfrak{R}$ .

**Утверждение 8.1.**  $\nu^i$  может быть представлено в виде:

$$\nu^i = \{\vec{h}_i : \vec{h}_i = \alpha_1 \vec{h}_i^1 + C^1 \vec{h}_1^1, \alpha_1 \in \mathfrak{R}, \alpha_1 \neq 0\} \quad (164)$$

*Доказательство.* Запишем:

$$\begin{cases} B^i(\alpha_1 \vec{h}_i^1 + c^1 \vec{h}_1^1) = B^{i-1}(B(\alpha_1 \vec{h}_i^1)) = B^{i-1}(\alpha_1 \vec{h}_{i-1}^1) = 0 \\ B^{i-1}(\alpha_1 \vec{h}_i^1 + c^1 \vec{h}_1^1) = B^{i-2}(B(\alpha_1 \vec{h}_i^1)) = B^{i-2}(\alpha_1 \vec{h}_{i-1}^1) \neq 0 \end{cases}$$

Из этого следует, что  $\vec{h}_i \in \nu^i$ . В силу равенства:

$$B\vec{h}_i^1 = \vec{h}_{i-1}^1 \mapsto \forall \vec{y} \in \nu^i \exists \alpha_1 \in \mathfrak{R} : B\vec{y} = \alpha_1 \vec{h}_{i-1}^1 \Rightarrow \vec{y},$$

имеет представление в (164). ■

Система ЛНЗ векторов в  $\nu^i$  относительно  $T_{i-1}$  будет состоять из одного вектора  $\vec{h}_i^1$ , т.к.  $\vec{h}_i \in T_1 \subseteq T_{i-1} \Leftrightarrow \alpha_1 = 0$ .

Продолжим описанный выше процесс, построим векторы  $\vec{h}_1^1, \dots, \vec{h}_i^1, \dots, \vec{h}_l^1$ . Эти векторы ЛНЗ (Лемма (8.1)) и образуют базис в  $T_i$ , т.к.  $R_i = \nu^1 \oplus \dots \oplus \nu^i \oplus \dots \oplus \nu^l$  в силу линейной независимости  $\nu^i$  от  $T_{i-1}$ .

Все эти векторы удовлетворяют системе:

$$(A - \bar{\lambda} \vec{h}_1) = 0, (A - \bar{\lambda} \vec{h}_i^1) = \vec{h}_{i-1}^1, i = 2, \dots, l \quad (165)$$

Вектор  $\vec{h}_2^1$  называется первым присоединенным к  $\vec{h}_1^1$ , соответственно  $\vec{h}_i^1 - i - 1$  присоединенный к  $\vec{h}_1^1$ .

Из (165):  $A\vec{h}_1^1 = \bar{\lambda} \vec{h}_1^1, A\vec{h}_i^1 = \bar{\lambda} \vec{h}_i^1 + \vec{h}_{i-1}^1, i = \overline{2, l}$ . Тогда матрица сужения  $A$  на  $R_i$  в построенном базисе называется Жордановой клеткой и имеет вид:

$$\left\| \begin{array}{cccc} \bar{\lambda} & 1 & & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} & 1 & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & 0 & \bar{\lambda} & 1 \\ 0 & & & 0 & \bar{\lambda} \end{array} \right\|$$

В случае, если ранг  $B$  равен  $m < l - 1$ , то существует  $r = l - m > 1$  ЛНЗ собственных вектора, которые образуют базис в  $\nu^1 = T_1 : \vec{h}_1^1, \dots, \vec{h}_1^r$ .

Пусть при  $i - 1 < l$  имеется  $\vec{h}_{i-1}^1, \dots, \vec{h}_{i-1}^p, p \leq r$  векторов образующих базис в  $\nu^{i-1}$ , т.е. максимальная, линейно независимая относительно  $T_{i-2}$ , система векторов из  $\nu^{i-1}$ . Из теоремы (8.5) следует, что системы уравнений  $B\vec{h}_i = \gamma_1 \vec{h}_{i-1}^1 + \dots + \gamma_p \vec{h}_{i-1}^p$  должна иметь

решение, поэтому согласно теореме Кронекера-Капелли, ранг  $B$  должен равняться рангу расширенной матрицы системы. При помощи элементарных преобразований сделаем нулевыми последние  $r = l - m$  строк матрицы  $B$ . Чтобы ранги совпали, числа  $\gamma_1, \dots, \gamma_p$  должны удовлетворять системе из  $r$  однородных линейных уравнений, которая получается из требования обращения в ноль всех последних  $r$  элементов дополнительного столбца  $B$ . Из теоремы (8.5) следует, что эта система уравнений относительно  $\gamma_1, \dots, \gamma_p$  будет иметь хотя бы одно ненулевое решение. Тогда ранг этой системы  $q \leq p - 1$  и будет существовать  $p - q$  наборов:

$$\vec{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} \gamma_1^1 \\ \dots \\ \gamma_p^1 \end{pmatrix}, \dots, \vec{\gamma}^{p-q} = \begin{pmatrix} \gamma_1^{p-q} \\ \dots \\ \gamma_p^{p-q} \end{pmatrix},$$

при которых уравнения  $B\vec{h}_i = \vec{h}_{i-1}^k \equiv \gamma_1^k \vec{h}_{i-1}^1 + \dots + \gamma_p^k \vec{h}_{i-1}^p$ ,  $k = \overline{1, p-q}$  будут иметь решения.

Каждый из наборов  $\vec{\gamma}^i$  определены с точностью до константы и столбцы представляющие соответствующие наборы, линейно независимы, как ФСР системы.

Множество  $\nu^i$  в этом случае представимо в виде:

$$\nu^i = \{ \vec{h}_i : \vec{h}_i = \sum_{k=1}^{p-q} \alpha_k \vec{h}_i^k + \sum_{k=1}^r c_k \vec{h}_1^k \}, \quad (166)$$

где  $\alpha_k \in \mathbb{R}$ ,  $B\vec{h}_i^k = \vec{h}_{i-1}^k$ ,  $c_k \in \mathbb{R}$ ;  $k = \overline{1, p-q}$  и все  $\alpha_k$  одновременно не равны нулю. Аналогично (163), проверяем корректность (166), то есть  $\nu^i$  записано в виде из (166). Если  $\vec{y} \in \nu^i$ , то существуют такие  $\alpha_k, k = \overline{1, p-q}$ , что:

$$B\vec{y} = \sum_{k=1}^{p-q} \alpha_k \vec{h}_{i-1}^k.$$

Тогда  $\vec{y}$  как решение этого уравнения имеет представление (166).

Покажем, что так полученные векторы  $\vec{h}_i^1, \dots, \vec{h}_i^{p-1}$  ЛНЗ относительно  $T_{i-1}$ . Рассмотрим  $\alpha_1 \vec{h}_i^1 + \dots + \alpha_{p-q} \vec{h}_i^{p-q} = 0$ . По предположению индукции  $\vec{h}_{i-1}^1, \dots, \vec{h}_{i-1}^{p-q}$  ЛНЗ относительно  $T_{i-2}$ . Имеем:

$$B(\alpha_1 \vec{h}_i^1 + \dots + \alpha_{p-q} \vec{h}_i^{p-q}) = 0 = \alpha_1 \vec{h}_{i-1}^1 + \dots + \alpha_{p-q} \vec{h}_{i-1}^{p-q}.$$

Откуда, в силу ЛНЗ векторов  $\vec{h}_{i-1}^1, \dots, \vec{h}_{i-1}^{p-q}$  относительно  $T_{i-2}$ , имеем  $\alpha_1 = \dots = \alpha_{p-q} = 0$ , что доказывает ЛНЗ векторов  $\vec{h}_i^1, \dots, \vec{h}_i^{p-q}$  относительно  $T_{i-1}$ . Из (166) следует, что векторы  $\vec{h}_i^1, \dots, \vec{h}_i^{p-q}$  образуют базис в  $\nu^i$  т.к.  $\vec{y} \in T_1 \subseteq T_{i-1} \Leftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ .

Таким образом, построим базис в  $\nu^i$ . Из доказательства следует, что  $\dim \nu^i < \dim \nu^{i-1}, \forall i$ . Полагая  $i = 2, \dots, m < l$ , строим  $R_l = \nu_1 \oplus \dots \oplus \nu^i \oplus \dots \oplus \nu^m$ , что возможно, поскольку  $\nu^i$  ЛНЗ относительно  $T_{i-1}$ ,  $i = \overline{2, m}$ .