0.1 Фундаментальная система решений и общее решение нормальной линейной однородной системы уравнений

Рассмотрим систему вида

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{f}, \tag{1}$$

где $A = ||a^i_j||$, $i, j = \overline{1,n}$ - матрица системы, причём a^i_j - числа; $\vec{f}(t) = \begin{Vmatrix} f^1(t) \\ \cdots \\ f^n(t) \end{Vmatrix}$ - вектор-столбец неоднородной системы; $\vec{x}(t) = \begin{Vmatrix} x^1(t) \\ \cdots \\ x^n(t) \end{Vmatrix}$ - вектор-столбец искомых функций.

Наряду с вышеприведённой записью также будем рассматривать запись вида:

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a^i_j x^j(t) + f^i, \ i = \overline{1,n}$$

Основная идея решения систем дифференциальных уравнений вида (1), состоит в том, что матрица системы рассматривается как матрица линейного преобразования линейного пространства $\vec{\mathbb{R}}^n$ (пространство, присоединнёное к аффинному $\mathbb{R}^n$), заданная в исходном базисе.

Пусть $S = \left\|\sigma^i_j\right\|$, $i, j = \overline{1,n}$ - матрица перехода от исходного базиса $\left\|\vec{e_1}, ..., \vec{e_n}\right\|$ к базису. Эти соотношения связаны выражением $\left\|\vec{e_1}, ..., \vec{e_n}\right\| = \left\|\vec{e_1'}, ..., \vec{e_n'}\right\| \cdot S$ или $\vec{e_i'} = \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma^k_i \vec{e_k}$, а координаты векторов в новом и старом базисе связаны формулой $\vec{x} = S\vec{x'}$ или $x^i = \sum\limits_{m=1}^{n} \sigma^i_m x'^m$.

Матрица перехода S обратима, поэтому $\exists S^{-1} = \left\|\tau^i_j\right\|$, $i, j = \overline{1,n}$, причём $SS^{-1} = S^{-1}S = E$, т.е. $\sum\limits_{k=1}^{n} \tau^i_k \sigma^k_j = \delta^i_j$. Тогда $\vec{x'} = S^{-1}\vec{x}$. Преобразуем исходную систему, умножив её справа на S^{-1}.

$$S^{-1}\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(S^{-1}\vec{x}) = S^{-1}A\vec{x} + S^{-1}\vec{f}$$

Подставив $\vec{x} = S\vec{\bar{x}}$, получим $\frac{d\vec{\bar{x}}}{dt} = \bar{A}\vec{x} + \vec{\bar{f}}$, где $\vec{\bar{f}}(t) = S^{-1}\vec{f}(t)$, а $\bar{A} = S^{-1}AS$ является матрицей преобразования A в новом базисе. Уравнение имеет **ковариантный вид**, поэтому задачи свелись к нахождению базиса, в котором система имела бы наиболее простой вид.

Пусть A - матрица системы (1) является матрицей линейного преобразования линейного пространства $\vec{\mathbb{R}}^n$, т.е. $\forall \vec{x} \in \vec{\mathbb{R}}^n \mapsto A\vec{x} = \vec{y} \in \vec{\mathbb{R}}^n$, тогда $A = \left\|A\vec{e_1}, ..., A\vec{e_n}\right\|$, т.е столбцы матрицы A являются компонентами образов базисных векторов.

Определение 0.1. *Подпространство $L \subset \vec{\mathbb{R}}^n$ называется **инвариантным** подпространством относительно преобразования A, если $\forall \vec{x} \in L \mapsto A\vec{x} \in L$.*

Пусть $\vec{e_1}, ..., \vec{e_s}, \vec{e_{s+1}}, ..., \vec{e_n}$ - базис в $\vec{\mathbb{R}}^n$, а $\vec{e_1}, ..., \vec{e_s}$ - базис в L.
Тогда $\forall i = \overline{1,s} \mapsto A\vec{e_i} = \sum\limits_{k=1}^{s} \gamma^k_i \vec{e_k}$ и матрица A в этом базисе будет иметь вид:

$$A = \begin{Vmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{Vmatrix}, \text{ где } A_1 = \begin{Vmatrix} \gamma^1_1 & \cdots & \gamma^1_s \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma^s_1 & \cdots & \gamma^s_s \end{Vmatrix}, \ O \text{ - нулевая матрица размером } (n-s) \times s.$$

Если $\vec{\mathbb{R}}^n = L^1 \oplus ... \oplus L^k$ и $L^i,\ i = \overline{1,k}$ - инвариантные подпространства, то в базисе, который является базисом-объединения всех базисотв инваритных подпространств, прямая сумма которых равна $\vec{\mathbb{R}}^n$, матрица будет иметь вид:

$$A = \begin{Vmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & A_k \end{Vmatrix}$$

$A_i,\ i = \overline{1,k}$ - квадратная матрица размерами $l_i < n$, которая является сужением матрицы преобразования A на инвариантное подпространство L_i

В таком случае искомую вектор-функцию можно переписать в виде:

$$\vec{x}(t) = \begin{Vmatrix} x^1 \\ \cdots \\ x^{l_1} \\ \cdots \\ x^{l_1+\ldots+l_{i-1}+1} \\ x^{l_1+\ldots+l_i} \\ \cdots \\ x^{l_1+..l_k+1} \\ \cdots \\ x^n \end{Vmatrix}$$

$$\text{Обозначим через } X_i = \begin{Vmatrix} x^{l_1+\ldots+l_{i-1}+1} \\ \cdots \\ x^{l_1+..+l_{i-1}+l_i} \end{Vmatrix}$$

Тогда система (1) распадается на k систем, порядок которых $l_i < n$:
$\dot{\vec{X}}_i = A_i \vec{X}_i + \vec{f}_i(t),\ i = \overline{1,k}$

Для приведения матрицы линейного преобразования к клеточно-диагональному виду нужно найти собственные векторы линейного преобразования. Вектор $\vec{x} \neq 0$ называется собственнным вектором линейного преобразования, матрица которого равна A, если $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Пусть $A = \left\| a^i_j \right\|,\ i,j = \overline{1,n}$, а $\begin{Vmatrix} x^1 \\ \cdots \\ x^n \end{Vmatrix}$ - компоненты собственного вектора. Тогда компоненты собственного вектора должны удовлетворять системе однородных линеней-ных уравнений вида $||A - \lambda E||\vec{x} = 0$. Чтобы эта система имела ненулевое решение необходимо, чтобы $\det ||A - \lambda E|| = P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \operatorname{trace} A + ... + \det A = 0$.
$P_n(\lambda)$ - характерестический многочлен матрицы A.

0.2 Линейная неоднородная система уравнений в случае, когда неоднородность представлена векторным квазимногочленом