0.1 Фундаментальная система решений и общее решение нормальной линейной однородной системы уравнений

Рассмотрим систему вида

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{f}, \tag{1}$$

где $A = ||a^i_j||$, $i, j = \overline{1, n}$ - матрица системы, причём a^i_j - числа; $\vec{f}(t) = \begin{Vmatrix} f^1(t) \\ \cdots \\ f^n(t) \end{Vmatrix}$ - вектор-столбец неоднородной системы; $\vec{x}(t) = \begin{Vmatrix} x^1(t) \\ \cdots \\ x^n(t) \end{Vmatrix}$ - вектор-столбец искомых функций.

Наряду с вышеприведённой записью также будем рассматривать запись вида:

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a^i_j x^j(t) + f^i,\ i = \overline{1, n}$$

Основная идея решения систем дифференциальных уравнений вида (1), состоит в том, что матрица системы рассматривается как матрица линейного преобразования линейного пространства $\vec{\mathbb{R}}^n$ (пространство, присоединнёное к аффинному $\mathbb{R}^n$), заданная в исходном базисе.

Пусть $S = \left\|\sigma^i_j\right\|$, $i, j = \overline{1, n}$ - матрица перехода от исходного базиса $\left\|\vec{e_1}, ..., \vec{e_n}\right\|$ к базису. Эти соотношения связаны выражением $\left\|\vec{e_1}, ..., \vec{e_n}\right\| = \left\|\vec{e'_1}, ..., \vec{e'_n}\right\| \cdot S$ или $\vec{e'_i} = \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma^k_i \vec{e_k}$, а координаты векторов в новом и старом базисе связаны формулой $\vec{x} = S\vec{x'}$ или $x^i = \sum\limits_{m=1}^{n} \sigma^i_m x'^m$.

Матрица перехода S обратима, поэтому $\exists S^{-1} = \left\|\tau^i_j\right\|$, $i, j = \overline{1, n}$, причём $SS^{-1} = S^{-1}S = E$, т.е. $\sum\limits_{k=1}^{n} \tau^i_k \sigma^k_j = \delta^i_j$. Тогда $\vec{x'} = S^{-1}\vec{x}$. Преобразуем исходную систему, умножив её справа на S^{-1}.

$$S^{-1}\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(S^{-1}\vec{x}) = S^{-1}A\vec{x} + S^{-1}\vec{f}$$

Подставив $\vec{x} = S\vec{\bar{x}}$, получим $\frac{d\vec{\bar{x}}}{dt} = \bar{A}\vec{x} + \vec{\bar{f}}$, где $\vec{\bar{f}}(t) = S^{-1}\vec{f}(t)$, а $\bar{A} = S^{-1}AS$ является матрицей преобразования A в новом базисе. Уравнение имеет **ковариантный вид**, поэтому задачи свелись к нахождению базиса, в котором система имела бы наиболее простой вид.

Пусть A - матрица системы (1) является матрицей линейного преобразования линейного пространства $\vec{\mathbb{R}}^n$, т.е. $\forall \vec{x} \in \vec{\mathbb{R}}^n \mapsto A\vec{x} = \vec{y} \in \vec{\mathbb{R}}^n$, тогда $A = \left\|A\vec{e_1}, ..., A\vec{e_n}\right\|$, т.е столбцы матрицы A являются компонентами образов базисных векторов.

Определение 0.1. *Подпространство $L \subset \vec{\mathbb{R}}^n$ называется* ***инвариантным*** *подпространством относительно преобразования A, если $\forall \vec{x} \in L \mapsto A\vec{x} \in L$.*

Пусть $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_s, \vec{e}_{s+1}, ..., \vec{e}_n$ - базис в $\vec{\mathbb{R}}^n$, а $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_s$ - базис в L.
Тогда $\forall i = \overline{1, s} \mapsto A\vec{e_i} = \sum\limits_{k=1}^{s} \gamma^k_i \vec{e_k}$ и матрица A в этом базисе будет иметь вид:

$$A = \begin{Vmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{Vmatrix},\ \text{где } A_1 = \begin{Vmatrix} \gamma^1_1 & \cdots & \gamma^1_s \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma^s_1 & \cdots & \gamma^s_s \end{Vmatrix},\ O \text{ - нулевая матрица размером } (n-s) \times s.$$

Если $\vec{\mathbb{R}}^n = L^1 \oplus ... \oplus L^k$ и $L^i,\ i = \overline{1,k}$ - инвариантные подпространства, то в базисе, который является базисом-объединения всех базисотв инваритных подпространств, прямая сумма которых равна $\vec{\mathbb{R}}^n$, матрица будет иметь вид:

$$A = \begin{Vmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & A_k \end{Vmatrix}$$

$A_i,\ i = \overline{1,k}$ - квадратная матрица размерами $l_i < n$, которая является сужением матрицы преобразования A на инвариантное подпространство L_i

В таком случае искомую вектор-функцию можно переписать в виде:

$$\vec{x}(t) = \begin{Vmatrix} x^1 \\ \cdots \\ x^{l_1} \\ \cdots \\ x^{l_1+\ldots+l_{i-1}+1} \\ x^{l_1+\ldots+l_i} \\ \cdots \\ x^{l_1+..l_k+1} \\ \cdots \\ x^n \end{Vmatrix}$$

$$\text{Обозначим через } X_i = \begin{Vmatrix} x^{l_1+\ldots+l_{i-1}+1} \\ \cdots \\ x^{l_1+..+l_{i-1}+l_i} \end{Vmatrix}$$

Тогда система (1) распадается на k систем, порядок которых $l_i < n$:
$\dot{\vec{X}}_i = A_i \vec{X}_i + \vec{f}_i(t),\ i = \overline{1,k}$

Для приведения матрицы линейного преобразования к клеточно-диагональному виду нужно найти собственные векторы линейного преобразования. Вектор $\vec{x} \neq 0$ называется собственнным вектором линейного преобразования, матрица которого равна A, если $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Пусть $A = \left\| a^i_j \right\|,\ i,j = \overline{1,n}$, а $\begin{Vmatrix} x^1 \\ \cdots \\ x^n \end{Vmatrix}$ - компоненты собственного вектора. Тогда компоненты собственного вектора должны удовлетворять системе однородных линеней-ных уравнений вида $||A - \lambda E||\vec{x} = 0$. Чтобы эта система имела ненулевое решение необходимо, чтобы $\det ||A - \lambda E|| = P_n(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\operatorname{trace} A + ... + \det A = 0$.
$P_n(\lambda)$ - характерестический многочлен матрицы A.

Случай простых корней характеристического многочлена

Рассмотрим однорудную систему с постоянными коэффициентами

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \tag{2}$$

. Задача состоит в том, чтобы найти вектор функции $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$, которые будут образовывать ФСР нашей системы.

Корни характеристического многочлена $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ простые и действительные.

Таким $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ соответствуют собственные векторы $\vec{h}_1, \ldots, \vec{h}_n$ ($A\vec{h}_i = \lambda_i \vec{h}_i$) Можно показать, что собственные вектора, соответствующие разным собственным значениям линейно независимы, поэтому существует базис из собственнных векторов $\vec{h}_1, \ldots, \vec{h}_n$, в котором матрица A имеет вид: $\bar{A} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{Vmatrix}$ Тогда система (2) будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}^1}{dt} = \lambda_1 \vec{x}^1 \\ \cdots \\ \dfrac{d\vec{x}^n}{dt} = \lambda_n \vec{x}^n \end{cases} \implies$$

вектор-функции $\varphi_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix} e^{\lambda_1 t}$, ..., $\varphi_n = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{Vmatrix} e^{\lambda_n t}$ образует ФСР этой системы, т.к. являются линейно независимыми решениями. Матрица перехода в этом случае $S = \begin{Vmatrix} \vec{h}_1, ..., \vec{h}_n \end{Vmatrix}$. Тогда получим, что

$$\vec{x}_1 = \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t}, ..., \vec{x}_n = \vec{h}_n e^{\lambda_n t} \tag{3}$$

является ФСР (2), т.к. $\vec{x}_i$, $i = \overline{1,n}$ из (3) являются решениями (2), линейная независимость вектор-функций $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n$ следует из того, что вронскиан (3) при $t = 0$ является $detS \neq 0$ (свойство 10 вронскиана). Тогда любое решение (2) представимо в виде

$$\vec{x} = c_1 \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + ... + c_n \vec{h}_n e^{\lambda_n t} \tag{4}$$

Можно доказать, что $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n$ - ФСР иначе:

Лемма 0.1. *Система функций $e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t}$, где все λ_i - разные, является линейно независимой.*

Доказательство. Составим линейную комбинацию, равную нулю: $c_1 e^{\lambda_1 t} + ... + c_n e^{\lambda_n t} = 0$ - продифференцируем $(n-1)$ раз и запишем получившуюся систему для поиска $c_1, ..., c_n$

$$\begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + ... + c_n e^{\lambda_n t} = 0 \\ \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} + ... + \lambda_n c_n e^{\lambda_n t} = 0 \\ \cdots \\ \lambda_1^{n-1} c_1 e^{\lambda_1 t} + ... + \lambda_n^{n-1} c_n e^{\lambda_n t} = 0 \end{cases}$$

Система является однородной, поэтому имеет тривиальное решение, но единственное ли оно?

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 t + ... + \lambda_n t} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 t + ... + \lambda_n t} \prod_{1 \leq j < i \geq n} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$$

Полученный определитель это определитель Вандермонда, который равен нулю только, если какая-то пара λ_i, λ_j совпадёт. Значит определитель не равен нулю по условию $\Rightarrow$ система имеет только тривиальное решение по теореме Крамера $\Rightarrow$ система линейно независима. ■

Лемма 0.2. *Система* $\vec{\varphi}_1 = \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t}, ..., \vec{\varphi}_n = \vec{h}_n e^{\lambda_n t}$ *является ФСР.*

Доказательство. $\vec{\varphi}_i = \vec{h}_i e^{\lambda_i t}$ является решением по построению. Рассмотрим $W(t)$: $W(t) = \left|\vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} ... \vec{h}_n e^{\lambda_n t}\right|$, при $t = 0$: $W(0) = \left|\vec{h}_1 ... \vec{h}_n\right| \neq 0$, т.к. собственные вектора линейно независимые. Следовательно, по 10 свойству определителя Вронского система линейно независимая. ■

Итак, общее решение системы (2) записывается в виде:

$$\boxed{\vec{x}_0^{\,\text{об}} = c_1 \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + ... + c_n \vec{h}_n e^{\lambda_n t}}$$

Корни характеристического многочлена $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ простые, но среди них есть комплексные.

Пусть есть комплексные собственное число $\lambda_k = r_k + i\omega_k$ и ему соответствующий комплесный собственный вектор $\vec{h}_k + i\vec{d}_k$, где $\vec{h}_k$, $\vec{d}_k$ - действительные вектора. Так как характеристический многочлен это многочлен с действительными коэффициентами, то комплексгый корень идет вместе с комплексно ему сопряженным, т.е. $\bar{\lambda}_k = r_k - i\omega_k$ тоже является корнем характеристического многочлена.

Взяв комплексное сопряжение над равенством $A(\vec{h}_k + i\vec{d}_k) = (r_k + i\omega_k)(\vec{h}_k + i\vec{d}_k)$:

$$\overline{A(\vec{h}_k + i\vec{d}_k)} = A(\vec{h}_k - i\vec{d}_k) = \overline{(r_k + i\omega_k)(\vec{h}_k + i\vec{d}_k)} = (r_k - i\omega_k)(\vec{h}_k - i\vec{d}_k)$$

Т.е. $\vec{h}_k - i\vec{d}_k$ является собственным вектором для $\vec{\lambda_k} = r_k - i\omega_k$.

Аналогично случайно действительных простых корней система принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}_1}{dt} = \lambda_1 \vec{x}_1 \\ \ldots \\ \dfrac{d\vec{x}_k}{dt} = (r_k + i\omega_k)\vec{x}_k \\ \dfrac{d\vec{x}_{k+1}}{dt} = (r_k - i\omega_k)\vec{x}_{k+1} \\ \ldots \\ \dfrac{d\vec{x}_n}{dt} = \lambda_n \vec{x}_n \end{cases}$$

ФСР такой системы будет комплексной: $\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} e^{\lambda_1 t}$; ...; $\begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} e^{r_k t}(cos\omega_k t + isin\omega_k t)$;

$$\begin{vmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{vmatrix} e^{r_k t}(cos\omega_k t - isin\omega_k t);\ ...;\ \begin{vmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{vmatrix} e^{\lambda_n t}$$

Т.к. матрица перехода $S = \left\| \vec{h}_1, \dots, \vec{h}_k + i\vec{d}_k, \vec{h}_k - i\vec{d}_k, \dots, \vec{h}_n \right\|$, то комплексная ФСР (2) будет: $\vec{h}_1 e^{\lambda_1 t}$, ..., $(\vec{h}_k + i\vec{d}_k)e^{r_k t}(cos\omega_k t + isin\omega_k t)$, $(\vec{h}_k - i\vec{d}_k)e^{r_k t}(cos\omega_k t - isin\omega_k t)$, ..., $\vec{h}_n e^{\lambda_n t}$

Рассмотрим систему функций, у которых первые $k-1$ функции являются функциями построенной выше системы. В качестве k-ой и $k+1$-ой функций возьмём:

$$\vec{q}_k = \frac{1}{2}((\vec{h}_k + i\vec{d}_k)e^{r_k t}(cos\omega_k t + isin\omega_k t) + (\vec{h}_k - i\vec{d}_k)e^{r_k t}(cos\omega_k t - isin\omega_k t)) = e^{r_k t}(\vec{h}_k cos\omega_k t - \vec{d}_k sin\omega_k t)$$

$$\vec{q}_{k+1} = \frac{1}{2i}((\vec{h}_k + i\vec{d}_k)e^{r_k t}(cos\omega_k t + isin\omega_k t) - (\vec{h}_k - i\vec{d}_k)e^{r_k t}(cos\omega_k t - isin\omega_k t)) = e^{r_k t}(\vec{h}_k sin\omega_k t + \vec{d}_k cos\omega_k t)$$

Остальные вектор-функции оставим прежними. Так построенная система будет линейно независимой, т.к. была получена линейными комбинациями линейно независимых вектор-функций. Каждая функция данной системы будет решением (2) по построению и принципу суперпозиции $\Rightarrow$ полученная система является ФСР (2) и содержит только действительные функции $\Rightarrow$

$$\boxed{\vec{x}_0^{\text{об}} = c_1\vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + ... + c_k e^{r_k t}(\vec{h}_k cos\omega_k t - \vec{d}_k sin\omega_k t) + c_{k+1} e^{r_k t}(\vec{h}_k sin\omega_k t + \vec{d}_k cos\omega_k t) + ... + c_n \vec{h}_n e^{\lambda_n t}}$$

Случай кратных корней характеристического многочлена

0.2 Линейная неоднородная система уравнений в случае, когда неоднородность представлена векторным квазимногочленом