Углублённый уровень

АЛГЕБРА
и начала математического анализа

А. Г. Мерзляк
Д. А. Номировский
В. М. Поляков

10

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия

вентана граф

А. Г. Мерзляк
Д. А. Номировский
В. М. Поляков

Математика:
алгебра и начала
математического анализа,
геометрия

АЛГЕБРА
и начала математического анализа

10
класс

Углублённый уровень

Учебное пособие

2-е издание, стереотипное

Москва
Издательский центр
«Вентана-Граф»
2019

От авторов

Дорогие десятиклассники!

Вы начинаете изучать новый школьный предмет — **алгебру и начала анализа.**

Этот предмет необычайно важен. Наверное, нет сегодня такой области науки, в которой не применялись бы достижения этого раздела математики. Физики и химики, астрономы и биологи, географы и экономисты, даже языковеды и историки используют «математический инструмент».

Алгебра и начала анализа — полезный и очень интересный предмет, который развивает аналитическое и логическое мышление, исследовательские навыки, математическую культуру, сообразительность.

Мы надеемся, что вы не разочаруетесь, избрав нелёгкий путь — изучать математику по углублённой программе. Это не просто. Нужно быть настойчивым и увлечённым, внимательным и аккуратным, а самое главное — не быть безразличным к математике и любить эту красивую науку. Надеемся, что вы с интересом будете приобретать новые знания и вам поможет учебник, который вы держите в руках. Ознакомьтесь, пожалуйста, с его структурой.

Учебник разделён на пять глав, каждая из которых состоит из параграфов. В параграфах изложен теоретический материал. Особое внимание обращайте на текст, выделенный **жирным** шрифтом. Уделите внимание словам, напечатанным *курсивом*.

В этой книге вы ознакомитесь с целым рядом важных теорем. К некоторым из них приведены полные доказательства. В тех же случаях, когда доказательства выходят за пределы рассматриваемого курса, мы ограничивались только формулировками теорем.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому параграфу подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи (особенно те, которые обозначены ).

Если после выполнения домашних заданий остаётся свободное время и вы хотите узнать больше, то рекомендуем обратиться к рубрике «Когда сделаны уроки». Материал, изложенный там, непрост. Но тем интереснее испытать свои силы!

Для тех, кто в 7—9 классах изучал курс алгебры по углублённой программе, некоторые темы этого учебника не являются новыми. При необходимости можно обратиться к ним в качестве повторения ранее изученного материала.

Учебник содержит раздел «Упражнения для повторения курса 10 класса», материал которого в первую очередь предназначен тем, кто только начинает изучать математику углублённо. Он также может быть использован для повторения и систематизации знаний.

Дерзайте! Желаем успеха!

Условные обозначения

◆

Простые задачи

◆ ◆

Задачи средней сложности

◆ ◆ ◆

Сложные задачи

Задачи высокой сложности

Ключевые задачи, результат которых можно использовать при решении других задач

Окончание доказательства теоремы

Окончание решения задачи

5.6. Задания, рекомендованные для устной работы

5.7. Задания, рекомендованные для домашней работы

глава

1 Повторение и расширение сведений о множествах, математической логике и функциях

В этой главе вы повторите основные сведения о множествах и функциях, уравнениях и неравенствах; узнаете, какую функцию называют обратимой, какие функции называют взаимно обратными; ознакомитесь с новыми методами построения графиков функций с помощью преобразований.

§ 1 Множества. Операции над множествами

С понятием множества вы ознакомились в курсе алгебры 8 класса. Напомним и уточним основные сведения.

Часто в повседневной жизни объединённые по некоторому признаку объекты мы называем *группой*, *объединением*, *коллекцией*, *совокупностью* и т. п. Для этих слов в математике существует синоним — **множество**.

Приведём несколько примеров множеств:

- множество учеников вашей школы;
- множество городских округов Алтайского края.

Отдельным важнейшим множествам присвоены общепринятые названия и обозначения:

- множество точек плоскости — **геометрическая фигура**;
- множество натуральных чисел, которое обозначают буквой $\boldsymbol{N}$;
- множество целых чисел, которое обозначают буквой $\boldsymbol{Z}$;
- множество рациональных чисел, которое обозначают буквой $\boldsymbol{Q}$;
- множество действительных чисел, которое обозначают буквой $\boldsymbol{R}$.

Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут: $a \in A$ (читают: «a принадлежит множеству A»). Если элемент b не принадлежит множеству A, то пишут: $b \notin A$ (читают: «b не принадлежит множеству A»).

Например, $12 \in \boldsymbol{N}$, $-3 \notin \boldsymbol{N}$, $\frac{2}{3} \in \boldsymbol{Q}$, $\frac{2}{3} \notin \boldsymbol{Z}$, $\sqrt{2} \in \boldsymbol{R}$, $a \in \{a, b, c\}$.

Множества часто задают одним из двух следующих способов.

Первый способ состоит в том, что множество задают указанием (перечислением) всех его элементов. Например, если M — множество натуральных чисел, меньших 5, то пишут: $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

Второй способ состоит в том, что указывается **характеристическое свойство элементов множества**, то есть свойство, которым обладают все элементы данного множества, и только они.

Если x — произвольный элемент множества A, которое задано с помощью характеристического свойства его элементов, то пишут: $A = \{x \mid \ldots\}$. В данной записи после вертикальной черты указывают условие, которому должен удовлетворять элемент x, чтобы принадлежать множеству A.

Рассмотрим несколько примеров.

- $\{x \mid x = 3n, n \in \boldsymbol{N}\}$ — множество натуральных чисел, кратных 3.
- $\{x \mid x(x^2 - 1) = 0\}$ — множество корней уравнения $x(x^2 - 1) = 0$.

Определение

Множество B называют подмножеством множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A.

Это записывают так: $B \subset A$ или $A \supset B$ (читают: «множество B — подмножество множества A» или «множество A содержит множество B»).

Рассмотрим примеры:

- $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$; $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$; $\boldsymbol{Q} \supset \boldsymbol{N}$; $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$;
- $\{x \mid 2x - 1 = 0\} \subset \left\{x \mid x^2 = \frac{1}{4}\right\}$;
- $\{a\} \subset \{a, b\}$.

Для иллюстрации соотношений между множествами пользуются схемами, называемыми **диаграммами Эйлера**.

На рисунке 1.1 изображены множество A (больший круг) и множество B (меньший круг, полностью содержащийся в большем). Эта схема означает, что $B \subset A$.

На рисунке 1.2 с помощью диаграмм Эйлера показано соотношение между множествами $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}$.

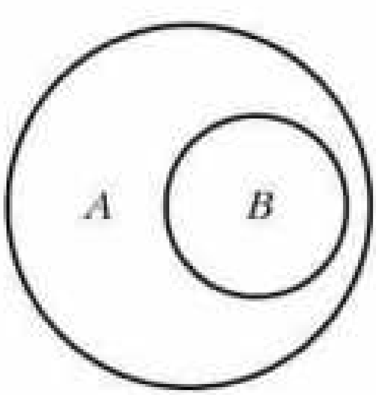


Рис. 1.1

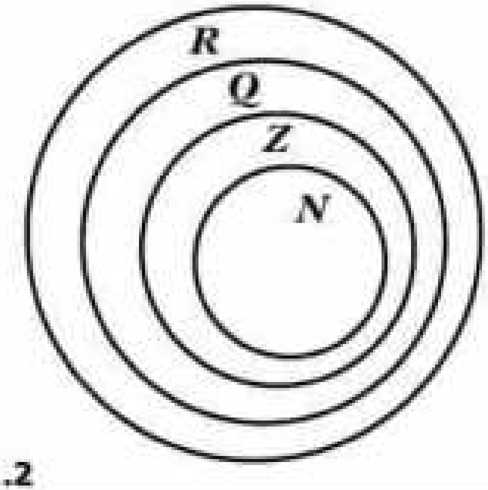


Рис. 1.2

Отметим, что если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$.

Пустое множество считают подмножеством любого множества, то есть для любого множества A справедливо утверждение: $\varnothing \subset A$.

Любое множество A является подмножеством самого себя, то есть $A \subset A$.

Определение

Если $B \subset A$ и $B \neq A$, то множество B называют собственным подмножеством множества A.

Например, множество $\boldsymbol{Z}$ является собственным подмножеством множества $\boldsymbol{Q}$.

Определение

Пересечением множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих и множеству A, и множеству B.

Пересечение множеств A и B обозначают так: $A \cap B$. Из определения следует, что

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Если множества A и B не имеют общих элементов, то их пересечением является пустое множество, то есть $A \cap B = \varnothing$. Также заметим, что $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Из определения пересечения двух множеств следует, что если $A \subset B$, то $A \cap B = A$, в частности, если $B = A$, то $A \cap A = A$.

Например, $\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z} \cap \boldsymbol{R} = \boldsymbol{Z}$.

Пересечение множеств удобно иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера. На рисунке 1.3 заштрихованная фигура изображает множество $A \cap B$.

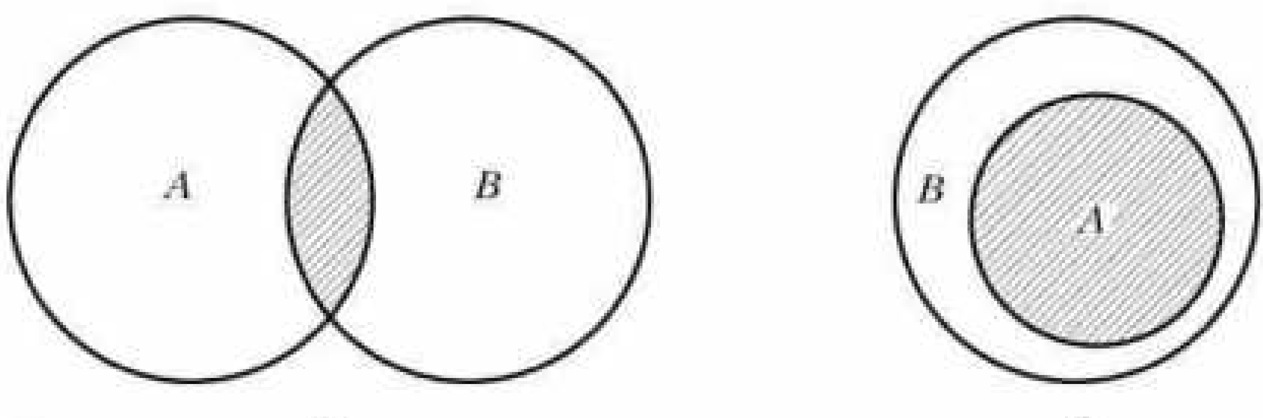


Рис. 1.3

Определение

Объединением множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств: или множеству A, или множеству B.

Объединение множеств A и B обозначают так: $A \cup B$. Из определения следует, что

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Заметим, что для любого множества A выполняется равенство $A \cup \varnothing = A$.

Из определения объединения двух множеств следует, что если $A \subset B$, то $A \cup B = B$, в частности, если $B = A$, то $A \cup A = A$.

Объединение множеств удобно иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера. На рисунке 1.4 заштрихованная фигура изображает множество $A \cup B$.

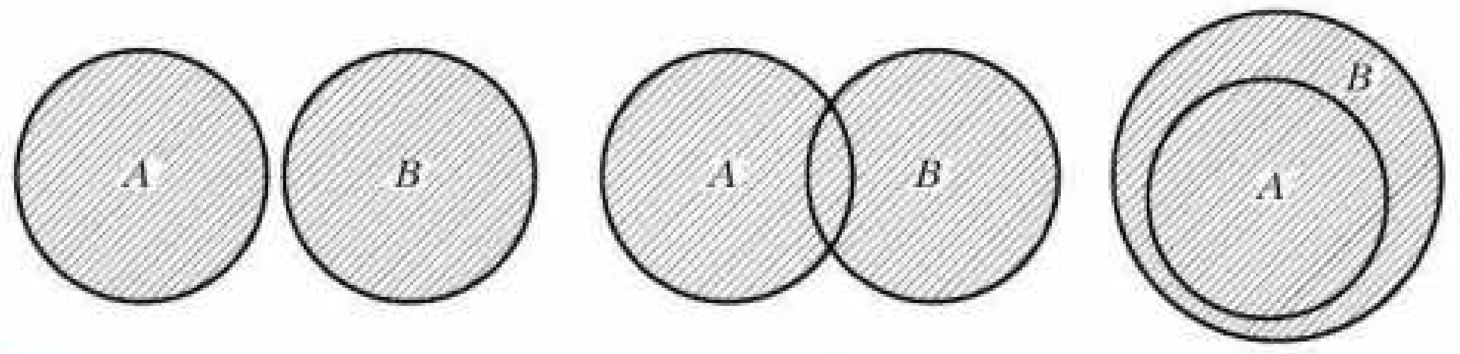


Рис. 1.4

Часто приходится рассматривать пересечение и объединение трёх и более множеств.

Пересечение множеств A, B и C — это множество всех элементов, принадлежащих и множеству A, и множеству B, и множеству C (рис. 1.5).

Объединение множеств A, B и C — это множество всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств: или множеству A, или множеству B, или множеству C (рис. 1.6).

Рис. 1.5

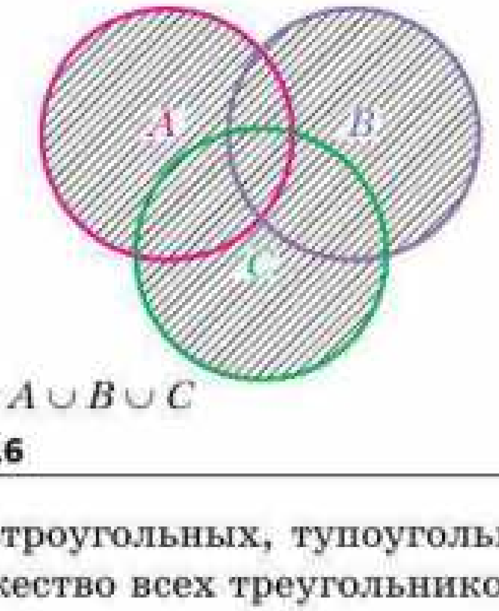


Рис. 1.6

Например, объединение множеств остроугольных, тупоугольных и прямоугольных треугольников — это множество всех треугольников.

Если из множества $\boldsymbol{Z}$ исключить множество $\boldsymbol{N}$, то получим множество целых неположительных чисел. Оно состоит из всех элементов множества $\boldsymbol{Z}$, которые не принадлежат множеству $\boldsymbol{N}$. Говорят, что множество целых неположительных чисел является **разностью** множеств $\boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{N}$.

Определение

Разностью множеств A и B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих множеству A, но не принадлежащих множеству B.

Разность множеств A и B обозначают так: $A \setminus B$. Из определения следует, что

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Заметим, что для любого множества A выполняется равенство $A \setminus \varnothing = A$.

Из определения разности двух множеств следует, что если $A \subset B$, то $A \setminus B = \varnothing$, в частности, если $B = A$, то $A \setminus A = \varnothing$.

Разность множеств удобно иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера. На рисунке 1.7 заштрихованная фигура изображает множество $A \setminus B$.

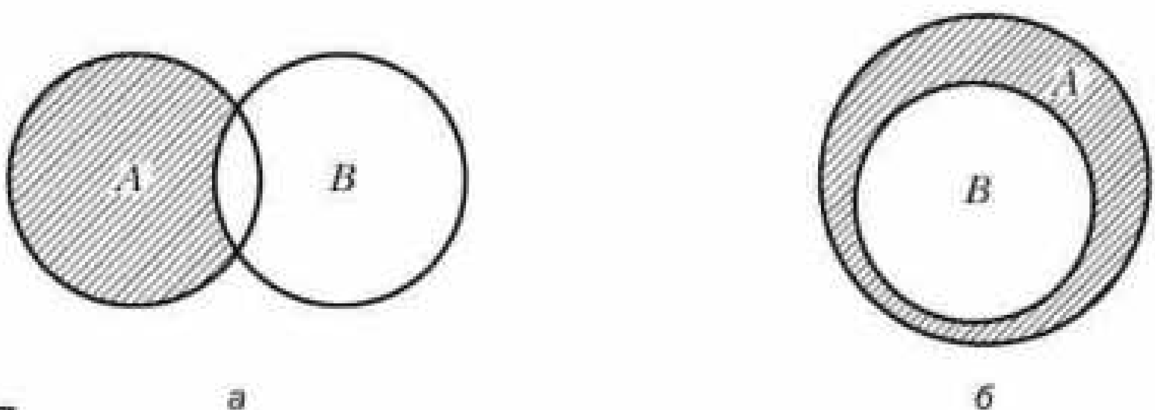


Рис. 1.7

В случае, когда множество B является подмножеством множества A, разность $A \setminus B$ называют **дополнением множества B в множестве A**. На рисунке 1.7, *б* это множество изображено штриховкой. Например, дополнением множества нечётных чисел в множестве натуральных чисел является множество чётных чисел.

1. Как обозначают множества натуральных, целых, рациональных и действительных чисел?
2. Какие существуют способы задания множеств?

3. Какое множество называют подмножеством данного множества?
4. Как наглядно иллюстрируют соотношение между множествами?
5. Что называют пересечением двух множеств; объединением двух множеств; разностью двух множеств?

Упражнения

1.1. Пусть $A \neq \varnothing$. Какие два разных подмножества всегда имеет множество A?

1.2. Равны ли множества A и B:
1) $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 1\}$;
2) $A = \{(0; 1)\}$, $B = \{(1; 0)\}$;
3) $A = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, x$ кратно 2 и $3\}$, $B = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, x$ кратно $6\}$?

1.3. Равны ли множества A и B:
1) $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}\}$;
2) $A = \{x \mid x \leqslant 3, x \in \boldsymbol{Z}\}$, $B = \{x \mid x < 4, x \in \boldsymbol{Z}\}$;
3) $A = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, x \leqslant 15, x = 19k, k \in \boldsymbol{Z}\}$, $B = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, 3 < x < 4\}$?

1.4. Какие из следующих множеств равны пустому множеству:
1) $A = \{x \mid x \neq x\}$;
2) $B = \{x \mid x \in \boldsymbol{Z}, \frac{1}{2}x - 2 = 0\}$;
3) $C = \{x \mid x \in \boldsymbol{Z}, |x| < 1\}$?

1.5. Какое из следующих утверждений верно:
1) $\{a\} \in \{a, b\}$;
2) $\{a\} \subset \{a, b\}$;
3) $a \subset \{a, b\}$;
4) $\{a, b\} \in \{a, b\}$?

1.6. Докажите, что если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$.

1.7. Запишите с помощью символа $\subset$ соотношение между множествами:
$A = \{x \mid x = 2n, n \in \boldsymbol{N}\}$; $C = \{x \mid x = 10n, n \in \boldsymbol{N}\}$;
$B = \{x \mid x = 50n, n \in \boldsymbol{N}\}$; $D = \{x \mid x = 5n, n \in \boldsymbol{N}\}$.

1.8. Какое из множеств, A или B, является подмножеством другого, если:
$A = \{x \mid x = 4n + 2, n \in \boldsymbol{N}\}$; $B = \{x \mid x = 8n + 2, n \in \boldsymbol{N}\}$?

1.9. Даны множества $\{7\}$, $\{11\}$, $\{19\}$, $\{7, 11\}$, $\{7, 19\}$, $\{11, 19\}$, $\varnothing$, являющиеся всеми собственными подмножествами некоторого множества A. Запишите множество A.

1.10. Назовите все подмножества множества $\{1, 2\}$.

1.11. Какое из следующих утверждений верно:
1) $\{a, b\} \cap \{a\} = a$;
2) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{a, b\}$;
3) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$;
4) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{b\}$?

1.12. Какое из следующих утверждений верно:
1) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{a, b\}$;
2) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{b\}$;
3) $\{a, b\} \cup \{a\} = \{a\}$;
4) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{\{b\}\}$?

1.13. Найдите пересечение множеств A и B, если:

1) $A = \{x \mid x < 19\}$, $B = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, x > 11\}$;

2) $A = \{x \mid x = 4n, n \in \boldsymbol{N}\}$, $B = \{x \mid x = 6n, n \in \boldsymbol{N}\}$;

3) $A = \{(x, y) \mid 2x - y = 1\}$, $B = \{(x, y) \mid x + y = 5\}$.

1.14. Найдите объединение множеств A и B, если:

1) $A = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$, $B = \{x \mid (x - 1)(x - 2) = 0\}$;

2) $A = \{x \mid 2x + 3 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 + 3 = 2\}$;

3) $A = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, x < 5\}$, $B = \{x \mid x \in \boldsymbol{N}, x < 7\}$.

1.15. Какое из следующих утверждений верно:

1) $\{a, b\} \setminus \{a\} = b$;

2) $\{a, b\} \setminus \{a\} = \{a, b\}$;

3) $\{a, b\} \setminus \{a\} = \{a\}$;

4) $\{a, b\} \setminus \{a\} = \{b\}$?

1.16. Найдите разность множеств A и B, если:

1) $A = \boldsymbol{N}$, $B = \{x \mid x = 2n, n \in \boldsymbol{N}\}$;

2) A — множество однозначных чисел, B — множество простых чисел;

3) A — множество равносторонних треугольников, B — множество равнобедренных треугольников.

1.17. Пусть A — множество цифр десятичной системы счисления, B — множество, состоящее из цифр 1, 3 и 5. Укажите множество, являющееся дополнением множества B до множества A.

◆ ◆

1.18. Известно, что для любого множества B множество A является его подмножеством. Найдите множество A.

1.19. Известно, что для любого множества B выполняется равенство $A \cap B = A$. Найдите множество A.

1.20. Известно, что для любого множества B выполняется равенство $A \cup B = B$. Найдите множество A.

◆ ◆ ◆

1.21. Найдите подмножества A и B множества C такие, что для любого подмножества X множества C выполняется равенство $X \cap A = X \cup B$.

§ 2 Конечные и бесконечные множества

Если множество содержит конечное количество элементов, то его называют **конечным**, а если в нём бесконечно много элементов — то **бесконечным**. Пустое множество считают конечным.

Например, множество учащихся вашего класса — конечное множество, а множество натуральных чисел — бесконечное множество.

Если A — конечное множество, то количество его элементов будем обозначать так: $n(A)$.

Например, если A — это множество дней недели, то $n(A) = 7$; если B — это множество двузначных чисел, то $n(B) = 90$. Понятно, что $n(\varnothing) = 0$.

Пусть A и B — такие конечные множества, что $A \cap B = \varnothing$. Тогда очевидно, что

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B). \qquad (1)$$

Если A и B — конечные множества, причём $A \cap B \neq \varnothing$ (рис. 2.1), то в сумму $n(A) + n(B)$ дважды входит количество элементов их пересечения, то есть дважды учитывается число $n(A \cap B)$. Следовательно, в этом случае

$$\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)} \qquad (2)$$

Если $A \cap B = \varnothing$, то $n(A \cap B) = 0$. Поэтому формула (2) является обобщением формулы (1).

Выясним, как найти количество элементов множества $A \cup B \cup C$, где A, B и C — конечные множества.

Если $A \cap B \cap C = \varnothing$ (рис. 2.2), то

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - \\ - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A). \qquad (3)$$

Если $A \cap B \cap C \neq \varnothing$ (рис. 2.3), то правая часть формулы (3) не учитывает количество общих элементов множеств A, B и C. Следовательно, в этом случае формула принимает вид:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - \\ - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C). \qquad (4)$$

Аналогичную формулу можно получить для любого количества множеств. Её называют **«формулой включения-исключения»**.

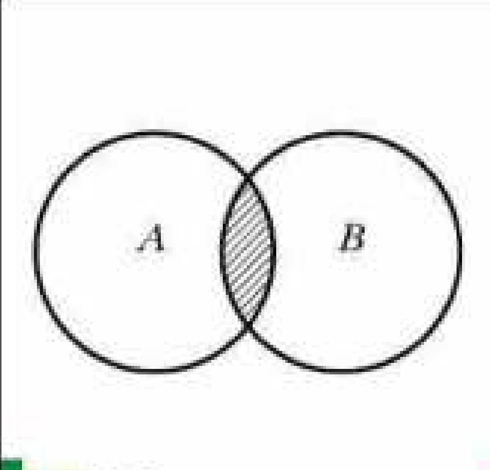


Рис. 2.1

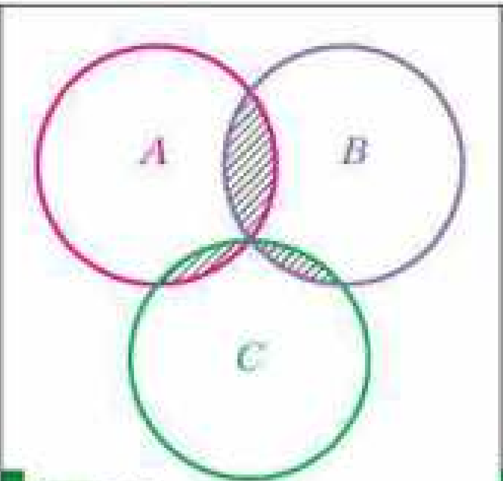


Рис. 2.2

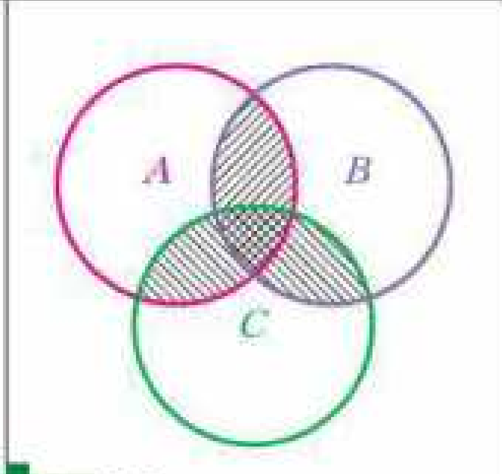


Рис. 2.3

Пример 1. В спортивной школе есть три секции: акробатики, баскетбола, волейбола. Известно, что школу посещают 200 школьников, а каждую из секций — 80 школьников. Докажите, что найдётся не менее 14 школьников, которые посещают одни и те же две секции.

Решение. Обозначим множества школьников, посещающих секции акробатики, баскетбола и волейбола, буквами A, $Б$ и B соответственно. Тогда $n(A \cup Б \cup B) = 200$, $n(A) = n(Б) = n(B) = 80$. Подставим указанные значения в формулу (4):

$$200 = 80 + 80 + 80 - n(A \cap Б) -$$
$$- n(Б \cap B) - n(B \cap A) + n(A \cap Б \cap B).$$

Отсюда $n(A \cap Б) + n(Б \cap B) + n(B \cap A) = 40 + n(A \cap Б \cap B) \geq 40$.

Если предположить, что каждое из чисел $n(A \cap Б)$, $n(Б \cap B)$, $n(B \cap A)$ не превышает 13, то их сумма не превышает 39. Получили противоречие. ■

Нам нередко приходится сравнивать конечные множества по количеству их элементов.

Например, как узнать, хватит ли в классе стульев для всех учащихся? Совсем не обязательно пересчитывать стулья и учащихся. Достаточно попросить учеников сесть на стулья. И если, например, мест хватило не всем, то это означает, что количество учеников больше, чем количество стульев.

В этом примере, сравнивая количество элементов двух множеств, мы *каждому элементу одного множества поставили в соответствие единственный элемент второго множества*. Воспользуемся этой идеей в следующем примере.

Пример 2. Сравните количество элементов множества A двузначных чисел и множества B трёхзначных чисел, десятичная запись которых оканчивается цифрой 1.

Решение. Поставим в соответствие каждому двузначному числу то трёхзначное число, которое получается из него приписыванием справа цифры 1. Получим:

$$\begin{array}{cccccc} 10, & 11, & 12, & \ldots, & 98, & 99 \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & & \Updownarrow & \Updownarrow \\ 101, & 111, & 121, & \ldots, & 981, & 991 \end{array}$$

Итак, каждому элементу множества A мы поставили в соответствие единственный элемент множества B. Заметим, что при таком соответствии все элементы множества B оказываются «задействованными». Действительно, если в трёхзначном числе вида $\overline{ab1}$ зачеркнуть последнюю цифру, то получим двузначное число $\overline{ab}$.

Установленное соответствие между элементами множеств A и B позволяет сделать вывод, что $n(A) = n(B)$. ■

Определение

Если каждому элементу множества A поставлен в соответствие единственный элемент множества B и при этом любой элемент множества B оказывается соответствующим некоторому единственному элементу множества A, то говорят, что между множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие.

В примере 2 каждому двузначному числу было поставлено в соответствие единственное трёхзначное число указанного вида, и наоборот, каждое такое трёхзначное число являлось соответствующим единственному двузначному числу. Следовательно, между рассматриваемыми множествами было установлено взаимно однозначное соответствие.

Заметим, что если в классе все ученики сидят и при этом есть свободные стулья, то между множеством учеников и множеством стульев взаимно однозначного соответствия не установлено.

Если между конечными множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие, то $n(A) = n(B)$. И наоборот, если $n(A) = n(B)$, то между конечными множествами A и B можно установить взаимно однозначное соответствие.

Следовательно, между конечными множествами с разным количеством элементов невозможно установить взаимно однозначное соответствие. Это позволяет сформулировать такое правило.

Если $C \subset B$ и $C \neq B$, а между множествами A и C установлено взаимно однозначное соответствие, то $n(A) < n(B)$. Другими словами, *между конечным множеством и его собственным подмножеством невозможно установить взаимно однозначное соответствие.*

Можно ли этот вывод применить к бесконечным множествам?

Пусть M — множество чётных чисел. Множество M является собственным подмножеством множества $\boldsymbol{N}$. Казалось бы, можно считать, что натуральных чисел больше, чем чётных. Однако это не так.

Каждому элементу $n \in \boldsymbol{N}$ поставим в соответствие единственный элемент $2n \in M$:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & n, & \ldots \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & & \Updownarrow & \\ 2, & 4, & 6, & 8, & \ldots, & 2n, & \ldots \end{array}$$

При этом каждое чётное число будет соответствовать единственному натуральному числу. Тем самым между множествами $\boldsymbol{N}$ и M установлено взаимно однозначное соответствие, а поэтому нельзя считать, что в множестве N содержится больше элементов, чем в его собственном подмножестве — множестве чётных чисел.

Этот пример показывает, что привычные для нас представления о конечных множествах нельзя переносить на бесконечные множества.

Можно доказать, что в любом бесконечном множестве A можно выделить собственное подмножество A_1 таким образом, что между множествами A и A_1 можно установить взаимно однозначное соответствие. Это принципиальное отличие бесконечных множеств от конечных.

Если множества A и B конечны и между ними установлено взаимно однозначное соответствие, то $n(A) = n(B)$. Если же взаимно однозначное соответствие установлено между бесконечными множествами A и B, то в математике не принято говорить, что эти множества имеют одинаковое количество элементов, а говорят, что множества A и B имеют одинаковую **мощность**. Другими словами, для бесконечных множеств слово «мощность» означает то же самое, что для конечных множеств «количество элементов».

Определение

Два множества называют равномощными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Порой, выявляя свойства объектов, мы руководствуемся интуицией или жизненным опытом. Однако, как было показано выше, когда мы определяем свойства бесконечных множеств, опыт и интуиция могут подвести.

Например, имеет место следующий удивительный факт: множество точек прямой равномощно множеству точек открытого отрезка[1], то есть прямая содержит столько же точек, сколько их содержит открытый отрезок.

На рисунке 2.4 изображена прямая MN, которая касается полуокружности с центром в точке O и диаметром AB, параллельным прямой MN. Удалим из полуокружности точки A и B. Такую полуокружность называют открытой.

Каждой точке X открытой полуокружности поставим в соответствие точку X_1 прямой MN, лежащую на луче OX. Понятно, что точке X соответствует единственная точка прямой MN, и наоборот, каждая точка прямой MN является соответствующей единственной точке открытой полуокружности. Следовательно, установлено взаимно однозначное соответствие между множеством точек прямой и множеством точек открытой полуокружности. Значит, множество точек открытой полуокружности равномощно множеству точек прямой.

---

[1] Открытый отрезок — отрезок, у которого «выколоты» концы.

На рисунке 2.5 показано, как установить взаимно однозначное соответствие между множеством точек открытого отрезка и множеством точек открытой полуокружности. Следовательно, множество точек открытого отрезка AB равномощно множеству точек прямой MN.

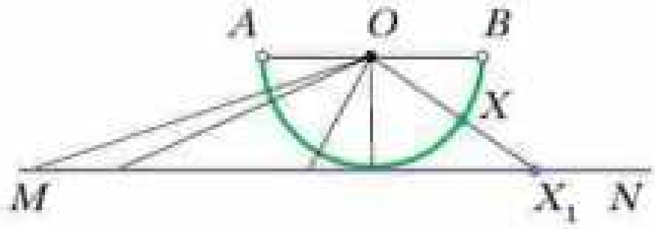


Рис. 2.4

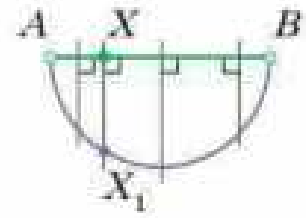


Рис. 2.5

Определение

Множество, равномощное множеству натуральных чисел, называют счётным множеством.

Выше мы показали, что множество чётных чисел счётно.

Когда устанавливают взаимно однозначное соответствие между множествами A и $\boldsymbol{N}$, каждый элемент множества A получает свой номер. Таким образом, все элементы множества A оказываются пронумерованными.

На первый взгляд кажется, что поскольку $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$, то элементы множества $\boldsymbol{Z}$ пронумеровать нельзя: не хватит номеров, так как все они будут «потрачены» на множество $\boldsymbol{N}$.

Однако если элементы множества $\boldsymbol{Z}$ расположить в виде последовательности 0, 1, –1, 2, –2, 3, –3, ..., то можно каждому целому числу присвоить номер:

0,	1,	–1,	2,	–2,	3,	–3,	...
⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	...

Тем самым мы доказали, что множество $\boldsymbol{Z}$ является счётным.

Можно доказать, что множество $\boldsymbol{Q}$ также является счётным.

Однако не всякое бесконечное множество является счётным.

Рассмотрим множество A, элементами которого являются все бесконечные последовательности, составленные из нулей и единиц. Вот несколько элементов множества A:

1, 1, 1, 1, 1, 1, ...
0, 1, 1, 1, 0, 0, ...
0, 0, 1, 0, 1, 1, ...

Докажем, что множество A является несчётным. Предположим, что это не так. Тогда элементы этого множества можно пронумеровать. Расположим элементы множества A в столбик в порядке возрастания номеров. Например:

Первый элемент	1,	1,	0,	1,	0,	...
Второй элемент	0,	0,	0,	1,	1,	...
Третий элемент	0,	0,	0,	0,	0,	...
Четвёртый элемент	1,	1,	1,	1,	1,	...
Пятый элемент	1,	0,	1,	0,	1,	...
...						

Эта запись должна содержать все элементы множества A. Если удастся построить бесконечную последовательность из нулей и единиц, которой в этой записи нет, то тем самым мы опровергнем предположение о счётности множества A.

Выделим красным цветом числа, стоящие на «диагонали». Получим последовательность:

$$1, 0, 0, 1, 1, \ldots .$$

Заменим в этой последовательности единицы на нули, а нули — на единицы:

$$0, 1, 1, 0, 0, \ldots .$$

Этой последовательности в записи нет. Действительно, она отличается от первой последовательности числом, стоящим на первом месте, от второй последовательности — числом, стоящим на втором месте, от третьей — числом, стоящим на третьем месте, и т. д.

1. Как найти количество элементов множества $A \cup B$?
2. Как найти количество элементов множества $A \cup B \cup C$?
3. В каких случаях говорят, что между двумя множествами установлено взаимно однозначное соответствие?
4. Какие множества называют равномощными?
5. Какое множество называют счётным?

Упражнения

2.1. Каждый из 32 учеников класса изучает по крайней мере один иностранный язык. Из них 20 изучают английский язык и 18 — французский. Сколько учеников изучают и английский, и французский языки?

2.2. Известно, что 26 жильцов дома содержат кошек и собак, у 16 из них есть кошки, а у 15 — собаки. Сколько жильцов дома содержат и собаку, и кошку?

2.3. Установлено ли взаимно однозначное соответствие между множествами A и B (рис. 2.6)? Точками на рисунке изображены элементы множеств.

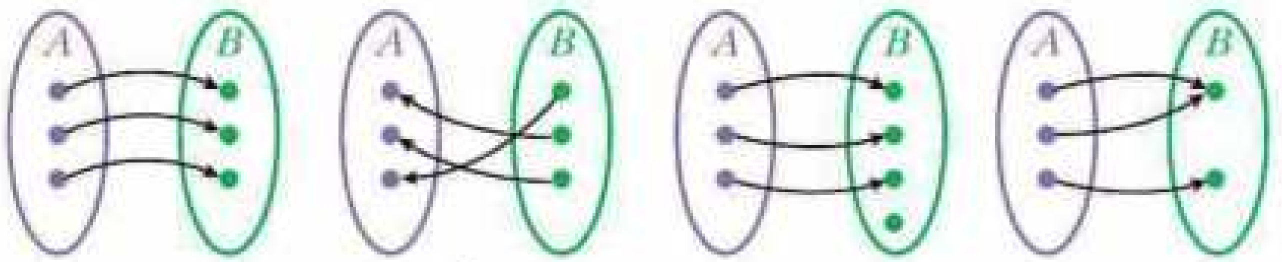


Рис. 2.6

2.4. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел и множеством натуральных чисел, кратных 3.

2.5. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел и множеством чисел вида $4n + 1$ ($n \in \boldsymbol{N}$).

2.6. Докажите, что множества чётных и нечётных чисел равномощны.

2.7. Каждому элементу множества $\{n, n + 1, n + 2\}$, где $n \in \boldsymbol{N}$, поставили в соответствие остаток от деления этого элемента на 3. Установлено ли таким образом взаимно однозначное соответствие между множествами $\{n, n + 1, n + 2\}$ и $\{0, 1, 2\}$?

2.8. Каких пятизначных чисел больше: все цифры которых чётны или все цифры которых нечётны?

2.9. Каких пятизначных чисел больше: тех, у которых цифры записаны в порядке возрастания, или тех, у которых цифры записаны в порядке убывания?

2.10. В выпуклом n-угольнике ($n \geqslant 4$) никакие три диагонали не пересекаются[1] в одной точке. Докажите, что количество всех точек пересечения диагоналей равно количеству четырёхугольников, все вершины которых являются вершинами данного n-угольника.

2.11. Рассматриваются все прямоугольники, длины сторон которых выражены натуральными числами. Каких прямоугольников больше: с периметром, равным 1000, или с периметром, равным 1002?

[1] Считают, что диагонали выпуклого многоугольника пересекаются, если у них есть общая точка, отличная от вершины многоугольника.

2.12. Покажите, что множества точек стороны и диагонали квадрата равномощны.

2.13. Покажите, что множества точек любых двух концентричных окружностей равномощны.

2.14. Множество A содержит 101 элемент. Докажите, что количество его подмножеств, содержащих чётное количество элементов, равно количеству подмножеств, содержащих нечётное количество элементов.

2.15. В олимпиаде приняли участие 46 школьников. Им были предложены 3 задачи. После подведения итогов оказалось, что каждый из участников решил хотя бы одну задачу, причём первую и вторую задачу решили 11 участников, вторую и третью — 8 участников, первую и третью — 5 участников, а все три задачи решили только 2 участника. Докажите, что одну из задач решили не менее половины участников.

2.16. Каких трёхзначных чисел больше: тех, у которых вторая цифра в десятичной записи больше первой и третьей, или тех, у которых вторая цифра меньше первой и третьей?

2.17. Покажите, что множество точек прямой и множество точек окружности с «выколотой» точкой равномощны.

2.18. На окружности отметили 100 точек: A_1, A_2, ..., A_{100}. Каких многоугольников с вершинами в отмеченных точках больше: тех, в которых точка A_1 является вершиной, или тех, в которых точка A_1 не является вершиной?

§ 3 Высказывания и операции над ними

В физике, химии, биологии, экономике, социологии и других науках об истинности утверждений можно судить, основываясь на результатах наблюдений и экспериментов. В этом отношении математика — наука иного рода. Например, то, что сумма углов треугольника равна 180°, невозможно определить лабораторным путём. Истинность математических утверждений может быть доказана только в результате логически безупречных рассуждений.

Науку, которая изучает такие математические доказательства (логически безупречные рассуждения), называют **математической логикой**. Следовательно, математическая логика учит, как надо рассуждать, чтобы получать верные выводы.

Рассуждая, мы формулируем свои мысли в виде утверждений.

Рассмотрим примеры.

1. Если треугольник равносторонний, то центры его вписанной и описанной окружностей совпадают.

2. Поэзия Марины Цветаевой сложна для восприятия.

3. Число π является рациональным.

4. Юрий Гагарин — первый человек, совершивший полёт в космос.

5. Число n является простым.

Утверждения 1 и 4 являются **истинными**, утверждение 3 — **ложным**. Утверждения 2 и 5 нельзя отнести ни к истинным, ни к ложным.

Любое утверждение, относительно которого имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно, называют **высказыванием**.

Следовательно, утверждения 1, 3, 4 являются высказываниями, а утверждения 2 и 5 высказываниями не являются.

Высказывания обозначают прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, D и т. д.

Например, пишут:

$A \equiv$ {Москва — столица России};

$B \equiv \{5 > 7\}$;

$C \equiv$ {число 2 — простое}.

Любое высказывание является или истинным, или ложным. Если высказывание A истинно, то будем говорить, что ему поставлено в соответствие число 1, если высказывание A ложно — то число 0.

Таким образом, если задано некоторое множество высказываний, то можно рассматривать функцию f, областью определения которой является это множество, а областью значений — двухэлементное множество $\{0, 1\}$. Такую функцию f будем называть **функцией истинности**. Например, если $A \equiv \{10 \vdots 5\}$, то $f(A) = 1$.

С помощью логических связок, а именно слов «и», «или», «если ..., то», «тогда и только тогда, когда...» и т. п., из имеющихся высказываний можно строить более сложные высказывания.

Например, если даны два высказывания

$$A \equiv \{5 > 3\},\ B \equiv \{5 = 3\},$$

то высказывание $C \equiv \{5 \geqslant 3\}$ образовано из высказываний A и B с помощью союза «или».

Ещё один пример.

$M \equiv$ {Земля имеет форму куба};

$N \equiv$ {кит — морское млекопитающее}.

Образуем высказывание вида «если M, то N».

Имеем: {если Земля имеет форму куба, то кит — морское млекопитающее}.

Этот пример показывает, что новые высказывания можно образовывать из таких высказываний, которые не связаны между собой по смыслу.

Рассмотрим высказывание $C \equiv \{10 \vdots 5$ и $10 \vdots 2\}$. Оно составлено из двух высказываний: $A \equiv \{10 \vdots 5\}$ и $B \equiv \{10 \vdots 2\}$ с помощью союза «и». Высказывание C называют **конъюнкцией** высказываний A и B.

Определение

Конъюнкцией (или логическим произведением) двух высказываний A и B называют высказывание, которое истинно, если каждое из высказываний A и B истинно, и ложно, если хотя бы одно из них ложно.

Конъюнкцию высказываний A и B обозначают так: $A \wedge B$ (читают: «A и B» или «A конъюнкция B»).

Возвращаясь к рассмотренному выше примеру, можно сказать, что высказывание C является высказыванием $A \wedge B$.

Также говорят, что высказывание C получено из высказываний A и B в результате **логической операции** конъюнкции.

Понятно, что истинность или ложность высказывания $A \wedge B$ зависит от истинности или ложности высказываний A и B. Эту зависимость удобно представить в виде таблицы, которую называют **таблицей истинности**. Так, таблица истинности для логической операции конъюнкции имеет такой вид:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Джордж Буль (1815—1864)

Английский математик, основатель математической логики.

Функцию, которая упорядоченным наборам из чисел 0 и 1 ставит в соответствие число из множества {0, 1}, называют **булевой функцией**. Таблица истинности задаёт булеву функцию.

Конъюнкция соответствует логической связке «и». Определим ряд других логических операций, которые соответствуют чаще всего употребляемым способам образования высказываний в обычном языке.

Определение

Дизъюнкцией (или логической суммой) двух высказываний A и B называют высказывание, которое истинно, если хотя бы одно из высказываний — A или B — истинно, и ложно, если они оба ложны.

Дизъюнкцию высказываний A и B обозначают так: $A \vee B$ (читают: «A или B» или «A дизъюнкция B»).

Пусть $A \equiv$ {в понедельник первый урок в расписании — физика},

$B \equiv$ {в понедельник первый урок в расписании — математика}.

Тогда $A \vee B \equiv$ {в понедельник первый урок в расписании — физика или математика}.

Приведём таблицу истинности для дизъюнкции:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Большинство теорем имеют такую логическую структуру:

если выполняются некоторые условия, *то* можно сделать некоторый вывод.

Логическую связку «если..., то» употребляют и в других науках, а также в повседневной жизни. Определим соответствующую логическую операцию.

Определение

Импликацией (или логическим следованием) двух высказываний A и B называют высказывание, которое ложно при условии, что высказывание A истинно, а высказывание B ложно, а во всех остальных случаях оно истинно.

Логическое следование высказываний A и B обозначают так: $A \Rightarrow B$ (читают: «если A, то B»).

В импликации $A \Rightarrow B$ высказывание A называют **условием импликации**, а высказывание B — **выводом импликации.**

Приведём таблицу истинности для импликации:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Заметим, что первые две строки этой таблицы полностью соответствуют нашему бытовому пониманию слова «следует»: если из истины следует истина, то это правильно (первая строка таблицы); если из истины следует ложь, то это неправильно (вторая строка таблицы).

Третья и четвёртая строки показывают, что импликация не полностью соответствует логике, которой мы придерживаемся в бытовом разговорном языке. Вряд ли в повседневной жизни мы руководствуемся такими истинными высказываниями: «из лжи следует правда», «из лжи следует ложь».

Например, в силу определения импликации каждое из высказываний

⟨если $2 \times 2 = 5$, то Волга впадает в Каспийское море⟩

и

⟨если $2 \times 2 = 5$, то Волга впадает в Белое море⟩

истинно.

Вместе с тем понять целесообразность принятого определения импликации помогает такой пример.

Утверждение «Если $x \vdots 10$, то $x \vdots 5$» безусловно истинно во всех случаях.

Если подставить $x = 5$, то получим истинное высказывание:

«если $5 \vdots 10$, то $5 \vdots 5$», иллюстрирующее третью строку таблицы.

Если подставить $x = 1$, то получим истинное высказывание:

«если $1 \vdots 10$, то $1 \vdots 5$», иллюстрирующее четвёртую строку таблицы.

Определение

Эквивалентностью (или двойной импликацией) двух высказываний A и B называют высказывание, которое истинно, если оба высказывания A и B истинны или оба ложны, и ложно, если одно из них истинно, а другое ложно.

Эквивалентность высказываний A и B обозначают так: $A \Leftrightarrow B$ (читают: «A эквивалентно B» или «A тогда и только тогда, когда B»).

Приведём таблицу истинности для эквивалентности:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Рассмотрим два высказывания:

$$A \equiv \{2 = 5\} \text{ и } B \equiv \{2 > 5\}.$$

Эквивалентность $A \Leftrightarrow B \equiv \{2 = 5$ тогда и только тогда, когда $2 > 5\}$ является истинным высказыванием, так как оба высказывания A и B ложны.

Рассмотрим логическую операцию, соответствующую частице «не» в обычном языке.

Определение

Отрицанием высказывания A называют высказывание, которое истинно, если высказывание A ложно, и ложно, если высказывание A истинно.

Отрицание высказывания A обозначают так: $\overline{A}$ (читают: «не A» или «неверно, что A»).

Приведём таблицу истинности для отрицания:

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Комбинируя между собой логические операции, можно получить **логические выражения**. Записи $A \wedge B$, $(A \vee B) \wedge C$, $\overline{A \Rightarrow B}$, $A \Leftrightarrow \overline{B}$ являются примерами логических выражений.

Пример. Составьте таблицу истинности для выражения $(A \wedge B) \vee C$.

Решение. Имеем:

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \vee C$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	0	1
0	1	0	0	0
0	0	1	0	1
0	0	0	0	0

Определение

Высказывания A и B называют логически эквивалентными, если они или оба истинны, или оба ложны.

Пишут $A = B$.

Иными словами: $A = B$ тогда и только тогда, когда $A \Leftrightarrow B$ является истинным высказыванием.

Покажем, например, что $A \Rightarrow B = \overline{A} \vee B$ для любых высказываний A и B. Для этого составим таблицу истинности для выражения $A \Rightarrow B$ и сравним её с таблицей истинности для импликации $\overline{A} \vee B$:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee B$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Столбики, соответствующие логическим выражениям $A \Rightarrow B$ и $\overline{A} \vee B$, совпадают. Это означает, что эти высказывания логически эквивалентны.

Вы знаете, что некоторые свойства операций над множествами во многом аналогичны свойствам арифметических действий. Например,

$$A \cup B = B \cup A \qquad a + b = b + a$$

$$A \cap B = B \cap A \qquad ab = ba$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad a(b + c) = ab + ac$$

Также можно заметить некоторую аналогию при изучении свойств логических операций. Например, высказывания $A \vee B$ и $B \vee A$ логически эквивалентны, то есть

$$A \vee B = B \vee A.$$

В этом легко убедиться, сравнив таблицы истинности для выражений $A \vee B$ и $B \vee A$.

Также несложно установить, что, например,

$$A \wedge B = B \wedge A,$$

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C).$$

С другими свойствами логических операций вы ознакомитесь, решая упражнение 3.13.

Свойства логических операций позволяют одно истинное высказывание заменить другим высказыванием, ему логически эквивалентным. Это даёт возможность строить общие схемы верных логических рассуждений, что, собственно, и составляет предмет математической логики.

Отметим, что математическая логика, как правило, не занимается выяснением истинности одного отдельно взятого высказывания (например, определить, впадает ли Волга в Каспийское море, — дело географии, а не логики). В то же время вопрос об истинности разнообразных логических выражений занимает важное место в этой науке. Поэтому в математической логике особую роль играют те логические выражения, которые всегда являются истинными, независимо от истинности высказываний, из которых они образованы. Такие логические выражения называют **тождественно истинными** или **тавтологиями**.

Рассмотрим выражение $A \vee \overline{A}$ и составим для него таблицу истинности:

A	$\overline{A}$	$A \vee \overline{A}$
1 0	0 1	1 1

Третий столбик таблицы показывает, что если f — функция истинности, то при любом A имеет место равенство $f(A \vee \overline{A}) = 1$.

Следовательно, выражение $A \vee \overline{A}$ является тавтологией, которую называют **законом исключения третьего**. Этот закон совершенно понятен с точки зрения повседневного опыта. Он утверждает, что одно из двух высказываний, A или $\overline{A}$, истинно.

С другими тавтологиями вы ознакомитесь, решая упражнение 3.14.

Подчеркнём, что тавтологии позволяют нам строить истинные высказывания, поэтому они наиболее интересны для логики.

? **1.** Какое утверждение называют высказыванием?
2. Перечислите основные операции над высказываниями.

3. Какие высказывания называют логически эквивалентными?

4. Какие логические выражения называют тавтологиями?

Упражнения

3.1. Какие из данных предложений являются высказываниями:
1) $5 > 5$;
2) $x < 5$;
3) что больше, $\sin 30^\circ$ или $\cos 45^\circ$;
4) если четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм, то $AB = CD$?

3.2. Пусть f — функция истинности. Найдите $f(A)$, если:
1) $A \equiv \{$число 2 — простое$\}$;
2) $A \equiv \{$уравнение $x^2 + x - 1 = 0$ не имеет корней$\}$;
3) $A \equiv \{$Нью-Йорк — столица США$\}$.

3.3. Даны два высказывания:

$$A \equiv \{5 < 6\},\ B \equiv \{6 \text{ — простое число}\}.$$

Определите, истинным или ложным является высказывание:

1) $A \wedge B$; 3) $A \Rightarrow B$; 5) $\overline{A}$;
2) $A \vee B$; 4) $A \Leftrightarrow B$; 6) $\overline{B}$.

3.4. Даны два высказывания:

$$A \equiv \{2 = 3\},\ B \equiv \{2 \text{ — простое число}\}.$$

Определите, истинным или ложным является высказывание:

1) $A \wedge B$; 3) $A \Rightarrow B$; 5) $\overline{A}$;
2) $A \vee B$; 4) $A \Leftrightarrow B$; 6) $\overline{B}$.

3.5. Пусть f — функция истинности, A и B — некоторые высказывания, причём $f(A) = 1$. Найдите, где это возможно, значение функции f:
1) $f(A \vee B)$; 3) $f(A \Leftrightarrow B)$;
2) $f(A \Rightarrow B)$; 4) $f(\overline{A})$.

3.6. Пусть f — функция истинности, A и B — некоторые высказывания, причём $f(\overline{A}) = 1$. Найдите, где это возможно, значение функции f:
1) $f(A \wedge B)$; 3) $f(A \Rightarrow B)$;
2) $f(A \vee B)$; 4) $f(A \Leftrightarrow B)$.

3.7. Пусть f — функция истинности, A и B — некоторые высказывания. Найдите $f(B)$, если:
1) $f(A \Rightarrow B) = 1$ и $f(A) = 1$;
2) $f(A \Leftrightarrow B) = 0$ и $f(A) = 0$.

3.8. Пусть f — функция истинности, A и B — некоторые высказывания, причём $f(A \wedge B) = 1$. Найдите:

1) $f(\overline{A} \vee B)$;   3) $f(\overline{A} \Leftrightarrow \overline{B})$;

2) $f(A \Rightarrow \overline{B})$;   4) $f(\overline{B} \Rightarrow A)$.

3.9. Составьте таблицу истинности для логического выражения:

1) $\overline{A} \Rightarrow B$;   3) $(A \wedge B) \Rightarrow C$;

2) $(A \vee B) \wedge C$;   4) $(A \wedge \overline{C}) \Rightarrow B$.

3.10. Составьте таблицу истинности для логического выражения:

1) $\overline{A} \vee B$;   2) $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$;   3) $(\overline{A} \vee \overline{B}) \wedge (B \vee C)$.

3.11. Электрическая цепь между точками M и N составлена по схеме, изображённой на рисунке 3.1. Рассмотрим высказывания:

$A \equiv$ {элемент m цепи функционирует нормально};

$B \equiv$ {элемент n цепи функционирует нормально}.

Определите, является ли цепь замкнутой, если известно значение функции истинности f:

1) $f(A \wedge B) = 1$;   3) $f(A \vee B) = 0$;   5) $f(\overline{A} \vee B) = 0$.

2) $f(A \wedge B) = 0$;   4) $f(\overline{A} \wedge B) = 1$;

3.12. Электрическая цепь между точками M и N составлена по схеме, изображённой на рисунке 3.2. Рассмотрим высказывания:

$A \equiv$ {элемент m цепи функционирует нормально};

$B \equiv$ {элемент n цепи функционирует нормально}.

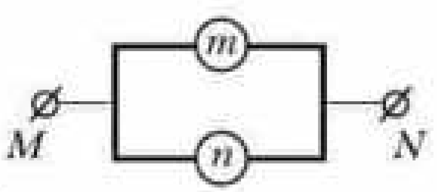


Рис. 3.1

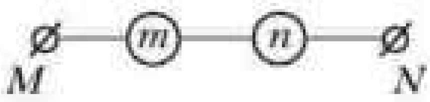


Рис. 3.2

Определите, является ли цепь замкнутой, если известно значение функции истинности f:

1) $f(\overline{A} \wedge \overline{B}) = 1$;   2) $f(\overline{A} \vee B) = 0$;   3) $f(A \wedge B) = 1$.

3.13. Докажите, что:

1) $\overline{\overline{A}} = A$;

2) $A \wedge A = A$;

3) $A \vee A = A$;

4) $A \vee B = B \vee A$;

5) $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$;

6) $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;

7) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;

8) $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$;

9) $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$;

10) $(A \Rightarrow B) = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$;

11) $A \Leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$.

3.14. Докажите, что логическое выражение является тавтологией:

1) $A \Rightarrow A$;

2) $\overline{A \wedge \overline{A}}$;

3) $A \wedge \overline{A} \Rightarrow B$;

4) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$;

5) $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$;

6) $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$;

7) $\overline{B} \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow \overline{A}$;

8) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.

3.15. Через операции конъюнкции и отрицания выразите операцию:

1) дизъюнкции;

2) импликации.

3.16. Выразите операцию конъюнкции через операции дизъюнкции и отрицания.

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

О компьютерах, электрических схемах и теореме Поста

Интересно отметить, что математическая логика сыграла существенную роль в создании компьютеров.

Наверное, вы слышали, что современные компьютеры в своей работе основываются не на десятичной системе счисления, к которой мы привыкли, а на так называемой двоичной системе счисления, в которой каждое число кодируется последовательностью нулей и единиц[1]. Управление работой компьютера выполняется с помощью команд, которые также кодируются нулями и единицами. Аппарат математической логики оказался необычайно удобен, потому что каждое логическое высказывание также характеризуется нулём или единицей.

Для реализации операций над высказываниями в первых компьютерах использовались электрические схемы. Например, для операций дизъюнкции и конъюнкции можно использовать электрические схемы, описанные в задачах 3.11 и 3.12 (в современных компьютерах электрические схемы заменены полупроводниковыми микросхемами). Какие же электрические схемы соответствуют другим логическим выражениям, например импликации? Существуют ли такие схемы вообще? И если существуют, то как их построить?

[1] Технически реализовать такое кодирование довольно просто: поданное на провод напряжение означает единицу, а отсутствие напряжения — нуль. Если вы хотите узнать больше о двоичной (q-ичной) системе счисления и кодировании, то советуем принять участие в работе над проектом «Системы счисления и кодирование» (с. 418).

Оказывается, для построения электрических аналогов любых (даже самых сложных) логических выражений можно обойтись только схемами для дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

Для обоснования этого утверждения переведём его на математический язык.

Каждое логическое выражение имеет свою таблицу истинности, которая и описывает его логическое содержание. Покажем, что для произвольной таблицы истинности можно найти логическое выражение, использующее только операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

Рассмотрим, например, некоторое логическое выражение F, зависящее от трёх высказываний A, B, C и имеющее такую таблицу истинности:

A	B	C	F
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

Видим, что среди значений логического выражения F есть две единицы (синяя и красная строки таблицы), а остальные — нули. Построим логическое выражение, равное F, используя только операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

Для получения единицы при комбинации аргументов 1, 1, 0 (синяя строка) запишем выражение: $A \wedge B \wedge \overline{C}$. Это выражение принимает истинное значение только тогда, когда A и B — истинные высказывания, а C — ложное, то есть как раз при комбинации аргументов 1, 1, 0. Аналогично для получения второй единицы (красная строка) запишем выражение: $\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}$. Теперь понятно, что F можно представить как дизъюнкцию этих двух выражений:

$$F = (A \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}).$$

Рассуждая таким же способом, можно найти нужные формулы для самых сложных таблиц истинности. Комбинируя соответствующим образом электрические схемы для дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, можно построить схему, которая соответствует произвольному логическому выражению. Например, для выражения F имеем схему, изображённую на рисунке 3.3.

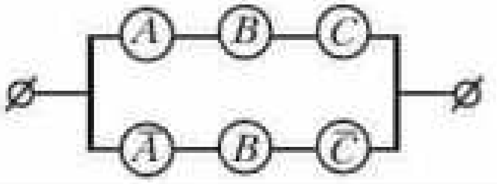


Рис. 3.3

В заключение этого рассказа отметим, что математик Эмиль Леон Пост нашёл простые общие условия, позволяющие дать ответ на вопрос, можно ли произвольную таблицу истинности выразить через набор заданных логических выражений. С этой теоремой вы ознакомитесь, если продолжите изучать математику в университете.

Эмиль Леон Пост
1897—1954

§ 4 Предикаты. Операции над предикатами. Виды теорем

Рассмотрим несколько утверждений:

- n — простое число;
- число a делится нацело на число 5;
- $|y| \leqslant 2$;
- $x + y = 1$.

Каждое из них не является высказыванием, так как невозможно сказать, истинно оно или ложно. При одних значениях переменных эти утверждения превращаются в истинные высказывания, при других — в ложные.

Говорят, что такие утверждения зависят от переменных. Их называют **предикатами**.

Обозначим рассматриваемые предикаты соответственно так:

$A(n) \equiv \{n$ — простое число$\}$;

$B(a) \equiv \{$число a делится нацело на число 5$\}$;

$C(y) \equiv \{|y| \leqslant 2\}$;

$D(x; y) \equiv \{x + y = 1\}$.

В круглых скобках указаны переменные, от которых зависит предикат.

Если в предикат вместо переменной подставить какое-нибудь её значение, то получим высказывание. Например:

- $A(2)$ — истинное высказывание;

- $B(4)$ — ложное высказывание;
- $C(5)$ — ложное высказывание;
- $D(0; 1)$ — истинное высказывание.

Рассмотрим множество M и некоторый предикат $P(x)$, где $x \in M$. В таком случае предикат $P(x)$ называют **заданным на множестве M** или говорят, что множество M является **областью определения предиката** $P(x)$.

Возвращаясь к рассмотренным выше примерам, можно сказать, что областью определения предиката $A(n)$ является множество $\boldsymbol{N}$, предиката $B(a)$ — множество $\boldsymbol{Z}$, предиката $C(y)$ — множество $\boldsymbol{R}$, предиката $D(x; y)$ — множество всех упорядоченных пар действительных чисел.

Во множестве M, на котором задан предикат $P(x)$, выделим подмножество, содержащее все те и только те элементы, для которых предикат $P(x)$ превращается в истинное высказывание. Это множество называют **областью истинности предиката** $P(x)$ и обозначают соответственно буквой P.

Например, областью истинности предиката $A(n)$ является множество A, состоящее из всех простых чисел. Для предиката $C(y)$ имеем: $C = [-2; 2]$.

Если область истинности предиката совпадает с его областью определения, то такой предикат называют **тождественно истинным**, а если область истинности — пустое множество, то предикат называют **тождественно ложным**. Например, предикат $P(x) = \{x - x = 0\}$ — тождественно истинный, а предикат $Q(x) = \{x^2 + 1 = 0\}$ — тождественно ложный. Оба эти предиката определены на множестве $\boldsymbol{R}$.

Введём операции над предикатами. При этом будем считать, что предикаты $A(x)$ и $B(x)$ заданы на множестве M и их области истинности равны соответственно A и B.

Определение

Предикаты $A(x)$ и $B(x)$ называют равносильными, если их области истинности совпадают, то есть $A = B$.

Пишут: $A(x) \equiv B(x)$.

Например, если $A(x) \equiv \{x^3 \geqslant 0\}$ и $B(x) \equiv \{|x| = x\}$, то $A(x) \equiv B(x)$. Действительно, $A = B = [0; +\infty)$.

Логические операции над высказываниями естественным образом распространяются на предикаты. Рассмотрим некоторые логические операции над предикатами.

Определение

Конъюнкцией предикатов $A(x)$ и $B(x)$ называют предикат, область истинности которого равна $A \cap B$.

Конъюнкцию предикатов $A(x)$ и $B(x)$ обозначают так: $A(x) \wedge B(x)$.

Например, если $A(x) \equiv \{x > 5\}$, $B(x) \equiv \{x \leqslant 7\}$, то конъюнкция этих предикатов представляет собой систему

$$\begin{cases} x > 5, \\ x \leqslant 7, \end{cases}$$

множество решений которой, промежуток $(5; 7]$, является областью истинности предиката $A(x) \wedge B(x)$. Также можно записать: $A(x) \wedge B(x) \equiv \{5 < x \leqslant 7\}$.

Определение

Дизъюнкцией предикатов $A(x)$ и $B(x)$ называют предикат, область истинности которого равна $A \cup B$.

Дизъюнкцию предикатов $A(x)$ и $B(x)$ обозначают так: $A(x) \vee B(x)$.

Например, если $A(x) \equiv \{x < -5\}$, $B(x) \equiv \{x > 5\}$, то дизъюнкция этих предикатов представляет собой совокупность

$$\left[\begin{array}{l} x < -5, \\ x > 5, \end{array}\right.$$

множество решений которой $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$ является областью истинности предиката $A(x) \vee B(x)$. Также можно записать: $A(x) \vee B(x) \equiv \{|x| > 5\}$.

Определение

Импликацией предикатов $A(x)$ и $B(x)$ называют предикат, который превращается в ложное высказывание для тех и только тех элементов множества M, для которых предикат $A(x)$ становится истинным высказыванием, а предикат $B(x)$ — ложным.

Импликацию предикатов $A(x)$ и $B(x)$ обозначают так: $A(x) \Rightarrow B(x)$.

Например, если $A(x) \equiv \{x > 5\}$, $B(x) \equiv \{x > 3\}$, то областью истинности предиката $A(x) \Rightarrow B(x)$ является множество $\boldsymbol{R}$.

Вообще, если $A \subset B$, то областью истинности предиката $A(x) \Rightarrow B(x)$ является множество M. Действительно, во множестве M нет элементов, которые принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству B (рис. 4.1).

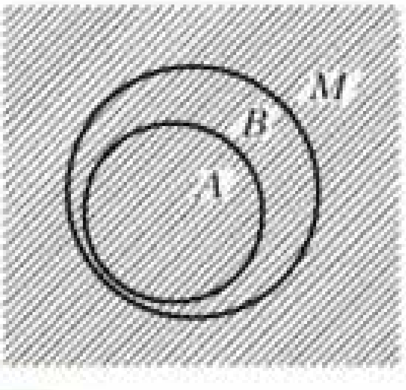


Рис. 4.1

Определение

Эквивалентностью предикатов $A(x)$ и $B(x)$ называют предикат, который превращается в истинное высказывание для тех и только тех эле-

ментов множества M, для которых оба предиката $A(x)$ и $B(x)$ становятся истинными высказываниями или оба становятся ложными высказываниями.

Эквивалентность предикатов $A(x)$ и $B(x)$ обозначают так: $A(x) \Leftrightarrow B(x)$.

Например, если $A(x) \equiv \{x^2 - x - 2 = 0\}$, $B(x) \equiv \{(x + 1)(x - 2)(x^2 + 1) = 0\}$, то областью истинности предиката $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ является множество $\boldsymbol{R}$.

Определение

Отрицанием предиката $A(x)$ называют предикат, областью истинности которого является множество $M \setminus A$.

Отрицание предиката $A(x)$ обозначают так: $\overline{A(x)}$.

Например, если $A(x) \equiv \{x > 5\}$, то $\overline{A(x)} \equiv \{x \leqslant 5\}$.

Логические операции над предикатами обладают свойствами, аналогичными свойствам логических операций над высказываниями.

Например,

$$A(x) \wedge B(x) \equiv B(x) \wedge A(x),$$
$$A(x) \vee B(x) \equiv B(x) \vee A(x).$$

Справедливость этих свойств следует из равенств $A \cap B = B \cap A$ и $A \cup B = B \cup A$.

В частности, эти свойства позволяют утверждать, что если в системе или совокупности уравнений (неравенств), определённых на $\boldsymbol{R}$, поменять порядок их следования, то получим систему или совокупность, равносильную данной.

Поскольку для множеств A, B и C справедливо равенство $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, то для соответствующих предикатов выполняется свойство

$$A(x) \wedge (B(x) \vee C(x)) \equiv (A(x) \wedge B(x)) \vee (A(x) \wedge C(x)).$$

Например, система $\begin{cases} x > 5, \\ \left[\begin{array}{l} x < 7, \\ x > 11 \end{array}\right. \end{cases}$ равносильна совокупности $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 5, \\ x < 7, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 5, \\ x > 11. \end{cases} \end{array}\right.$

Пусть предикат $A(x)$ задан на множестве M. Рассмотрим два часто встречающихся утверждения.

• Предикат $A(x)$ превращается в истинное высказывание *для всех* элементов x множества M.

• Предикат $A(x)$ превращается в истинное высказывание *хотя бы для одного* элемента x множества M.

Первое утверждение принято кратко записывать так:

$$(\forall x \in M)\ A(x).$$

Второе утверждение кратко записывают так:

$$(\exists x \in M)\ A(x).$$

Символ $\forall$ (перевёрнутая первая буква английского слова *All* — «каждый») называют **квантором общности**. Он заменяет в словесных формулировках словосочетания: *для произвольного, для любого, для каждого*.

Символ $\exists$ (перевёрнутая первая буква английского слова *Exist* — существовать) называют **квантором существования**. Он заменяет в словесных формулировках слова: *существует, найдётся, хотя бы для одного*.

Например, если на предикат $A(x) \equiv \{|x| > 0\}$, заданный на множестве $\boldsymbol{R}$, «навесить» кванторы, то получим:

$(\forall x \in \boldsymbol{R})\ A(x)$ — ложное высказывание;

$(\exists x \in \boldsymbol{R})\ A(x)$ — истинное высказывание.

Следовательно, появление кванторов общности или существования перед предикатом преобразует его в высказывание.

С помощью введённых в этом пункте понятий целый ряд математических утверждений можно сформулировать компактно.

Покажем, как можно сформулировать принцип математической индукции.

Пусть предикат $A(n)$ задан на множестве $\boldsymbol{N}$. Тогда высказывание $(\forall n \in \boldsymbol{N})\ A(n)$ логически эквивалентно высказыванию

$$A(1) \wedge ((\forall k \in \boldsymbol{N})\ A(k) \Rightarrow A(k+1)),$$

то есть принцип математической индукции можно сформулировать так:

$$(\forall n \in \boldsymbol{N})\ A(n) \equiv A(1) \wedge ((\forall k \in \boldsymbol{N})\ A(k) \Rightarrow A(k+1)).$$

Большинство теорем, изучаемых в школе, можно сформулировать так:

для любого элемента x множества M из утверждения $A(x)$ следует утверждение $B(x)$.

Иными словами, теорема представляет собой истинное высказывание вида

$$(\forall x \in M)\ A(x) \Rightarrow B(x).$$

Например, рассмотрим такую теорему.

Если натуральное число n делится нацело на **6**, *то оно делится нацело на* **3**.

В этой теореме рассматриваются два предиката, заданных на множестве $\boldsymbol{N}$:

$$A(n) \equiv \{n \vdots 6\};$$
$$B(n) \equiv \{n \vdots 3\}.$$

Эту теорему можно представить в виде такого высказывания:

$$(\forall n \in \boldsymbol{N})\ A(n) \Rightarrow B(n).$$

В формулировке теоремы, имеющей структуру

$$(\forall x \in M)\ A(x) \Rightarrow B(x),$$

предикат $A(x)$ называют **условием теоремы**, предикат $B(x)$ — **выводом теоремы**. Описание элементов множества M — это разъяснительная часть теоремы.

Часто для сжатости формулировки разъяснительную часть теоремы опускают. Например, теорему Пифагора формулируют так: *если в треугольнике* ABC $\angle C = 90^\circ$, *то* $AB^2 = AC^2 + CB^2$.

Покажем, как теорему Пифагора можно сформулировать в форме, описанной выше.

Пусть T — множество всех треугольников. Рассмотрим два предиката, заданных на множестве T:

$$P(\Delta ABC) \equiv \{\angle C = 90^\circ\};$$
$$Q(\Delta ABC) \equiv \{AB^2 = AC^2 + CB^2\}.$$

Тогда наиболее полная формулировка теоремы Пифагора — это высказывание

$$(\forall \Delta ABC \in T)\ P(\Delta ABC) \Rightarrow Q(\Delta ABC),$$

которое можно прочитать так: для любого треугольника ABC, в котором $\angle C = 90^\circ$, выполняется равенство $AB^2 = AC^2 + CB^2$.

Пусть предикаты $A(x)$ и $B(x)$ заданы на множестве M и имеют области истинности A и B соответственно. Мы знаем, что из условия $A \subset B$ следует, что областью истинности импликации $A(x) \Rightarrow B(x)$ является множество M. Следовательно, условие $A \subset B$ обеспечивает истинность теоремы $(\forall x \in M)\ A(x) \Rightarrow B(x)$.

Например, множество чисел, кратных 6, является подмножеством множества чисел, кратных 3. Поэтому верна рассмотренная выше теорема $(\forall n \in N)\ A(n) \Rightarrow B(n)$.

Определение

Теоремы

$$(\forall x \in M)\ A(x) \Rightarrow B(x) \text{ и}$$
$$(\forall x \in M)\ B(x) \Rightarrow A(x)$$

называют взаимно обратными.

Иногда одну из этих теорем называют **прямой теоремой**, тогда другую называют **обратной теоремой**.

Со взаимно обратными теоремами вы нередко встречались в курсе планиметрии 7—9 классов.

В теореме $(\forall x \in M)\ A(x) \Rightarrow B(x)$ предикат $A(x)$ называют **достаточным условием** для $B(x)$, а предикат $B(x)$ — **необходимым условием** для $A(x)$.

Во взаимно обратных теоремах каждый из предикатов $A(x)$ и $B(x)$ является необходимым и достаточным условием для другого. В этом случае высказывание

$$(\forall x \in M)\ A(x) \Leftrightarrow B(x)$$

является истинным. Эту теорему читают: «для всех элементов множества M условие $A(x)$ является необходимым и достаточным для условия $B(x)$» или «для всех элементов множества M условие $A(x)$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется условие $B(x)$». Теоремы такого вида называют **критериями.**

Например:

- для того чтобы произвольный четырёхугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали точкой пересечения делились пополам;
- любое натуральное число n кратно трём тогда и только тогда, когда сумма его цифр кратна трём.

Определение

Теорему $(\forall x \in M)\ \overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}$ называют противоположной теореме $(\forall x \in M)\ A(x) \Rightarrow B(x)$.

Рассмотрим теорему, которую будем считать прямой:

в любом треугольнике против равных сторон лежат равные углы.

Построим с помощью этой теоремы ещё три новые теоремы.

Обратная теорема: *в любом треугольнике против равных углов лежат равные стороны.*

Противоположная теорема: *в любом треугольнике против неравных сторон лежат неравные углы.*

Теорема, обратная противоположной: *в любом треугольнике против неравных углов лежат неравные стороны.*

Из предыдущего параграфа вы знаете, что высказывания $A \Rightarrow B$ и $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ логически эквивалентны (см. упражнение 3.13 (10)), то есть $(A \Rightarrow B) = (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$. Отсюда логически эквивалентными являются высказывания, представляющие собой прямую теорему и обратную противоположной, то есть

$$(\forall x \in M)\ A(x) \Rightarrow B(x) = (\forall x \in M)\ \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}.$$

Этим фактом мы нередко пользовались. Известный метод доказательства от противного как раз и состоит в том, что вместо исходной теоремы доказывают обратную противоположной.

?

1. Как называют утверждения, зависящие от переменных?
2. Перечислите основные операции над предикатами.
3. Какие словосочетания заменяют кванторы общности и существования?
4. Перечислите виды теорем.

Упражнения

◆

4.1. Среди данных утверждений укажите предикаты:
1) число $(n + 1)^2 - 1$ — составное, $n \in \boldsymbol{N}$;
2) для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $x^2 + x + 1 = 0$;
3) модуль действительного числа x больше нуля;
4) неверно, что $n \vdots 5$, $n \in \boldsymbol{N}$;
5) существует такое целое число x, что число 1 является его делителем.

4.2. На множестве $[-2; 3)$ задан предикат
$$A(x) \equiv \{x \text{ — целое число}\}.$$
Укажите область истинности этого предиката.

4.3. На множестве $[0; +\infty)$ задан предикат
$$P(x) \equiv \{x^3 - x = 0\}.$$
Укажите область истинности этого предиката.

◆◆

4.4. На множестве $\boldsymbol{R}$ заданы предикаты $P(x) \equiv \{x \neq 5\}$, $Q(x) \equiv \{x \neq -2\}$. Укажите область истинности предиката: 1) $P(x) \wedge Q(x)$; 2) $P(x) \vee Q(x)$.

4.5. Предикаты $A(n) \equiv \{n \vdots 10\}$, $B(n) \equiv \{n \vdots 5\}$ заданы на множестве $\boldsymbol{N}$. Укажите область истинности предиката $A(n) \Rightarrow B(n)$.

4.6. Предикаты $P(x) \equiv \{|x| = -1\}$, $S(x) \equiv \{x + 3 = 0\}$ заданы на множестве $\boldsymbol{R}$. Укажите область истинности предиката $P(x) \Rightarrow S(x)$.

4.7. На множестве $\boldsymbol{R}$ заданы предикаты $P(x) \equiv \{x > 2\}$, $Q(x) \equiv \{x > 5\}$. Укажите область истинности предиката: 1) $P(x) \Rightarrow Q(x)$; 2) $Q(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow P(x)$.

4.8. На множестве $\boldsymbol{R}$ заданы предикаты $P(x) \equiv \{x \geqslant 2\}$, $Q(x) \equiv \{x < 5\}$. Укажите область истинности предиката: 1) $P(x) \Rightarrow Q(x)$; 2) $Q(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow P(x)$.

4.9. Множества A и B — области истинности предикатов $A(x)$ и $B(x)$, заданных на множестве M (рис. 4.2). Заштрихуйте область истинности предиката: 1) $A(x) \wedge B(x)$; 2) $A(x) \vee B(x)$; 3) $A(x) \Rightarrow B(x)$.

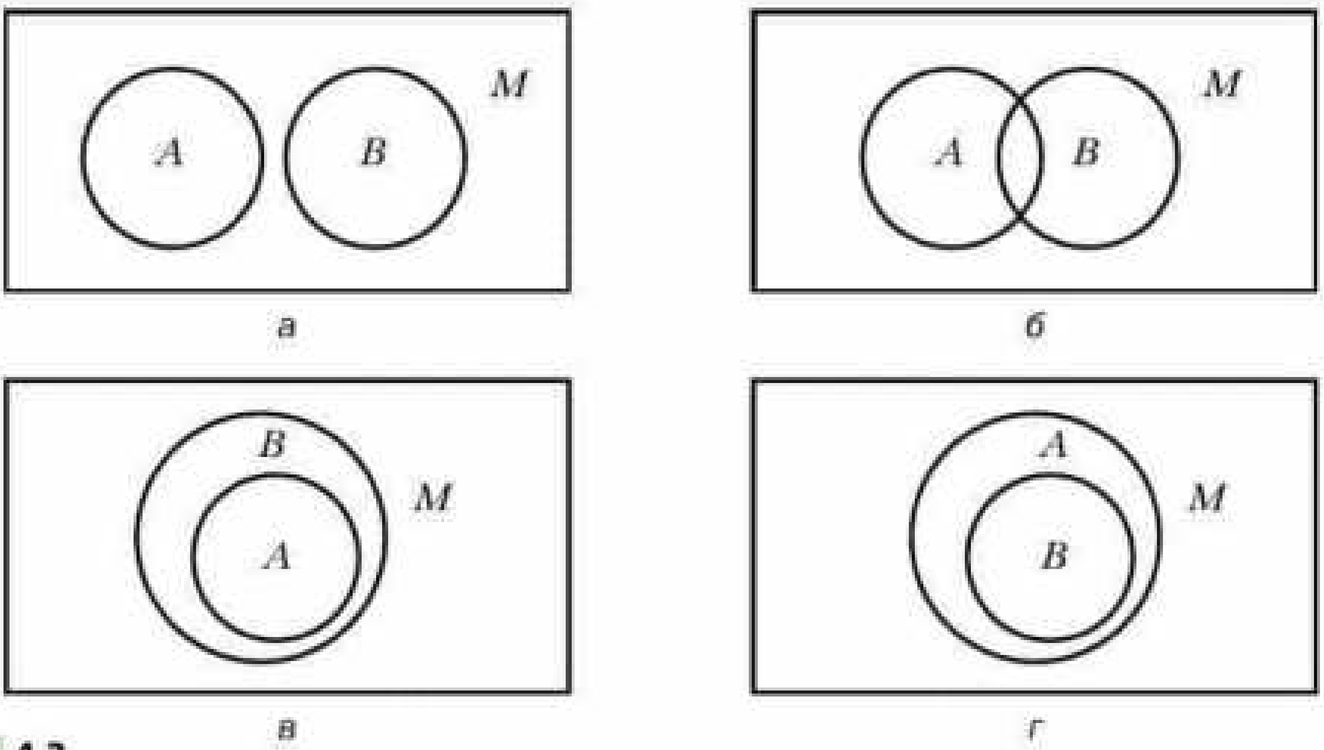


Рис. 4.2

4.10. Среди предикатов, заданных на множестве $\boldsymbol{R}$, укажите равносильные:

$A(x) \equiv \{-x^2 = 2\}$; $\qquad C(x) \equiv \{[x] > x\}$;

$B(x) \equiv \{(x-3)^2 > 0\}$; $\qquad D(x) \equiv \left\{\dfrac{x-3}{x-3} = 1\right\}$.

4.11. Предикаты $A(x)$, $B(x)$ и $C(x)$ заданы на множестве M. Докажите, что:

1) $(A(x) \wedge B(x)) \wedge C(x) \equiv A(x) \wedge (B(x) \wedge C(x))$;
2) $(A(x) \vee B(x)) \vee C(x) \equiv A(x) \vee (B(x) \vee C(x))$;
3) $A(x) \vee (B(x) \wedge C(x)) \equiv (A(x) \vee B(x)) \wedge (A(x) \vee C(x))$;
4) $\overline{A(x) \wedge B(x)} \equiv \overline{A(x)} \vee \overline{B(x)}$;
5) $\overline{A(x) \vee B(x)} \equiv \overline{A(x)} \wedge \overline{B(x)}$.

4.12. Укажите истинные высказывания:

1) $(\forall x \in \boldsymbol{R})\ |x| > x$;
2) $(\exists x \in \boldsymbol{R})\ |x| \leqslant 0$;
3) $(\forall n \in \boldsymbol{N})\ (n^2 - n) \,\vdots\, 2$.

4.13. Предикат $A(p) \equiv \{p$ — нечётное число$\}$ задан на множестве простых чисел P. Укажите истинное высказывание:

1) $(\forall p \in P)\ A(p)$; $\qquad$ 2) $\overline{(\forall p \in P)\ A(p)}$; $\qquad$ 3) $(\exists p \in P)\ \overline{A(p)}$.

4.14. Для теоремы «если некоторое натуральное число делится нацело на 5, то его квадрат делится нацело на 25» сформулируйте обратную теорему, противоположную теорему и теорему, обратную противоположной.

4.15. Для теоремы «если в некотором выпуклом четырёхугольнике суммы противолежащих сторон равны, то в него можно вписать окружность» сформулируйте обратную теорему, противоположную теорему и теорему, обратную противоположной.

§ 5 Функция и её свойства

С понятием функции и с некоторыми её свойствами вы ознакомились в курсе алгебры 7—9 классов. Напомним и уточним основные сведения.

Пусть X — множество значений независимой переменной, Y — множество значений зависимой переменной. Функция — это правило, с помощью которого по каждому значению независимой переменной из множества X можно найти единственное значение зависимой переменной из множества Y.

Другими словами: **функция — это правило, которое каждому элементу множества X ставит в соответствие единственный элемент множества Y.**

Если рассматривают функцию f с независимой переменной x и зависимой переменной y, то говорят, что переменная y **функционально зависит** от переменной x. Этот факт обозначают так: $y = f(x)$.

Независимую переменную ещё называют **аргументом функции**.

Множество всех значений, которые принимает аргумент, то есть множество X, называют **областью определения функции** и обозначают $D(f)$ или $D(y)$.

Множество всех значений, которые принимает зависимая переменная, то есть множество Y, называют **областью значений функции** и обозначают $E(f)$ или $E(y)$.

Если областью определения функции f является множество X, а областью значений — множество Y, то функцию f также называют **отображением множества X на множество Y** или **сюръекцией** (от французского *sur* — «на»). Слова «отображение» и «функция» — синонимы. Однако термин «отображение» чаще используют тогда, когда при задании функции хотят подчеркнуть, какие множества являются областью определения и областью значений. Например, нумерация элементов некоторого счётного множества A — это отображение множества $\mathbf{N}$ на множество A.

На рисунке 5.1 проиллюстрировано отображение множества X на множество Y (точками показаны элементы множеств). В отображении f каждый элемент множества Y является соответствующим некоторому единственному элементу множества X. Такое отображение называют **взаимно однозначным отображением множества X на множество Y** или **биекцией**. Ни одно из отображений g и φ не является взаимно однозначным отображением множества X на множество Y.

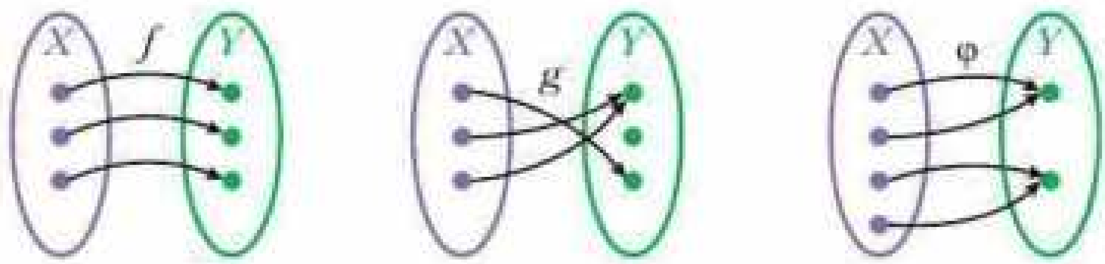


Рис. 5.1

Например, функция $y = \sqrt{x-1}$ является взаимно однозначным отображением множества $X = [1; +\infty)$ на множество $Y = [0; +\infty)$. Заметим, что функция $y = x^2$ не является взаимно однозначным отображением множества $X = \boldsymbol{R}$ на множество $Y = [0; +\infty)$. Действительно, например, элемент 4 множества Y является соответствующим двум элементам, –2 и 2, множества X.

Функцию можно задать одним из следующих способов:

- описательно;
- с помощью формулы;
- с помощью таблицы;
- графически.

Рассмотрим несколько примеров функций, заданных описательно.

Каждому рациональному числу поставим в соответствие число 1, а каждому иррациональному — число 0. Функцию, заданную таким образом, называют **функцией Дирихле** и обозначают $y = \mathfrak{D}(x)$. Пишут:

$$\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in \boldsymbol{Q}, \\ 0, \text{ если } x \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}. \end{cases}$$

Заметим, что $D(y) = \boldsymbol{R}$, $E(y) = \{0, 1\}$.

Каждому действительному числу x поставим в соответствие наибольшее целое число, не превосходящее число x. Заданную функцию называют **целой частью числа** x и обозначают $f(x) = [x]$. Например, $f(\sqrt{2}) = [\sqrt{2}] = 1$, $f(2) = [2] = 2$, $f(-\sqrt{2}) = [-\sqrt{2}] = -2$. Заметим, что $D(f) = \boldsymbol{R}$, $E(f) = \boldsymbol{Z}$.

Каждому действительному числу x поставим в соответствие разность этого числа и его целой части. Заданную функцию называют **дроб-**

ной частью числа x и обозначают $f(x) = \{x\}$. Имеем: $\{x\} = x - [x]$. Например, $f(\sqrt{2}) = \{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - [\sqrt{2}] = \sqrt{2} - 1$, $f(2) = \{2\} = 2 - [2] = 2 - 2 = 0$, $f(-\sqrt{2}) = \{-\sqrt{2}\} = -\sqrt{2} - [-\sqrt{2}] = -\sqrt{2} - (-2) = 2 - \sqrt{2}$. Заметим, что $D(f) = \boldsymbol{R}$, $E(f) = [0; 1)$.

Чаще всего функцию задают с помощью формулы. Если при этом не указана область определения, то считают, что областью определения функции является множество значений аргумента, при которых формула имеет смысл.

Например, если функция задана формулой $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, то её областью определения является область определения выражения $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$, то есть промежуток $(1; +\infty)$.

Пример 1. Найдите область значений функции $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

Решение. Пусть a — произвольный элемент области значений данной функции, то есть $a \in E(y)$. Тогда задача сводится к нахождению всех значений параметра a, при которых уравнение $\frac{2x}{1+x^2} = a$ имеет решения.

Это уравнение равносильно такому:

$2x = a + ax^2$, откуда $ax^2 - 2x + a = 0$.

Если $a = 0$, то полученное уравнение имеет корень $x = 0$. Следовательно, число 0 входит в область значений функции.

Если $a \neq 0$, то это уравнение является квадратным и наличие корней определяется условием $D \geqslant 0$.

Имеем: $D = 4 - 4a^2$. Остаётся решить неравенство $4 - 4a^2 \geqslant 0$. Имеем: $4a^2 \leqslant 4$; $a^2 \leqslant 1$; $|a| \leqslant 1$.

Решением последнего неравенства является промежуток $[-1; 1]$.

Следовательно, $E(y) = [-1; 1]$. ■

Пример 2. Постройте график функции $y = \{x\}$.

Решение. Сначала докажем важные свойства целой и дробной частей числа.

Если $k \in \boldsymbol{Z}$, то $[x + k] = [x] + k$.

Пусть $[x] = c$. Тогда по определению целой части числа $c \leqslant x < c + 1$. Отсюда $c + k \leqslant x + k < (c + k) + 1$. Следовательно, $[x + k] = c + k = [x] + k$.

Если $k \in \boldsymbol{Z}$, то $\{x + k\} = \{x\}$.

Имеем: $\{x + k\} = x + k - [x + k] = x + k - ([x] + k) = x - [x] = \{x\}$.

Доказанное свойство дробной части числа показывает, что значение функции $y = \{x\}$ не изменится, если к её аргументу прибавить целое число. А этот факт, в свою очередь, позволяет утверждать, что на каждом из промежутков вида $[k; k+1)$, где $k \in \mathbf{Z}$, график функции $y = \{x\}$ имеет одинаковый вид. Поэтому достаточно построить его, например, на промежутке $[0; 1)$, а потом полученную фигуру «размножить».

Если $x \in [0; 1)$, то $[x] = 0$ и $\{x\} = x - [x] = x$, то есть при $x \in [0; 1)$ имеем $y = x$.

Искомый график изображён на рисунке 5.2. ■

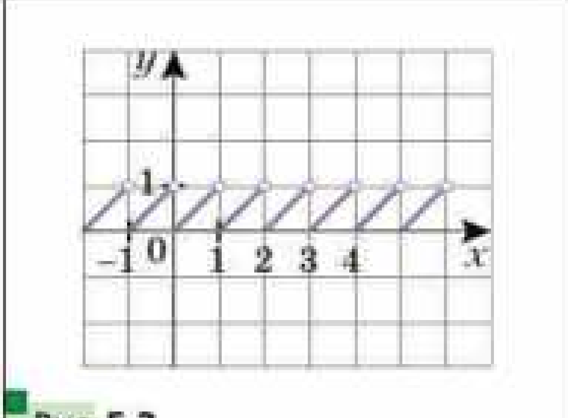


Рис. 5.2

Вам знаком ряд характеристик функции, которые помогают изучать её свойства: *нули функции, промежутки знакопостоянства, промежутки возрастания и убывания.*

Например, для функции $y = x^2 + 2x$, график которой изображён на рисунке 5.3, имеем:

- нули — числа –2 и 0;
- промежутки знакопостоянства — функция принимает положительные значения на каждом из промежутков $(-\infty; -2)$ и $(0; +\infty)$ и отрицательные значения на промежутке $(-2; 0)$;
- функция убывает на промежутке $(-\infty; -1]$ и возрастает на промежутке $[-1; +\infty)$.

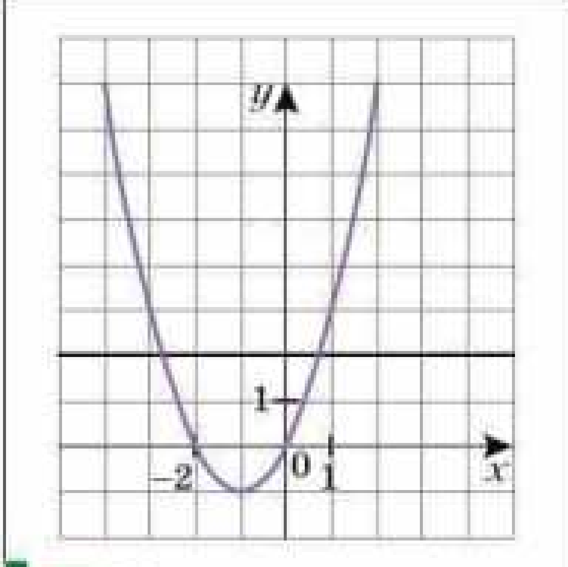


Рис. 5.3

Приведённый выше список далеко не исчерпывает те свойства, которые целесообразно изучать при исследовании функции. Рассмотрим новые понятия, которые помогают более полно охарактеризовать функцию.

Определение

Число $f(x_0)$ называют наибольшим значением функции f на множестве $M \subset D(f)$, если существует такое число $x_0 \in M$, что для всех $x \in M$ выполняется неравенство $f(x_0) \geqslant f(x)$.

Обозначают: $\max\limits_{M} f(x) = f(x_0)$.

Определение

Число $f(x_0)$ называют наименьшим значением функции f на множестве $M \subset D(f)$, если существует такое число $x_0 \in M$, что для всех $x \in M$ выполняется неравенство $f(x_0) \leqslant f(x)$.

Обозначают: $\min\limits_{M} f(x) = f(x_0)$.

Рассмотрим несколько примеров.

Для $f(x) = \sqrt{x}$ и множества $M = [0; 4]$ (рис. 5.4) имеем: $\min\limits_{[0;4]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[0;4]} f(x) = f(4) = 2$.

Для $f(x) = |x|$ и множества $M = [-1; 2]$ (рис. 5.5) имеем: $\min\limits_{[-1;2]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(2) = 2$.

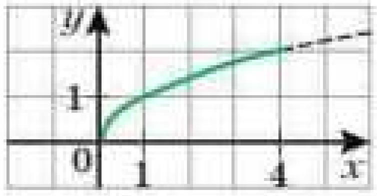


Рис. 5.4

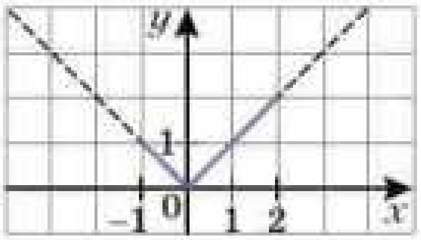


Рис. 5.5

Если c — некоторое число и $f(x) = c$ для любого $x \in M$, то число c является и наибольшим, и наименьшим значениями функции f на множестве M.

Если множество M — это область определения функции, то, записывая наибольшее и наименьшее значения функции, множество M можно не указывать.

Не любая функция на заданном множестве $M \subset D(f)$ имеет наименьшее или наибольшее значение. Так, для функции $f(x) = x^2$ имеем $\min f(x) = 0$. Наибольшего значения на множестве $\boldsymbol{R}$ эта функция не имеет (рис. 5.6).

Функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на множестве $M = (0; +\infty)$ не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений (рис. 5.7).

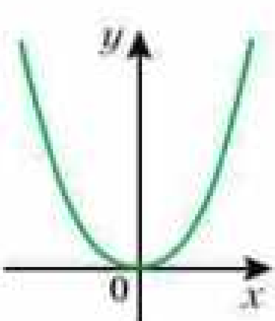


Рис. 5.6

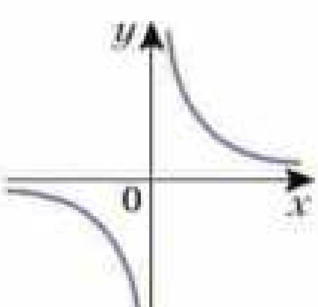


Рис. 5.7

Часто для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции удобно пользоваться такими очевидными фактами:

☞ *если функция f возрастает на промежутке $[a; b]$, то* $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$, $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$ (рис. 5.8);

☞ *если функция f убывает на промежутке $[a; b]$, то* $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$, $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$ (рис. 5.9).

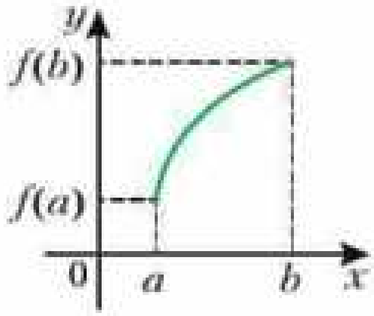


Рис. 5.8

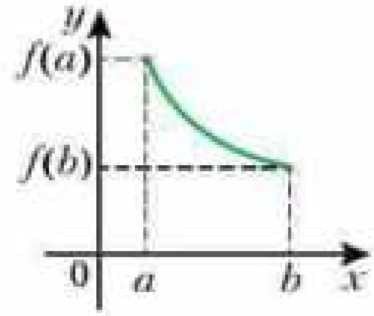


Рис. 5.9

Определение

Функцию f называют чётной, если для любого x из области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Определение

Функцию f называют нечётной, если для любого x из области определения выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Например, функция $f(x) = x^2$ — чётная, а функция $g(x) = x^3$ — нечётная. Действительно, $D(f) = \boldsymbol{R}$, $D(g) = \boldsymbol{R}$. Для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняются равенства $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ и $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$.

Выполнение равенства $f(-x) = f(x)$ или равенства $f(-x) = -f(x)$ для любого $x \in D(f)$ означает, что область определения функции f имеет такое свойство: если $x_0 \in D(f)$, то $-x_0 \in D(f)$. Такую область определения функции называют **симметричной относительно начала координат**.

Из приведённых определений следует, что если область определения функции не является симметричной относительно начала координат, то эта функция не может быть чётной (нечётной).

Например, областью определения функции $y = \dfrac{1}{x-1}$ является множество $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, которое не является симметричным относительно начала координат. Поэтому эта функция не является ни чётной, ни нечётной.

Пример 3. Докажите, что функция $f(x) = x^3 - x$ является нечётной.

Решение. Так как $D(f) = \boldsymbol{R}$, то область определения функции f симметрична относительно начала координат.

Для любого $x \in D(f)$ имеем: $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x)$. Следовательно, функция f нечётная. ■

Пример 4. Исследуйте на чётность функцию $f(x) = \frac{|x-2|}{1+x} + \frac{|x+2|}{1-x}$.

Решение. Имеем: $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. Значит, область определения функции f симметрична относительно начала координат.

Для любого $x \in D(f)$ имеем:

$$f(-x) = \frac{|-x-2|}{1-x} + \frac{|-x+2|}{1-(-x)} = \frac{|x+2|}{1-x} + \frac{|x-2|}{1+x} = f(x).$$

Следовательно, функция f чётная. ■

Теорема 5.1

Ось ординат является осью симметрии графика чётной функции.

Доказательство

Для доказательства теоремы достаточно показать, что если точка $M(a; b)$ принадлежит графику чётной функции, то точка $M_1(-a; b)$ также принадлежит её графику.

Если точка $M(a; b)$ принадлежит графику функции f, то $f(a) = b$. Поскольку функция f чётная, то $f(-a) = f(a) = b$. Это значит, что точка $M_1(-a; b)$ также принадлежит графику функции f (рис. 5.10). ■

Теорема 5.2

Начало координат является центром симметрии графика нечётной функции.

Утверждение теоремы проиллюстрировано на рисунке 5.11.

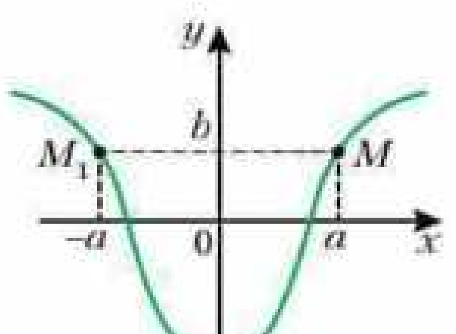


Рис. 5.10

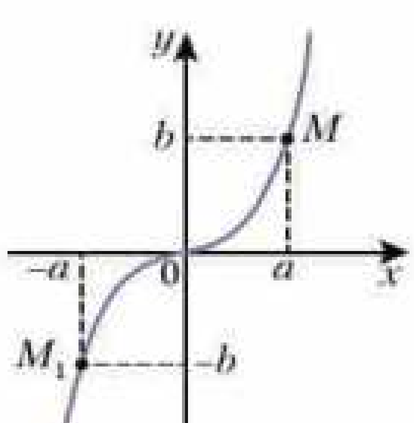


Рис. 5.11

Докажите эту теорему самостоятельно.

Очевидно, что функция $y = 0$, у которой $D(y) = \boldsymbol{R}$, одновременно является и чётной, и нечётной.

1. Что называют функцией?
2. Какое отображение называют взаимно однозначным отображением множества X на множество Y?
3. Назовите способы задания функции.
4. Какое число называют наибольшим (наименьшим) значением функции на множестве M?
5. Какую функцию называют чётной; нечётной?
6. Каким свойством обладает график чётной функции; нечётной функции?

Упражнения

5.1. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \dfrac{x}{|x| - 7}$; 2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+2}} + \dfrac{4x-3}{x^2 - 7x + 6}$.

5.2. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \sqrt{x+4} + \dfrac{2}{x+1}$; 2) $f(x) = \sqrt{8-x} + \dfrac{4}{x^2 - 8x}$.

5.3. Найдите область значений функции:

1) $f(x) = 5 - x^2$; 2) $f(x) = |x+2| + 2$; 3) $f(x) = \sqrt{-x^2}$.

5.4. Найдите область значений функции:

1) $f(x) = x^2 + 3$; 2) $f(x) = 6 - \sqrt{x}$; 3) $f(x) = (\sqrt{x})^2$.

5.5. Какая из функций является взаимно однозначным отображением множества $D(y)$ на множество $E(y)$:

1) $y = 2x + 1$; 2) $y = |x|$; 3) $y = \sqrt{x}$?

5.6. Найдите нули функции:

1) $y = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}$; 4) $y = \{x\}$;
2) $y = x\sqrt{x-1}$; 5) $y = \mathfrak{D}(x)$.
3) $y = |x| - x$;

5.7. Найдите нули функции:

1) $y = |x| + x$; 3) $y = [x]$;
2) $y = \dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{x-2}}$; 4) $y = x\mathfrak{D}(x)$.

5.8. Найдите промежутки знакопостоянства функции:

1) $y = \sqrt{x-1}$; 3) $y = \sqrt{x(x-1)^2}$;
2) $y = |x+1|$; 4) $y = \{x\}$.

5.9. Найдите промежутки знакопостоянства функции:

1) $y = \sqrt{x} + 2$; 3) $y = \sqrt{(x-1)(x-3)^2}$;

2) $y = |x^2 - 4|$; 4) $y = [x]$.

5.10. Функция f чётная. Может ли выполняться равенство:

1) $f(2) - f(-2) = 1$; 2) $f(5)\,f(-5) = -2$; 3) $\dfrac{f(1)}{f(-1)} = 0$?

5.11. Функция f нечётная. Может ли выполняться равенство:

1) $f(1) + f(-1) = 1$; 2) $f(2)\,f(-2) = 3$; 3) $\dfrac{f(-2)}{f(2)} = 0$?

5.12. Докажите, что функция является чётной:

1) $f(x) = -3x^2 + |x| - 1$;

2) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}}$;

3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5} + \sqrt{x^2 + 3x + 5}$;

4) $f(x) = (x+2)\,|x-4| - (x-2)\,|x+4|$.

5.13. Докажите, что функция является нечётной:

1) $g(x) = \sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}$; 3) $g(x) = \dfrac{|4x-1| - |4x+1|}{x^4 - 1}$;

2) $g(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{3-x} - \sqrt{3+x}}$; 4) $g(x) = \dfrac{3x+2}{x^2 - x + 1} + \dfrac{3x-2}{x^2 + x + 1}$.

5.14. Исследуйте на чётность функцию:

1) $y = \dfrac{x-1}{x-1}$; 3) $y = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}$;

2) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2-1}$; 4) $y = x\mathfrak{D}(x)$.

◆◆

5.15. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{4 - |x|} + \dfrac{1}{x+2}$; 3) $y = \sqrt{|x+1|(x-3)}$.

2) $y = \sqrt{|x| - 3} + \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$;

5.16. Найдите область определения функции:

1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - 1}} + \sqrt{x+4}$; 3) $y = \sqrt{(x+4)^2(x-3)}$.

2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{(x+1)^2(x+3)}}$;

5.17. Найдите $\max\limits_{M} f(x)$ и $\min\limits_{M} f(x)$, если:

1) $f(x) = x^2 - 6x + 10$, $M = \boldsymbol{R}$; 2) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$, $M = D(f)$.

5.18. Найдите $\max\limits_{M} f(x)$ и $\min\limits_{M} f(x)$, если:

1) $f(x) = -x^2 - 8x - 3$, $M = \boldsymbol{R}$;

2) $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$, $M = D(f)$.

5.19. Нечётная функция f такова, что $0 \in D(f)$. Найдите $f(0)$.

5.20. Нечётная функция f имеет 4 нуля. Докажите, что $0 \notin D(f)$.

5.21. Нечётная функция f имеет 7 нулей. Найдите $f(0)$.

5.22. Чётная функция f имеет 7 нулей. Найдите $f(0)$.

5.23. Функция f чётная, $\min\limits_{[1;3]} f(x) = 2$ и $\max\limits_{[1;3]} f(x) = 5$. Найдите $\min\limits_{[-3;-1]} f(x)$, $\max\limits_{[-3;-1]} f(x)$.

5.24. Функция f нечётная, $\min\limits_{[2;5]} f(x) = 1$ и $\max\limits_{[2;5]} f(x) = 3$. Найдите $\min\limits_{[-5;-2]} f(x)$, $\max\limits_{[-5;-2]} f(x)$.

◆ ◆ ◆

5.25. Найдите область значений функции:

1) $y = -2x^2 + 3x - 4$; 2) $y = \frac{3x+1}{2x+3}$; 3) $y = \frac{x}{x^2-1}$.

5.26. Найдите область значений функции:

1) $y = 5x^2 - x + 1$; 2) $y = \frac{2x-1}{5x+4}$; 3) $y = 4x + \frac{1}{x}$.

5.27. Найдите:

1) $\min\limits_{R} (|x-1| + |x-3|)$; 2) $\max\limits_{R} (|x+2| - |x|)$; 3) $\max\limits_{R} \frac{1}{x^2+1}$.

5.28. Решите уравнение $|x+1| - |x| = \sqrt{x^4+1}$.

5.29. Решите уравнение $|x-1| + |x+2| = \sqrt{9-x^2}$.

§ 6 Построение графиков функций с помощью геометрических преобразований

В 9 классе вы научились с помощью графика функции $y = f(x)$ строить графики функций $y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$, $y = kf(x)$.

Покажем, как можно построить график функции $y = f(kx)$, если известен график функции $y = f(x)$.

Рассмотрим случай, когда $k > 0$. Если точка $(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то точка $\left(\frac{x_0}{k}; y_0\right)$ принадлежит графику функции $y = f(kx)$. Действительно, при $x = \frac{x_0}{k}$ имеем: $f(kx) = f\left(k \cdot \frac{x_0}{k}\right) = f(x_0) = y_0$.

Следовательно, каждой точке $(x_0; y_0)$ графика функции $y = f(x)$ соответствует единственная точка $\left(\frac{x_0}{k}; y_0\right)$ графика функции $y = f(kx)$. Аналогично каждая точка $(x_1; y_1)$ графика функции $y = f(kx)$ является соответствующей единственной точке $(kx_1; y_1)$ графика функции $y = f(x)$.

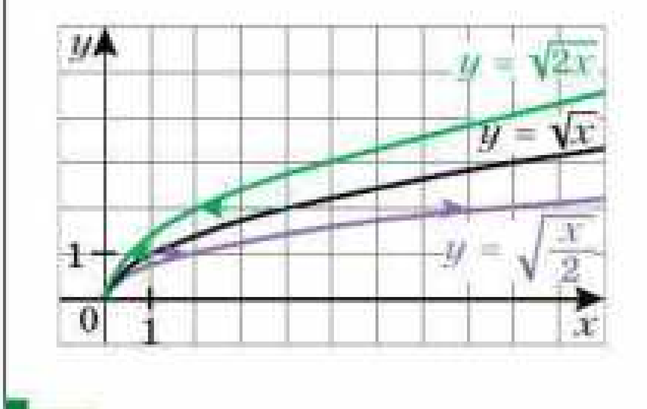


Рис. 6.1

Поэтому ***график функции $y = f(kx)$, где $k > 0$, можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = f(x)$ на точку с той же ординатой и абсциссой, разделённой на k.***

На рисунке 6.1 показано, как можно использовать это правило для построения графиков функций $y = \sqrt{2x}$ и $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$.

Говорят, что график функции $y = f(kx)$ получен из графика функции $y = f(x)$ в результате ***сжатия в k раз к оси ординат***, если $k > 1$, или в результате ***растяжения в $\frac{1}{k}$ раз от оси ординат***, если $0 < k < 1$.

Так, график функции $y = \sqrt{2x}$ получен в результате сжатия графика функции $y = \sqrt{x}$ в 2 раза к оси ординат, а график функции $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$ — в результате растяжения графика функции $y = \sqrt{x}$ в 2 раза от оси ординат.

Покажем, как построить график функции $y = f(-x)$, если известен график функции $y = f(x)$.

Если точка $(x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то точка $(-x_0; y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(-x)$. Действительно, $f(-(-x_0)) = f(x_0) = y_0$.

Следовательно, каждой точке $(x_0; y_0)$ графика функции $y = f(x)$ соответствует единственная точка $(-x_0; y_0)$ графика функции $y = f(-x)$. Аналогично можно показать, что каждая точка $(x_1; y_1)$ графика функции $y = f(-x)$ является соответствующей единственной точке $(-x_1; y_1)$ графика функции $y = f(x)$.

Поэтому ***график функции $y = f(-x)$ можно получить, отобразив график функции $y = f(x)$ симметрично относительно оси ординат.***

Такое преобразование графика функции $y = f(x)$ называют **симметрией относительно оси ординат**.

На рисунке 6.2 показано, как с помощью графика функции $y = \sqrt{x}$ построен график функции $y = \sqrt{-x}$.

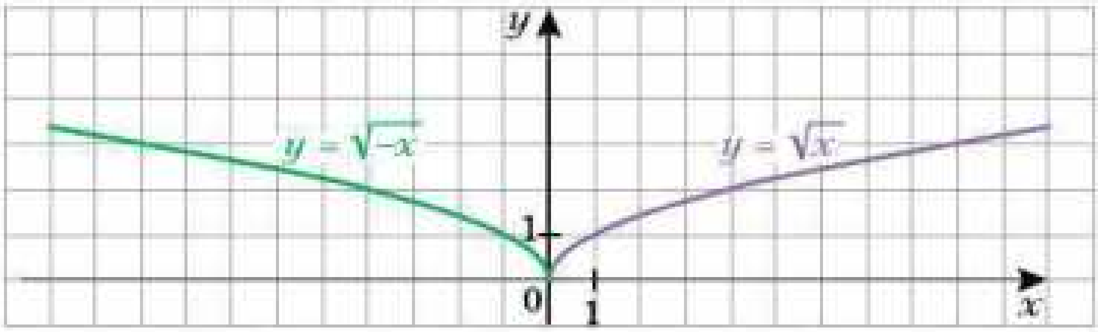


Рис. 6.2

С учётом сказанного становится понятным, что правило построения графика функции $y = f(kx)$, где $k < 0$, такое же, как и для случая $k > 0$. Например, на рисунке 6.3 показано, как с помощью графика функции $y = \sqrt{x}$ можно построить графики функций $y = \sqrt{-3x}$ и $y = \sqrt{-\frac{x}{2}}$.

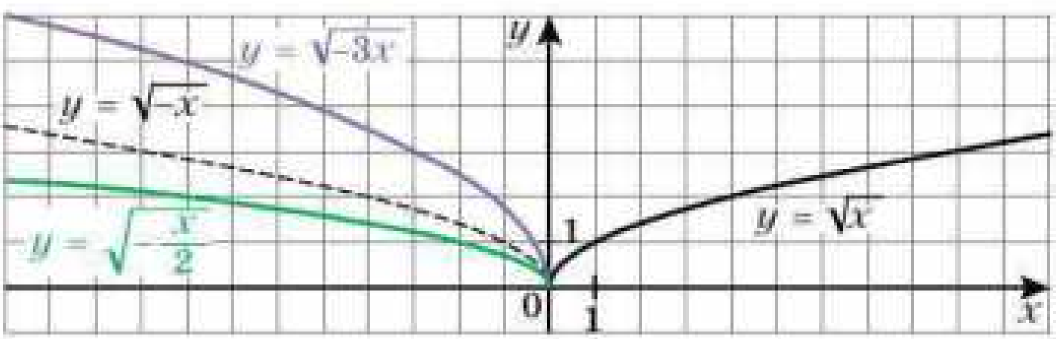


Рис. 6.3

Пример 1. Постройте график функции $y = \sqrt{3x - 2}$.

Решение. Схема построения имеет следующий вид:

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{Вправо на 2 ед.}} y = \sqrt{x - 2} \xrightarrow{\text{Сжатие в 3 раза к оси ординат}} y = \sqrt{3x - 2}$$

На рисунке 6.4 показано построение искомого графика.

Если данную функцию представить в виде $y = \sqrt{3\left(x - \frac{2}{3}\right)}$, то построение графика можно вести и по такой схеме:

$$y=\sqrt{x}\ \xrightarrow{\text{Сжатие в 3 раза к оси ординат}}\ y=\sqrt{3x}\ \xrightarrow{\text{Вправо на } \frac{2}{3} \text{ ед.}}\ y=\sqrt{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}$$

На рисунке 6.5 показано построение, проведённое по этой схеме. ■

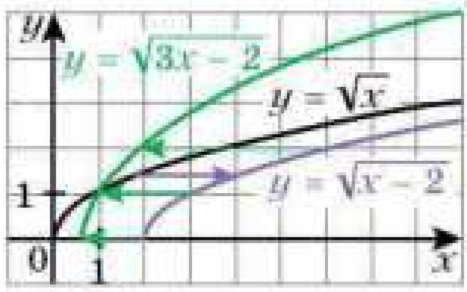


Рис. 6.4

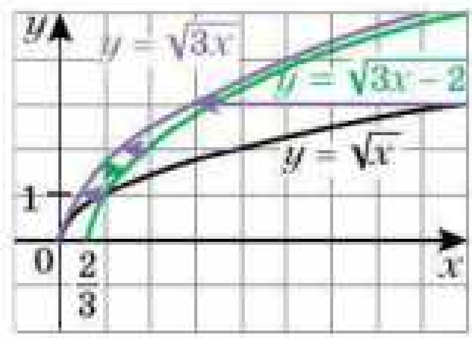


Рис. 6.5

Пример 2. Постройте график функции $y=\sqrt{1-3x}$.

Решение. Построение графика можно вести по такой схеме:

$$y=\sqrt{x}\ \xrightarrow{\text{Влево на 1 ед.}}\ y=\sqrt{x+1}\ \xrightarrow{\text{Симметрия относительно оси ординат}}\ y=\sqrt{-x+1}\ \xrightarrow{\text{Сжатие в 3 раза к оси ординат}}\ y=\sqrt{-3x+1}$$

На рисунке 6.6 показано построение искомого графика.

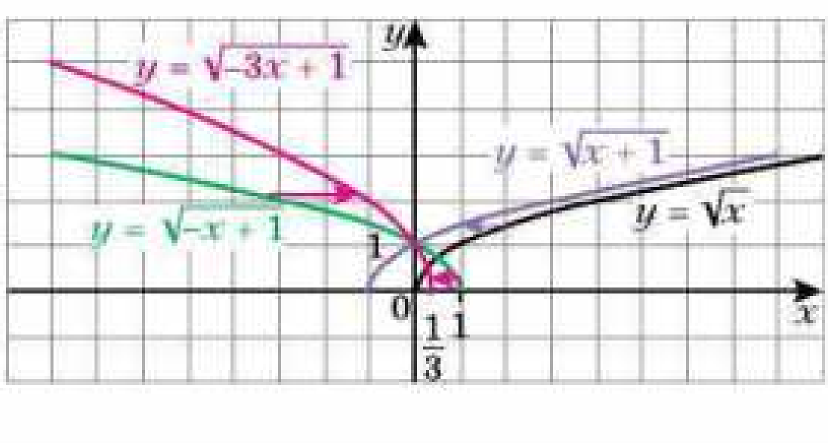


Рис. 6.6

Заметим, что возможны и другие схемы решения этой задачи, например так:

$$y=\sqrt{x}\xrightarrow{\text{Влево на 1 ед.}}y=\sqrt{x+1}\xrightarrow{\text{Сжатие в 3 раза к оси ординат}}y=\sqrt{3x+1}\xrightarrow{\text{Симметрия относительно оси ординат}}y=\sqrt{-3x+1}$$

Этой схеме соответствует рисунок 6.7. ■

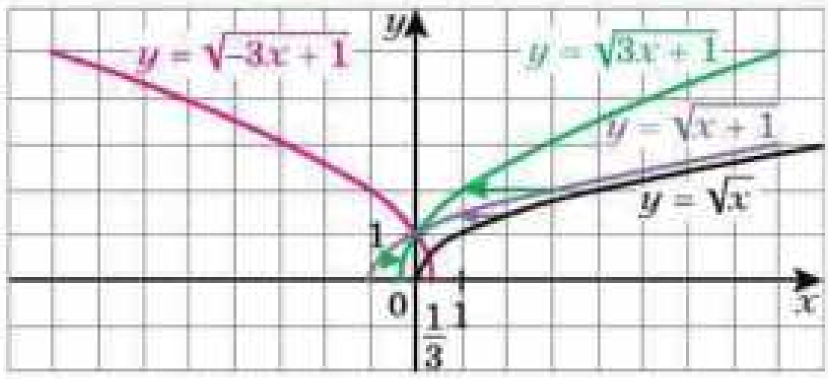


Рис. 6.7

Воспользовавшись определением модуля, можно записать:

$$y=f(|x|)=\begin{cases}f(x), \text{ если } x \geqslant 0,\\ f(-x), \text{ если } x<0.\end{cases}$$

Отсюда можно сделать вывод, что график функции $y=f(|x|)$ при $x \geqslant 0$ совпадает с графиком функции $y=f(x)$, а при $x<0$ — с графиком функции $y=f(-x)$.

Тогда построение графика функции $y=f(|x|)$ можно проводить по следующей схеме:

1) построить ту часть графика функции $y=f(x)$, все точки которой имеют неотрицательные абсциссы;

2) построить ту часть графика функции $y=f(-x)$, все точки которой имеют отрицательные абсциссы.

Объединение этих двух построенных фигур является графиком функции $y=f(|x|)$.

Заметим, что функция $y=f(|x|)$ чётная. Поэтому ось ординат является осью симметрии её графика. Тогда график функции $y=f(|x|)$ можно построить, придерживаясь следующей схемы:

1) построить ту часть графика функции $y=f(x)$, все точки которой имеют неотрицательные абсциссы;

2) построить фигуру, симметричную полученной относительно оси ординат.

Объединение двух построенных фигур является графиком функции $y = f(|x|)$.

На рисунке 6.8 показано, как с помощью графика функции $y = (x - 2)^2$ построен график функции $y = (|x| - 2)^2$.

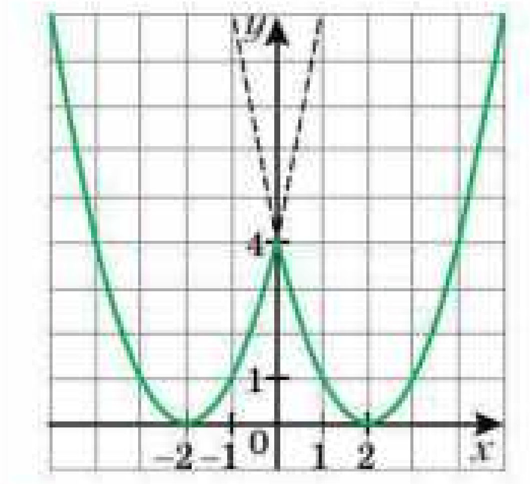


Рис. 6.8

Для функции $y = |f(x)|$ запишем:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), \text{ если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Отсюда можно сделать такой вывод: график функции $y = |f(x)|$ при всех x, для которых $f(x) \geqslant 0$, совпадает с графиком функции $y = f(x)$, а при всех x, для которых $f(x) < 0$, — с графиком функции $y = -f(x)$.

Тогда построение графика функции $y = |f(x)|$ можно проводить по следующей схеме:

1) построить ту часть графика функции $y = f(x)$, все точки которой имеют неотрицательные ординаты;

2) построить ту часть графика функции $y = -f(x)$, все точки которой имеют положительные ординаты.

Объединение двух построенных фигур является графиком функции $y = |f(x)|$.

Поскольку графики функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ симметричны относительно оси абсцисс, то искомый график можно получить, придерживаясь следующей схемы:

1) ту часть графика функции $y = f(x)$, точки которой имеют неотрицательные ординаты, оставить без изменений;

2) построить фигуру, симметричную относительно оси абсцисс той части графика функции $y = f(x)$, точки которой имеют отрицательные ординаты.

Объединение этих двух построенных фигур и составит график функции $y = |f(x)|$.

На рисунке 6.9 показано, как с помощью графика функции $y = (x - 1)^2 - 2$ построен график функции $y = |(x - 1)^2 - 2|$.

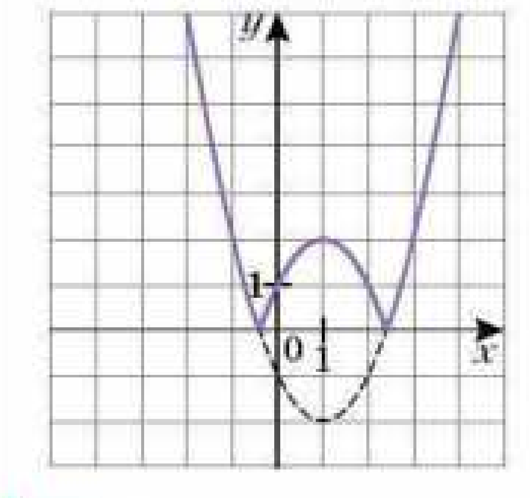


Рис. 6.9

Пример 3. Постройте график функции $y = \left|\sqrt{|x| + 1} - 2\right|$.

Решение. Построение искомого графика можно представить в виде такой схемы:

$$y=\sqrt{x+1} \to y=\sqrt{|x|+1} \to y=\sqrt{|x|+1}-2 \to y=\left|\sqrt{|x|+1}-2\right|.$$

На рисунке 6.10 показаны этапы построения искомого графика. ■

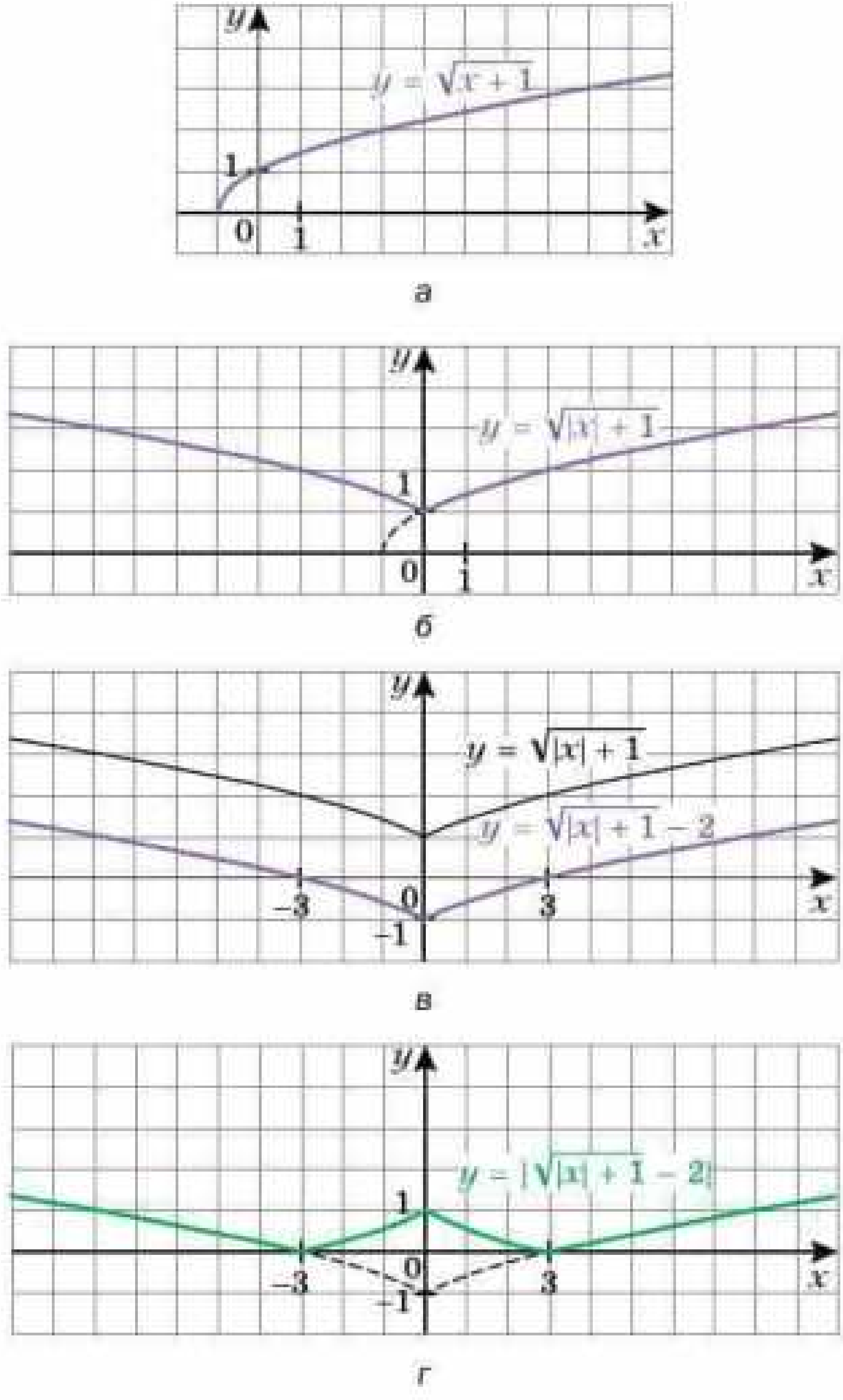


Рис. 6.10

Пример 4. Постройте график функции $y=\left|\sqrt{|x+1|}-1\right|$.

Решение. Построение искомого графика можно представить в виде такой схемы:

$y=\sqrt{|x|} \;\to\; y=\sqrt{|x+1|} \;\to\; y=\sqrt{|x+1|}-1 \;\to\; y=\left|\sqrt{|x+1|}-1\right|.$

На рисунке 6.11 показаны этапы построения искомого графика. ■

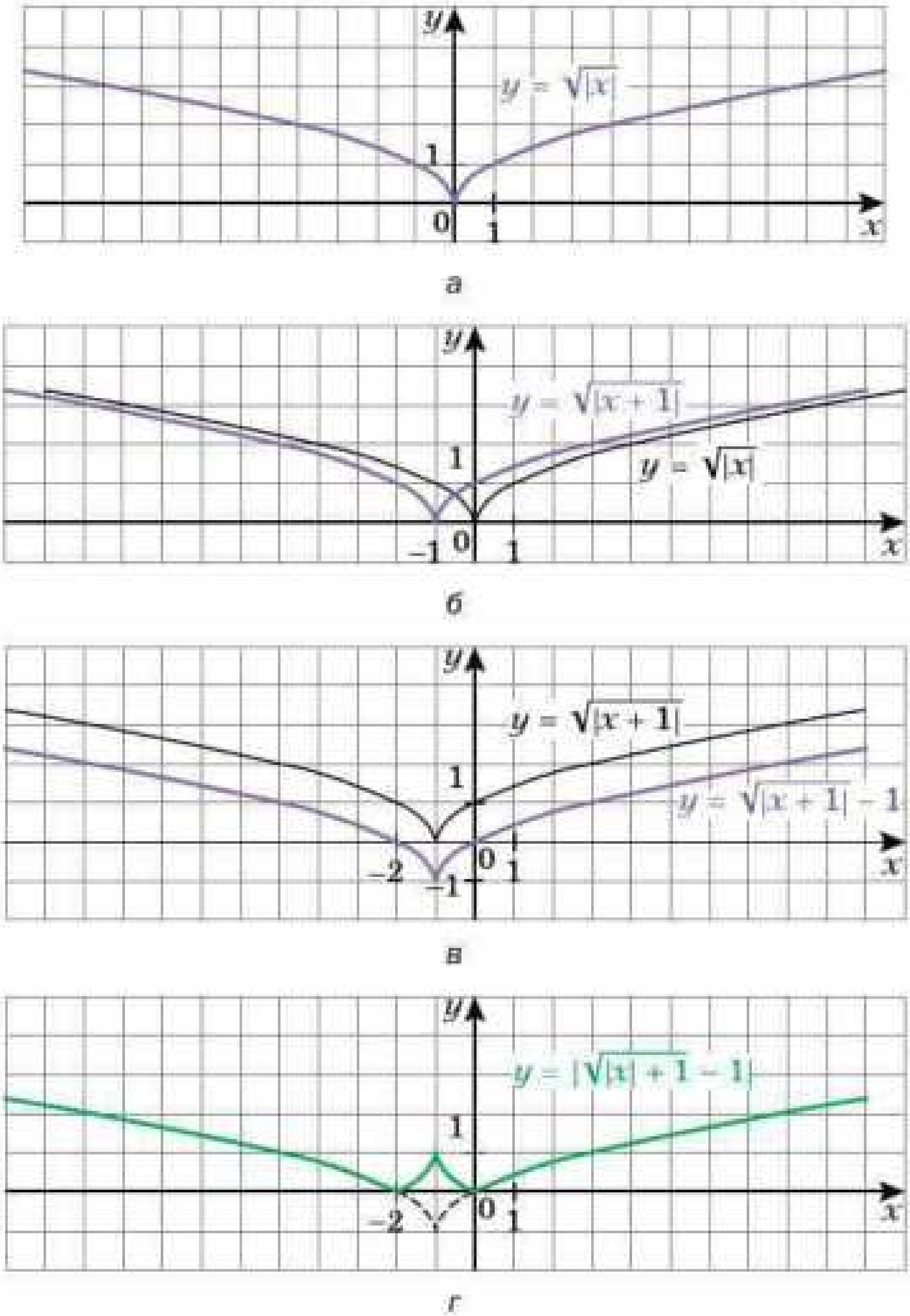


Рис. 6.11

Пример 5. При каких значениях параметра a уравнение $|2|x|-1| = x - a$ имеет три корня?

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = |2|x|-1|$. Проведём построение её графика по такой схеме:

$y = 2x-1 \to y = 2|x|-1 \to y = |2|x|-1|.$

График функции f изображён на рисунке 6.12 зелёным цветом.

Рассмотрим функцию $g(x) = x - a$. Её графиком является прямая.

Задача сводится к тому, чтобы найти такое положение прямой $g(x) = x - a$, при котором графики функций f и g имеют три общие точки.

Это условие будет выполнено только тогда, когда прямая $g(x) = x - a$ пройдёт через точку $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ или через точку $(0; 1)$ (рис. 6.12). Найдём значения параметра

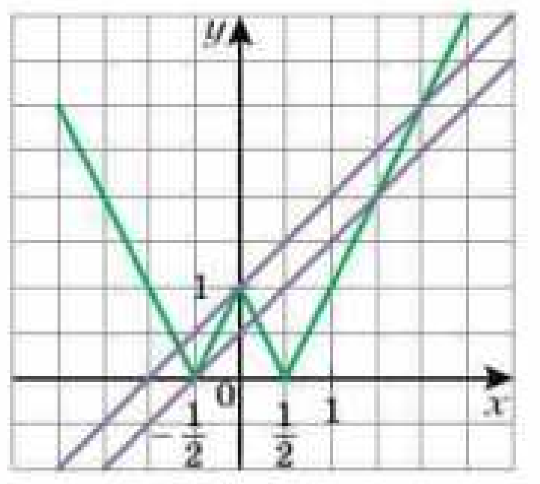


Рис. 6.12

a, соответствующие этим положениям прямой. Имеем: $\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} - a = 0, \\ 0 - a = 1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a = -\frac{1}{2}, \\ a = -1. \end{array}\right.$

Ответ: $a = -\frac{1}{2}$ или $a = -1$. ■

1. Как можно построить график функции $y = f(kx)$, используя график функции $y = f(x)$, если $k > 0$; $k < 0$?
2. Как можно построить график функции $y = f(|x|)$, используя график функции $y = f(x)$?
3. Как можно построить график функции $y = |f(x)|$, используя график функции $y = f(x)$?

Упражнения

6.1. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{\frac{x}{5}}$;
2) $y = \sqrt{-2x}$;
3) $y = (2x - 1)^2 - 4$;
4) $y = \frac{1}{4x + 1}$.

6.2. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{5x}$;
2) $y = \sqrt{-\frac{x}{3}}$;
3) $y = (2x - 1)^2 - 4$;
4) $y = \frac{1}{1 - 3x}$.

6.3. Постройте график функции:

1) $y = |x^2 - 1|$; 2) $y = \left|\frac{2}{x-1}\right|$; 3) $y = \left|\frac{x-4}{x+1}\right|$.

6.4. Постройте график функции:

1) $y = |\sqrt{x} - 1|$; 2) $y = \left|\frac{4}{x-2}\right|$; 3) $y = \left|\frac{x+2}{x-3}\right|$.

6.5. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{2x-1}$; 3) $y = \sqrt{\frac{1}{2}x + 2}$;

2) $y = \sqrt{3-4x}$; 4) $y = 2\sqrt{3x-1} + 1$.

6.6. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{3x+1}$; 2) $y = \sqrt{5-2x}$; 3) $y = 2(3x-1)^2 + 1$.

6.7. Постройте график функции:

1) $y = (|x| - 1)^2$; 2) $y = \sqrt{|x| + 2}$; 3) $y = \frac{1}{|x| - 3}$.

6.8. Постройте график функции:

1) $y = (|x| + 2)^2$; 2) $y = \sqrt{|x| - 3}$; 3) $y = \sqrt{2 - |x|}$.

6.9. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{|x+2|}$; 2) $y = (|x-2| - 1)^2$; 3) $y = \sqrt{|x-1| + 2}$.

6.10. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{|x-3|}$; 2) $y = \sqrt{|x-2| - 3}$; 3) $y = \frac{1}{|x-1| - 4}$.

6.11. Сколько корней имеет уравнение в зависимости от значения параметра a:

1) $||x| - 1| = a$; 2) $|(|x| - 1)^2 - 1| = a$; 3) $|\sqrt{x} - 2| = a$?

6.12. Сколько корней имеет уравнение в зависимости от значения параметра a:

1) $|x^2 - 1| = a$; 3) $|(|x| - 2)^2 - 3| = a$?

2) $|(x+2)^2 - 3| = a$;

6.13. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{2|x| - 1}$; 2) $y = \sqrt{1 - 3|x|}$; 3) $y = \sqrt{|2x - 1|}$.

6.14. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{3|x| + 1}$; 2) $y = \sqrt{|3x + 1|}$.

6.15. При каких значениях параметра a уравнение $||x - 1| - 1| = x - a$ имеет бесконечно много корней?

6.16. При каких значениях параметра a уравнение $|3|x + 1| - 2| = a - x$ имеет 3 корня?

6.17. При каких значениях параметра a уравнение $|2|x + a| - 1| = x - 1$ имеет единственный корень?

6.18. При каких значениях параметра a уравнение $|3|x - a| - 2| = 2 - x$ имеет единственный корень?

§ 7 Обратная функция

На рисунках 7.1, 7.2 изображены графики функций f и g.

Любая горизонтальная прямая пересекает график функции f не более чем в одной точке. Это означает, что каждому числу $y_0 \in E(f)$ соответствует единственное число $x_0 \in D(f)$ такое, что $y_0 = f(x_0)$. Функция g таким свойством не обладает. Действительно, из рисунка 7.2 видно, что значению y_0 соответствуют два значения аргумента x_1 и x_2 такие, что $y_0 = g(x_1)$ и $y_0 = g(x_2)$.

Определение

Функцию $y = f(x)$ называют обратимой, если для любого $y_0 \in E(f)$ существует единственное $x_0 \in D(f)$ такое, что $y_0 = f(x_0)$.

Функция f (рис. 7.1) является обратимой. Функция g (рис. 7.2) не является обратимой.

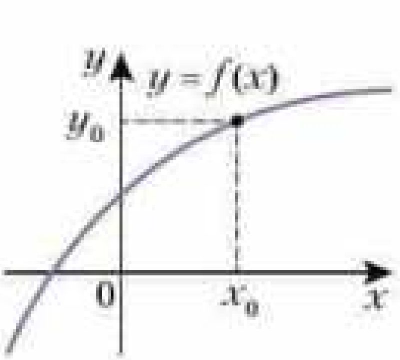


Рис. 7.1

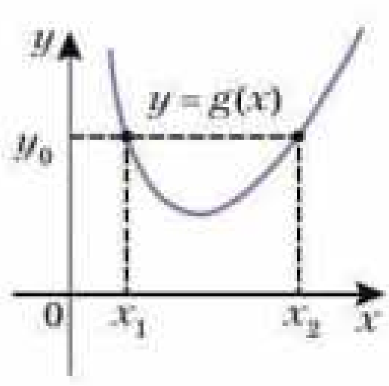


Рис. 7.2

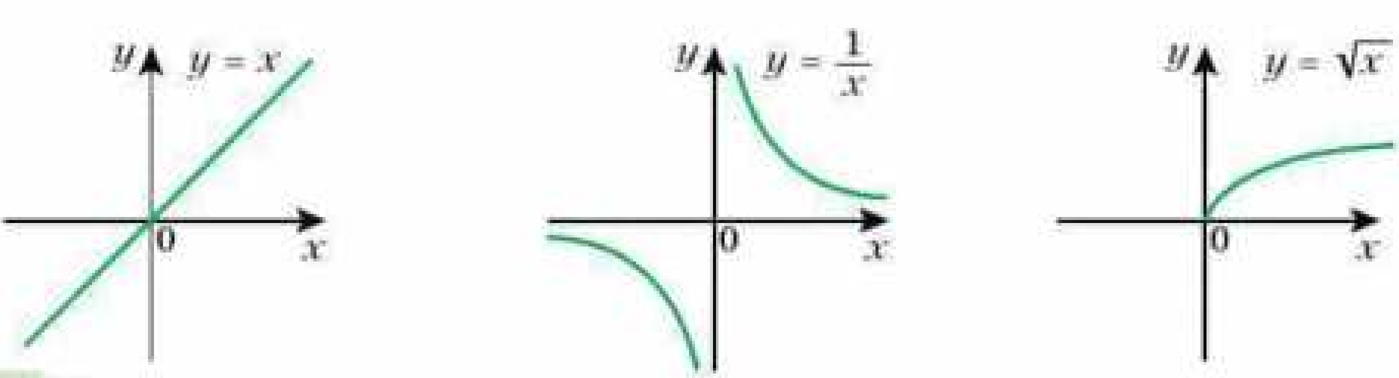


Рис. 7.3

Функции $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$ являются примерами обратимых функций (рис. 7.3).

Функция $y = x^2$ не является обратимой. Например, значению функции, равному 4, соответствуют два значения аргумента: $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$.

Теорема 7.1

Если функция является возрастающей (убывающей), то она обратима.

Доказательство

Предположим, что существует возрастающая функция f, не являющаяся обратимой. Тогда найдётся $y_0 \in E(f)$, для которого существуют x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$ такие, что $f(x_1) = f(x_2) = y_0$. Вместе с тем функция f — возрастающая, и из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$. Получили противоречие.

Аналогично рассматривают случай, когда функция f является убывающей. ■

Отметим, что обратная теорема неверна, то есть не любая обратимая функция является возрастающей (убывающей).

Например, на рисунке 7.4 изображён график обратимой функции, которая не является ни возрастающей, ни убывающей.

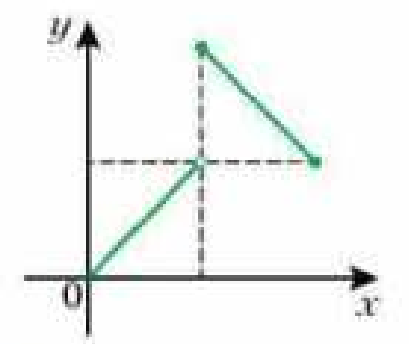


Рис. 7.4

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную таблично:

x	5	6	7
y	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$

Функция f является обратимой.

Поменяем строки таблицы местами и рассмотрим функцию $y = g(x)$, заданную полученной таблицей:

x	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$
y	5	6	7

Функции f и g связаны такими свойствами:

1) $D(f) = E(g)$ и $E(f) = D(g)$;

2) $f(5) = \sqrt{5}$, $g(\sqrt{5}) = 5$;

$f(6) = \sqrt{6}$, $g(\sqrt{6}) = 6$;

$f(7) = \sqrt{7}$, $g(\sqrt{7}) = 7$.

Эти равенства означают, что если $f(x_0) = y_0$, то $g(y_0) = x_0$ и если $g(x_1) = y_1$, то $f(y_1) = x_1$.

Определение

Функции f и g называют взаимно обратными, если:

1) $D(f) = E(g)$ и $E(f) = D(g)$;

2) для любого $x_0 \in D(f)$ из равенства $f(x_0) = y_0$ следует, что $g(y_0) = x_0$, то есть $g(f(x_0)) = x_0$.

Также говорят, что функция g является **обратной к функции** f, а функция f — **обратной** к функции g.

Рассмотренные выше функции, заданные таблично, являются примерами взаимно обратных функций.

Второе условие в определении взаимно обратных функций можно заменить на такое: для любого $x_0 \in D(g)$ из равенства $g(x_0) = y_0$ следует, что $f(y_0) = x_0$, то есть $f(g(x_0)) = x_0$.

Пример 1. Докажите, что функции $f(x) = 2x - 1$ и $g(x) = \frac{x+1}{2}$ являются взаимно обратными.

Решение. Имеем: $D(f) = E(g) = \boldsymbol{R}$, $E(f) = D(g) = \boldsymbol{R}$.

Пусть $f(x_0) = y_0$, то есть $y_0 = 2x_0 - 1$. Докажем, что $g(y_0) = x_0$.

Имеем: $g(y_0) = \frac{y_0 + 1}{2} = \frac{2x_0 - 1 + 1}{2} = x_0$. ■

Если функция f не является обратимой, то не существует функции, обратной к ней. Любая обратимая функция имеет обратную.

Пусть f — обратимая функция, а функция g — ей обратная. Из определения взаимно обратных функций следует, что если f — это правило, позволяющее по значению переменной x из $D(f)$ найти соответствующее значение переменной y из $E(f)$, то g — это правило, позволяющее по значению переменной y найти соответствующее значение переменной x.

В рассмотренном выше примере было доказано, что для функции $y = 2x - 1$ обратной является функция $y = \frac{x+1}{2}$. Однако решение этой задачи не показывает, как по данной функции найти обратную к ней. Покажем, как это можно сделать, на примере функции $y = 2x - 1$.

Функция $y = 2x - 1$ — возрастающая. Следовательно, она является обратимой.

Чтобы задать обратную функцию, надо указать правило, позволяющее по каждому значению переменной y найти такое значение переменной x, что $y = 2x - 1$.

Имеем: $2x = y + 1$; $x = \frac{y+1}{2}$.

Полученное равенство задаёт функцию с аргументом y и зависимой переменной x.

Традиционно независимую переменную обозначают буквой x, а зависимую — буквой y. Придерживаясь таких обозначений, можно сказать, что мы получили функцию, которая задана формулой $y = \frac{x+1}{2}$. Она и является искомой.

Рассмотрим ещё один пример. Функция $y = x^2$ не является обратимой. Вместе с тем эта функция возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. Следовательно, функция $f(x) = x^2$, $D(f) = [0; +\infty)$, является обратимой. Также принято говорить, что функция $y = x^2$ является **обратимой на множестве** $[0; +\infty)$. Найдём функцию, обратную к функции f.

Имеем: $y = x^2$, где $x \in [0; +\infty)$. Отсюда $\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| = x$. Равенство $\sqrt{y} = x$ задаёт функцию с аргументом y и зависимой переменной x.

Воспользовавшись традиционными обозначениями, получим функцию $y = \sqrt{x}$, обратную к функции f.

Теорема 7.2

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Доказательство

Пусть точка $M(a; b)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$. Тогда $b = f(a)$. Если функция g является обратной к функции f, то $g(b) = a$, то есть точка $N(b; a)$ принадлежит графику функции $y = g(x)$.

Покажем, что точки M и N симметричны относительно прямой $y = x$.

Если $a = b$, то точки M и N совпадают и принадлежат прямой $y = x$.

При $a \neq b$ имеем (рис. 7.5): $ON = \sqrt{a^2 + b^2}$, $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$, т. е. точка O равноудалена от концов отрезка MN, а следовательно, принадлежит серединному перпендикуляру отрезка MN. Середина K отрезка

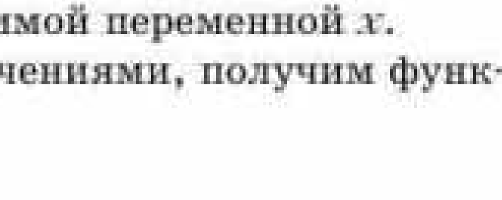


Рис. 7.5

MN имеет координаты $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$, то есть принадлежит прямой $y = x$. Следовательно, прямая $y = x$ является серединным перпендикуляром отрезка MN. ■

Доказанную теорему иллюстрируют графики взаимно обратных функций, которые рассматривались выше (рис. 7.6).

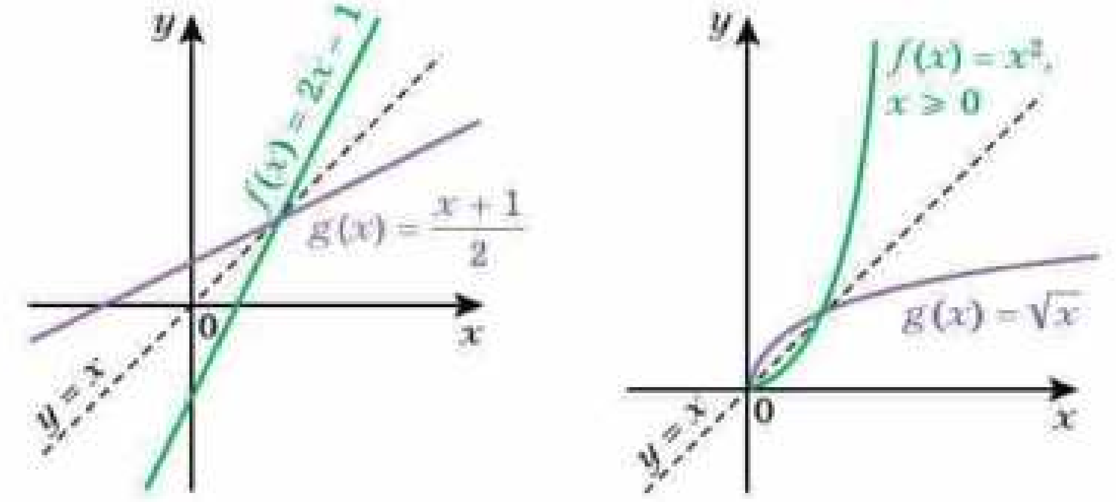


Рис. 7.6

Теорема 7.3

Если функция f является возрастающей (убывающей), то обратная к ней функция g является также возрастающей (убывающей).

Доказательство

Предположим, что функция f — возрастающая и при этом обратная к ней функция g не является возрастающей. Тогда найдутся такие $y_1 \in D(g)$ и $y_2 \in D(g)$, что из неравенства $y_1 < y_2$ будет следовать неравенство $g(y_1) \geqslant g(y_2)$. Пусть $g(y_1) = x_1$, $g(y_2) = x_2$. Получаем, что $x_1 \geqslant x_2$. Так как функция f — возрастающая, то $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, то есть $y_1 \geqslant y_2$. Получили противоречие.

Для убывающей функции рассуждаем аналогично. ■

Теорема 7.4

Общие точки графиков возрастающих взаимно обратных функций лежат на прямой $y = x$.

Доказательство

Пусть $M(a; b)$ — общая точка графиков взаимно обратных возрастающих функций f и g. Докажем, что $a = b$.

Будем рассуждать от противного. Предположим, например, что $a < b$. Так как графики взаимно обратных функций f и g симметричны относительно прямой $y = x$, то точка $N(b; a)$ является для них общей. В силу возрастания функции f можно записать: $f(a) < f(b)$. Но $f(a) = b$, $f(b) = a$. Получили $b < a$, что противоречит предположению $a < b$. Аналогично рассматривается случай, когда $a > b$. Таким образом, $a = b$. ■

Замечание. Обратим внимание на то, что условие возрастания в формулировке теоремы 7.4 является обязательным. Например, функции $f(x) = -x$ и $g(x) = -x$ — взаимно обратные, однако их общие точки, например $A(-1; 1)$ и $B(1; -1)$, не принадлежат прямой $y = x$.

Следствие

Если функции f и g — взаимно обратные и возрастающие, то уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно каждому из уравнений $f(x) = x$ или $g(x) = x$.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Пример 2. Решите уравнение $\sqrt{\sqrt{x} + 5} = x - 5$.

Решение. Выполним замену $\sqrt{x} = t$. Получаем $\sqrt{t + 5} = t^2 - 5$. Рассмотрим функции $f(t) = \sqrt{t + 5}$ и $g(t) = t^2 - 5$, $D(g) = [0; +\infty)$. Эти функции — взаимно обратные и возрастающие. Тогда из следствия теоремы 7.4 следует, что уравнение $\sqrt{t + 5} = t^2 - 5$ равносильно системе $\begin{cases} t^2 - 5 = t, \\ t \geqslant 0. \end{cases}$

Отсюда $t = \dfrac{1 + \sqrt{21}}{2}$. Теперь можно записать: $\sqrt{x} = \dfrac{1 + \sqrt{21}}{2}$; $x = \dfrac{22 + 2\sqrt{21}}{4} = \dfrac{11 + \sqrt{21}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{11 + \sqrt{21}}{2}$. ■

?

1. Какую функцию называют обратимой?
2. Сформулируйте теорему об обратимости возрастающей (убывающей) функции.
3. Какие две функции называют взаимно обратными?
4. Как расположены графики взаимно обратных функций?
5. Какой является функция, обратная к возрастающей функции; к убывающей функции?

Упражнения

7.1. Докажите, что данная функция не является обратимой:

1) $y = |x|$;   2) $y = \frac{1}{x^4}$;   3) $y = 5$;   4) $y = [x]$.

7.2. Докажите, что функции f и g являются взаимно обратными:

1) $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$, $g(x) = 3x - 1$;

2) $f(x) = \sqrt{x + 2}$, $g(x) = x^2 - 2$, $D(g) = [0; +\infty)$.

7.3. Докажите, что функции f и g являются взаимно обратными:

1) $f(x) = 4x + 2$, $g(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2}$;

2) $f(x) = (x - 3)^2$, $D(f) = [3; +\infty)$, $g(x) = \sqrt{x} + 3$.

7.4. Найдите функцию, обратную к данной:

1) $y = 3x - 1$;   2) $y = \frac{1}{x}$;   3) $y = \frac{1}{2x + 1}$.

7.5. Найдите функцию, обратную к данной:

1) $y = 0{,}2x + 3$;   2) $y = \frac{1}{x - 1}$;   3) $y = \frac{4}{x + 2}$.

7.6. Найдите функцию, обратную к данной:

1) $y = 2\sqrt{x} - 1$;   2) $y = x^2$, $D(y) = (-\infty; 0]$.

7.7. Найдите функцию, обратную к данной:

1) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$;   2) $y = \sqrt{x^2 - 4}$, $D(y) = [2; +\infty)$.

7.8. Постройте в одной системе координат график данной функции и график функции, обратной к ней:

1) $y = -0{,}5x + 2$;   2) $y = \sqrt{x + 1}$;   3) $y = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ 2x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$

7.9. Постройте в одной системе координат график данной функции и график функции, обратной к ней:

1) $y = 3x - 1$;   2) $y = x^2 - 4$, если $x \geqslant 0$.

7.10. Докажите, что функция, обратная к нечётной функции, также является нечётной.

7.11. Пусть g — функция, обратная к функции $f(x) = x^5 + 6x^3$.

1) Найдите $g(7)$.

2) Решите уравнение $g(x) = -1$.

3) Сколько корней имеет уравнение $g(x) = c$ в зависимости от значения параметра c?

7.12. Пусть g — функция, обратная к функции $f(x) = x^3 + \sqrt{x-2}$.
1) Найдите $g(28)$.
2) Решите уравнение $g(x) = 1$.
3) Существует ли такое значение c, что уравнение $g(x) = c$ имеет два корня?

7.13. Функция g является обратной к функции $f(x) = x^5 + x - 1$. Решите уравнение $f(x) = g(x)$.

7.14. Функция f является обратной к функции $g(x) = x^3 + x - 8$. Решите уравнение $f(x) = g(x)$.

7.15. Решите уравнение $\sqrt{x - \frac{1}{8}} = x^2 + \frac{1}{8}$.

7.16. Решите уравнение $\sqrt{1 + \sqrt{x}} = x - 1$.

7.17. Функция f такова, что для всех $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $f(f(x)) = x$. Докажите, что f — обратимая функция.

7.18. Функция f имеет обратную функцию g. Известно, что неравенство $\frac{1}{2}x - 1 < f(x) < \frac{1}{2}x + 1$ выполняется для всех $x \in \boldsymbol{R}$, а уравнение $g(x) = 10 - 2x^2$ имеет один положительный корень. Найдите этот корень приближённо с абсолютной погрешностью[1], равной 0,25.

7.19. Функция f имеет обратную функцию g. Известно, что неравенство $2x - 8 < f(x) < 2x - 6$ выполняется для всех $x \in \boldsymbol{R}$, а уравнение $g(x) = 2x^2 - 3$ имеет один положительный корень. Найдите этот корень приближённо с абсолютной погрешностью, равной 0,1.

§ 8 Метод интервалов

На рисунке 8.1 изображён график некоторой функции f, у которой $D(f) = \boldsymbol{R}$ и нулями являются числа x_1, x_2 и x_3. Эти числа разбивают область определения функции на промежутки знакопостоянства $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; +\infty)$.

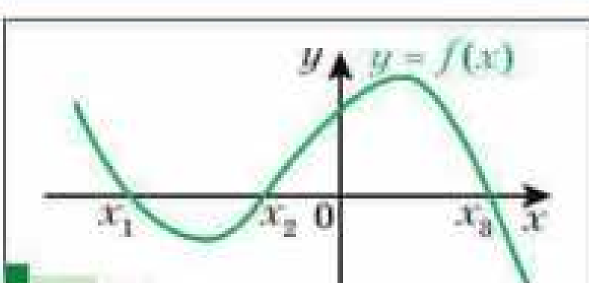


Рис. 8.1

---

[1] **Абсолютной погрешностью** называют модуль разности между приближённым и точным значениями величины.

А всегда ли нули функции разбивают её область определения на промежутки знакопостоянства? Ответ на этот вопрос отрицательный. Для функции g, график которой изображён на рисунке 8.2, промежуток $(x_2; x_3)$ не является промежутком знакопостоянства. Действительно, если $x \in (x_2; x_0)$, то $g(x) > 0$, а если $x \in [x_0; x_3)$, то $g(x) < 0$.

Принципиальное различие между функциями f и g состоит в том, что графиком функции f является непрерывная кривая, а график функции g таким свойством не обладает. Говорят, что функция f **непрерывна в каждой точке области определения**, или **непрерывна на $D(f)$**. Функция g имеет **разрыв в точке** $x_0 \in D(g)$.

Такое представление о непрерывной функции интуитивно понятно. Более детально с непрерывными функциями вы ознакомитесь в главе 5.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующая теорема.

Теорема 8.1

Если функция f непрерывна на некотором промежутке и не имеет на нём нулей, то она на этом промежутке сохраняет постоянный знак.

Например, функция $y = x^2 - 1$ непрерывна на каждом из промежутков $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$ и не имеет на них нулей. Поэтому рассматриваемая функция на указанных промежутках сохраняет знак (рис. 8.3).

Теорема 8.1 является основой общего метода решения неравенств вида $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$, где f — функция, непрерывная на $D(f)$.

Разъясним этот метод на примере функции, график которой изображён на рисунке 8.1.

Представим себе, что с этого рисунка «исчезли» все точки графика функции f, за исключением точек $A(x_1; 0)$, $B(x_2; 0)$, $C(x_3; 0)$ (рис. 8.4). Каждый из промежутков $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; +\infty)$ не содержит нулей функции f.

Функция f непрерывна на этих промежутках. Следовательно, в силу теоремы 8.1 указанные промежутки являются промежутками знакопостоянства функции f.

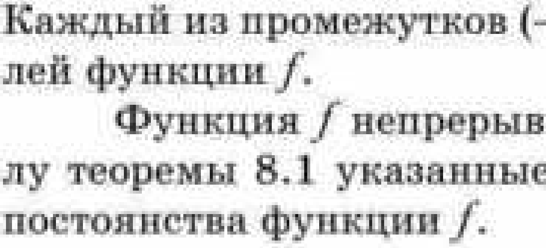


Рис. 8.2

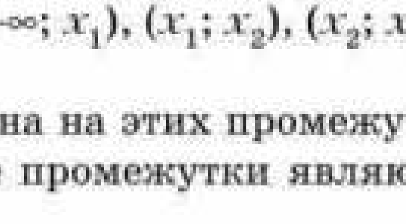


Рис. 8.3

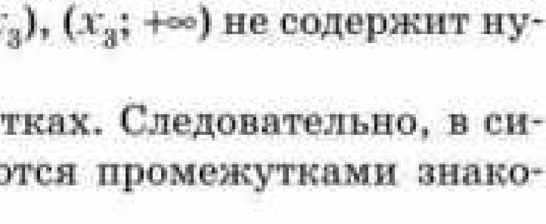


Рис. 8.4

Остаётся лишь выяснить, какой знак имеют значения функции f на этих промежутках. Это можно сделать с помощью «пробных точек».

Пусть, например, $a \in (-\infty; x_1)$ и $f(a) > 0$. Поскольку $(-\infty; x_1)$ — промежуток знакопостоянства функции, то для любого $x \in (-\infty; x_1)$ значение функции имеет тот же знак, что $f(a)$, следовательно, выполняется неравенство $f(x) > 0$. Выбирая по одной точке на каждом промежутке знакопостоянства и находя значение функции в этой точке, можно определить знак функции на рассматриваемых промежутках.

Описанный метод решения неравенств называют **методом интервалов**.

Следующая теорема позволяет применять метод интервалов для неравенств вида $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ и $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены.

Теорема 8.2

Функция $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены, непрерывна на $D(y)$.

Например, функция $y = \frac{1}{x}$ непрерывна в каждой точке множества $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, то есть на $D(y)$.

Пример 1. Решите неравенство $(x + 3)(x - 1)(x - 2) > 0$.

Решение. Числа -3, 1 и 2 являются нулями функции $f(x) = (x + 3) \times$ $\times (x - 1)(x - 2)$, непрерывной на $D(f) = \boldsymbol{R}$. Поэтому эти числа разбивают множество $\boldsymbol{R}$ на промежутки знакопостоянства функции f: $(-\infty; -3)$, $(-3; 1)$, $(1; 2)$, $(2; +\infty)$ (рис. 8.5).

С помощью «пробных точек» определим знаки функции f на указанных промежутках.

Имеем:

$3 \in (2; +\infty)$; $f(3) > 0$, поэтому $f(x) > 0$ при любом $x \in (2; +\infty)$;

$\frac{3}{2} \in (1; 2)$; $f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$, поэтому $f(x) < 0$ при любом $x \in (1; 2)$;

$0 \in (-3; 1)$; $f(0) > 0$, поэтому $f(x) > 0$ при любом $x \in (-3; 1)$;

$-4 \in (-\infty; -3)$; $f(-4) < 0$, поэтому $f(x) < 0$ при любом $x \in (-\infty; -3)$.

Результаты исследования знака функции f показаны на рисунке 8.6.

Рис. 8.5

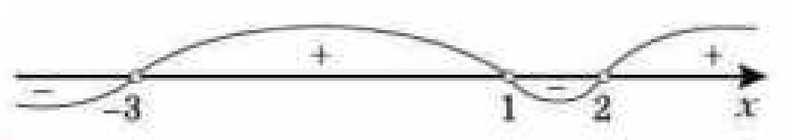


Рис. 8.6

Теперь можно записать ответ.

Ответ: $(-3;\ 1) \cup (2;\ +\infty)$. ■

Замечание. При оформлении решения неравенств исследование знака функции на промежутках можно проводить устно, фиксируя результаты в виде схемы, показанной на рисунке 8.6.

Пример 2. Решите неравенство $\frac{(x-1)^3(x+2)^4(x-5)}{(2x+1)(x-4)^2} < 0$.

Решение. Областью определения функции $f(x) = \frac{(x-1)^3(x+2)^4(x-5)}{(2x+1)(x-4)^2}$ является множество $\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2};\ 4\right) \cup (4;\ +\infty)$. Функция f непрерывна на каждом из промежутков $\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};\ 4\right)$, $(4;\ +\infty)$. Поэтому нули -2, 1, 5 функции f разбивают $D(f)$ на такие промежутки знакопостоянства: $(-\infty;\ -2)$, $\left(-2;\ -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};\ 1\right)$, $(1;\ 4)$, $(4;\ 5)$, $(5;\ +\infty)$.

Результат исследования знака функции f на каждом из этих промежутков показан на рисунке 8.7.

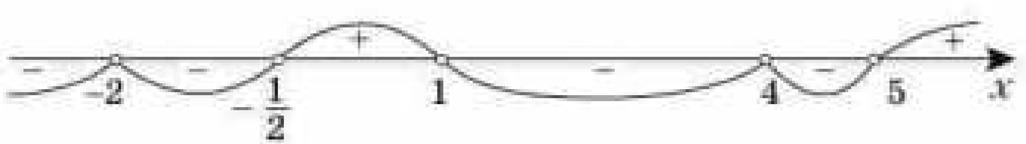


Рис. 8.7

Ответ: $(-\infty;\ -2) \cup \left(-2;\ -\frac{1}{2}\right) \cup (1;\ 4) \cup (4;\ 5)$. ■

С помощью метода интервалов можно решать и нестрогое неравенство $f(x) \geqslant 0$ (либо $f(x) \leqslant 0$). Множество решений такого неравенства — это объединение множества решений неравенства $f(x) > 0$ (либо $f(x) < 0$) и множества корней уравнения $f(x) = 0$.

Пример 3. Решите неравенство $\frac{4x^2+4x+1}{x^2+2x-3} \geqslant 0$.

Решение. Советуем, если это возможно, многочлены, записанные в числителе и знаменателе дроби, раскладывать на множители. Тогда намного удобнее исследовать знак функции на промежутках знакопостоянства.

Имеем: $\frac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)} \geqslant 0$.

Устанавливаем (рис. 8.8), что множество $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ является множеством решений неравенства $\frac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)} > 0$.

Рис. 8.8

Уравнение $\frac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)} = 0$ имеет единственный корень $x = -\frac{1}{2}$.

Объединив множества решений уравнения и неравенства, получим ответ.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty) \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. ■

1. Всегда ли нули функции разбивают её область определения на промежутки знакопостоянства?

2. Каким свойством обладает функция, непрерывная на промежутке и не имеющая на нём нулей?

3. Опишите, как решать неравенства методом интервалов.

Упражнения

8.1. Решите неравенство:

1) $x(x-3)(x+2) < 0$;
2) $(x+7)(x+5)(x-9) \leqslant 0$;
3) $(2x-1)(3-x)(x+1) < 0$;
4) $(x-6)(7x+1)(2-9x) \geqslant 0$.

8.2. Решите неравенство:

1) $(x+3)(x-1)(x+4) < 0$;
2) $(x-7)(x+8)(x-12) \geqslant 0$;
3) $(1-3x)(x+2)(3-x) < 0$;
4) $x(5-x)(6-x) \leqslant 0$.

8.3. Найдите множество решений неравенства:

1) $\frac{x-8}{x+7} < 0$;
2) $\frac{x+9}{x-11} > 0$;
3) $\frac{x+5{,}2}{x-1{,}4} \leqslant 0$;
4) $\frac{5-x}{x-6} \geqslant 0$;
5) $\frac{(x+15)(x-2)}{x-15} \geqslant 0$;
6) $\frac{x-3{,}8}{(x+5)(x-16)} \leqslant 0$.

8.4. Найдите множество решений неравенства:

1) $\frac{x+3}{x-1} > 0$;
2) $\frac{x-4}{x} \geqslant 0$;
3) $\frac{(x-2)(x+1)}{x-4} < 0$;
4) $\frac{(x+1{,}2)(x-1{,}6)}{x-1{,}4} \leqslant 0$;
5) $\frac{(3x-2)(4-x)}{(x+3)(x-1)} > 0$;
6) $\frac{(x+1)(3-x)}{(3x-2)(4-3x)} \geqslant 0$.

8.5. Решите неравенство:

1) $\frac{x^2-4}{x^2-9} > 0$;
2) $\frac{x^2-3x}{x^2-8x+7} \leqslant 0$;
3) $\frac{2x^2-5x+2}{x^2-3x-4} \geqslant 0$.

8.6. Найдите множество решений неравенства:

1) $(x^2 + 7x)(x^2 - 7x + 6) < 0$;
2) $\dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 - 36} \leqslant 0$;
3) $\dfrac{3x^2 + 2x - 1}{4x^2 - x - 3} \geqslant 0$.

8.7. Решите неравенство:

1) $(2x + 1)(x - 3)(x^2 + 4) < 0$;
2) $(2 - x)(3x + 5)(x^2 - x + 1) > 0$.

8.8. Решите неравенство:

1) $(x^4 + 1)(5 - 6x)(x - 2) < 0$;
2) $(3x^2 - 5x - 2)(2x^2 + x + 1) < 0$.

8.9. Решите неравенство:

1) $(x - 4)^2(x^2 - 7x + 10) < 0$;
2) $(x - 4)^2(x^2 - 7x + 10) \leqslant 0$;
3) $(x - 4)^2(x^2 - 7x + 10) > 0$;
4) $(x - 4)^2(x^2 - 7x + 10) \geqslant 0$.

8.10. Решите неравенство:

1) $(x - 3)^2(x^2 + x - 2) < 0$;
2) $(x - 3)^2(x^2 + x - 2) \leqslant 0$;
3) $(x - 3)^2(x^2 + x - 2) > 0$;
4) $(x - 3)^2(x^2 + x - 2) \geqslant 0$.

8.11. Решите неравенство:

1) $\dfrac{x^2 + x - 20}{x^2 - 6x + 9} > 0$;
2) $\dfrac{x^2 + x - 20}{x^2 - 6x + 9} \leqslant 0$;
3) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 8} > 0$;
4) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 8} \geqslant 0$;
5) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 8} < 0$;
6) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 8} \leqslant 0$.

8.12. Решите неравенство:

1) $\dfrac{x^2 + 3x}{x - 5} \geqslant \dfrac{28}{x - 5}$;
2) $\dfrac{1}{x} < 1$;
3) $\dfrac{x}{x + 3} > \dfrac{1}{2}$;
4) $\dfrac{1}{x + 2} < \dfrac{3}{x - 3}$;
5) $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x - 1} > 1$;
6) $\dfrac{x - 3}{x + 3} \leqslant \dfrac{2x - 5}{4x - 3}$.

8.13. Решите неравенство:

1) $\dfrac{1}{x + 2} \leqslant 1$;
2) $\dfrac{x}{x + 1} \geqslant 2$;
3) $\dfrac{5x + 8}{4 - x} < 2$;
4) $\dfrac{2}{x + 3} \geqslant \dfrac{1}{x - 1}$.

8.14. Решите неравенство:

1) $(1 - 3x)^3(x + 2)^2(x + 4)^5(x - 3) > 0$;
2) $(x^2 + 2x - 15)(x^2 - 4x + 3)(x - 1) \leqslant 0$.

8.15. Решите неравенство:

1) $(3 - x)^3(x + 2)^2(x - 1)(2x - 5) < 0$;
2) $(x^2 - 4)(x^2 + x - 2) \leqslant 0$.

8.16. Найдите множество решений неравенства:

1) $\dfrac{(x - 2)(2x + 1)^3}{(3 - x)^4(1 - 5x)^5} > 0$;
2) $\dfrac{(x - 3)(5x + 2)(x + 3)}{(x - 1)(x + 4)^2} \geqslant 0$;
3) $\dfrac{x^5|3x - 1|(x + 3)}{x - 2} \leqslant 0$;
4) $\dfrac{(2 - x)(4x + 3)}{(x - 3)^3(x + 1)^2} \leqslant 0$.

8.17. Решите неравенство:

1) $\dfrac{(x-1)(x-2)^2}{(x-3)^3} \leqslant 0$;

2) $\dfrac{(x-1)^2(x+2)^3}{x-5} \geqslant 0$;

3) $\dfrac{x^2(x^2-1)}{x-4} > 0$.

8.18. Решите неравенство:

1) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} \geqslant \dfrac{3}{x}$;

2) $\dfrac{12}{x^2-4} - \dfrac{7}{x^2-9} \leqslant 0$.

8.19. Решите неравенство:

1) $\dfrac{2(x-3)}{x(x-6)} < \dfrac{1}{x-1}$;

2) $\dfrac{2x+3}{x^2+x-12} < \dfrac{1}{2}$.

8.20. Решите неравенство:

1) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4} \leqslant 0$;

2) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4} \geqslant 0$;

3) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10} \leqslant 0$;

4) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10} \geqslant 0$.

8.21. Решите неравенство:

1) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2} > 0$;

2) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2} \leqslant 0$;

3) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2} > 0$;

4) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2} \geqslant 0$.

8.22. Для каждого значения a решите неравенство:

1) $(x-3)(x-a) < 0$;

2) $(x-3)(x-a)^2 > 0$;

3) $(x-3)(x-a)^2 \geqslant 0$;

4) $(x-a)(x+5)^2 < 0$;

5) $(x-a)(x+5)^2 \leqslant 0$;

6) $\dfrac{(x+1)(x-a)}{x-a} \leqslant 0$.

глава

2 Степенная функция

- В этой главе вы узнаете, какую функцию называют степенной функцией с целым показателем, какими свойствами обладает эта функция; что называют корнем n-й степени, какими свойствами обладает корень n-й степени; что называют степенью с рациональным показателем и каковы её свойства; какие уравнения называют иррациональными.
- Вы научитесь извлекать корни n-й степени, выполнять возведение в степень с рациональным показателем; преобразовывать выражения, содержащие степени с рациональными показателями и корни n-й степени; решать иррациональные уравнения.

§ 9 Степенная функция с натуральным показателем

Свойства и графики функций $y = x$ и $y = x^2$ хорошо знакомы вам из предыдущих классов. Эти функции являются частными случаями функции $y = x^n$, $n \in \boldsymbol{N}$, которую называют **степенной функцией с натуральным показателем**.

Поскольку выражение x^n, $n \in \boldsymbol{N}$, имеет смысл при любом x, то *областью определения степенной функции с натуральным показателем является множество* $\boldsymbol{R}$.

Очевидно, что рассматриваемая *функция имеет единственный нуль*: $x = 0$.

Дальнейшее исследование свойств функции $y = x^n$, $n \in \boldsymbol{N}$, проведём для двух случаев: n — чётное натуральное число и n — нечётное натуральное число.

- **Первый случай: $n = 2k$, $k \in N$.**

Отметим, что при $k = 1$ получаем функцию $y = x^2$, свойства и график которой были рассмотрены в курсе алгебры 8 класса.

Поскольку при любом x выражение x^{2k} принимает только неотрицательные значения, то область значений рассматриваемой функции не содержит ни одного отрицательного числа.

Можно показать, что для любого $a \geqslant 0$ существует такое значение аргумента x, что $x^{2k} = a$.

Сказанное означает, что *областью значений функции $y = x^n$, где n — чётное натуральное число, является множество* $[0; +\infty)$.

Если $x \neq 0$, то $x^{2k} > 0$.

☞ Следовательно, *промежутки* $(-\infty; 0)$ *и* $(0; +\infty)$ *являются промежутками знакопостоянства функции* $y = x^n$, *где* n *— чётное натуральное число.*

☞ *Функция* $y = x^n$, *где* n *— чётное натуральное число, является чётной*. Действительно, для любого x из области определения выполняется равенство $(-x)^{2k} = x^{2k}$.

Рассмотрим произвольные числа x_1 и x_2 такие, что $x_1 \in (-\infty; 0]$, $x_2 \in (-\infty; 0]$ и $x_1 < x_2$. Тогда $-x_1 > -x_2 \geqslant 0$. Воспользовавшись свойством числовых неравенств, получаем: $(-x_1)^{2k} > (-x_2)^{2k}$. Отсюда $x_1^{2k} > x_2^{2k}$.

☞ Следовательно, *функция* $y = x^n$, *где* n *— чётное натуральное число, убывает на промежутке* $(-\infty; 0]$. Аналогично можно показать, что эта функция *возрастает на промежутке* $[0; +\infty)$.

Полученные свойства позволяют схематически изобразить график функции $y = x^n$, где n — чётное натуральное число (рис. 9.1). В частности, график функции $y = x^4$ изображён на рисунке 9.2.

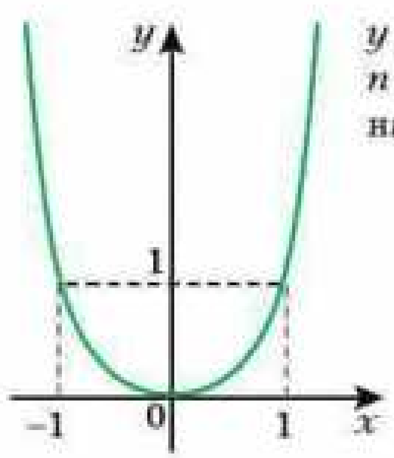


Рис. 9.1

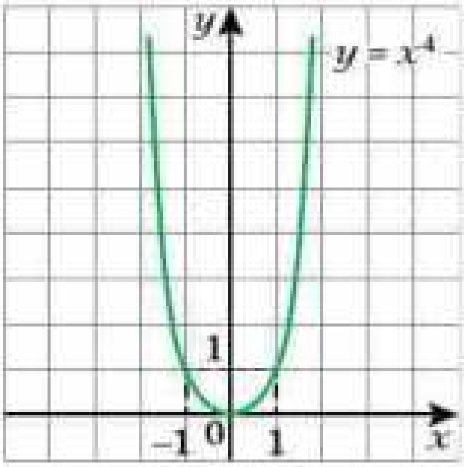


Рис. 9.2

- **Второй случай:** $\boldsymbol{n = 2k + 1}$, $\boldsymbol{k \in N}$ **или** $\boldsymbol{k = 0}$.

Отметим, что при $k = 0$ получаем функцию $y = x$, свойства и график которой были рассмотрены в курсе алгебры 7 класса.

Теперь пусть $k \in \boldsymbol{N}$.

Можно показать, что для любого a существует такое значение аргумента x, что $x^{2k+1} = a$.

☞ Сказанное означает, что *областью значений функции* $y = x^n$, *где* n *— нечётное натуральное число, является множество* $\boldsymbol{R}$.

Если $x < 0$, то $x^{2k+1} < 0$; если $x > 0$, то $x^{2k+1} > 0$.

☞ Следовательно, *промежутки* $(-\infty; 0)$ *и* $(0; +\infty)$ *являются промежутками знакопостоянства функции* $y = x^n$, *где* n *— нечётное натуральное число.*

☞ *Функция $y = x^n$, где n — нечётное натуральное число, является нечётной.* Действительно, для любого x из области определения выполняется равенство $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$.

Рассмотрим произвольные числа x_1 и x_2 такие, что $x_1 < x_2$. Воспользовавшись свойством числовых неравенств, получаем: $x_1^{2k+1} < x_2^{2k+1}$.

☞ Следовательно, *функция $y = x^n$, где n — нечётное натуральное число, является возрастающей.*

Полученные свойства позволяют схематически изобразить график функции $y = x^n$, где n — нечётное натуральное число, $n > 1$ (рис. 9.3). В частности, график функции $y = x^5$ изображён на рисунке 9.4.

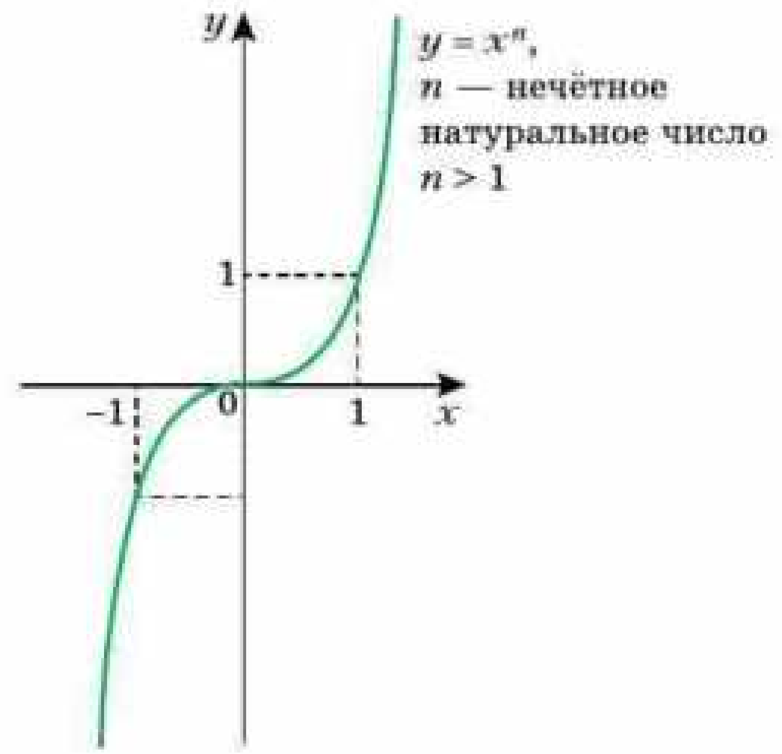


Рис. 9.3

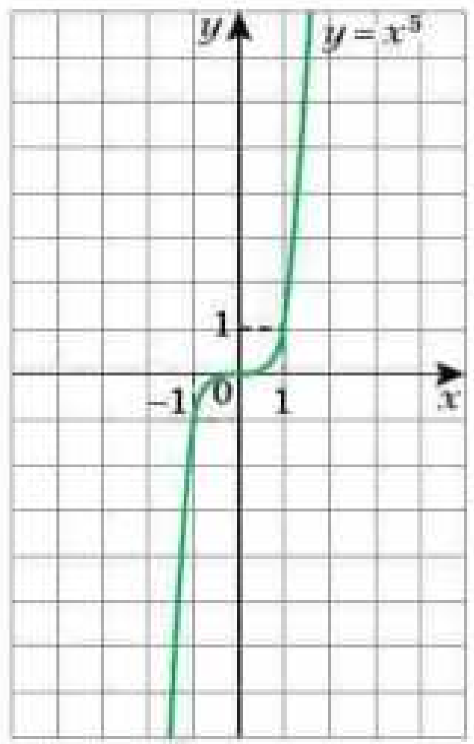


Рис. 9.4

В таблице приведены свойства функции $y = x^n$, $n \in \boldsymbol{N}$, установленные в этом параграфе.

	n — чётное натуральное число	n — нечётное натуральное число
Область определения	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$
Область значений	$[0; +\infty)$	$\boldsymbol{R}$
Нули функции	$x = 0$	$x = 0$

	n — чётное натуральное число	n — нечётное натуральное число
Промежутки знакопостоянства	$y > 0$ на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$	$y < 0$ на промежутке $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на промежутке $(0; +\infty)$
Чётность	Чётная	Нечётная
Возрастание/ убывание	Убывает на промежутке $(-\infty; 0]$, возрастает на промежутке $[0; +\infty)$	Возрастающая

1. Какую функцию называют степенной функцией с натуральным показателем?
2. Сформулируйте свойства функции $y = x^n$, где n — чётное натуральное число.
3. Сформулируйте свойства функции $y = x^n$, где n — нечётное натуральное число.

Упражнения

9.1. Функция задана формулой $f(x) = x^{19}$. Сравните:
1) $f(-7,6)$ и $f(-8,5)$;
2) $f(-6,9)$ и $f(6,9)$;
3) $f(0,2)$ и $f(-12)$.

9.2. Функция задана формулой $f(x) = x^{50}$. Сравните:
1) $f(-1,1)$ и $f(-1,2)$;
2) $f(19)$ и $f(-19)$;
3) $f(-7)$ и $f(9)$.

9.3. Следует ли из неравенства $x_1^n > x_2^n$, что $x_1 > x_2$, если: 1) n — чётное; 2) n — нечётное?

9.4. Следует ли из неравенства $x_1 > x_2$, что $x_1^n > x_2^n$, если: 1) n — чётное; 2) n — нечётное?

9.5. Постройте график функции:
1) $y = |x|x^4$;
2) $y = |x|x^4 + x^5$.

9.6. Постройте график функции:
1) $y = |x|x^3$;
2) $y = |x|x^4 - x^5$.

9.7. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^8$ на промежутке:

1) $[0; 2]$;
2) $[-2; -1]$;
3) $[-1; 1]$;
4) $(-\infty; -2]$;
5) $(-2; 1)$.

9.8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^6$ на промежутке:

1) $[-13; -1]$;
2) $[-2; 1]$;
3) $[1; +\infty)$;
4) $(1; +\infty)$.

9.9. Чётным или нечётным натуральным числом является показатель степени n функции $f(x) = x^n$, если:

1) $f(-4) < f(2)$;
2) $f(-4) > f(2)$;
3) $f(4) > f(-2)$?

9.10. Решите уравнение:

1) $x^{11} + x^3 = 2$;
2) $2x^4 + x^{10} = 3$.

9.11. Решите уравнение:

1) $4x^3 + x^7 = -5$;
2) $x^6 + 3x^8 = 4$.

9.12. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^8$ на промежутке $[-1; a]$, где $a > -1$.

9.13. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^6$ на промежутке $[a; 2]$, где $a < 2$.

9.14. Решите уравнение $5x^{17} - 3x^8 = 2$.

9.15. Решите уравнение $11x^{15} + 2x^4 = -9$.

§ 10 Степенная функция с целым показателем

Функцию, которую можно задать формулой $y = x^n$, где $n \in \mathbf{Z}$, называют **степенной функцией с целым показателем.**

Свойства этой функции для натурального показателя были рассмотрены в предыдущем параграфе. Здесь мы рассмотрим случаи, когда показатель n является целым отрицательным числом или нулём.

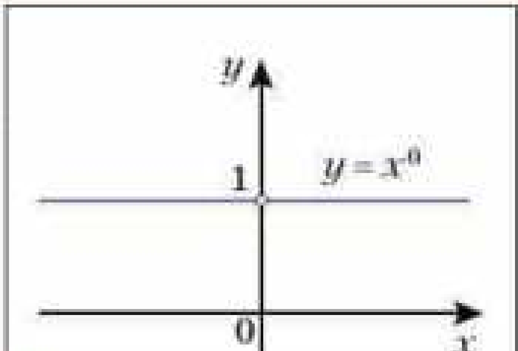


Рис. 10.1

Областью определения функции $y = x^0$ является множество $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, областью значений — одноэлементное множество $\{1\}$. График этой функции изображён на рисунке 10.1.

Рассмотрим функцию $y = x^{-n}$, где $n \in \mathbf{N}$.

С частным случаем этой функции, когда $n = 1$, то есть с функцией $y = \frac{1}{x}$, вы знакомы из курса алгебры 8 класса.

Запишем функцию $y = x^{-n}$ в виде $y = \frac{1}{x^n}$. Тогда становится понятным, что *областью определения функции* $y = x^{-n}$, $n \in N$, *является множество* $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Очевидно, что эта функция нулей не имеет.

Дальнейшее исследование свойств функции $y = x^{-n}$, где $n \in N$, проведём для двух случаев: n — чётное натуральное число и n — нечётное натуральное число.

- **Первый случай: $n = 2k$, $k \in N$.**

Имеем: $x^{-2k} = \frac{1}{x^{2k}}$. Так как выражение $\frac{1}{x^{2k}}$ принимает только положительные значения, то в область значений рассматриваемой функции не входят ни отрицательные числа, ни число 0.

Можно показать, что для любого $a > 0$ существует такое значение аргумента x, что $x^{-2k} = a$.

↳ Сказанное означает, что *областью значений функции* $y = x^{-n}$, *где* n — *чётное натуральное число, является множество* $(0; +\infty)$.

↳ Очевидно, что *промежутки* $(-\infty; 0)$ *и* $(0; +\infty)$ *являются промежутками знакопостоянства функции* $y = x^{-n}$, *где* n — *чётное натуральное число*.

↳ *Функция* $y = x^{-n}$, *где* n — *чётное натуральное число, является чётной*. Действительно, для любого x из области определения выполняются равенства $(-x)^{-2k} = \frac{1}{(-x)^{2k}} = \frac{1}{x^{2k}} = x^{-2k}$.

Рассмотрим произвольные числа x_1 и x_2 такие, что $x_1 \in (-\infty; 0)$, $x_2 \in (-\infty; 0)$ и $x_1 < x_2$. Тогда $-x_1 > -x_2 > 0$. Воспользовавшись свойствами числовых неравенств, получаем $0 < -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$. Отсюда $\left(-\frac{1}{x_1}\right)^{2k} < \left(-\frac{1}{x_2}\right)^{2k}$; $\frac{1}{x_1^{2k}} < \frac{1}{x_2^{2k}}$; $x_1^{-2k} < x_2^{-2k}$.

↳ Следовательно, *функция* $y = x^{-n}$, *где* n — *чётное натуральное число, возрастает на промежутке* $(-\infty; 0)$.

↳ Аналогично можно показать, что *функция* $y = x^{-n}$, *где* n — *чётное натуральное число, убывает на промежутке* $(0; +\infty)$.

Заметим, что с увеличением модуля x значения выражения $\frac{1}{x^{2k}}$, $k \in N$, становятся всё меньше и меньше. Поэтому расстояние от точки графика функции $y = \frac{1}{x^{2k}}$, $k \in N$, до оси абсцисс уменьшается с увеличением модуля абсциссы точки и может стать сколь угодно малым, но никогда не будет равным нулю.

Также можно установить, что с увеличением модуля ординаты расстояние от точки графика функции до оси ординат уменьшается и может стать сколь угодно малым, но никогда не будет равным нулю.

Полученные свойства позволяют схематически изобразить график функции $y = x^{-n}$, где n — чётное натуральное число (рис. 10.2). В частности, график функции $y = \frac{1}{x^2}$ изображён на рисунке 10.3.

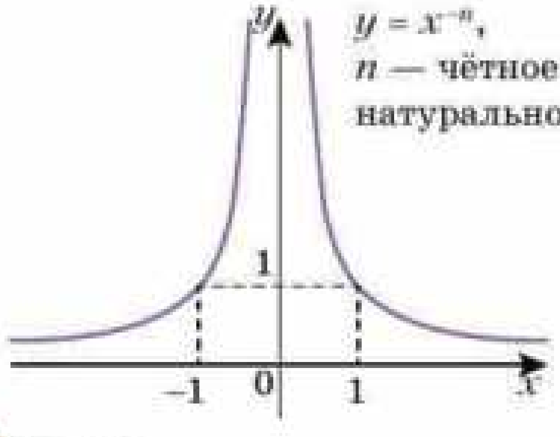


Рис. 10.2

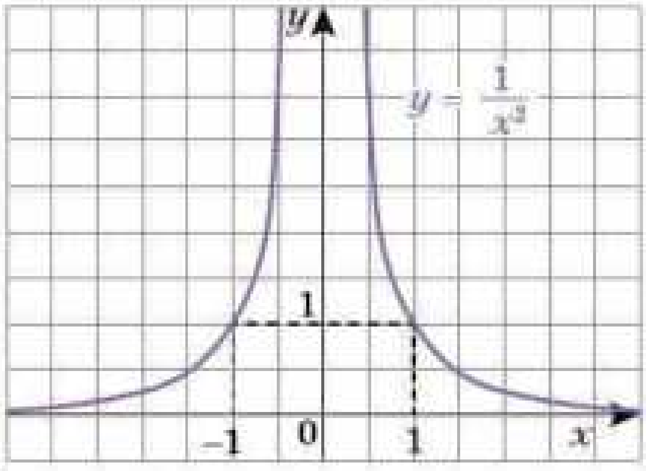


Рис. 10.3

- **Второй случай: $n = 2k - 1$, $k \in N$.**

Можно показать, что для любого $a \neq 0$ существует такое значение аргумента x, что $x^{-(2k-1)} = a$.

Сказанное означает, что *областью значений функции $y = x^{-n}$, где n — нечётное натуральное число, является множество* $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Если $x < 0$, то $\frac{1}{x^{2k-1}} < 0$; если $x > 0$, то $\frac{1}{x^{2k-1}} > 0$.

Следовательно, *промежутки* $(-\infty; 0)$ *и* $(0; +\infty)$ *являются промежутками знакопостоянства функции $y = x^{-n}$, где n — нечётное натуральное число.*

Функция $y = x^{-n}$, где n — нечётное натуральное число, является нечётной. Действительно, для любого x из области определения выполняются равенства $(-x)^{-(2k-1)} = \frac{1}{(-x)^{2k-1}} = \frac{1}{-x^{2k-1}} = -x^{-(2k-1)}$.

Рассмотрим произвольные числа x_1 и x_2 такие, что $x_1 \in (-\infty; 0)$, $x_2 \in (-\infty; 0)$ и $x_1 < x_2$. Тогда $-x_1 > -x_2 > 0$. Воспользовавшись свойствами числовых неравенств, получаем $-\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$; $\left(-\frac{1}{x_1}\right)^{2k-1} < \left(-\frac{1}{x_2}\right)^{2k-1}$;

$-\frac{1}{x_1^{2k-1}} < -\frac{1}{x_2^{2k-1}}$; $\frac{1}{x_1^{2k-1}} > \frac{1}{x_2^{2k-1}}$. Следовательно, рассматриваемая функция убывает на промежутке $(-\infty; 0)$. Аналогично можно показать, что эта функция убывает и на промежутке $(0; +\infty)$.

Следовательно, *функция* $y = x^{-n}$, *где* n — *нечётное натуральное число, убывает на каждом из промежутков* $(-\infty; 0)$ *и* $(0; +\infty)$.

Полученные свойства позволяют схематически изобразить график функции $y = x^{-n}$, где n — нечётное натуральное число (рис. 10.4). В частности, график функции $y = \frac{1}{x^3}$ изображён на рисунке 10.5.

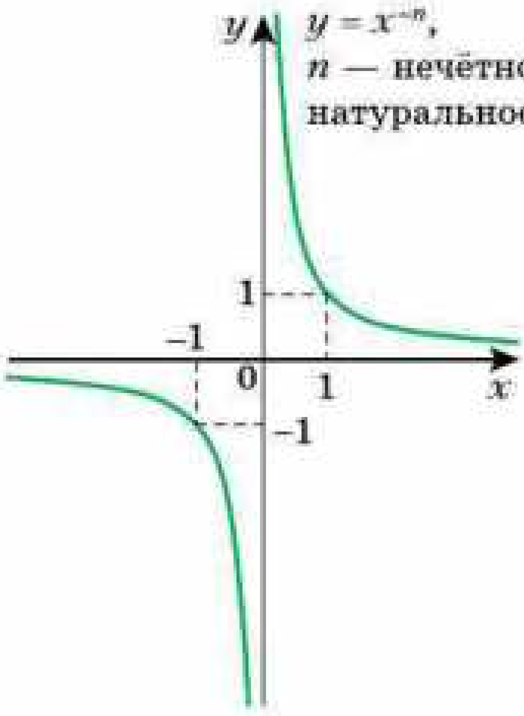


Рис. 10.4

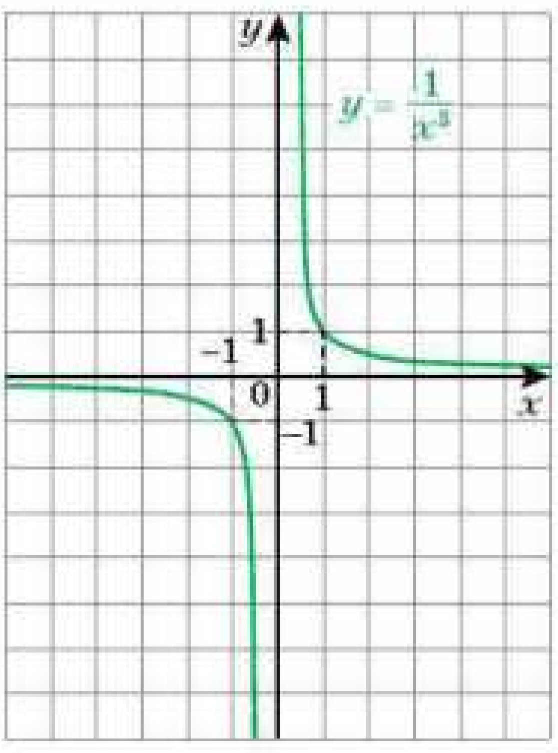


Рис. 10.5

В таблице приведены свойства функции $y = x^{-n}$, $n \in \mathbf{N}$, изученные в этом параграфе.

	n — чётное натуральное число	n — нечётное натуральное число
Область определения	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Область значений	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Нули функции	—	—

	n — чётное натуральное число	n — нечётное натуральное число
Промежутки знакопостоянства	$y > 0$ на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$	$y < 0$ на промежутке $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на промежутке $(0; +\infty)$
Чётность	Чётная	Нечётная
Возрастание/ убывание	Возрастает на промежутке $(-\infty; 0)$, убывает на промежутке $(0; +\infty)$	Убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$

1. Какую функцию называют степенной функцией с целым показателем?
2. Сформулируйте свойства функции $y = x^{-n}$, где n — чётное натуральное число.
3. Сформулируйте свойства функции $y = x^{-n}$, где n — нечётное натуральное число.

Упражнения

10.1. Дана функция $f(x) = x^{-25}$. Сравните:
1) $f(18)$ и $f(16)$; 2) $f(-42)$ и $f(2,5)$; 3) $f(-32)$ и $f(-28)$.

10.2. Функция задана формулой $f(x) = x^{-40}$. Сравните:
1) $f(-1,6)$ и $f(-1,7)$; 3) $f(-8)$ и $f(6)$.
2) $f(24)$ и $f(-24)$;

10.3. Найдите область определения функции:
1) $y = (x^{-1})^{-1}$; 2) $y = ((x-2)^{-2})^{-2}$.

10.4. Постройте график функции:
1) $y = (x-2)^0$; 2) $y = (x^2 - 4x + 3)^0$; 3) $y = \left(\frac{1}{x+1}\right)^{-1}$.

10.5. Постройте график уравнения:
1) $(y+2)^0 = x - 2$; 2) $(y-2)^0 = (x+1)^0$.

10.6. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^{-6}$ на промежутке:

1) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; 2) $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$; 3) $[1; +\infty)$; 4) $[-1; 0)$.

10.7. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^{-3}$ на промежутке:

1) $\left[\frac{1}{3}; 2\right]$;   3) $(-\infty; -3]$;

2) $[-2; -1]$;   4) $(0; 2]$.

10.8. Определите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} y = x^{-6}, \\ y = 4 - x^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^{-3}, \\ y = x^3 + 3. \end{cases}$

10.9. Определите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} y = x^{-3}, \\ y = \frac{1}{8}x^2 - 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^{-2}, \\ y = x^2 - 2. \end{cases}$

10.10. Чётным или нечётным является натуральное число n в показателе степени функции $f(x) = x^{-n}$, если:

1) $f(-2) < f(1)$;   2) $f(-2) < f(-1)$;   3) $f(2) < f(1)$?

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

Функциональный подход Коши

Вам часто приходится решать уравнения, то есть искать такие значения переменной, при подстановке которых в уравнение получаем верное равенство. Такие уравнения можно было бы назвать числовыми, так как их решениями являются числа. В математике изучают и другие уравнения, решениями которых являются не числа, а функции. Естественно, что их называют **функциональными уравнениями**.

С функциональными уравнениями вы встречались раньше. Например, равенство

$$f(x) = f(-x),\ x \in D(f),$$

задающее чётные функции, можно рассматривать как функциональное уравнение. Решением этого уравнения является любая чётная функция.

Вот ещё два примера функциональных уравнений:

$$f(x + y) = f(y) + x,\ x \in \boldsymbol{R},\ y \in \boldsymbol{R}; \qquad (1)$$

$$f(x + y) = 2f(y) + x - y,\ x \in \boldsymbol{R},\ y \in \boldsymbol{R}. \qquad (2)$$

Решим функциональное уравнение (1).

Если в равенство $f(x + y) = f(y) + x$ подставить значение переменной $y = 0$, то получим такое:

$$f(x) = f(0) + x.$$

Поскольку $f(0)$ — некоторая константа, то тем самым доказано, что решениями уравнения (1) могут быть только линейные функции вида $f(x) = x + c$, где c — константа.

В то же время заметим, что приведённые рассуждения не гарантируют того, что каждая линейная функция вида $f(x) = x + c$ удовлетворяет функциональному уравнению (1). Поэтому надо выполнить проверку.

Подставив функцию $f(x) = x + c$ в функциональное уравнение (1), получим очевидное тождество:

$$(x + y) + c = (y + c) + x.$$

Ответ: $f(x) = x + c$, где c — любая константа.

Заметим, что последний этап решения задачи — проверка — является важной частью решения, так как на нём могут быть «отсеяны» посторонние решения.

Проиллюстрируем это на примере решения функционального уравнения (2).

Рассуждая аналогично предыдущей задаче, подставим $y = 0$. Тогда

$$f(x) = 2f(0) + x.$$

Следовательно, решениями функционального уравнения (2) снова могут быть только линейные функции вида $f(x) = x + c$, где c — константа.

Проведём проверку полученных функций. Подставляя функцию $f(x) = x + c$ в уравнение (2), получим

$$x + y + c = 2(y + c) + x - y;$$
$$c = 0.$$

Видим, что среди всех линейных функций $f(x) = x + c$ функциональному уравнению (2) удовлетворяет лишь одна: $f(x) = x$.

Ответ: $f(x) = x$.

Функциональные уравнения играют в математике важную роль. Поскольку каждое функциональное уравнение задаёт некоторое свойство функций, то с помощью функциональных уравнений можно определять конкретные классы функций. Такой способ определения функций через описание их характерных свойств в виде функциональных уравнений предложил известный французский математик Огюстен Луи Коши. Его имя носят такие функциональные уравнения:

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$
$$f(xy) = f(x) + f(y),$$
$$f(x + y) = f(x)f(y),$$
$$f(xy) = f(x)f(y).$$

Используя уравнение Коши, можно, например, определить степенную функцию $f(x) = x^5$. Это можно сделать, поставив следующую задачу: найти все функции f, определённые на R, которые одновременно удовлетворяют таким условиям:

1) f — нечётная возрастающая функция;

2) $f(2) = 32$;

3) $f(xy) = f(x)f(y)$ для всех значений $x > 0$, $y > 0$.

Можно доказать, что данному списку условий удовлетворяет только степенная функция $f(x) = x^5$.

Если вы хотите узнать больше о функциональных уравнениях, советуем принять участие в работе над проектом «Методы решения функциональных уравнений» (с. 420).

Огюстен Луи Коши (1789—1857)

Французский математик. Опубликовал более 800 работ в области арифметики, теории чисел, алгебры, математического анализа, дифференциальных уравнений, теоретической и небесной механики, математической физики; занимался также исследованиями в области тригонометрии, теории упругости, оптики, астрономии. Был членом Парижской академии наук, Лондонского королевского общества и почти всех академий наук мира.

§ 11 Определение корня n-й степени. Функция $y = \sqrt[n]{x}$

Вы знаете, что корнем второй степени (квадратным корнем) из числа a называют такое число, вторая степень которого равна a. Аналогично определяют корень n-й степени из числа a, где $n \in N$, $n > 1$.

Определение

Корнем n-й степени из числа a, где $n \in N$, $n > 1$, называют такое число, n-я степень которого равна a.

Например, корнем пятой степени из числа 32 является число 2, так как $2^5 = 32$; корнем третьей степени из числа -64 является число -4, так как $(-4)^3 = -64$; корнями четвёртой степени из числа 81 являются числа 3 и -3, так как $3^4 = 81$ и $(-3)^4 = 81$.

Из определения следует, что любой корень уравнения $x^n = a$, где $n \in N$, $n > 1$, является корнем n-й степени из числа a и наоборот, любой корень n-й степени из числа a является корнем рассматриваемого уравнения.

Если n — нечётное натуральное число, то функция $y = x^n$ является возрастающей, и поскольку её областью значений является множество $\boldsymbol{R}$, то уравнение $x^n = a$ имеет единственный корень при любом a.

Рисунок 11.1 иллюстрирует последнее утверждение: при любом значении a графики функций $y = x^n$ и $y = a$ имеют одну общую точку. Тогда можно сделать такой вывод:

если n — нечётное натуральное число, большее 1, то корень n-й степени из любого числа существует, причём только один.

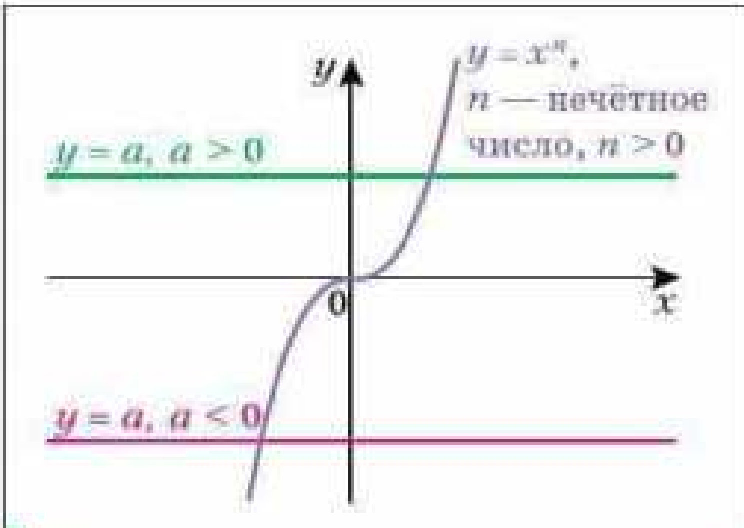


Рис. 11.1

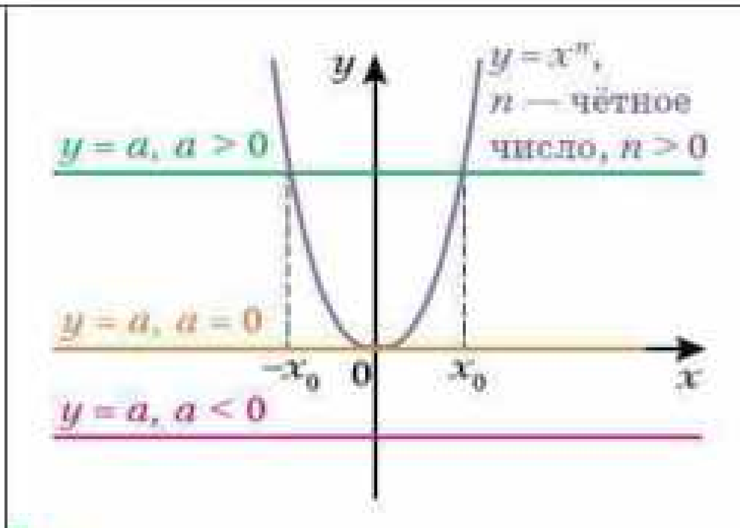


Рис. 11.2

Корень нечётной степени n, $n > 1$, из числа a обозначают так: $\sqrt[n]{a}$ (читают: «корень n-й степени из a»). Например, $\sqrt[5]{32} = 2$, $\sqrt[3]{-64} = -4$, $\sqrt[7]{0} = 0$.

Знак $\sqrt[n]{}$ называют **знаком корня n-й степени** или **радикалом**. Выражение, стоящее под радикалом, называют **подкоренным выражением**.

Корень третьей степени также принято называть **кубическим корнем**. Например, запись $\sqrt[3]{2}$ читают: «кубический корень из числа 2».

Подчеркнём, что выражение $\sqrt[2k+1]{a}$, $k \in \boldsymbol{N}$, существует при любом a.

Из определения корня n-й степени следует, что ***при любом a выполняется равенство***

$$\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a$$

Например, $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$, $\left(\sqrt[7]{-0{,}1}\right)^7 = -0{,}1$.

Рассмотрим уравнение $x^n = a$, где n — чётное натуральное число.

Так как областью значений функции $y = x^n$, где n — чётное натуральное число, является множество $[0; +\infty)$, то при $a < 0$ данное уравнение не имеет решений.

Очевидно, что при $a = 0$ уравнение имеет единственный корень: $x = 0$.

Функция $y = x^n$, где n — чётное натуральное число, возрастает на промежутке $[0; +\infty)$ и принимает все положительные значения. Следовательно, при $a \geqslant 0$ уравнение $x^n = a$, где n — чётное натуральное число, на промежутке $[0; +\infty)$ имеет единственный корень.

Поскольку рассматриваемая функция — чётная, то при $a > 0$ данное уравнение имеет два корня, которые являются противоположными числами.

У этих утверждений есть простая геометрическая интерпретация (рис. 11.2). Если $a < 0$, то графики функций $y = x^n$ и $y = a$ не имеют общих точек; если $a = 0$, то рассматриваемые графики имеют одну общую точку; если $a > 0$, то общих точек две, причём их абсциссы — противоположные числа.

Теперь можно сделать такой вывод:

если n — чётное натуральное число, то при a < 0 корень n-й степени из числа a не существует; при a = 0 корень n-й степени из числа a равен 0; при a > 0 существуют два противоположных числа, которые являются корнями n-й степени из числа a.

Вы знаете, что арифметическим квадратным корнем из неотрицательного числа a называют такое неотрицательное число, вторая степень которого равна a. Аналогично определяют арифметический корень n-й степени.

Определение

Арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a, где $n \in N$, $n > 1$, называют такое неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Арифметический корень n-й степени из неотрицательного числа a обозначают так: $\sqrt[n]{a}$.

Например, $\sqrt[4]{81} = 3$, так как $3 \geqslant 0$ и $3^4 = 81$;

$\sqrt[6]{64} = 2$, так как $2 \geqslant 0$ и $2^6 = 64$;

$\sqrt[10]{0} = 0$, так как $0 \geqslant 0$ и $0^{10} = 0$.

Вообще, **если $b \geqslant 0$ и $b^n = a$, где $n \in N$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{a} = b$.**

Обратим внимание на то, что для обозначения арифметического корня n-й степени из неотрицательного числа a и корня нечётной степени n из числа a используют одну и ту же запись: $\sqrt[n]{a}$. Запись $\sqrt[2k]{a}$, $k \in \boldsymbol{N}$, используют только для обозначения арифметического корня. Заметим, что корень чётной степени из числа a не имеет обозначения.

С помощью знака корня n-й степени можно записывать корни уравнения $x^n = a$, где $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$.

↬ Если n — нечётное натуральное число, то при любом значении a рассматриваемое уравнение имеет единственный корень: $x = \sqrt[n]{a}$.

↬ Если n — чётное натуральное число и $a > 0$, то уравнение имеет два корня: $x_1 = \sqrt[n]{a}$, $x_2 = -\sqrt[n]{a}$.

↬ Если $a = 0$, то $x = 0$.

Например, корнем уравнения $x^3 = 7$ является число $\sqrt[3]{7}$; корнями уравнения $x^4 = 5$ являются два числа: $-\sqrt[4]{5}$ и $\sqrt[4]{5}$.

Из определения арифметического корня n-й степени следует, что:

$$1)\ \sqrt[n]{a} \geqslant 0, \text{ где } a \geqslant 0;$$

$$2)\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \text{ где } a \geqslant 0.$$

Например, $\sqrt[6]{7} > 0$ и $\left(\sqrt[6]{7}\right)^6 = 7$.

Покажем, что при любом a и $k \in \boldsymbol{N}$

$$\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}.$$

Для того чтобы доказать равенство $\sqrt[2k+1]{x} = y$, надо показать, что $y^{2k+1} = x$.

Имеем: $\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -a$.

Доказанное свойство позволяет корень нечётной степени из отрицательного числа выразить через арифметический корень.

Например, $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{-12} = -\sqrt[5]{12}$.

Выше было установлено, что корень нечётной степени из любого числа существует и принимает единственное значение. Поэтому каждому числу $x \in \boldsymbol{R}$ можно поставить в соответствие единственное число y такое, что $y = \sqrt[2k+1]{x}$. Указанное правило задаёт функцию $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$, где $k \in \boldsymbol{N}$, с областью определения $\boldsymbol{R}$.

Покажем, что функция f является обратной к функции $g(x) = x^{2k+1}$.

Поскольку уравнение $\sqrt[2k+1]{x} = a$ при любом a имеет корень (а именно: число a^{2k+1}), то областью значений функции f является множество $\boldsymbol{R}$.

Имеем: $D(f) = E(g) = \boldsymbol{R}$,

$E(f) = D(g) = \boldsymbol{R}$.

Для всех $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $\left(\sqrt[2k+1]{x}\right)^{2k+1} = x$. Иными словами, $g(f(x)) = x$ для всех $x \in D(f)$. Сказанное означает, что f и g — взаимно обратные функции.

Используя график функции $y = x^{2k+1}$ и теорему 7.2, можно построить график функции $y = \sqrt[2k+1]{x}$ (рис. 11.3). На рисунке 11.4 изображён график функции $y = \sqrt[3]{x}$.

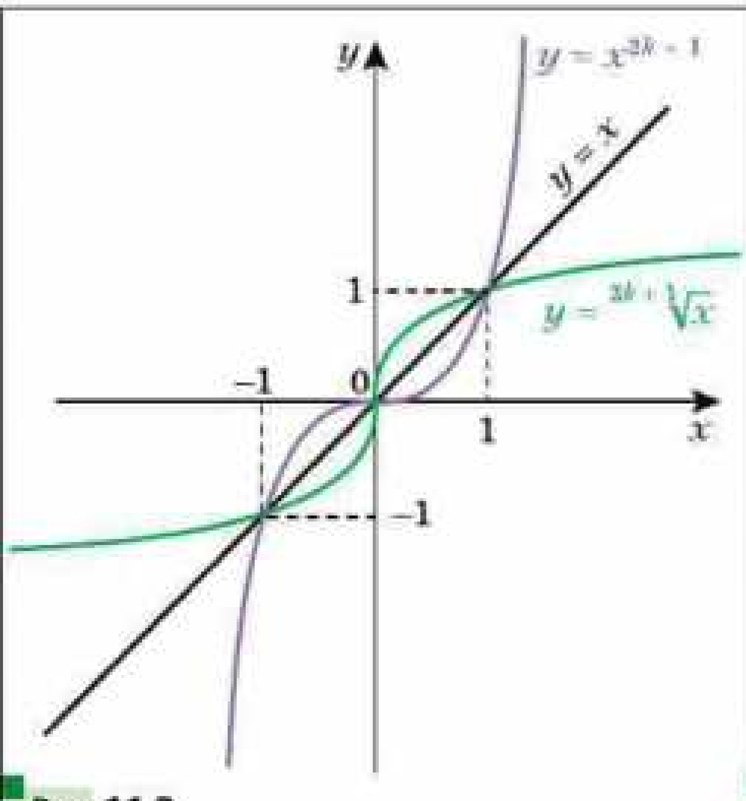


Рис. 11.3

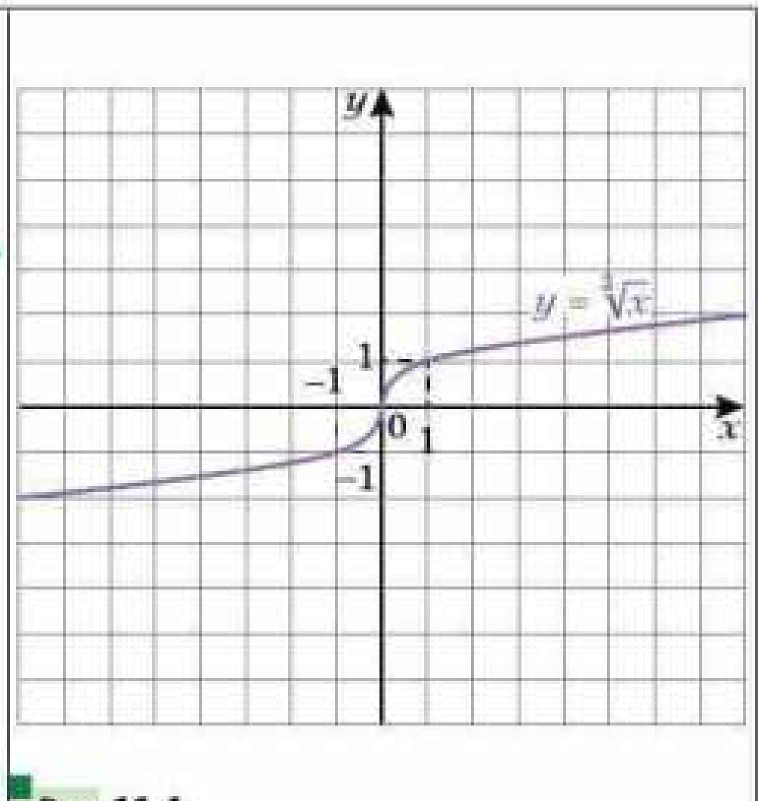


Рис. 11.4

Поскольку функция $g(x) = x^{2k+1}$ возрастающая, то по теореме 7.3 функция $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ также является возрастающей.

Функция $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ имеет единственный нуль: $x = 0$.

Если $x < 0$, то $f(x) < 0$; если $x > 0$, то $f(x) > 0$. Следовательно, промежутки $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$ являются промежутками знакопостоянства функции f.

Для любого x из области определения функции f выполняются равенства $f(-x) = \sqrt[2k+1]{-x} = -\sqrt[2k+1]{x} = -f(x)$. Следовательно, функция f является нечётной.

Аналогично определяют функцию $f(x) = \sqrt[2k]{x}$, $k \in \boldsymbol{N}$.

Покажем, что функция f является обратной к функции $g(x) = x^{2k}$, $k \in \boldsymbol{N}$, с областью определения $[0;\ +\infty)$.

Поскольку уравнение $\sqrt[2k]{x} = a$ при любом $a \geqslant 0$ имеет корень (а именно: число a^{2k}) и при любом $a < 0$ не имеет корней, то областью значений функции f является промежуток $[0;\ +\infty)$.

Имеем: $D(f) = E(g) = [0; +\infty)$,

$E(f) = D(g) = [0; +\infty)$.

Для любого $x \in [0; +\infty)$ выполняется равенство $\left(\sqrt[2k]{x}\right)^{2k} = x$. Иными словами, $g(f(x)) = x$ для всех $x \in D(f)$. Сказанное означает, что f и g — взаимно обратные функции.

На рисунке 11.5 показано, как с помощью графика функции $y = x^{2k}$, где $x \geqslant 0$, построить график функции $y = \sqrt[2k]{x}$, $k \in \boldsymbol{N}$. На рисунке 11.6 изображён график функции $y = \sqrt[4]{x}$.

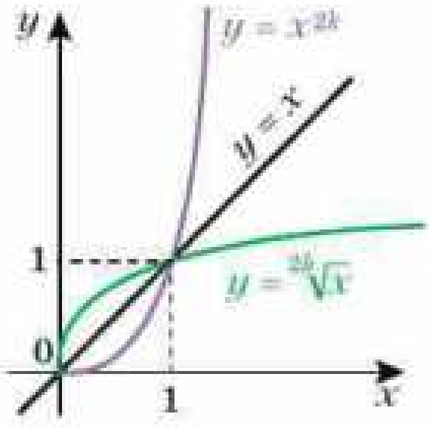


Рис. 11.5

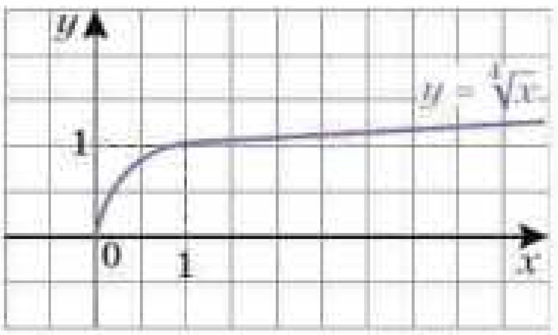


Рис. 11.6

Выясним некоторые свойства функции $f(x) = \sqrt[2k]{x}$.

Поскольку функция $g(x) = x^{2k}$, $k \in \boldsymbol{N}$, $D(g) = [0; +\infty)$, является возрастающей, то функция $f(x) = \sqrt[2k]{x}$ также является возрастающей.

Функция f имеет единственный нуль: $x = 0$.

Если $x > 0$, то $f(x) > 0$. Следовательно, промежуток $(0; +\infty)$ является промежутком знакопостоянства функции f.

Поскольку область определения функции f не является симметричной относительно начала координат, то функция f не является ни чётной, ни нечётной.

В таблице приведены свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$, изученные в этом параграфе.

	n — чётное натуральное число	n — нечётное натуральное число
Область определения	$[0; +\infty)$	$\boldsymbol{R}$
Область значений	$[0; +\infty)$	$\boldsymbol{R}$

	n — чётное натуральное число	n — нечётное натуральное число
Нули функции	$x = 0$	$x = 0$
Промежутки знакопостоянства	$y > 0$ на промежутке $(0; +\infty)$	$y < 0$ на промежутке $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на промежутке $(0; +\infty)$
Чётность	Не является ни чётной, ни нечётной	Нечётная
Возрастание/убывание	Возрастающая	Возрастающая

Пример. Решите неравенство: 1) $\sqrt[4]{x-2} < 1$; 2) $\sqrt[6]{x^2-4} > \sqrt[6]{3x}$.

Решение. 1) Имеем: $\sqrt[4]{x-2} < \sqrt[4]{1}$. Поскольку функция $y = \sqrt[4]{t}$ является возрастающей с областью определения $[0; +\infty)$, то данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x - 2 < 1, \\ x - 2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Отсюда $2 \leqslant x < 3$.

2) Данное неравенство равносильно системе $\begin{cases} x^2 - 4 > 3x, \\ 3x \geqslant 0. \end{cases}$

Тогда $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 > 0, \\ x \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x > 4, \end{array}\right. \\ x \geqslant 0. \end{cases}$ Отсюда получаем, что $x > 4$.

Ответ: 1) $[2; 3)$; 2) $(4; +\infty)$. ■

1. Что называют корнем n-й степени из числа a, где $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$?
2. Что называют арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a, где $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$?
3. Какими свойствами обладает функция $y = \sqrt[2k+1]{x}$, $k \in \mathbb{N}$?
4. Какими свойствами обладает функция $y = \sqrt[2k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$?

Упражнения

11.1. Вычислите:

1) $\left(-\sqrt[7]{2}\right)^7$; 2) $-\sqrt[4]{7^4}$; 3) $\left(\frac{1}{2}\sqrt[6]{48}\right)^6$; 4) $\frac{1}{2}\sqrt[6]{48^6}$.

11.2. Найдите значение выражения:

1) $\left(-\sqrt[6]{11}\right)^6$; 2) $\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{45}\right)^3$; 3) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{45^3}$; 4) $\left(-2\sqrt[5]{-5}\right)^5$.

11.3. Вычислите:

1) $0{,}3\sqrt[3]{1000}-5\sqrt[8]{256}$; 2) $\sqrt[5]{14^5}+\left(-2\sqrt{10}\right)^2-\sqrt[7]{-128}$.

11.4. Вычислите:

1) $200\sqrt[3]{0{,}001}-\sqrt[5]{-0{,}00032}$; 2) $\sqrt[3]{8000}\cdot\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}-\left(-\sqrt[5]{8}\right)^5+\sqrt[7]{17^7}$.

11.5. Найдите область определения функции:

1) $y=\sqrt[3]{x-1}$; 2) $y=\sqrt[4]{|x|-1}$; 3) $y=\sqrt[6]{x^2(x-3)}$.

11.6. Найдите область определения функции:

1) $y=\sqrt[4]{x-2}$; 2) $y=\sqrt[6]{x^2-4x+3}$; 3) $y=\sqrt[10]{|x|(x-6)}$.

11.7. Найдите область значений функции:

1) $y=\sqrt[6]{x}-2$; 2) $y=\sqrt[3]{x}-3$; 3) $y=\left|\sqrt[8]{x}-1\right|$.

11.8. Найдите область значений функции:

1) $y=\sqrt[4]{x}-4$; 2) $y=\sqrt[5]{x}-2$; 3) $y=\left|\sqrt[7]{x}+1\right|$.

11.9. Между какими двумя последовательными целыми числами находится на координатной прямой число:

1) $\sqrt[3]{3}$; 2) $\sqrt[4]{21}$; 3) $\sqrt[3]{100}$; 4) $-\sqrt[3]{81}$?

11.10. Между какими двумя последовательными целыми числами находится на координатной прямой число:

1) $\sqrt[3]{18}$; 2) $\sqrt[4]{139}$; 3) $-\sqrt[3]{212}$?

11.11. Решите уравнение:

1) $x^5=9$; 3) $x^6=5$; 5) $\sqrt[6]{x}=-2$;

2) $x^7=-2$; 4) $\sqrt[4]{x}=3$; 6) $\sqrt[3]{2x}+7=0$.

11.12. Решите уравнение:

1) $x^9=10$; 3) $x^6=-64$; 5) $\sqrt[5]{x}=-2$;

2) $x^{10}=9$; 4) $\sqrt[4]{x}=-2$; 6) $\sqrt[4]{3x-2}=2$.

11.13. Постройте график функции:

1) $y=\left(\sqrt[3]{x}\right)^3$; 2) $y=\left(\sqrt[4]{x}\right)^4$.

11.14. Найдите область определения выражения:

1) $\sqrt[4]{\frac{|x|-1}{x^2-9}}$; 2) $\sqrt[8]{6-|x|}+\frac{1}{\sqrt[4]{3-x}}$.

11.15. Найдите область определения выражения:

1) $\sqrt[6]{\dfrac{|x|-4}{x^2-36}}$; 2) $\sqrt[10]{|x|-3}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x+4}}$.

11.16. Решите уравнение:

1) $(x^2-4)\sqrt[4]{x+1}=0$; 2) $(x-1)\sqrt[10]{x^2-2x-3}=0$.

11.17. Решите уравнение:

1) $(|x|-3)\sqrt[6]{2-x}=0$; 2) $(x+2)\sqrt[6]{x^2+2x-3}=0$.

11.18. Постройте график функции:

1) $y=\left(\sqrt[4]{x-1}\right)^4+\left(\sqrt[4]{1-x}\right)^4+1$; 2) $y=\left(\sqrt[6]{x}\right)^6+\left(\sqrt[6]{1-x}\right)^6$.

11.19. Постройте график функции:

1) $y=x\left(\sqrt[4]{x}\right)^4$; 2) $y=\left(\sqrt[8]{2+x}\right)^8+\left(\sqrt[6]{2-x}\right)^6$.

11.20. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\sqrt[4]{|x|}$ на промежутке:

1) $[-3; -1]$; 2) $[-1; 2]$; 3) $[-3; +\infty)$.

11.21. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\sqrt[3]{|x|}$ на промежутке:

1) $[2; 3]$; 2) $[-2; 1]$; 3) $(-\infty; 2)$.

11.22. Решите неравенство:

1) $\sqrt[3]{3x+1}<4$; 2) $\sqrt[8]{4x+1}\leqslant 1$; 3) $\sqrt[4]{x^2-8}>\sqrt[4]{2x}$.

11.23. Решите неравенство:

1) $\sqrt[10]{x+2}>1$; 2) $\sqrt[4]{5x+1}<3$; 3) $\sqrt[8]{x^2-|x|+1}>\sqrt[8]{5-|x|}$.

11.24. В зависимости от значения параметра a определите количество корней уравнения:

1) $(x-a)\sqrt[4]{x+1}=0$; 3) $(x-a)(\sqrt[4]{x}-1)=0$.

2) $(x-a)(\sqrt[4]{x}+1)=0$;

11.25. В зависимости от значения параметра a определите количество корней уравнения:

1) $(x+1)\sqrt[4]{x-a}=0$; 2) $(x-1)(\sqrt[4]{x}-a)=0$.

11.26. Решите уравнение $\sqrt[4]{x-26}+\sqrt[3]{x}=4$.

11.27. Решите уравнение $\sqrt[3]{x-9}+\sqrt[4]{x+6}=3$.

11.28. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+\sqrt[6]{x}=y+\sqrt[6]{y}, \\ x^2+xy+y^2=27. \end{cases}$

11.29. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+\sqrt[5]{x}=y+\sqrt[5]{y}, \\ x^2+y^2=2. \end{cases}$

11.30. Найдите целую часть числа $\underbrace{\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{\ldots+\sqrt[3]{24}}}}}_{100\ \text{радикалов}}$.

11.31. Найдите целую часть числа $\underbrace{\sqrt[4]{14+\sqrt[4]{14+\sqrt[4]{\ldots+\sqrt[4]{14}}}}}_{200\ \text{радикалов}}$.

11.32. Решите уравнение $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$.

11.33. Решите уравнение $x^3 + 2 = 3\sqrt[3]{3x-2}$.

§ 12 Свойства корня n-й степени

Рассмотрим теоремы, выражающие свойства корня n-й степени.

Теорема 12.1

(первая теорема о корне из степени)

Для любого $a \in R$ и $k \in N$ выполняются равенства:

$$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$$

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$$

Доказательство

Для того чтобы доказать равенство $\sqrt[2k+1]{x} = y$, достаточно показать, что $y^{2k+1} = x$. Тогда первое из доказываемых равенств очевидно.

Для того чтобы доказать равенство $\sqrt[2k]{x} = y$, достаточно показать, что $y \geqslant 0$ и $y^{2k} = x$. Имеем: $|a| \geqslant 0$ и $(|a|)^{2k} = a^{2k}$. ■

Теорема 12.2

(корень из произведения)

Если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, $n \in N$, $n > 1$, то

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Доказательство

Для того чтобы доказать равенство $\sqrt[n]{x} = y$, где $x \geqslant 0$, достаточно показать, что $y \geqslant 0$ и $y^n = x$.

Имеем: $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$ и $\sqrt[n]{b} \geqslant 0$. Тогда $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geqslant 0$. Кроме того, $\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$. ■

Из теоремы 12.2 следует, что если $a \leqslant 0$ и $b \leqslant 0$, $n \in N$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{-a} \cdot \sqrt[n]{-b}$.

Теорема 12.3

(корень из частного)

Если $a \geqslant 0$ и $b > 0$, $n \in N$, $n > 1$, то

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Докажите эту теорему самостоятельно.

Заметим, что если $a \leqslant 0$ и $b < 0$, $n \in N$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{-a}}{\sqrt[n]{-b}}$.

Теорема 12.4

(степень корня)

Если $a \geqslant 0$, $n \in N$, $k \in N$, $n > 1$, то

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$$

Доказательство

Если $k = 1$, то доказываемое равенство очевидно.

Пусть $k > 1$. Имеем: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{k \text{ множителей}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ множителей}}} = \sqrt[n]{a^k}$. ■

Теорема 12.5

(корень из корня)

Если $a \geqslant 0$, $n \in N$, $k \in N$, $n > 1$, $k > 1$, то

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

Доказательство

Имеем: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} \geqslant 0$. Кроме того, $\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k = \left(\sqrt[k]{a}\right)^k = a$. ■

Теорема 12.6

(вторая теорема о корне из степени)

Если $a \geqslant 0$, $n \in N$, $k \in N$, $n > 1$, то

$$\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$$

Доказательство

Если $k = 1$, то доказываемое равенство очевидно.

Пусть $k > 1$. Имеем: $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^k}} = \sqrt[n]{a}$. ■

Пример 1. Упростите выражение: 1) $\sqrt[12]{a^3}$; 2) $\sqrt[4]{a^{12}}$; 3) $\sqrt[6]{a^2}$; 4) $\sqrt[6]{x^6y^6}$, если $x \geqslant 0$ и $y \leqslant 0$.

Решение. Применим теоремы 12.5 и 12.1.

1) Из условия следует, что $a \geqslant 0$. Тогда $\sqrt[12]{a^3} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3}} = \sqrt[4]{a}$.

2) $\sqrt[4]{a^{12}} = \sqrt[4]{(a^3)^4} = |a^3|$.

3) $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{\sqrt{a^2}} = \sqrt[3]{|a|}$.

4) Учитывая, что $x \geqslant 0$ и $y \leqslant 0$, можно записать: $\sqrt[6]{x^6y^6} = \sqrt[6]{(xy)^6} = |xy| = |x|\,|y| = x(-y) = -xy$. ■

Пример 2. Вынесите множитель из-под знака корня: 1) $\sqrt[8]{b^{43}}$; 2) $\sqrt[8]{-b^{43}}$; 3) $\sqrt[6]{a^6b^7}$, если $a < 0$.

Решение. 1) Из условия следует, что $b \geqslant 0$. Тогда

$$\sqrt[8]{b^{43}} = \sqrt[8]{b^{40}b^3} = |b^5|\sqrt[8]{b^3} = b^5 \cdot \sqrt[8]{b^3}.$$

2) Из условия следует, что $b \leqslant 0$. Тогда

$$\sqrt[8]{-b^{43}} = \sqrt[8]{b^{40}(-b)^3} = |b^5|\sqrt[8]{-b^3} = -b^5 \cdot \sqrt[8]{-b^3}.$$

3) Из условия следует, что $b \geqslant 0$. Тогда

$$\sqrt[6]{a^6b^7} = \sqrt[6]{a^6b^6b} = |a||b|\sqrt[6]{b} = -ab\sqrt[6]{b}. ■$$

Пример 3. Внесите множитель под знак корня: 1) $-2\sqrt[6]{3}$; 2) $a\sqrt[4]{7}$; 3) $c\sqrt[10]{c^7}$; 4) $3b\sqrt[4]{-\frac{b}{3}}$.

Решение. 1) $-2\sqrt[6]{3} = -\sqrt[6]{64} \cdot \sqrt[6]{3} = -\sqrt[6]{192}$.

2) Если $a \geqslant 0$, то $a\sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{7a^4}$; если $a < 0$, то

$$a\sqrt[4]{7} = -\sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{7} = -\sqrt[4]{7a^4}.$$

3) Из условия следует, что $c \geqslant 0$. Тогда $c\sqrt[10]{c^7} = \sqrt[10]{c^{10}} \cdot \sqrt[10]{c^7} = \sqrt[10]{c^{17}}$.

4) Из условия следует, что $b \leqslant 0$. Тогда

$$3b\sqrt[4]{-\frac{b}{3}} = -\sqrt[4]{81b^4}\cdot\sqrt[4]{-\frac{b}{3}} = -\sqrt[4]{81b^4\cdot\left(-\frac{b}{3}\right)} = -\sqrt[4]{-27b^5}. \blacksquare$$

Пример 4. Сократите дробь $\dfrac{\sqrt[3]{b}-1}{\sqrt[6]{b}+1}$.

Решение. Разложив числитель данной дроби на множители, получаем:

$$\frac{\sqrt[3]{b}-1}{\sqrt[6]{b}+1} = \frac{\left(\sqrt[6]{b}\right)^2-1}{\sqrt[6]{b}+1} = \frac{\left(\sqrt[6]{b}-1\right)\left(\sqrt[6]{b}+1\right)}{\sqrt[6]{b}+1} = \sqrt[6]{b}-1. \blacksquare$$

Пример 5. Сократите дробь $\dfrac{\sqrt[10]{ab}+\sqrt[5]{b}}{\sqrt[10]{ab}}$.

Решение. Из условия следует, что числа a и b одного знака. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $a > 0$ и $b > 0$. Имеем:

$$\frac{\sqrt[10]{ab}+\sqrt[5]{b}}{\sqrt[10]{ab}} = \frac{\sqrt[10]{a}\cdot\sqrt[10]{b}+\sqrt[10]{b}\cdot\sqrt[10]{b}}{\sqrt[10]{a}\cdot\sqrt[10]{b}} = \frac{\sqrt[10]{b}\left(\sqrt[10]{a}+\sqrt[10]{b}\right)}{\sqrt[10]{a}\cdot\sqrt[10]{b}} = \frac{\sqrt[10]{a}+\sqrt[10]{b}}{\sqrt[10]{a}}.$$

Второй случай: $a < 0$ и $b < 0$. Имеем:

$$\frac{\sqrt[10]{ab}+\sqrt[5]{b}}{\sqrt[10]{ab}} = \frac{\sqrt[10]{-a}\cdot\sqrt[10]{-b}-\left(\sqrt[10]{-b}\right)^2}{\sqrt[10]{-a}\cdot\sqrt[10]{-b}} = \frac{\sqrt[10]{-b}\left(\sqrt[10]{-a}-\sqrt[10]{-b}\right)}{\sqrt[10]{-a}\cdot\sqrt[10]{-b}} = \frac{\sqrt[10]{-a}-\sqrt[10]{-b}}{\sqrt[10]{-a}}. \blacksquare$$

Пример 6. Докажите, что $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = 3$.

Решение. Пусть $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = x$. Воспользуемся тем, что $(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$.

Имеем:

$$x^3 = 9+\sqrt{80}+9-\sqrt{80}+3\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\cdot\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\cdot\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right).$$

Отсюда $x^3 = 18+3x$; $x^3-3x-18 = 0$.

Рассмотрев делители числа 18, несложно установить, что $x = 3$ является корнем данного уравнения. Разделив многочлен $x^3-3x-18$ на двучлен $x-3$, получаем: x^2+3x+6.

Имеем: $(x-3)(x^2+3x+6) = 0$.

Это уравнение имеет единственный корень: $x = 3$. $\blacksquare$

?

1. Сформулируйте теорему о корне из степени.

2. Сформулируйте теорему о корне из произведения.

3. Сформулируйте теорему о корне из дроби.

4. Сформулируйте теорему о степени корня.

5. Сформулируйте теорему о корне из корня.

Упражнения

12.1. Найдите:

1) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$; 2) $\dfrac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{128}}$; 3) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}\cdot\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$.

12.2. Чему равно значение выражения:

1) $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{5}$; 2) $\dfrac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$; 3) $\sqrt[5]{2\sqrt{17}+10}\cdot\sqrt[5]{2\sqrt{17}-10}$?

12.3. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt[4]{162}$; 2) $\sqrt[3]{250}$; 3) $\sqrt[3]{-a^7}$; 4) $\sqrt[3]{-54a^5b^9}$.

12.4. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt[4]{80}$; 2) $\sqrt[3]{432}$; 3) $\sqrt[3]{54y^8}$; 4) $\sqrt[4]{243b^9c^{18}}$.

12.5. Внесите множитель под знак корня:

1) $4\sqrt[3]{5}$; 2) $-10\sqrt[4]{0,271}$; 3) $5\sqrt[3]{0,04x}$; 4) $b\sqrt[5]{3b^3}$.

12.6. Внесите множитель под знак корня:

1) $0,25\sqrt[3]{320}$; 2) $2\sqrt[4]{7}$; 3) $5\sqrt[4]{4a}$; 4) $2x^3\sqrt[5]{0,25x^3}$.

12.7. Упростите выражение:

1) $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{2}}$; 2) $\sqrt[5]{b\sqrt[6]{b}}$; 3) $\sqrt[8]{x^3\sqrt[3]{x^7}}$; 4) $\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$.

12.8. Упростите выражение:

1) $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}$; 3) $\sqrt[5]{x^2\sqrt[6]{x^{13}}}$; 4) $\sqrt[4]{a\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}}$.

12.9. Упростите выражение:

1) $\left(1+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}\right)\left(1-\sqrt[3]{a}\right)$; 2) $\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1-\sqrt[4]{a}\right)$.

12.10. Упростите выражение $\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n}\right)\left(\sqrt[8]{m}+\sqrt[8]{n}\right)\left(\sqrt[8]{m}-\sqrt[8]{n}\right)$.

12.11. Сократите дробь:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$; 3) $\dfrac{\sqrt[8]{ab^2}-\sqrt[8]{a^2b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$; 5) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}}$;

2) $\dfrac{\sqrt[6]{x}-9}{\sqrt[12]{x}+3}$; 4) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16}{x-64}$; 6) $\dfrac{2-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$.

12.12. Сократите дробь:

1) $\dfrac{\sqrt[6]{a}+1}{\sqrt[3]{a}-1}$; 3) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$; 5) $\dfrac{\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{a^2b}}$;

2) $\dfrac{\sqrt{m}-\sqrt[4]{mn}}{\sqrt[4]{mn}-\sqrt{n}}$; 4) $\dfrac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$; 6) $\dfrac{3+\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3}}$.

12.13. При каких значениях a выполняется равенство:

1) $\sqrt[3]{(a-5)^4} = \left(\sqrt[3]{a-5}\right)^4$;
2) $\sqrt[4]{(a-2)^4} = \left(\sqrt[4]{a-2}\right)^4$;
3) $\sqrt[6]{a(a-1)} = \sqrt[6]{a}\sqrt[6]{(1-a)}$;
4) $\sqrt[12]{a-2}\sqrt[12]{3-a} = \sqrt[12]{(2-a)(a-3)}$?

12.14. При каких значениях a выполняется равенство:

1) $\sqrt[6]{a^{30}} = a^5$;
2) $\sqrt[6]{a^{30}} = -a^5$;
3) $\sqrt[4]{a^4} = \left(\sqrt[4]{a}\right)^4$;
4) $\sqrt[4]{a^4} = \left(\sqrt[4]{-a}\right)^4$?

12.15. При каких значениях a и b выполняется равенство:

1) $\sqrt[4]{ab} = \sqrt[4]{-a} \cdot \sqrt[4]{-b}$;
2) $\sqrt[4]{-ab} = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{-b}$;
3) $\sqrt[5]{ab} = \sqrt[5]{-a} \cdot \sqrt[5]{-b}$?

12.16. При каких значениях x выполняется равенство:

1) $\sqrt[4]{x^2-4} = \sqrt[4]{x-2} \cdot \sqrt[4]{x+2}$;
2) $\sqrt[8]{(x-3)(7-x)} = \sqrt[8]{x-3} \cdot \sqrt[8]{7-x}$?

12.17. Упростите выражение:

1) $\sqrt[8]{256k^8}$, если $k \leqslant 0$;
2) $\sqrt[6]{c^{24}}$;
3) $\sqrt[4]{81x^8y^4}$, если $y \geqslant 0$;
4) $-1{,}2x\sqrt[6]{64x^{30}}$, если $x \leqslant 0$.

12.18. Упростите выражение:

1) $\sqrt[4]{625a^{24}}$;
2) $\sqrt[4]{0{,}0001b^{20}}$, если $b \geqslant 0$;
3) $\sqrt[10]{p^{30}q^{40}}$, если $p \geqslant 0$;
4) $\sqrt[12]{m^{36}n^{60}}$, если $m \leqslant 0$, $n \leqslant 0$.

12.19. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt[4]{-m^9}$;
2) $\sqrt[4]{32m^{18}n^{17}}$;
3) $\sqrt[4]{a^8b^{13}}$, если $a > 0$;
4) $\sqrt[6]{x^6y^7}$, если $x \neq 0$;
5) $\sqrt[4]{a^{15}b^{15}}$;
6) $\sqrt[8]{-a^{25}b^{50}}$.

12.20. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt[4]{32a^6}$, если $a \leqslant 0$;
2) $\sqrt[4]{-625a^5}$;
3) $\sqrt[6]{a^7b^7}$, если $a < 0$, $b < 0$;
4) $\sqrt[6]{a^{20}b^{19}}$, если $a > 0$.

12.21. Внесите множитель под знак корня:

1) $a\sqrt[4]{2}$, если $a \geqslant 0$;
2) $mn\sqrt[4]{\dfrac{1}{m^3n^3}}$;
3) $ab\sqrt[6]{\dfrac{6}{a^3b^2}}$, если $a > 0$, $b < 0$;
4) $ab\sqrt[4]{ab^2}$, если $b \leqslant 0$;
5) $b\sqrt[6]{6}$;
6) $a\sqrt[6]{-a}$.

12.22. Внесите множитель под знак корня:

1) $c\sqrt[8]{3}$, если $c \leqslant 0$;
2) $a\sqrt[6]{a}$;
3) $ab\sqrt[8]{\dfrac{3}{a^4b^5}}$, если $a < 0$;
4) $a\sqrt[4]{-a^3}$.

12.23. Докажите, что значение выражения является целым числом:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1^2}+\sqrt[3]{1\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{999^2}+\sqrt[3]{999\cdot 1000}+\sqrt[3]{1000^2}}.$$

12.24. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt[3]{\sqrt{10}-3}\cdot\sqrt[6]{19+6\sqrt{10}}$; 2) $\sqrt{4+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{6-4\sqrt{2}}$.

12.25. Найдите значение выражения:

1) $\sqrt[6]{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{2\sqrt{6}-1}\cdot\sqrt[4]{25+4\sqrt{6}}$.

12.26. Постройте график функции:

1) $y=2x+\sqrt[6]{x^6}$; 2) $y=\sqrt[4]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x^2}$; 3) $y=\sqrt[6]{x^3}\cdot\sqrt[6]{x^9}$.

12.27. Постройте график функции:

1) $y=\sqrt[8]{x^8}-2x$; 2) $y=\sqrt[4]{-x}\cdot\sqrt[4]{-x^3}$; 3) $y=\dfrac{\sqrt[6]{x^6}}{x}$.

12.28. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x}-1}-\dfrac{4\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}-1}\right)\cdot\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}-1}$;

2) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}+1\right)$;

3) $\dfrac{\sqrt[3]{2a+2\sqrt{a^2-1}}}{\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}}+\dfrac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}+2}}$.

12.29. Докажите тождество:

1) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}+1}-\dfrac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}\right):\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}+1}=\dfrac{\sqrt[6]{x}+1}{x}$;

2) $\dfrac{\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}-\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$;

3) $\dfrac{\sqrt[3]{m+4\sqrt{m-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}+2}}{\sqrt[3]{m-4\sqrt{m-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}-2}}\cdot\dfrac{m-4\sqrt{m-4}}{m-8}=1$.

◆◆◆

12.30. Докажите, что значение выражения является рациональным числом:

1) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}-\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$.

12.31. Докажите, что $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

12.32. Упростите выражение $(\sqrt[32]{2}+1)(\sqrt[16]{2}+1)(\sqrt[8]{2}+1)(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt{2}+1)$.

12.33. Упростите выражение $(\sqrt[64]{a}+1)(\sqrt[32]{a}+1)\ldots(\sqrt{a}+1)$.

12.34. Приведите пример такого многочлена с целыми коэффициентами, что число $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$ является его корнем.

12.35. Докажите, что число $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}$ является иррациональным.

12.36. Докажите равенство

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2+\sqrt{6}}}}}}_{10 \text{ радикалов}} = \sqrt[1024]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[1024]{2-\sqrt{3}}.$$

§ 13 Степень с рациональным показателем и её свойства

Напомним определение степени с натуральным показателем:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}},\ n \in \boldsymbol{N},\ n > 1;$$

$$a^1 = a.$$

Вы знаете, что степень с натуральным показателем обладает такими свойствами:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2) $a^m : a^n = a^{m-n}$, $a \neq 0$, $m > n$;
3) $(a^m)^n = a^{mn}$;
4) $(ab)^n = a^n b^n$;
5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$.

Позже вы ознакомились с определениями степени с нулевым показателем и степени с отрицательным целым показателем:

$a^0 = 1$, $a \neq 0$;

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $a \neq 0$, $n \in \boldsymbol{N}$.

Эти определения очень удачные: при таком подходе все пять свойств степени с натуральным показателем остались справедливыми и для степени с целым показателем.

Введём понятие степени с дробным показателем, то есть степени a^r, показатель которой является рациональным числом вида $r = \dfrac{m}{n}$, где $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$. Желательно сделать это так, чтобы степень с дробным показателем обладала всеми свойствами степени с целым показателем. Подсказкой для такого определения может служить следующий пример.

Обозначим через x искомое значение степени $2^{\frac{2}{3}}$, то есть $x = 2^{\frac{2}{3}}$. Учитывая свойство $(a^m)^n = a^{mn}$, можно записать $x^3 = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 2^2$. Следовательно, x — это кубический корень из числа 2^2, то есть $x = \sqrt[3]{2^2}$. Таким образом, $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$.

Эти соображения подсказывают, что целесообразно принять следующее определение.

Определение

Степенью положительного числа a с рациональным показателем r, представленным в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$, $n > 1$, называют число $\sqrt[n]{a^m}$, то есть

$$\boxed{a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Например, $5^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{5^3}$, $3^{-\frac{1}{5}} = 3^{\frac{-1}{5}} = \sqrt[5]{3^{-1}}$, $0{,}4^{0{,}3} = 0{,}4^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{0{,}4^3}$.

Заметим, что значение степени a^r, где r — рациональное число, не зависит от того, в виде какой дроби представлено число r. Это можно показать, используя равенства $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ и $a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Степень с основанием, равным нулю, определяют только для положительного рационального показателя.

Определение

$0^{\frac{m}{n}} = 0$, где $m \in N$, $n \in N$.

Заметим, что, например, запись $0^{-\frac{1}{2}}$ не имеет смысла.

Подчеркнём, что в определениях не идёт речи о степени $a^{\frac{m}{n}}$ для $a < 0$, например, выражение $(-2)^{\frac{1}{3}}$ осталось неопределённым. Вместе с тем выражение $\sqrt[3]{-2}$ имеет смысл. Возникает естественный вопрос: почему бы не считать, что $\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}}$? Покажем, что такая договорённость привела бы к противоречию:

$$\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}} = (-2)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[6]{4}.$$

Получили, что отрицательное число $\sqrt[3]{-2}$ равно положительному числу $\sqrt[6]{4}$.

Функцию, которую можно задать формулой $y = x^r$, $r \in \mathbf{Q}$, называют **степенной функцией с рациональным показателем.**

Если несократимая дробь $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, является положительным числом, то областью определения функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ является промежуток $[0; +\infty)$; а если эта дробь — отрицательное число, то промежуток $(0; +\infty)$.

Функция $y = x^{\frac{1}{2k}}$, $k \in \mathbf{N}$, ничем не отличается от функции $y = \sqrt[2k]{x}$. Функции $y = x^{\frac{1}{2k+1}}$ и $y = \sqrt[2k+1]{x}$, $k \in \mathbf{N}$, имеют разные области определения. Так, на промежутке $[0; +\infty)$ обе эти функции совпадают, но на промежутке $(-\infty; 0)$ определена только функция $y = \sqrt[2k+1]{x}$.

На рисунке 13.1 изображены графики функций $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$ и $y = x^{\frac{1}{4}}$.

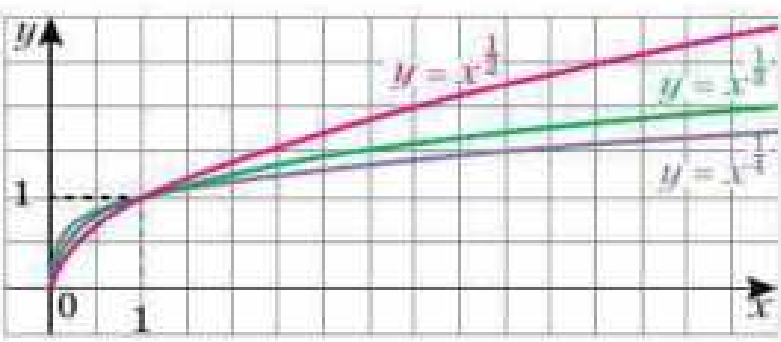


Рис. 13.1

Покажем, что свойства степени с целым показателем остаются справедливыми и для степени с произвольным рациональным показателем.

Теорема 13.1

(произведение степеней)

Для любого $a > 0$ и любых рациональных чисел p и q выполняется равенство

$$\boxed{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$$

Доказательство

Запишем рациональные числа p и q в виде дробей с одинаковыми знаменателями: $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{n}$, где $m \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$. Имеем:

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^k} = \sqrt[n]{a^{m+k}} = a^{\frac{m+k}{n}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{n}} = a^{p+q}. \blacksquare$$

Следствие

Для любого $a > 0$ и любого рационального числа p выполняется равенство

$$\boxed{a^{-p} = \frac{1}{a^p}}$$

Доказательство

Применяя теорему 13.1, запишем: $a^{-p} \cdot a^p = a^{-p+p} = a^0 = 1$. Отсюда $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$. ■

Теорема 13.2

(частное степеней)

Для любого $a > 0$ и любых рациональных чисел p и q выполняется равенство

$$\boxed{a^p : a^q = a^{p-q}}$$

Доказательство

Применяя теорему 13.1, запишем: $a^q \cdot a^{p-q} = a^{q+p-q} = a^p$. Отсюда $a^{p-q} = a^p : a^q$. ■

Теорема 13.3

(степень степени)

Для любого $a > 0$ и любых рациональных чисел p и q выполняется равенство

$$\boxed{(a^p)^q = a^{pq}}$$

Доказательство

Пусть $p = \dfrac{m}{n}$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$, и $q = \dfrac{s}{k}$, $s \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{N}$, $k > 1$. Имеем:

$$(a^p)^q = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{s}{k}} = \sqrt[k]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^s} = \sqrt[k]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^s} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a^{ms}}} = \sqrt[kn]{a^{ms}} = a^{\frac{ms}{kn}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{s}{k}} = a^{pq}. \ ■$$

Теорема 13.4

(степень произведения и степень частного)

Для любых $a > 0$ и $b > 0$ и любого рационального числа p выполняются равенства

$$(ab)^p = a^p b^p$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

Докажите эту теорему самостоятельно.

Пример 1. Постройте график функции $f(x) = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{-3}$.

Решение. Областью определения функции f является множество $(0; +\infty)$. Данную функцию можно задать такими условиями: $f(x) = x$, $D(f) = (0; +\infty)$. График функции изображён на рисунке 13.2. ■

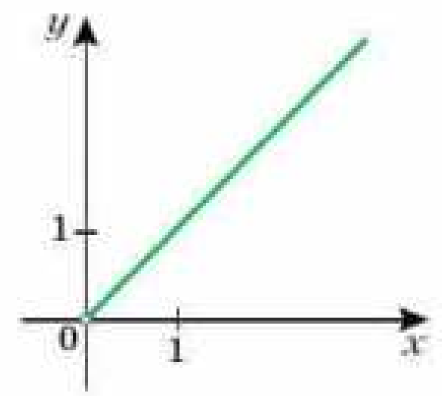


Рис. 13.2

Рассмотрим примеры, в которых выполняются тождественные преобразования выражений, содержащих степени с рациональным показателем.

Пример 2. Сократите дробь: 1) $\dfrac{b^{\frac{5}{6}} + 3b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{2}{3}} - 9c^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\dfrac{32^{\frac{1}{3}} - 16^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}}$.

Решение.

1) Разложив числитель и знаменатель дроби на множители, получаем:

$$\frac{b^{\frac{5}{6}} + 3b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{2}{3}} - 9c^{\frac{1}{2}}} = \frac{b^{\frac{1}{2}}\left(b^{\frac{1}{3}} + 3c^{\frac{1}{4}}\right)}{\left(b^{\frac{1}{3}} - 3c^{\frac{1}{4}}\right)\left(b^{\frac{1}{3}} + 3c^{\frac{1}{4}}\right)} = \frac{b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}} - 3c^{\frac{1}{4}}}.$$

2) Имеем: $\dfrac{32^{\frac{1}{3}} - 16^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{16^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}} - 1\right)}{2^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}} - 1\right)} = \dfrac{16^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \left(\dfrac{16}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = 2.$ ■

?

1. Что называют степенью положительного числа a с показателем $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$?
2. Что называют степенью числа 0 с показателем $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$?
3. Сформулируйте теоремы о свойствах степени с рациональным показателем.
4. Какую функцию называют степенной функцией с рациональным показателем?

Упражнения

13.1. Найдите значение выражения:

1) $4^{\frac{1}{2}}$; 2) $0{,}216^{-\frac{1}{3}}$; 3) $27^{\frac{4}{3}}$; 4) $32^{-0,2}$.

13.2. Чему равно значение выражения:

1) $8^{\frac{1}{3}}$; 2) $10\,000^{\frac{1}{4}}$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$; 4) $0{,}125^{-\frac{2}{3}}$?

13.3. Найдите область определения функции:

1) $y = x^{\frac{5}{6}}$; 2) $y = (x-3)^{2,6}$; 3) $y = (x^2 - 6x - 7)^{-\frac{1}{9}}$.

13.4. Найдите область определения функции:

1) $y = x^{-\frac{2}{3}}$; 2) $y = (x+1)^{-\frac{7}{12}}$; 3) $y = (x^2 - x - 30)^{\frac{4}{15}}$.

13.5. Найдите значение выражения:

1) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-1,5}$; 2) $8^{\frac{1}{2}} : 2^{\frac{1}{2}}$; 3) $36^{0,4} \cdot 6^{1,2}$; 4) $\left(4^{-\frac{1}{8}}\right)^{1,6} \cdot 16^{0,6}$.

13.6. Чему равно значение выражения:

1) $5^{3,4} \cdot 5^{-1,8} \cdot 5^{-2,6}$; 3) $\left(9^{\frac{3}{7}}\right)^{4\frac{2}{3}}$;

2) $(7^{-0,7})^8 : 7^{-7,6}$; 4) $\left(2\frac{6}{7}\right)^{2,5} \cdot 1{,}4^{2,5}$?

13.7. Известно, что a — положительное число. Представьте a в виде: 1) куба; 2) шестой степени; 3) восьмой степени.

13.8. Известно, что b — положительное число. Представьте в виде куба выражение:

1) $b^{\frac{1}{2}}$; 2) $b^{\frac{1}{3}}$; 3) $b^{-1,8}$; 4) $b^{\frac{7}{11}}$.

13.9. Раскройте скобки:

1) $(a^{0,5} - 3b^{0,3})(2a^{0,5} + b^{0,3})$;

2) $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)^2$;

3) $(b^{0,4} + 3)^2 - 6b^{0,4}$;

4) $\left(a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{5}{6}} + a\right)$;

5) $\left(a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)$;

6) $\left(x^{\frac{2}{9}} - 1\right)\left(x^{\frac{4}{9}} + x^{\frac{2}{9}} + 1\right)\left(x^{\frac{2}{3}} + 1\right)$.

13.10. Раскройте скобки:

1) $\left(a^{\frac{1}{3}} - 5b^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} + 5b^{-\frac{1}{4}}\right)$;

2) $\left(b^{\frac{4}{3}} - b^{-\frac{2}{3}}\right)^2$;

3) $\left(x^{\frac{1}{6}} + 2\right)\left(x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{6}} + 4\right)$;

4) $\left(a^{\frac{1}{8}} - 1\right)\left(a^{\frac{1}{4}} + 1\right)\left(a^{\frac{1}{8}} + 1\right)$.

13.11. Сократите дробь:

1) $\dfrac{a-4b}{a^{0,5}+2b^{0,5}}$; 3) $\dfrac{4c^{\frac{2}{3}}-12c^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}}+9d^{\frac{2}{3}}}{2c^{\frac{1}{3}}-3d^{\frac{1}{3}}}$; 5) $\dfrac{a^{\frac{3}{4}}+7a^{\frac{1}{2}}}{a-49a^{\frac{1}{2}}}$;

2) $\dfrac{a-b}{ab^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b}$; 4) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{3}{2}}}$; 6) $\dfrac{30^{\frac{1}{5}}-6^{\frac{1}{5}}}{10^{\frac{1}{5}}-2^{\frac{1}{5}}}$.

13.12. Сократите дробь:

1) $\dfrac{a+2a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+2}$; 3) $\dfrac{x^{3,5}y^{2,5}-x^{2,5}y^{3,5}}{x+2x^{0,5}y^{0,5}+y}$; 5) $\dfrac{m^{\frac{7}{6}}-36m^{\frac{5}{6}}}{m^{\frac{1}{2}}-6m^{\frac{1}{3}}}$;

2) $\dfrac{a-b^2}{a-a^{\frac{1}{2}}b}$; 4) $\dfrac{a-125}{a^{\frac{2}{3}}-25}$; 6) $\dfrac{24^{\frac{1}{4}}-8^{\frac{1}{4}}}{6^{\frac{1}{4}}-2^{\frac{1}{4}}}$.

13.13. При каких значениях a выполняется равенство:

1) $\left((a-2)^{\frac{1}{3}}\right)^3=a-2$; 2) $\left((a-2)^{-\frac{1}{3}}\right)^{-3}=a-2$?

13.14. Постройте график функции:

1) $y=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3$; 2) $y=\left((x-2)^{\frac{1}{4}}\right)^4$; 3) $y=x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{6}}$.

13.15. Вычислите значение выражения:

1) $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(0,81)^{-0,5}$; 3) $\dfrac{5^{\frac{3}{2}}\cdot 8^{\frac{1}{12}}}{9^{\frac{1}{6}}}\cdot\dfrac{8^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{5}{2}}\cdot 9^{\frac{1}{3}}}$;

2) $16^{\frac{1}{8}}\cdot 8^{-\frac{5}{6}}\cdot 4^{1,5}$; 4) $\left(72^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-\frac{4}{3}}:36^{-\frac{1}{6}}$.

13.16. Найдите значение выражения:

1) $\left(343^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\dfrac{1}{49}\right)^{\frac{3}{8}}\right)^{\frac{4}{3}}$; 3) $\dfrac{32^{0,24}\cdot 4^{0,7}}{64^{0,6}\cdot 16^{0,25}}$;

2) $10^{\frac{1}{4}}\cdot 40^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}$; 4) $\dfrac{12^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{2}{3}}\cdot 8^{-\frac{1}{6}}}\cdot\dfrac{3^{\frac{1}{2}}\cdot 7^{\frac{5}{3}}}{8^{\frac{1}{2}}}$.

13.17. Решите уравнение:

1) $x^{-\frac{2}{3}}=0,04$; 2) $(x-2)^{\frac{5}{2}}=32$; 3) $(x^2-2x)^{-\frac{1}{4}}=-1$.

13.18. Решите уравнение:

1) $x^{-1,5}=27$; 2) $(x-1)^{-\frac{2}{5}}=100$; 3) $(x-5)^{\frac{3}{7}}=0$.

13.19. Докажите тождество:

1) $\left(\dfrac{a^{0,5}+2}{a+2a^{0,5}+1}-\dfrac{a^{0,5}-2}{a-1}\right):\dfrac{a^{0,5}}{a^{0,5}+1}=\dfrac{2}{a-1}$;

2) $\dfrac{(a-b)^2}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{a^2-b^2}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b\right)}=2a^{\frac{1}{2}}-2b^{\frac{1}{2}}$.

13.20. Докажите тождество:

1) $\left(\dfrac{m^2+n^2}{m^{\frac{3}{2}}+mn^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{m+n}{m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\dfrac{m}{n}=n^{\frac{1}{2}}-m^{\frac{1}{2}}$;

2) $\left(\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}}{a^{-1}-b^{-1}}-\dfrac{1}{a^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}}\right):\dfrac{a^{-\frac{2}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$.

13.21. Упростите выражение:

1) $\dfrac{a^{\frac{7}{3}}-2a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}}+ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{5}{3}}-a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}-ab^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b}:a^{\frac{1}{3}}$;

2) $\dfrac{\left(x^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{xy}+4y^{\frac{2}{3}}\right)}{\left(\sqrt[3]{x^4}-8y\sqrt[3]{x}\right):\sqrt[3]{xy}}\cdot\left(2-\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}\right)$.

13.22. Упростите выражение $\dfrac{x-y}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}}$.

13.23. Вычислите произведение $x^{1,2}\cdot x^{1,3}\cdot x^{1,4}\cdot x^{1,5}\cdot\ldots\cdot x^{8,8}$, если $x=\sqrt[5]{2}$.

13.24. Вычислите произведение $x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{8}}\cdot\ldots\cdot x^{\frac{1}{64}}$, если $x=2^{-\frac{64}{9}}$.

◆◆◆

13.25. Упростите выражение $(a^{0,125}+b^{0,75})(a^{0,25}+b^{1,5})(a^{0,5}+b^3)(a+b^6)$.

13.26. Упростите выражение $a^{0,2}+a^{0,5}+a^{0,8}+a^{1,1}+\ldots+a^{7,1}$.

13.27. Упростите выражение $b^{12,7}-b^{12,6}+b^{12,5}-b^{12,4}+\ldots+b^{3,3}$.

§ 14 Иррациональные уравнения

Напомним основные сведения о равносильности уравнений.

Определение

Областью определения уравнения $f(x)=g(x)$ называют множество $D(f)\cap D(g)$.

Каждый корень уравнения принадлежит его области определения. Этот факт иллюстрирует диаграмма Эйлера (рис. 14.1).

Определение

Уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ называют равносильными, если множества их корней равны.

Если любой корень уравнения $f_1(x) = g_1(x)$, принадлежащий множеству M, является корнем уравнения $f_2(x) = g_2(x)$, а любой корень уравнения $f_2(x) = g_2(x)$, принадлежащий множеству M, является корнем уравнения $f_1(x) = g_1(x)$, то такие два уравнения называют **равносильными на множестве M**.

Например, уравнения $x^2 - 1 = 0$ и $x + 1 = 0$ равносильны на множестве $(-\infty; 0)$.

Теорема 14.1

Если к обеим частям данного уравнения прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному.

Теорема 14.2

Если обе части уравнения умножить (разделить) на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное данному.

Определение

Если множество решений первого уравнения является подмножеством множества решений второго уравнения, то второе уравнение называют следствием первого уравнения.

На рисунке 14.2 определение уравнения-следствия проиллюстрировано с помощью диаграммы Эйлера.

Рис. 14.1

Рис. 14.2

Заметим, что если два уравнения равносильны, то каждое из них является следствием другого.

Те корни уравнения-следствия, которые не являются корнями данного уравнения, называют **посторонними корнями** данного уравнения.

Если при решении уравнения равносильность была нарушена и произошёл переход к уравнению-следствию, то полученные при этом посторонние корни, как правило, можно выявить с помощью проверки.

Рассмотрим функцию $y = x^3$. Она является возрастающей, а следовательно, обратимой. Поэтому функция $y = x^3$ каждое своё значение принимает только один раз. Иными словами: из равенства $x_1^3 = x_2^3$ следует, что $x_1 = x_2$. А поскольку из равенства $x_1 = x_2$ следует, что $x_1^3 = x_2^3$, то можно утверждать, что *если обе части уравнения возвести в куб, то получим уравнение, равносильное данному*.

Пример 1. Решите уравнение $\sqrt[7]{x^2 - 2} = \sqrt[7]{x}$.

Решение. Возведём обе части данного уравнения в седьмую степень. Получим равносильное уравнение:

$$\left(\sqrt[7]{x^2 - 2}\right)^7 = \left(\sqrt[7]{x}\right)^7.$$

Отсюда

$$x^2 - 2 = x;$$
$$x^2 - x - 2 = 0;$$
$$x_1 = -1,\ x_2 = 2.$$

Ответ: -1; 2. ■

Уравнение, рассмотренное в примере 1, содержит переменную под знаком корня. Такое уравнение называют **иррациональным**.

Вот ещё примеры иррациональных уравнений: $\sqrt{x-3} = 2$; $\sqrt{x} - 2\sqrt[4]{x} + 1 = 0$; $\sqrt{3-x} = \sqrt[3]{2+x}$.

Поскольку функция $y = x^{2k-1}$, $k \in \mathbf{N}$, является обратимой, то рассуждения, использованные при решении примера 1, можно обобщить в виде следующей теоремы.

Теорема 14.3

Если обе части уравнения возвести в нечётную степень, то получим уравнение, равносильное данному.

Доказательство

Покажем, что уравнения

$$f(x) = g(x) \tag{1}$$

и

$$(f(x))^{2k-1} = (g(x))^{2k-1},\ k \in \mathbf{N}, \tag{2}$$

равносильны.

Пусть число α — корень уравнения (1). Тогда имеем верное числовое равенство $f(\alpha) = g(\alpha)$. Отсюда можно записать:

$$(f(\alpha))^{2k-1} = (g(\alpha))^{2k-1}.$$

Это значит, что число α является корнем уравнения (2).

Пусть число β — корень уравнения (2). Тогда получаем, что $(f(\beta))^{2k-1} = (g(\beta))^{2k-1}$. Поскольку функция $y = x^{2k-1}$, $k \in \boldsymbol{N}$, является обратимой, то $f(\beta) = g(\beta)$. Следовательно, число β — корень уравнения (1).

Мы показали, что каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2) и наоборот, каждый корень уравнения (2) является корнем уравнения (1). Это значит, что уравнения (1) и (2) равносильны. ■

При решении примера 1 мы упрощали выражения вида $(\sqrt[n]{f(x)})^n$, где n — нечётное натуральное число. Рассмотрим случай, когда n — чётное натуральное число.

Пример 2. Решите уравнение $(\sqrt{3x+4})^2 = (\sqrt{x-2})^2$. (3)

Решение. Естественно заменить это уравнение таким:

$$3x + 4 = x - 2. \quad (4)$$

Отсюда $x = -3$.

Но проверка показывает, что число -3 не является корнем исходного уравнения. Значит, уравнение (3) не имеет корней. Причина появления постороннего корня заключается в том, что применение формулы $(\sqrt{a})^2 = a$ приводит к расширению области определения уравнения. Поэтому уравнение (4) является следствием уравнения (3).

Ещё одной причиной появления посторонних корней при решении иррациональных уравнений является необратимость функции $y = x^{2k}$, $k \in \boldsymbol{N}$. Это означает, что из равенства $x_1^{2k} = x_2^{2k}$ не обязательно следует, что $x_1 = x_2$. Например, $(-2)^4 = 2^4$, но $-2 \neq 2$. В то же время из равенства $x_1 = x_2$ следует равенство $x_1^{2k} = x_2^{2k}$.

Приведённые рассуждения подсказывают, что справедлива следующая теорема.

Теорема 14.4

При возведении обеих частей уравнения в чётную степень получаем уравнение, являющееся следствием данного.

Воспользовавшись идеей доказательства теоремы 14.3, докажите эту теорему самостоятельно.

Пример 3. Решите уравнение $\sqrt{4+3x} = x$.

Решение. Возводя обе части уравнения в квадрат, получим уравнение, которое является следствием данного:

$$4 + 3x = x^2;$$
$$x^2 - 3x - 4 = 0;$$
$$x_1 = -1,\ x_2 = 4.$$

Проверка показывает, что число -1 — посторонний корень, а число 4 удовлетворяет данному уравнению.

Ответ: 4. ■

Когда идёт речь о проверке как об этапе решения уравнения, невозможно избежать проблемы её технической реализации. Например, число $\frac{-2+6\sqrt{11}}{7}$ является корнем уравнения $\sqrt{2x-5} + \sqrt{x+2} = \sqrt{2x+1}$. Однако, чтобы в этом убедиться, надо выполнить значительную вычислительную работу.

Для подобных ситуаций возможен другой путь решения — метод равносильных преобразований.

Теорема 14.5

Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Воспользовавшись идеей доказательства теоремы 14.3, докажите эту теорему самостоятельно.

Замечание. Уравнение $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ также равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Выбор соответствующей системы, как правило, связан с тем, какое из неравенств, $f(x) \geqslant 0$ или $g(x) \geqslant 0$, решить легче.

Пример 4. Решите уравнение $\sqrt{x^2-3x} = \sqrt{x-1}$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2 - 3x = x - 1, \\ x \geqslant 1. \end{cases}$

Отсюда $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2+\sqrt{3}, \\ x = 2-\sqrt{3}, \end{array}\right. \\ x \geqslant 1; \end{cases}$ $x = 2 + \sqrt{3}$.

Ответ: $2 + \sqrt{3}$. ■

Теорема 14.6

Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Воспользовавшись идеей доказательства теоремы 14.3, докажите эту теорему самостоятельно.

Пример 5. Решите уравнение $\sqrt{x+7} = x - 3$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x + 7 = (x-3)^2, \\ x - 3 \geqslant 0. \end{cases}$

Отсюда $\begin{cases} x^2 - 7x + 2 = 0, \\ x \geqslant 3; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7+\sqrt{41}}{2}, \\ x = \dfrac{7-\sqrt{41}}{2}, \end{array} \right. \\ x \geqslant 3; \end{cases}$ $x = \dfrac{7+\sqrt{41}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{7+\sqrt{41}}{2}$. ■

Теоремы 14.5 и 14.6 можно обобщить, руководствуясь следующим утверждением: если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то из равенства $a^{2k} = b^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, следует, что $a = b$.

Теорема 14.7

Если для любого $x \in M$ выполняются неравенства $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) \geqslant 0$, то уравнения $f(x) = g(x)$ и $(f(x))^{2k} = (g(x))^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, равносильны на множестве M.

Воспользовавшись идеей доказательства теоремы 14.3, докажите эту теорему самостоятельно.

Пример 6. Решите уравнение $\sqrt{2x-3} + \sqrt{6x+1} = 4$.

Решение. Областью определения этого уравнения является множество $M = \left[\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$. На этом множестве обе части данного уравнения принимают неотрицательные значения. Поэтому данное уравнение на множестве M равносильно уравнению

$$(\sqrt{2x-3} + \sqrt{6x+1})^2 = 4^2.$$

Отсюда $2x - 3 + 2\sqrt{2x-3}\sqrt{6x+1} + 6x + 1 = 16$;

$$\sqrt{2x-3}\sqrt{6x+1} = 9 - 4x.$$

Левая часть последнего уравнения на множестве $M = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$ принимает неотрицательные значения. Тогда правая часть, то есть $9 - 4x$, должна также быть неотрицательной. Отсюда $9 - 4x \geqslant 0$; $x \leqslant \frac{9}{4}$. Поэтому на множестве $M_1 = \left[\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right]$ обе части уравнения $\sqrt{2x-3}\sqrt{6x+1} = 9 - 4x$ принимают неотрицательные значения. Следовательно, по теореме 14.7 это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}(2x-3)(6x+1) = (9-4x)^2, \\ \frac{3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{9}{4};\end{cases} \quad \begin{cases}x^2 - 14x + 21 = 0, \\ \frac{3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{9}{4};\end{cases} \quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x = 7 - 2\sqrt{7}, \\ x = 7 + 2\sqrt{7},\end{array}\right. \\ \frac{3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{9}{4};\end{cases}$$

$$x = 7 - 2\sqrt{7}.$$

Ответ: $7 - 2\sqrt{7}$. ■

Пример 7. Решите уравнение $\sqrt{2x-5} + \sqrt{x+2} = \sqrt{2x+1}$.

Решение. Областью определения данного уравнения является множество $M = \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$. Обе части данного уравнения на этом множестве принимают неотрицательные значения. Поэтому данное уравнение на множестве M равносильно уравнению $\left(\sqrt{2x-5} + \sqrt{x+2}\right)^2 = \left(\sqrt{2x+1}\right)^2$. Отсюда $2\sqrt{2x-5}\sqrt{x+2} = 4 - x$.

Воспользовавшись теоремой 14.7, получаем:

$$\begin{cases}4(2x-5)(x+2) = (4-x)^2, \\ \frac{5}{2} \leqslant x \leqslant 4.\end{cases} \quad \text{Отсюда} \quad \begin{cases}7x^2 + 4x - 56 = 0, \\ \frac{5}{2} \leqslant x \leqslant 4;\end{cases} \quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x = \frac{-2-6\sqrt{11}}{7}, \\ x = \frac{-2+6\sqrt{11}}{7},\end{array}\right. \\ \frac{5}{2} \leqslant x \leqslant 4.\end{cases}$$

Ответ: $\frac{-2+6\sqrt{11}}{7}$. ■

Пример 8. Решите уравнение $\sqrt{4x^2+9x+5} - \sqrt{2x^2+x-1} = \sqrt{x^2-1}$.

Решение. Разложим квадратные трёхчлены, стоящие под радикалами, на множители:

$$\sqrt{(x+1)(4x+5)} - \sqrt{(x+1)(2x-1)} = \sqrt{(x-1)(x+1)}.$$

Теперь важно не сделать распространённую ошибку, а именно: применить теорему о корне из произведения в таком виде: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. На самом деле записанная формула справедлива лишь для $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, а если $a \leqslant 0$ и $b \leqslant 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$.

Поскольку областью определения данного уравнения является множество $\left(-\infty; -\frac{5}{4}\right] \cup [1; +\infty) \cup \{-1\}$ (рис. 14.3), то данное уравнение равносильно совокупности двух систем и одного уравнения.

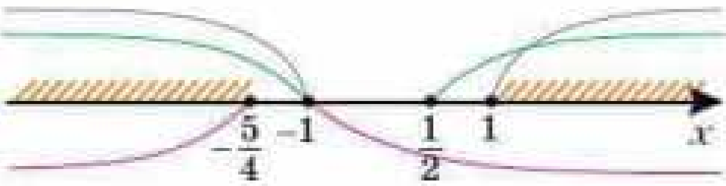


Рис. 14.3

1) $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ \sqrt{x+1}\sqrt{4x+5} - \sqrt{x+1}\sqrt{2x-1} = \sqrt{x-1}\sqrt{x+1}; \end{cases}$

$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ \sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{4x+5}; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ 2\sqrt{2x-1}\sqrt{x-1} = x+7; \end{cases}$

$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ 4(2x-1)(x-1) = x^2 + 14x + 49; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ 7x^2 - 26x - 45 = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = -\frac{9}{7}; \end{array}\right. \end{cases}$ $x = 5$.

2) $\begin{cases} x \leqslant -\frac{5}{4}, \\ \sqrt{-x-1}\sqrt{-4x-5} - \sqrt{-x-1}\sqrt{-2x+1} = \sqrt{-x+1}\sqrt{-x-1}; \end{cases}$

$\begin{cases} x \leqslant -\frac{5}{4}, \\ \sqrt{-2x+1} + \sqrt{-x+1} = \sqrt{-4x-5}; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant -\frac{5}{4}, \\ 2\sqrt{-2x+1}\sqrt{-x+1} = -x-7; \end{cases}$

$\begin{cases} x \leqslant -7, \\ 4(2x-1)(x-1) = x^2 + 14x + 49; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant -7, \\ 7x^2 - 26x - 45 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant -7, \\ \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = -\frac{9}{7}. \end{array}\right. \end{cases}$

Понятно, что эта система решений не имеет.

3) $x + 1 = 0$; $x = -1$.

Ответ: -1; 5. ■

1. Какое уравнение называют иррациональным?
2. Сформулируйте теоремы о равносильных переходах при решении иррациональных уравнений.
3. Как можно выявить посторонние корни уравнения?

Упражнения

14.1. Решите уравнение:

1) $\sqrt[7]{2x-1} = \sqrt[7]{3-x}$;
2) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{1-2x}$;
3) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x-3}$;
4) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x^2+4x-16}$.

14.2. Решите уравнение:

1) $\sqrt[4]{x+3} = \sqrt[4]{2x-3}$;
2) $\sqrt{4x-5} = \sqrt{1-x}$;
3) $\sqrt[5]{x^2-25} = \sqrt[5]{2x+10}$;
4) $\sqrt{x^2-36} = \sqrt{2x-1}$.

14.3. Решите уравнение:

1) $\sqrt{2-x} = x$;
2) $\sqrt{x+1} = x-1$;
3) $\sqrt{3x-2} = x$;
4) $\sqrt{x^2-1} = 3-2x$;
5) $x - \sqrt{2x^2+x-21} = 3$;
6) $x + 2 + \sqrt{8-3x-x^2} = 0$.

14.4. Решите уравнение:

1) $\sqrt{10-3x} = -x$;
2) $\sqrt{2x^2+5x+4} = 2x+2$;
3) $\sqrt{x+2} = 1-x$;
4) $x - \sqrt{3x^2-11x-20} = 5$.

14.5. Решите уравнение:

1) $\sqrt{(2x+3)(x-4)} = x-4$;
2) $\sqrt{(x-2)(2x-5)} + 2 = x$;
3) $(x+2)\sqrt{x^2-x-20} = 6x+12$;
4) $(x+1)\sqrt{x^2-5x+5} = x+1$.

14.6. Решите уравнение:

1) $\sqrt{(3x-1)(4x+3)} = 3x-1$;
2) $(x-1)\sqrt{x^2-3x-3} = 5x-5$.

14.7. Решите уравнение:

1) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}} = x+1$;
2) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}} = x-1$.

14.8. Решите уравнение:

1) $\sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} = 2$;
2) $\sqrt{x-5} - \sqrt{9-x} = 1$;
3) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1$;
4) $2\sqrt{2-x} - \sqrt{7-x} = 1$.

14.9. Решите уравнение:

1) $\sqrt{2x+5} - \sqrt{3x-5} = 2$;
2) $\sqrt{x+11} - \sqrt{2x+1} = 2$.

14.10. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}=3$;
2) $\sqrt{x-7}+\sqrt{x-1}=4$;
3) $\sqrt{3x-1}+\sqrt{x+3}=2$;
4) $\sqrt{13-4x}+\sqrt{x+3}=5$.

14.11. Решите уравнение:

1) $\sqrt{4-x}+\sqrt{x+5}=3$;
2) $\sqrt{5x+1}+\sqrt{7-x}=6$.

◆ ◆ ◆

14.12. Решите уравнение:

1) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$;
2) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2}=\sqrt{x-1}$;
3) $2\sqrt{3x-1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{x-9}$;
4) $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$.

14.13. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3x+7}=\sqrt{8-x}$;
2) $\sqrt{6x-11}-\sqrt{x-2}=\sqrt{x+3}$.

14.14. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}=6$;
2) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$;
3) $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}=4$.

14.15. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=6$;
2) $\sqrt{x+6+2\sqrt{x+5}}-\sqrt{x+6-2\sqrt{x+5}}=2$.

14.16. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^2+2x-8}=\sqrt{x^2-6x+8}$;
2) $\sqrt{2x^2+5x+2}-\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{3x+6}$.

14.17. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-6x+8}=\sqrt{x^2-11x+18}$;
2) $\sqrt{x^2-3x-10}+\sqrt{x^2+3x+2}=\sqrt{x^2+8x+12}$.

14.18. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=a-x$.

14.19. Для каждого значения параметра a решите уравнение $2\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}=a-x$.

14.20. При каких значениях параметра a уравнение $ax - 1 = \sqrt{8x - x^2 - 15}$ имеет единственное решение?

14.21. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{4x - x^2 - 3} = x - a$ имеет единственное решение?

§ 15 Различные приёмы решения иррациональных уравнений и их систем

В предыдущих параграфах вы ознакомились с методами решения иррациональных уравнений, основанными на возведении обеих частей уравнения в одну и ту же степень.

Расширим арсенал приёмов решения иррациональных уравнений.

В первую очередь обратимся к методу замены переменной.

Пример 1. Решите уравнение $x^2 + 3x - 18 + 4\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 0$.

Решение. Пусть $\sqrt{x^2 + 3x - 6} = t$. Тогда $x^2 + 3x - 18 = t^2 - 12$ и данное уравнение принимает вид $t^2 - 12 + 4t = 0$. Отсюда $\left[\begin{array}{l} t = -6, \\ t = 2. \end{array}\right.$

Так как $t \geqslant 0$, то подходит только $t = 2$. Следовательно, данное уравнение равносильно такому: $\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 2$. Отсюда $x^2 + 3x - 6 = 4$; $x = -5$ или $x = 2$.

Ответ: -5; 2. ■

Пример 2. Решите уравнение $\sqrt{x + 4} + \sqrt{x - 4} = 2x + 2\sqrt{x^2 - 16} - 12$.

Решение. Пусть $\sqrt{x + 4} + \sqrt{x - 4} = t$. Тогда, возводя в квадрат обе части последнего равенства, получим:

$$2x + 2\sqrt{x^2 - 16} = t^2.$$

Теперь данное уравнение можно переписать так: $t = t^2 - 12$. Отсюда $t = 4$ или $t = -3$.

Очевидно, что уравнение $\sqrt{x + 4} + \sqrt{x - 4} = -3$ не имеет решений. Следовательно, исходное уравнение равносильно такому: $\sqrt{x + 4} + \sqrt{x - 4} = 4$.

Далее: $\begin{cases} x \geqslant 4, \\ 2x + 2\sqrt{x^2 - 16} = 16; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 4, \\ \sqrt{x^2 - 16} = 8 - x; \end{cases}$ $\begin{cases} 4 \leqslant x \leqslant 8, \\ x^2 - 16 = 64 - 16x + x^2; \end{cases}$ $x = 5$.

Ответ: 5. ■

Пример 3. Решите уравнение $2(x+1) - x\sqrt{x+1} - x^2 = 0$.

Решение. Поскольку число 0 не является корнем данного уравнения, то уравнение $\frac{2(x+1)}{x^2} - \frac{\sqrt{x+1}}{x} - 1 = 0$ равносильно данному. Пусть $\frac{\sqrt{x+1}}{x} = t$, тогда $2t^2 - t - 1 = 0$. Отсюда $t = 1$ или $t = -\frac{1}{2}$. Имеем:

$$\left[\begin{aligned} &\frac{\sqrt{x+1}}{x} = 1, \\ &\frac{\sqrt{x+1}}{x} = -\frac{1}{2}; \end{aligned}\right. \quad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x > 0, \\ x+1 = x^2, \end{cases} \\ &\begin{cases} x < 0, \\ 4x+4 = x^2; \end{cases} \end{aligned}\right. \quad \left[\begin{aligned} &x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \\ &x = 2 - 2\sqrt{2}. \end{aligned}\right.$$

Ответ: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $2 - 2\sqrt{2}$. ■

Метод замены переменных эффективен и для решения систем иррациональных уравнений.

Пример 4. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{xy+22} = 5, \\ \sqrt[4]{x+y} + \sqrt[4]{xy+22} = 3. \end{cases}$

Решение. Пусть $\sqrt[4]{x+y} = a$, $\sqrt[4]{xy+22} = b$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$. Тогда данная система принимает вид $\begin{cases} a^2 + b^2 = 5, \\ a + b = 3. \end{cases}$ Далее имеем:

$$\begin{cases} (a+b)^2 - 2ab = 5, \\ a+b = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} ab = 2, \\ a+b = 3. \end{cases} \quad \text{Отсюда} \begin{cases} a = 1, \\ b = 2 \end{cases} \text{или} \begin{cases} a = 2, \\ b = 1. \end{cases}$$

Следовательно, данная система равносильна совокупности двух систем

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} \sqrt[4]{x+y} = 1, \\ \sqrt[4]{xy+22} = 2, \end{cases} \\ &\begin{cases} \sqrt[4]{x+y} = 2, \\ \sqrt[4]{xy+22} = 1; \end{cases} \end{aligned}\right. \quad \text{отсюда} \quad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x+y = 1, \\ xy = -6, \end{cases} \\ &\begin{cases} x+y = 16, \\ xy = -21. \end{cases} \end{aligned}\right.$$

Решив последние две системы, получаем ответ.

Ответ: $(3; -2)$, $(-2; 3)$, $(8+\sqrt{85}; 8-\sqrt{85})$, $(8-\sqrt{85}; 8+\sqrt{85})$. ■

Пример 5. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} - \sqrt[3]{(7+x)(2-x)} = 3.$$

Решение. Пусть $\sqrt[3]{2-x} = a$, $\sqrt[3]{7+x} = b$. Тогда

$$\begin{cases} a^2+b^2-ab=3, \\ a^3+b^3=9; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+b^2-ab=3, \\ (a+b)(a^2+b^2-ab)=9; \end{cases} \quad \begin{cases} (a+b)^2-3ab=3, \\ a+b=3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab=2, \\ a+b=3; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1, \\ b=2, \end{cases} \\ \begin{cases} a=2, \\ b=1. \end{cases} \end{array}\right.$$ Теперь можно записать $$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt[3]{2-x}=1, \\ \sqrt[3]{7+x}=2, \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{2-x}=2, \\ \sqrt[3]{7+x}=1; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-6. \end{array}\right.$$

Ответ: 1; –6. ■

Пример 6. Решите уравнение $(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt{1+x}+2x-5)=x$.

Решение. Умножим обе части уравнения на выражение $\sqrt{1+x}-1$. Получим уравнение-следствие:

$$x(\sqrt{1+x}+2x-5)=x(\sqrt{1+x}-1).$$

Это уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ \sqrt{1+x}+2x-5=\sqrt{1+x}-1. \end{array}\right.$$

Решим второе уравнение совокупности. Его следствием будет уравнение $2x-5=-1$. Отсюда $x=2$.

Осталось выполнить проверку. Легко убедиться, что число 2 является корнем исходного уравнения, а число 0 — нет.

Ответ: 2. ■

Упражнения

15.1. Решите уравнение, используя метод замены переменной:

1) $2\sqrt{x+1}-5=\dfrac{3}{\sqrt{x+1}}$;

2) $x^2-x+9+\sqrt{x^2-x+9}=12$;

3) $\sqrt{\dfrac{x+5}{x-1}}+7\sqrt{\dfrac{x-1}{x+5}}=8$;

4) $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4$.

15.2. Решите уравнение, используя метод замены переменной:

1) $\sqrt{x+5}-3\sqrt[4]{x+5}+2=0$;

2) $\sqrt[6]{9-6x+x^2}+2\sqrt[6]{3-x}-8=0$;

3) $x^2-x+\sqrt{x^2-x+4}=2$;

4) $\sqrt{\dfrac{3x+2}{2x-3}}+\sqrt{\dfrac{2x-3}{3x+2}}=2{,}5$.

15.3. Решите уравнение, используя метод замены переменной:

1) $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$;

2) $\sqrt{3x^2-9x-26}=12+3x-x^2$;

3) $2x^2+6x-3\sqrt{x^2+3x-3}=5$;

4) $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}+\sqrt[5]{x\sqrt{x}}=72$.

15.4. Решите уравнение, используя метод замены переменной:

1) $x^2 - 4x - 3\sqrt{x^2 - 4x + 20} + 10 = 0$;

2) $2\sqrt{x^2 - 3x + 11} = 4 + 3x - x^2$;

3) $\sqrt{2x^2 - 6x + 40} = x^2 - 3x + 8$;

4) $5x^2 + 10x + \sqrt{x^2 + 2x - 15} = 123$.

15.5. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ x + y + 4\sqrt{xy} = 37; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ xy = 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt[4]{x + y} + \sqrt[4]{x - y} = 4, \\ \sqrt{x + y} - \sqrt{x - y} = 8; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{4 - x + y} + \sqrt{9 - 2x + y} = 7, \\ 2y - 3x = 12. \end{cases}$

15.6. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 2, \\ xy = 27; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{5}{2}, \\ x + y = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt[3]{x + 2y} + \sqrt[3]{x - y + 2} = 3, \\ 2x + y = 7; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x - 2y}{2x}} + \sqrt{\dfrac{2x}{3x - 2y}} = 2, \\ x^2 - 8y^2 = 18 - 18y. \end{cases}$

◆ ◆ ◆

15.7. Решите уравнение $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 3} + 2\sqrt{(x - 1)(x + 3)} = 4 - 2x$.

15.8. Решите уравнение $x + \sqrt{(x + 6)(x - 2)} = 2 + \sqrt{x + 6} + \sqrt{x - 2}$.

15.9. Решите уравнение $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x + 1} = 3x + 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3} - 16$.

15.10. Решите уравнение $\dfrac{x^2}{\sqrt{2x + 5}} + \sqrt{2x + 5} = 2x$.

15.11. Решите уравнение $4x^2 + 12x\sqrt{1 + x} = 27(1 + x)$.

15.12. Решите уравнение $6x^2 - 5x\sqrt{x + 3} + x + 3 = 0$.

15.13. Решите уравнение $\sqrt[3]{(x + 3)^2} + \sqrt[3]{(6 - x)^2} - \sqrt[3]{(x + 3)(6 - x)} = 3$.

15.14. Решите уравнение $\sqrt[3]{(x + 4)^2} + \sqrt[3]{(x - 5)^2} + \sqrt[3]{(x + 4)(x - 5)} = 3$.

15.15. Решите уравнение $\sqrt[4]{x + 8} - \sqrt[4]{x - 8} = 2$.

15.16. Решите уравнение $\sqrt[4]{18 + 5x} + \sqrt[4]{64 - 5x} = 4$.

15.17. Решите уравнение $\sqrt[3]{x - 2} + \sqrt{x - 1} = 5$.

15.18. Решите уравнение $\sqrt[3]{2 - x} = 1 - \sqrt{x - 1}$.

15.19. Решите уравнение $\sqrt{2-\sqrt{2-x}}=x$.

15.20. Решите уравнение $\sqrt{6-\sqrt{6-x}}=x$.

15.21. Решите уравнение:

1) $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x$;

2) $(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+10}-4)=x$.

15.22. Решите уравнение $\sqrt{x^2+3x-2}+\sqrt{x^2-x+1}=4x-3$.

§ 16 Иррациональные неравенства

Напомним основные сведения о равносильности неравенств.

Определение

Два неравенства называют равносильными, если множества их решений равны.

Решая уравнение методом равносильных переходов, мы заменяли его другим, более простым уравнением, равносильным данному. По аналогичной схеме решают и неравенства, используя такие теоремы.

Теорема 16.1

Если к обеим частям неравенства прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получим неравенство, равносильное данному.

Теорема 16.2

Если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же положительное число, то получим неравенство, равносильное данному.

Теорема 16.3

Если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Определение

Если множество решений первого неравенства является подмножеством множества решений второго неравенства, то второе неравенство называют следствием первого неравенства.

Рассмотрим теоремы, с помощью которых решают основные типы иррациональных неравенств. Доказательства этих теорем аналогичны доказательству теоремы 14.3.

Теорема 16.4

Неравенство вида $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Пример 1. Решите неравенство $\sqrt{x^2 - 3x + 1} \geqslant \sqrt{3x - 4}$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 1 \geqslant 3x - 4, \\ 3x - 4 \geqslant 0. \end{cases} \quad \text{Отсюда} \quad \begin{cases} x^2 - 6x + 5 \geqslant 0, \\ x \geqslant \dfrac{4}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geqslant 5, \\ x \leqslant 1, \end{array}\right. \\ x \geqslant \dfrac{4}{3}; \end{cases} \quad x \geqslant 5.$$

Ответ: $[5; +\infty)$. ■

Теорема 16.5

Неравенство вида $\sqrt{f(x)} < g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) < (g(x))^2, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Пример 2. Решите неравенство $\sqrt{2x^2 - 3x - 5} < x - 1$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 < (x-1)^2, \\ x - 1 > 0, \\ 2x^2 - 3x - 5 \geqslant 0. \end{cases} \quad \text{Отсюда} \quad \begin{cases} -2 < x < 3, \\ x > 1, \\ x \leqslant -1 \text{ или } x \geqslant 2{,}5. \end{cases}$$

Решение этой системы проиллюстрировано на рисунке 16.1. Получаем $2{,}5 \leqslant x < 3$.

Ответ: $[2{,}5; 3)$. ■

Рис. 16.1

Теорема 16.6

Неравенство вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x) < 0,\\ f(x) \geqslant 0,\end{cases}\\ \begin{cases}g(x) \geqslant 0,\\ f(x) > (g(x))^2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Пример 3. Решите неравенство $\sqrt{x^2 + 7x + 12} > 6 - x$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

1) $\begin{cases}6 - x < 0,\\ x^2 + 7x + 12 \geqslant 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x > 6,\\ \left[\begin{array}{l}x \leqslant -4,\\ x \geqslant -3;\end{array}\right.\end{cases}$ $x > 6;$

2) $\begin{cases}6 - x \geqslant 0,\\ x^2 + 7x + 12 > (6 - x)^2;\end{cases}$ $\begin{cases}x \leqslant 6,\\ x > \dfrac{24}{19};\end{cases}$ $\dfrac{24}{19} < x \leqslant 6.$

Ответ: $\left(\dfrac{24}{19}; +\infty\right)$. ■

Пример 4. Решите неравенство $(x - 3)\sqrt{x^2 + 4} \leqslant x^2 - 9$.

Решение. Перепишем данное неравенство в таком виде:

$$(x - 3)\left(\sqrt{x^2 + 4} - x - 3\right) \leqslant 0.$$

Это неравенство равносильно совокупности двух систем.

1) $\begin{cases}x - 3 \geqslant 0,\\ \sqrt{x^2 + 4} \leqslant x + 3;\end{cases}$ $\begin{cases}x \geqslant 3,\\ x^2 + 4 \leqslant x^2 + 6x + 9;\end{cases}$ $\begin{cases}x \geqslant 3,\\ x \geqslant -\dfrac{5}{6};\end{cases}$ $x \geqslant 3.$

2) $\begin{cases}x - 3 \leqslant 0,\\ \sqrt{x^2 + 4} \geqslant x + 3.\end{cases}$ Второе неравенство системы равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}x + 3 < 0,\\ \begin{cases}x + 3 \geqslant 0,\\ x^2 + 4 \geqslant (x + 3)^2.\end{cases}\end{array}\right.$ Отсюда $\left[\begin{array}{l}x < -3,\\ -3 \leqslant x \leqslant -\dfrac{5}{6};\end{array}\right.$ $x \leqslant -\dfrac{5}{6}$. Тогда имеем: $\begin{cases}x \leqslant 3,\\ x \leqslant -\dfrac{5}{6};\end{cases}$ $x \leqslant -\dfrac{5}{6}$.

Ответ: $\left(-\infty; -\dfrac{5}{6}\right] \cup [3; +\infty)$. ■

Неравенство из примера 4 можно решить иначе, используя метод интервалов. Действительно, решив уравнение $(x-3)\left(\sqrt{x^2+4}-x-3\right)=0$, получаем два корня: $x=3$, $x=-\frac{5}{6}$. Решение данного неравенства проиллюстрировано на рисунке 16.2.

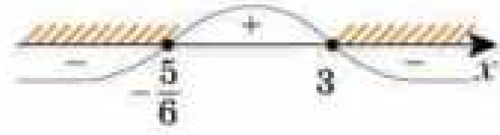


Рис. 16.2

При решении иррациональных неравенств можно пользоваться более общей теоремой.

Теорема 16.7

Если для любого $x \in M$ выполняются неравенства $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) \geqslant 0$, то неравенства $f(x) > g(x)$ и $(f(x))^{2k} > (g(x))^{2k}$, $k \in N$, равносильны на множестве M.

Пример 5. Решите неравенство $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3} \leqslant 2\sqrt{x}$.

Решение. Обе части данного неравенства принимают неотрицательные значения на множестве $M=[3;+\infty)$, являющемся областью определения этого неравенства. Поэтому данное неравенство на множестве M равносильно неравенству

$$\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}\right)^2 \leqslant \left(2\sqrt{x}\right)^2.$$

Отсюда $2\sqrt{2x+1}\sqrt{x-3} \leqslant x+2$.

На множестве $M=[3;+\infty)$ обе части последнего неравенства принимают неотрицательные значения. Поэтому по теореме 16.7 получаем:

$$\begin{cases} 4(2x+1)(x-3) \leqslant (x+2)^2, \\ x \geqslant 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 7x^2-24x-16 \leqslant 0, \\ x \geqslant 3; \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{4}{7} \leqslant x \leqslant 4, \\ x \geqslant 3; \end{cases} \quad 3 \leqslant x \leqslant 4.$$

Ответ: $[3; 4]$. ■

Сформулируйте теоремы о равносильных переходах при решении иррациональных уравнений.

Упражнения

16.1. Решите неравенство:

1) $\sqrt{x} < \sqrt{x+1}$;

2) $\sqrt{x^2-3x+1} > \sqrt{2x-3}$;

3) $\sqrt{8-5x} \geqslant \sqrt{x^2-16}$;

4) $\sqrt{x^2-3x+2} < \sqrt{2x^2-3x+1}$.

16.2. Решите неравенство:

1) $\sqrt{2x^2+6x-3} \geqslant \sqrt{x^2+4x}$;

2) $\sqrt{x^2+3x-10} < \sqrt{x-2}$.

16.3. Решите неравенство:

1) $x > \sqrt{24-5x}$;

2) $\sqrt{2x+7} \leqslant x+2$;

3) $3-x > 3\sqrt{1-x^2}$;

4) $\sqrt{7x-x^2-6} < 2x+3$.

16.4. Решите неравенство:

1) $\sqrt{9x-20} < x$;

2) $\sqrt{x+61} < x+5$;

3) $2\sqrt{4-x^2} \leqslant x+4$;

4) $\sqrt{x^2+4x-5} < x-3$.

16.5. Решите неравенство:

1) $\sqrt{x+7} \geqslant x+1$;

2) $\sqrt{x^2-2x} \geqslant 4-x$;

3) $\sqrt{x^2+x-2} > x$;

4) $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$.

16.6. Решите неравенство:

1) $\sqrt{x+2} > x$;

2) $\sqrt{2x+14} > x+3$;

3) $\sqrt{x^2-5x-24} \geqslant x+2$;

4) $\sqrt{x^2+4x-5} > x-3$.

16.7. Решите неравенство:

1) $(x+10)\sqrt{x-4} \leqslant 0$;

2) $(x+2)\sqrt{(4-x)(5-x)} \geqslant 0$.

16.8. Решите неравенство:

1) $(x-3)\sqrt{x^2+x-2} \geqslant 0$;

2) $(x^2-9)\sqrt{16-x^2} \geqslant 0$.

16.9. Решите неравенство:

1) $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x-2} < 1$;

2) $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3$;

3) $\dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \leqslant \dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}$;

4) $\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}-3x+16}{6-x} > 1$.

16.10. Решите неравенство:

1) $(x+1)\sqrt{x^2+1} > x^2-1$;

2) $\dfrac{\sqrt{x+20}}{x}-1 < 0$;

3) $\dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{2x-7} \leqslant \dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{x-5}$;

4) $\dfrac{\sqrt{x^2+x-6}+3x+13}{x+5} \leqslant 1$.

16.11. Решите неравенство:

1) $3\sqrt{x}-\sqrt{x+3} > 1$;

2) $\sqrt{x+3} < \sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$.

16.12. Решите неравенство:

1) $\sqrt{x-6}-\sqrt{x+10}\leqslant 1$;

2) $2\sqrt{x}+\sqrt{5-x}>\sqrt{x+21}$.

16.13. Решите неравенство $\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{x^3+x+6}\geqslant 4$.

16.14. Решите неравенство $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x^3+8}<4$.

16.15. При каких значениях параметра a множеством решений неравенства $\sqrt{1-(x+2a)^2}\geqslant \frac{4}{3}x$ является промежуток длиной $\frac{9}{5}$?

16.16. При каких значениях параметра a множеством решений неравенства $\sqrt{1-x^2}\geqslant \frac{4}{3}(x-a)$ является промежуток длиной $\frac{9}{5}$?

глава

3 Тригонометрические функции

- Изучая эту главу, вы расширите свои знания о тригонометрических функциях и их свойствах, узнаете, что такое радианная мера угла, какие функции называют периодическими.
- Ознакомитесь с формулами, связывающими различные тригонометрические функции, научитесь применять их для выполнения вычислений, упрощения выражений, доказательства тождеств.

§ 17 Радианная мера угла

До сих пор для измерения углов вы использовали градусы или части градуса — минуты и секунды.

Во многих случаях удобно пользоваться другой единицей измерения углов. Её называют **радианом.**

Определение

Углом в один радиан называют центральный угол окружности, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности.

На рисунке 17.1 изображён центральный угол AOB, опирающийся на дугу AB, длина которой равна радиусу окружности. Величина угла AOB равна одному радиану. Пишут: $\angle AOB = 1$ рад. Также говорят, что радианная мера дуги AB равна одному радиану. Пишут: $\cup AB = 1$ рад.

Радианная мера угла (дуги) не зависит от радиуса окружности. Действительно, рассмотрим две окружности с общим центром O и радиусами R и r ($R > r$) (рис. 17.2). Сектор AOB гомотетичен сектору A_1OB_1 с цен-

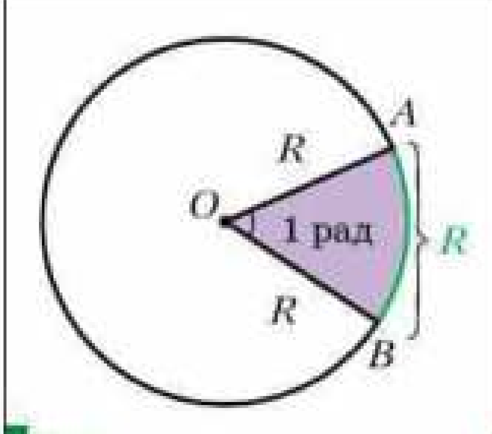


Рис. 17.1

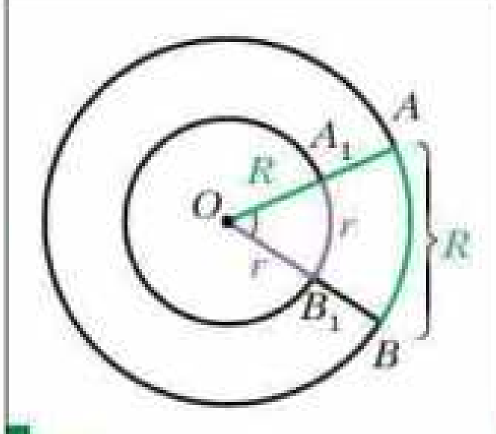


Рис. 17.2

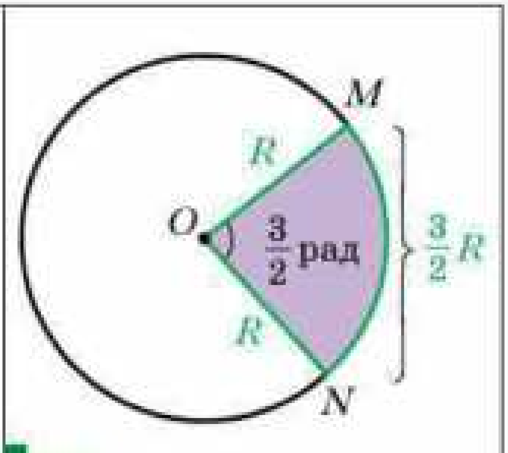


Рис. 17.3

тром O и коэффициентом $\frac{R}{r}$. Тогда, если длина дуги AB равна радиусу R, то длина дуги A_1B_1 равна радиусу r.

На рисунке 17.3 изображены окружность радиуса R и дуга MN, длина которой равна $\frac{3}{2}R$. Тогда радианная мера угла MON (дуги MN) равна $\frac{3}{2}$ рад. Вообще, если центральный угол окружности радиуса R опирается на дугу, длина которой равна αR, то говорят, что **радианная мера центрального угла** равна α рад.

Длина полуокружности равна πR. Следовательно, радианная мера полуокружности равна π рад. Градусная мера полуокружности составляет $180°$.

Сказанное позволяет установить связь между радианной и градусной мерами, а именно:

$$\pi \text{ рад} = 180°. \qquad (1)$$

Отсюда

$$\boxed{1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}}$$

Разделив 180 на 3,14 (напомним, что $\pi \approx 3{,}14$), можно установить: $1 \text{ рад} \approx 57°$.

Равенство (1) позволяет также записать, что

$$\boxed{1° = \frac{\pi}{180} \text{ рад}} \qquad (2)$$

Из этой формулы легко установить, что, например, $15° = 15 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{\pi}{12} \text{ рад}$, $90° = 90 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{\pi}{2} \text{ рад}$, $135° = 135 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{3\pi}{4} \text{ рад}$.

Обычно при записи радианной меры угла обозначение «рад» опускают. Например, пишут $135° = \frac{3\pi}{4}$.

В таблице приведены градусные и радианные меры часто встречающихся углов:

Градусная мера угла	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
Радианная мера угла	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Используя радианную меру угла, можно получить удобную формулу для вычисления длины дуги окружности. Поскольку центральный угол в 1 рад опирается на дугу, длина которой равна радиусу R, то угол в α рад опирается на дугу, длина которой равна αR. Если длину дуги, содержащей α рад, обозначить l, то можно записать

$$\boxed{l = \alpha R}$$

На координатной плоскости рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Такую окружность называют **единичной окружностью**.

Пусть точка P, начиная движение от точки $P_0(1;\ 0)$, перемещается по единичной окружности против часовой стрелки. В некоторый момент времени она займёт положение, при котором $\angle P_0OP = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$ (рис. 17.4).

Будем говорить, что точка P получена в результате **поворота точки P_0 вокруг начала координат** на угол $\frac{2\pi}{3}$ (на угол 120°). Пишут: $P = R_O^{\frac{2\pi}{3}}(P_0)$.

Пусть теперь точка P переместилась по единичной окружности по часовой стрелке и заняла положение, при котором $\angle POP_0 = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$ (рис. 17.5). Будем говорить, что точка P получена в результате поворота точки P_0 вокруг начала координат на угол $-\frac{2\pi}{3}$ (на угол -120°). Пишут: $P = R_O^{-\frac{2\pi}{3}}(P_0)$.

Вообще, когда рассматривают движение точки по окружности против часовой стрелки (см. рис. 17.4), то угол поворота считают положительным, а по часовой стрелке (см. рис. 17.5) — отрицательным.

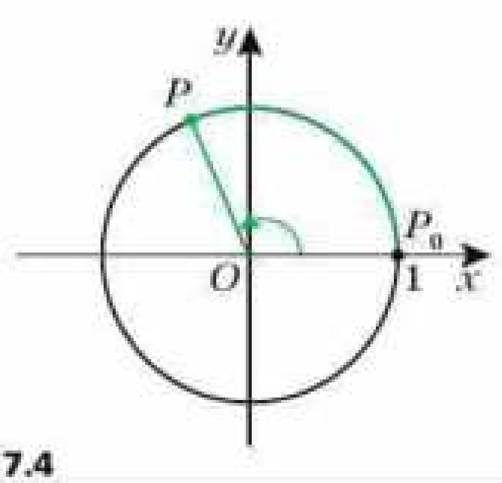


Рис. 17.4

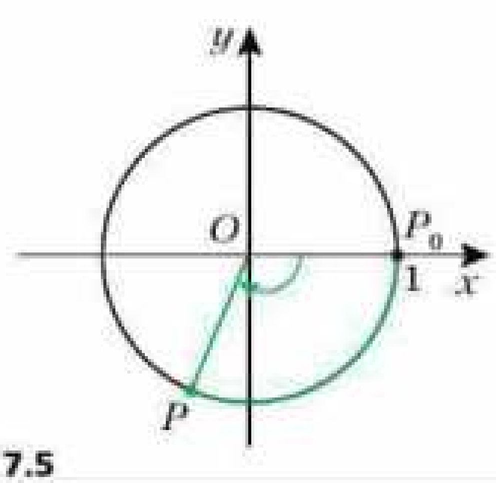


Рис. 17.5

Рассмотрим ещё несколько примеров. Обратимся к рисунку 17.6. Можно сказать, что точка A получена в результате поворота точки P_0 вокруг начала координат на угол $\frac{\pi}{2}$ (на угол 90°) или на угол $-\frac{3\pi}{2}$ (на угол −270°), то есть $A = R_O^{\frac{\pi}{2}}(P_0)$, $A = R_O^{-\frac{3\pi}{2}}(P_0)$. Точка B получена в результате поворота точки P_0 на угол π (на угол 180°) или на угол $-\pi$ (на угол −180°), то есть $B = R_O^{\pi}(P_0)$, $B = R_O^{-\pi}(P_0)$. Точка C получена в результате поворота точки P_0 на угол $\frac{3\pi}{2}$ (на угол 270°) или на угол $-\frac{\pi}{2}$ (на угол −90°), то есть $C = R_O^{\frac{3\pi}{2}}(P_0)$, $C = R_O^{-\frac{\pi}{2}}(P_0)$.

Если точка P, двигаясь по единичной окружности, сделает полный оборот, то можно говорить, что угол поворота равен 2π (то есть 360°) или -2π (то есть −360°).

Если точка P сделает полтора оборота против часовой стрелки, то естественно считать, что угол поворота равен 3π (то есть 540°), если по часовой стрелке — то -3π (то есть −540°).

Величина угла поворота как в радианах, так и в градусах может выражаться любым действительным числом.

Угол поворота однозначно определяет положение точки P на единичной окружности. Однако любому положению точки P на окружности соответствует бесконечно много углов поворота. Например, на рисунке 17.7 точке P соответствуют такие углы поворота: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}+2\pi$, $\frac{\pi}{4}+4\pi$, $\frac{\pi}{4}+6\pi$ и т. д., а также $\frac{\pi}{4}-2\pi$, $\frac{\pi}{4}-4\pi$, $\frac{\pi}{4}-6\pi$ и т. д.

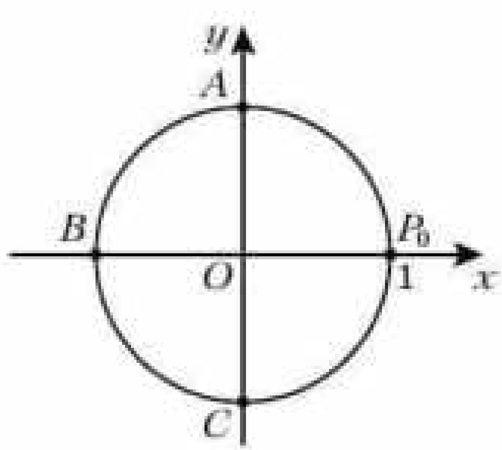


Рис. 17.6

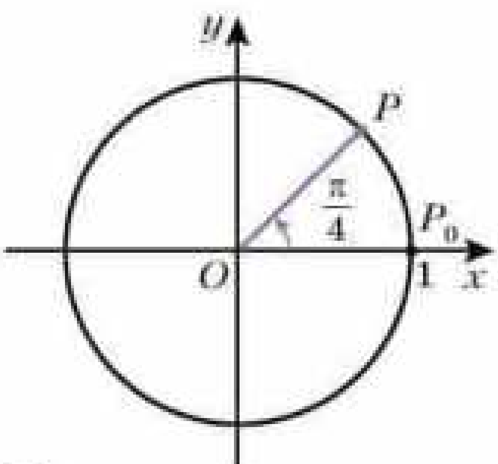


Рис. 17.7

Каждому действительному числу α поставим в соответствие точку P единичной окружности такую, что $P = R_O^{\alpha}(P_0)$. Тем самым мы задали отображение множества действительных чисел на множество точек единичной окружности. Заметим, что это отображение не является взаимно однозначным: каждой точке единичной окружности соответствует бесконечно много действительных чисел. Например, на рисунке 17.7 точке P соответствуют все действительные числа вида $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Заметим, что множество чисел вида $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, можно задать и иначе. Например: $\frac{9\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, или $-\frac{7\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

?

1. Что называют углом в один радиан?
2. Чему равна длина дуги окружности радиуса R, содержащей α рад?
3. Каким числом может выражаться угол поворота?
4. Сколько точек определяет на единичной окружности угол поворота?
5. Сколько углов поворота соответствуют положению точки на единичной окружности?

Упражнения

17.1. Найдите радианную меру угла, равного:

1) 25°; 3) 100°; 5) 210°;
2) 40°; 4) 160°; 6) 300°.

17.2. Найдите градусную меру угла, радианная мера которого равна:

1) $\frac{\pi}{10}$; 3) $\frac{\pi}{9}$; 5) 3π;
2) $\frac{2\pi}{5}$; 4) $1{,}2\pi$; 6) $2{,}5\pi$.

17.3. Вычислите длину дуги окружности, если известны её радианная мера α и радиус R окружности:

1) $\alpha = 3$, $R = 5$ см; 3) $\alpha = 0{,}4\pi$, $R = 2$ см.
2) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $R = 6$ см;

17.4. Сравните величины углов, заданных в радианах:

1) $\frac{\pi}{2}$ и $1{,}5$; 2) $-\frac{\pi}{2}$ и -2; 3) $\frac{\pi}{3}$ и 1.

17.5. Сравните величины углов, заданных в радианах:

1) $\frac{\pi}{4}$ и 1; 2) $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{\pi}{6}$.

17.6. Отметьте на единичной окружности точку, которую получим при повороте точки $P_0(1; 0)$ на угол:

1) $\frac{5\pi}{3}$; 3) -120°; 5) -480°;
2) -45°; 4) 450°; 6) $-\frac{7\pi}{3}$.

17.7. Отметьте на единичной окружности точку, которую получим при повороте точки $P_0(1;\ 0)$ на угол:

1) $225°$; 3) $\frac{2\pi}{3}$; 5) 6π;

2) $-315°$; 4) $-\frac{5\pi}{6}$; 6) $-720°$.

17.8. В какой четверти находится точка единичной окружности, полученная при повороте точки $P_0(1;\ 0)$ на угол:

1) $400°$; 3) $-470°$; 5) $-1{,}8\pi$;

2) $750°$; 4) $\frac{-7\pi}{6}$; 6) 6?

17.9. В какой четверти находится точка единичной окружности, полученная при повороте точки $P_0(1;\ 0)$ на угол:

1) $-380°$; 3) $5{,}5\pi$; 5) 1;

2) $-800°$; 4) $-\frac{11\pi}{6}$; 6) -3?

17.10. Найдите координаты точки единичной окружности, полученной при повороте точки $P_0(1;\ 0)$ на угол:

1) $-90°$; 3) $\frac{5\pi}{2}$; 5) $450°$;

2) $-180°$; 4) $-\frac{3\pi}{2}$; 6) -2π.

17.11. Какие координаты имеет точка единичной окружности, полученная при повороте точки $P_0(1;\ 0)$ на угол:

1) $\frac{3\pi}{2}$; 2) 3π; 3) $-\frac{\pi}{2}$; 4) $180°$; 5) $-540°$?

17.12. Укажите наименьший положительный и наибольший отрицательный углы, при повороте на которые точки $P_0(1;\ 0)$ будет получена точка с координатами:

1) $(0;\ 1)$; 2) $(-1;\ 0)$; 3) $(0;\ -1)$; 4) $(1;\ 0)$.

17.13. Укажите все действительные числа, соответствующие точке P единичной окружности (рис. 17.8).

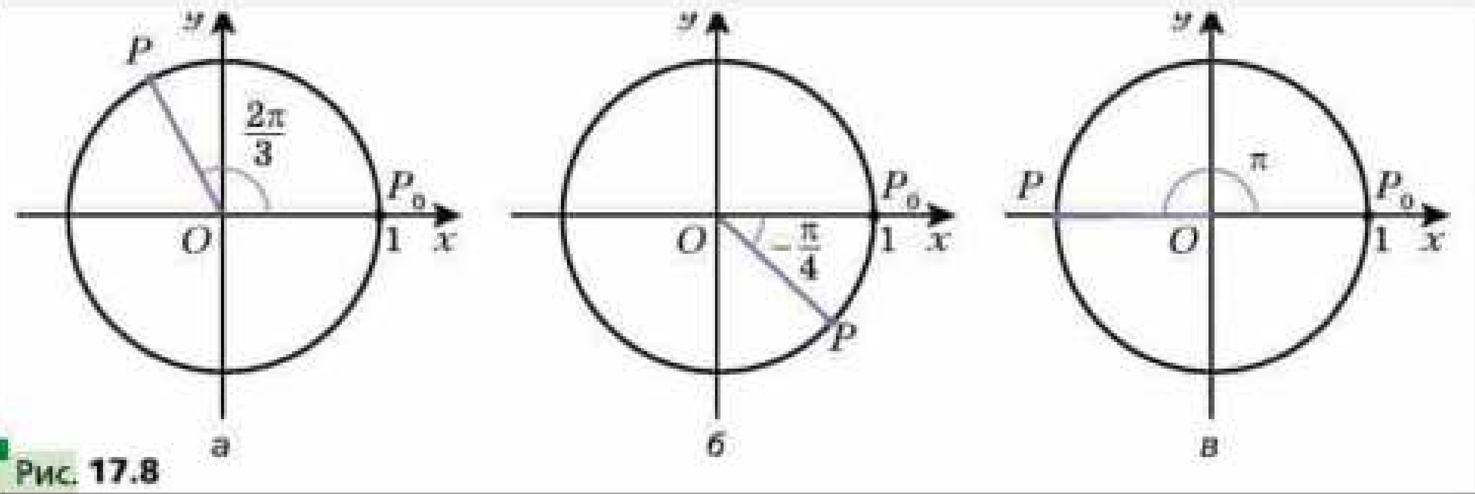


Рис. 17.8

17.14. Укажите все действительные числа, соответствующие точке P единичной окружности (рис. 17.9).

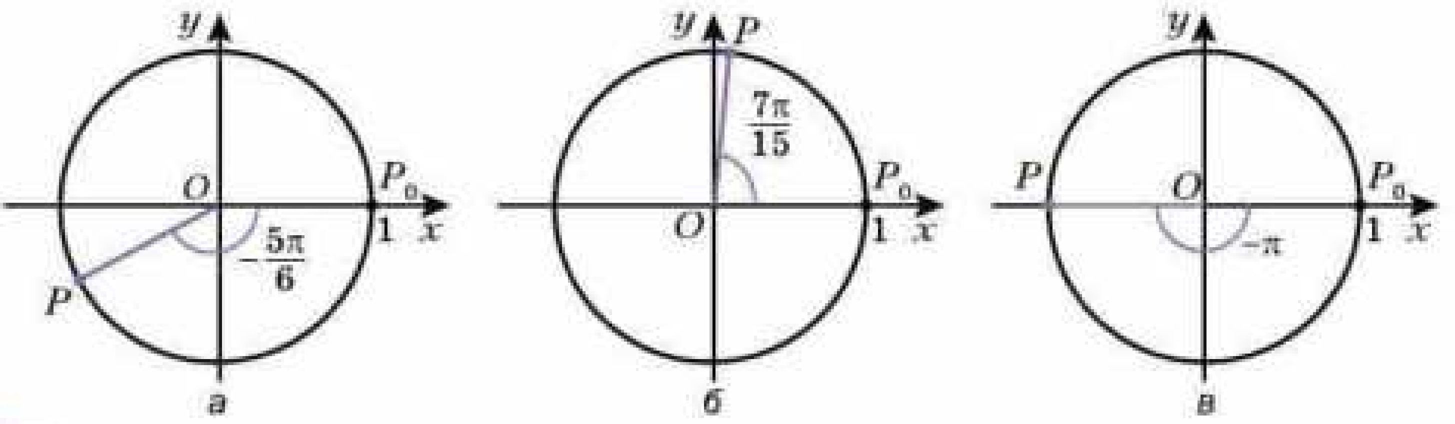


Рис. 17.9

17.15. Найдите координаты точек единичной окружности, полученных при повороте точки $P_0(1;\ 0)$ на углы:

1) $-\frac{\pi}{2}+4\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$.

17.16. Постройте на единичной окружности точки, которым соответствует множество чисел:

1) $\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi k}{2},\ k\in\boldsymbol{Z}$.

17.17. Найдите все углы, на которые нужно повернуть точку $P_0(1;\ 0)$, чтобы получить точку:

1) $P_1(0;\ 1)$; 3) $P_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$;

2) $P_2(-1;\ 0)$; 4) $P_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

17.18. Найдите все углы, на которые нужно повернуть точку $P_0(1;\ 0)$, чтобы получить точку:

1) $P_1(0;\ -1)$; 2) $P_2\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 3) $P_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

17.19. Докажите, что площадь сектора, содержащего дугу в α рад, можно вычислить по формуле $S=\frac{\alpha R^2}{2}$, где R — радиус окружности.

17.20. Упростите:

1) $\{2\pi n \mid n\in\boldsymbol{Z}\}\cup\{\pi n \mid n\in\boldsymbol{Z}\}$;

2) $\{2\pi n \mid n\in\boldsymbol{Z}\}\cap\{\pi+2\pi n \mid n\in\boldsymbol{Z}\}$;

3) $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+\pi n \mid n\in \mathbf{Z}\right\}\cup\{\pi n \mid n\in \mathbf{Z}\}$;

4) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n \mid n\in \mathbf{Z}\right\}\cap\left\{\frac{3\pi n}{10} \mid n\in \mathbf{Z}\right\}$.

17.21. Упростите:

1) $\{2\pi n \mid n\in \mathbf{Z}\}\cup\{\pi+2\pi n \mid n\in \mathbf{Z}\}$;

2) $\{2\pi n \mid n\in \mathbf{Z}\}\cap\{\pi n \mid n\in \mathbf{Z}\}$;

3) $\left\{\pm\frac{\pi}{2}+\pi n \mid n\in \mathbf{Z}\right\}$;

4) $\left\{\frac{\pi n}{12} \mid n\in \mathbf{Z}\right\}\cap\left\{\frac{\pi}{3}+\pi n \mid n\in \mathbf{Z}\right\}$.

§ 18 Тригонометрические функции числового аргумента

Понятия «синус», «косинус», «тангенс» и «котангенс» углов от 0° до 180° знакомы вам из курса геометрии 9 класса. Обобщим эти понятия для произвольного угла поворота α.

Вводя определения тригонометрических функций углов от 0° до 180°, мы пользовались единичной полуокружностью. Для произвольных углов поворота естественно обратиться к единичной окружности.

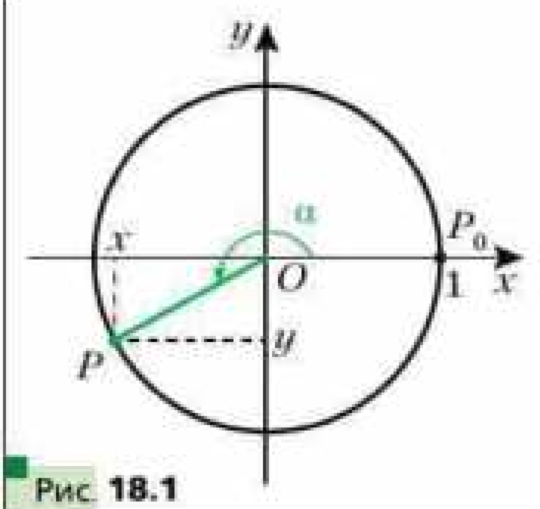


Рис. 18.1

Определение

Косинусом и синусом угла поворота α называют соответственно абсциссу x и ординату y точки $P(x;\ y)$ единичной окружности такой, что $P = R_O^{\alpha}(P_0)$ (рис. 18.1).

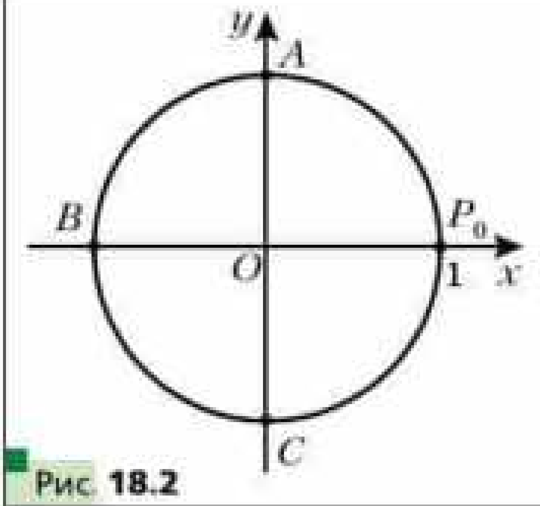


Рис. 18.2

Пишут: $\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$.

Точки P_0, A, B и C (рис. 18.2) имеют соответственно такие координаты: (1; 0), (0; 1), (–1; 0), (0; –1). Эти точки получены в результате поворота точки $P_0(1;\ 0)$ соответственно на такие углы: 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$. Поэтому, пользуясь данным определением, можно составить такую таблицу:

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos\alpha$	1	0	-1	0
$\sin\alpha$	0	1	0	-1

Пример 1. Найдите все углы поворота α, при которых: 1) $\sin\alpha = 0$; 2) $\cos\alpha = 0$.

Решение. 1) Ординату, равную нулю, имеют только две точки единичной окружности: P_0 и B (рис. 18.2). Эти точки получены в результате поворотов точки P_0 на такие углы:

$$0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots \text{ или}$$
$$-\pi,\ -2\pi,\ -3\pi,\ \ldots .$$

Все эти углы можно получить с помощью формулы $\alpha = \pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, $\sin\alpha = 0$ при $\alpha = \pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$.

2) Абсциссу, равную нулю, имеют только две точки единичной окружности: A и C (рис. 18.2). Эти точки получены в результате поворотов точки P_0 на такие углы:

$$\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} + \pi,\ \frac{\pi}{2} + 2\pi,\ \frac{\pi}{2} + 3\pi,\ \ldots \text{ или}$$
$$\frac{\pi}{2} - \pi,\ \frac{\pi}{2} - 2\pi,\ \frac{\pi}{2} - 3\pi,\ \ldots .$$

Все эти углы можно получить с помощью формулы $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, $\cos\alpha = 0$ при $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. ■

Определение

Тангенсом угла поворота α называют отношение синуса этого угла к его косинусу:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Определение

Котангенсом угла поворота α называют отношение косинуса этого угла к его синусу:

$$\mathbf{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Например, $\operatorname{tg}\pi = \dfrac{\sin\pi}{\cos\pi} = 0$, $\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = 0$.

Из определения тангенса следует, что тангенс определён для тех углов поворота α, для которых $\cos\alpha \neq 0$, то есть определён на множестве $\left\{\alpha \in \boldsymbol{R} \;\middle|\; \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

Из определения котангенса следует, что котангенс определён для тех углов поворота α, для которых $\sin\alpha \neq 0$, то есть определён на множестве $\left\{\alpha \in \boldsymbol{R} \;\middle|\; \alpha \neq \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

Вы знаете, что каждому углу поворота α соответствует *единственная* точка единичной окружности. Следовательно, каждому значению угла α соответствует единственное число, являющееся значением синуса $\left(\text{конуса, тангенса для } \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \text{ котангенса для } \alpha \neq \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}\right)$ угла α. Поэтому зависимость значения синуса (косинуса, тангенса, котангенса) от величины угла поворота является функциональной.

Функции $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$, $h(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, $p(\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$, соответствующие этим функциональным зависимостям, называют **тригонометрическими функциями** угла поворота α.

Каждому действительному числу α поставим в соответствие угол в α рад. Это позволяет рассматривать тригонометрические функции числового аргумента.

Например, запись $\sin 2$ означает: синус угла в 2 радиана.

Из определений синуса и косинуса следует, что областью определения функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ является множество $\boldsymbol{R}$.

Так как абсциссы и ординаты точек единичной окружности принимают все значения от -1 до 1 включительно, то областью значений функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ является промежуток $[-1;\ 1]$.

Углам поворота α и $\alpha + 2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$, соответствует одна и та же точка единичной окружности. Поэтому

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi n),\ n \in \boldsymbol{Z},$$
$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi n),\ n \in \boldsymbol{Z}$$

Областью определения функции $y = \operatorname{tg} x$ является множество $\left\{x \in \boldsymbol{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

Областью определения функции $y = \operatorname{ctg} x$ является множество $\{x \in \boldsymbol{R} \mid x \neq \pi k, k \in \boldsymbol{Z}\}$.

Чтобы найти области значений этих функций, обратимся к такой геометрической интерпретации.

Проведём прямую $x = 1$. Она проходит через точку $P_0(1; 0)$ (рис. 18.3).

Пусть точка P получена в результате поворота точки $P_0(1; 0)$ на угол α и расположена так, как показано на рисунке 18.3. Прямая OP пересекает прямую $x = 1$ в точке M. Проведём $PN \perp OP_0$.

Из подобия треугольников OPN и OMP_0 следует, что $\frac{PN}{ON} = \frac{MP_0}{OP_0}$.

Поскольку $PN = \sin\alpha$, $ON = \cos\alpha$, $OP_0 = 1$, то $MP_0 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

Следовательно, ордината точки M равна $\operatorname{tg}\alpha$.

При любом другом положении точки P на единичной окружности также выполняется следующее: если прямая OP пересекает прямую $x = 1$, то ордината точки пересечения равна $\operatorname{tg}\alpha$. Поэтому прямую $x = 1$ называют **осью тангенсов.**

При изменении положения точки P на единичной окружности (рис. 18.4) точка M может занять любое положение на прямой $x = 1$, то есть ординатой точки M может быть любое число. Это означает, что областью значений функции $y = \operatorname{tg} x$ является множество $\boldsymbol{R}$.

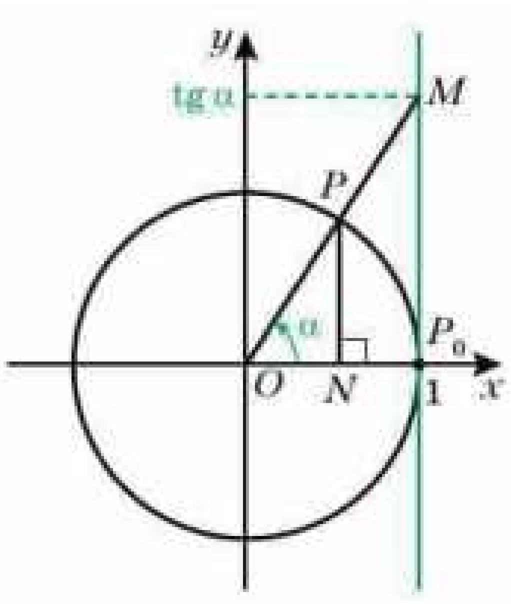


Рис. 18.3

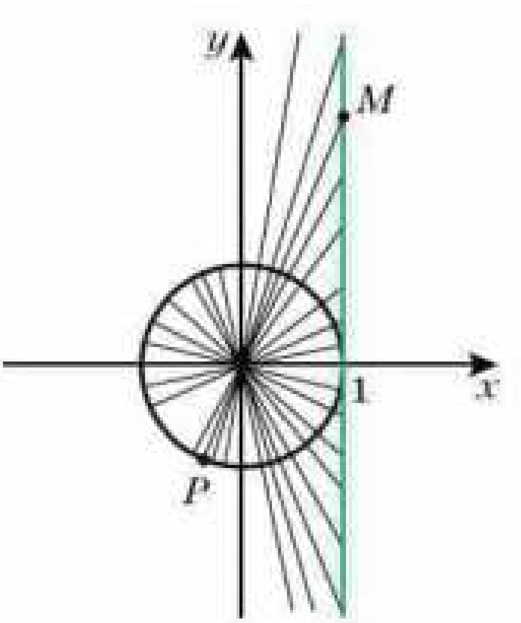


Рис. 18.4

Пусть точка P получена в результате поворота точки $P_0(1; 0)$ на угол α и расположена так, как показано на рисунке 18.5. Если прямая OP пересекает прямую $y = 1$, то абсцисса точки пересечения равна $\operatorname{ctg}\alpha$ (рис. 18.5). Поэтому прямую $y = 1$ называют **осью котангенсов.**

Из рисунка 18.6 понятно, что областью значений функции $y = \operatorname{ctg} x$ является множество $\boldsymbol{R}$.

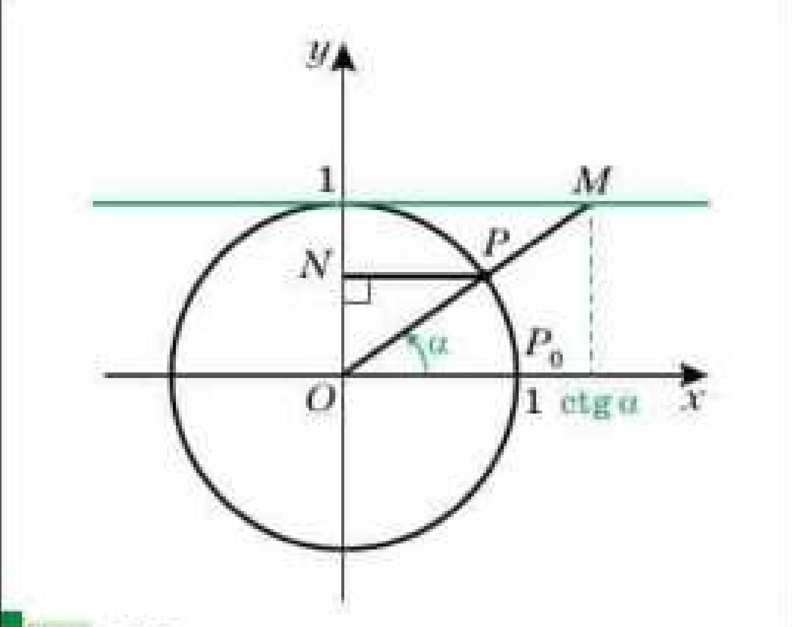


Рис. 18.5

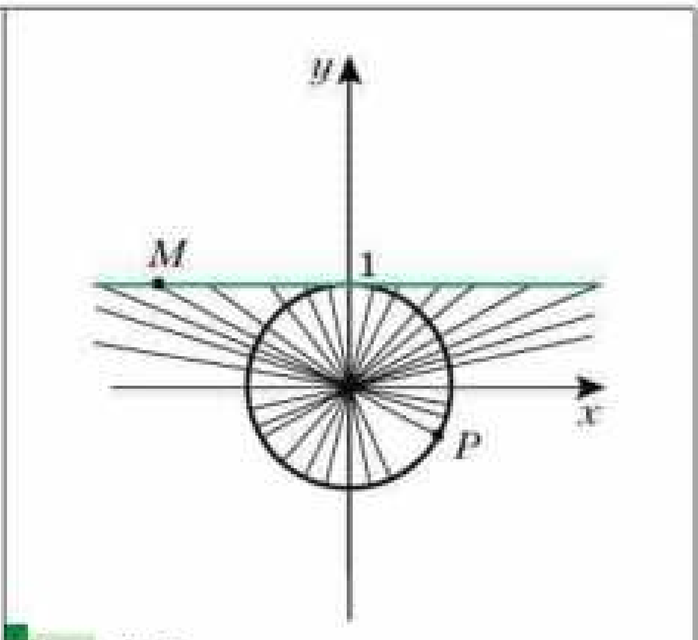


Рис. 18.6

Если точки P_1, O и P_2 лежат на одной прямой, то прямые OP_1 и OP_2 пересекают ось тангенсов (котангенсов) в одной и той же точке M (рис. 18.7, 18.8). Это означает, что тангенсы (котангенсы) углов, отличающихся на π, 2π, 3π и т. д., равны. Отсюда

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi n),\ n \in \boldsymbol{Z},$$
$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi n),\ n \in \boldsymbol{Z}$$

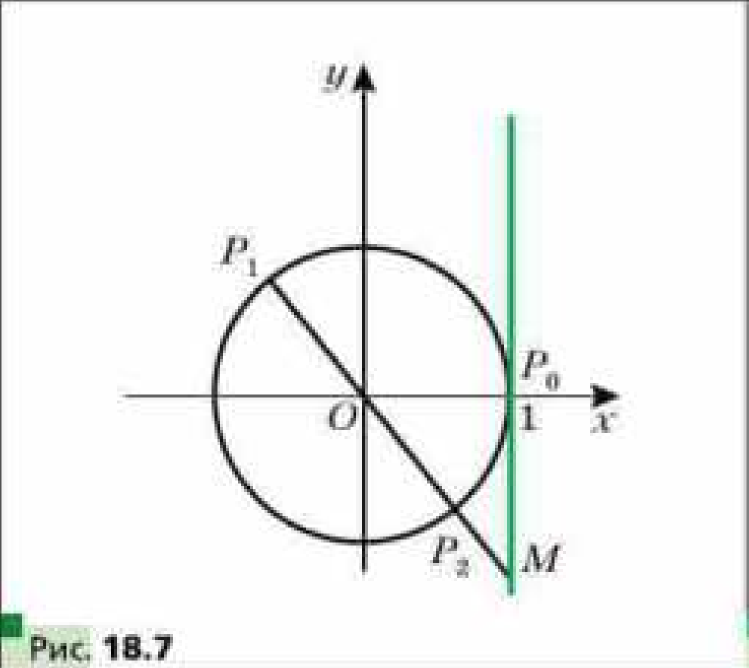


Рис. 18.7

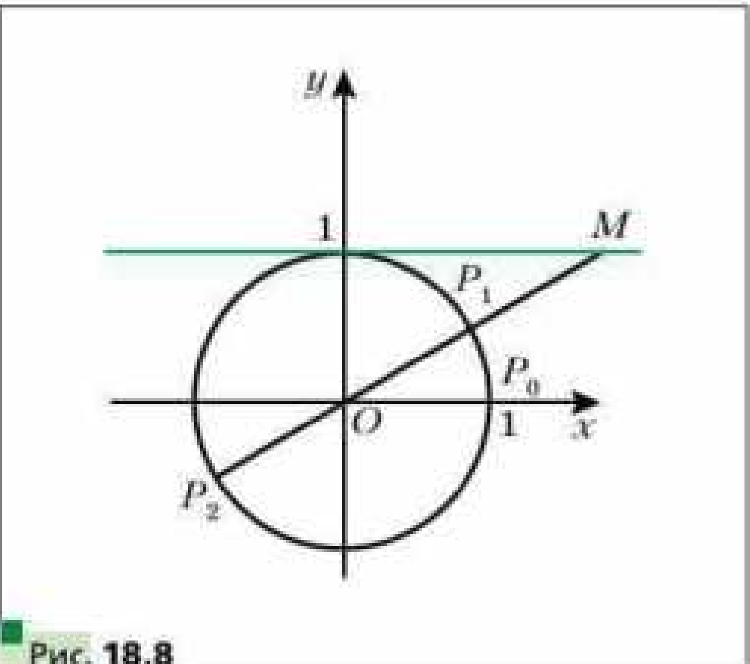


Рис. 18.8

Пример 2. Докажите, что $\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

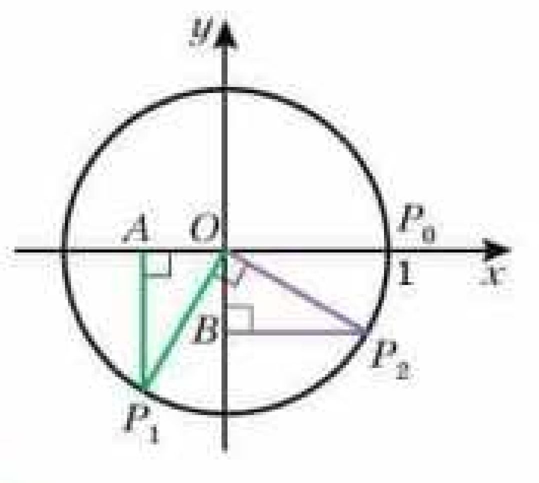


Рис 18.9

Решение. Пусть точки P_1 и P_2 получены в результате поворотов точки P_0 на углы α и $\alpha + \frac{\pi}{2}$ соответственно. Опустим перпендикуляры P_1A и P_2B на оси x и y соответственно (рис. 18.9). Поскольку $\angle P_1OP_2 = \frac{\pi}{2}$, то можно установить, что $\Delta OP_1A = \Delta OP_2B$. Отсюда $OA = OB$. Следовательно, абсцисса точки P_1 равна ординате точки P_2, то есть $\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

Случаи расположения точек P_1 и P_2 в других координатных четвертях можно рассмотреть аналогично.

Рассмотрите самостоятельно случаи, когда точки P_1 и P_2 лежат на координатных осях. ■

Пример 3. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения: 1) $1 - 4\cos\alpha$; 2) $\frac{(2 - \sin\alpha)\cos\alpha}{\cos\alpha}$.

Решение. 1) Поскольку $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$, то $-4 \leqslant -4\cos\alpha \leqslant 4$. Отсюда $-3 \leqslant 1 - 4\cos\alpha \leqslant 5$. Следовательно, наименьшее значение данного выражения равно -3; выражение принимает его при $\cos\alpha = 1$. Наибольшее значение равно 5; выражение принимает его при $\cos\alpha = -1$.

2) Имеем: $\frac{(2 - \sin\alpha)\cos\alpha}{\cos\alpha} = 2 - \sin\alpha$. Понятно, что выражение $2 - \sin\alpha$ принимает все значения от 1 до 3. Наименьшее значение выражения $2 - \sin\alpha$, равное 1, достигается только при $\sin\alpha = 1$, однако при этом $\cos\alpha = 0$ и выражение $\frac{(2 - \sin\alpha)\cos\alpha}{\cos\alpha}$ не определено. Следовательно, наименьшего значения не существует.

Аналогично, выражение $2 - \sin\alpha$ принимает наибольшее значение только при $\sin\alpha = -1$, однако при этом также $\cos\alpha = 0$. Следовательно, и наибольшего значения не существует.

Ответ: 1) 5; -3; 2) не существуют. ■

Пример 4. Найдите область значений выражения $\frac{1}{3\sin x - 2}$.

Решение. Имеем: $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$; $-3 \leqslant 3\sin x \leqslant 3$; $-5 \leqslant 3\sin x - 2 \leqslant 1$.

При $0 < 3\sin x - 2 \leqslant 1$ получаем, что $\frac{1}{3\sin x - 2} \geqslant 1$, причём равенство достигается при $\sin x = 1$.

При $-5 \leqslant 3\sin x - 2 < 0$ получаем, что $\frac{1}{3\sin x - 2} \leqslant -\frac{1}{5}$, причём равенство достигается при $\sin x = -1$. Следовательно, область значений данного выражения — множество $\left(-\infty; -\frac{1}{5}\right] \cup [1; +\infty)$. ■

1. Что называют косинусом угла поворота; синусом угла поворота; тангенсом угла поворота; котангенсом угла поворота?
2. Поясните, что называют тригонометрическими функциями угла поворота; числового аргумента.
3. Какова область определения функции $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$?
4. Какова область значений функции $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$?

Упражнения

18.1. Вычислите значение выражения:

1) $\sin 0 + \operatorname{tg}\pi - \sin\frac{3\pi}{2}$;
2) $5\cos\pi + 4\cos\frac{3\pi}{2} + 2\cos 2\pi$;
3) $2\sin^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{6}$;
4) $\sin\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$.

18.2. Чему равно значение выражения:

1) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$;
2) $6\cos 0 + 4\sin 2\pi + 4\sin^2\frac{2\pi}{3}$?

18.3. Возможно ли равенство:

1) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$;
2) $\cos\alpha = \frac{\pi}{3}$;
3) $\operatorname{tg}\alpha = -4$;
4) $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{26}$?

18.4. Может ли быть равным числу $\frac{\sqrt{5}}{2}$ значение:

1) $\sin\alpha$; 2) $\cos\alpha$; 3) $\operatorname{tg}\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha$?

18.5. Укажите наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $2 - \sin\alpha$; 2) $6 - 2\cos\alpha$; 3) $\sin^2\alpha$; 4) $2\cos^2\alpha - 3$.

18.6. Укажите наибольшее и наименьшее значения выражения:
1) $-5\cos\alpha$; 2) $\cos\alpha - 2$; 3) $5 + \sin^2\alpha$; 4) $7 - 3\sin\alpha$.

18.7. Найдите все значения x, при которых выполняется равенство:
1) $\sin x = 1$; 2) $\sin x = -1$.

18.8. Найдите все значения x, при которых выполняется равенство:
1) $\cos x = 1$; 2) $\cos x = -1$.

18.9. При каких значениях a возможно равенство:
1) $\sin x = a^2 + 1$; 2) $\cos x = a^2 - 1$; 3) $\cos x = a^2 - 5a + 5$?

18.10. При каких значениях a возможно равенство:
1) $\sin x = a - 2$; 2) $\cos x = a^2 + 2$; 3) $\sin x = 2a - a^2 - 2$?

18.11. Сравните значения выражений $2\sin\alpha$ и $\sin^2\alpha$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

18.12. Сравните:
1) $\cos 10^\circ$ и $\cos 10^\circ \cos 20^\circ$; 2) $\sin 40^\circ$ и $\sin^2 40^\circ$.

18.13. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:
1) $\frac{1}{1+\sin\alpha}$; 2) $\frac{\cos^3\alpha}{\cos\alpha}$; 3) $\frac{\sin\alpha\,(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}$.

18.14. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:
1) $\frac{1}{\cos\alpha - 2}$; 2) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}$; 3) $\sin\alpha + \cos\alpha - \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}$.

18.15. Найдите область значений выражения:
1) $\frac{1}{2+\sin x}$; 2) $\frac{1}{1-\cos x}$; 3) $\frac{2}{4\sin x - 3}$.

18.16. Найдите область значений функции:
1) $y = \frac{2}{3-\cos x}$; 2) $y = \frac{1}{\sin x + 1}$; 3) $y = \frac{1}{1 - 2\cos x}$.

18.17. Докажите, что $\sin\alpha = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

18.18. Докажите, что $\cos\alpha = -\cos(\pi + \alpha)$.

§ 19 Знаки значений тригонометрических функций. Чётность и нечётность тригонометрических функций

Пусть точка P получена в результате поворота точки $P_0(1; 0)$ вокруг начала координат на угол α. Если точка P принадлежит I координатной четверти, то говорят, что α является углом I четверти. Аналогично можно говорить об углах II, III и IV четвертей.

Например, $\frac{\pi}{7}$ и -300° — углы I четверти, $\frac{2\pi}{3}$ и -185° — углы II четверти, $\frac{5\pi}{4}$ и -96° — углы III четверти, 355° и $-\frac{\pi}{8}$ — углы IV четверти.

Углы вида $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, не относят ни к какой четверти.

Точки, расположенные в I четверти, имеют положительные абсциссу и ординату. Следовательно, если α — угол I четверти, то $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$.

Если α — угол II четверти, то $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$.

Если α — угол III четверти, то $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$.

Если α — угол IV четверти, то $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$.

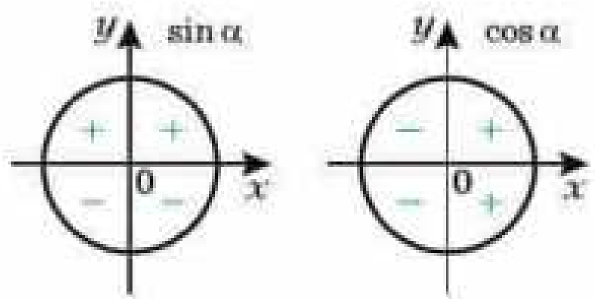


Рис. 19.1

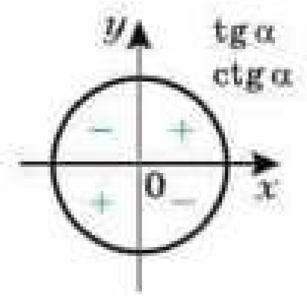


Рис. 19.2

Знаки значений синуса и косинуса схематически показаны на рисунке 19.1.

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, то тангенсы и котангенсы углов I и III четвертей являются положительными, а углов II и IV четвертей — отрицательными (рис. 19.2).

Пусть точки P_1 и P_2 получены в результате поворота точки $P_0(1;\,0)$ на углы α и $-\alpha$ соответственно (рис. 19.3).

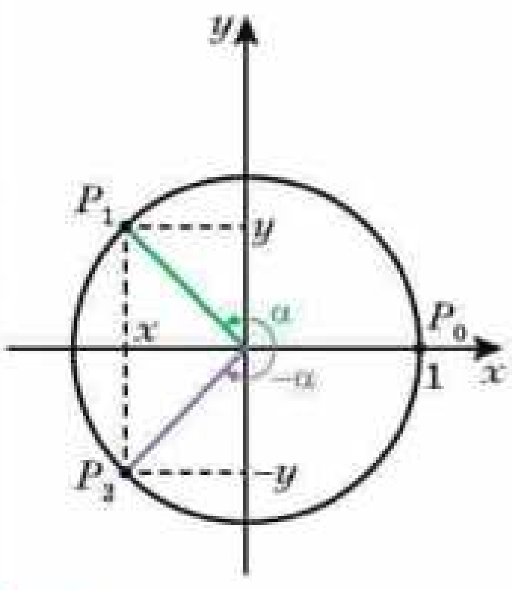


Рис. 19.3

Для любого α точки P_1 и P_2 имеют равные абсциссы и противоположные ординаты. Тогда из определений синуса и косинуса следует, что для любого $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

Это значит, что ***функция косинус является чётной, а функция синус — нечётной***.

Области определения функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ симметричны относительно начала координат (проверьте это самостоятельно). Кроме того,

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Следовательно, ***функции тангенс и котангенс — нечётные.***

Пример 1. Сравните $\sin 200^\circ$ и $\sin(-200^\circ)$.

Решение. Поскольку 200° — угол III четверти, угол -200° — угол II четверти, то $\sin 200^\circ < 0$, $\sin(-200^\circ) > 0$. Следовательно, $\sin 200^\circ < \sin(-200^\circ)$. ■

Пример 2. Исследуйте на чётность функцию: 1) $f(x) = 1 + \sin x$; 2) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

Решение. 1) Область определения данной функции $D(f) = (-\infty; +\infty)$ симметрична относительно начала координат. Имеем:

$$f(-x) = 1 + \sin(-x) = 1 - \sin x.$$

Тогда $f(-x) \neq f(x)$; $f(-x) \neq -f(x)$. Следовательно, данная функция не является ни чётной, ни нечётной.

2) Область определения данной функции — все действительные числа, кроме чисел вида $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, — симметрична относительно начала координат. Имеем:

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos^2(-x)} = -\frac{\sin x}{\cos^2 x} = -f(x).$$

Следовательно, данная функция — нечётная. ■

1. Какие знаки имеют синус, косинус, тангенс и котангенс в каждой из координатных четвертей?

2. Какие из тригонометрических функций являются чётными, а какие — нечётными? Запишите соответствующие равенства.

Упражнения

19.1. Положительным или отрицательным числом является значение тригонометрической функции: 1) $\sin(-280^\circ)$; 2) $\cos 340^\circ$; 3) $\sin(-130^\circ)$; 4) $\cos 2$; 5) $\sin(-3)$; 6) $\operatorname{tg} 1$; 7) $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4}$; 8) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}$?

19.2. Какой знак имеет:

1) $\sin 186°$; 4) $\cos(-78°)$; 7) $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{8}$;

2) $\operatorname{tg} 104°$; 5) $\operatorname{ctg}(-291°)$; 8) $\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right)$?

3) $\operatorname{ctg} 340°$; 6) $\sin\frac{3\pi}{7}$;

19.3. Найдите значение выражения:

1) $5\operatorname{tg} 0 + 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 3\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 4\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

2) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2\cos(-\pi) + 4\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

19.4. Найдите значение выражения:

1) $\sin^2(-60°) + \cos^2(-30°)$;

2) $2\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 4\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

19.5. Известно, что $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Сравните с нулём значение выражения:

1) $\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha}$; 3) $\sin\alpha - \cos\alpha$.

19.6. Известно, что $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$. Сравните с нулём значение выражения:

1) $\sin\beta\cos\beta$; 2) $\frac{\operatorname{tg}^3\beta}{\sin\beta}$; 3) $\sin\beta + \cos\beta$.

19.7. Сравните:

1) $\operatorname{tg} 130°$ и $\operatorname{tg}(-130°)$; 4) $\sin 60°$ и $\sin\frac{8\pi}{7}$;

2) $\operatorname{tg} 110°$ и $\operatorname{tg} 193°$; 5) $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}$ и $\cos 280°$;

3) $\cos 80°$ и $\sin 330°$; 6) $\operatorname{ctg} 6$ и $\operatorname{ctg} 6°$.

19.8. Сравните:

1) $\sin 200°$ и $\sin(-250°)$; 3) $\cos 250°$ и $\cos 290°$;

2) $\operatorname{ctg} 100°$ и $\operatorname{ctg} 80°$; 4) $\cos 6{,}2$ и $\sin 5$.

19.9. Известно, что α — угол III четверти. Упростите выражение:

1) $\sin\alpha - |\sin\alpha|$; 2) $|\cos\alpha| - \cos\alpha$; 3) $|\operatorname{tg}\alpha| - \operatorname{tg}\alpha$.

19.10. Известно, что β — угол IV четверти. Упростите выражение:

1) $|\sin\beta| + \sin\beta$; 2) $\cos\beta - |\cos\beta|$; 3) $|\operatorname{ctg}\beta| - \operatorname{ctg}\beta$.

19.11. Углом какой четверти является угол α, если:

1) $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha < 0$; 3) $|\sin\alpha| = \sin\alpha$ и $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;

2) $\sin\alpha < 0$ и $\operatorname{tg}\alpha > 0$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha + |\operatorname{ctg}\alpha| = 0$ и $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$?

19.12. Углом какой четверти является угол α, если:

1) $\cos\alpha > 0$ и $\operatorname{tg}\alpha > 0$;
2) $\sin\alpha < 0$ и $\operatorname{ctg}\alpha < 0$;
3) $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$ и $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$;
4) $|\operatorname{tg}\alpha| - \operatorname{tg}\alpha = 0$ и $\alpha \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$?

19.13. Исследуйте на чётность функцию:

1) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$;
2) $f(x) = \frac{x\sin x}{1-\cos x}$;
3) $f(x) = \frac{(x-1)\cos x}{x-1}$.

19.14. Исследуйте на чётность функцию:

1) $f(x) = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\sin x - \operatorname{tg} x}$;
2) $f(x) = \frac{\cos x}{x^2-1}$;
3) $f(x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^3-1}$.

§ 20 Периодические функции

Многие процессы и события, происходящие в окружающем мире, повторяются через равные промежутки времени. Например, через 27,3 дня повторяется значение расстояния от Земли до Луны; если сегодня суббота, то через 7 дней снова настанет суббота.

Подобные явления и процессы называют **периодическими**, а функции, являющиеся их математическими моделями, — **периодическими функциями**.

Вы знаете, что для любого числа x выполняются равенства

$$\sin(x-2\pi) = \sin x = \sin(x+2\pi);$$
$$\cos(x-2\pi) = \cos x = \cos(x+2\pi).$$

Это значит, что значения функций синус и косинус периодически повторяются при изменении аргумента на 2π. Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ являются примерами периодических функций.

Определение

Функцию f называют периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из области определения функции f выполняются равенства

$$f(x-T) = f(x) = f(x+T).$$

Число T называют периодом функции f.

Например, число 2π является периодом функций $y = \cos x$ и $y = \sin x$.

Выполнение равенств $f(x-T) = f(x) = f(x+T)$ для любого $x \in D(f)$ означает, что область определения периодической функции f обладает следующим свойством: если $x_0 \in D(f)$, то $(x_0 - T) \in D(f)$ и $(x_0 + T) \in D(f)$.

Вы знаете, что для любого x из области определения функции $y = \operatorname{tg} x$ выполняются равенства

$$\operatorname{tg}(x-\pi)=\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}(x+\pi).$$

Также для любого x из области определения функции $y=\operatorname{ctg}x$ выполняются равенства:

$$\operatorname{ctg}(x-\pi)=\operatorname{ctg}x=\operatorname{ctg}(x+\pi).$$

Тогда из определения периодической функции следует, что тангенс и котангенс являются периодическими функциями с периодом π.

Периодической является функция дробная часть числа $y=\{x\}$. Её периодом является любое целое число, отличное от нуля. Действительно, для любых $x\in\boldsymbol{R}$ и $k\in\boldsymbol{Z}$ выполняется равенство $\{x+k\}=\{x\}$.

Рассмотрим некоторые свойства периодических функций.

Теорема 20.1

Если число T является периодом функции f, то и число $-T$ также является периодом функции f.

Справедливость этой теоремы следует из определения периодической функции.

Теорема 20.2

Если числа T_1 и T_2 являются периодами функции f, причём $T_1+T_2\neq 0$, то число T_1+T_2 также является периодом функции f.

Доказательство

Для любого $x\in D(f)$ можно записать:

$$f(x)=f(x+T_1)=f((x+T_1)+T_2)=f(x+(T_1+T_2));$$
$$f(x)=f(x-T_1)=f((x-T_1)-T_2)=f(x-(T_1+T_2)).$$

Отсюда для любого $x\in D(f)$ выполняются равенства:

$$f(x-(T_1+T_2))=f(x)=f(x+(T_1+T_2)).$$

Следовательно, число T_1+T_2 является периодом функции f. ■

Следствие

Если число T является периодом функции f, то любое число вида nT, где $n\in Z$, $n\neq 0$, также является её периодом.

Докажите этот факт самостоятельно.

Последнее свойство означает, что каждая периодическая функция имеет бесконечно много периодов.

Например, любое число вида $2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$, $n\neq 0$, является периодом функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$; любое число вида πn, $n\in\boldsymbol{Z}$, $n\neq 0$, является периодом функций $y=\operatorname{tg}x$ и $y=\operatorname{ctg}x$.

Теорема 20.3

Если число T является периодом функции $y = f(x)$, то число $\frac{T}{k}$, где $k \neq 0$, является периодом функции $y = f(kx + b)$.

Доказательство

Для любого x из области определения функции $y = f(kx + b)$ можно записать:

$$f(kx + b) = f((kx + b) + T) = f\left(k\left(x + \frac{T}{k}\right) + b\right);$$

$$f(kx + b) = f((kx + b) - T) = f\left(k\left(x - \frac{T}{k}\right) + b\right).$$

Отсюда для любого x из области определения функции $y = f(kx + b)$ выполняются равенства:

$$f\left(k\left(x - \frac{T}{k}\right) + b\right) = f(kx + b) = f\left(k\left(x + \frac{T}{k}\right) + b\right).$$

Следовательно, число $\frac{T}{k}$ является периодом функции $y = f(kx + b)$. ■

Если среди всех периодов функции f существует наименьший положительный период, то его называют **главным периодом функции f**.

Например, главным периодом функции $y = \{x\}$ является число 1.

Теорема 20.4

Главным периодом функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ является число 2π; главным периодом функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ является число π.

Доказательство

Проведём доказательство для функции $y = \sin x$ (остальные утверждения теоремы доказывают аналогично).

Если число T является периодом функции $y = \sin x$, то равенство $\sin(x + T) = \sin x$ выполняется при любом действительном значении x, в частности при $x = -\frac{T}{2}$. Тогда получаем:

$$\sin\left(-\frac{T}{2} + T\right) = \sin\left(-\frac{T}{2}\right);\ \sin\frac{T}{2} = -\sin\frac{T}{2};\ \sin\frac{T}{2} = 0.$$

Отсюда $\frac{T}{2} = \pi k$, $T = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Из последнего равенства следует, что любой период функции $y = \sin x$ имеет вид $2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Наименьшим положительным числом вида $2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, является число 2π, которое является периодом функции $y = \sin x$.

Следовательно, число 2π — главный период функции $y = \sin x$. ■

Применяя теоремы 20.3 и 20.4 к функциям $y = \sin(kx + b)$ и $y = \cos(kx + b)$, где $k \neq 0$, получаем, что число $\frac{2\pi}{k}$ является периодом, а число $\frac{2\pi}{|k|}$ — главным периодом этих функций.

Главным периодом функций $y = \operatorname{tg}(kx + b)$ и $y = \operatorname{ctg}(kx + b)$, где $k \neq 0$, является число $\frac{\pi}{|k|}$.

Отметим, что не любая периодическая функция имеет главный период. Например, функция $y = c$, где c — некоторое число, является периодической. Очевидно, что любое действительное число, отличное от нуля, является её периодом. Следовательно, эта функция не имеет главного периода.

Существуют периодические функции, отличные от константы, которые также не имеют главного периода.

Например, рассмотрим функцию Дирихле $y = \mathfrak{D}(x)$. Эта функция периодическая, причём любое рациональное число, отличное от нуля, является её периодом. Это следует из того, что сумма двух рациональных чисел — число рациональное, а сумма рационального и иррационального чисел — число иррациональное. Следовательно, функция Дирихле не имеет главного периода.

Теорема 20.5

Если T — главный период функции f, то любой период функции f имеет вид nT, где $n \in Z$ и $n \neq 0$.

Доказательство

Пусть T_1 — период вида, отличного от указанного. Тогда можно подобрать такое целое n и такое действительное $\alpha \in (0; 1)$, что $T_1 = nT + \alpha T$. Имеем: $f(x) = f(x + T_1) = f(x + nT + \alpha T) = f(x + \alpha T)$, $f(x) = f(x - T_1) = f(x - nT - \alpha T) = f(x - \alpha T)$. Следовательно, αT — период. Однако $0 < \alpha T < T$. Получили противоречие (поскольку по условию теоремы T — главный период). ■

Пример 1. Найдите значение выражения: 1) $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$; 2) $\operatorname{tg} 135^\circ$.

Решение. 1) $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right) = -\sin\frac{13\pi}{3} = -\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) $\operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{tg}(-45^\circ + 180^\circ) = \operatorname{tg}(-45^\circ) = -1$. ■

На рисунке 20.1 изображён график некоторой периодической функции f с периодом T, $D(f) = \boldsymbol{R}$.

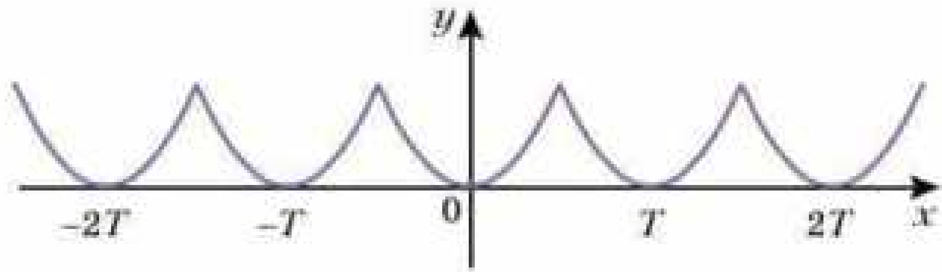


Рис. 20.1

Фрагменты графика этой функции на промежутках $[0; T]$, $[T; 2T]$, $[2T; 3T]$ и т. д., а также на промежутках $[-T; 0]$, $[-2T; -T]$, $[-3T; -2T]$ и т. д. являются равными фигурами, причём любая из этих фигур может быть получена из любой другой параллельным переносом на вектор с координатами $(nT; 0)$, где n — некоторое целое число.

Вообще, если промежутки $[a; b]$ и $[c; d]$ таковы, что $c = a + Tn$, $d = b + Tn$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то части графика функции f на этих промежутках являются равными фигурами (рис. 20.2).

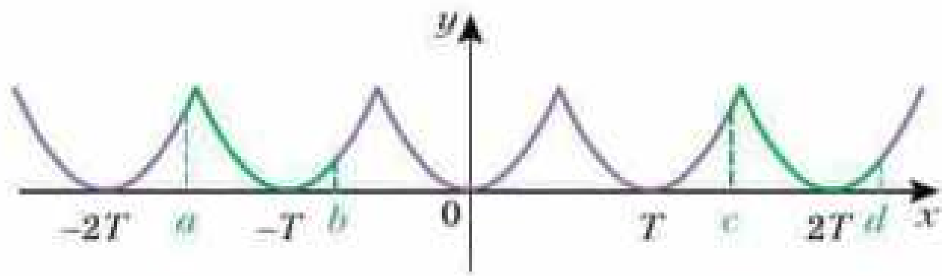


Рис. 20.2

Пример 2. Покажите, что число $T = \pi$ является периодом функции $f(x) = \sqrt{-\cos^2 x}$.

Решение. Областью определения функции f является множество значений переменной x, при которых $\cos x = 0$, то есть

$$D(f) = \left\{x \in \boldsymbol{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}.$$

Тогда если $x \in D(f)$, то $(x + \pi) \in D(f)$ и $(x - \pi) \in D(f)$.

Поскольку $E(f) = \{0\}$, то $f(x - \pi) = f(x) = f(x + \pi) = 0$. ■

Определение

Положительные числа a и b называют соизмеримыми, если $\frac{a}{b}$ — рациональное число. Если $\frac{a}{b}$ — иррациональное число, то числа a и b являются несоизмеримыми.

Например, числа в парах 3 и 5, $\sqrt{2}$ и $\sqrt{32}$ являются соизмеримыми, а числа 1 и $\sqrt{3}$ являются несоизмеримыми.

Определение

Число T, являющееся как периодом функции f, так и периодом функции g, называют общим периодом функций f и g.

Например, число $T = 2\pi$ является общим периодом функций $y = \sin x$ и $y = \operatorname{tg} x$.

Теорема 20.6

Если существуют период T_f функции f и период T_g функции g такие, что числа T_f и T_g являются соизмеримыми, то функции f и g имеют общий период.

Доказательство

Так как периоды T_f и T_g соизмеримы, то $\frac{T_f}{T_g} = \frac{m}{n}$, где $m \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$. Отсюда $T_f \cdot n = T_g \cdot m$. Тогда согласно следствию из теоремы 20.2 число $T = T_f \cdot n = T_g \cdot m$ является периодом как функции f, так и функции g. ■

Доказательство этой теоремы показывает, как можно находить общий период двух функций.

Пример 3. Найдите период функции $y = \cos\frac{6x}{5} + \operatorname{tg}\frac{6x}{7}$.

Решение. Если мы найдём общий период функций $f(x) = \cos\frac{6x}{5}$ и $g(x) = \operatorname{tg}\frac{6x}{7}$, то тем самым найдём период данной функции.

Воспользовавшись теоремой 20.3, запишем:

$$T_f = 2\pi : \frac{6}{5} = \frac{5\pi}{3}, \; T_g = \pi : \frac{6}{7} = \frac{7\pi}{6}.$$

Тогда $\frac{T_f}{T_g} = \frac{10}{7}$. Следовательно, периоды T_f и T_g соизмеримы, а поэтому функции f и g имеют общий период T. Он равен $7T_f$ или $10T_g$, то есть $T = \frac{35\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{35\pi}{3}$. ■

Пример 4. Найдите период функции $y = \sin 2x - 3\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 4\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Решение. Рассмотрим функции $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = -3\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, $h(x) = 4\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Для решения задачи достаточно найти их общий период.

Это можно сделать, например, так: сначала найти период функции $\varphi(x) = f(x) + g(x)$, а потом найти общий период функций φ и h.

Однако существует более эффективный метод.

Имеем: $T_f = \pi$, $T_g = \frac{4\pi}{3}$, $T_h = 2\pi$.

Запишем эти периоды в таком виде:

$$T_f = \frac{1}{1}\cdot\pi,\ T_g = \frac{4}{3}\cdot\pi,\ T_h = \frac{2}{1}\cdot\pi.$$

Рассмотрим число $T = \frac{\text{НОК }(1;\ 4;\ 2)}{\text{НОД }(1;\ 3;\ 1)}\cdot\pi = 4\pi$.

Поскольку $T = 4T_f$, $T = 3T_g$ и $T = 2T_h$, то число T является общим периодом функций f, g и h.

Ответ: 4π. ■

Заметим, что алгоритм нахождения общего периода трёх функций, предложенный в решении примера 4, распространяется на любое конечное количество функций $f_1, f_2, \ldots, f_k$, периоды которых можно соответственно представить в виде

$\frac{m_1}{n_1}\cdot t,\ \frac{m_2}{n_2}\cdot t,\ \ldots,\ \frac{m_k}{n_k}\cdot t$, где $m_1, m_2, \ldots, m_k, n_1, n_2, \ldots, n_k$ — натуральные числа, $t \neq 0$.

?

1. Какую функцию называют периодической?
2. Что такое период функции?
3. Что называют главным периодом функции?
4. Какое число является главным периодом функции $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$?

Упражнения

20.1. Найдите значение выражения:

1) $\operatorname{tg} 780°$;
2) $\cos(-750°)$;
3) $\operatorname{ctg} 225°$;
4) $\sin\frac{23\pi}{4}$;
5) $\cos\frac{7\pi}{4}$.

20.2. Найдите значение выражения:

1) $\operatorname{tg}(-315^\circ)$; 3) $\cos\frac{7\pi}{3}$; 5) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$.

2) $\sin 1110^\circ$; 4) $\sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$;

20.3. Докажите, что число T является периодом функции f:

1) $f(x) = \operatorname{ctg} \pi x$, $T = 3$; 2) $f(x) = \sin(5x - 2)$, $T = \frac{4\pi}{5}$.

20.4. Докажите, что числа $\frac{2\pi}{3}$ и -4π являются периодами функции $f(x) = \cos 3x$.

20.5. Найдите главный период функции:

1) $f(x) = \operatorname{tg}(2x + 1)$; 3) $f(x) = \cos\sqrt{3}x$;

2) $f(x) = \sin 2\pi x$; 4) $f(x) = \left\{6x + \frac{5}{8}\right\}$.

20.6. Найдите главный период функции:

1) $f(x) = \sin(3x - 1)$; 3) $f(x) = \left\{\frac{x}{4} - 2\right\}$.

2) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3} + 4\right)$;

20.7. Докажите, что число π является периодом функции $y = \sqrt{-\sin^2 x}$.

20.8. Найдите главный период функции $f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}$.

20.9. Найдите главный период функции $f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{\sin^2 x}}$.

20.10. Докажите, что функция $f(x) = \sin(\sqrt{x})^2$ не является периодической.

20.11. Докажите, что если функция является возрастающей (убывающей), то она не является периодической.

20.12. Найдите период функции:

1) $f(x) = \sin\frac{3x}{2} + \operatorname{tg} 7x$; 3) $f(x) = \sin \pi x - 2\cos\frac{\pi x}{3}$;

2) $f(x) = \sin 3x + \cos\frac{3x}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{9x}{5}$; 4) $f(x) = \sin \pi x + \left\{3x - \frac{1}{2}\right\}$.

20.13. Найдите период функции:

1) $f(x) = \cos x + 2\sin\left(\frac{3x}{5} + \frac{\pi}{6}\right)$;

2) $f(x)=\cos\frac{5x}{8}+5\operatorname{tg}\left(\frac{7x}{11}-\frac{\pi}{4}\right)-\sin(6x-3)$;

3) $f(x)=2\sin 5\pi x+\frac{1}{3}\{2x\}-\operatorname{ctg}\frac{13\pi x}{7}$.

20.14. При каких значениях параметра a число π является периодом функции $f(x)=\frac{\sin x}{a-\cos x}$?

20.15. При каких значениях параметра a число $\frac{\pi}{2}$ является периодом функции $f(x)=\frac{\cos 2x}{3a+\sin 2x}$?

20.16. Найдите все рациональные значения параметра a, при которых функции $f(x)=\cos\frac{2x}{\sqrt{5}+a^2}$ и $g(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{\sqrt{125}-4a+1}$ имеют общий период.

20.17. Найдите все рациональные значения параметра a, при которых функции $f(x)=\sin\frac{2ax}{a^2+\sqrt{12}}$ и $g(x)=\operatorname{tg}\frac{2x}{1-2a+\sqrt{108}}$ имеют общий период.

20.18. При каких целых значениях n число 5π является периодом функции $f(x)=\cos nx\sin\frac{15x}{n^2}$?

20.19. При каких целых значениях n число 3π является периодом функции $f(x)=\cos 8nx\cos\frac{12x}{n^2}$?

20.20. Существует ли функция, для которой каждое иррациональное число является её периодом, однако не существует рационального числа, которое было бы её периодом?

20.21. Известно, что функция $y=(f(x))^3+f(x)$ является периодической. Докажите, что функция f также является периодической.

20.22. Функция f такова, что функция $y=(f(x))^2+f(x)$ — периодическая. Обязательно ли функция f также является периодической?

20.23. Функция f такова, что $f(0)=1$ и при всех $x\in\boldsymbol{R}$ выполняется равенство $f(x+2)=\frac{f(x)}{5f(x)-1}$. Найдите $f(100)$.

20.24. Функция f такова, что при всех $x\in\boldsymbol{R}$ выполняется равенство $f(x+1)=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}$. Докажите, что f — периодическая функция.

О сумме периодических функций

Функции $f(x) = \cos\frac{6x}{5}$ и $g(x) = \operatorname{tg}\frac{6x}{7}$ — периодические. В примере 3 § 20 мы выяснили, что функция $y = f(x) + g(x)$ также является периодической.

Возникает естественный вопрос: всегда ли сумма двух периодических функций является периодической функцией?

Рассмотрим функции $f(x) = \sqrt{-\sin^2 x}$ и $g(x) = \sqrt{-\cos^2 x}$. Эти функции являются периодическими (см. пример 2 и задачу 20.7 § 20). При этом $D(f) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x = \pi k, k \in \boldsymbol{Z}\}$, $D(g) = \left\{x \in \boldsymbol{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}\right\}$. Очевидно, что $D(f) \cap D(g) = \varnothing$. Следовательно, функция $y = f(x) + g(x)$ не определена ни при каком значении x.

Попробуем подкорректировать вопрос. Пусть периодические функции f и g таковы, что $D(f) \cap D(g) \neq \varnothing$. Всегда ли функция $y = f(x) + g(x)$ является периодической?

Если существуют соизмеримые периоды T_f и T_g функций f и g соответственно, то в силу теоремы 20.6 функции f и g имеют общий период, а следовательно, функция $y = f(x) + g(x)$ является периодической.

Остаётся рассмотреть случай, когда любой положительный период функции f несоизмерим с любым положительным периодом функции g.

Например, рассмотрим функции $f(x) = \cos x$ и $g(x) = \cos(\sqrt{2}x)$.

Очевидно, что функции f и g не имеют соизмеримых периодов.

Докажем, что функция $y = \cos x + \cos(\sqrt{2}x)$ является непериодической.

Предположим противное. Пусть число $T \neq 0$ является периодом этой функции. Тогда для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство

$$\cos(x + T) + \cos(\sqrt{2}(x + T)) = \cos x + \cos(\sqrt{2}x).$$

При $x = 0$ это равенство принимает такой вид:

$$\cos T + \cos(\sqrt{2}T) = 2.$$

Поскольку $\cos T \leqslant 1$ и $\cos(\sqrt{2}T) \leqslant 1$, то приходим к выводу, что

$$\begin{cases}\cos T = 1,\\ \cos(\sqrt{2}T) = 1.\end{cases}$$

Из первого уравнения системы находим, что $T = 2\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$, из второго получаем $T = \frac{2\pi n}{\sqrt{2}}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Это значит, что для некоторых целых m и n должно выполняться равенство

$$2\pi m = \frac{2\pi n}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда $m = \dfrac{n}{\sqrt{2}}$.

Но с учётом иррациональности числа $\sqrt{2}$ последнее равенство возможно только при $m = n = 0$, что противоречит условию $T \neq 0$.

После этого примера может сложиться впечатление, что если периодические функции f и g не имеют соизмеримых периодов и $D(f) \cap D(g) \neq \varnothing$, то функция $y = f(x) + g(x)$ всегда будет непериодической. Но это не так.

Рассмотрим функции

$$f(x) = \begin{cases} b, \text{ если } x = a + b\sqrt{2}, \\ 0, \text{ если } x \neq a + b\sqrt{2} \end{cases} \text{ и } g(x) = \begin{cases} a, \text{ если } x = a + b\sqrt{2}, \\ 0, \text{ если } x \neq a + b\sqrt{2}, \end{cases}$$

где a и b — произвольные целые числа.

Например, $f(3 + 2\sqrt{2}) = 2$, $g(3 + 2\sqrt{2}) = 3$,

$$f(\sqrt{8}) = f(0 + 2\sqrt{2}) = 2,\ g(\sqrt{8}) = g(0 + 2\sqrt{2}) = 0,$$

$f(\sqrt{3}) = 0$, $g(\sqrt{3}) = 0$, так как число $\sqrt{3}$ невозможно представить в виде $a + b\sqrt{2}$ с целыми a и b.

Множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где a и b — целые числа, обозначим $\boldsymbol{Z}(\sqrt{2})$. Заметим, что каждое число $x \in \boldsymbol{Z}(\sqrt{2})$ однозначно задаёт соответствующие числа a и b.

Несложно убедиться, что $T = 1$ является периодом функции f. Покажем, что это число является главным периодом.

Предположим, что функция f имеет период $T_1 \in (0; 1)$. Рассмотрим два случая.

1) $T_1 \in \boldsymbol{Z}(\sqrt{2})$, то есть $T_1 = a + b\sqrt{2}$, где a и b — некоторые целые числа. Отметим, что $b \neq 0$, иначе T_1 — целое и $T_1 \notin (0; 1)$. Тогда равенство $f(x) = f(x + T_1)$ не выполняется, например, при $x = 0$. Действительно, $f(0) = 0$, а $f(T_1) = f(a + b\sqrt{2}) = b$.

2) $T_1 \notin \boldsymbol{Z}(\sqrt{2})$. Тогда равенство $f(x) = f(x + T_1)$ не выполняется, например, при $x = \sqrt{2}$. Действительно, $f(\sqrt{2}) = 1$, а $f(\sqrt{2} + T_1) = 0$, так как $\sqrt{2} + T_1 \notin \boldsymbol{Z}(\sqrt{2})$.

Аналогично можно показать, что главным периодом функции g является число $\sqrt{2}$.

Следовательно, в силу теоремы 20.5 периодами функции f являются только целые числа n, где $n \neq 0$, а периодами функции g — только числа вида $\sqrt{2}k$, где $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Тогда понятно, что никакие два периода функций f и g не являются соизмеримыми.

Функция $y = f(x) + g(x)$ определяется так: $y = \begin{cases} a + b, \text{ если } x = a + b\sqrt{2}, \\ 0, \text{ если } x \neq a + b\sqrt{2}, \end{cases}$

где a и b — произвольные целые числа.

Легко проверить, что число $T = \sqrt{2} - 1$ является периодом этой функции.

Следовательно, мы показали, что если любые положительные периоды функций f и g несоизмеримы и $D(f) \cap D(g) \neq \varnothing$, то функция $y = f(x) + g(x)$ может быть как непериодической, так и периодической.

Однако можно доказать такой факт: если периодические функции f и g не имеют соизмеримых периодов и данные функции являются непрерывными на $\mathbf{R}$, то функция $y = f(x) + g(x)$ является непериодической.

§ 21 Свойства и графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

Периодичность тригонометрических функций позволяет исследовать их свойства и строить графики по такой схеме.

1) Рассмотреть промежуток вида $[a; a + T]$, т. е. произвольный промежуток длиной в период T $\left(\text{чаще всего выбирают промежуток } [0; T] \text{ или промежуток } \left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]\right)$.

2) Исследовать свойства функции на выбранном промежутке.

3) Построить график функции на этом промежутке.

4) Выполнить параллельный перенос полученной фигуры на векторы с координатами $(nT; 0)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Рассмотрим функцию $y = \sin x$ на промежутке $[0; 2\pi]$, то есть на промежутке длиной в период этой функции.

При повороте точки $P_0(1; 0)$ вокруг начала координат на углы от 0 до $\frac{\pi}{2}$ большему углу поворота соответствует точка единичной окружности с большей ординатой (рис. 21.1). Это означает, что функция $y = \sin x$ возрастает на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

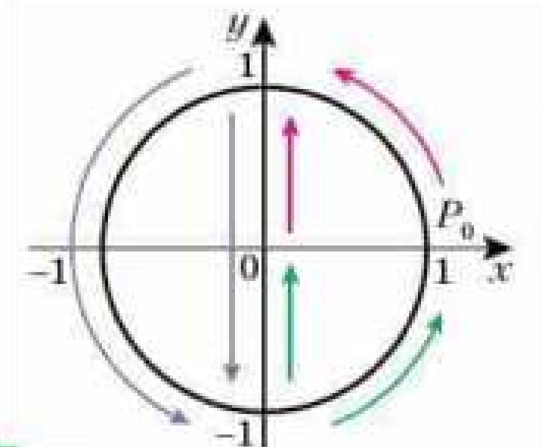


Рис. 21.1

При повороте точки $P_0(1;\ 0)$ на углы от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$ большему углу поворота соответствует точка единичной окружности с меньшей ординатой (см. рис. 21.1). Следовательно, функция $y = \sin x$ убывает на промежутке $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

При повороте точки $P_0(1;\ 0)$ на углы от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π большему углу поворота соответствует точка единичной окружности с большей ординатой (см. рис. 21.1). Следовательно, функция $y = \sin x$ возрастает на промежутке $\left[\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

Функция $y = \sin x$ на промежутке $[0;\ 2\pi]$ имеет три нуля: $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.

Если $x \in (0;\ \pi)$, то $\sin x > 0$; если $x \in (\pi;\ 2\pi)$, то $\sin x < 0$.

Функция $y = \sin x$ на промежутке $[0;\ 2\pi]$ достигает своего наибольшего значения, равного 1, при $x = \frac{\pi}{2}$ и наименьшего значения, равного -1, при $x = \frac{3\pi}{2}$.

Функция $y = \sin x$ на промежутке $[0;\ 2\pi]$ принимает все значения из промежутка $[-1;\ 1]$.

Полученные свойства функции $y = \sin x$ позволяют построить её график на промежутке $[0;\ 2\pi]$ (рис. 21.2). График можно построить точнее, если воспользоваться данными таблицы значений тригонометрических функций некоторых углов, приведённой на форзаце.

На всей области определения график функции $y = \sin x$ можно получить из построенного графика с помощью параллельных переносов на векторы с координатами $(2\pi n;\ 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 21.3).

График функции $y = \sin x$ называют **синусоидой**.

Рассмотрим функцию $y = \cos x$ на промежутке $[0;\ 2\pi]$.

Рассматривая повороты точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат, можно прийти к такому выводу: функция $y = \cos x$ убывает на промежутке $[0;\ \pi]$ и возрастает на промежутке $[\pi;\ 2\pi]$.

Функция $y = \cos x$ на промежутке $[0;\ 2\pi]$ имеет два нуля: $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$.

Если $x \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$, то $\cos x > 0$; если $x \in \left(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right)$, то $\cos x < 0$.

Функция $y = \cos x$ на промежутке $[0;\ 2\pi]$ достигает своего наибольшего значения, равного 1, при $x = 0$ или $x = 2\pi$ и наименьшего значения, равного -1, при $x = \pi$.

Функция $y = \cos x$ на промежутке $[0; 2\pi]$ принимает все значения из промежутка $[-1; 1]$.

График функции $y = \cos x$ на промежутке $[0; 2\pi]$ изображён на рисунке 21.4.

На всей области определения график функции $y = \cos x$ можно получить из построенного графика с помощью параллельных переносов на векторы с координатами $(2\pi n; 0)$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 21.5).

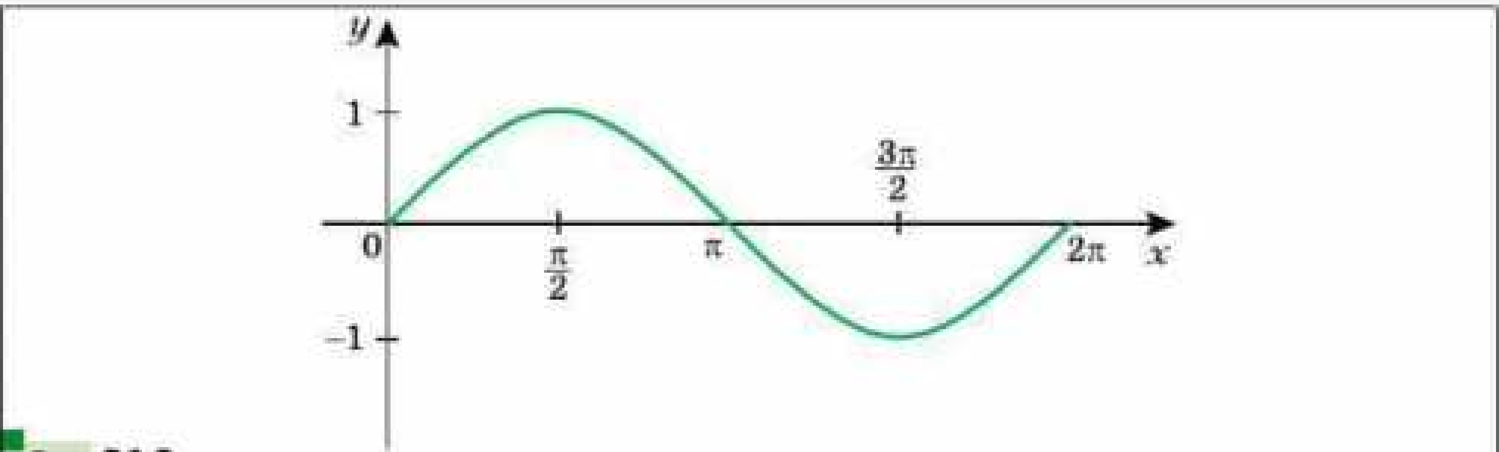


Рис. 21.2

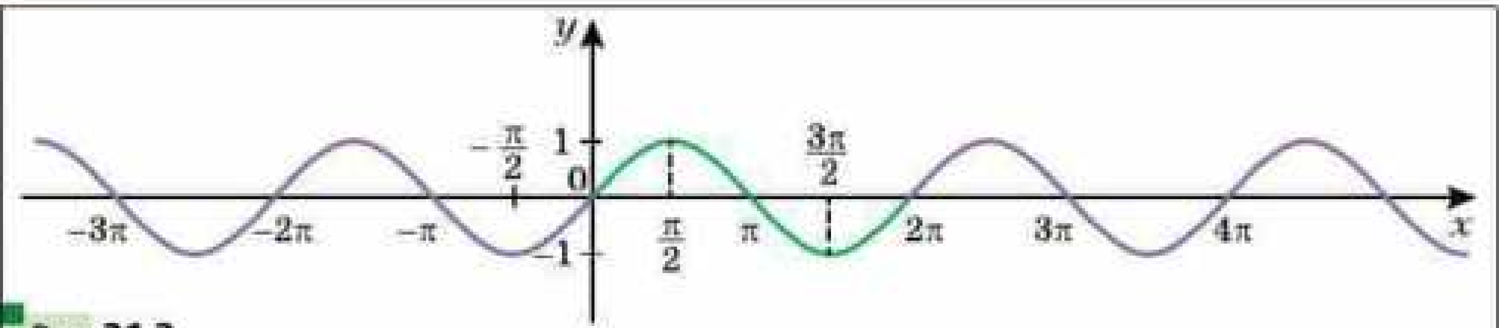


Рис. 21.3

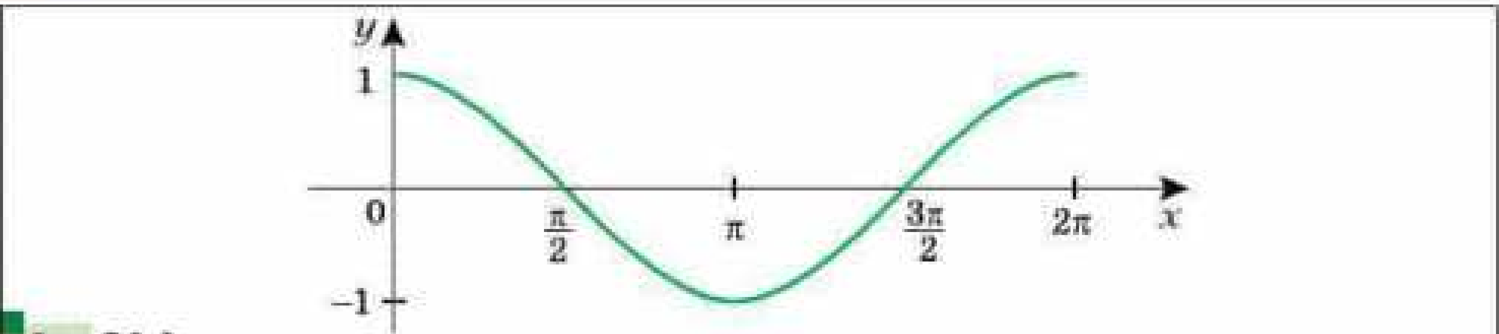


Рис. 21.4

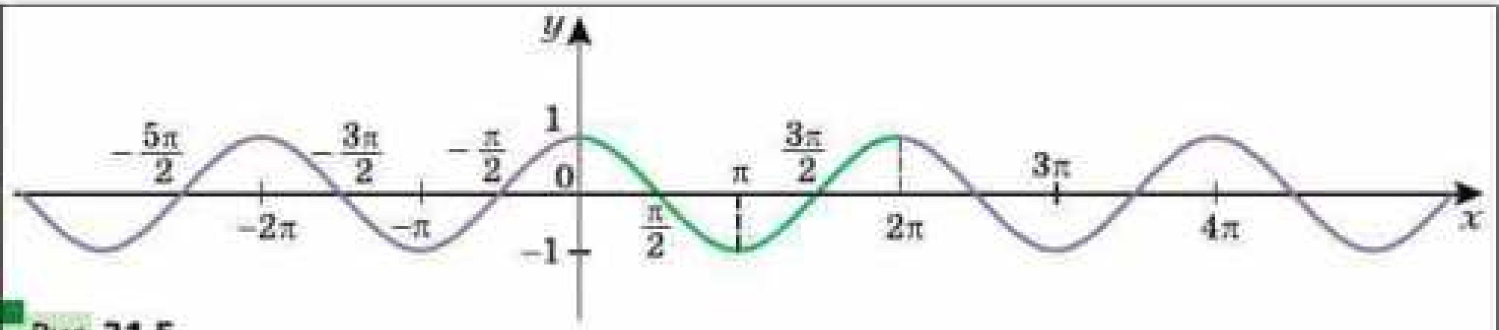


Рис. 21.5

График функции $y = \cos x$ называют **косинусоидой**.

Если воспользоваться формулой $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (см. пример 2 § 18), то становится понятным, что график функции $y = \cos x$ можно получить в результате параллельного переноса графика функции $y = \sin x$ на вектор с координатами $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ (рис. 21.6). Это означает, что графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ — равные фигуры.

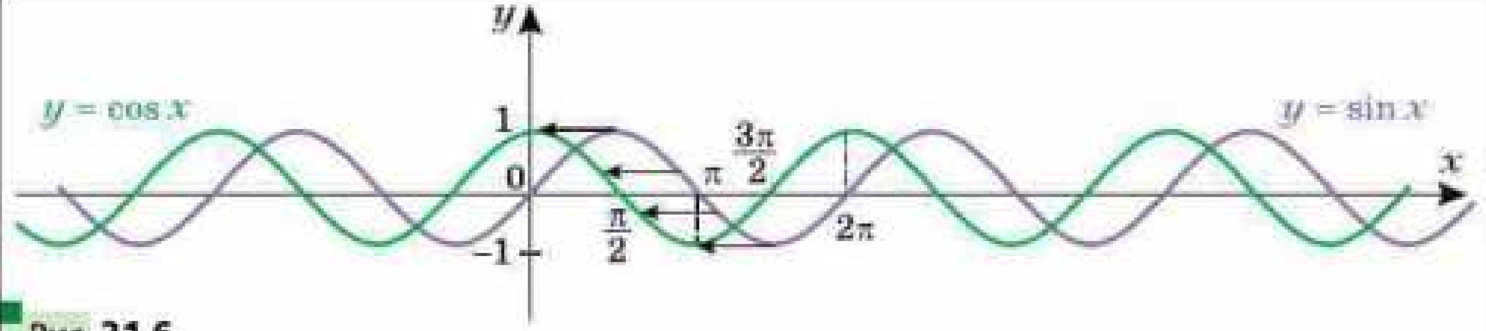


Рис. 21.6

В таблице приведены основные свойства функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

	$y = \sin x$	$y = \cos x$
Область определения	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$
Область значений	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
Периодичность	Периодическая с главным периодом, равным 2π	Периодическая с главным периодом, равным 2π
Нули функции	Числа вида πn, $n \in \boldsymbol{Z}$	Числа вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$
Промежутки знакопостоянства	$\sin x > 0$ на каждом из промежутков вида $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\sin x < 0$ на каждом из промежутков вида $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$	$\cos x > 0$ на каждом из промежутков вида $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\cos x < 0$ на каждом из промежутков вида $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$

Чётность	Нечётная	Чётная
Возрастание/ убывание	Возрастает на каждом из промежутков вида $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Убывает на каждом из промежутков вида $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$	Возрастает на каждом из промежутков вида $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Убывает на каждом из промежутков вида $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$
Наибольшее и наименьшее значения	Наибольшее значение, равное 1, принимает в точках вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Наименьшее значение, равное -1, принимает в точках вида $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$	Наибольшее значение, равное 1, принимает в точках вида $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Наименьшее значение, равное -1, принимает в точках вида $\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$

Пример 1. Сравните $\sin 40^\circ$ и $\cos 40^\circ$.

Решение. Так как $\sin 40^\circ < \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, а $\cos 40^\circ > \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\cos 40^\circ > \sin 40^\circ$. ■

Пример 2. Возможно ли равенство $\sin\alpha = 2\sin 31^\circ$?

Решение. Так как $\sin 31^\circ > \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, то $2\sin 31^\circ > 1$. Следовательно, данное равенство невозможно. ■

Пример 3. Постройте график функции $y = \sin\left|2x - \frac{\pi}{3}\right|$.

Решение. Проведём такие преобразования:

1) $y = \sin x \to y = \sin|x|$ — симметрия относительно оси ординат части графика, лежащей в полуплоскости $x \geqslant 0$;

2) $y = \sin|x| \to y = \sin|2x|$ — сжатие к оси ординат в 2 раза;

3) $y = \sin|2x| \rightarrow y = \sin\left|2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right|$ — параллельный перенос вдоль оси абсцисс вправо на $\frac{\pi}{6}$ единиц (рис. 21.7). ■

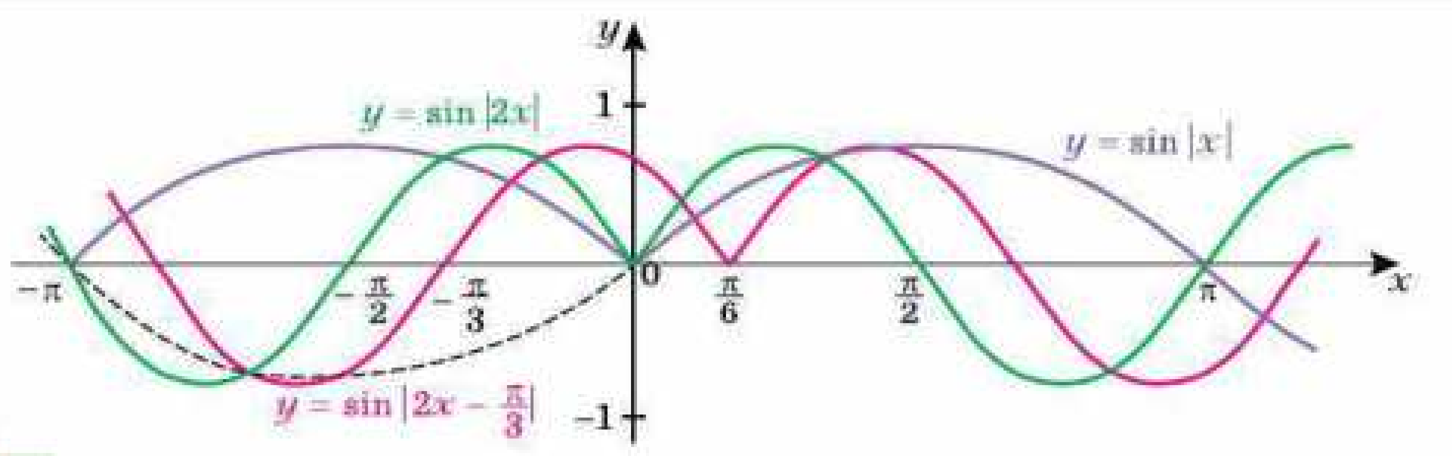


Рис. **21.7**

Пример 4. Постройте график уравнения $\cos x + \cos y = 2$.

Решение. Поскольку $|\cos x| \leqslant 1$ и $|\cos y| \leqslant 1$, то данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos y = 1. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} x = 2\pi n, n \in \mathbf{Z}, \\ y = 2\pi m, m \in \mathbf{Z}. \end{cases}$

Искомый график — это множество точек, изображённых на рисунке 21.8. ■

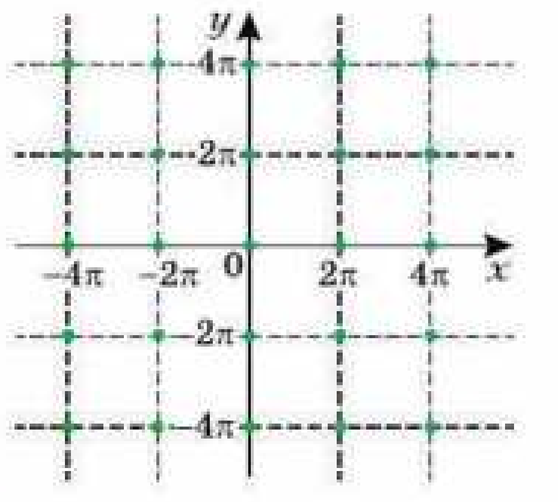


Рис. **21.8**

1. Перечислите свойства функции $y = \sin x$; $y = \cos x$.
2. Как называют график функции $y = \sin x$; $y = \cos x$?
3. Почему графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ являются равными фигурами?

Упражнения

21.1. На каких из указанных промежутков функция $y = \sin x$ возрастает:

1) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;   3) $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$;

2) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$;   4) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$?

21.2. Какие из данных промежутков являются промежутками убывания функции $y = \cos x$:

1) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$; 3) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

2) $[-2\pi; -\pi]$; 4) $[6\pi; 7\pi]$?

21.3. Сравните:

1) $\sin 20^\circ$ и $\sin 21^\circ$;

2) $\cos 20^\circ$ и $\cos 21^\circ$;

3) $\sin\frac{10\pi}{9}$ и $\sin\frac{25\pi}{18}$;

4) $\cos\frac{10\pi}{9}$ и $\cos\frac{25\pi}{18}$;

5) $\cos 5{,}1$ и $\cos 5$;

6) $\sin 2$ и $\sin 2{,}1$.

21.4. Сравните:

1) $\cos\frac{\pi}{9}$ и $\cos\frac{4\pi}{9}$;

2) $\sin\frac{5\pi}{9}$ и $\sin\frac{17\pi}{18}$;

3) $\sin\left(-\frac{7\pi}{30}\right)$ и $\sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right)$;

4) $\cos\frac{10\pi}{7}$ и $\cos\frac{11\pi}{9}$.

21.5. Постройте график функции:

1) $y = \sin\left|x + \frac{\pi}{4}\right|$; 2) $y = 2\cos\left|x - \frac{\pi}{3}\right|$.

21.6. Постройте график функции:

1) $y = 2\sin\left|x + \frac{\pi}{6}\right|$; 2) $y = -\cos\left|x - \frac{\pi}{4}\right|$.

21.7. Постройте график функции $y = \sin\left(|x| - \frac{\pi}{4}\right)$.

21.8. Постройте график функции $y = 2\cos\left(|x| - \frac{\pi}{3}\right) - 1$.

21.9. Постройте график функции $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$.

21.10. Постройте график функции $y = -3\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 2$.

21.11. Постройте график функции:

1) $y = 2\cos|3x + 2|$; 2) $y = -2\sin\left(\frac{1}{2}|x| - 1\right)$.

21.12. Постройте график функции:

1) $y = 3\sin|2x - 1|$; 2) $y = \frac{1}{2}\cos\left(2|x| + \frac{\pi}{3}\right)$.

21.13. Возможно ли равенство:

1) $\cos\alpha = 2\sin 25^\circ$; 2) $\sin\alpha = \sqrt{2}\cos 35^\circ$?

21.14. Постройте график функции:

1) $y = \left|\sin\left|\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right|\right|$; 2) $y = \left|\cos\left|2x - \frac{\pi}{3}\right|\right|$.

21.15. Постройте график функции:

1) $y = \left|\cos\left(2|x| - \frac{\pi}{3}\right)\right|$; 2) $y = \left|\sin\left(\frac{1}{2}|x| + \frac{\pi}{6}\right)\right|$.

21.16. Постройте график функции:

1) $y = (\sqrt{\sin x})^2$; 4) $y = \frac{\sin|x|}{\sin x}$;

2) $y = \cos x + \sqrt{\cos^2 x}$; 5) $y = \frac{\sin x}{|\sin x|}$;

3) $y = \sqrt{-\sin^2 x}$; 6) $y = \operatorname{tg} x |\cos x|$.

21.17. Постройте график функции:

1) $y = (\sqrt{\cos x})^2$; 4) $y = \frac{|\cos x|}{\cos x}$;

2) $y = \sin x - \sqrt{\sin^2 x}$; 5) $y = \operatorname{ctg} x |\sin x|$;

3) $y = \sqrt{\sin x - 1}$; 6) $y = \frac{\sin|x|}{|\sin x|}$.

21.18. Постройте график уравнения:

1) $\sin\pi(x^2 + y^2) = 0$; 2) $\sin x + \sin y = 2$.

21.19. Постройте график уравнения:

1) $\cos\pi(x^2 + y^2) = 1$; 2) $\cos x + \cos y = -2$.

21.20. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\cos\sqrt{a^2 - x^2} = 1$ имеет ровно восемь корней.

§ 22 Свойства и графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то есть на промежутке длиной в период этой функции $\left(\text{напомним, что функция } y = \operatorname{tg} x \text{ в точках } -\frac{\pi}{2} \text{ и } \frac{\pi}{2} \text{ не определена}\right)$.

Из рисунка 22.1 видно, что при изменении угла поворота x от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ значения тангенса увеличиваются. Это означает, что функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Также из рисунка 22.1 видно, что функция $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ принимает все значения из промежутка $(-\infty; +\infty)$.

Функция $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ имеет один нуль: $x = 0$.

Если $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, то $\operatorname{tg} x < 0$; если $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{tg} x > 0$.

Полученные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ позволяют построить её график на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 22.2). График можно построить точнее, если воспользоваться данными таблицы значений тригонометрических функций некоторых углов, приведённой на форзаце.

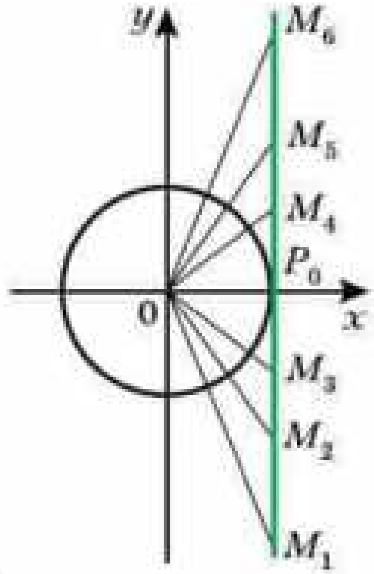


Рис. 22.1

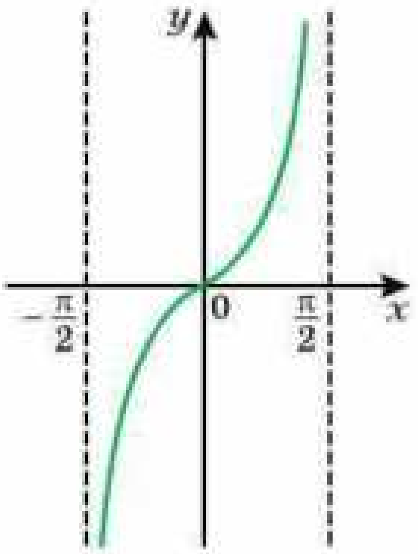


Рис. 22.2

На всей области определения график функции $y = \operatorname{tg} x$ можно получить из построенного графика с помощью параллельных переносов на векторы с координатами $(\pi n; 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 22.3).

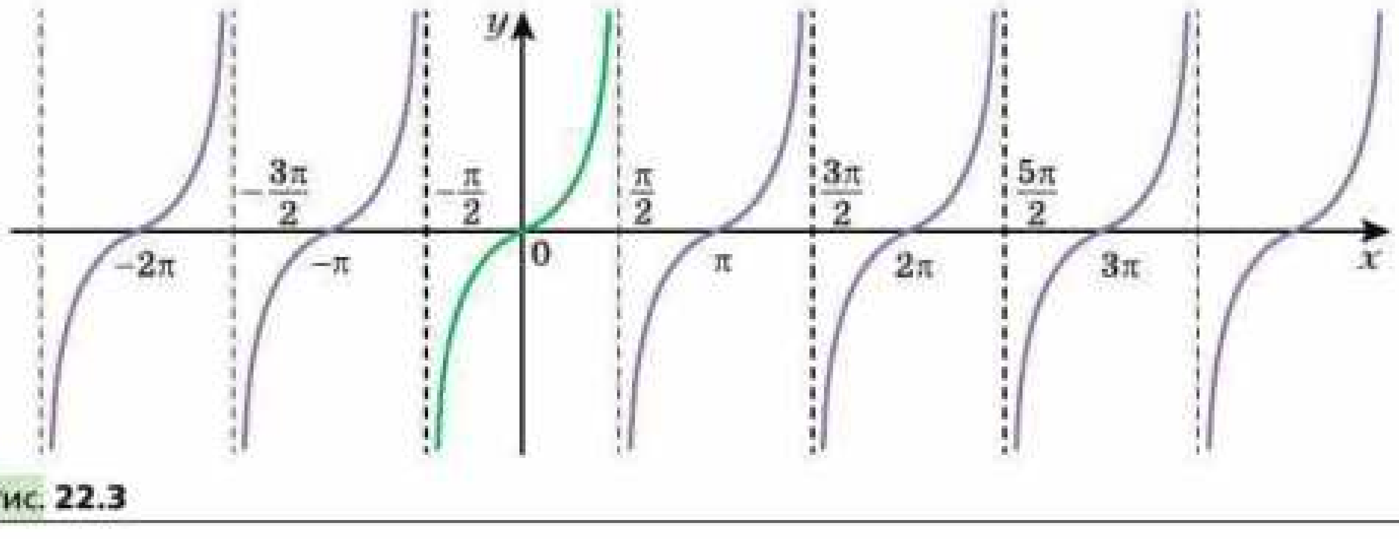


Рис. 22.3

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $(0; \pi)$, то есть на промежутке длиной в период (напомним, что функция $y = \operatorname{ctg} x$ не определена в точках 0 и π).

Из рисунка 22.4 видно, что при изменении угла поворота x от 0 до π значения котангенса уменьшаются. Это означает, что функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает на промежутке $(0; \pi)$.

Также из рисунка 22.4 видно, что функция $y = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $(0; \pi)$ принимает все значения из промежутка $(-\infty; +\infty)$.

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $(0; \pi)$ имеет один нуль: $x = \frac{\pi}{2}$.

Если $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{ctg} x > 0$; если $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, то $\operatorname{ctg} x < 0$.

График функции $y = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $(0; \pi)$ изображён на рисунке 22.5.

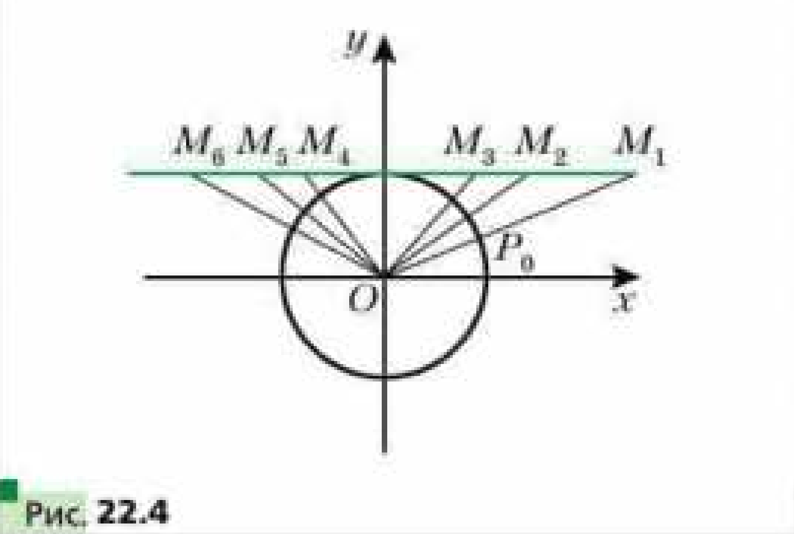


Рис. 22.4

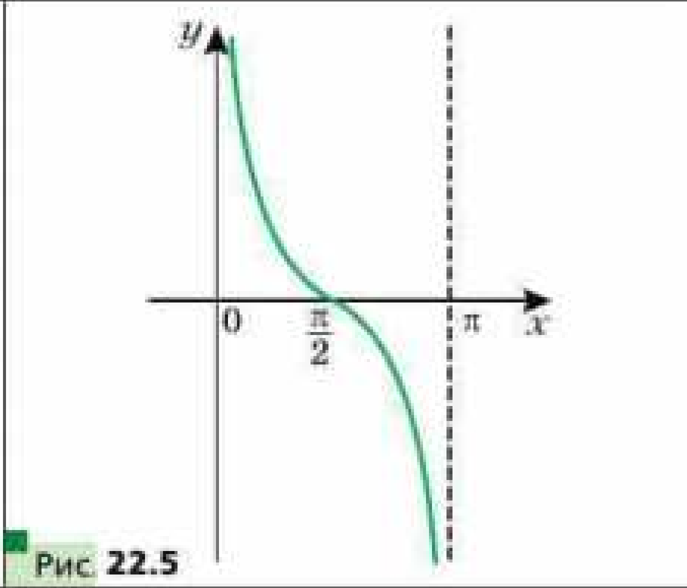


Рис. 22.5

На всей области определения график функции $y = \operatorname{ctg} x$ можно получить из построенного графика с помощью параллельных переносов на векторы с координатами $(\pi n; 0)$, $n \in \mathbf{Z}$ (рис. 22.6).

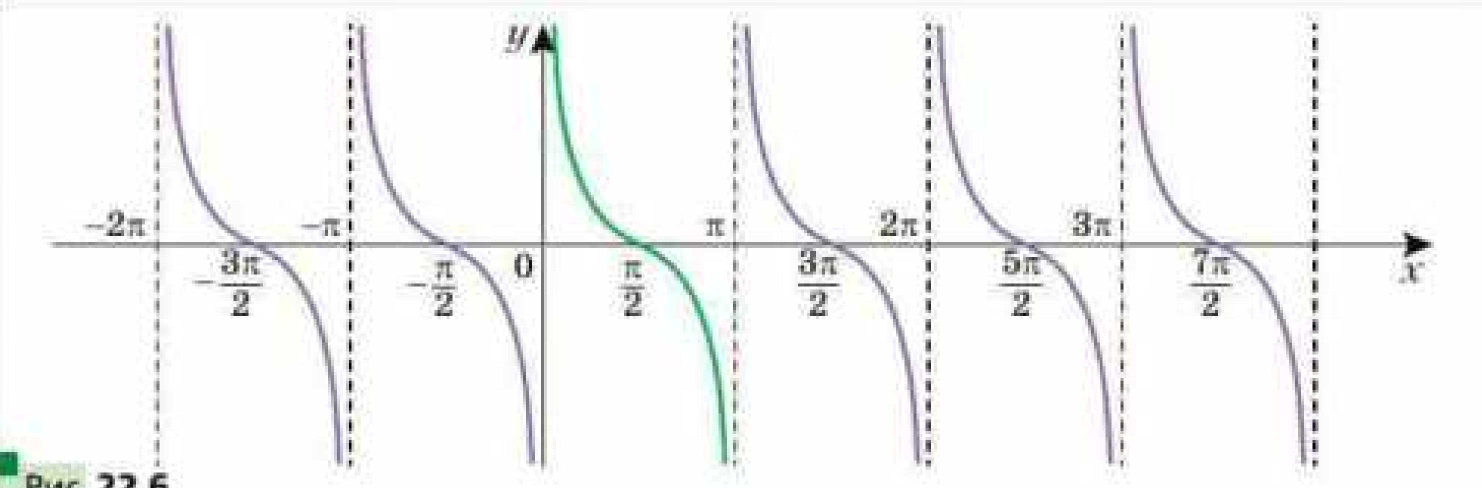


Рис. 22.6

В таблице приведены основные свойства функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.

	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
Область определения	$\left\{x \in \boldsymbol{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}$	$\{x \in \boldsymbol{R} \mid x \neq \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}\}$
Область значений	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$
Периодичность	Периодическая с главным периодом, равным π	Периодическая с главным периодом, равным π
Нули функции	Числа вида πn, $n \in \boldsymbol{Z}$	Числа вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$
Промежутки знакопостоянства	$\operatorname{tg} x > 0$ на каждом из промежутков вида $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\operatorname{tg} x < 0$ на каждом из промежутков вида $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$	$\operatorname{ctg} x > 0$ на каждом из промежутков вида $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\operatorname{ctg} x < 0$ на каждом из промежутков вида $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$
Чётность	Нечётная	Нечётная
Возрастание/убывание	Возрастает на каждом из промежутков вида $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$	Убывает на каждом из промежутков вида $(\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$
Наибольшее и наименьшее значения	Наибольшего и наименьшего значений не принимает	Наибольшего и наименьшего значений не принимает

Определение

Функцию f называют ограниченной, если существует число M такое, что для любого $x \in D(f)$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M$.

Понятно, что функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ являются ограниченными, а функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ ограниченными не являются.

Пример. Постройте график функции $y = |\operatorname{ctg} x| \operatorname{tg} x$.

Решение. Областью определения данной функции являются все действительные числа, кроме чисел вида $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то есть

$$D(y) = \left\{x \in \boldsymbol{R} \mid x \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}\right\}.$$

Если $\pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, то $\operatorname{ctg} x > 0$ и $y = 1$.

Если $\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \pi + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, то $\operatorname{ctg} x < 0$ и $y = -1$.

Искомый график состоит из отдельных отрезков с «выколотыми» концами (рис. 22.7). ■

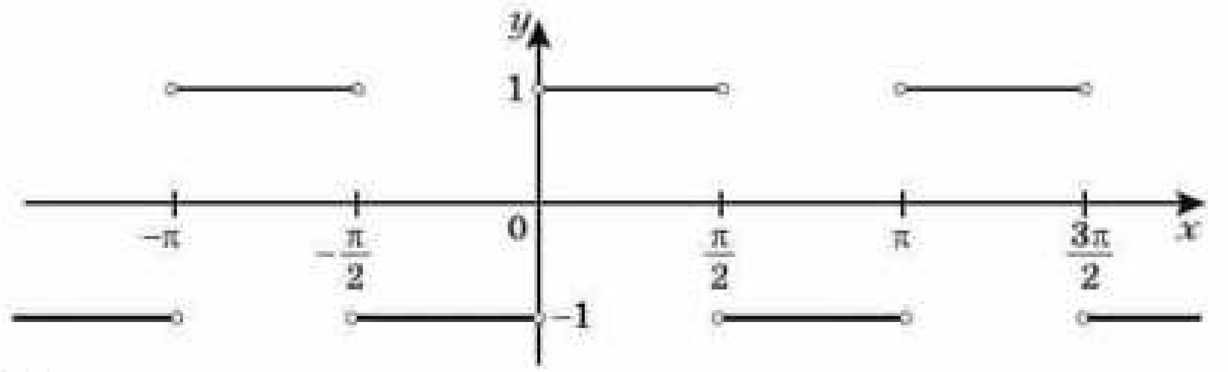


Рис. 22.7

Перечислите свойства функции $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$.

Упражнения

22.1. Сравните:

1) $\operatorname{tg}(-38^\circ)$ и $\operatorname{tg}(-42^\circ)$;
2) $\operatorname{tg} 130^\circ$ и $\operatorname{tg} 150^\circ$;
3) $\operatorname{tg} 0{,}9\pi$ и $\operatorname{tg} 1{,}2\pi$;
4) $\operatorname{tg} 1$ и $\operatorname{tg} 1{,}5$;
5) $\operatorname{ctg}(-40^\circ)$ и $\operatorname{ctg}(-60^\circ)$;
6) $\operatorname{ctg} 2$ и $\operatorname{ctg} 3$.

22.2. Сравните:

1) $\operatorname{tg} 100^\circ$ и $\operatorname{tg} 92^\circ$;
2) $\operatorname{ctg} 100^\circ$ и $\operatorname{ctg} 92^\circ$;
3) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{9}$ и $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{18}$;
4) $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8}$ и $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$;
5) $\operatorname{tg}(-1)$ и $\operatorname{tg}(-1{,}2)$;
6) $\operatorname{ctg}(-3)$ и $\operatorname{ctg}(-3{,}1)$.

22.3. Постройте график функции:

1) $y = -\operatorname{tg} x$;
2) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;
3) $y = \operatorname{tg} 3x$.

22.4. Постройте график функции:

1) $y = \operatorname{ctg} x - 1$;
2) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;
3) $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

22.5. Постройте график функции:

1) $y = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$;   2) $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

22.6. Постройте график функции:

1) $y = 2\operatorname{tg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}$;   2) $y = \operatorname{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{12}\right)$.

22.7. Возможно ли равенство:

1) $\sin\alpha = \frac{2}{3}\operatorname{tg}80^\circ$;   2) $\cos\alpha = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{18}$?

22.8. Постройте график функции:

1) $y = (\sqrt{\operatorname{ctg} x})^2$;
2) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}|x|$;
3) $y = \sqrt{-\operatorname{tg}^2 x}$;
4) $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{|\operatorname{ctg} x|}$;
5) $y = \operatorname{ctg} x - \sqrt{\operatorname{ctg}^2 x}$;
6) $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x}$.

22.9. Постройте график функции:

1) $y = (\sqrt{\operatorname{tg} x})^2$;
2) $y = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}|x|$;
3) $y = \sqrt{-\operatorname{ctg}^2 x}$;
4) $y = \frac{|\operatorname{tg} x|}{\operatorname{tg} x}$;
5) $y = \operatorname{tg} x + \sqrt{\operatorname{tg}^2 x}$;
6) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$.

22.10. Постройте график уравнения:

1) $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 0$;   2) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y = 0$.

22.11. Постройте график уравнения:

1) $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = 0$;   2) $\operatorname{tg}\pi(x - y) = 1$.

§ 23 Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

В этом параграфе установим тождества, связывающие значения тригонометрических функций одного и того же аргумента.

Координаты любой точки $P(x; y)$ единичной окружности удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$. Поскольку $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, где α — угол поворота, в результате которого из точки $P_0(1; 0)$ была получена точка P, то

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1} \qquad (1)$$

Обратим внимание на то, что точка P на единичной окружности выбрана произвольно. Поэтому равенство (1) справедливо для любого α. Его называют **основным тригонометрическим тождеством**.

Используя основное тригонометрическое тождество, найдём зависимость между тангенсом и косинусом, а также между котангенсом и синусом.

Пусть $\cos\alpha \neq 0$. Разделим обе части равенства (1) на $\cos^2\alpha$. Получим:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.\text{ Отсюда}$$

$$\boxed{1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

Это тождество верно для всех α, при которых $\cos\alpha \neq 0$, то есть при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Пусть $\sin\alpha \neq 0$. Разделим обе части равенства (1) на $\sin^2\alpha$. Получим:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.\text{ Отсюда}$$

$$\boxed{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}}$$

Это тождество верно для всех α, при которых $\sin\alpha \neq 0$, то есть при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Связь между тангенсом и котангенсом можно установить с помощью равенств $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Отсюда

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1}$$

Это тождество верно для всех α, при которых $\sin\alpha \neq 0$ и $\cos\alpha \neq 0$, то есть при $\alpha \neq \pi k$ и $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Заметим, что эти два ограничения для α можно объединить в одно: $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Пример 1. Найдите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{7}{25}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение. Имеем: $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(-\frac{7}{25}\right)^2 = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}$.

Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha < 0$, следовательно, $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{576}{625}} = -\frac{24}{25}$.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{7}{25} : \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{7}{24}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{24}{7}$. ■

Пример 2. Упростите выражение $\sqrt{\sin^2\alpha(1-\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^2\alpha(1-\operatorname{ctg}\alpha)}$, если $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Решение. $\sqrt{\sin^2\alpha(1-\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^2\alpha(1-\operatorname{ctg}\alpha)} =$

$$= \sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \cos^2\alpha - \cos^2\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} =$$

$$= \sqrt{\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \cos\alpha\sin\alpha} =$$

$$= \sqrt{\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha} = \sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2} = |\sin\alpha - \cos\alpha|.$$

Так как $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, то $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$. Поэтому $\sin\alpha - \cos\alpha < 0$. Следовательно, $|\sin\alpha - \cos\alpha| = \cos\alpha - \sin\alpha$.

Ответ: $\cos\alpha - \sin\alpha$. ■

1. Какое равенство называют основным тригонометрическим тождеством?
2. Какое тождество связывает тангенс и косинус одного и того же аргумента? Для каких значений аргумента верно это тождество?
3. Какое тождество связывает котангенс и синус одного и того же аргумента? Для каких значений аргумента верно это тождество?
4. Какое тождество связывает тангенс и котангенс одного и того же аргумента? Для каких значений аргумента верно это тождество?

Упражнения

23.1. Упростите выражение:

1) $(1+\operatorname{tg}\alpha)^2 + (1-\operatorname{tg}\alpha)^2$;
2) $\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$;
3) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$;
4) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$;
5) $\frac{1-\operatorname{ctg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\gamma}$;
6) $\cos^4\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$;
7) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha$;
8) $\cos(-\alpha) + \cos\alpha\operatorname{tg}^2(-\alpha)$.

23.2. Упростите выражение:

1) $(1+\operatorname{ctg}\beta)^2+(1-\operatorname{ctg}\beta)^2$;

2) $\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+2)$;

3) $\dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta}+\dfrac{1-\sin\beta}{\cos\beta}$;

4) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}$;

5) $\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\cos^2\alpha-1$;

6) $\operatorname{tg}(-\alpha)\operatorname{ctg}\alpha+\sin^2(-\alpha)$.

23.3. Найдите значения тригонометрических функций аргумента α, если:

1) $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$;

2) $\sin\alpha=0{,}6$ и $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

3) $\operatorname{tg}\alpha=2$ и $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$;

4) $\operatorname{ctg}\alpha=-\dfrac{4}{3}$ и $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

23.4. Найдите значения тригонометрических функций аргумента α, если:

1) $\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$ и $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$;

2) $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ и $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$;

3) $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{1}{3}$ и $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

4) $\operatorname{ctg}\alpha=-7$ и $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

23.5. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}=\cos\alpha-\sin\alpha$;

2) $\dfrac{\sqrt{3}-2\sin\alpha}{2\cos\alpha-1}=\dfrac{1+2\cos\alpha}{2\sin\alpha+\sqrt{3}}$;

3) $\dfrac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;

4) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha$.

23.6. Докажите тождество:

1) $\sin^4\alpha\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^4\alpha=\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

2) $(\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha)\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha}=1$.

23.7. Докажите тождество:

1) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha=\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

2) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$.

23.8. Докажите тождество $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)=-1$.

23.9. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{3}$;

2) $\dfrac{2\cos^2\alpha-7\sin^2\alpha}{3\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha=-2$;

3) $\dfrac{8\sin\alpha - 3\cos\alpha}{\sin^3\alpha + 5\sin^2\alpha\cos\alpha - 8\cos^3\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -3$.

23.10. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{5\cos\alpha + 6\sin\alpha}{3\sin\alpha - 7\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$;

2) $\dfrac{2\sin^3\alpha + 3\cos^3\alpha}{5\sin\alpha - \cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -4$.

◆◆◆

23.11. Упростите выражение:

1) $\sqrt{\cos^2\beta(1 + \operatorname{tg}\beta) + \sin^2\beta(1 + \operatorname{ctg}\beta)}$, если $\pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$;

2) $\dfrac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha\cos^2\beta}}{\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\alpha}$, если $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$;

3) $\sqrt{2 - 2\cos^2\beta} + \sqrt{2\sin^2\beta - 2\sqrt{2}\sin\beta + 1}$, если $\dfrac{3\pi}{4} \leqslant \beta \leqslant \pi$.

23.12. Упростите выражение:

1) $\sin\alpha - \sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha}$, если $180^\circ < \alpha < 360^\circ$;

2) $\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}}$, если $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;

3) $\sqrt{4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha + 1} - \sqrt{4 - 4\sin^2\alpha}$, если $\dfrac{2\pi}{3} \leqslant \alpha \leqslant \pi$.

23.13. Дано: $\sin\alpha + \cos\alpha = b$. Найдите:

1) $\sin\alpha\cos\alpha$; 2) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$; 3) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$.

23.14. Дано: $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = b$. Найдите:

1) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$; 2) $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$; 3) $(\cos\alpha + \sin\alpha)^2$.

23.15. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $2\cos^2\alpha - 3\sin\alpha$;

2) $\operatorname{tg}^2\alpha + \dfrac{1}{\cos\alpha}$;

3) $1 - \sqrt{\cos^2\alpha} - 2\sin^2\alpha$;

4) $3\cos^2\alpha - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$.

23.16. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $3\sin^2\alpha + 2\cos\alpha$;

2) $1 + \sqrt{\sin^2\alpha} + 2\cos^2\alpha$;

3) $2\sin^2\alpha + 3\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$.

23.17. Постройте график функции:

1) $y = \sin^2\sqrt{1 - x^2} + \cos^2\sqrt{1 - x^2}$; 2) $y = \operatorname{tg}^2 x - \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

23.18. Постройте график функции $y = \dfrac{1}{\sin^2 x} - \operatorname{ctg}^2 x$.

23.19. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = \sin^{14} x + \cos^{14} x$.

23.20. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \sin^{10} x + \cos^{13} x$.

§ 24 Формулы сложения

Формулами сложения называют формулы, выражающие $\cos(\alpha \pm \beta)$, $\sin(\alpha \pm \beta)$ и $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ через тригонометрические функции углов α и β.

Докажем, что

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Пусть точки P_1 и P_2 получены в результате поворота точки $P_0(1; 0)$ на углы α и β соответственно.

Рассмотрим случай, когда $0 \leqslant \alpha - \beta \leqslant \pi$. Тогда угол между векторами $\overrightarrow{OP_1}$ и $\overrightarrow{OP_2}$ равен $\alpha - \beta$ (рис. 24.1). Координаты точек P_1 и P_2 соответственно равны $(\cos\alpha; \sin\alpha)$ и $(\cos\beta; \sin\beta)$. Тогда вектор $\overrightarrow{OP_1}$ имеет координаты $(\cos\alpha; \sin\alpha)$, а вектор $\overrightarrow{OP_2}$ — $(\cos\beta; \sin\beta)$.

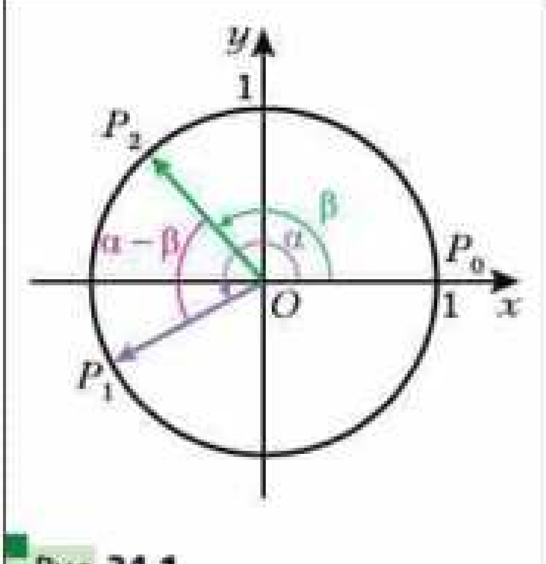


Рис. 24.1

Выразим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OP_1}$ и $\overrightarrow{OP_2}$ через их координаты:

$$\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

В то же время по определению скалярного произведения векторов можно записать

$$\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = \left|\overrightarrow{OP_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OP_2}\right| \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta).$$

Отсюда получаем формулу, которую называют **косинус разности**:

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} \qquad (1)$$

Покажем, что доказательство не изменится при любом выборе углов α и β, в частности, когда $(\alpha - \beta) \notin [0; \pi]$.

Углы поворотов α и β для точек P_1 и P_2 соответственно можно представить в таком виде:

$\alpha = \alpha_1 + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, $\alpha_1 \in [0; 2\pi]$;

$\beta = \beta_1 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, $\beta_1 \in [0; 2\pi]$.

Тогда угол между векторами $\overrightarrow{OP_1}$ и $\overrightarrow{OP_2}$ принимает одно из четырёх значений: $\alpha_1 - \beta_1$ (рис. 24.2); $\beta_1 - \alpha_1$ (рис. 24.3); $2\pi - (\alpha_1 - \beta_1)$ (рис. 24.4); $2\pi - (\beta_1 - \alpha_1)$ (рис. 24.5).

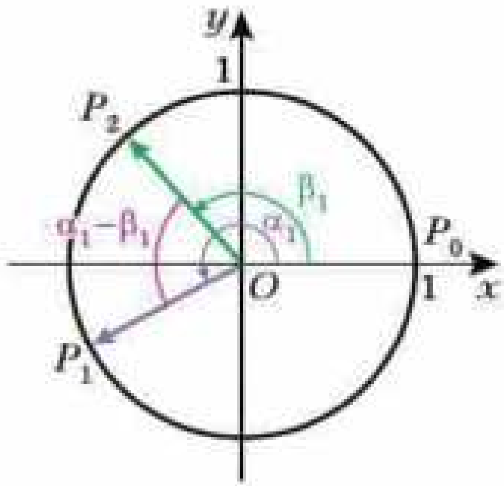


Рис. 24.2

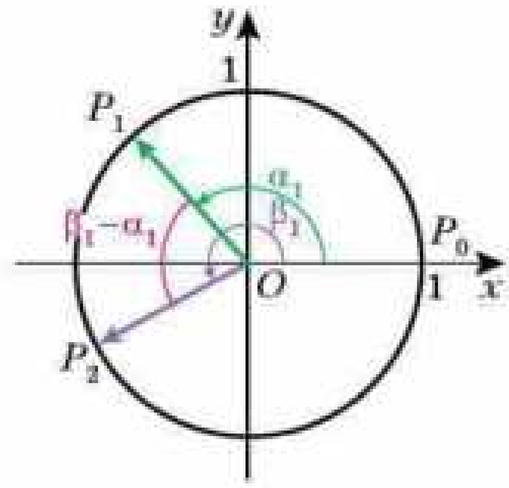


Рис. 24.3

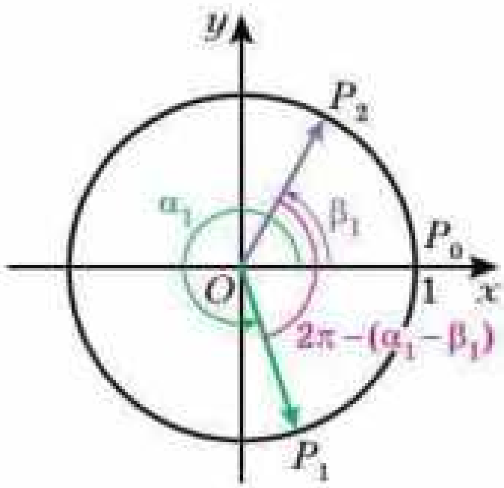


Рис. 24.4

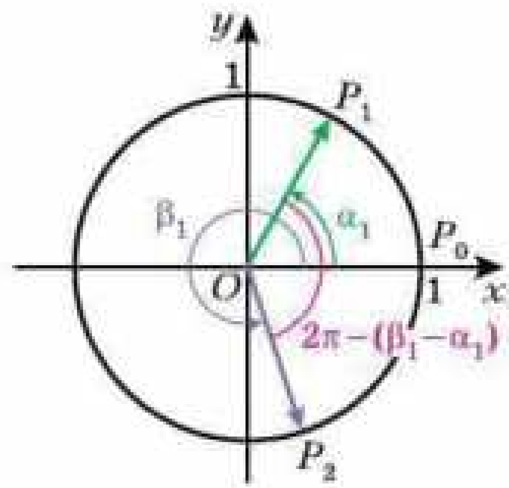


Рис. 24.5

Тогда косинус угла между векторами $\overrightarrow{OP_1}$ и $\overrightarrow{OP_2}$ равен $\cos(\alpha - \beta)$. Далее остаётся только повторить приведённые выше рассуждения для случая, когда $(\alpha - \beta) \in [0; \pi]$.

Докажем формулу **косинуса суммы:**

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Имеем: $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

Докажем формулы **синуса суммы и синуса разности:**

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

С помощью формулы (1) докажем, что

$$\boxed{\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

Имеем: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha = \sin\alpha.$

Теперь докажем, что

$$\boxed{\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

Имеем: $\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$

Тогда $\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) =$$
$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Формулы тангенса суммы и тангенса разности имеют вид:

$$\boxed{\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}} \qquad (2)$$

$$\boxed{\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}} \qquad (3)$$

Докажем формулу (2). Имеем:

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Предположив, что $\cos\alpha\cos\beta \neq 0$, полученную дробь можно переписать так:

$$\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}.$$

Формулу тангенса разности (3) докажите самостоятельно.

Тождество (2) верно для всех α и β, при которых $\cos(\alpha + \beta) \neq 0$, $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$.

Тождество (3) верно для всех α и β, при которых $\cos(\alpha - \beta) \neq 0$, $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$.

Пример 1. Найдите $\cos 15^\circ$.

Решение. Имеем:

$$\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}. \blacksquare$$

Пример 2. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$.

Решение. Представим данное выражение в виде синуса суммы. Для этого умножим и разделим данное выражение на 2:

$$\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha = 2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right).$$

Учитывая, что $\frac{1}{2} = \sin 30^\circ$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$, получаем:

$$\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha = 2(\sin 30^\circ \cos\alpha + \cos 30^\circ \sin\alpha) = 2\sin(30^\circ + \alpha).$$

Следовательно, наибольшее значение данного выражения равно 2 (его выражение принимает при $\sin(30^\circ + \alpha) = 1$), наименьшее значение равно -2 (его выражение принимает при $\sin(30^\circ + \alpha) = -1$). ■

? Какие формулы называют формулами сложения? Запишите их.

Упражнения

24.1. Упростите выражение:

1) $\sin\alpha\cos 4\alpha + \cos\alpha\sin 4\alpha$;

2) $\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{3\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$;

3) $\sin\alpha\sin(\alpha+\beta) + \cos\alpha\cos(\alpha+\beta)$;

4) $\sin 53^\circ\cos 7^\circ - \cos 53^\circ\sin(-7^\circ)$;

5) $\cos(\alpha+\beta) + 2\sin\alpha\sin\beta$.

24.2. Упростите выражение:

1) $\cos 6\alpha\cos 2\alpha - \sin 6\alpha\sin 2\alpha$;

2) $\sin(-15^\circ)\cos 75^\circ + \cos 15^\circ\sin 75^\circ$;

3) $\dfrac{\cos 64^\circ\cos 4^\circ + \sin 64^\circ\sin 4^\circ}{\sin 19^\circ\cos 41^\circ + \sin 41^\circ\cos 19^\circ}$;

4) $\cos(\alpha-\beta) - 2\sin\alpha\sin\beta$.

24.3. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}1^\circ - \operatorname{tg}46^\circ}{1 + \operatorname{tg}1^\circ\operatorname{tg}46^\circ}$;

2) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}27^\circ\operatorname{tg}33^\circ}{\operatorname{tg}27^\circ + \operatorname{tg}33^\circ}$.

24.4. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\operatorname{tg}24^\circ + \operatorname{tg}36^\circ}{1 - \operatorname{tg}24^\circ\operatorname{tg}36^\circ}$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg}5\alpha - \operatorname{tg}3\alpha}{1 + \operatorname{tg}5\alpha\operatorname{tg}3\alpha}$.

24.5. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\sin(45^\circ+\alpha)-\cos(45^\circ+\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ+\alpha)}=\operatorname{tg}\alpha$;

2) $\dfrac{\sin\alpha+2\sin(60^\circ-\alpha)}{2\cos(30^\circ-\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}=\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha$.

24.6. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\cos\alpha}=1$; 2) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\sin(45^\circ-\alpha)}{2\sin(60^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}=\sqrt{2}$.

24.7. Дано: $\sin\alpha=\dfrac{9}{41}$, $90^\circ<\alpha<180^\circ$. Найдите $\sin(\alpha+45^\circ)$.

24.8. Дано: $\cos\alpha=-0{,}6$, $180^\circ<\alpha<270^\circ$. Найдите $\cos(60^\circ-\alpha)$.

24.9. Найдите $\cos(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ и $\cos\beta=-\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$.

24.10. Найдите $\sin(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=-\dfrac{15}{17}$, $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$ и $\cos\beta=\dfrac{7}{25}$, $\dfrac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$.

24.11. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\sin\beta=\dfrac{3}{5}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$. Найдите $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

24.12. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2}{3}$. Найдите $\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)$.

24.13. Докажите тождество:

1) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; 2) $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$.

24.14. Докажите тождество $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

24.15. Упростите выражение:

1) $\cos\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{4}+\sin\dfrac{\alpha}{2}$; 2) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha}$.

24.16. Упростите выражение:

1) $\cos2\alpha+\sin2\alpha\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\cos4\alpha-\sin4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha$.

◆◆

24.17. Пользуясь формулами сложения, найдите:

1) $\sin15^\circ$; 2) $\sin105^\circ$; 3) $\operatorname{ctg}105^\circ$.

24.18. Пользуясь формулами сложения, найдите:

1) $\cos75^\circ$; 2) $\sin75^\circ$.

24.19. Упростите выражение:

1) $\operatorname{tg}10^\circ+\operatorname{tg}50^\circ+\sqrt{3}\operatorname{tg}10^\circ\operatorname{tg}50^\circ$; 2) $\operatorname{tg}70^\circ-\operatorname{tg}25^\circ-\operatorname{tg}70^\circ\operatorname{tg}25^\circ$.

24.20. Упростите выражение:

1) $\operatorname{tg}80^\circ-\operatorname{tg}20^\circ-\sqrt{3}\operatorname{tg}80^\circ\operatorname{tg}20^\circ$; 2) $\operatorname{tg}35^\circ+\operatorname{tg}10^\circ+\operatorname{tg}35^\circ\operatorname{tg}10^\circ$.

24.21. Докажите тождество:

1) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta}{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}+2\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{2}{\cos^2\alpha}$.

24.22. Докажите тождество:

1) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$;

2) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=0$.

24.23. Найдите наибольшее значение выражения:

1) $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha$;

2) $4\sin\alpha+5\cos\alpha$;

3) $\sin\alpha+\cos\alpha$;

4) $2\sin\alpha-\cos\alpha$.

24.24. Найдите наибольшее значение выражения:

1) $\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha$;

2) $\sqrt{5}\cos\alpha-2\sqrt{5}\sin\alpha$;

3) $3\sin\alpha+\cos\alpha$.

24.25. Дано: $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)=-\dfrac{2}{5}$, $\dfrac{5\pi}{6}<\alpha<\dfrac{4\pi}{3}$. Найдите $\sin\alpha$.

24.26. Дано: $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$, $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$. Найдите $\sin\alpha$.

24.27. Дано: $\cos(5^\circ+\alpha)=0{,}6$, $0^\circ<\alpha<55^\circ$. Найдите $\operatorname{tg}(35^\circ+\alpha)$.

24.28. Дано: $\sin(40^\circ+\alpha)=b$, $0^\circ<\alpha<45^\circ$. Найдите $\cos(70^\circ+\alpha)$.

24.29. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{5}{3}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$. Найдите $\alpha-\beta$.

24.30. Дано: $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$, $\sin\beta=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$, $0^\circ<\alpha<90^\circ$, $0^\circ<\beta<90^\circ$. Найдите $\alpha+\beta$.

24.31. Дано: $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$, $\sin\beta=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$, $0^\circ<\alpha<90^\circ$, $0^\circ<\beta<90^\circ$. Найдите $\alpha+\beta$.

24.32. Постройте график функции:

1) $y=\dfrac{\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}x}$;

2) $y=\dfrac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}x}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}x}$.

24.33. Постройте график функции:

1) $y=\dfrac{\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}3x\operatorname{tg}x}$;

2) $y=\dfrac{\operatorname{tg}x-1}{\operatorname{tg}x+1}$.

24.34. Докажите, что если α, β и γ — углы непрямоугольного треугольника, то $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

24.35. Докажите, что если α, β и γ — углы треугольника, то $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1$.

24.36. Докажите неравенство $\sin(\alpha+\beta)<\cos\alpha+\cos\beta$, где $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

24.37. Докажите неравенство $\cos(\alpha-\beta)<\cos\alpha+\sin\beta$, где $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

24.38. Известно, что $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\geqslant\sqrt{5}$. Докажите, что $\cos\alpha+\cos\beta+$ $+\cos\gamma\leqslant 2$.

24.39. Докажите неравенство $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\geqslant 1$, где α, β и γ — углы треугольника.

24.40. Докажите неравенство $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\geqslant\sqrt{3}$, где α, β и γ — углы треугольника.

§ 25 Формулы приведения

Периодичность тригонометрических функций позволяет сводить вычисление значений синуса и косинуса к случаю, когда значение аргумента принадлежит промежутку $[0;\ 2\pi]$, а вычисление значений тангенса и котангенса — к случаю, когда значение аргумента принадлежит промежутку $[0;\ \pi]$. В этом параграфе мы рассмотрим формулы, позволяющие в подобных вычислениях ограничиться лишь углами от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Каждый угол из промежутка $[0;\ 2\pi]$ можно представить в виде $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, или $\pi\pm\alpha$, или $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, где $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. Например, $\frac{2\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$.

Вычисление синусов и косинусов углов вида $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ можно свести к вычислению синуса или косинуса угла α. Например:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha=-\sin\alpha;$$

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\pi\cos\alpha-\cos\pi\sin\alpha=\sin\alpha.$$

Применив формулы сложения, можно получить:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha \qquad \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha \qquad \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha \qquad \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha \qquad \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$$

Эти шесть формул называют **формулами приведения для синуса.**

Следующие формулы называют **формулами приведения для косинуса:**

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \qquad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha \qquad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$$

Вычисление тангенсов и котангенсов углов вида $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ можно свести к вычислению тангенса или котангенса угла α. Например:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Аналогично можно получить:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha$$

Эти формулы называют **формулами приведения для тангенса и котангенса.**

Проанализировав записанные формулы приведения, можно заметить закономерности, которые делают заучивание этих формул не обязательным.

Для того чтобы записать любую из них, можно руководствоваться следующими правилами.

1. ***В правой части равенства ставят тот знак, который имеет левая часть при условии, что*** $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

2. ***Если в левой части формулы угол имеет вид $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ или $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то синус заменяют на косинус, тангенс — на котангенс, и наоборот. Если угол имеет вид $\pi \pm \alpha$, то замена функции не происходит.***

Покажем, как действуют эти правила для выражения $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

Предположив, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, приходим к выводу: $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ является углом III четверти. Тогда $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) < 0$. По первому правилу в правой части равенства должен стоять знак «−».

Поскольку аргумент имеет вид $\frac{3\pi}{2} - \alpha$, то по второму правилу следует заменить синус на косинус.

Следовательно, $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$.

Пример 1. Вычислите: 1) $\sin 930^\circ$; 2) $\cos(-480^\circ)$.

Решение. 1) $\sin 930^\circ = \sin(360^\circ \cdot 2 + 210^\circ) = \sin 210^\circ =$

$$= \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2};$$

2) $\cos(-480^\circ) = \cos 480^\circ = \cos(360^\circ + 120^\circ) = \cos 120^\circ =$

$$= \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}. \blacksquare$$

Пример 2. Вычислите $\operatorname{tg} 41^\circ \operatorname{tg} 42^\circ \operatorname{tg} 43^\circ \operatorname{tg} 44^\circ \ldots \operatorname{tg} 49^\circ$.

Решение. Имеем: $\operatorname{tg} 49^\circ = \operatorname{ctg} 41^\circ$, $\operatorname{tg} 48^\circ = \operatorname{ctg} 42^\circ$ и т. д. Тогда, объединив попарно множители, равноудалённые от концов произведения, получим четыре произведения, каждое из которых равно 1:

$$\operatorname{tg} 41^\circ \operatorname{tg} 49^\circ = \operatorname{tg} 42^\circ \operatorname{tg} 48^\circ = \operatorname{tg} 43^\circ \operatorname{tg} 47^\circ = \operatorname{tg} 44^\circ \operatorname{tg} 46^\circ = 1.$$

Ещё один множитель данного произведения $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$. Следовательно,

$$\operatorname{tg} 41^\circ \operatorname{tg} 42^\circ \operatorname{tg} 43^\circ \operatorname{tg} 44^\circ \ldots \operatorname{tg} 49^\circ = 1. \blacksquare$$

? Сформулируйте правила, которыми можно руководствоваться при применении формул приведения.

Упражнения

25.1. Вычислите:

1) $\cos 225^\circ$; 2) $\sin 240^\circ$; 3) $\cos\frac{5\pi}{4}$; 4) $\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$.

25.2. Вычислите:

1) $\mathrm{tg}\,210^\circ$; 2) $\mathrm{ctg}\,315^\circ$; 3) $\cos(-150^\circ)$; 4) $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$.

◆◆

25.3. Упростите выражение:

1) $\frac{\sin(\pi+\alpha)\cos(2\pi-\alpha)}{\mathrm{tg}(\pi-\alpha)\cos(\pi-\alpha)}$;

2) $\sin(\pi-\beta)\cos\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)\cos(\pi-\beta)$;

3) $\sin^2(\pi-x)+\mathrm{tg}^2(\pi-x)\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos(x-2\pi)$;

4) $\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin(\pi-x)\right)^2+\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\cos(2\pi-x)\right)^2$;

5) $\frac{\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi+\alpha)\right)}{\mathrm{ctg}(\pi+\alpha)(\cos(2\pi+\alpha)-\sin(2\pi-\alpha))}$.

25.4. Докажите тождество:

1) $\frac{\sin(\pi-\alpha)\sin(\alpha+2\pi)}{\mathrm{tg}(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=-\cos\alpha$;

2) $\frac{\mathrm{tg}(180^\circ-\alpha)\cos(180^\circ-\alpha)\,\mathrm{tg}(90^\circ-\alpha)}{\sin(90^\circ+\alpha)\,\mathrm{ctg}(90^\circ+\alpha)\,\mathrm{tg}(90^\circ+\alpha)}=1$;

3) $\sin(2\pi-\varphi)\,\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right)-\cos(\varphi-\pi)-\sin(\varphi-\pi)=\sin\varphi$;

4) $\frac{\sin(\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)\,\mathrm{tg}(\pi-\alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=-1$.

◆◆◆

25.5. Вычислите:

1) $\mathrm{ctg}\,5^\circ\,\mathrm{ctg}\,15^\circ\,\mathrm{ctg}\,25^\circ\ldots\mathrm{ctg}\,75^\circ\,\mathrm{ctg}\,85^\circ$;

2) $\mathrm{tg}\,20^\circ+\mathrm{tg}\,40^\circ+\mathrm{tg}\,60^\circ+\ldots+\mathrm{tg}\,160^\circ+\mathrm{tg}\,180^\circ$;

3) $\sin 0^\circ+\sin 1^\circ+\sin 2^\circ+\ldots+\sin 359^\circ+\sin 360^\circ$.

25.6. Вычислите:

1) $\sin 110^\circ+\sin 130^\circ+\sin 150^\circ+\ldots+\sin 230^\circ+\sin 250^\circ+\sin 270^\circ$;

2) $\mathrm{tg}\,10^\circ\,\mathrm{tg}\,20^\circ\,\mathrm{tg}\,30^\circ\ldots\mathrm{tg}\,70^\circ\,\mathrm{tg}\,80^\circ$;

3) $\mathrm{ctg}\,15^\circ+\mathrm{ctg}\,30^\circ+\mathrm{ctg}\,45^\circ+\ldots+\mathrm{ctg}\,165^\circ$.

25.7. Докажите тождество:

1) $\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=1$;

2) $\dfrac{\cos^4(\alpha-\pi)}{\cos^4\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)+\sin^4\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)-1}=-\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha;$

3) $\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)(\operatorname{tg}^2\alpha-1)\operatorname{ctg}\left(\alpha-\dfrac{5\pi}{4}\right)\sin^{-2}\left(\dfrac{5\pi}{4}+\alpha\right)=2.$

25.8. Найдите значение выражения $\cos^2\dfrac{\pi}{8}+\cos^2\dfrac{3\pi}{11}+\cos^2\dfrac{3\pi}{8}+\cos^2\dfrac{5\pi}{22}$.

25.9. Упростите выражение:

1) $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)+\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi+\alpha);$

2) $\dfrac{\cos^2(20^\circ-\alpha)}{\sin^2(70^\circ+\alpha)}+\operatorname{tg}(\alpha+10^\circ)\operatorname{ctg}(80^\circ-\alpha).$

25.10. Сумма положительных чисел α, β и γ равна $\dfrac{\pi}{2}$. Докажите, что $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma>\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$.

25.11. Сумма положительных чисел α, β и γ меньше $\dfrac{\pi}{2}$. Докажите, что $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma>\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma$.

§ 26 Формулы двойного, тройного и половинного углов

Формулы, выражающие тригонометрические функции угла 2α через тригонометрические функции угла α, называют **формулами двойного угла**.

В формулах сложения

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

положим $\beta=\alpha$. Получим:

$$\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$

$$\boxed{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

Эти формулы соответственно называют **формулами косинуса, синуса и тангенса двойного угла.**

Поскольку $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ и $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, то из формулы $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ получаем ещё две формулы:

$$\boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha}$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$$

Иногда эти формулы удобно использовать в таком виде:

$$\boxed{1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha}$$

$$\boxed{1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha}$$

или в таком виде:

$$\boxed{\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

$$\boxed{\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$$

Две последние формулы называют **формулами понижения степени.**

Пример 1. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}}$;   3) $\dfrac{2\cos^2\alpha - 1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}$.

2) $1 - 8\sin^2\beta\cos^2\beta$;

Решение. 1) Применяя формулу косинуса двойного аргумента $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ и формулу разности квадратов, получаем:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}} = -\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

2) $1 - 8\sin^2\beta\cos^2\beta = 1 - 2\cdot 4\sin^2\beta\cos^2\beta = 1 - 2\sin^2 2\beta = \cos 4\beta$.

3) Поскольку сумма аргументов $\frac{\pi}{4}-\alpha$ и $\frac{\pi}{4}+\alpha$ равна $\frac{\pi}{2}$, то $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$. Тогда

$$\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=$$

$$=\frac{\cos 2\alpha}{2\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{\cos 2\alpha}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}.$$

Применив формулу синуса двойного аргумента к углу $\frac{\pi}{4}-\alpha$, получаем:

$$\frac{\cos 2\alpha}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=\frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}=1. \blacksquare$$

Пример 2. Представьте в виде произведения выражение $1-\sin\alpha$.

Решение. С помощью формулы приведения заменим синус на косинус и применим формулу $1-\cos 2x=2\sin^2 x$:

$$1-\sin\alpha=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right). \blacksquare$$

Пример 3. Докажите тождество

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha=\frac{\sin 32\alpha}{32\sin\alpha}.$$

Решение. Умножим и разделим левую часть данного равенства на $\sin\alpha$ и многократно применим формулу синуса двойного аргумента:

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha=\frac{\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\sin 2\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha}{2\sin\alpha}=\frac{\sin 4\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha}{4\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\sin 8\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha}{8\sin\alpha}=\frac{\sin 16\alpha\cos 16\alpha}{16\sin\alpha}=\frac{\sin 32\alpha}{32\sin\alpha}. \blacksquare$$

Формулы, выражающие тригонометрические функции аргумента 3α через тригонометрические функции аргумента α, называют **формулами тройного аргумента**.

Имеем: $\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha=$

$$=2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha=$$

$$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha = 2\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha =$$
$$= 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

Следовательно,

$$\boxed{\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}$$

Эту формулу называют **формулой синуса тройного аргумента.**

Имеем: $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha =$
$$= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\cos\alpha\sin\alpha\sin\alpha =$$
$$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha(1 - \cos^2\alpha) =$$
$$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Следовательно,

$$\boxed{\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}$$

Эту формулу называют **формулой косинуса тройного аргумента.**

Пример 4. Докажите тождество
$$4\cos\alpha\cos(60^\circ - \alpha)\cos(60^\circ + \alpha) = \cos 3\alpha.$$

Решение. Применив формулы косинуса разности и косинуса суммы, получаем:

$$4\cos\alpha\cos(60^\circ - \alpha)\cos(60^\circ + \alpha) =$$
$$= 4\cos\alpha(\cos 60^\circ\cos\alpha + \sin 60^\circ\sin\alpha)(\cos 60^\circ\cos\alpha - \sin 60^\circ\sin\alpha) =$$
$$= 4\cos\alpha(\cos^2 60^\circ\cos^2\alpha - \sin^2 60^\circ\sin^2\alpha) = 4\cos\alpha\left(\frac{1}{4}\cos^2\alpha - \frac{3}{4}\sin^2\alpha\right) =$$
$$= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha(1 - \cos^2\alpha) =$$
$$= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 3\cos^3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \cos 3\alpha. \blacksquare$$

Пример 5. Докажите равенство $16\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ = 1.$

Решение. Имеем: $16\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ =$
$$= 16\cdot\frac{1}{2}\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ = 8\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ.$$

Так как $40^\circ = 60^\circ - 20^\circ$, $80^\circ = 60^\circ + 20^\circ$, то можно применить тождество, доказанное в ключевой задаче этого пункта (при $\alpha = 20^\circ$):
$$8\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ = 2\cos(3\cdot 20^\circ) = 1.$$

Другое доказательство можно получить, рассуждая так же, как при решении примера 3:

$$16\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ = \frac{8\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} =$$
$$= \frac{4\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{2\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 20^\circ)}{\sin 20^\circ} = 1. \blacksquare$$

Формулы, выражающие тригонометрические функции угла $\frac{\alpha}{2}$ через тригонометрические функции угла α, называют **формулами половинного угла.**

Заменив в формулах понижения степени α на $\frac{\alpha}{2}$, получим:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2},$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

Почленное деление первого равенства на второе приводит к формуле

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Теперь можно записать

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

$$\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Эти формулы называют соответственно **формулами синуса, косинуса и тангенса половинного угла.**

Пример 6. Найдите $\sin 22^\circ 30'$.

Решение. Используя формулы половинного аргумента, получаем:

$$\sin 22^\circ 30' = \sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}. \blacksquare$$

С помощью формул двойного аргумента можно выразить $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Имеем: $\sin\alpha = \dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

Предположив, что $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$, разделим числитель и знаменатель полученной дроби на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$:

$$\sin\alpha = \frac{\dfrac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}} = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Следовательно,

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}}$$

Имеем: $\cos\alpha = \dfrac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}.$

Предположив, что $\cos\dfrac{\alpha}{2} \neq 0$, разделим числитель и знаменатель полученной дроби на $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$:

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Следовательно,

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}}$$

?

1. Запишите формулы косинуса, синуса и тангенса двойного аргумента.
2. Запишите формулы понижения степени.
3. Какие формулы называют формулами тройного аргумента?
4. Запишите формулы синуса, косинуса и тангенса половинного угла.

Упражнения

26.1. Упростите выражение:

1) $\cos 2\alpha + \sin^2\alpha$;
2) $\frac{\sin 50^\circ}{2\cos 25^\circ}$;
3) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$;
4) $1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{4}$;
5) $\frac{\sin^2\alpha \operatorname{ctg}\alpha}{\sin 2\alpha}$;
6) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1 - 2\sin^2\alpha}$;
7) $\cos^4\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \sin^4\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$;
8) $\frac{\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)}{1 - \operatorname{tg}^2(45^\circ + \alpha)}$.

26.2. Упростите выражение:

1) $\cos 6\alpha + 2\sin^2 3\alpha$;
2) $\frac{\cos 70^\circ}{\cos 35^\circ + \sin 35^\circ}$;
3) $\frac{1 + \sin 2\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}$;
4) $\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha$;
5) $\frac{\sin 4\alpha}{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha}$;
6) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$;
7) $\sin^2(\alpha - 45^\circ) - \cos^2(\beta - 45^\circ)$;
8) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\alpha}{2}\right)$.

26.3. Найдите $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}6$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

26.4. Найдите $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

26.5. Найдите $\operatorname{tg} 2\alpha$, если:

1) $\operatorname{tg}\alpha = 4$;
2) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

26.6. Найдите $\operatorname{tg} 2\alpha$, если:

1) $\operatorname{ctg}\alpha = 2$;
2) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

26.7. Представьте в виде произведения выражение:

1) $1 - \cos 4\alpha$;
2) $1 + \cos\frac{\cos 6\alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{\sin 6\alpha}{\cos 2\alpha}$;
3) $1 - \cos 50^\circ$;
4) $1 + \sin 2\alpha$.

26.8. Представьте в виде произведения выражение:

1) $1 - \cos\frac{5\alpha}{6}$;
2) $1 + \cos 12\alpha$;
3) $1 + \cos 40^\circ$;
4) $1 - \sin\frac{\alpha}{2} + 2\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 4\cos^2\alpha\cos 2\alpha$.

26.9. Докажите тождество:

1) $2\sin^2\alpha + \cos 2\alpha = 1$;
2) $\operatorname{ctg} 3\alpha(1 - \cos 6\alpha) = \sin 6\alpha$;

3) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}=2;$

4) $\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{4}-2\alpha\right)-\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{4}+2\alpha\right)=\operatorname{tg}^2 2\alpha.$

26.10. Упростите выражение:

1) $2\sin^2(135^\circ-\alpha)-\sin 2\alpha;$ 2) $2-13\cos 2\alpha+\dfrac{1}{\sin 2\alpha}.$

26.11. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=5.$

26.12. Найдите $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=-3.$

26.13. Дано: $\cos 2\alpha=-0{,}6$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Найдите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

26.14. Дано: $\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. Найдите $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

26.15. Используя формулы половинного угла, найдите:

1) $\sin 15^\circ;$ 3) $\operatorname{tg} 75^\circ;$ 5) $\operatorname{tg} 112^\circ 30';$

2) $\cos 15^\circ;$ 4) $\cos 75^\circ;$ 6) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}.$

26.16. Упростите выражение:

1) $\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}};$ 4) $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha};$

2) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\sin 2\alpha;$ 5) $\dfrac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)};$

3) $\dfrac{4\operatorname{tg}\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^2};$ 6) $2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right).$

26.17. Упростите выражение:

1) $\dfrac{2\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha};$ 3) $\dfrac{\cos 2\alpha+1-\cos^2\alpha}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2\alpha\right)}.$

2) $\left(\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\right)\sin 2\alpha;$

26.18. Докажите тождество:

1) $1+2\cos 2\alpha+\cos 4\alpha=4\cos^2\alpha\cos 2\alpha;$

2) $\dfrac{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha;$

3) $\dfrac{\sin^2 2\alpha+4\sin^2\alpha-4}{1-8\sin^2\alpha-\cos 4\alpha}=\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}^4\alpha;$

4) $\dfrac{\cos\left(4\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}+2\alpha\right)}{(1+\cos 2\alpha)(1+\cos 4\alpha)}=\operatorname{tg}\alpha;$

5) $\dfrac{\cos 4\alpha + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1}{2}\sin 4\alpha;$

6) $\dfrac{2\cos 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\cos 2\alpha + \sin 4\alpha} = \operatorname{tg}^2(45^\circ - \alpha).$

26.19. Докажите тождество:

1) $\sin^2\left(\dfrac{5\pi}{4} - 4\alpha\right) - \sin^2\left(\dfrac{5\pi}{4} + 4\alpha\right) = -\sin 8\alpha;$

2) $1 - 2\cos 3\alpha + \cos 6\alpha = -4\sin^2\dfrac{3\alpha}{2}\cos 3\alpha;$

3) $\dfrac{\sin^2\left(4\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + 2\alpha\right)} = -\dfrac{1}{4}\sin 8\alpha;$

4) $\dfrac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}.$

26.20. Докажите, что $\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ = 4.$

26.21. Докажите, что $\operatorname{tg} 75^\circ - \operatorname{ctg} 75^\circ = 2\sqrt{3}.$

26.22. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\cos^3\alpha - \cos 3\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin^3\alpha + \sin 3\alpha}{\sin\alpha} = 3;$ 2) $\dfrac{\sin^3\alpha + \sin 3\alpha}{\cos^3\alpha - \cos 3\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$

26.23. Докажите тождество $\dfrac{\sin 3\alpha + 4\sin^3\alpha}{\cos 3\alpha - 4\cos^3\alpha} = \dfrac{\cos 3\alpha - \cos^3\alpha}{\sin 3\alpha + \sin^3\alpha}.$

26.24. Дано: $\sin 2\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $135^\circ < \alpha < 180^\circ$. Найдите $\sin\alpha$.

26.25. Дано: $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $90^\circ < \dfrac{\alpha}{2} < 135^\circ$. Найдите $\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

26.26. Дано: $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 6$. Найдите $\sin\alpha - \cos\alpha$.

26.27. Вычислите $2 - 13\cos 2\alpha + \dfrac{1}{\sin 2\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\dfrac{1}{5}$.

26.28. Вычислите $1 + 5\sin 2\alpha - \dfrac{3}{\cos 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -2$.

26.29. Найдите $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha + \sin\alpha = \dfrac{1}{3}$.

26.30. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\dfrac{\alpha}{2} - \sin\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

26.31. Упростите выражение:

1) $\cos^4\alpha - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha;$

2) $\dfrac{2\sin 4\alpha(1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha)}{1 + \operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\alpha\right)};$

3) $\dfrac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4\alpha - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha};$

4) $\dfrac{2\sin^2 4\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} + 4\alpha\right)\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{4} - 4\alpha\right)}.$

26.32. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha(\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin^2(\alpha-\pi) - 4\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right) - 4 + 4\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}$;

3) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin 3\alpha\cos\alpha - \cos 3\alpha\sin\alpha}$;

4) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-4\alpha\right)\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}+4\alpha\right)}{1-2\cos^2 4\alpha}$.

◆◆◆

26.33. Докажите, что:

1) $\sin 18^\circ\cos 36^\circ = \frac{1}{4}$;

2) $8\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9} = 1$;

3) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{8}$;

4) $\sin 6^\circ\sin 42^\circ\cos 12^\circ\cos 24^\circ = \frac{1}{16}$.

26.34. Докажите, что:

1) $\sin 54^\circ\cos 72^\circ = \frac{1}{4}$;

2) $8\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = -1$;

3) $\cos 3\alpha\cos 6\alpha\cos 12\alpha = \dfrac{\sin 24\alpha}{8\sin 3\alpha}$.

26.35. Выразите через $\cos 4\alpha$:

1) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$; 2) $\sin^8\alpha + \cos^8\alpha$.

26.36. Вычислите $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$, если $\alpha = \frac{\pi}{24}$.

26.37. Докажите тождество:

1) $3 + 4\cos 4\alpha + \cos 8\alpha = 8\cos^4 2\alpha$;

2) $\dfrac{\cos^2(4\alpha-3\pi) - 4\cos^2(2\alpha-\pi) + 3}{\cos^2(4\alpha+3\pi) + 4\cos^2(2\alpha+\pi) - 1} = \operatorname{tg}^4 2\alpha$.

26.38. Упростите выражение:

1) $\dfrac{3 + 4\cos\alpha + \cos 2\alpha}{3 - 4\cos\alpha + \cos 2\alpha}$; 2) $\dfrac{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha - \cos^2\alpha}{2(\cos\alpha - 1)}$.

26.39. Упростите выражение:

1) $\sqrt{(\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha)\cos 2\alpha}\cdot\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

2) $\sqrt{\dfrac{\sin 4\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}}\cdot\dfrac{1}{\sin 2\alpha} + 1$, если $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$.

26.40. Упростите выражение:

1) $\sqrt{(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha)2\operatorname{ctg} 2\alpha}\cdot\operatorname{tg} 2\alpha + 2$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$;

2) $\sqrt{\dfrac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}}$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$.

26.41. Докажите, что:

1) $4\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha)=\sin 3\alpha$;

2) $16\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ=3$;

3) $\dfrac{4\sin 20^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ}{\sin 80^\circ}=1$.

26.42. Докажите, что:

1) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}3\alpha$;

2) $\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\operatorname{tg}80^\circ=\sqrt{3}$.

26.43. Докажите тождество $\sin 3\alpha\sin^3\alpha+\cos 3\alpha\cos^3\alpha=\cos^3 2\alpha$.

26.44. Докажите тождество $\sin^3 2\alpha\cos 6\alpha+\cos^3 2\alpha\sin 6\alpha=\dfrac{3}{4}\sin 8\alpha$.

26.45. Упростите выражение:

1) $\sqrt{0{,}5+0{,}5\sqrt{0{,}5+0{,}5\cos\alpha}}$, если $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$;

2) $\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos 2\alpha}}-\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos 2\alpha}}$, если $0^\circ<\alpha<90^\circ$;

3) $\dfrac{\sin\left(45^\circ+\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1-\sin\alpha}}-\dfrac{\sin\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1+\sin\alpha}}$, если $0^\circ<\alpha<90^\circ$.

26.46. Упростите выражение:

1) $\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4\alpha}}$, если $0\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2}$;

2) $\sqrt{0{,}5+0{,}5\sqrt{0{,}5+0{,}5\sqrt{0{,}5+0{,}5\cos\alpha}}}$, если $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$;

3) $\sqrt{1+\sin\varphi}-\sqrt{1-\sin\varphi}$, если $\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\pi$.

26.47. Вычислите $\sin 18^\circ$.

26.48. Докажите, что $\sin 10^\circ$ — иррациональное число.

26.49. Докажите, что $\cos 20^\circ$ — иррациональное число.

26.50. Докажите равенство $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}}_{n\text{ радикалов}}=2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

§ 27 Формулы для преобразования суммы, разности и произведения тригонометрических функций

Сначала рассмотрим формулы, позволяющие преобразовать сумму и разность синусов (косинусов) в произведение.

Запишем формулы сложения для синуса:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \qquad (1)$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y. \qquad (2)$$

Сложив почленно левые и правые части этих равенств, получим:

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin x \cos y. \qquad (3)$$

Введём обозначения:

$$x + y = \alpha,$$
$$x - y = \beta.$$

Отсюда $x = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$, $y = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$. Заметим, что α и β могут принимать любые значения.

Тогда равенство (3) можно переписать так:

$$\boxed{\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}}$$

Это тождество называют **формулой суммы синусов.**

Вычтем почленно из равенства (1) равенство (2):

$$\sin(x + y) - \sin(x - y) = 2 \cos x \sin y.$$

Если использовать ранее введённые обозначения, то получим тождество, которое называют **формулой разности синусов:**

$$\boxed{\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}}$$

Запишем формулы сложения для косинуса:

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Складывая и вычитая почленно эти равенства, соответственно получаем:

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2\cos x \cos y; \qquad (4)$$

$$\cos(x + y) - \cos(x - y) = -2\sin x \sin y. \qquad (5)$$

Отсюда, введя обозначения $x + y = \alpha$ и $x - y = \beta$, получим соответственно **формулы суммы и разности косинусов:**

$$\boxed{\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}}$$

$$\boxed{\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}}$$

Преобразуем в произведение выражение $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$.

Имеем: $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

Равенство

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

называют **формулой суммы тангенсов.**

Аналогично можно доказать такие три равенства:

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

Их называют формулами соответственно **разности тангенсов, суммы котангенсов, разности котангенсов.**

Пример 1. Докажите, что если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Решение. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} + \frac{1-\cos 2\beta}{2} + \sin^2\gamma =$

$$= 1 - \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2} + \sin^2\gamma = 1 - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + 1 - \cos^2\gamma =$$

$$= 2 - \cos(\pi-\gamma)\cos(\alpha-\beta) - \cos^2\gamma = 2 + \cos\gamma\cos(\alpha-\beta) - \cos^2\gamma =$$

$$= 2 + \cos\gamma(\cos(\alpha-\beta) - \cos\gamma) = 2 + \cos\gamma(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\pi-(\alpha+\beta))) =$$

$$= 2 + \cos\gamma(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)) = 2 + 2\cos\gamma\cos\alpha\cos\beta.$$ ■

Пример 2. Вычислите сумму:

$$S = \frac{1}{\cos 1\cos 2} + \frac{1}{\cos 2\cos 3} + \ldots + \frac{1}{\cos(n-1)\cos n},\ n > 1.$$

Решение. Используем тождество

$$\operatorname{tg}k - \operatorname{tg}(k-1) = \frac{\sin 1}{\cos(k-1)\cos k} \text{ или}$$

$$\frac{1}{\cos(k-1)\cos k} = \frac{-\operatorname{tg}(k-1) + \operatorname{tg}k}{\sin 1}.$$

Воспользовавшись полученным результатом, запишем такие равенства:

$$\frac{1}{\cos 1\cos 2}=\frac{-\operatorname{tg}1+\operatorname{tg}2}{\sin 1};$$

$$\frac{1}{\cos 2\cos 3}=\frac{-\operatorname{tg}2+\operatorname{tg}3}{\sin 1};$$

$$\frac{1}{\cos 3\cos 4}=\frac{-\operatorname{tg}3+\operatorname{tg}4}{\sin 1};$$

$$\dots$$

$$\frac{1}{\cos(n-1)\cos n}=\frac{-\operatorname{tg}(n-1)+\operatorname{tg}n}{\sin 1}.$$

Сложив данные равенства, получим:

$$S=\frac{-\operatorname{tg}1+\operatorname{tg}2-\operatorname{tg}2+\operatorname{tg}3-\operatorname{tg}3+\operatorname{tg}4-\ldots-\operatorname{tg}(n-1)+\operatorname{tg}n}{\sin 1}=\frac{-\operatorname{tg}1+\operatorname{tg}n}{\sin 1}.$$

Ответ: $S=\dfrac{\operatorname{tg}n-\operatorname{tg}1}{\sin 1}$. ■

В ходе доказательства формул суммы и разности синусов (косинусов) были получены тождества:

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y;$$
$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y;$$
$$\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y.$$

Перепишем их так:

$$\boldsymbol{\sin x\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y)),}$$

$$\boldsymbol{\cos x\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y)),}$$

$$\boldsymbol{\sin x\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))}$$

Эти тождества называют **формулами преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.**

Пример 3. Докажите равенство

$$\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}.$$

Решение. Умножим и разделим левую часть данного равенства на $2\sin\frac{\pi}{11}$. Получаем:

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{\pi}{11}+2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11}+2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}+2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{7\pi}{11}+2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{9\pi}{11}}{2\sin\frac{\pi}{11}}.$$

Применим формулу $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$:

$$\frac{\sin\frac{2\pi}{11}-\sin\frac{2\pi}{11}+\sin\frac{4\pi}{11}-\sin\frac{4\pi}{11}+\sin\frac{6\pi}{11}-\sin\frac{6\pi}{11}+\sin\frac{8\pi}{11}-\sin\frac{8\pi}{11}+\sin\frac{10\pi}{11}}{2\sin\frac{\pi}{11}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{10\pi}{11}}{2\sin\frac{\pi}{11}}=\frac{\sin\frac{\pi}{11}}{2\sin\frac{\pi}{11}}=\frac{1}{2}. \blacksquare$$

1. Запишите формулу суммы синусов, разности синусов, суммы косинусов, разности косинусов.
2. Запишите формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

Упражнения

27.1. Упростите выражение:

1) $\frac{\sin 8\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 8\alpha+\cos 2\alpha}$; 2) $\frac{\sin 5\alpha-\sin\alpha}{\cos 5\alpha-\cos\alpha}$; 3) $\frac{\cos 74^\circ-\cos 14^\circ}{\sin 74^\circ+\sin 14^\circ}$.

27.2. Упростите выражение:

1) $\frac{\cos 6\alpha+\cos 4\alpha}{\cos\alpha+\cos 9\alpha}$; 2) $\frac{\cos\alpha-\cos 11\alpha}{\sin 11\alpha-\sin\alpha}$; 3) $\frac{\cos 58^\circ+\cos 32^\circ}{\sin 58^\circ+\sin 32^\circ}$.

27.3. Преобразуйте в произведение:

1) $1-2\cos\alpha$; 3) $1-\sqrt{2}\sin\alpha$;

2) $\sqrt{3}+2\cos\alpha$; 4) $\sqrt{3}+\operatorname{ctg}\alpha$.

27.4. Преобразуйте в произведение:

1) $1-2\sin\alpha$; 3) $\sqrt{2}+2\cos\alpha$;

2) $\sqrt{3}-2\cos\alpha$; 4) $\sqrt{3}-\operatorname{tg}\alpha$.

27.5. Упростите выражение:

1) $\sin\alpha(1+2\cos 2\alpha)$; 2) $\cos 2\alpha+2\sin(\alpha+30^\circ)\sin(\alpha-30^\circ)$.

27.6. Упростите выражение:

1) $2\sin 2\alpha\sin\alpha+\cos 3\alpha$; 2) $\sin\alpha-2\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$.

27.7. Докажите тождество:

1) $\cos^2\alpha-\cos^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)$;

2) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha}=\operatorname{tg}4\alpha$;

3) $\dfrac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}=2\cos\alpha;$

4) $\dfrac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2-1+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}\alpha;$

5) $\dfrac{(\cos\alpha-\cos 3\alpha)(\sin\alpha+\sin 3\alpha)}{1-\cos 4\alpha}=\sin 2\alpha.$

27.8. Докажите тождество:

1) $\sin\alpha+\sin 3\alpha-\sin 2\alpha=4\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos\dfrac{3\alpha}{2};$

2) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta);$

3) $\dfrac{\cos\alpha-\cos 2\alpha-\cos 4\alpha+\cos 5\alpha}{\sin\alpha-\sin 2\alpha-\sin 4\alpha+\sin 5\alpha}=\operatorname{ctg} 3\alpha;$

4) $(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2=4\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2};$

5) $\left(\dfrac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos 4\alpha}{\cos\alpha}\right)\left(\dfrac{1}{\sin 3\alpha}+\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)=4\operatorname{ctg}\alpha.$

27.9. Докажите тождество:

1) $\operatorname{ctg} 6\alpha-\operatorname{ctg} 4\alpha+\operatorname{tg} 2\alpha=-\operatorname{ctg} 6\alpha\operatorname{ctg} 4\alpha\operatorname{tg} 2\alpha;$

2) $\dfrac{1}{\operatorname{tg} 3\alpha+\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{1}{\operatorname{ctg} 3\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{ctg} 4\alpha;$

3) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg} 3\alpha+\operatorname{ctg} 3\alpha=\dfrac{8\cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha}.$

27.10. Докажите тождество:

1) $\operatorname{tg} 3\alpha-\operatorname{tg} 2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg} 2\alpha\operatorname{tg} 3\alpha;$

2) $\dfrac{1}{\operatorname{tg} 3\alpha+\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} 5\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\sin 2\alpha.$

27.11. Докажите тождество:

1) $1+\sin\alpha+\cos\alpha=2\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right);$

2) $\dfrac{1+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos\left(4\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{1+\cos(4\alpha+\pi)+\cos\left(4\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)}=\operatorname{ctg} 2\alpha.$

27.12. Докажите тождество:

1) $1-2\cos\alpha+\cos 2\alpha=-4\cos\alpha\sin^2\dfrac{\alpha}{2};$

2) $1-\sin\alpha-\cos\alpha=2\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}-45^\circ\right).$

27.13. Упростите выражение:

1) $\sin^2\alpha+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right);$

2) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$;

3) $\cos^2(45^\circ+\alpha) - \cos^2(30^\circ-\alpha) + \sin 15^\circ \sin(75^\circ - 2\alpha)$.

27.14. Упростите выражение:

1) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$;

2) $\cos^2(45^\circ-\alpha) - \cos^2(60^\circ+\alpha) - \sin(75^\circ - 2\alpha)\cos 75^\circ$.

27.15. Докажите равенство $\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ = \dfrac{8\cos 20^\circ}{\sqrt{3}}$.

27.16. Докажите, что если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то имеет место тождество:

1) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$;

2) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$;

3) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$;

4) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$;

5) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$.

27.17. Докажите, что если $\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}$, то имеет место тождество:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2 + 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

27.18. Докажите, что если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то имеет место тождество:

1) $\sin 4\alpha + \sin 4\beta + \sin 4\gamma = -4\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma$;

2) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\gamma}{2}\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}$;

3) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

27.19. Докажите равенство:

1) $\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7} = -\dfrac{1}{2}$;

2) $\sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \ldots + \sin 50^\circ = \dfrac{\sin 25^\circ}{2\sin 5^\circ}$.

27.20. Докажите равенство $\cos\dfrac{\pi}{19} + \cos\dfrac{3\pi}{19} + \ldots + \cos\dfrac{17\pi}{19} = \dfrac{1}{2}$.

27.21. Вычислите сумму $S = \dfrac{1}{\sin\alpha\sin 2\alpha} + \dfrac{1}{\sin 2\alpha\sin 3\alpha} + \ldots + \dfrac{1}{\sin(n-1)\alpha\sin n\alpha}$.

27.22. Вычислите сумму $S = \dfrac{1}{\sin 1\sin 3} + \dfrac{1}{\sin 3\sin 5} + \ldots + \dfrac{1}{\sin(2n-1)\sin(2n+1)}$.

27.23. Вычислите сумму $S = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\operatorname{tg}\dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2^{n-1}}\operatorname{tg}\dfrac{1}{2^{n-1}} + \dfrac{1}{2^n}\operatorname{tg}\dfrac{1}{2^n}$.

27.24. Докажите равенство

$$\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + \cos\frac{2n\pi}{n} = 0.$$

27.25. Докажите равенство $\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{3\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{(2n-1)\pi}{n} = 0.$

27.26. Вычислите сумму:

1) $S = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha;$
2) $S = \sin\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin(2n-1)\alpha;$
3) $S = \sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \ldots + \sin^2 n\alpha.$

27.27. Вычислите сумму:

1) $S = \sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \ldots + \sin 2n\alpha;$
2) $S = \cos^2\alpha + \cos^2 3\alpha + \ldots + \cos^2(2n-1)\alpha.$

27.28. Докажите неравенство $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqslant \frac{1}{8}$, где α, β и γ — углы треугольника.

27.29. Докажите неравенство $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{8}$, где $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

глава

4 Тригонометрические уравнения и неравенства

- В этой главе вы ознакомитесь с функциями, обратными к тригонометрическим функциям.
- Вы узнаете, какие уравнения и неравенства называют простейшими тригонометрическими уравнениями и неравенствами; ознакомитесь с формулами корней простейших тригонометрических уравнений; овладеете различными методами решения тригонометрических уравнений; научитесь решать тригонометрические неравенства.

§ 28 Уравнение $\cos x = b$

Поскольку областью значений функции $y = \cos x$ является промежуток $[-1; 1]$, то при $|b| > 1$ уравнение $\cos x = b$ не имеет решений. Вместе с тем при любом b таком, что $|b| \leqslant 1$, это уравнение имеет корни, причём их бесконечно много.

Сказанное легко понять, обратившись к графической интерпретации: графики функций $y = \cos x$ и $y = b$, где $|b| \leqslant 1$, имеют бесконечно много общих точек (рис. 28.1).

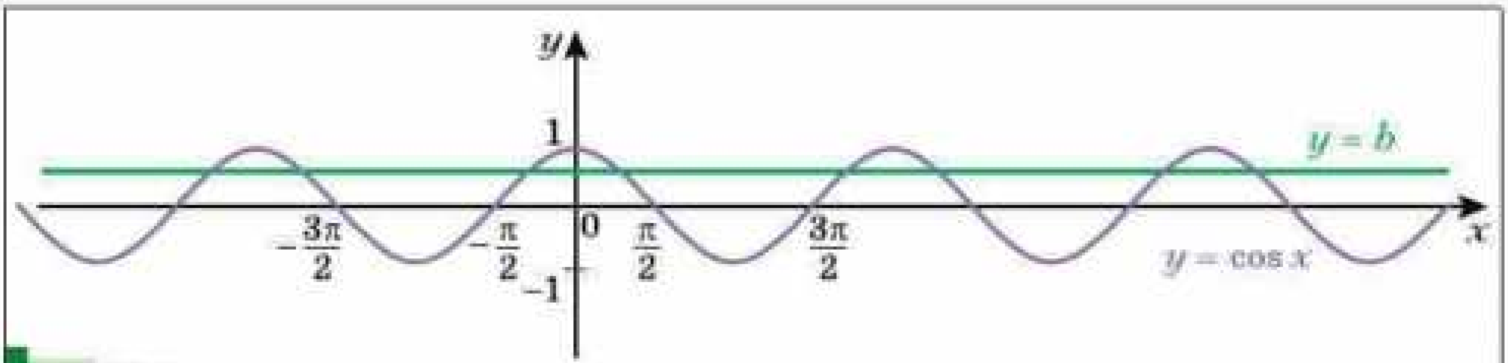


Рис. 28.1

Понять, как решать уравнение $\cos x = b$ в общем случае, поможет рассмотрение частного случая. Например, решим уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$.

На рисунке 28.2 изображены графики функций $y = \cos x$ и $y = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим функцию $y = \cos x$ на промежутке $[-\pi; \pi]$ (красная кривая на рисунке 28.2), то есть на промежутке, длина которого равна периоду этой функции. Прямая $y = \frac{1}{2}$ пересекает график функции $y = \cos x$ на промежутке $[-\pi; \pi]$ в двух точках M_1 и M_2, абсциссы которых являются

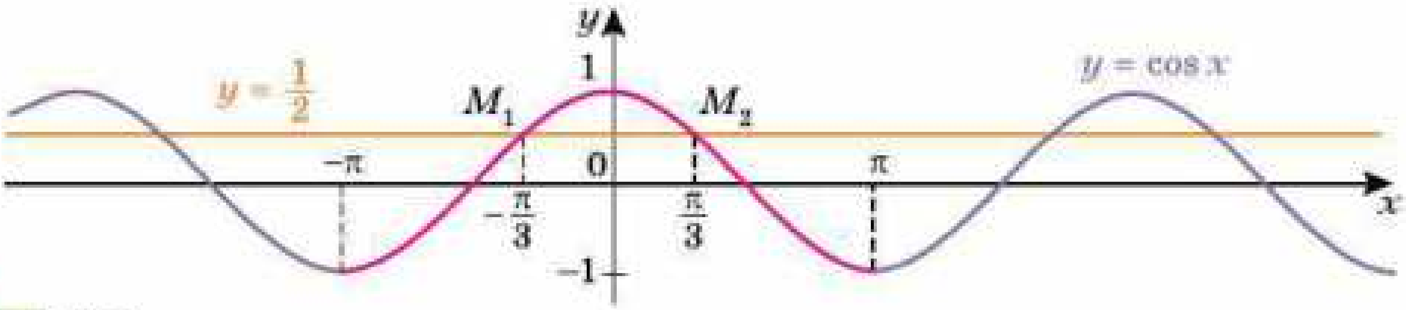


Рис. 28.2

противоположными числами. Следовательно, уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$ на промежутке $[-\pi; \pi]$ имеет два корня. Так как $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, то этими корнями являются числа $-\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{3}$.

Функция $y = \cos x$ — периодическая с периодом 2π. Поэтому каждый из остальных корней уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ отличается от одного из найденных корней $-\frac{\pi}{3}$ или $\frac{\pi}{3}$ на число вида $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Следовательно, корни рассматриваемого уравнения задаются формулами $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ и $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Как правило, эти две формулы заменяют одной записью:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Вернёмся к уравнению $\cos x = b$, где $|b| \leqslant 1$. На рисунке 28.3 показано, что на промежутке $[-\pi; \pi]$ это уравнение имеет два корня α и $-\alpha$, где $\alpha \in [0; \pi]$ (при $b = 1$ эти корни совпадают и равны нулю).

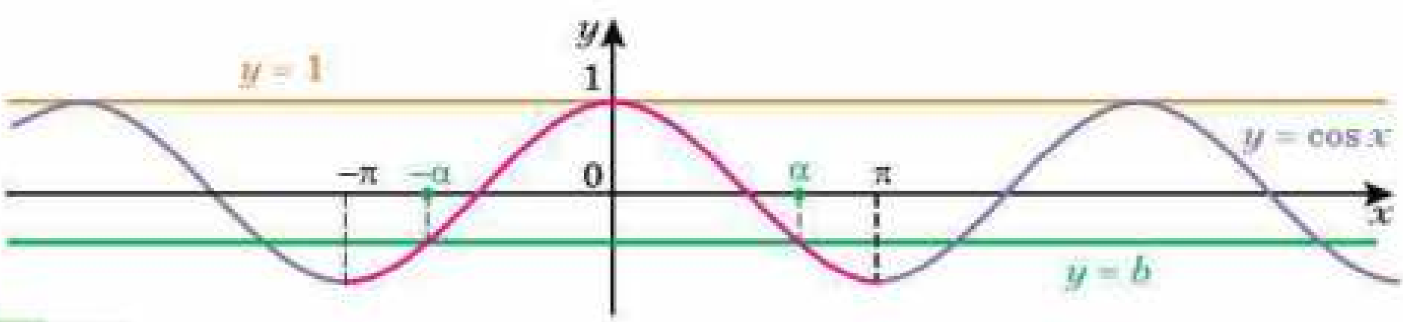


Рис. 28.3

Тогда все корни уравнения $\cos x = b$ имеют вид

$$x = \pm\alpha + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Эта формула показывает, что корень α играет особую роль: зная его, можно найти все остальные корни уравнения $\cos x = b$. Корень α имеет специальное название — арккосинус.

Определение

Арккосинусом числа b, где $|b| \leqslant 1$, называют такое число α из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен b.

Для арккосинуса числа b используют обозначение $\arccos b$.

Например,

$$\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}, \text{ так как } \frac{\pi}{3}\in[0;\pi] \text{ и } \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2};$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}, \text{ так как } \frac{3\pi}{4}\in[0;\pi] \text{ и } \cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\arccos 0=\frac{\pi}{2}, \text{ так как } \frac{\pi}{2}\in[0;\pi] \text{ и } \cos\frac{\pi}{2}=0;$$

$$\arccos(-1)=\pi, \text{ так как } \pi\in[0;\pi] \text{ и } \cos\pi=-1.$$

Вообще, $\boldsymbol{\arccos b=\alpha}$, ***если*** $\boldsymbol{\alpha\in[0;\pi]}$ ***и*** $\boldsymbol{\cos\alpha=b}$.

Отметим, что, например, $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$. Однако $\arccos\frac{1}{2}\neq-\frac{\pi}{3}$, так как $-\frac{\pi}{3}\notin[0;\pi]$.

Теперь формулу корней уравнения $\cos x=b$, $|b|\leqslant 1$, можно записать так:

$$\boxed{x=\pm\arccos b+2\pi n,\ n\in \mathbb{Z}} \qquad (1)$$

Заметим, что частные случаи уравнения $\cos x=b$ (для $b=1$, $b=0$, $b=-1$) были рассмотрены раньше (см. § 18). Напомним полученные результаты:

$\cos x=1$	$\cos x=0$	$\cos x=-1$
$x=2\pi n,\ n\in \mathbb{Z}$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \mathbb{Z}$	$x=\pi+2\pi n,\ n\in \mathbb{Z}$

Такие же результаты можно получить, используя формулу (1). Эти три уравнения будут встречаться часто. Поэтому советуем запомнить полученные формулы.

Пример 1. Решите уравнение: 1) $\cos 4x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{5}-7x\right)=0$; 4) $\cos\pi x^2=1$.

Решение. 1) Используя формулу (1), можем записать:

$$4x=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\pi n,\ n\in \mathbb{Z}.$$

Далее получаем: $4x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$; $x = \pm\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}$.

2) Имеем:

$$\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{x}{3} = \pm\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ x = \pm\pi - \frac{3\pi}{4} + 6\pi n.$$

3) Перепишем данное уравнение в виде $\cos\left(7x - \frac{\pi}{5}\right) = 0$. Имеем:

$$7x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Тогда $7x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + \pi n$; $7x = \frac{7\pi}{10} + \pi n$; $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{7}$.

4) Имеем: $\pi x^2 = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

$$x^2 = 2n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Так как $x^2 \geqslant 0$, то $2n \geqslant 0$, то есть $n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$.

Теперь можно записать $x = \sqrt{2n}$ или $x = -\sqrt{2n}$, где $n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$.

Ответ: 1) $\pm\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\pm\pi - \frac{3\pi}{4} + 6\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{7}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\sqrt{2n}$, $-\sqrt{2n}$, $n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$. ■

Пример 2. Определите количество корней уравнения $\cos x = b$ на промежутке $\left[0; \frac{5\pi}{4}\right)$ в зависимости от значения параметра b.

Решение. Изобразим график функции $y = \cos x$ на промежутке $\left[0; \frac{5\pi}{4}\right)$ (рис. 28.4). Количество корней определяется количеством точек пересечения прямой $y = b$ с выделенной красным частью графика функции $y = \cos x$.

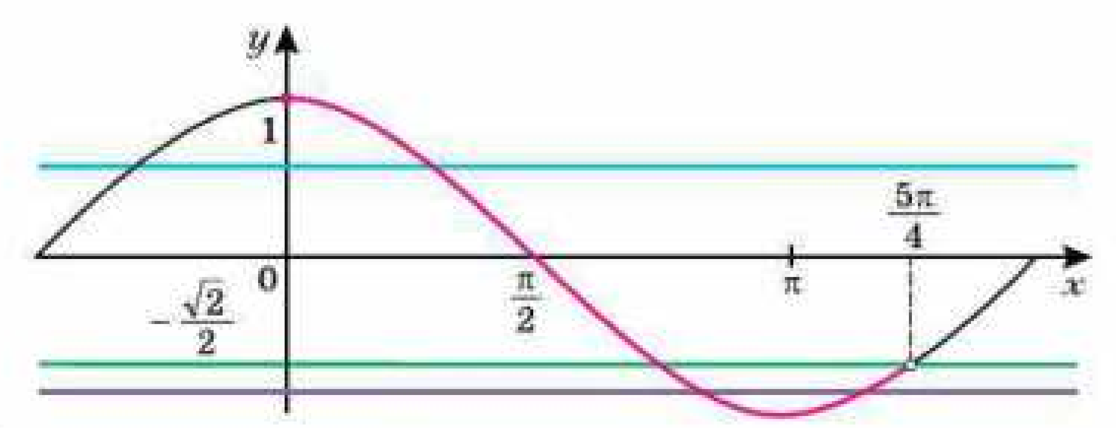


Рис. 28.4

Обратим внимание на то, что точка (0; 1) принадлежит выделенной кривой, а точка $\left(\frac{5\pi}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — не принадлежит.

Рассматривая различные положения прямой $y = b$, получаем такие результаты:

если $b < -1$, то корней нет;
если $b = -1$, то один корень;
если $-1 < b < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, то два корня;
если $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant b \leqslant 1$, то один корень;
если $b > 1$, то корней нет.

Ответ: если $b < -1$ или $b > 1$, то корней нет;
если $b = -1$ или $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant b \leqslant 1$, то один корень;
если $-1 < b < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, то два корня. ■

1. При каких значениях b имеет корни уравнение $\cos x = b$?
2. Сколько корней имеет уравнение $\cos x = b$ при $|b| \leqslant 1$?
3. Что называют арккосинусом числа b?
4. Какой вид имеет формула корней уравнения $\cos x = b$ при $|b| \leqslant 1$?

Упражнения

28.1. Решите уравнение:

1) $\cos x = \frac{1}{2}$; 3) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\cos x = \frac{\pi}{3}$;
2) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos x = \frac{1}{3}$; 6) $\cos x = \frac{\pi}{4}$.

28.2. Решите уравнение:

1) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{2}$;
2) $\cos x = -\frac{1}{2}$; 4) $\cos x = \frac{4}{7}$.

28.3. Решите уравнение:

1) $\cos 3x = -\frac{1}{2}$; 3) $\cos 6x = 1$; 5) $\cos 9x = -\frac{1}{5}$;
2) $\cos \frac{5}{6}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos \frac{2\pi x}{3} = 0$; 6) $\cos\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

28.4. Решите уравнение:

1) $\cos 2x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos \frac{x}{5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos \frac{3x}{4} = -1$.

28.5. Решите уравнение:

1) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $2\cos\left(\frac{\pi}{8} - 3x\right) + 1 = 0$.

2) $\cos\left(\frac{x}{6} - 2\right) = -1$;

28.6. Решите уравнение:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{9} - 4x\right) = 1$; 2) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2} + 3\right) + 1 = 0$.

◆◆

28.7. Сколько корней уравнения $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ принадлежат промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$?

28.8. Найдите все корни уравнения $\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2}$, удовлетворяющие неравенству $-\frac{\pi}{6} < x < 4\pi$.

28.9. Решите уравнение:

1) $\cos \frac{2\pi}{x} = 1$; 2) $\cos \pi\sqrt{x} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos(\cos x) = \frac{1}{2}$.

28.10. Решите уравнение:

1) $\cos \frac{2\pi}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos(\cos x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

28.11. При каких значениях параметра a имеет решения уравнение $\cos 2x = -4a^2 + 4a - 2$?

28.12. При каких значениях параметра a имеет решения уравнение $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -a^2 - 1$?

◆◆◆

28.13. При каких положительных значениях параметра a промежуток $[0; a]$ содержит не менее трёх корней уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$?

28.14. При каких положительных значениях параметра a промежуток $[0; a]$ содержит не менее трёх корней уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$?

28.15. Определите количество корней уравнения $\cos x = a$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{11\pi}{6}\right]$ в зависимости от значения параметра a.

28.16. Определите количество корней уравнения $\cos x = a$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$ в зависимости от значения параметра a.

28.17. При каких значениях параметра a уравнение $(x-a)\left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$ имеет единственный корень на промежутке $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$?

28.18. При каких значениях параметра a уравнение $(x+a)\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ имеет единственный корень на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$?

§ 29 Уравнение $\sin x = b$

Поскольку областью значений функции $y = \sin x$ является промежуток $[-1; 1]$, то при $|b| > 1$ уравнение $\sin x = b$ не имеет решений. Вместе с тем при любом b таком, что $|b| \leqslant 1$, это уравнение имеет корни, причём их бесконечно много.

Отметим, что частные случаи уравнения $\sin x = b$ (для $b = 1$, $b = 0$, $b = -1$) были рассмотрены раньше (см. § 18). Напомним полученные результаты:

$\sin x = 1$	$\sin x = 0$	$\sin x = -1$
$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	$x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Для того чтобы получить общую формулу корней уравнения $\sin x = b$, где $|b| \leqslant 1$, обратимся к графической интерпретации.

На рисунке 29.1 изображены графики функций $y = \sin x$ и $y = b$, $|b| \leqslant 1$.

Рассмотрим функцию $y = \sin x$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ (фиолетовая линия на рисунке 29.1), то есть на промежутке, длина которого равна периоду этой функции. На этом промежутке уравнение $\sin x = b$ имеет два корня: α и $\pi - \alpha$, где $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Заметим, что при $b = 1$ корни α и $\pi - \alpha$ совпадают и равны $\frac{\pi}{2}$.

Так как функция $y = \sin x$ — периодическая с периодом 2π, то каждый из остальных корней уравнения $\sin x = b$ отличается от одного из найденных корней на число вида $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

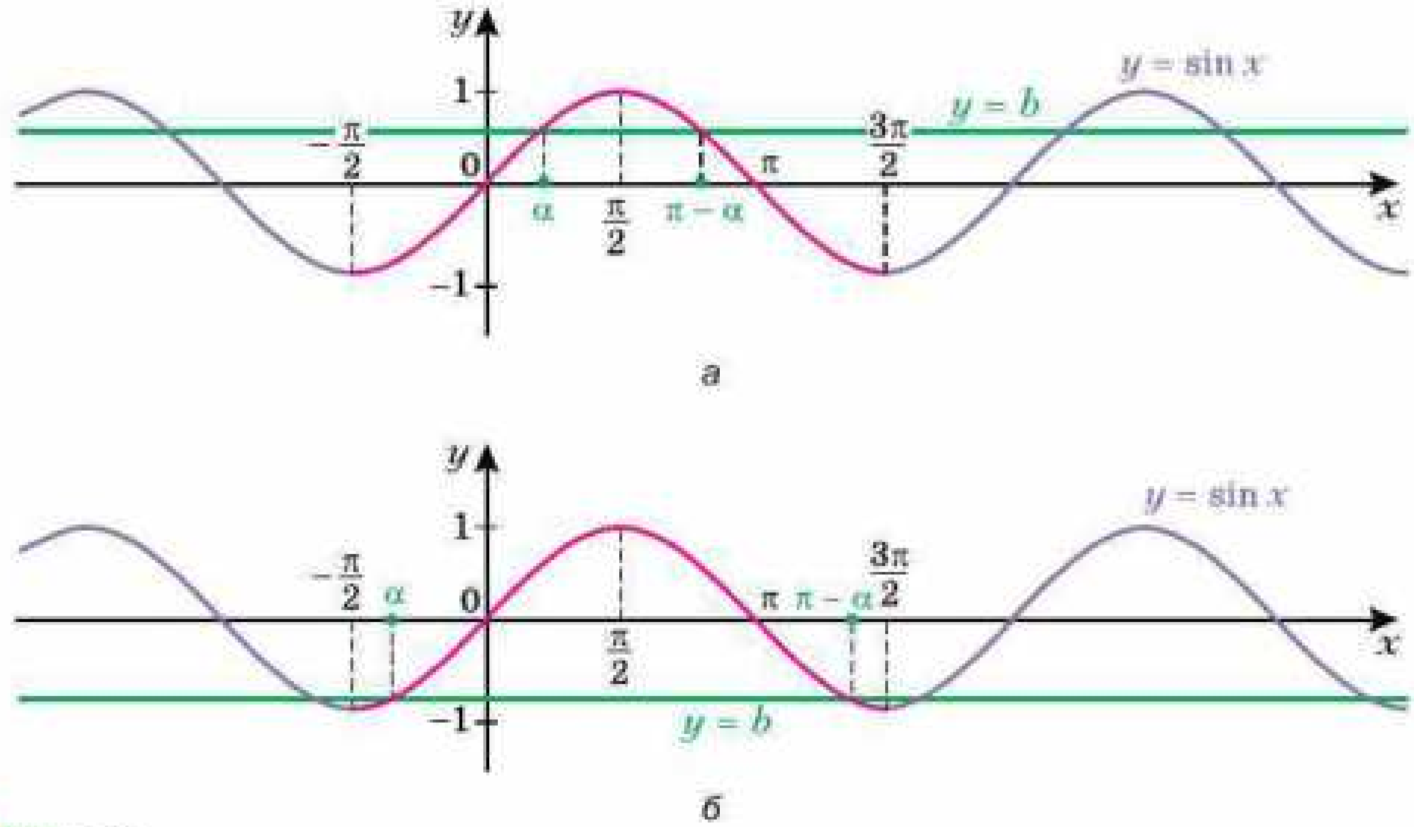


Рис. 29.1

Тогда корни уравнения $\sin x = b$ задаются формулами

$$x = \alpha + 2\pi n \text{ и } x = \pi - \alpha + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Эти две формулы можно заменить одной записью:

$$x = (-1)^k\alpha + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \qquad (1)$$

Действительно, если k — чётное число, то есть $k = 2n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то получаем $x = \alpha + 2\pi n$; если k — нечётное число, то есть $k = 2n + 1$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то получаем $x = -\alpha + \pi + 2\pi n = \pi - \alpha + 2\pi n$.

Формула (1) показывает, что корень α играет особую роль: зная его, можно найти все остальные корни уравнения $\sin x = b$. Корень α имеет специальное название — арксинус.

Определение

Арксинусом числа b, где $|b| \leqslant 1$, называют такое число α из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен b.

Для арксинуса числа b используют обозначение $\arcsin b$.

Например,

$$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \text{ так как } \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ и } \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}, \text{ так как } -\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ и } \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\arcsin 0 = 0, \text{ так как } 0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ и } \sin 0 = 0;$$

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \text{ так как } -\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ и } \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Вообще, **$\arcsin b = \alpha$, *если* $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ *и* $\sin\alpha = b$.**

Отметим, что, например, $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Однако $\arcsin\frac{1}{2} \neq \frac{5\pi}{6}$, так как $\frac{5\pi}{6} \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Теперь формулу (1) для корней уравнения $\sin x = b$, $|b| \leqslant 1$, можно записать или в виде совокупности:

$$\boxed{\left[\begin{array}{l} x = \arcsin b + 2\pi n, \\ x = \pi - \arcsin b + 2\pi n, \ n \in Z \end{array}\right.}$$

или одной записью:

$$\boxed{x = (-1)^k \arcsin b + \pi k, \ k \in Z} \qquad (2)$$

Вообще, при решении тригонометрических уравнений один и тот же правильный ответ может быть представлен в разных формах записи.

Понятно, что формулу (2) можно применять и в частных случаях: $b = 1$, $b = 0$, $b = -1$. Однако уравнения $\sin x = 1$, $\sin x = 0$, $\sin x = -1$ будут встречаться часто. Поэтому советуем запомнить формулы их корней, записанные в начале параграфа.

Пример 1. Решите уравнение: 1) $\sin\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. 1) Используя формулу (2), можем записать:

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, \ n \in Z.$$

Далее получаем: $\frac{x}{2} = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n$; $\frac{x}{2} = (-1)^n \cdot (-1)\frac{\pi}{6} + \pi n$;

$$\frac{x}{2} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n; \ x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

2) Перепишем данное уравнение в виде $-\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Тогда $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \cdot \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n;\ \ 3x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \pi n;\ \ x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}.$$

Ответ: 1) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}$. ■

Пример 2. Решите уравнение $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2$.

Решение. Перепишем данное уравнение в виде:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = 1.$$

Так как $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$, а $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, то можно записать:

$$\sin\frac{\pi}{3}\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\sin x = 1.$$

Используя формулу синуса суммы $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha + \beta)$, получим:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 1.$$

Отсюда $\frac{\pi}{3} + x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. ■

Заметим, что при решении уравнения примера 2 можно было воспользоваться и формулой косинуса разности $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta)$. Действительно, поскольку $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$, а $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$, то

$$\cos\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\sin x = 1;\ \ \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

Отсюда получаем тот же самый ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 3. Сколько корней в зависимости от значения параметра b имеет уравнение $(\sin x - b)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0$ на промежутке $[0; 2\pi)$?

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = b,\\ \cos x = \frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Второе уравнение этой совокупности на промежутке $[0;\ 2\pi)$ имеет два корня: $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{5\pi}{3}$.

При $|b| > 1$ уравнение $\sin x = b$ корней не имеет. Тогда данное в условии уравнение имеет два корня.

Если $b = 1$ или $b = -1$, то уравнение $\sin x = b$ на промежутке $[0;\ 2\pi)$ имеет один корень. Это соответственно числа $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$. Поэтому при $|b| = 1$ данное в условии уравнение имеет три корня.

Если $|b| < 1$, то уравнение $\sin x = b$ на промежутке $[0;\ 2\pi)$ имеет два корня. Поэтому может показаться, что данное в условии уравнение в этом случае будет иметь четыре корня. На самом деле один из корней уравнения $\sin x = b$ может совпадать с числом $\frac{\pi}{3}$ или с числом $\frac{5\pi}{3}$.

Найдём значения параметра b, при которых числа $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{5\pi}{3}$ являются корнями уравнения $\sin x = b$. Имеем:

1) $\sin\frac{\pi}{3} = b$; $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\sin\frac{5\pi}{3} = b$; $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

При $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ уравнение $\sin x = b$ на промежутке $[0;\ 2\pi)$ имеет корни $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$, а данное в условии уравнение имеет три корня: $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$.

При $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ аналогично получаем, что данное в условии уравнение имеет три корня: $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$.

Ответ: если $b < -1$ или $b > 1$, то два корня; если $b = -1$, или $b = 1$, или $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, или $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, то три корня; если $-1 < b < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, или $-\frac{\sqrt{3}}{2} < b < \frac{\sqrt{3}}{2}$, или $\frac{\sqrt{3}}{2} < b < 1$, то четыре корня. ■

?

1. При каких значениях b имеет корни уравнение $\sin x = b$?
2. Сколько корней имеет уравнение $\sin x = b$ при $|b| \leqslant 1$?
3. Что называют арксинусом числа b?
4. Какой вид имеет формула корней уравнения $\sin x = b$ при $|b| \leqslant 1$?

Упражнения

29.1. Решите уравнение:

1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
2) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
3) $\sin x = \frac{1}{4}$;
4) $\sin x = \sqrt{2}$.

29.2. Решите уравнение:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$;
2) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
3) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$;
4) $\sin x = 1{,}5$.

29.3. Решите уравнение:

1) $\sin \frac{x}{6} = -\frac{1}{2}$;
2) $\sin 5x = 1$;
3) $\sin(-8x) = \frac{2}{9}$.

29.4. Решите уравнение:

1) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
2) $\sin \frac{x}{7} = 0$;
3) $\sin \frac{2x}{5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

29.5. Решите уравнение:

1) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
2) $\sin\left(\frac{x}{3} + 1\right) = -1$;
3) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12} - 3x\right) - 1 = 0$.

29.6. Решите уравнение:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{18} - 8x\right) = 1$;
2) $2\sin\left(\frac{x}{5} - 4\right) + 1 = 0$.

29.7. Найдите все корни уравнения $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, принадлежащие промежутку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

29.8. Сколько корней уравнения $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ принадлежит промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$?

29.9. Решите уравнение:

1) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$;
2) $\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x = 1$;
3) $3\sin\frac{x}{2} + \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} = 3$.

29.10. Решите уравнение:

1) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$; 2) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

29.11. Решите уравнение:

1) $\sin\frac{2}{x} = 0$; 2) $\sin\pi\sqrt{x} = -1$; 3) $\sin(\cos x) = 0{,}5$.

29.12. Решите уравнение:

1) $\sin\frac{3\pi}{\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos(\pi\sin x) = 0$.

◆◆◆

29.13. При каких положительных значениях параметра a промежуток $\left[-\frac{\pi}{2}; a\right]$ содержит не менее четырёх корней уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$?

29.14. При каких отрицательных значениях параметра a промежуток $[a; 0]$ содержит не менее трёх корней уравнения $\sin x = -\frac{1}{2}$?

29.15. Определите количество корней уравнения $\sin x = a$ в зависимости от значения параметра a на промежутке:

1) $\left[0; \frac{11\pi}{6}\right]$; 2) $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$; 3) $\left[-\frac{\pi}{3}; 2\pi\right]$.

29.16. Определите количество корней уравнения $\sin x = a$ в зависимости от значения параметра a на промежутке:

1) $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$; 2) $\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

29.17. Сколько корней в зависимости от значения параметра a имеет уравнение $\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\sin x - a) = 0$ на промежутке $[0; 2\pi)$?

29.18. Сколько корней в зависимости от значения параметра a имеет уравнение $(\cos x - a)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) = 0$ на промежутке $(0; 2\pi]$?

§ 30 Уравнения $\operatorname{tg} x = b$ и $\operatorname{ctg} x = b$

Поскольку областью значений функции $y = \operatorname{tg} x$ является множество $\boldsymbol{R}$, то уравнение $\operatorname{tg} x = b$ имеет решения при любом значении b.

Для того чтобы получить формулу корней уравнения $\operatorname{tg} x = b$, обратимся к графической интерпретации.

На рисунке 30.1 изображены графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = b$.

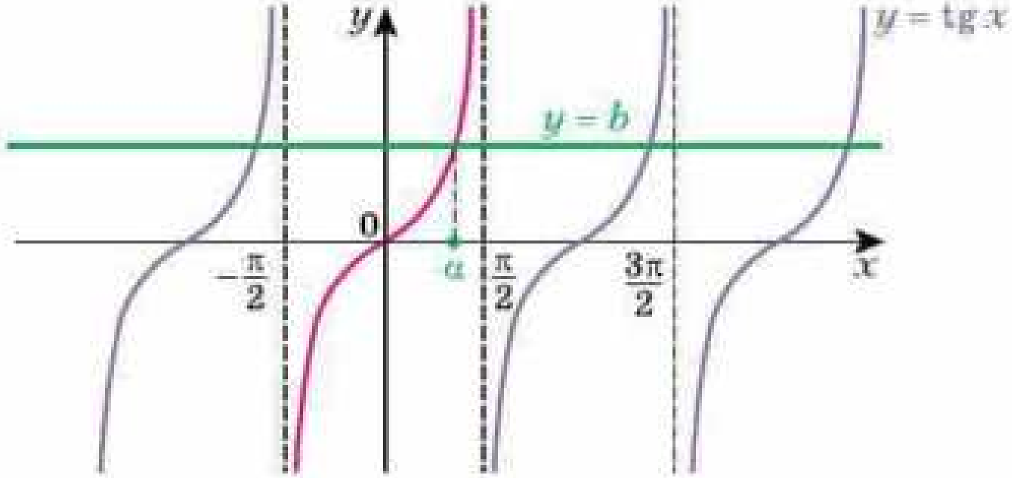


Рис. 30.1

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (красная кривая на рисунке 30.1), то есть на промежутке, длина которого равна периоду этой функции. На этом промежутке уравнение $\operatorname{tg} x = b$ при любом b имеет единственный корень α.

Поскольку функция $y = \operatorname{tg} x$ является периодической с периодом π, то каждый из остальных корней уравнения $\operatorname{tg} x = b$ отличается от найденного корня на число вида πn, $n \in \mathbf{Z}$.

Тогда множество корней уравнения $\operatorname{tg} x = b$ задаётся формулой

$$x = \alpha + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Полученная формула показывает, что корень α играет особую роль: зная его, можно найти все остальные корни уравнения $\operatorname{tg} x = b$. Корень α имеет специальное название — арктангенс.

Определение

Арктангенсом числа b называют такое число α из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен b.

Для арктангенса числа b используют обозначение $\operatorname{arctg} b$.

Например,

$$\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3},\ \text{так как}\ \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\ \text{и}\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3};$$

$$\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4},\ \text{так как}\ -\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\ \text{и}\ \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1;$$

$$\operatorname{arctg} 0 = 0,\ \text{так как}\ 0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\ \text{и}\ \operatorname{tg} 0 = 0.$$

Вообще, $\operatorname{arctg} b = \alpha$, *если* $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ *и* $\operatorname{tg}\alpha = b$.

Отметим, что, например, $\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 1$. Однако $\operatorname{arctg} 1 \neq -\frac{3\pi}{4}$, так как $-\frac{3\pi}{4} \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Теперь формулу корней уравнения $\operatorname{tg} x = b$ можно записать так:

$$\boxed{x = \operatorname{arctg} b + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}}$$

Поскольку областью значений функции $y = \operatorname{ctg} x$ является множество $\boldsymbol{R}$, то уравнение $\operatorname{ctg} x = b$ имеет решения при любом значении b.

На рисунке 30.2 изображены графики функций $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = b$.

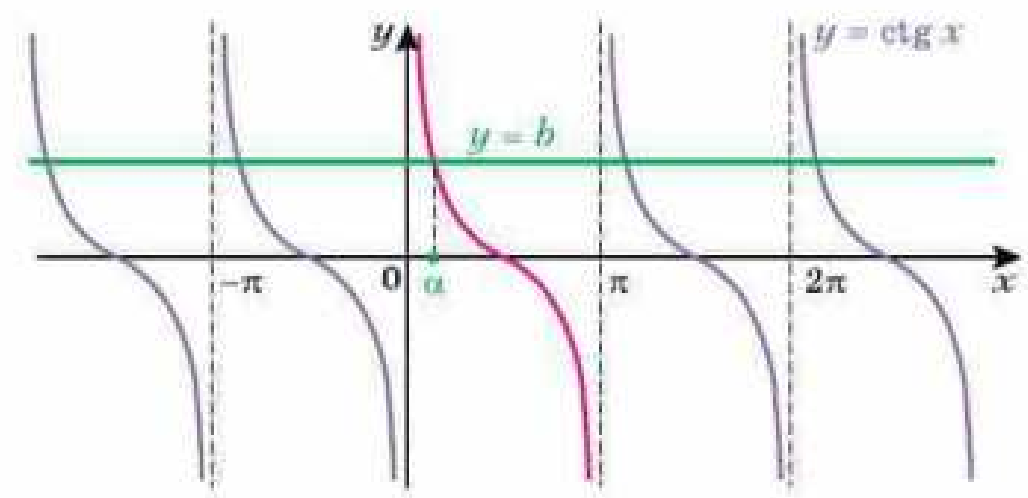


Рис. 30.2

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $(0; \pi)$ (красная кривая на рисунке 30.2), то есть на промежутке, длина которого равна периоду этой функции. На этом промежутке уравнение $\operatorname{ctg} x = b$ при любом b имеет единственный корень α.

Поскольку функция $y = \operatorname{ctg} x$ является периодической с периодом π, то каждый из остальных корней уравнения $\operatorname{ctg} x = b$ отличается от найденного корня на число вида πn, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Тогда множество корней уравнения $\operatorname{ctg} x = b$ задаётся формулой

$$x = \alpha + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Корень α имеет специальное название — арккотангенс.

Определение

Арккотангенсом числа b называют такое число α из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен b.

Для арккотангенса числа b используют обозначение $\operatorname{arcctg} b$.

Например,

$$\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3},\ \text{так как}\ \frac{\pi}{3}\in(0;\pi)\ \text{и}\ \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})=\frac{5\pi}{6},\ \text{так как}\ \frac{5\pi}{6}\in(0;\pi)\ \text{и}\ \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}=-\sqrt{3};$$

$$\operatorname{arcctg}0=\frac{\pi}{2},\ \text{так как}\ \frac{\pi}{2}\in(0;\pi)\ \text{и}\ \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}=0.$$

Вообще, **$\operatorname{arcctg} b=\alpha$, *если* $\alpha\in(0;\pi)$ *и* $\operatorname{ctg}\alpha=b$.**

Отметим, что, например, $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$. Однако $\operatorname{arcctg}(-1)\neq-\frac{\pi}{4}$, так как $-\frac{\pi}{4}\notin(0;\pi)$.

Теперь формулу корней уравнения $\operatorname{ctg}x=b$ можно записать так:

$$\boxed{x=\operatorname{arcctg}b+\pi n,\ n\in Z}$$

Пример 1. Решите уравнение: 1) $\operatorname{tg}\frac{2x}{3}=-\sqrt{3}$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)=-1$.

Решение. 1) Имеем: $\frac{2x}{3}=\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})+\pi k,\ k\in Z;$

$$\frac{2}{3}x=-\frac{\pi}{3}+\pi k;\ \ x=-\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi k.$$

2) Имеем: $\operatorname{ctg}\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=1;$

$$x-\frac{2\pi}{3}=\operatorname{arcctg}1+\pi k,\ k\in Z;\ \ x-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \ x=\frac{11}{12}\pi+\pi k.$$

Ответ: 1) $-\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi k,\ k\in Z$; 2) $\frac{11}{12}\pi+\pi k,\ k\in Z$. ■

Пример 2. Определите, при каких значениях параметра b уравнение $(x-b)\operatorname{tg}x=0$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$ имеет единственный корень.

Решение. Множество корней уравнения $\operatorname{tg}x=0$ определяется формулой $x=\pi n,\ n\in Z$. Рассматриваемому промежутку $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$ принадлежит только один корень $x=0$.

Уравнение $x-b=0$ имеет единственный корень: $x=b$.

Если $b=0$, то исходное уравнение имеет единственный корень: $x=0$.

Если $b \in \left[-\frac{\pi}{6}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то исходное уравнение на заданном промежутке имеет два корня: $x = 0$ и $x = b$.

Понятно, что условие $b \notin \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$ обеспечит существование у исходного уравнения только одного корня.

Ответ: $b = 0$, или $b < -\frac{\pi}{6}$, или $b \geqslant \frac{\pi}{2}$. ■

1. При каких значениях b имеет корни уравнение $\operatorname{tg} x = b$; $\operatorname{ctg} x = b$?
2. Сколько корней имеет уравнение $\operatorname{tg} x = b$; $\operatorname{ctg} x = b$?
3. Что называют арктангенсом числа b; арккотангенсом числа b?
4. Какой вид имеет формула корней уравнения $\operatorname{tg} x = b$; $\operatorname{ctg} x = b$?

Упражнения

30.1. Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$;
2) $\operatorname{tg} x = -1$;
3) $\operatorname{tg} x = 5$;
4) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$;
5) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$;
6) $\operatorname{ctg} x = 0$.

30.2. Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg} x = 1$;
2) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$;
3) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$;
4) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$;
5) $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
6) $\operatorname{tg} x = 0$.

30.3. Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7x}{4}\right) = \sqrt{3}$;
2) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 0$;
3) $\operatorname{ctg} 6x = \frac{6}{11}$.

30.4. Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg}\frac{3}{5}x = 0$;
2) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = -\sqrt{3}$;
3) $\operatorname{ctg}\frac{3}{2}x = 5$.

30.5. Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$;
2) $\operatorname{tg}(3 - 2x) = 2$;
3) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) + 3 = 0$;
4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

30.6. Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$;
2) $\operatorname{ctg}(4 - 3x) = 2$;
3) $3\operatorname{tg}(3x + 1) - \sqrt{3} = 0$.

30.7. Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{x} = 0$; 2) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{\sqrt{x}} = 1$; 3) $\operatorname{tg}(\pi \sin x) = \sqrt{3}$.

30.8. Решите уравнение:

1) $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{5x} = 1$; 2) $\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{x}} = -1$; 3) $\operatorname{ctg}(\pi \cos x) = 1$.

30.9. При каких значениях параметра a имеет решения уравнение:

1) $\frac{\operatorname{tg} x - a}{\operatorname{ctg} x + 3} = 0$; 2) $\frac{\sin x - a}{3\operatorname{tg}^2 x - 1} = 0$?

30.10. При каких значениях параметра a имеет решения уравнение:

1) $\frac{\operatorname{ctg} x + a}{\operatorname{tg} x - 2} = 0$; 2) $\frac{\cos x - a}{\operatorname{ctg}^2 x - 3} = 0$?

30.11. При каких значениях параметра a уравнение $(x + a)(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0$ на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ имеет единственный корень?

30.12. При каких значениях параметра a уравнение $(x - a)(\operatorname{tg} x + 1) = 0$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ имеет единственный корень?

§ 31 Функции $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$

Для любого $a \in [-1; 1]$ уравнение $\cos x = a$ на промежутке $[0; \pi]$ имеет единственный корень, равный $\arccos a$ (рис. 31.1). Поэтому каждому числу x из промежутка $[-1; 1]$ можно поставить в соответствие единственное число y из промежутка $[0; \pi]$ такое, что $y = \arccos x$.

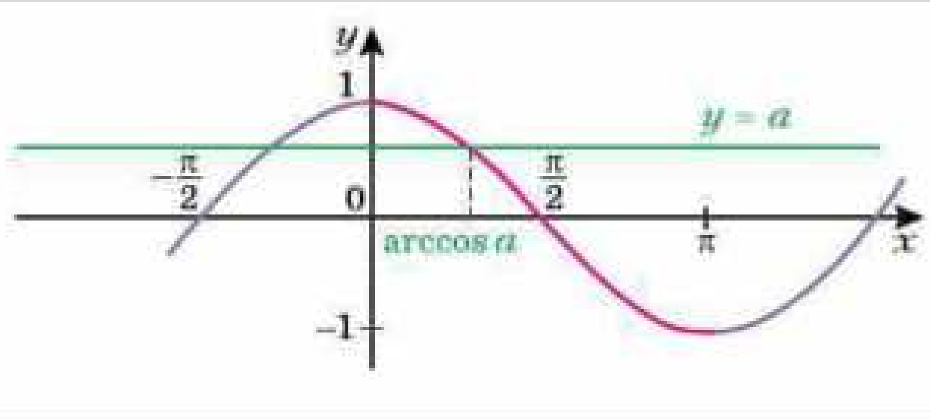


Рис. 31.1

Указанное правило задаёт функцию $f(x) = \arccos x$ с областью определения $D(f) = [-1; 1]$ и областью значений $E(f) = [0; \pi]$.

Функция f является обратной к функции $g(x) = \cos x$ с областью определения $D(g) = [0; \pi]$.

Действительно, $D(f) = E(g) = [-1; 1]$;

$$E(f) = D(g) = [0; \pi].$$

Из определения арккосинуса следует, что для всех x из промежутка $[-1; 1]$ выполняется равенство

$$\boxed{\cos(\arccos x) = x}$$

Иными словами, $g(f(x)) = x$ для всех $x \in D(f)$.

Сказанное означает, что f и g — взаимно обратные функции.

Свойства взаимно обратных функций, рассмотренные в § 7, позволяют определить некоторые свойства функции $f(x) = \arccos x$.

Так как функция $g(x) = \cos x$, $D(g) = [0; \pi]$, — убывающая, то из теоремы 7.3 следует, что функция $f(x) = \arccos x$ также является убывающей.

Для любого $x \in D(g)$ имеем: $f(g(x)) = x$. Это значит, что для любого $x \in [0; \pi]$ выполняется равенство

$$\boxed{\arccos(\cos x) = x}$$

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$. Это позволяет построить график функции $f(x) = \arccos x$ (рис. 31.2).

Отметим ещё одно свойство функции $y = \arccos x$:

для любого $x \in [-1; 1]$ выполняется равенство

$$\boxed{\arccos(-x) = \pi - \arccos x} \qquad (1)$$

Например, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Это свойство имеет простую графическую иллюстрацию. На рисунке 31.3 $AB = MN = \arccos x_0$, $NP = \arccos(-x_0)$, а $MN + NP = \pi$.

Докажем равенство (1). Пусть $\arccos(-x) = \alpha_1$, $\pi - \arccos x = \alpha_2$. Заметим, что $\alpha_1 \in [0; \pi]$, $\alpha_2 \in [0; \pi]$. Функция $y = \cos x$ является убывающей на промежутке $[0; \pi]$, следовательно, на этом промежутке каждое своё значение она принимает только один раз. Поэтому, показав, что $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2$, тем самым докажем равенство $\alpha_1 = \alpha_2$.

Имеем: $\cos\alpha_1 = \cos(\arccos(-x)) = -x$;

$\cos\alpha_2 = \cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x$.

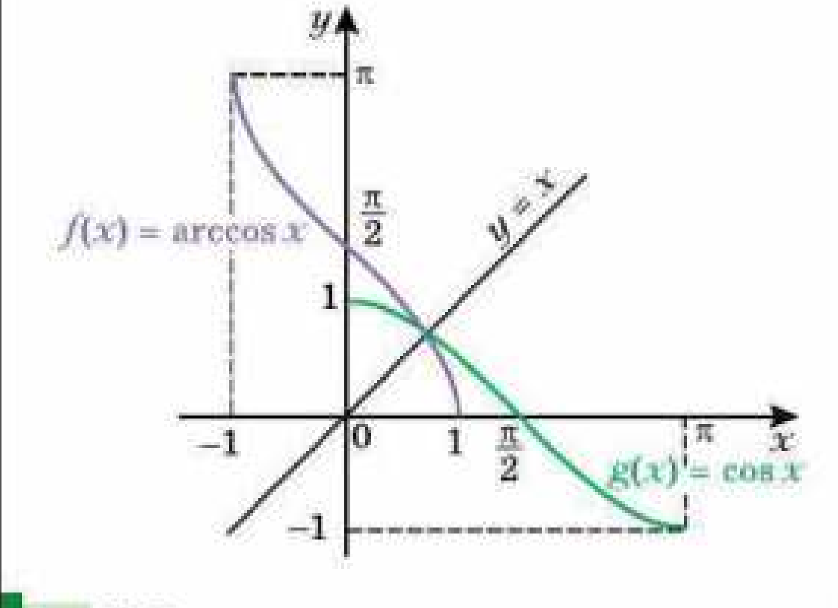


Рис. **31.2**

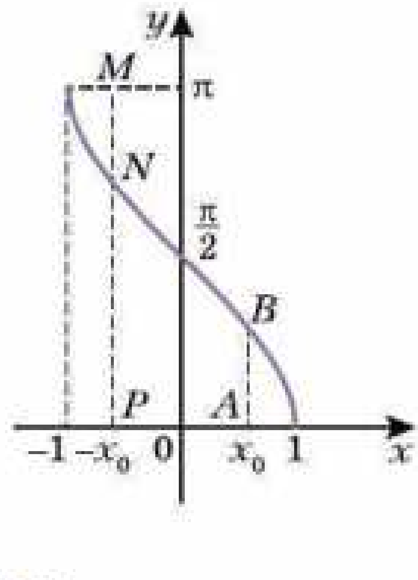


Рис. **31.3**

Для любого $a \in [-1;\ 1]$ уравнение $\sin x = a$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ имеет единственный корень, равный $\arcsin a$ (рис. 31.4). Поэтому каждому числу x из промежутка $[-1;\ 1]$ можно поставить в соответствие единственное число y из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ такое, что $y = \arcsin x$.

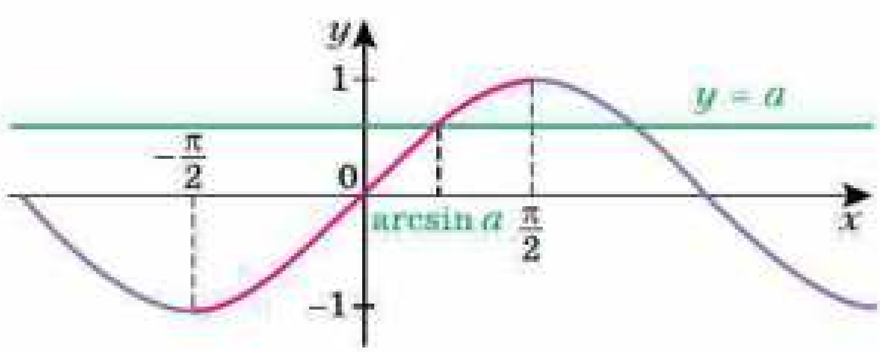


Рис. **31.4**

Указанное правило задаёт функцию $f(x) = \arcsin x$ с областью определения $D(f) = [-1;\ 1]$ и областью значений $E(f) = \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Функция f является обратной к функции $g(x) = \sin x$ с областью определения $D(g) = \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Действительно, $D(f) = E(g) = [-1;\ 1]$;

$$E(f) = D(g) = \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right].$$

Из определения арксинуса следует, что для всех $x \in [-1; 1]$ выполняется равенство

$$\boxed{\sin(\arcsin x) = x}$$

Иными словами, $g(f(x)) = x$ для всех $x \in D(f)$.

Сказанное означает, что f и g — взаимно обратные функции.

Определим некоторые свойства функции $f(x) = \arcsin x$.

Поскольку функция $g(x) = \sin x$, $D(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, — нечётная, то функция $f(x) = \arcsin x$ также является нечётной (см. ключевую задачу 7.10). Иными словами, для любого $x \in [-1; 1]$ выполняется равенство

$$\boxed{\arcsin(-x) = -\arcsin x}$$

Например, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$.

Функция $g(x) = \sin x$, $D(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, — возрастающая. Следовательно, функция $f(x) = \arcsin x$ также является возрастающей (см. теорему 7.3).

Для любого $x \in D(g)$ имеем: $f(g(x)) = x$. Это значит, что для любого $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ выполняется равенство

$$\boxed{\arcsin(\sin x) = x}$$

Вновь воспользуемся тем, что графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

На рисунке 31.5 показано, как с помощью графика функции $g(x) = \sin x$, $D(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, построить график функции $f(x) = \arcsin x$.

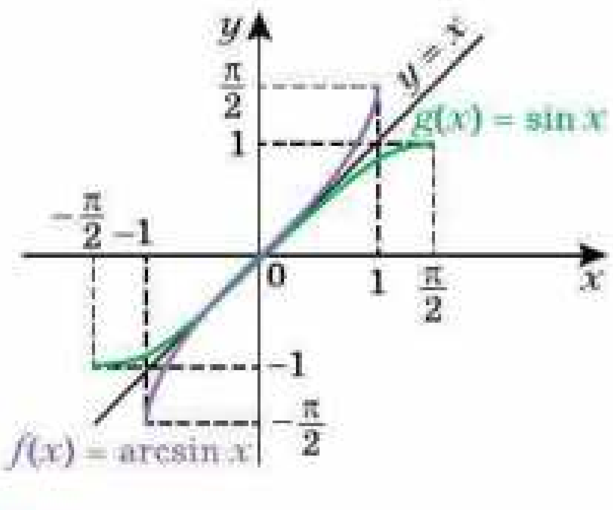


Рис. 31.5

Докажем, что для любого $x \in [-1; 1]$ выполняется равенство

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

Для этого покажем, что $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$.

Имеем: $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Кроме того, $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$. Поэтому

$$-\pi \leqslant -\arccos x \leqslant 0; \ -\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} - \arccos x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, значения выражений $\arcsin x$ и $\frac{\pi}{2} - \arccos x$ принадлежат промежутку возрастания функции $y = \sin x$. Поэтому достаточно показать, что $\sin(\arcsin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right)$. Имеем: $\sin(\arcsin x) = x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x$.

В таблице приведены свойства функций $y = \arccos x$ и $y = \arcsin x$.

	$y = \arccos x$	$y = \arcsin x$
Область определения	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
Область значений	$[0; \pi]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
Нули функции	$x = 1$	$x = 0$
Промежутки знакопостоянства	Если $x \in [-1; 1)$, то $\arccos x > 0$	Если $x \in [-1; 0)$, то $\arcsin x < 0$; если $x \in (0; 1]$, то $\arcsin x > 0$
Чётность	Не является ни чётной, ни нечётной	Нечётная
Возрастание/убывание	Убывающая	Возрастающая

Пример 1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 4 - \arccos 3x$.

Решение. Так как $0 \leqslant \arccos 3x \leqslant \pi$, то $-\pi \leqslant -\arccos 3x \leqslant 0$ и $4 - \pi \leqslant 4 - \arccos 3x \leqslant 4$.

Отметим, что $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 4 - \pi$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 4$.

Ответ: наименьшее значение равно $4 - \pi$, наибольшее значение равно 4. ■

Пример 2. Вычислите: 1) $\arccos\left(\cos\frac{1}{3}\right)$; 2) $\arcsin(\sin 6)$.

Решение. 1) Используя формулу $\arccos(\cos x) = x$, где $x \in [0; \pi]$, имеем $\arccos\left(\cos\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

2) Казалось бы, ответ можно получить сразу, исходя из равенства $\arcsin(\sin x) = x$. Однако число $x = 6$ не принадлежит промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а следовательно, не может быть равным значению арксинуса.

Правильные рассуждения должны быть, например, такими:

$\arcsin(\sin 6) = \arcsin(\sin(6 - 2\pi))$. Так как $6 - 2\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\arcsin(\sin 6) = 6 - 2\pi$.

Ответ: 1) $\frac{1}{3}$; 2) $6 - 2\pi$. ■

Пример 3. Вычислите $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$.

Решение. Пусть $\arccos\frac{3}{5} = \alpha$, тогда $\alpha \in [0; \pi]$ и $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Задача свелась к поиску значения $\sin\alpha$.

Учтём, что если $\alpha \in [0; \pi]$, то $\sin\alpha \geqslant 0$. Тогда получаем:

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Ответ: $\frac{4}{5}$. ■

Пример 4. Постройте график функции $y = \arcsin(\sin x)$.

Решение. Напомним, что $\arcsin(\sin x) = x$ только при условии $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$. Поэтому мысль, что искомым графиком является прямая $y = x$, — ошибочная.

Данная функция — периодическая с периодом $T = 2\pi$. Поэтому достаточно построить её график на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ длиной в период.

Если $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin(\sin x) = x$. Поэтому на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ искомый график — это отрезок прямой $y = x$.

Если $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$, то $-\frac{\pi}{2} \leqslant \pi - x \leqslant \frac{\pi}{2}$, следовательно, $\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$. Поэтому на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ искомый график — это отрезок прямой $y = \pi - x$.

График функции $y = \arcsin(\sin x)$ изображён на рисунке 31.6. ■

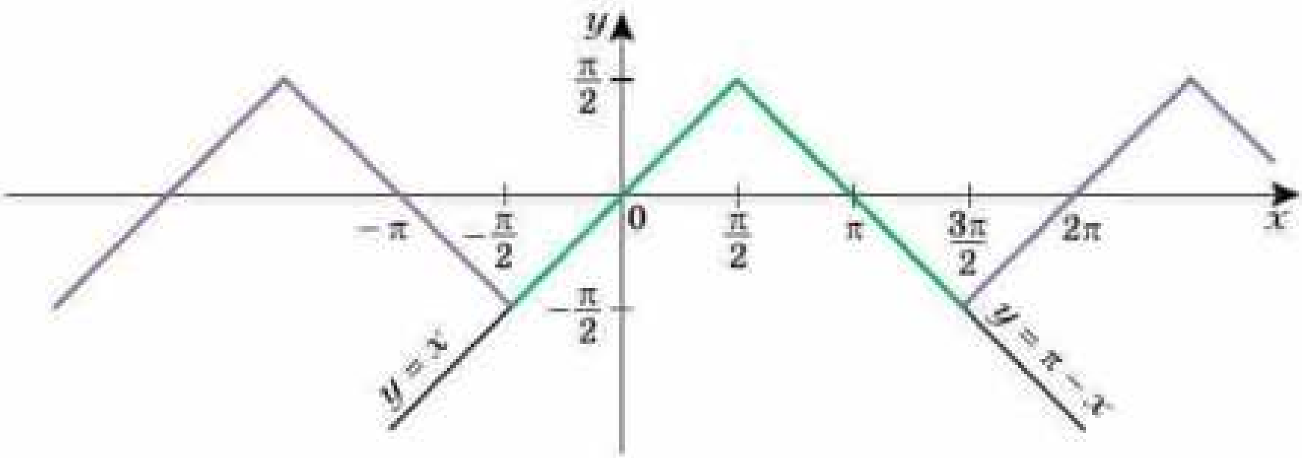


Рис. 31.6

Для любого a уравнение $\operatorname{tg} x = a$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ имеет единственный корень, равный $\operatorname{arctg} a$ (рис. 31.7). Поэтому любому числу x можно поставить в соответствие единственное число y из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ такое, что $y = \operatorname{arctg} x$.

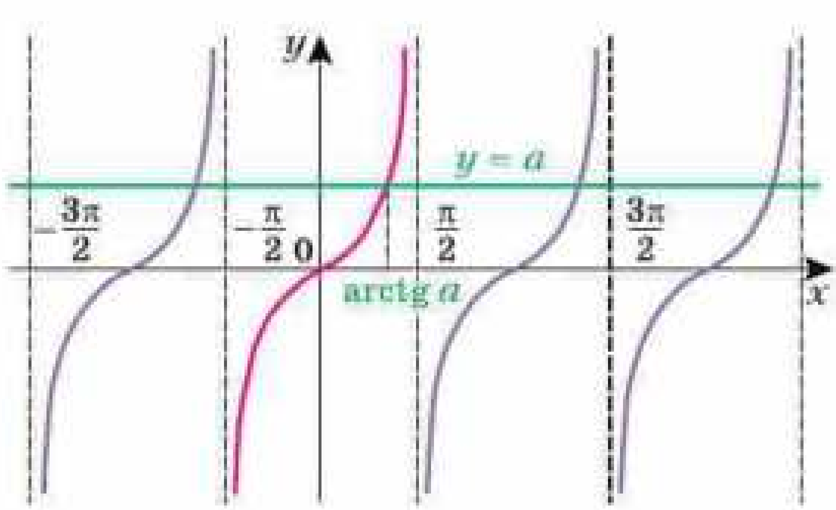


Рис. 31.7

Указанное правило задаёт функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$ с областью определения $D(f) = \boldsymbol{R}$ и областью значений $E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Функция f является обратной к функции $g(x) = \operatorname{tg} x$ с областью определения $D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Действительно, $D(f) = E(g) = \boldsymbol{R}$;

$$E(f) = D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Из определения арктангенса следует, что для всех $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство

$$\boxed{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x}$$

Иными словами, $g(f(x)) = x$ для всех $x \in D(f)$.

Сказанное означает, что f и g — взаимно обратные функции.

Свойства взаимно обратных функций, рассмотренные в § 7, позволяют определить некоторые свойства функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Поскольку функция $g(x) = \operatorname{tg} x$, $D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, — возрастающая, то из теоремы 7.3 следует, что функция $f(x) = \operatorname{arctg} x$ также является возрастающей.

Поскольку функция $g(x) = \operatorname{tg} x$, $D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, — нечётная, то функция $f(x) = \operatorname{arctg} x$ также является нечётной (см. ключевую задачу 7.10). Иными словами, для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство

$$\boxed{\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x}$$

Например, $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$.

Для любого $x \in D(g)$ имеем $f(g(x)) = x$. Это значит, что для любого $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ выполняется равенство

$$\boxed{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x}$$

Напомним, что графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$. На рисунке 31.8 показано, как с помощью графика функции $g(x) = \operatorname{tg} x$, $D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, построить график функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Для любого a уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ на промежутке $(0; \pi)$ имеет единственный корень, равный $\operatorname{arcctg} a$ (рис. 31.9). Поэтому любому числу x можно поставить в соответствие единственное число y из промежутка $(0; \pi)$ такое, что $y = \operatorname{arcctg} x$.

Указанное правило задаёт функцию $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ с областью определения $D(f) = \boldsymbol{R}$ и областью значений $E(f) = (0; \pi)$.

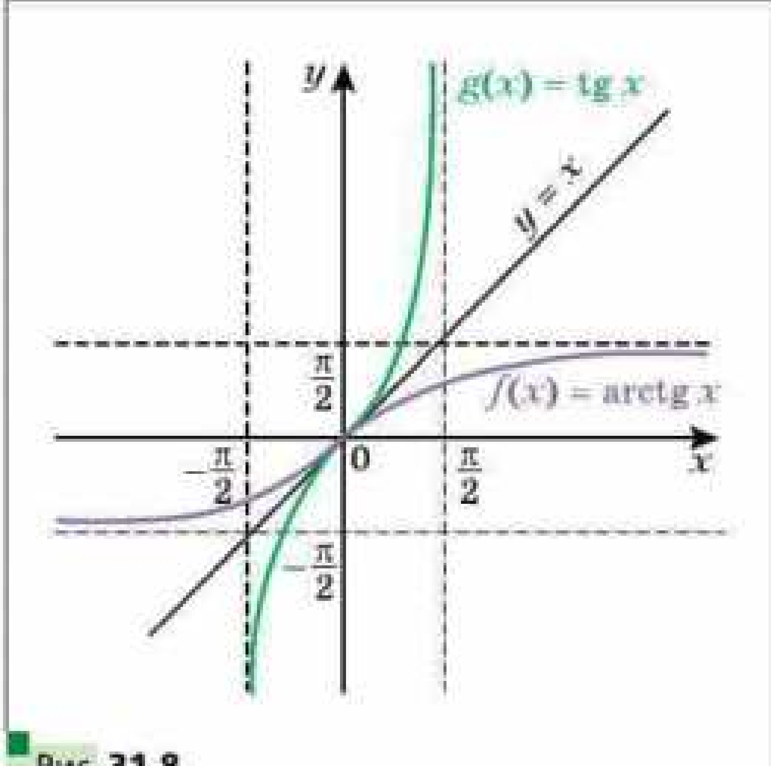


Рис. 31.8

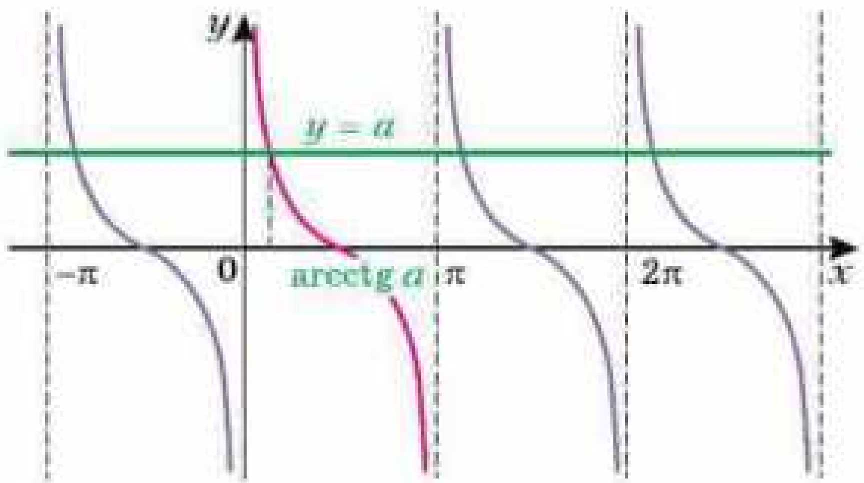


Рис. 31.9

Функция f является обратной к функции $g(x) = \operatorname{ctg} x$ с областью определения $D(g) = (0; \pi)$.

Действительно,

$$D(f) = E(g) = \boldsymbol{R};$$
$$E(f) = D(g) = (0; \pi).$$

Из определения арккотангенса следует, что для всех $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство

$$\boxed{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x}$$

Иными словами, $g(f(x)) = x$ для всех $x \in D(f)$.

Сказанное означает, что f и g — взаимно обратные функции.

Определим некоторые свойства функции $f(x) = \operatorname{arcctg} x$.

Так как функция $g(x) = \operatorname{ctg} x$, $D(g) = (0; \pi)$, — убывающая, то функция $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ также является убывающей.

Для любого $x \in D(g)$ имеем: $f(g(x)) = x$. Это значит, что для любого $x \in (0; \pi)$ выполняется равенство

$$\boxed{\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x}$$

На рисунке 31.10 показано, как с помощью графика функции $g(x) = \operatorname{ctg} x$, $D(g) = (0; \pi)$, построить график функции $f(x) = \operatorname{arcctg} x$.

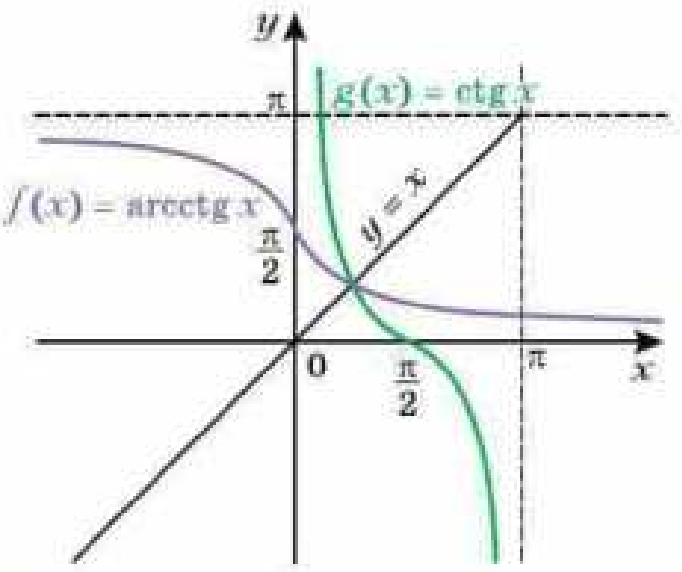


Рис. 31.10

Отметим ещё одно свойство функции арккотангенс: для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство

$$\boxed{\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x}$$

Например, $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Докажем это свойство.

Пусть $\operatorname{arcctg}(-x) = \alpha_1$ и $\pi - \operatorname{arcctg} x = \alpha_2$. Заметим, что $\alpha_1 \in (0; \pi)$, $\alpha_2 \in (0; \pi)$.

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает на промежутке $(0; \pi)$, следовательно, на этом промежутке каждое своё значение она принимает только один раз. Поэтому, показав, что $\operatorname{ctg}\alpha_1 = \operatorname{ctg}\alpha_2$, тем самым докажем равенство $\alpha_1 = \alpha_2$.

Имеем: $\operatorname{ctg}\alpha_1 = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(-x)) = -x$;

$\operatorname{ctg}\alpha_2 = \operatorname{ctg}(\pi - \operatorname{arcctg} x) = -\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = -x$.

Следовательно, $\operatorname{ctg}\alpha_1 = \operatorname{ctg}\alpha_2$.

Покажем, что для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство

$$\boxed{\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}}$$

Достаточно показать, что $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$.

Имеем: $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$, $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$;

$$-\pi < -\operatorname{arcctg} x < 0; \ -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x < \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, значения выражений $\operatorname{arctg} x$ и $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$ принадлежат промежутку возрастания функции $y = \operatorname{tg} x$. Поэтому достаточно показать, что $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x\right)$. Имеем: $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x\right) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$.

В таблице приведены свойства функций $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$.

	$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \operatorname{arcctg} x$
Область определения	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$
Область значений	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$(0; \pi)$
Нули функции	$x = 0$	—
Промежутки знакопостоянства	Если $x \in (-\infty; 0)$, то $\operatorname{arctg} x < 0$; если $x \in (0; +\infty)$, то $\operatorname{arctg} x > 0$	$\operatorname{arcctg} x > 0$ при всех x
Чётность	Нечётная	Не является ни чётной, ни нечётной
Возрастание/убывание	Возрастающая	Убывающая

Пример 5. Вычислите $\cos\left(2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

Решение. Пусть $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) = \alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$. Запишем: $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; $\cos^2\alpha = \frac{9}{10}$. Отсюда $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot \frac{9}{10} - 1 = \frac{4}{5}$.

Ответ: $\frac{4}{5}$. ■

Пример 6. Докажите, что $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$.

Решение. Так как функция $y=\operatorname{arctg}x$ — возрастающая, то можно записать:

$$0<\operatorname{arctg}\frac{1}{2}<\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4},$$

$$0<\operatorname{arctg}\frac{1}{3}<\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}.$$

Отсюда $0<\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}<\frac{\pi}{2}$.

Следовательно, значения выражений, записанных в левой и правой частях доказываемого равенства, принадлежат промежутку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. На этом промежутке функция $y=\operatorname{tg}x$ возрастает.

Тогда для доказательства достаточно показать, что

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}.$$

Имеем: $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$;

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)=\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1.\ \blacksquare$$

? Укажите свойства функции $y=\arccos x$; $y=\arcsin x$; $y=\operatorname{arctg}x$; $y=\operatorname{arcctg}x$.

Упражнения

31.1. Найдите область определения функции:

1) $y=\arcsin(x-1)$;
2) $y=\arccos\sqrt{x}$;
3) $y=\arccos\frac{\pi}{x+4}$.

31.2. Найдите область определения функции:

1) $y=\arcsin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$;
2) $y=\arccos\sqrt{3-x}$;
3) $y=\arccos\frac{2}{3x}$.

31.3. Найдите область определения функции:

1) $y=\sqrt{\operatorname{arcctg}x}$;
2) $y=\sqrt{\operatorname{arctg}(x-1)}$.

31.4. Найдите область определения функции $y=\sqrt{\pi-\operatorname{arcctg}x}$.

31.5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y=\arcsin x+\frac{\pi}{2}$;
2) $y=\arccos x+2$.

31.6. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = \arccos x + \pi$; 2) $y = \arcsin x + 1$.

31.7. Найдите область значений функции:

1) $y = \operatorname{arctg} x + 2$; 2) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$.

31.8. Найдите область значений функции:

1) $y = \operatorname{arcctg} x + 4$; 2) $y = \sqrt{-\operatorname{arctg} x}$.

31.9. Решите уравнение:

1) $\arcsin x = -\frac{\pi}{6}$; 2) $\arccos x = \frac{1}{2}$; 3) $\arcsin x = \frac{5\pi}{6}$.

31.10. Решите уравнение:

1) $\arccos x = \frac{\pi}{6}$; 2) $\arccos x = -\frac{\pi}{6}$; 3) $\arccos(2x - 3) = \frac{\pi}{2}$.

31.11. Решите уравнение:

1) $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$; 2) $\operatorname{arctg} x = 1$; 3) $\operatorname{arctg} x = \frac{3\pi}{4}$.

31.12. Решите уравнение:

1) $\operatorname{arcctg} x = \frac{3\pi}{4}$; 2) $\operatorname{arcctg} x = -1$; 3) $\operatorname{arcctg} x = -\frac{\pi}{4}$.

◆◆

31.13. Решите неравенство:

1) $\arcsin x > -\frac{\pi}{2}$; 3) $\arcsin x > \frac{\pi}{2}$; 5) $\arccos x > 0$;

2) $\arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$; 4) $\arccos x \leqslant 0$; 6) $\arccos x < \pi$.

31.14. Решите неравенство:

1) $\arccos x \geqslant \pi$; 3) $\arccos x \geqslant 0$; 5) $\arccos x > \pi$;

2) $\arcsin x < \frac{\pi}{2}$; 4) $\arccos x \leqslant \pi$; 6) $\arcsin x \leqslant -\frac{\pi}{2}$.

31.15. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{\pi - \arccos x}$; 3) $y = \arcsin(\sqrt{x} + 1)$.

2) $y = \sqrt{\arccos x - \pi}$;

31.16. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}$; 3) $y = \sqrt{-\arccos x}$;

2) $y = \sqrt{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}$; 4) $y = \arccos(x^2 - 2x + 2)$.

31.17. Найдите область значений функции:

1) $y = \arcsin\sqrt{x} + 4$; 2) $y = \frac{1}{\arcsin x}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt{\arccos x}}$.

31.18. Найдите область значений функции:

1) $y = \arccos\sqrt{x} + 2$; 2) $y = \dfrac{1}{\arccos x}$; 3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{\arcsin x}}$.

31.19. Найдите область значений функции $y = \dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}$.

31.20. Найдите область значений функции $y = \dfrac{1}{\operatorname{arcctg} x}$.

31.21. Докажите, что при $|x| \leqslant 1$ выполняется равенство

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

31.22. Докажите, что при $|x| \leqslant 1$ выполняется равенство

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

31.23. Вычислите:

1) $\cos\left(\arcsin\dfrac{4}{5}\right)$; 2) $\sin\left(2\arcsin\dfrac{3}{5}\right)$; 3) $\cos\left(\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{8}\right)$.

31.24. Вычислите:

1) $\sin\left(\arccos\dfrac{1}{3}\right)$; 2) $\cos\left(2\arccos\dfrac{4}{5}\right)$; 3) $\cos\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{5}{13}\right)$.

31.25. Вычислите:

1) $\sin(\operatorname{arctg} 2)$; 2) $\cos\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} - \operatorname{arcctg} 3\right)$.

31.26. Вычислите:

1) $\sin(\operatorname{arctg}(-3))$; 2) $\cos\left(2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4} + \arccos\dfrac{3}{5}\right)$.

31.27. Решите уравнение:

1) $\cos(\arccos(4x - 9)) = x^2 - 5x + 5$; 2) $\sin(\arcsin(x + 2)) = x + 2$.

31.28. Решите уравнение:

1) $\cos(\arccos(4x - 1)) = 3x^2$; 2) $\cos(\arccos(x - 1)) = x - 1$.

31.29. Решите неравенство:

1) $\arccos(2x - 1) > \dfrac{\pi}{3}$; 3) $\arcsin(5 - 3x) < -\dfrac{\pi}{3}$.

2) $\arcsin 2x > \dfrac{\pi}{6}$;

31.30. Решите неравенство:

1) $\arccos(4x - 1) > \dfrac{3\pi}{4}$; 3) $\arccos(4 - 7x) < \dfrac{5\pi}{6}$.

2) $\arcsin(2 - 3x) < \dfrac{\pi}{4}$;

31.31. Решите неравенство:

1) $\operatorname{arctg}(5x + 3) > -\dfrac{\pi}{3}$; 2) $\operatorname{arcctg}(x - 2) < \dfrac{5\pi}{6}$.

31.32. Решите неравенство $\operatorname{arcctg}(3x-7) > \frac{2\pi}{3}$.

◆◆◆

31.33. Постройте график функции:

1) $y = \sin(\arcsin x)$; 3) $y = \cos(2\arcsin x)$;

2) $y = \cos(\arcsin x)$; 4) $y = \sin(\arcsin x + \arccos x)$.

31.34. Постройте график функции:

1) $y = \cos(\arccos x)$; 3) $y = \cos(2\arccos x)$;

2) $y = \sin(\arccos x)$; 4) $y = \cos(\arcsin x + \arccos x)$.

31.35. Постройте график функции:

1) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$; 2) $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)$.

31.36. Постройте график функции:

1) $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$; 2) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)$.

31.37. Постройте график функции $y = \arccos(\cos x)$.

31.38. Постройте график функции $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

31.39. Постройте график функции $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$.

31.40. Вычислите:

1) $\arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{7}\right)$; 4) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{10\pi}{13}\right)$;

2) $\arcsin(\sin 3)$; 5) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 5)$;

3) $\arcsin(\cos 8)$; 6) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{21}\right)$.

31.41. Вычислите:

1) $\arccos\left(\cos\frac{11\pi}{9}\right)$; 3) $\arccos(\sin 12)$; 5) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} 10)$.

2) $\arccos(\cos 6{,}28)$; 4) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{15\pi}{11}\right)$;

31.42. Решите уравнение $(\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 = \frac{5\pi^2}{36}$.

31.43. Решите уравнение $\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arcctg} x = -\frac{5\pi^2}{18}$.

31.44. Докажите, что $\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{5}{13} = \arcsin\frac{56}{65}$.

31.45. Докажите, что $\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$.

31.46. Решите уравнение $\arcsin 2x + \arcsin x = \frac{\pi}{3}$.

31.47. Решите уравнение $\arcsin x + \arcsin\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$.

§ 32 Тригонометрические уравнения, сводящиеся к алгебраическим

В § 28—30 мы получили формулы для решения уравнений вида $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$. Эти уравнения называют **простейшими тригонометрическими уравнениями**. С помощью различных приёмов и методов многие тригонометрические уравнения можно свести к простейшим.

В этом параграфе рассмотрим уравнения, которые можно свести к простейшим, введя новую переменную и решив полученное алгебраическое уравнение.

Пример 1. Решите уравнение $2\sin^2 x + \cos 4x - 2 = 0$.

Решение. Можно записать: $1 - \cos 2x + 2\cos^2 2x - 1 - 2 = 0$. Отсюда $2\cos^2 2x - \cos 2x - 2 = 0$. Сделаем замену $\cos 2x = t$. Тогда последнее уравнение принимает вид $2t^2 - t - 2 = 0$. Решив его, получаем: $t_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$, $t_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$.

Поскольку $\frac{1+\sqrt{17}}{4} > 1$, а $\frac{1-\sqrt{17}}{4} \in [-1; 1]$, то исходное уравнение равносильно уравнению $\cos 2x = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$, отсюда

$$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{17}}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{17}}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ■

Пример 2. Решите уравнение $\cos x + \sin x + \sin x \cos x = 1$.

Решение. Пусть $\cos x + \sin x = t$. Тогда $\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = t^2$; $\sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$. Данное в условии уравнение принимает вид $t + \frac{t^2-1}{2} = 1$. Отсюда $t^2 + 2t - 3 = 0$; $t_1 = -3$, $t_2 = 1$.

С учётом замены получаем совокупность $\left[\begin{array}{l}\cos x + \sin x = -3,\\ \cos x + \sin x = 1.\end{array}\right.$

Поскольку $|\cos x| \leqslant 1$ и $|\sin x| \leqslant 1$, то первое уравнение совокупности корней не имеет.

Остаётся решить уравнение $\cos x + \sin x = 1$. Имеем:

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos x\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z};\ x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \left[\begin{array}{l} x = 2\pi n, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n. \end{array}\right.$$

Ответ: $2\pi n,\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. ■

Определение

Уравнение вида

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + \ldots + a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — действительные числа, одновременно не равные нулю, $n \in N$, называют однородным тригонометрическим уравнением n-й степени относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Из определения следует, что суммы показателей степеней при $\sin x$ и $\cos x$ всех слагаемых однородного тригонометрического уравнения равны.

Например, уравнение $2\sin x - 3\cos x = 0$ — однородное тригонометрическое уравнение первой степени, а уравнения $\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$ и $2\sin^2 x - \cos^2 x = 0$ — однородные тригонометрические уравнения второй степени.

Для однородных уравнений существует эффективный метод решения. Ознакомимся с ним на примерах.

Пример 3. Решите уравнение $7\sin^2 x - 8\sin x\cos x - 15\cos^2 x = 0$.

Решение. Если $\cos x = 0$, то из данного уравнения следует, что $\sin x = 0$. Однако $\sin x$ и $\cos x$ не могут одновременно быть равными нулю, поскольку имеет место равенство $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Следовательно, множество корней данного уравнения состоит из таких чисел x, при которых $\cos x \neq 0$.

Разделив обе части данного уравнения на $\cos^2 x$, получим равносильное уравнение:

$$\frac{7\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{8\sin x\cos x}{\cos^2 x} - \frac{15\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0;$$

$$7\operatorname{tg}^2 x - 8\operatorname{tg} x - 15 = 0.$$

Отсюда $\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -1, \\ \operatorname{tg} x = \frac{15}{7}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = \operatorname{arctg}\frac{15}{7} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ \operatorname{arctg}\frac{15}{7} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. ■

Пример 4. Решите уравнение $3\sin^2 x + \sin 2x = 2$.

Решение. Это уравнение не является однородным. Но его можно легко свести к однородному:

$$3\sin^2 x + 2\sin x\cos x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x). \text{ Отсюда}$$

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0.$$

Получили однородное уравнение. Далее, действуя, как в предыдущем примере, получаем уравнение, равносильное исходному:

$$\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 2 = 0.$$

Завершите решение самостоятельно.

Ответ: $\operatorname{arctg}(-1 \pm \sqrt{3}) + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. ■

Пример 5. Решите уравнение $\sin x - \cos x = 4\sin^3 x$.

Решение. Это уравнение не является однородным. Перепишем его иначе: $(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin x - \cos x) = 4\sin^3 x$. Получили однородное уравнение третьей степени. Завершите решение самостоятельно.

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. ■

Пример 6. Решите уравнение $2\sin x - 3\cos x = 2$.

Решение. Воспользуемся формулами двойного аргумента и основным тригонометрическим тождеством:

$$4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 3\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = 2\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right);$$

$$\sin^2\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 5\cos^2\frac{x}{2} = 0.$$

Завершите решение самостоятельно.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $-2\operatorname{arctg} 5 + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. ■

Уравнение примера 6 является частным случаем уравнения вида

$$a\sin x + b\cos x = c, \tag{1}$$

где a, b и c — некоторые числа, отличные от нуля.

При решении таких уравнений, кроме метода, рассмотренного в примере 6, можно использовать такой приём. Перепишем уравнение (1) в виде

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Поскольку $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1,$ то точка $P\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ принадлежит единичной окружности. Поэтому существует такой угол φ, что $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Теперь уравнение принимает вид

$$\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Отсюда $\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Таким образом, получили простейшее тригонометрическое уравнение.

Пример 7. При каких значениях параметра a уравнение $\sin^2 3x-\left(a+\frac{1}{2}\right)\sin 3x+\frac{a}{2}=0$ имеет на промежутке $\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$ ровно: 1) два корня; 2) три корня?

Решение. Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно $\sin 3x$. Тогда получим равносильную совокупность:

$$\left[\begin{array}{l}\sin 3x=\frac{1}{2},\\ \sin 3x=a.\end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности имеет на промежутке $\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$ ровно два корня. В этом можно убедиться непосредственно, найдя эти корни, или графически (рис. 32.1). Поэтому для задачи 1 надо, чтобы второе уравнение совокупности не давало новых корней на промежутке $\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$.

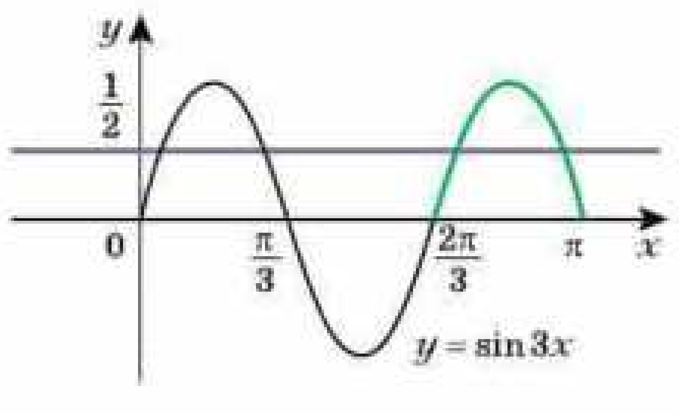


Рис. 32.1

При $a = \frac{1}{2}$ очевидно, что корни уравнений совокупности совпадают. При $a \geqslant 1$ или $a < 0$ уравнение $\sin 3x = a$ не имеет корней на промежутке $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$. В этом опять-таки можно убедиться, например, графически (см. рис. 32.1).

Для задачи 2 второе уравнение совокупности на рассматриваемом промежутке должно добавлять к множеству всех корней только один корень. Ясно, что это будет выполняться только при $a = 1$.

Ответ: 1) $a > 1$, или $a < 0$, или $a = \frac{1}{2}$; 2) $a = 1$. ■

Упражнения

◆

32.1. Решите уравнение:

1) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$;
2) $4\cos 2x - \sin 2x = 0$;
3) $\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 0$;
4) $3\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$.

32.2. Решите уравнение:

1) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$;
2) $2\sin x + \cos x = 0$;
3) $\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 0$;
4) $4\sin^2 x = 3\sin x\cos x + \cos^2 x$.

◆◆

32.3. Решите уравнение:

1) $2\sin^2 x + 7\cos x + 2 = 0$;
2) $2\cos x - \cos 2x - \cos^2 x = 0$;
3) $\cos\frac{2x}{3} - 5\cos\frac{x}{3} - 2 = 0$;
4) $\cos 2x - \cos^2 x - \sqrt{2}\sin x = 0$;
5) $8\sin^2 3x + 4\sin^2 6x = 5$;
6) $4\operatorname{tg} 5x + 3\operatorname{ctg} 5x = 7$;
7) $\frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg} x + 3$;
8) $2\operatorname{tg}^2 x + 4\cos^2 x = 7$.

32.4. Решите уравнение:

1) $5\sin\frac{x}{6} - \cos\frac{x}{3} + 3 = 0$;
2) $\cos x + \sin\frac{x}{2} = 0$;
3) $2\cos^2 4x - 6\cos^2 2x + 1 = 0$;
4) $\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x = 3$;
5) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 3 = \frac{3}{\cos^2 x}$;
6) $4\sin^2 x + 9\operatorname{ctg}^2 x = 6$.

32.5. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y = \frac{1}{6}. \end{cases}$

32.6. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x - y = \dfrac{2\pi}{3}, \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = -2\sqrt{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{6}, \\ \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = 1. \end{cases}$

32.7. Решите уравнение:

1) $\sin^2 x + 0{,}5\sin 2x - 2\cos^2 x = 0$;

2) $5\cos^2 x - 3\sin^2 x - \sin 2x = 2$;

3) $3\sin^2 x + \sin x \cos x + 4\cos^2 x = 3$;

4) $3\sin x \cos x + \cos^2 x = 1$.

32.8. Решите уравнение:

1) $\sin^2 x + 3\cos^2 x - 2\sin 2x = 0$; 2) $2\cos^2 x + \sin 2x - 2 = 0$.

32.9. Решите уравнение:

1) $4\cos x \sin x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; 3) $3 + 5\cos x = \sin^4 x - \cos^4 x$;

2) $3\cos x + 2\operatorname{tg} x = 0$; 4) $\cos 2x - 9\cos x + 6 = 4\sin^2 \dfrac{x}{2}$.

32.10. Решите уравнение:

1) $4\operatorname{ctg} x - 5\sin x = 0$;

2) $4\sin^2 2x + 7\cos 2x - 2\sin^2 x = 6$;

3) $7 + 2\sin 2x + 1{,}5(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = 0$;

4) $2\cos 4x - 2\cos^2 x = 3\cos 2x$.

32.11. Решите уравнение:

1) $\sin^2 2x - \dfrac{1}{4} = \cos 2x \cos 6x$;

2) $2\sin x \cos 3x = \cos^2 4x - \sin 2x + 1$.

32.12. Решите уравнение $\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{3}{2}x + \cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{4}$.

32.13. Решите уравнение:

1) $3\sin x - 8\cos x = 3$; 2) $2\sin x - 5\cos x = 3$.

32.14. Решите уравнение:

1) $3\sin x + 5\cos x = -3$; 2) $3\sqrt{3}\sin x - 5\cos x = 7$.

32.15. Решите уравнение:

1) $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{4}$;

2) $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0{,}5$.

32.16. Решите уравнение:

1) $4\sin^4 x + \cos 4x = 1 + 12\cos^4 x$;

2) $\cos^4 3x + \cos^4\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{4}$.

32.17. Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 4$;

2) $18\cos^2 x + 5(3\cos x + \cos^{-1} x) + 2\cos^{-2} x + 5 = 0$.

32.18. Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg}^3 x = 4$;

2) $4\sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x} + 4\sin x + \dfrac{2}{\sin x} = 11$.

32.19. Решите уравнение:

1) $2\cos^2 x + \dfrac{5}{4}\sin^2 2x + \sin^4 x + \cos 2x = 0$;

2) $\sin^3 x = \sin x + \cos x$.

32.20. Решите уравнение $\sin^3 2x + \cos^3 2x - \sin 2x = 0$.

32.21. Решите уравнение:

1) $\cos 3x + 2\cos x = 0$; 2) $\sin 6x + 2 = 2\cos 4x$.

32.22. Решите уравнение:

1) $3\sin\dfrac{x}{3} = \sin x$; 2) $\cos 3x - 1 = \cos 2x$.

32.23. Решите уравнение:

1) $3\cos x + 3\sin x + \sin 3x - \cos 3x = 0$;

2) $\cos 4x = \cos^2 3x$;

3) $\sin^3 x \sin 3x + \cos^3 x \cos 3x = \cos^3 4x$.

32.24. Решите уравнение:

1) $\sin^3 x + \sin 3x = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\sin 2x$;

2) $\cos 6x + 8\cos 2x - 4\cos 4x - 5 = 0$.

32.25. Решите уравнение:

1) $\sqrt{-\cos 2x} = -\sqrt{2}\cos x$; 2) $\sqrt{2 - 3\cos 2x} = \sqrt{\sin x}$.

32.26. Решите уравнение:

1) $\sqrt{10 - 18\cos x} = 6\cos x - 2$; 2) $\sqrt{3 + 4\cos 2x} = \sqrt{2}\cos x$.

32.27. Решите уравнение $2\sin 2x = 3(\sin x + \cos x)$.

32.28. Решите уравнение $\sin 2x + 5(\sin x + \cos x) = 0$.

32.29. Решите уравнение:

1) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$; 2) $\dfrac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x} + 2\cdot\dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 3$.

32.30. Решите уравнение $\sin x + \cos x = 1 + \sin x \cos x$.

32.31. При каких положительных значениях параметра a промежуток $[0; a]$ содержит ровно три корня уравнения:

1) $2\sin^2 x - \sin x = 0$; 2) $2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0$?

32.32. Определите, при каких положительных значениях параметра a промежуток $[0; a]$ содержит ровно n корней уравнения:
1) $2\sin^2 x + \sin x = 0$, $n = 4$; 2) $2\cos^2 x + \cos x = 0$, $n = 3$.

32.33. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $\sin^2 x - \left(a + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin x + \frac{a\sqrt{2}}{2} = 0$ имеет на промежутке $\left[0; \frac{4\pi}{3}\right]$: 1) два корня; 2) три корня; 3) не менее трёх корней.

32.34. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $\cos^2 x - \left(a - \frac{1}{3}\right)\cos x - \frac{a}{3} = 0$ имеет на промежутке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{3}\right)$: 1) два корня; 2) три корня; 3) не менее трёх корней.

32.35. При каких значениях параметра a уравнения $\sin x = 2\sin^2 x$ и $\sin 3x = (a+1)\sin x - 2(a-1)\sin^2 x$ равносильны?

32.36. При каких значениях параметра a уравнения $\sin 2x + a = \sin x + 2a\cos x$ и $2\cos 2x + a^2 = 5a\cos x - 2$ равносильны?

§ 33 Решение тригонометрических уравнений методом разложения на множители. Применение ограниченности тригонометрических функций

Вы знаете, что если правая часть уравнения равна нулю, а левую часть удаётся разложить на множители, то решение этого уравнения можно свести к решению нескольких более простых уравнений.

Пример 1. Решите уравнение $\sin 3x + 3\sin 2x = 3\sin x$.

Решение. Применив формулы синуса двойного и тройного аргументов, получаем: $3\sin x - 4\sin^3 x + 6\sin x\cos x = 3\sin x$.

Отсюда $2\sin x(3\cos x - 2\sin^2 x) = 0$;

$$2\sin x(3\cos x - 2(1 - \cos^2 x)) = 0;$$
$$2\sin x(2\cos^2 x + 3\cos x - 2) = 0.$$

Переходим к совокупности $\left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0.\end{array}\right.$ Отсюда

$$\left[\begin{array}{l}x = \pi n,\\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\pi n,\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$ ■

Пример 2. Решите уравнение $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0.$

Решение. Перепишем данное уравнение в виде

$$(1+\cos 2x)+\sin 2x+(\sin x+\cos x)=0.$$

Теперь можно записать: $2\cos^2 x+2\sin x\cos x+(\sin x+\cos x)=0;$

$$2\cos x(\sin x+\cos x)+(\sin x+\cos x)=0;$$

$$(2\cos x+1)(\sin x+\cos x)=0.$$

Получаем совокупность $\left[\begin{array}{l}\cos x=-\frac{1}{2},\\ \sin x+\cos x=0.\end{array}\right.$ Отсюда

$$\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ -\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$ ■

Пример 3. Решите уравнение $\cos\frac{x^2-8x}{5}=x^2+1.$

Решение. Так как при любом значении x выполняются неравенства $\cos\frac{x^2-8x}{5}\leqslant 1$ и $x^2+1\geqslant 1$, то корнями данного уравнения являются те значения переменной, при которых значения его левой и правой частей одновременно равны 1. Следовательно, данное уравнение равносильно системе $\left\{\begin{array}{l}\cos\frac{x^2-8x}{5}=1,\\ x^2+1=1.\end{array}\right.$

Второе уравнение системы имеет единственный корень $x=0$. Он также удовлетворяет первому уравнению системы.

Ответ: 0. ■

Пример 4. Решите уравнение $x^2-2x\sin\frac{\pi x}{2}+1=0.$

Решение. Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно x. Так как для существования корней уравнения дискриминант $D=4\sin^2\frac{\pi x}{2}-4$ должен быть неотрицательным, то получаем: $\sin^2\frac{\pi x}{2}\geqslant 1.$ Отсюда $\sin\frac{\pi x}{2}=1$ или $\sin\frac{\pi x}{2}=-1$. Теперь понятно, что данное в условии уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin\dfrac{\pi x}{2}=1,\\ x^2-2x+1=0,\end{cases}\\ \begin{cases}\sin\dfrac{\pi x}{2}=-1,\\ x^2+2x+1=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: 1; –1. ■

Упражнения

33.1. Решите уравнение:
1) $\sin 5x - \sin x = 0$;
2) $2\sin x \operatorname{tg} x + 2\sqrt{3}\sin x - \operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$.

33.2. Решите уравнение:
1) $\cos 9x - \cos x = 0$;
2) $\sqrt{2}\cos x \operatorname{ctg} x - 3\sqrt{2}\cos x + \operatorname{ctg} x - 3 = 0$.

33.3. Решите уравнение:
1) $\sin 5x = \cos 4x$; 2) $\sin 10x - \cos 2x = 0$.

33.4. Решите уравнение $\cos 5x + \sin 3x = 0$.

33.5. Решите уравнение:
1) $\sin 2x + 2\sin x = \cos x + 1$;
2) $1 + \cos 8x = \cos 4x$;
3) $2\sin 2x + \cos 3x - \cos x = 0$;
4) $\sin 4x + 2\cos^2 x = 1$;
5) $\cos x - \cos 3x = 3\sin^2 x$;
6) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$.

33.6. Решите уравнение:
1) $\sin 2x + 2\sin x = 0$;
2) $\sin 2x - \cos x = 2\sin x - 1$;
3) $1 - \cos 8x = \sin 4x$;
4) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;
5) $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$;
6) $\sqrt{2}\cos 5x + \sin 3x - \sin 7x = 0$.

33.7. Решите уравнение:
1) $\sin^2\dfrac{x}{2} + \sin^2\dfrac{3x}{2} = 1$;
2) $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$;
3) $1 - \cos x = \operatorname{tg} x - \sin x$;
4) $\sin x + \sin 3x = 4\cos^2 x$;
5) $\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x)$;
6) $\sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 5x$.

33.8. Решите уравнение:

1) $\cos^2 x - \sin^2 2x + \cos^2 3x = \frac{1}{2}$;

2) $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin x$;

3) $\cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$;

4) $\sin 6x = 2\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right)$.

33.9. Решите уравнение:

1) $\cos 3x + \sin x \sin 2x = 0$;

2) $\sin 3x \cos 2x = \sin 5x$;

3) $2\cos(x + 20^\circ)\cos x = \cos 40^\circ$;

4) $\cos 3x \cos 6x = \cos 4x \cos 7x$.

33.10. Решите уравнение:

1) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}5$;

2) $\sin 5x \cos 3x = \sin 9x \cos 7x$.

33.11. Решите уравнение:

1) $2\cos\frac{x^2 + 2x}{6} = x^2 + 4x + 6$;

2) $3\cos x + 4\sin x = x^2 - 6x + 14$.

33.12. Решите уравнение:

1) $\sin\frac{\pi x}{4} = x^2 - 4x + 5$;

2) $\frac{2}{\sin x + \cos x} = \sqrt{2 - x^2}$.

33.13. Решите уравнение $4y^2 - 4y\cos x + 1 = 0$.

33.14. Решите уравнение $x^2 + 8x\sin(xy) + 16 = 0$.

33.15. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \cos x + \cos y = \frac{3}{2}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = \frac{5}{6}\pi, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{4}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$

33.16. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} y - x = 60^\circ, \\ \cos x + \cos y = 1{,}5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sin x \cos y = -0{,}5, \\ \cos x \sin y = 0{,}5. \end{cases}$

◆◆◆

33.17. Решите уравнение:

1) $\sin 7x - \sqrt{2}\cos 5x + \sqrt{3}\cos 7x - \sqrt{2}\sin 5x = 0$;

2) $2\sin 3x + \sin x - \cos 2x = \sqrt{3}(\sin 2x - \cos x)$;

3) $\sqrt{3}(2 - \cos x) + 4\sin 2x = \sin x$.

33.18. Решите уравнение:

1) $\cos 3x - \sin x = -\sqrt{3}(\sin 3x - \cos x)$;

2) $(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x)^2 - 5 = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$.

33.19. Решите уравнение:

1) $\sin 3x + \sin x - \sin 2x = 2\cos^2 x - 2\cos x$;

2) $(\cos x - \sin x)^2 - 0{,}5\sin 4x = \sin^4 x - \cos^4 x$.

33.20. Решите уравнение:

1) $\sin^3 4x + \cos^3 4x = 1 - 0{,}5\sin 8x$;

2) $\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2}(\cos^4 2x - \sin^4 2x)$.

33.21. Решите уравнение:

1) $\cos 2x + \cos\frac{5x}{2} = 2$; 2) $\sin 6x + \cos\frac{12x}{5} = -2$.

33.22. Решите уравнение:

1) $\cos\frac{13x}{6}\cos\frac{5x}{6} = 1$; 2) $\sin 2x + \cos\frac{8x}{3} = 2$.

33.23. Решите уравнение:

1) $\cos^7 x + \sin^4 x = 1$; 2) $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} = 1$.

33.24. Решите уравнение:

1) $\sin^3 x + \cos^9 x = 1$; 2) $\cos^4 x - \sin^7 x = 1$.

33.25. Решите уравнение:

1) $\sin^5 x + \cos^5 x = 2 - \sin^4 x$; 2) $\sqrt{2 + \cos^2 2x} = \sin 3x - \cos 3x$.

33.26. Решите уравнение:

1) $\sin 5x + \sin x = 2 + \cos^2 x$; 2) $\sqrt{5 + \sin^2 3x} = \sin x + 2\cos x$.

33.27. Решите уравнение $\sqrt{3 - \mathrm{tg}^2\frac{3\pi x}{2}}\sin \pi x - \cos \pi x = 2$.

33.28. Решите уравнение $\sqrt{1 - \mathrm{ctg}^2 2\pi x}\cos \pi x + \sin \pi x = \sqrt{2}$.

33.29. Решите уравнение:

1) $\left(5 + \frac{3}{\sin^2 x}\right)(2 - \sin^6 x) = 7 + \cos 2y$;

2) $\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = 12 + \frac{1}{2}\sin y$.

33.30. Решите уравнение:

1) $(\sin(x - y) + 1)(2\cos(2x - y) + 1) = 6$;

2) $\mathrm{tg}^4 x + \mathrm{tg}^4 y + 2\mathrm{ctg}^2 x\,\mathrm{ctg}^2 y = 3 + \sin^2(x + y)$.

33.31. При каких значениях параметра a уравнение $6a\cos\frac{\pi x}{2} - a^2(1 + 6|x|) + 7 = 0$ имеет единственный корень?

33.32. При каких значениях параметра a уравнение $a^2\cos\pi x - a(1 + 8x^2) = 6$ имеет единственный корень?

33.33. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - 2a\sin(\cos x) + 2 = 0$ имеет единственный корень?

33.34. При каких значениях параметра a уравнение $2x^2 - a\,\mathrm{tg}(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственный корень?

33.35. Найдите множество пар чисел $(a; b)$, для каждой из которых равенство $a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1$ выполняется для всех x.

§ 34 О равносильных переходах при решении тригонометрических уравнений

В предыдущих параграфах вы ознакомились с основными приёмами решения тригонометрических уравнений. Однако при применении каждого метода есть свои тонкости, нюансы, «подводные рифы».

Очевидно, что вне области определения уравнения корней быть не может (рис. 34.1). Если в ходе преобразований уравнения происходит расширение области его определения, то ясно, что это может привести к появлению посторонних корней. Эту опасность надо учитывать при решении тригонометрических уравнений.

Рис. 34.1

Пример 1. Решите уравнение $\dfrac{\cos^2 x - \cos x}{1 - \sin x} = 0$.

Решение. Перейдём к равносильной системе:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos x = 1, \end{array}\right. \\ \sin x \neq 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}, \\ x = 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \end{array}\right. \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi l,\ l \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Очевидно, что при чётных значениях k решения первого уравнения совокупности не удовлетворяют системе. При $k = 2m - 1$, $m \in \mathbf{Z}$, получаем: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi(2m - 1) = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ■

Пример 2. Решите уравнение $\sqrt{\cos 2x}\cos x = 0$.

Решение. Перейдём к равносильной системе:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos 2x = 0, \end{array}\right. \\ \cos 2x \geqslant 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}, \end{array}\right. \\ \cos 2x \geqslant 0. \end{cases}$$

При $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ имеем: $\cos 2x = \cos(\pi + 2\pi k) = -1 < 0$.

Поскольку $\cos 2x = 0$ при $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, то можно записать ответ.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ■

Вы знаете, что умножение обеих частей уравнения на выражение с переменной может изменить множество корней исходного уравнения. Рассмотрим пример, когда такое преобразование приводит к появлению посторонних корней.

Пример 3. Решите уравнение $4\cos x\cos 2x\cos 4x = \cos 7x$.

Решение. Умножим обе части уравнения на $\sin x$. Получим уравнение-следствие:

$$4\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x = \cos 7x\sin x.$$

Отсюда: $\sin 8x = 2\cos 7x\sin x$; $\sin 8x = \sin 8x - \sin 6x$; $\sin 6x = 0$; $x = \frac{\pi k}{6}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Так как корни уравнения $\sin x = 0$ не являются корнями данного в условии уравнения, то из полученных решений необходимо исключить все числа вида $x = \pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$. Имеем:

$$\frac{\pi k}{6} \neq \pi m, \text{ отсюда } k \neq 6m.$$

Ответ: $\frac{\pi k}{6}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $k \neq 6m$, $m \in \boldsymbol{Z}$. ■

В некоторых тригонометрических тождествах выражения, записанные в левых и правых частях, имеют разные области определения. Приведём несколько примеров.

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (1)$$

Областью определения левой части этого тождества является множество $\boldsymbol{R}$, а правой — множество $\{\alpha \in \boldsymbol{R} \mid \alpha \neq \pi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}\}$.

$$\text{☞}\ \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (2)$$

Областью определения левой части тождества (2) является множество $\{(\alpha;\ \beta) \mid \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}\}$; область определения правой части — множество $\left\{(\alpha;\ \beta) \mid \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z},\ \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

Применение этих формул справа налево приводит к расширению области определения уравнения, а следовательно, возникает угроза появления посторонних корней.

Очевидно, что сужение области определения уравнения — это угроза потери корней. Например, применение формул (1) и (2) слева направо может привести к потере корней.

Пример 4. Решите уравнение $\operatorname{tg} 2x + \sin 2x = \frac{16}{15}\operatorname{ctg} x$.

Решение. Применив формулы

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},\ \ \sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\ \ \text{и}\ \ \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x},$$

данное уравнение удобно привести к алгебраическому уравнению относительно $\operatorname{tg} x$. Однако такие преобразования сужают область определения уравнения и приводят (в этом несложно убедиться) к потере корней вида $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. Этот факт надо учесть при записи ответа.

Решив уравнение $\frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{16}{15\operatorname{tg} x}$, получим: $x = \pm\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \pm\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. ■

Пример 5. Решите уравнение $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} + x\right) = -1 - 5\operatorname{ctg} x$.

Решение. Очевидно, что выгодно применить тождество $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} + x\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}\operatorname{tg} x}$. Но при этом область определения уравнения сузится на множество $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}\right\}$. Легко убедиться, что числа вида $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$, являются корнями данного уравнения. Поэтому запишем совокупность, равносильную данному уравнению:

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}, \\ \dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{4} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{4}\operatorname{tg} x} = -1 - \dfrac{5}{\operatorname{tg} x}. \end{array}\right.$$

Отсюда $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}, \\ \dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = -1 - \dfrac{5}{\operatorname{tg} x}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}, \\ \operatorname{tg} x = \dfrac{5}{3}. \end{array}\right.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ \operatorname{arctg}\dfrac{5}{3} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$ ■

? Применение каких формул может нарушить равносильность уравнений?

Упражнения

◆◆

34.1. Решите уравнение:

1) $\dfrac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} = 0;$

2) $\dfrac{\sin^2 x + \sin x}{1 + \cos x} = 0;$

3) $\dfrac{8\sin x\cos x\sin 2x - 1}{\sqrt{3} + 2\sin 4x} = 0;$

4) $\dfrac{\sin 2x}{1 + \sin x} = -2\cos x.$

34.2. Решите уравнение:

1) $\dfrac{2\sin^2 x + 3\sin x}{1 - \cos x} = 0;$

2) $\dfrac{\sin x}{1 + \cos x} = 1 - \cos x;$

3) $\dfrac{\sin 2x}{1 - \cos x} = 2\sin x.$

34.3. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x - 2}\sin \pi x = 0;$

2) $\sqrt{25 - 4x^2}(3\sin 2\pi x + 8\sin \pi x) = 0.$

34.4. Решите уравнение:

1) $\sqrt{3 - x}\cos \pi x = 0;$

2) $\sqrt{49 - 4x^2}\left(\sin \pi x + 3\cos\dfrac{\pi x}{2}\right) = 0.$

◆◆◆

34.5. Решите уравнение:

1) $\dfrac{\cos x - 4\sin^2 x\cos x}{\sin 3x + 1} = 0;$

2) $\dfrac{\sin x + \cos 4x - 2}{2\cos\dfrac{x}{2} - \sqrt{2}} = 0.$

34.6. Решите уравнение:

1) $\dfrac{\cos^2 2x - \sin^2 x}{\sin 3x - 1} = 0;$

2) $\dfrac{\cos x + \cos 3x + 2}{\sin\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}} = 0.$

34.7. Решите уравнение:

1) $\sqrt{\sin x}\cos x = 0$;

2) $\sqrt{\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}}\cos x = 0$;

3) $\sqrt{\cos x}(8\sin x + 5 - 2\cos 2x) = 0$.

34.8. Решите уравнение:

1) $\sqrt{\cos x}\sin x = 0$;

2) $\sqrt{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}}\sin x = 0$;

3) $\sqrt{\sin x}(4 - 5\cos x - 2\sin^2 x) = 0$.

34.9. Решите уравнение:

1) $\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x = \frac{1}{16}$;

2) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = -0{,}5$.

34.10. Решите уравнение:

1) $\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x = \frac{1}{8}\cos 15x$;

2) $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = -0{,}5$.

34.11. Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{5\pi}{3}\right) = 2\operatorname{ctg} 2x + \frac{\sqrt{3}}{3}$;

2) $\dfrac{2\operatorname{ctg} x + 3}{\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = -\sqrt{3}$.

34.12. Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg} 2x + \sin 2x = \frac{8}{3}\operatorname{ctg} x$;

2) $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} + 3\operatorname{ctg} 2x$;

3) $2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + 5\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = -7$.

§ 35 Тригонометрические неравенства

Неравенства вида $f(x) > a$, $f(x) < a$, где f — одна из четырёх тригонометрических функций, называют **простейшими тригонометрическими неравенствами.**

Основанием для решения этих неравенств являются такие наглядные соображения: множеством решений неравенства $f(x) > g(x)$ является множество тех значений переменной x, при которых точки графика функции f расположены выше соответствующих точек графика функции g (рис. 35.1). С помощью этого рисунка устанавливаем, что промежуток $(a; b)$ — множество решений неравенства $f(x) > g(x)$.

Решение простейших тригонометрических неравенств будем проводить по такой схеме: найдём решения на промежутке, длина которого равна периоду данной функции; все остальные решения отличаются от найденных на Tn, где T — период данной функции, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

Рассмотрим примеры.

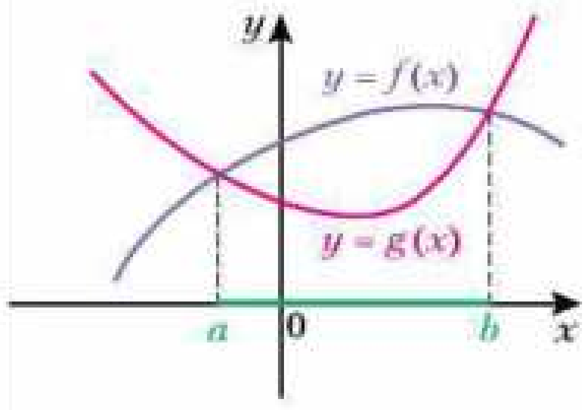


Рис. 35.1

Пример 1. Решите неравенство $\sin x > \frac{1}{2}$.

Решение. На рисунке 35.2 изображены графики функций $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{2}$. Так как $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, то графики пересекаются в точках с абсциссами $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ и $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решим данное неравенство на промежутке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} + 2\pi\right]$ длиной в период функции $y = \sin x$.

На этом промежутке график функции $y = \sin x$ находится выше графика функции $y = \frac{1}{2}$ при $x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$ (см. рис. 35.2).

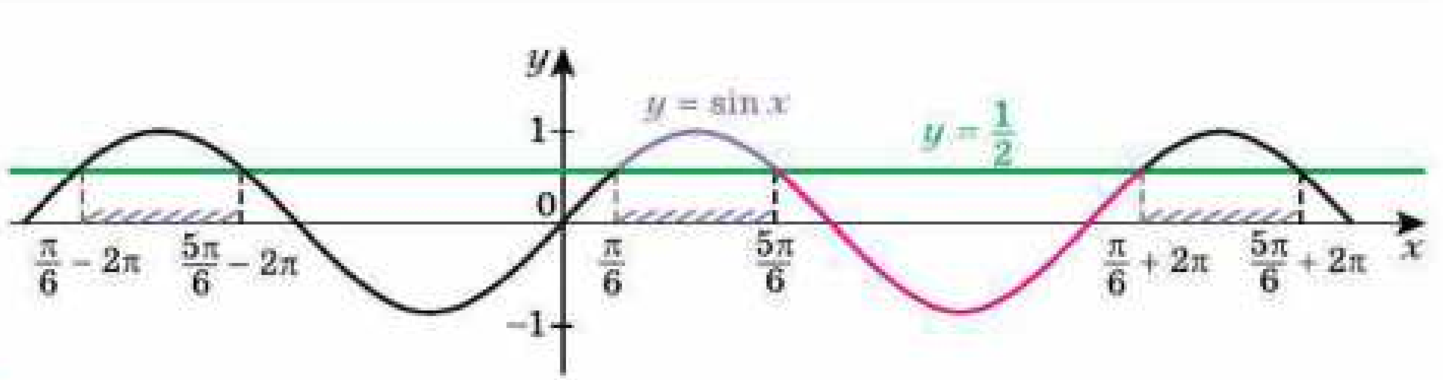


Рис. 35.2

Следовательно, множеством решений данного неравенства является объединение всех промежутков вида $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. Такое объединение принято обозначать так: $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}}\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$.

Ответ записывают одним из трёх способов:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z},$$

$$\text{или } \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right),\ n \in \mathbf{Z},$$

$$\text{или } \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right).\ ■$$

Пример 2. Решите неравенство $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Так как $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, то решим это неравенство на промежутке $\left[\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3} + 2\pi\right]$, то есть на промежутке $\left[\frac{\pi}{3};\ \frac{7\pi}{3}\right]$.

На рассматриваемом промежутке график функции $y = \sin x$ расположен ниже графика функции $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ при $x \in \left(\frac{2\pi}{3};\ \frac{7\pi}{3}\right)$ (рис. 35.3).

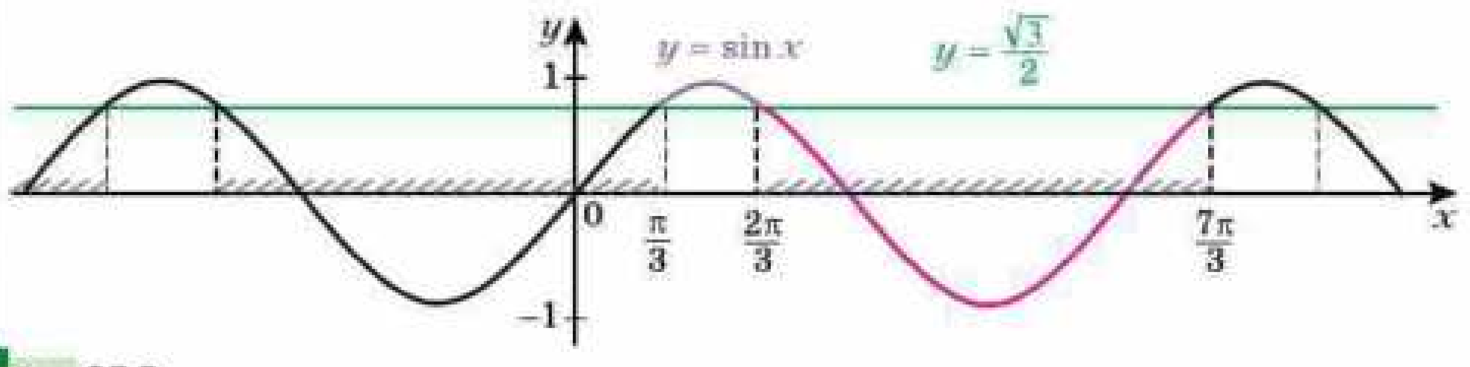


Рис. 35.3

Следовательно, множеством решений данного неравенства является объединение всех промежутков вида $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{7\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. ■

В примерах 1 и 2, решая неравенства вида $\sin x > a$ и $\sin x < a$, мы рассматривали промежуток вида $[\arcsin a;\ \arcsin a + 2\pi]$. Понятно, что решение можно провести, рассматривая любой другой промежуток, длина которого равна 2π, например промежуток $[-2\pi + \arcsin a;\ \arcsin a]$.

Пример 3. Решите неравенство $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Имеем: $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$. Решим данное неравенство на промежутке $\left[-2\pi + \frac{3\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right]$, то есть на промежутке $\left[-\frac{5\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right]$.

На этом промежутке график функции $y = \cos x$ расположен выше графика функции $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ при $x \in \left(-\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$ (рис. 35.4).

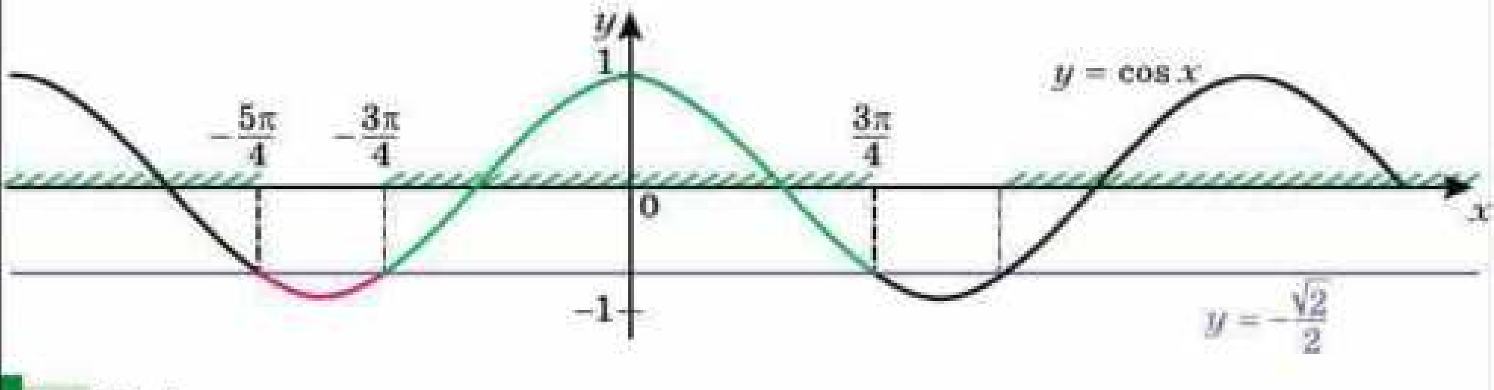


Рис. **35.4**

Следовательно, множеством решений данного неравенства является объединение всех промежутков вида $\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ■

Пример 4. Решите неравенство $\operatorname{tg} x < 1$.

Решение. Решим данное неравенство на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Так как $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, то на рассматриваемом промежутке график функции $y = \operatorname{tg} x$ расположен ниже графика функции $y = 1$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$ (рис. 35.5).

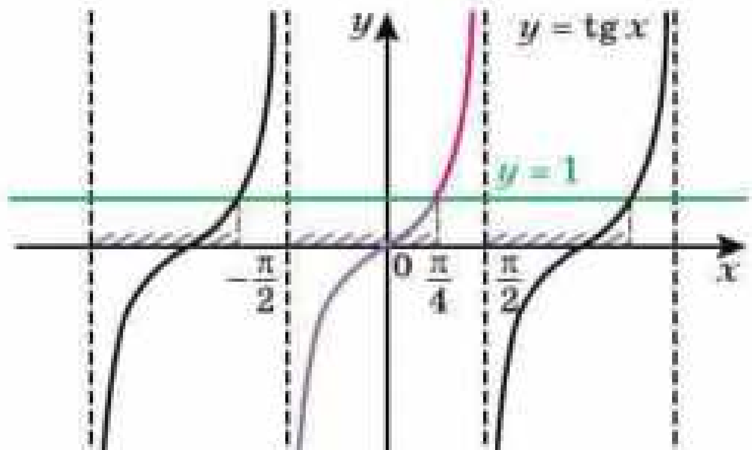


Рис. **35.5**

Следовательно, множеством решений данного неравенства является объединение всех промежутков вида $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2}+\pi n < x < \frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ■

Пример 5. Решите неравенство $\operatorname{ctg} x \geqslant -\sqrt{3}$.

Решение. Решим данное неравенство на промежутке $(0;\ \pi)$.

Так как $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$, то на рассматриваемом промежутке график функции $y = \operatorname{ctg} x$ расположен не ниже графика функции $y = -\sqrt{3}$ при $x \in \left(0;\ \frac{5\pi}{6}\right]$ (рис. 35.6).

Следовательно, множеством решений данного неравенства является объединение всех промежутков вида $\left(\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+\pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $\pi n < x \leqslant \frac{5\pi}{6}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ■

Решение простейших тригонометрических неравенств можно интерпретировать с помощью единичной окружности.

Пример 6. Решите неравенство $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \cos x < \frac{1}{2}$.

Решение. Выделим на единичной окружности множество точек, абсциссы которых не меньше, чем $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, и меньше, чем $\frac{1}{2}$ (рис. 35.7).

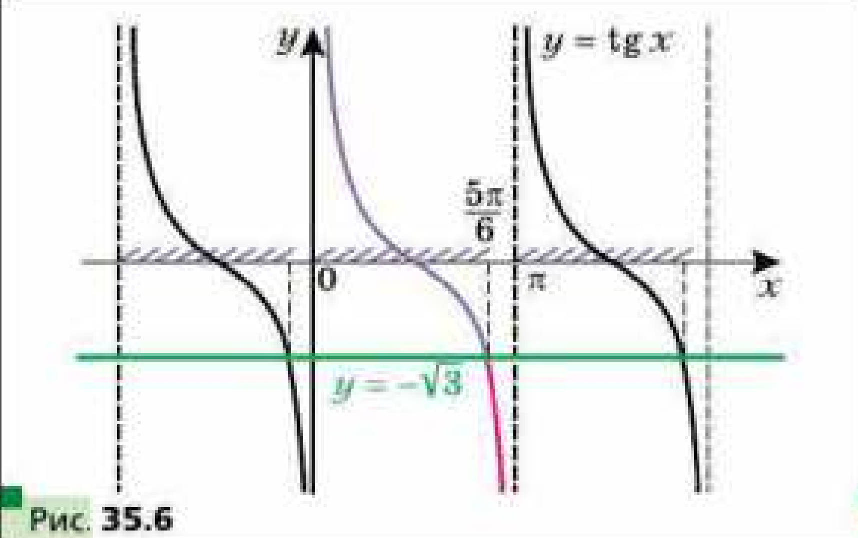


Рис. 35.6

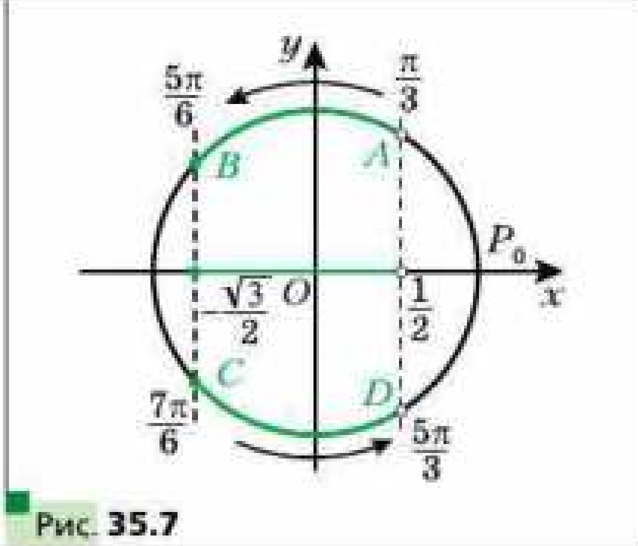


Рис. 35.7

Множество решений данного неравенства — это множество таких чисел x, что точки $P_x = R_O^x(P_0)$ принадлежат дуге AB или дуге CD.

Имеем: $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ и $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$. Представим себе, что мы двигаемся по дугам AB и CD против часовой стрелки. Тогда можно записать: $A = R_O^{\frac{\pi}{3}}(P_0)$, $B = R_O^{\frac{5\pi}{6}}(P_0)$, $C = R_O^{\frac{7\pi}{6}}(P_0)$, $D = R_O^{\frac{5\pi}{3}}(P_0)$.

С учётом периодичности функции $y = \cos x$ переходим к совокупности, равносильной данному неравенству:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3} + 2\pi n < x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \\ \frac{7\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ или $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ■

В § 8 вы ознакомились с методом интервалов для решения рациональных неравенств. Этот метод можно использовать и при решении тригонометрических неравенств.

Пример 7. Решите неравенство $\sin 2x + \sin x > 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin 2x + \sin x$, $D(f) = \boldsymbol{R}$, которая является периодической с периодом 2π.

Найдём нули функции f на промежутке $[-\pi; \pi]$.

Имеем: $\sin 2x + \sin x = 0$;

$$2\sin x \cos x + \sin x = 0;\ 2\sin x\left(\cos x + \frac{1}{2}\right) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos x = -\frac{1}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \pi n, \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

На промежутке $[-\pi; \pi]$ функция f имеет пять нулей: $-\pi$, $-\frac{2\pi}{3}$, 0, $\frac{2\pi}{3}$, π. Эти числа разбивают указанный промежуток на промежутки знакопостоянства (рис. 35.8).

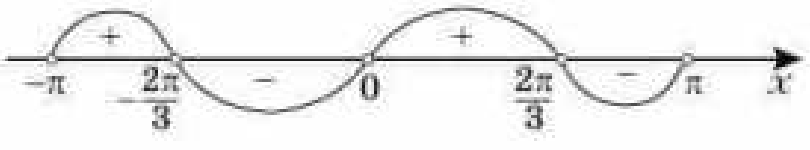


Рис. 35.8

Функция f принимает положительные значения на промежутках $\left(-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right)$ и $\left(0; \frac{2\pi}{3}\right)$.

С учётом периодичности функции f запишем ответ.

Ответ: $-\pi + 2\pi n < x < -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ или $2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

Пример 8. Решите неравенство $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\operatorname{tg} x \geqslant 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\operatorname{tg} x$. Она является периодической с периодом 2π.

Найдём нули функции f на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Имеем: $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\operatorname{tg} x = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x = 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, \\ x = \pi n, \ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

На промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ функция f имеет четыре нуля: 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, π.

Функция f на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ не определена в точках $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$. Эти числа и нули функции f разбивают промежуток $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ на промежутки знакопостоянства (рис. 35.9).

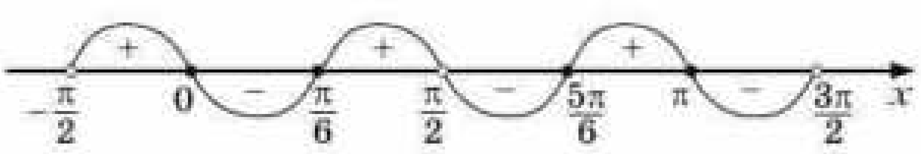


Рис. 35.9

С учётом периодичности функции f запишем ответ.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x \leqslant 2\pi n$, или $\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, или $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ■

?

1. Какие неравенства называют простейшими тригонометрическими неравенствами?
2. Поясните, по какой схеме проводится решение тригонометрических неравенств.

Упражнения

35.1. Решите неравенство:

1) $\sin x < \frac{1}{2}$;
2) $\sin x \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
3) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$;
4) $\cos x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$;
5) $\operatorname{tg} x < -1$;
6) $\operatorname{tg} x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$;
7) $\operatorname{ctg} x \leqslant \sqrt{3}$;
8) $\operatorname{ctg} x > -1$;
9) $\sin x < \frac{1}{6}$;
10) $\operatorname{tg} x > 3$.

35.2. Решите неравенство:

1) $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$;
2) $\sin x > -\frac{1}{2}$;
3) $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$;
4) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$;
5) $\operatorname{tg} x \geqslant -1$;
6) $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$;
7) $\operatorname{ctg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$;
8) $\operatorname{ctg} x \leqslant 1$;
9) $\cos x > \frac{3}{5}$;
10) $\operatorname{ctg} x < 2$.

35.3. Решите неравенство:

1) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leqslant \sqrt{3}$;
2) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) > -\frac{1}{2}$;
3) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > \frac{1}{\sqrt{3}}$;
4) $2\sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) \leqslant \sqrt{3}$;
5) $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
6) $\sin(1 - 2x) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

35.4. Решите неравенство:

1) $\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \geqslant \sqrt{3}$;
2) $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
3) $2\sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) < 1$;
4) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{3}}{3}$;
5) $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geqslant \frac{1}{2}$;
6) $\sin\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

35.5. Решите неравенство:

1) $-\frac{1}{2} \leqslant \sin x < \frac{1}{4}$;

2) $-1 \leqslant \operatorname{ctg} x \leqslant \sqrt{3}$;

3) $|\cos x| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $|\cos 3x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$;

5) $|\operatorname{tg} x| > 2$.

35.6. Решите неравенство:

1) $-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x \leqslant -\frac{1}{2}$;

2) $-\frac{\sqrt{3}}{3} < \operatorname{tg} x < 1$;

3) $|\sin 2x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $|\operatorname{ctg} x| < \sqrt{3}$;

5) $|\operatorname{ctg} x| > 5$.

35.7. Решите неравенство:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \geqslant \sqrt{3}$;

2) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} > \sqrt{3}$.

35.8. Решите неравенство:

1) $\sin^6 x + \cos^6 x \geqslant \frac{5}{8}$;

2) $\sin x \geqslant \cos x$.

35.9. Решите неравенство:

1) $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 < 0$;

2) $\operatorname{tg}^2 x + (2 - \sqrt{3})\operatorname{tg} x - 2\sqrt{3} < 0$;

3) $2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) > -1$;

4) $\operatorname{tg} x \geqslant 2\operatorname{ctg} x$.

35.10. Решите неравенство:

1) $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - 3 \geqslant 0$;

2) $\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x \geqslant 0$;

3) $4\sin^4 x + 12\cos^2 x - 7 < 0$;

4) $\frac{2}{\operatorname{tg} x + 1} < 2 - \operatorname{tg} x$.

35.11. Решите неравенство:

1) $\sin 2x - \sin 3x > 0$;

2) $\cos 2x \operatorname{tg} x > 0$;

3) $1 - \sin 2x \geqslant \cos x - \sin x$;

4) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x > 0$.

35.12. Решите неравенство:

1) $\sin 2x + 2\sin x > 0$;

2) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x < 0$;

3) $\sin^2 x + \sin^2 2x - \sin^2 3x > 0$;

4) $\cos x \cos 3x < \cos 5x \cos 7x$.

Тригонометрическая подстановка

Применение формул сокращённого умножения, использование известных неравенств, сведение тригонометрических уравнений к алгебраическим и т. д. — такие «чисто алгебраические» методы вы не раз использовали при решении тригонометрических задач.

Здесь мы рассмотрим в некотором смысле обратный приём, состоящий в том, что при решении задач некоторое алгебраическое выражение заменяют тригонометрическим.

Пример 1. Известно, что $m^2+n^2=1$, $p^2+q^2=1$, $mp+nq=0$. Вычислите $mn+pq$.

Решение. Поскольку $m^2+n^2=1$, $p^2+q^2=1$, то существуют точки $A(m;\ n)$ и $B(p;\ q)$, принадлежащие единичной окружности. Тогда существуют такие α и β, что $m=\cos\alpha$, $n=\sin\alpha$, $p=\cos\beta$, $q=\sin\beta$.

Имеем: $mp+nq=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)$. По условию $mp+nq=0$. Тогда $\cos(\alpha-\beta)=0$.

Можно записать $mn+pq=\cos\alpha\sin\alpha+\cos\beta\sin\beta=\frac{1}{2}(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)=$ $=\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$.

Поскольку $\cos(\alpha-\beta)=0$, то $mn+pq=0$.

Ответ: 0. ■

Пример 2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ 4xy(2y^2-1)=1. \end{cases}$

Решение. Уравнение $x^2+y^2=1$ позволяет сделать такую замену: $x=\sin\alpha$, $y=\cos\alpha$, где $\alpha\in[0;\ 2\pi)$. Тогда из второго уравнения системы имеем:

$$4\sin\alpha\cos\alpha(2\cos^2\alpha-1)=1;\ \ \sin 4\alpha=1;\ \ \alpha=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbf{Z}.$$

Из найденного множества корней промежутку $[0;\ 2\pi)$ принадлежат числа $\frac{\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8}$, $\frac{9\pi}{8}$ и $\frac{13\pi}{8}$.

Если $\alpha=\frac{\pi}{8}$, то

$$x=\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},\ \ y=\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Аналогично можно найти и остальные три решения.

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}; \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}; -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$. ■

Заметим, что ответ к примеру 2 можно было представить и в тригонометрическом виде: $\left(\sin\frac{\pi}{8}; \cos\frac{\pi}{8}\right)$, $\left(\sin\frac{5\pi}{8}; \cos\frac{5\pi}{8}\right)$, $\left(\sin\frac{9\pi}{8}; \cos\frac{9\pi}{8}\right)$, $\left(\sin\frac{13\pi}{8}; \cos\frac{13\pi}{8}\right)$.

Пример 3. Решите уравнение $\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$.

Решение. Поскольку должно выполняться условие $1 - x^2 \geqslant 0$, то $|x| \leqslant 1$. Тогда можно выполнить замену: $x = \cos\alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$.

Теперь данное уравнение можно записать так: $\sqrt{1-\cos^2\alpha} = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. Отсюда $|\sin\alpha| = \cos 3\alpha$.

При $\alpha \in [0; \pi]$ верно неравенство $\sin\alpha \geqslant 0$. Имеем: $\sin\alpha = \cos 3\alpha$. Решая это уравнение, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \\ \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Из решений совокупности выберем те, которые удовлетворяют условию $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Это числа $\frac{\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8}$ и $\frac{3\pi}{4}$.

Ответ: $\cos\frac{\pi}{8}$; $\cos\frac{5\pi}{8}$; $\cos\frac{3\pi}{4}$. ■

Пример 4. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принадлежат промежутку $[-1; 1]$, причём сумма их кубов равна 0. Докажите, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant \frac{n}{3}$.

Решение. Пусть $x_1 = \cos\alpha_1$, $x_2 = \cos\alpha_2$, $\ldots$, $x_n = \cos\alpha_n$, где $\alpha_i \in [0; \pi]$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

По условию $\cos^3\alpha_1 + \cos^3\alpha_2 + \ldots + \cos^3\alpha_n = 0$.

Воспользовавшись равенством $\cos\alpha = \frac{4\cos^3\alpha - \cos 3\alpha}{3}$, имеем:

$$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_n =$$

$$= \frac{4\cos^3\alpha_1 - \cos 3\alpha_1}{3} + \frac{4\cos^3\alpha_2 - \cos 3\alpha_2}{3} + \ldots + \frac{4\cos^3\alpha_n - \cos 3\alpha_n}{3} =$$

$$= \frac{4}{3}\left(\cos^3\alpha_1 + \cos^3\alpha_2 + \ldots + \cos^3\alpha_n\right) - \frac{1}{3}\left(\cos 3\alpha_1 + \cos 3\alpha_2 + \ldots + \cos 3\alpha_n\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\cos 3\alpha_1 + \cos 3\alpha_2 + \ldots + \cos 3\alpha_n\right) \leqslant \frac{n}{3}. \blacksquare$$

Пример 5. Докажите, что при любых x и y выполняется неравенство $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leqslant \frac{1}{2}$.

Решение. Выполним замену: $x = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{tg}\beta$, где $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Имеем:

$$\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\beta)} = \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2(\alpha+\beta).$$

Отсюда следует справедливость доказываемого неравенства. $\blacksquare$

Пример 6. Докажите, что из любых 5 различных чисел всегда можно выбрать такие два числа x и y, что $0 < \frac{x-y}{1+xy} < 1$.

Решение. Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_5$ — произвольные числа. Тогда в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$, что $t_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $t_2 = \operatorname{tg}\alpha_2, \ldots, t_5 = \operatorname{tg}\alpha_5$.

Рассмотрим четыре промежутка: $\left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right]$, $\left(-\frac{\pi}{4}; 0\right]$, $\left(0; \frac{\pi}{4}\right]$, $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$. Понятно, что из 5 чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$ найдутся по крайней мере два числа α_m и α_n ($\alpha_m > \alpha_n$), принадлежащие одному из этих промежутков. Тогда $0 < \alpha_m - \alpha_n < \frac{\pi}{4}$. Отсюда $0 < \operatorname{tg}(\alpha_m - \alpha_n) < \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; $0 < \frac{\operatorname{tg}\alpha_m - \operatorname{tg}\alpha_n}{1 + \operatorname{tg}\alpha_m \operatorname{tg}\alpha_n} < 1$.

Обозначив $\operatorname{tg}\alpha_m = x$, $\operatorname{tg}\alpha_n = y$, получим: $0 < \frac{x-y}{1+xy} < 1$. $\blacksquare$

Пример 7. Известно, что $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2$. Докажите неравенство $\frac{1}{2} \leqslant x^2 + xy + y^2 \leqslant 3$.

Решение. Обозначим $x^2 + y^2 = r^2$, где $r > 0$. Из условия $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2$ следует, что точка $M(x; y)$ принадлежит окружности $x^2 + y^2 = r^2$, где

$1 \leqslant r \leqslant \sqrt{2}$ (рис. 35.10). Тогда можно записать, что $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$, где $\alpha \in [0; 2\pi)$.

Имеем $x^2 + xy + y^2 = r^2\cos^2\alpha + r^2\cos\alpha\sin\alpha + r^2\sin^2\alpha = r^2(1 + \frac{1}{2}\sin 2\alpha)$.

Поскольку $1 \leqslant r^2 \leqslant 2$ и $\frac{1}{2} \leqslant 1 + \frac{1}{2}\sin 2\alpha \leqslant \frac{3}{2}$, то $\frac{1}{2} \leqslant x^2 + xy + y^2 \leqslant 3$. ■

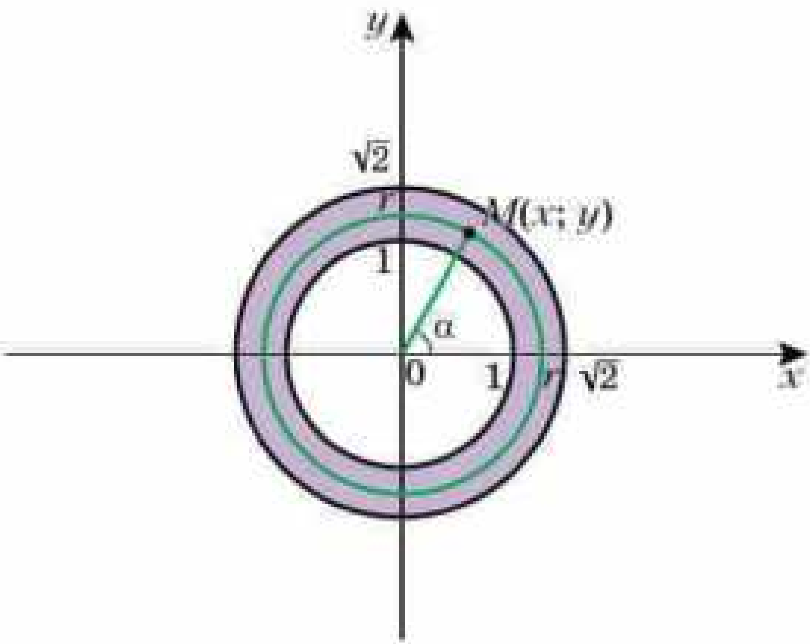


Рис. 35.10

глава 5

Производная и её применение

- В этой главе вы ознакомитесь с такими понятиями, как предел функции в точке, непрерывность функции в точке, производная функции в точке.
- Вы научитесь применять производную для исследования свойств функций и построения графиков функций.

§ 36 Определение предела функции в точке и функции, непрерывной в точке

Рассмотрим функцию $f(x) = x + 1$ и точку $x_0 = 1$. Если значения аргумента x стремятся к числу 1 (обозначают: $x \to 1$), то соответствующие значения функции f стремятся к числу 2 (обозначают: $f(x) \to 2$) (рис. 36.1).

Иными словами: если значения аргумента брать всё ближе и ближе к числу 1, то соответствующие значения функции f будут всё меньше и меньше отличаться от числа 2.

В этом случае говорят, что число 2 является **пределом функции f в точке** 1, и записывают

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

или

$$\lim_{x \to 1}(x + 1) = 2.$$

Также используют такую запись: $f(x) \to 2$ при $x \to 1$.

С помощью рисунка 36.2 можно, например, установить, что $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$, $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \sin x = -1$.

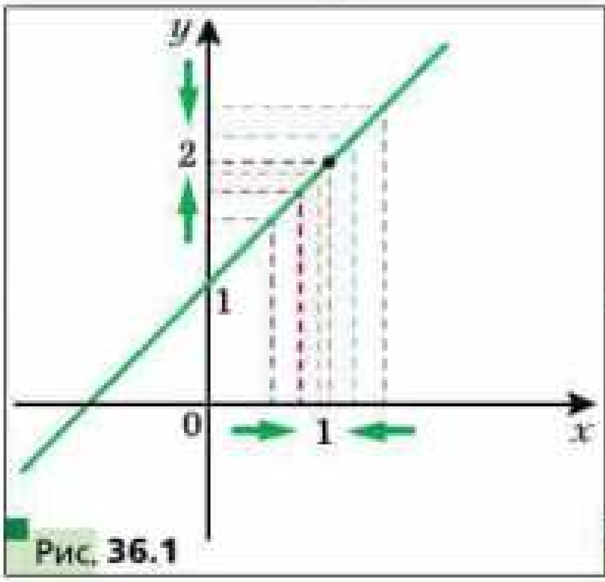


Рис. 36.1

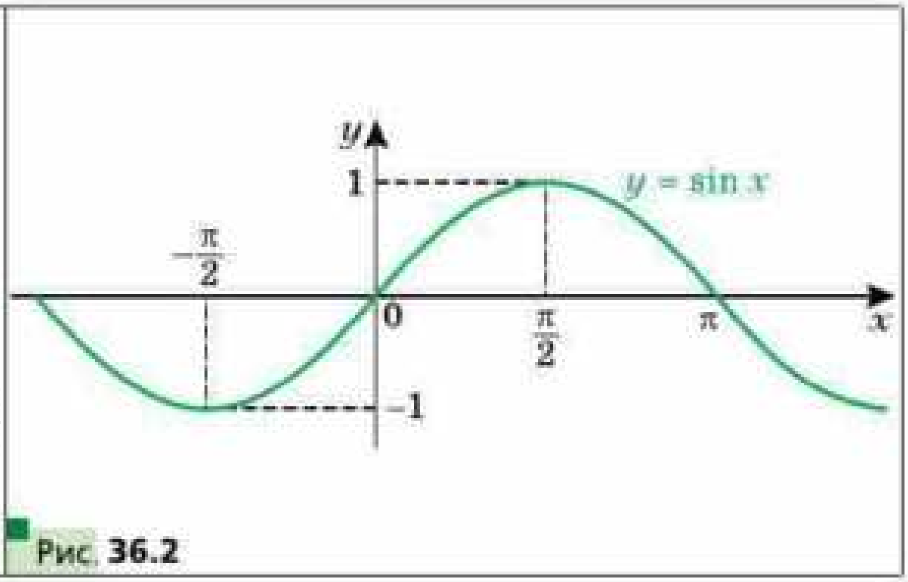


Рис. 36.2

Если обратиться к рисунку 36.3, то можно записать:

$$\lim_{x \to 1} \arccos x = 0, \quad \lim_{x \to -1} \arccos x = \pi.$$

На рисунке 36.4 изображён график функции $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. Эта функция не определена в точке $x_0 = 1$, а во всех других точках совпадает с функцией $y = x + 1$ (сравните рис. 36.1 и рис. 36.4). Однако если значения аргумента x, где $x \neq 1$, стремятся к числу 1, то соответствующие значения функции $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ стремятся к числу 2, то есть $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

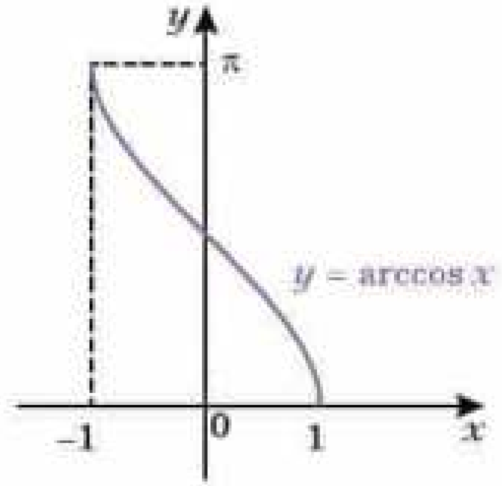


Рис. 36.3

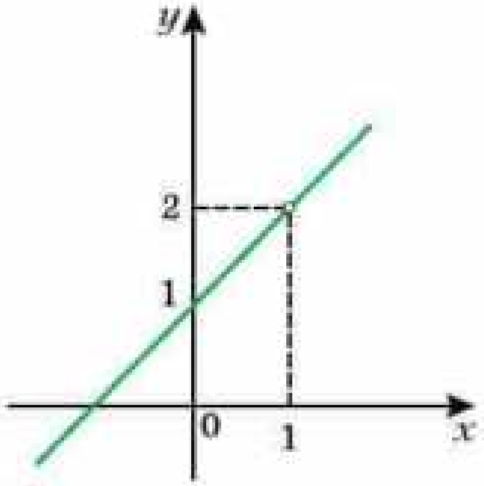


Рис. 36.4

Этот пример показывает, что функция может быть не определена в точке, но иметь предел в этой точке.

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. При $x > 0$ получаем $f(x) = 1$, при $x < 0$ получаем $f(x) = -1$. График функции f изображён на рисунке 36.5.

Если значения аргумента x, где $x \neq 0$, стремятся к 0, то невозможно утверждать, что значения функции f стремятся к какому-нибудь определённому числу. Действительно, если значения аргумента стремятся к нулю, оставаясь отрицательными, то соответствующие значения функции стремятся к -1, а если значения аргумента стремятся к нулю, оставаясь положительными, то соответствующие значения функции стремятся к 1.

Поэтому функция $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ в точке $x_0 = 0$ не имеет предела.

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ (рис. 36.6). Если значения x, где $x \neq 0$, стремятся к 0, то соответствующие значения функции становятся всё бо́льшими и бо́льшими и неограниченно увеличиваются. Поэтому не существует числа, к которому стремятся значения функции f при условии, что значения аргумента стремятся к 0.

Следовательно, функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ не имеет предела в точке $x_0 = 0$.

Мы привели примеры двух функций, которые не определены в некоторой точке и не имеют предела в этой точке.

Ошибочным было бы считать, что если функция определена в некоторой точке x_0, то она обязательно имеет предел в этой точке. На рисунке 36.7 изображён график функции f, которая определена в точке x_0, но не имеет предела в этой точке.

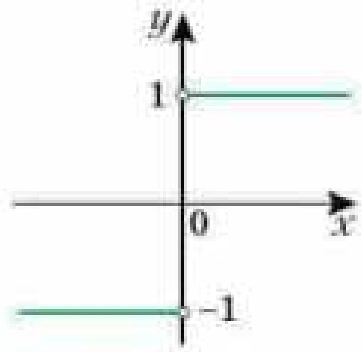


Рис. 36.5

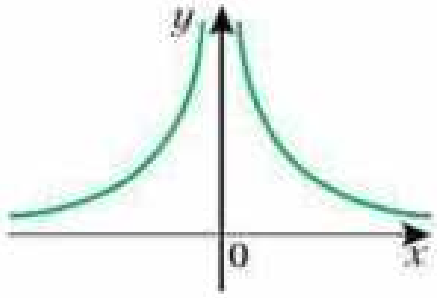


Рис. 36.6

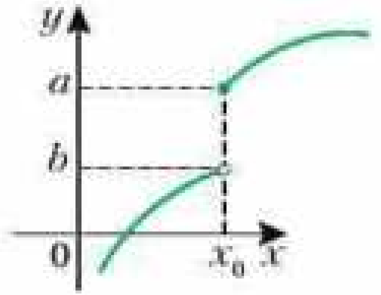


Рис. 36.7

Вы получили представление о пределе функции в точке. Перейдём к формированию строгого определения.

Пусть даны функция f и точка x_0. Далее будем предполагать, что в любом интервале, содержащем точку x_0, найдутся точки области определения функции f, отличные от точки x_0.

На рисунке 36.8 изображён график функции f, имеющей предел в точке x_0: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$. Заметим, что $f(x_0) \neq a$.

Пусть ε — некоторое положительное число. На оси ординат рассмотрим интервал $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$. На оси абсцисс ему соответствует такой интервал I, содержащий точку x_0, что для любого $x \in I \cap D(f)$, $x \neq x_0$, соответствующие значения функции f принадлежат промежутку $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$, то есть выполняются неравенства $a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$. Иными словами, для любого $x \in I \cap D(f)$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

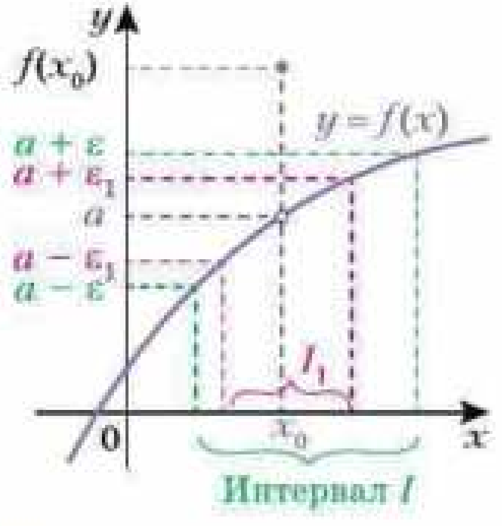


Рис. 36.8

Сузим промежуток на оси ординат, то есть рассмотрим интервал $(a - \varepsilon_1;\ a + \varepsilon_1)$, где $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Тогда и для числа ε_1 можно указать такой интервал I_1 оси абсцисс, содержащий точку x_0, что для любого $x \in I_1 \cap D(f)$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon_1$ (рис. 36.8).

На рисунке 36.9 изображён график такой функции f, что $x_0 \notin D(f)$. Рисунок 36.10 соответствует функции f, для которой $f(x_0) = a$.

В каждом из случаев, изображённых на рисунках 36.8—36.10, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой интервал I, содержащий точку x_0, что для всех $x \in I \cap D(f)$ и $x \neq x_0$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

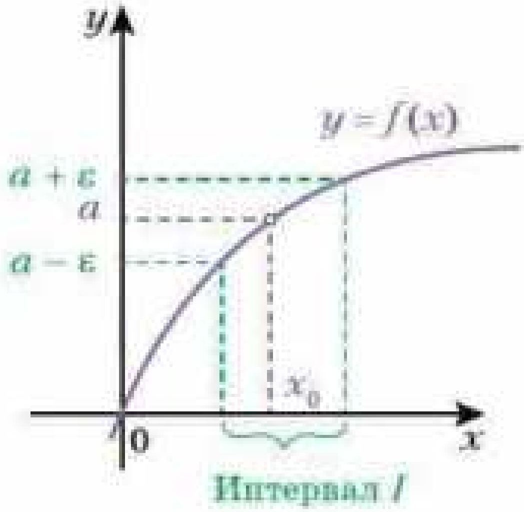


Рис. 36.9

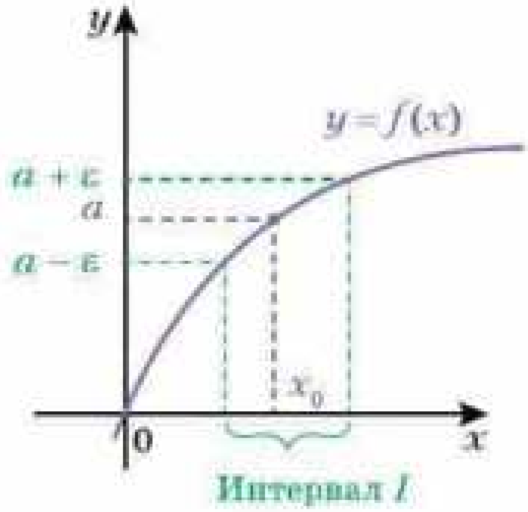


Рис. 36.10

Приведённые соображения позволяют дать такое определение предела функции f в точке x_0.

Определение

Число a называют пределом функции f в точке x_0, если для любого положительного числа ε существует такой интервал I, содержащий точку x_0, что для любого $x \in I \cap D(f)$ и $x \neq x_0$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Заметим, что предел функции в точке x_0 характеризует значения функции вокруг точки x_0, в то время как поведение функции в самой точке x_0 не влияет на значение предела (обратите внимание на условие $x \neq x_0$ в определении предела). Поэтому для каждой из функций f, графики которых изображены на рисунках 36.8—36.10, можно записать

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

На рисунке 36.11 точка x_0 такова, что справа (рис. 36.11, *а*, *б*) или слева (рис. 36.11, *в*) от неё нет точек, принадлежащих области определения функции f. При этом в каждом из случаев для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой интервал I, содержащий точку x_0, что для всех $x \in I \cap D(f)$

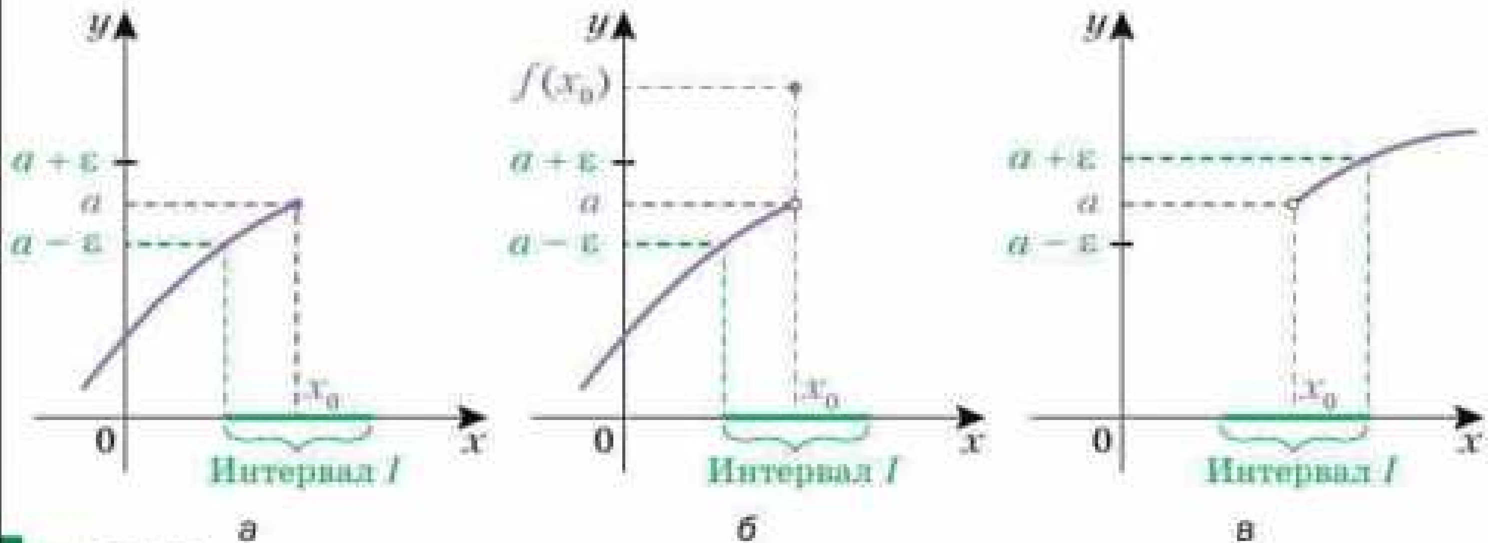


Рис. 36.11

и $x \neq x_0$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. Это означает, что число a является пределом функции f в точке x_0.

Находить предел функции в точке помогает следующая теорема. В ней рассматриваются функции, которые определены в одних и тех же точках некоторого интервала, содержащего точку x_0.

Теорема 36.1

(об арифметических действиях с пределами функций)

Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют предел в точке x_0, то функции $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x)g(x)$ также имеют предел в точке x_0, причём

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Если, кроме этого, предел функции $y = g(x)$ в точке x_0 отличен от нуля, то функция $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ также имеет предел в точке x_0 и

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}.$$

Фактически теорема 36.1 состоит из четырёх теорем, которые называют теоремами о пределе суммы, пределе разности, пределе произведения и пределе частного.

На рисунке 36.12 изображены графики функций f и g, которые определены в точке x_0 и имеют предел в этой точке. Однако поведение этих функций в точке x_0 существенно различается. График функции g, в отличие от графика функции f, в точке x_0 имеет *разрыв*. Такое различие поведения функций f и g в точке x_0 можно охарактеризовать с помощью предела.

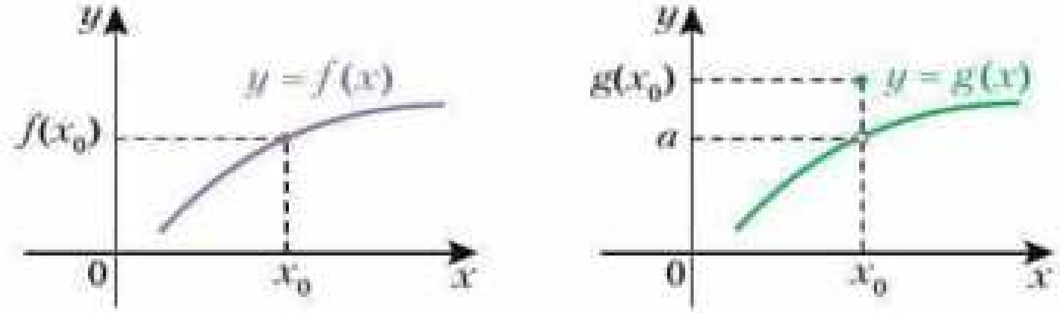


Рис. 36.12

Для функции g имеем: $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a \neq g(x_0)$.

Для функции f можно записать: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Иными словами: *предел функции f в точке x_0 равен значению функции в этой точке*. В таком случае говорят, что функция f является **непрерывной в точке x_0**.

Определение

Если выполняется равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, то функцию f называют непрерывной в точке x_0.

Из равенства $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ следует, что если функция f не имеет предела в точке x_0 или не определена в этой точке, то она не может быть непрерывной в точке x_0.

Например, функция, график которой изображён на рисунке 36.13, не является непрерывной в точке x_0. Также не является непрерывной в точке $x_0 = 0$ функция $y = \frac{x^2}{x}$ (рис. 36.14).

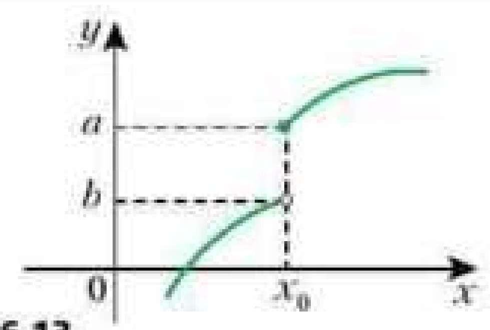


Рис. 36.13

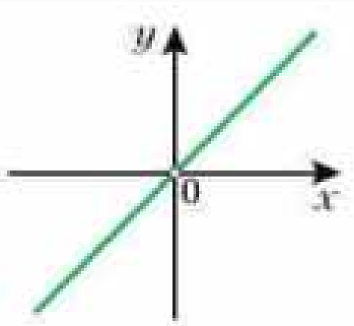


Рис. 36.14

Если функция f является непрерывной в каждой точке некоторого множества $M \subset \boldsymbol{R}$, то говорят, что она **непрерывна на множестве** M.

Если функция f является непрерывной на $D(f)$, то такую функцию называют **непрерывной**.

Например, функция $y = x^2$ непрерывна на $\boldsymbol{R}$, а функция $y = \frac{1}{x^2}$ является непрерывной на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, то есть эти функции являются непрерывными.

Находить предел функции в точке и устанавливать непрерывность функции в точке с помощью определений этих понятий — задачи трудоёмкие. Следующий факт часто облегчает решение таких задач.

Большинство функций, с которыми вы имеете дело в школьном курсе математики, являются непрерывными. Так, все тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, степенная функция, рациональная функция[1] являются непрерывными.

Например, в начале параграфа из наглядных соображений было установлено, что $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$, $\lim\limits_{x \to -1} \arccos x = \pi$. Теперь можно утверждать, что справедливость этих равенств следует из непрерывности функций $y = \sin x$, $y = \arccos x$.

Пример. Найдите: 1) $\lim\limits_{x \to 1}(2x^2 + 3x - 1)$; 2) $\lim\limits_{x \to 4}\frac{x^2 - 16}{x - 4}$.

Решение. 1) Поскольку функция $y = 2x^2 + 3x - 1$ является непрерывной в точке $x_0 = 1$, то её предел в этой точке равен значению функции в этой точке. Тогда $\lim\limits_{x \to 1}(2x^2 + 3x - 1) = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1 = 4$.

2) Имеем: $\lim\limits_{x \to 4}\frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim\limits_{x \to 4}\frac{(x - 4)(x + 4)}{x - 4} = \lim\limits_{x \to 4}(x + 4)$. Поскольку линейная функция $y = x + 4$ является непрерывной, то $\lim\limits_{x \to 4}(x + 4) = 8$. ■

1. Что называют пределом функции в точке?
2. Сформулируйте теоремы о пределе функции в точке.
3. Опишите, какую функцию называют непрерывной в точке; на множестве.

[1] Функцию вида $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены, называют **рациональной**.

Упражнения

36.1. Построив график функции f, выясните, имеет ли функция f предел в точке x_0:

1) $f(x) = 2x - 1$, $x_0 = -1$;

2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x_0 = 2$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = -2$;

4) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 0$;

5) $f(x) = k$, где k — некоторое число, $x_0 = 3$;

6) $f(x) = \dfrac{|x - 2|}{2 - x}$, $x_0 = 2$.

36.2. Построив график функции f, выясните, имеет ли функция f предел в точке x_0:

1) $f(x) = 2x + 1$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$, $x_0 = -1$;

3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$, $x_0 = -3$;

4) $f(x) = \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$, $x_0 = 1$.

36.3. С помощью графика функции f (рис. 36.15) выясните, имеет ли функция f предел в точке x_0.

36.4. На рисунке 36.16 изображён график функции $y = f(x)$.

1) Чему равно значение функции f в точке $x_0 = 1$?

2) Существует ли предел функции f в точке $x_0 = 1$? В случае утвердительного ответа запишите с использованием соответствующей символики, чему он равен.

3) Существует ли предел функции f в точке $x_0 = 2$? В случае утвердительного ответа запишите с использованием соответствующей символики, чему он равен.

36.5. Используя график соответствующей функции, проверьте справедливость следующих равенств:

1) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$;

2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \arcsin x = -\dfrac{\pi}{6}$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2}$.

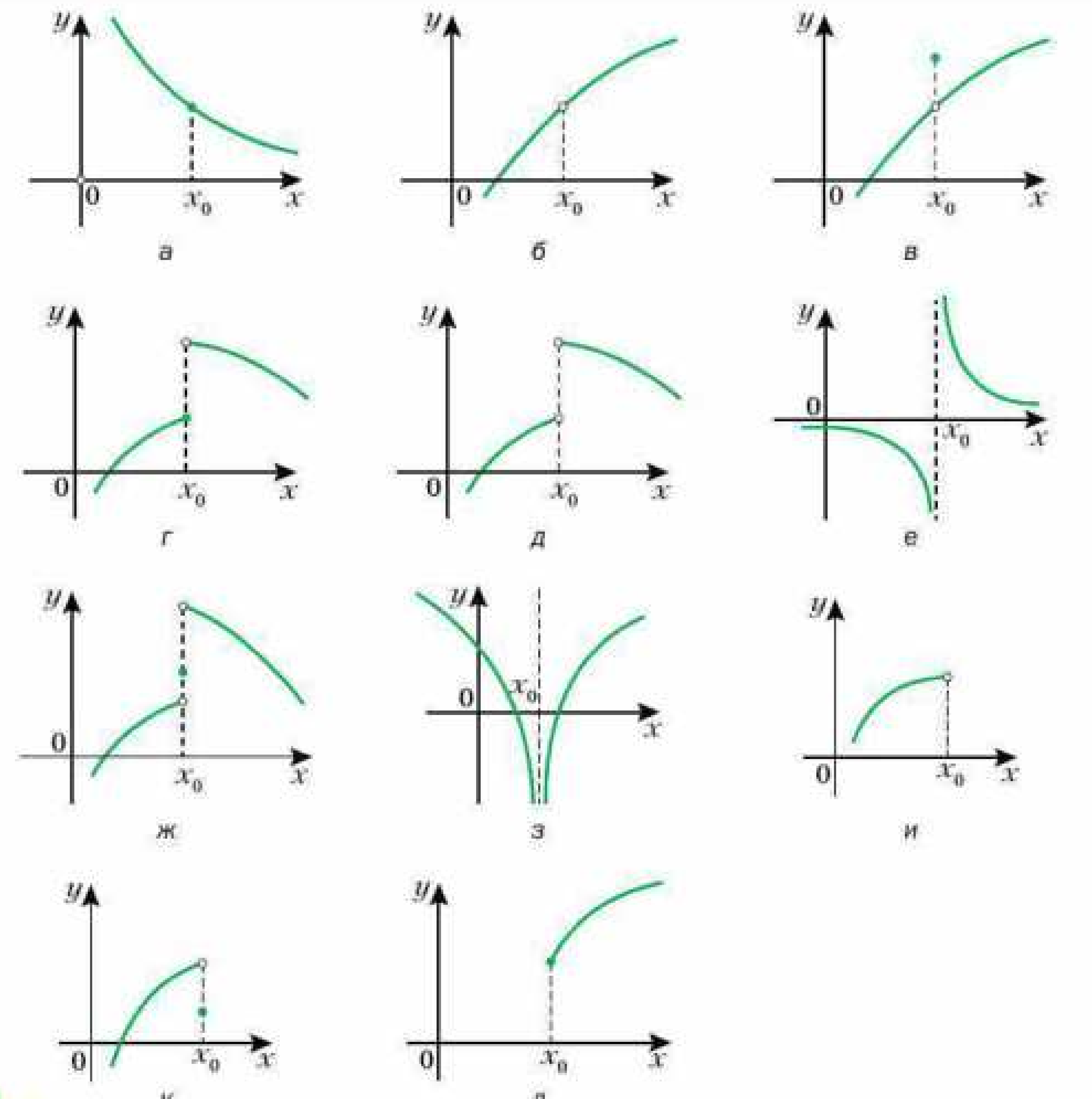


Рис. **36.15**

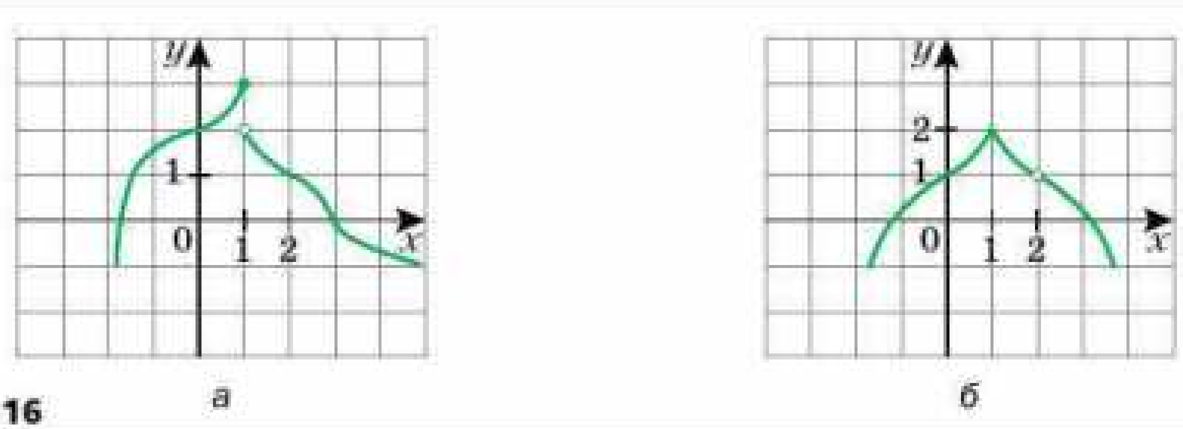


Рис. **36.16**

36.6. Используя график соответствующей функции, проверьте справедливость следующих равенств:

1) $\lim\limits_{x \to \pi} \sin x = 0$;

2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \arccos x = \frac{\pi}{2}$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{arctg} x = 1$.

36.7. Найдите:

1) $\lim\limits_{x \to 1} (2x^2 - 3x - 1)$;

2) $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 3x - 2)$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 + 2x - 1}$.

36.8. Найдите:

1) $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 3x^2 + 2x + 2)$;

2) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{7x - 5}{10 + 2x}$;

3) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3 + 1}{(x - 2)^{20}}$.

36.9. Вычислите:

1) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{2x - 1}$;

2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin 3x$;

3) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{5}} \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$;

4) $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \cos^2 x$.

36.10. Вычислите:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{1 - 3x}$;

2) $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \cos 4x$;

3) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} + 1}{x}$;

4) $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

36.11. Вычислите предел:

1) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}$;

2) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3}\right)$.

36.12. Вычислите предел:

1) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$;

2) $\lim\limits_{x \to -3} \left(\frac{1}{x + 3} + \frac{6}{x^2 - 9}\right)$.

36.13. Вычислите:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$;

2) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$;

3) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$.

36.14. Вычислите:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sqrt{x} - 3x}{3\sqrt{x} - 2x}$;

2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x - 1}{1 - \sqrt{x}}$;

3) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

Некоторые свойства непрерывных функций

Рассмотрим ряд свойств непрерывных функций.

Теорема 36.2

(первая теорема Больцано — Коши)

Если функция f непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и на концах этого промежутка принимает значения разных знаков, то существует такая точка $c \in (a;\ b)$, что $f(c) = 0$.

Бернард Больцано (1781—1848)

Чешский математик, философ и логик. Возглавлял кафедру истории религии в Пражском университете. При жизни напечатал, причём анонимно, только 5 небольших математических трудов, основную часть его рукописного наследия учёные исследовали уже после его смерти. Трактат «Учение о функциях», написанный в 1830 г., увидел свет только через 100 лет. В нём Больцано, за много лет до Вейерштрасса и Коши, сформулировал и доказал ряд положений математического анализа. В работе «Парадоксы бесконечного» Больцано рассматривал вопросы мощности бесконечных множеств; в работе «Наукоучение» выдвинул ряд идей, предшествовавших математической логике.

Эта теорема наглядно очевидна. Действительно, если точки, лежащие в разных полуплоскостях относительно оси абсцисс, соединить непрерывной кривой, то эта кривая обязательно пересечёт ось абсцисс (рис. 36.17).

Следствие

Если функция непрерывна и не имеет нулей на некотором промежутке I, то она на этом промежутке сохраняет знак (рис. 36.18).

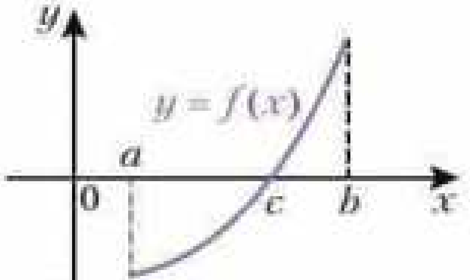


Рис. 36.17

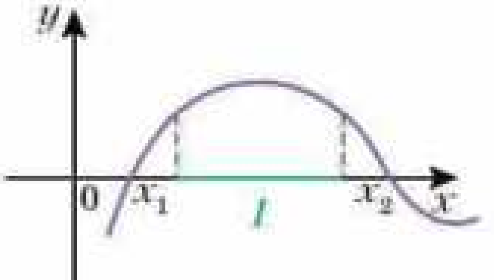


Рис. 36.18

Доказательство

Предположим, что данная функция f на промежутке I не сохраняет знак, то есть существуют такие $a \in I$ и $b \in I$, где $a < b$, что числа $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки (рис. 36.17). Тогда по первой теореме Больцано — Коши существует точка $c \in (a; b) \subset I$ такая, что $f(c) = 0$. Получили противоречие. ■

Напомним, что это следствие лежит в основе метода интервалов для решения неравенств.

Пример 1. Докажите, что уравнение $x^5 + 2x^2 - 11 = 0$ имеет корень.

Решение. Рассмотрим непрерывную функцию $f(x) = x^5 + 2x^2 - 11$. Имеем: $f(0) = -11$, $f(2) = 29$. Следовательно, по первой теореме Больцано — Коши на отрезке $[0; 2]$ уравнение $f(x) = 0$ имеет корень. ■

Теорема 36.3

(вторая теорема Больцано — Коши о промежуточном значении функции)

Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она принимает все значения между $f(a)$ и $f(b)$.

Доказательство

Рассмотрим случай, когда $f(a) < f(b)$ (случай, когда $f(a) \geqslant f(b)$, рассмотрите самостоятельно).

Рассмотрим произвольное число C из промежутка $(f(a); f(b))$, то есть $f(a) < C < f(b)$. Докажем, что существует точка $x_0 \in (a; b)$, для которой $f(x_0) = C$. Тем самым будет показано, что функция f принимает значение C.

Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - C$. Функция g является непрерывной на отрезке $[a; b]$.

Имеем: $g(a) = f(a) - C < 0;$

$g(b) = f(b) - C > 0.$

Следовательно, по первой теореме Больцано — Коши существует точка $x_0 \in (a; b)$ такая, что $g(x_0) = 0$, то есть $f(x_0) - C = 0$; $f(x_0) = C$. ■

Пример 2. Докажите, что уравнение $\sqrt[4]{1 - x^4} - 2x = \sqrt{3}$ имеет корень.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[4]{1 - x^4} - 2x$. Она является непрерывной на $D(f) = [-1; 1]$. Имеем: $f(-1) = 2$ и $f(1) = -2$. Поскольку $\sqrt{3} \in [-2; 2]$, то в силу второй теоремы Больцано — Коши о промежуточном значении функции найдётся такой $x \in D(f)$, что $f(x) = \sqrt{3}$. ■

Вторая теорема Больцано — Коши помогает находить область значений непрерывной функции.

Следствие

Если областью определения непрерывной функции f является некоторый промежуток, $\min\limits_{D(f)} f(x) = a$, $\max\limits_{D(f)} f(x) = b$ и $a \neq b$, то $E(f) = [a; b]$.

Докажите это следствие самостоятельно.

Этим следствием мы нередко пользовались, находя, например, области значений функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \arccos x$ и $y = \arcsin x$.

Соображения, близкие к тем, которые были использованы в примере 2, могут быть полезными и при решении ряда задач, в которых рассматриваемая величина, вообще говоря, не является непрерывной. Поясним сказанное. Пусть некоторая величина принимает только целые значения и изменяет их с шагом 1. Если известно, что эта величина принимает значения a и b, где $a < b$, то она принимает все целые значения из промежутка $[a; b]$.

Пример 3. Учитель написал на доске квадратный трёхчлен $x^2 + 10x + 20$. После этого по очереди каждый из учеников класса увеличивал или уменьшал на 1 второй или третий коэффициент, но не оба сразу. В результате на доске оказался написанным квадратный трёхчлен $x^2 + 20x + 10$. Докажите, что в некоторый момент на доске был записан квадратный трёхчлен с целыми корнями.

Наметим план решения этой задачи, который вы сможете реализовать самостоятельно.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + px + q$, где p и q — целые числа. Покажите, что в описанном процессе величина $f(-1)$ изменяется с шагом 1. Далее воспользуйтесь тем, что в конце и начале процесса эта величина принимает значения разных знаков.

Функция $f(x) = \sin x$ такова, что для любого $x \in D(f)$ выполняется неравенство $|\sin x| \leqslant 1$. Функция $g(x) = x^2$ такова, что для любого $x \in [-1; 2]$ выполняется неравенство $|g(x)| < 5$. Говорят, что функция f **ограничена на $D(f)$**, а функция g ограничена на отрезке $[-1; 2]$.

Вообще, функцию f называют **ограниченной на множестве** M, если существует такое число $C > 0$, что для всех $x \in M$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant C$.

Функцию f, ограниченную на $D(f)$, называют **ограниченной**.

Например, функция $y = \operatorname{arctg} x$ является ограниченной. Действительно, для любого $x \in D(y)$ выполняется неравенство $|\operatorname{arctg} x| < \frac{\pi}{2}$.

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ не является ограниченной на промежутке $(0; \pi)$. При этом она является ограниченной на любом отрезке $[a; b]$, принадлежащем промежутку $(0; \pi)$ (рис. 36.19).

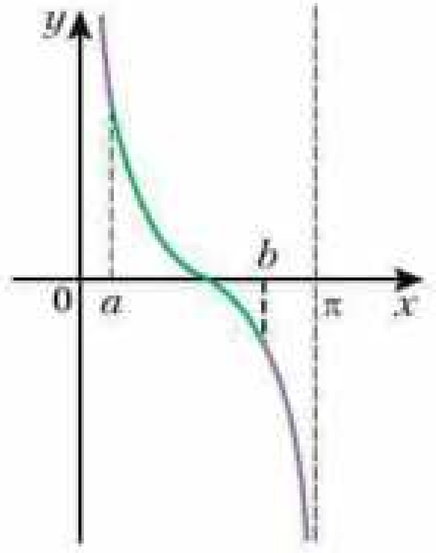


Рис. 36.19

Теорема 36.4

(первая теорема Вейерштрасса)

Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она является ограниченной на этом промежутке.

Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815—1897)

Немецкий математик, член Берлинской академии наук, Парижской академии наук, почётный член Петербургской академии наук. Одним из важнейших его достижений является система логического обоснования математического анализа, основанная на построенной им теории действительных чисел. Вейерштрасс уделял большое внимание применению математики в механике и физике и побуждал к этому своих учеников.

Заметим, что для промежутков вида $(a; b]$, $[a; b)$, $(a; b)$ утверждение теоремы не является справедливым. Так, функция $y = \frac{1}{x}$ непрерывна на любом промежутке вида $(0; a]$, однако она не является ограниченной на этом промежутке.

Не каждая функция, определённая и ограниченная на отрезке $[a; b]$, достигает на этом промежутке свои наибольшее и наименьшее значения. Это иллюстрирует рисунок 36.20.

Однако для непрерывных функций имеет место следующая теорема.

Теорема 36.5

(вторая теорема Вейерштрасса)

Если функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, то на этом отрезке она принимает свои наибольшее и наименьшее значения.

Эта теорема наглядно очевидна. Если две точки на координатной плоскости соединить непрерывной кривой, то на этой кривой найдутся точки с наибольшей и наименьшей ординатами (рис. 36.21). Доказательство этой теоремы выходит за пределы школьного курса.

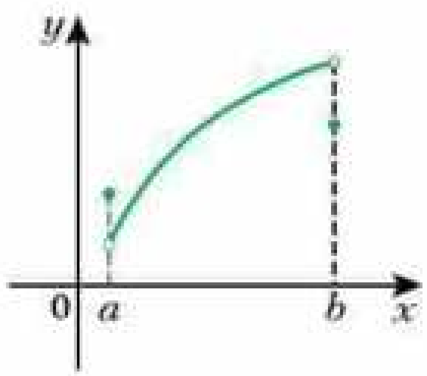


Рис. 36.20

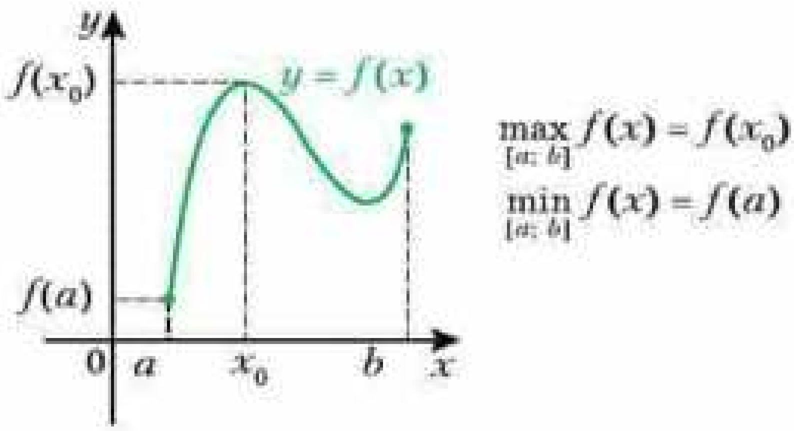


Рис. 36.21

Отметим, что если в теореме 36.5 отрезок $[a;\ b]$ заменить промежутком другого вида, например интервалом $(a;\ b)$, то непрерывная на этом промежутке функция может не принимать своих наибольшего и наименьшего значений. Так, функция $y = x$, непрерывная на промежутке $(0;\ 1)$, не достигает на нём своих наибольшего и наименьшего значений.

§ 37 Задачи о мгновенной скорости и касательной к графику функции

Если функция является математической моделью реального процесса, то часто возникает необходимость находить разность значений этой функции в двух точках. Например, обозначим через $f(t)$ и $f(t_0)$ суммы средств, которые накопились на депозитном[1] счёте вкладчика к моментам времени t и t_0. Тогда разность $f(t) - f(t_0)$, где $t > t_0$, показывает прибыль, которую получит вкладчик за время $t - t_0$.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Пусть x_0 — фиксированная точка из области определения функции f.

[1] Депозит (банковский вклад) — деньги, которые вкладчик помещает в банк, за что банк выплачивает вкладчику проценты.

Если x — произвольная точка области определения функции f такая, что $x \neq x_0$, то разность $x - x_0$ называют **приращением аргумента функции f в точке** x_0 и обозначают Δx (читают: «дельта икс»)[1]. Имеем:

$$\Delta x = x - x_0. \text{ Отсюда}$$
$$x = x_0 + \Delta x.$$

Говорят, что аргумент получил приращение Δx в точке x_0.

Отметим, что приращение аргумента может быть как положительным, так и отрицательным: если $x > x_0$, то $\Delta x > 0$; если $x < x_0$, то $\Delta x < 0$.

Если аргумент в точке x_0 получил приращение Δx, то значение функции f изменилось на величину

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Эту разность называют **приращением функции f в точке** x_0 и обозначают Δf (читают: «дельта эф»).

Имеем:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \text{ или}$$
$$\Delta f = f(x) - f(x_0).$$

Для приращения функции $y = f(x)$ также принято обозначение Δy, то есть

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \text{ или}$$
$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Приращение Δx аргумента в точке x_0 и соответствующее приращение Δf функции показаны на рисунке 37.1.

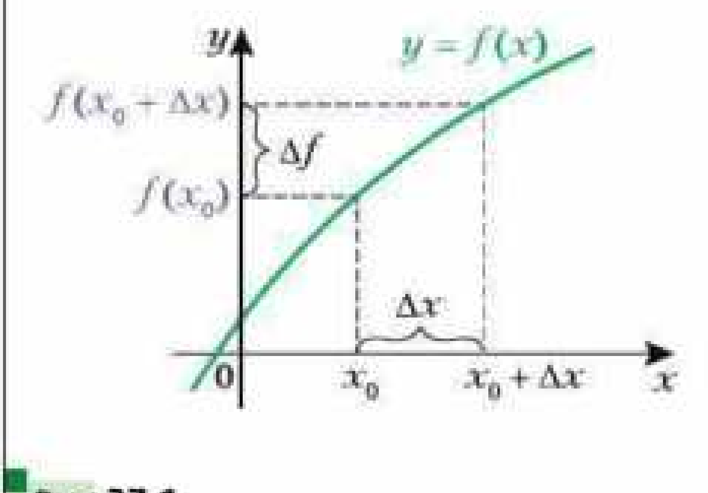


Рис. 37.1

Отметим, что для фиксированной точки x_0 приращение функции f в точке x_0 является функцией с аргументом Δx.

Пример 1. Найдите приращение функции $y = x^2$ в точке x_0, которое соответствует приращению Δx аргумента.

Решение. Имеем:

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

Ответ: $2x_0\Delta x + \Delta x^2$. ■

[1] Говоря о приращении аргумента функции f в точке x_0, здесь и далее будем предполагать, что в любом интервале $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ есть точки области определения функции f, отличные от x_0.

Задача о мгновенной скорости

Пусть автомобиль, двигаясь по прямолинейному участку дороги в одном направлении, за 2 ч преодолел путь 120 км. Тогда его средняя скорость движения равна $v_{\text{ср}} = \dfrac{120}{2} = 60$ (км/ч).

Найденная величина даёт неполное представление о характере движения автомобиля: на одних участках пути автомобиль мог двигаться быстрее, на других — медленнее, иногда мог останавливаться.

Вместе с тем в любой момент времени спидометр автомобиля показывал некоторую величину — скорость в данный момент времени. Значение скорости в разные моменты более полно характеризует движение автомобиля.

Рассмотрим задачу о поиске скорости в данный момент времени на примере равноускоренного движения.

Пусть материальная точка двигается по координатной прямой и через время t после начала движения имеет координату $s(t)$. Тем самым задана функция $y = s(t)$, позволяющая определить положение точки в любой момент времени. Поэтому эту функцию называют **законом движения точки**.

Например, из курса физики известно, что закон равноускоренного движения задаётся формулой $s(t) = s_0 + v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$, где s_0 — координата точки в начале движения (при $t = 0$), v_0 — начальная скорость, a — ускорение.

Пусть, например, $s_0 = 0$, $v_0 = 1$ м/с, $a = 2$ м/с^2. Тогда $s(t) = t^2 + t$.

Зафиксируем какой-нибудь момент времени t_0 и придадим аргументу в точке t_0 приращение Δt, то есть рассмотрим промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$. За этот промежуток времени материальная точка осуществит перемещение Δs. Имеем:

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = \underbrace{(t_0 + \Delta t)^2 + (t_0 + \Delta t)}_{s(t_0 + \Delta t)} - \underbrace{(t_0^2 + t_0)}_{s(t_0)} =$$

$$= t_0^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2 + t_0 + \Delta t - t_0^2 - t_0 = 2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2.$$

Средняя скорость $v_{\text{ср}}(\Delta t)$ движения точки за промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ равна отношению $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. Имеем:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = 2t_0 + 1 + \Delta t, \text{ то есть } v_{\text{ср}}(\Delta t) = 2t_0 + 1 + \Delta t.$$

Обозначение для средней скорости $v_{\text{ср}}(\Delta t)$ подчёркивает, что при заданном законе движения $y = s(t)$ и фиксированном моменте времени t_0 значение средней скорости зависит только от Δt.

Если рассматривать достаточно малые промежутки времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$, то из практических соображений понятно, что средние скорости $v_{\text{ср}}(\Delta t)$ за такие промежутки времени мало отличаются друг от друга, то есть величина $v_{\text{ср}}(\Delta t)$ почти не изменяется. Чем меньше Δt, тем ближе значение средней скорости к некоторому числу, определяющему скорость в момент времени t_0. Иными словами, если при $\Delta t \to 0$ значения $v_{\text{ср}}(\Delta t)$ стремятся к числу $v(t_0)$, то число $v(t_0)$ называют **мгновенной скоростью** в момент времени t_0.

В нашем примере, если $\Delta t \to 0$, то значения выражения $2t_0 + 1 + \Delta t$ стремятся к числу $2t_0 + 1$, которое является значением мгновенной скорости $v(t_0)$, то есть

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} (2t_0 + 1 + \Delta t) = 2t_0 + 1.$$

Этот пример показывает, что если материальная точка двигается по закону $y = s(t)$, то её мгновенную скорость в момент времени t_0 определяют с помощью формулы $v(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}}(\Delta t)$, при условии, что предел $\lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}}(\Delta t)$ существует. Таким образом,

$$\boxed{\boldsymbol{v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}}}$$

Задача о касательной к графику функции

Известное определение касательной к окружности как прямой, которая имеет с окружностью только одну общую точку, неприменимо в случае произвольной кривой.

Например, ось ординат имеет с параболой $y = x^2$ только одну общую точку (рис. 37.2). Однако интуиция подсказывает, что неестественно считать эту прямую касательной к этой параболе. Вместе с тем в курсе алгебры мы нередко говорили, что парабола $y = x^2$ касается оси абсцисс в точке $x_0 = 0$.

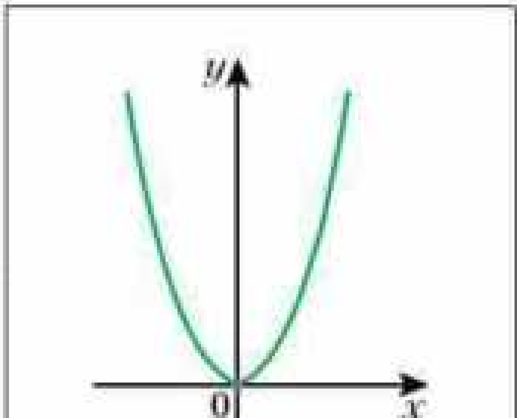


Рис. 37.2

Уточним наглядное представление о касательной к графику функции.

Пусть M — некоторая точка, лежащая на параболе $y = x^2$. Проведём прямую OM, которую назовём секущей (рис. 37.3). Представим, что точка M, двигаясь по параболе, приближается к точке O. При этом секущая OM будет вращаться вокруг точки O. Тогда угол между прямой OM и осью абсцисс будет становиться всё меньше и меньше и секущая OM будет стремиться занять положение оси абсцисс. Поэтому ось абсцисс считают касательной к параболе $y = x^2$ в точке O.

Рассмотрим график некоторой непрерывной в точке x_0 функции f и точку $M_0(x_0; f(x_0))$. В точке x_0 придадим аргументу приращение Δx и рассмотрим на графике точку $M(x; f(x))$, где $x = x_0 + \Delta x$ (рис. 37.4).

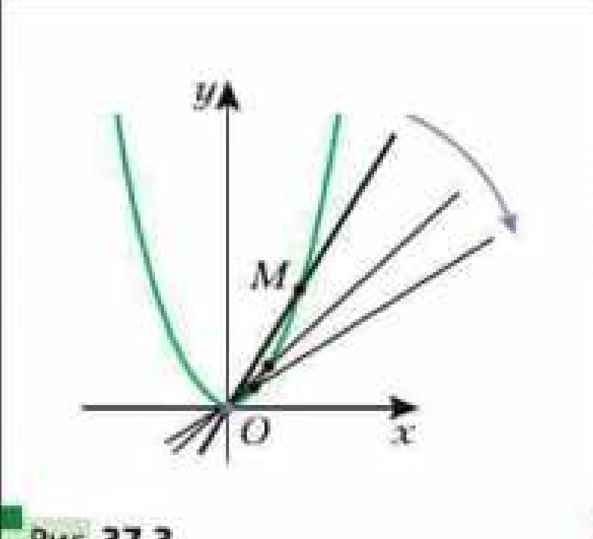


Рис. 37.3

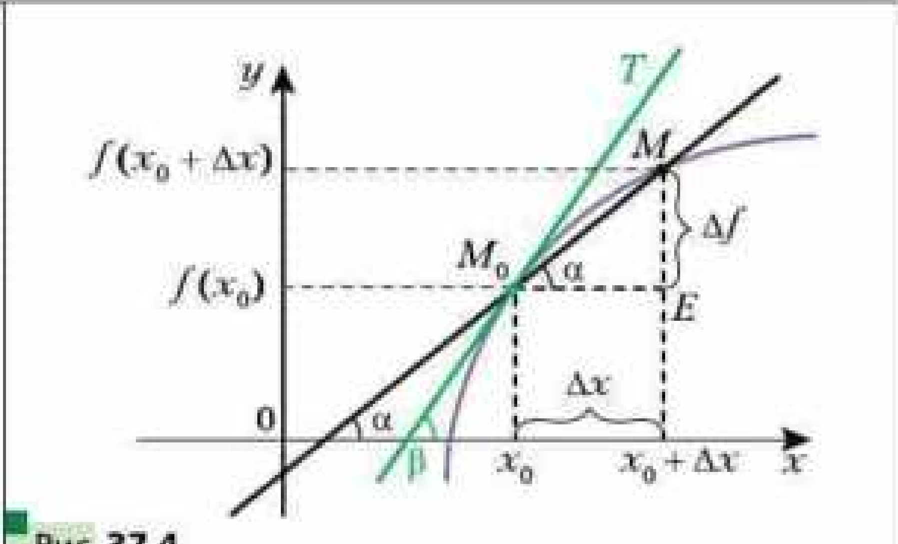


Рис. 37.4

Из рисунка видно, что если Δx становится всё меньше и меньше, то точка M, двигаясь по графику, приближается к точке M_0. Если при $\Delta x \to 0$ секущая M_0M стремится занять положение некоторой прямой (на рисунке 37.4 это прямая M_0T), то такую прямую называют **касательной к графику функции f в точке M_0**.

Пусть секущая M_0M имеет уравнение $y = kx + b$ и образует с положительным направлением оси абсцисс угол α. Как известно, угловой коэффициент k прямой M_0M равен $\operatorname{tg}\alpha$, то есть $k = \operatorname{tg}\alpha$. Очевидно, что $\angle MM_0E = \alpha$ (см. рис. 37.4). Тогда из ΔMM_0E получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{ME}{M_0E} = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Введём обозначение $k_{\text{сек}}(\Delta x)$ для углового коэффициента секущей M_0M, тем самым подчёркивая, что для данной функции f и фиксированной точки x_0 угловой коэффициент секущей M_0M зависит от приращения Δx аргумента.

Имеем: $k_{\text{сек}}(\Delta x) = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Пусть касательная M_0T образует с положительным направлением оси абсцисс угол β ($\beta \neq 90^\circ$). Тогда её угловой коэффициент $k(x_0)$ равен $\operatorname{tg}\beta$.

Естественно считать, что чем меньше Δx, тем меньше значение углового коэффициента секущей отличается от значения углового коэффициента касательной. Иными словами, если $\Delta x \to 0$, то $k_{сек}(\Delta x) \to k(x_0)$. Вообще, угловой коэффициент касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0 определяют с помощью формулы $k(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_{сек}(\Delta x)$, при условии, что предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k_{сек}(\Delta x)$ существует. Таким образом,

$$\boxed{k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

Пример 2. Найдите формулу для вычисления углового коэффициента касательной к графику функции $f(x) = -x^2$ в точке с абсциссой x_0. Какой угол с положительным направлением оси абсцисс образует касательная, проведённая к этому графику в точке с абсциссой $x_0 = -\frac{1}{2}$?

Решение. Имеем: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = -(x_0 + \Delta x)^2 - (-x_0^2) = -2x_0\Delta x - \Delta x^2$.

Тогда, воспользовавшись формулой для вычисления углового коэффициента касательной, можно записать:

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2x_0\Delta x - \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-2x_0 - \Delta x).$$

Если $\Delta x \to 0$, то значения выражения $-2x_0 - \Delta x$ стремятся к числу $-2x_0$, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (-2x_0 - \Delta x) = -2x_0$. Отсюда $k(x_0) = -2x_0$.

Эта формула позволяет вычислить угловой коэффициент касательной к параболе $y = -x^2$ в любой точке, в частности в точке с абсциссой $x_0 = -\frac{1}{2}$.

Имеем: $k\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$.

Пусть касательная к параболе в точке с абсциссой $x_0 = -\frac{1}{2}$ образует угол α $\left(0 \leqslant \alpha < \pi \text{ и } \alpha \neq \frac{\pi}{2}\right)$ с положительным направлением оси абсцисс. Тогда её угловой коэффициент равен $\operatorname{tg}\alpha$. Выше мы установили, что $k\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$. Отсюда $\operatorname{tg}\alpha = 1$. Поскольку $0 \leqslant \alpha < \pi$, то $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (рис. 37.5). ■

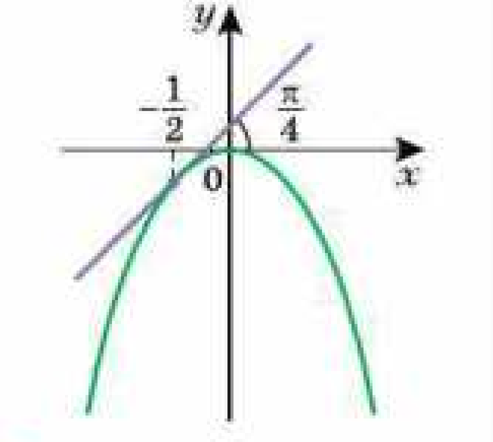


Рис. 37.5

1. Что называют приращением аргумента в точке; приращением функции в точке?
2. Опишите, что называют мгновенной скоростью.
3. Опишите, что называют касательной к графику функции.

Упражнения

37.1. Найдите приращение функции f в точке x_0, если:
1) $f(x) = 3x^2 - 2x$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,1$;
2) $f(x) = \frac{6}{x}$, $x_0 = 1,2$, $\Delta x = -0,3$.

37.2. Найдите приращение функции f в точке x_0, если:
1) $f(x) = 4 - 3x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,3$;
2) $f(x) = 0,5x^2$, $x_0 = -2$, $\Delta x = 0,8$.

37.3. Для функции $f(x) = x^2 - 3x$ выразите приращение Δf функции f в точке x_0 через x_0 и x. Найдите Δf, если: 1) $x_0 = 3$, $x = 2,5$; 2) $x_0 = -2$, $x = -1$.

37.4. Для функции $f(x) = x^3$ выразите приращение Δf функции f в точке x_0 через x_0 и x. Найдите Δf, если $x_0 = 0,5$, $x = 0,4$.

37.5. Для функции $f(x) = x^2 - x$ и точки x_0 найдите $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

37.6. Для функции $f(x) = 5x + 1$ и точки x_0 найдите $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

37.7. Материальная точка двигается по координатной прямой по закону $s(t) = 2t^2 + 3$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите мгновенную скорость материальной точки в момент $t_0 = 2$ с.

37.8. Тело двигается по координатной прямой по закону $s(t) = 5t^2$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите: 1) среднюю скорость тела при изменении времени от $t_0 = 1$ с до $t_1 = 3$ с; 2) мгновенную скорость тела в момент $t_0 = 1$ с.

37.9. Найдите угловой коэффициент:
1) секущей графика функции $y = x^2$, проходящей через точки графика с абсциссами $x_0 = 1$ и $x_1 = 1,6$;
2) касательной к графику функции $y = x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

37.10. Найдите угловой коэффициент:
1) секущей графика функции $y = x^3$, проходящей через точки графика с абсциссами $x_0 = 2$ и $x_1 = 1$;
2) касательной к графику функции $y = x^3$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Понятие производной

В предыдущем параграфе, решая две разные задачи о мгновенной скорости материальной точки и об угловом коэффициенте касательной, мы пришли к одной и той же математической модели: пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

К аналогичным формулам приводит решение целого ряда задач физики, химии, биологии, экономики и других наук. Это свидетельствует о том, что рассматриваемая модель заслуживает особого внимания. Ей стоит присвоить название, ввести обозначение, изучить её свойства и научиться их применять.

Определение

Производной функции f в точке x_0 называют число, равное пределу отношения приращения функции f в точке x_0 к соответствующему приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Производную функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначают так: $f'(x_0)$ (читают: «эф штрих от икс нулевого») или $y'(x_0)$. Можно записать:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

или

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}}$$

Отметим, что производную функции f в точке x_0 определяют только в том случае, когда предел, записанный в правой части равенства существует.

Производную функции f в точке x_0 можно вычислить по такой схеме:

1) придав в точке x_0 аргументу приращение Δx, найти соответствующее приращение Δf функции: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$;

2) найти отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$;

3) выяснить, к какому числу стремится отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, то есть найти предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Пример 1. Найдите производную функции $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке $x_0 = 1$.

Решение. Придерживаясь вышеприведённой схемы, запишем:

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{1}{1 + \Delta x} - \frac{1}{1} = \frac{-\Delta x}{1 + \Delta x}$;

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = -\frac{1}{1 + \Delta x}$;

3) при $\Delta x \to 0$ значения выражения $-\frac{1}{1 + \Delta x}$ стремятся к числу -1, то есть $f'(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(-\frac{1}{1 + \Delta x}\right) = -1$.

Ответ: -1. ■

Отметим, что, найдя значение $f'(1)$, мы тем самым нашли угловой коэффициент $k(x_0)$ касательной, проведённой к графику функции $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$. Он равен -1, то есть $k(1) = -1$. Тогда, обозначив через α угол, образованный этой касательной с положительным направлением оси абсцисс, можем записать: $\operatorname{tg} \alpha = -1$. Отсюда $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ (рис. 38.1).

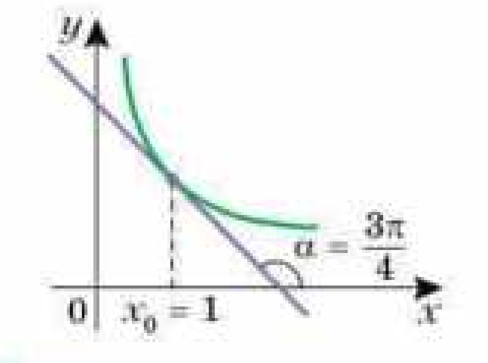


Рис. 38.1

Вообще, можно сделать такой вывод: *угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции f в точке с абсциссой x_0, равен производной функции f в точке x_0*, то есть

$$\boxed{k(x_0) = f'(x_0)}$$

Это равенство выражает **геометрический смысл производной.**

Исходя из определения мгновенной скорости, можно сделать такой вывод: *если $y = s(t)$ — закон движения материальной точки по координатной прямой, то её мгновенная скорость в момент времени t_0 равна производной функции $y = s(t)$ в точке t_0*, то есть

$$\boxed{v(t_0) = s'(t_0)}$$

Это равенство выражает **механический смысл производной.**

Если функция f имеет производную в точке x_0, то эту функцию называют **дифференцируемой в точке x_0**.

Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Из геометрического смысла производной следует, что к графику функции f в точке с абсциссой x_0 можно провести *невертикальную* касательную (рис. 38.2). И наоборот, если к графику функции f в точке с абсциссой x_0 можно провести невертикальную касательную, то функция f дифференцируема в точке x_0.

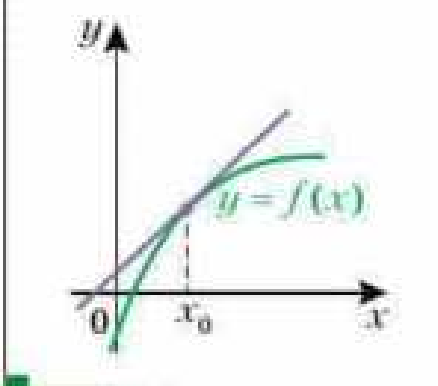


Рис. 38.2

На рисунке 38.3 изображены графики функций, которые в точке x_0 имеют разрыв или «излом». К указанным графикам в точке с абсциссой x_0 невозможно провести касательную. Эти функции не дифференцируемы в точке x_0.

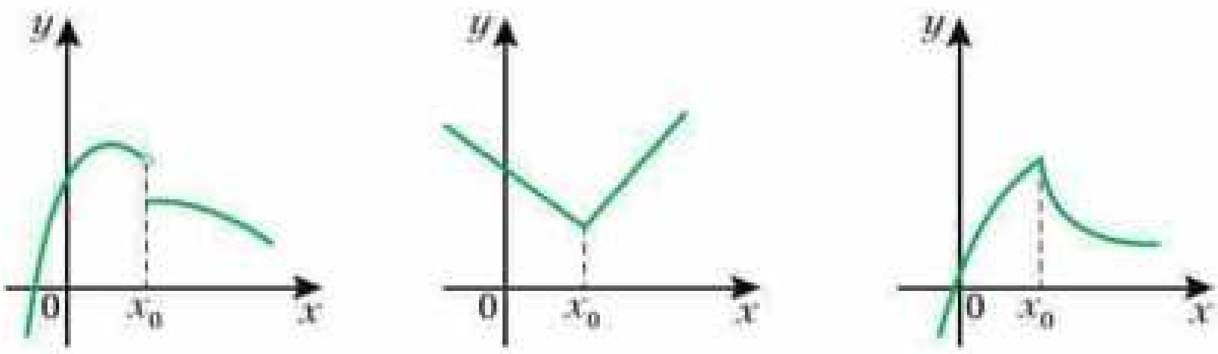


Рис. 38.3

На рисунке 38.4 изображены графики функций, которые в точке с абсциссой x_0 имеют вертикальную касательную. Поэтому эти функции не дифференцируемы в точке x_0.

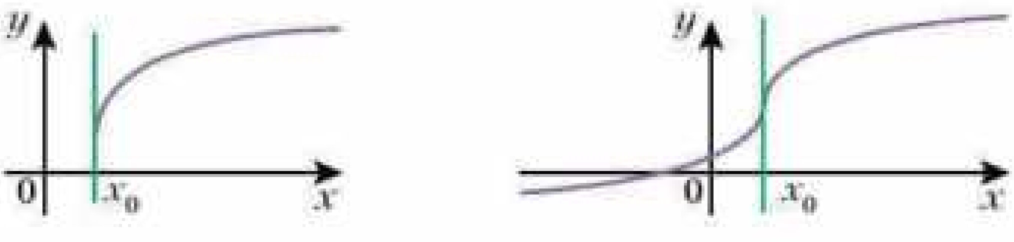


Рис. 38.4

Покажем, например, что функция $f(x) = |x|$, график которой имеет «излом» в точке $x_0 = 0$, не является дифференцируемой в этой точке. Имеем:

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = |x_0 + \Delta x| - |x_0| = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x|$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$;

3) в § 36 было отмечено, что функция $f(x) = \frac{|x|}{x}$ не имеет предела в точке $x_0 = 0$; это означает, что не существует предела $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$, то есть функция f не является дифференцируемой в точке $x_0 = 0$.

Теорема 38.1

Если функция f дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство

Так как функция f дифференцируема в точке x_0, то можно записать $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Имеем: $\Delta x = x - x_0$. Очевидно, что если $\Delta x \to 0$, то $x \to x_0$. Тогда

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Имеем: $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right) =$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$. Отсюда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Это означает, что функция f является непрерывной в точке x_0. ■

Отметим, что непрерывная в точке $x_0 = 0$ функция $f(x) = |x|$ не является дифференцируемой в этой точке. Этот пример показывает, что непрерывность функции в точке является необходимым, но не является достаточным условием дифференцируемости функции в этой точке (рис. 38.5).

Рис. 38.5

Пусть M — множество точек, в которых функция f дифференцируема. Каждому числу $x \in M$ поставим в соответствие число $f'(x)$. Это правило задаёт функцию с областью определения M. Эту функцию называют **производной функции** $y = f(x)$ и обозначают f' или y'.

Если функция f дифференцируема в каждой точке некоторого множества M, то говорят, что она **дифференцируема на множестве** M. Например, на рисунке 38.6 изображён график функции, дифференцируемой на промежутке I. На промежутке I этот график не имеет разрывов и изломов.

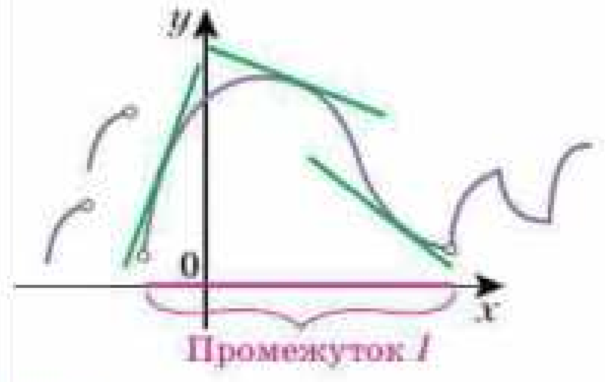


Рис. 38.6

Если функция f дифференцируема на $D(f)$, то её называют **дифференцируемой**.

Нахождение производной функции f называют **дифференцированием** функции f.

Пример 2. Продифференцируйте функцию $f(x) = kx + b$.

Решение. Найдём производную функции f в точке x_0, где x_0 — произвольная точка области определения функции f.

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (k(x_0 + \Delta x) + b) - (kx_0 + b) = k\Delta x$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{k\Delta x}{\Delta x} = k$;

3) по определению производной $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k = k$.

Следовательно, $f'(x_0) = k$.

Поскольку x_0 — произвольная точка области определения функции f, то последнее равенство означает, что для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $f'(x) = k$. ■

Вывод о том, что производная линейной функции $f(x) = kx + b$ равна k, также принято записывать так:

$$\boxed{(kx + b)' = k} \qquad (1)$$

Если в формулу (1) подставить $k = 1$ и $b = 0$, то получим

$$(x)' = 1.$$

Если же в формуле (1) положить $k = 0$, то получим

$$(b)' = 0.$$

Последнее равенство означает, что *производная функции, являющейся константой, в каждой точке равна нулю.*

Пример 3. Найдите производную функции $f(x) = x^2$.

Решение. Найдём производную функции f в точке x_0, где x_0 — произвольная точка области определения функции f.

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$;

3) если $\Delta x \to 0$, то при любом $x_0 \in \boldsymbol{R}$ значения выражения $2x_0 + \Delta x$ стремятся к числу $2x_0$. Следовательно, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0$.

Так как x_0 — произвольная точка области определения функции $f(x) = x^2$, то для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство

$$f'(x) = 2x. \blacksquare$$

Последнее равенство также принято записывать в виде

$$\boxed{(x^2)' = 2x} \qquad (2)$$

Пример 4. Найдите производную функции $f(x) = x^3$.

Решение. Найдём производную функции f в точке x_0, где x_0 — произвольная точка области определения функции f.

1) $\Delta f = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = (x_0 + \Delta x - x_0)((x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)\, x_0 + x_0^2) = \Delta x((x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)\, x_0 + x_0^2)$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x((x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)x_0 + x_0^2)}{\Delta x} = (x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)x_0 + x_0^2$;

3) если $\Delta x \to 0$, то значения выражения $(x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)x_0 + x_0^2$ стремятся к числу $3x_0^2$. Следовательно, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 3x_0^2$.

Так как x_0 — произвольная точка области определения функции f, то для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство

$$f'(x) = 3x^2. \blacksquare$$

Последнее равенство можно записать так:

$$\boxed{(x^3)' = 3x^2} \qquad (3)$$

Формулы (2) и (3) — частные случаи более общей формулы:

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \boldsymbol{N},\ n > 1} \qquad (4)$$

Например, $(x^5)' = 5x^4$, $(x^7)' = 7x^6$.

Формула (4) остаётся справедливой для любого $n \in \boldsymbol{Z}$ и $x \neq 0$, то есть

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \boldsymbol{Z}} \qquad (5)$$

Например, воспользуемся формулой (5) для нахождения производной функции $f(x) = \frac{1}{x}$. Имеем:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Следовательно, для любого $x \neq 0$ выполняется равенство $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ или

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$$

Формулу (5) также можно обобщить для любого $r \in \boldsymbol{Q}$ и $x > 0$:

$$\boxed{(x^r)' = rx^{r-1},\ r \in \boldsymbol{Q}} \qquad (6)$$

Например, найдём производную функции $f(x) = \sqrt{x}$, воспользовавшись формулой (6). Имеем: $(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Следовательно, для $x > 0$ можно записать: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ или

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Вообще, производную функции $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$, можно находить по формуле

$$\boxed{(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}} \qquad (7)$$

Если n — нечётное натуральное число, то формула (7) позволяет находить производную функции f во всех точках x таких, что $x \neq 0$.

Если n — чётное натуральное число, то формула (7) позволяет находить производную функции f для всех положительных значений x.

Обратимся к тригонометрическим функциям $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Эти функции являются дифференцируемыми, и их производные находят по следующим формулам:

$$\boxed{\begin{gathered}(\sin x)' = \cos x,\\ (\cos x)' = -\sin x,\end{gathered}}$$

Доказательство этих формул выходит за рамки рассматриваемого курса.

При вычислении производных удобно пользоваться таблицей производных, расположенной на форзаце.

Пример 5. Докажите, что функция $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ если } x<1, \\ 2x-1, \text{ если } x\geqslant 1 \end{cases}$ является дифференцируемой в точке $x_0=1$. Найдите $f'(1)$.

Решение. Имеем: $f(x_0)=f(1)=2\cdot 1-1=1$.

Если $\Delta x<0$, то $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}=2+\Delta x$.

Если $\Delta x>0$, то $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{(2(1+\Delta x)-1)-1}{\Delta x}=2$.

Теперь видим, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=2$, то есть $f'(1)=2$. ■

1. Что называют производной функции в точке?
2. Запишите равенства, выражающие механический и геометрический смысл производной.
3. Какую функцию называют дифференцируемой в точке; на множестве?

Упражнения

38.1. Найдите производную функции:

1) $y=5x-6$; 2) $y=\dfrac{1-x}{3}$; 3) $y=9$.

38.2. Найдите производную функции:

1) $y=x^4$; 3) $y=x^{-15}$; 5) $y=x^{-2,8}$;

2) $y=x^{20}$; 4) $y=\dfrac{1}{x^{17}}$; 6) $y=x^{\frac{1}{5}}$.

38.3. Найдите производную функции:

1) $y=x^{10}$; 3) $y=\dfrac{1}{x^8}$; 5) $y=x^{\frac{7}{6}}$;

2) $y=x^{-6}$; 4) $y=8-3x$; 6) $y=x^{-0,2}$.

38.4. Продифференцируйте функцию:

1) $y=\sqrt[4]{x}$; 2) $y=\sqrt[8]{x^7}$; 3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; 4) $y=\dfrac{1}{\sqrt[8]{x^5}}$.

38.5. Продифференцируйте функцию:

1) $y = \sqrt[9]{x}$; 2) $y = \sqrt[6]{x^5}$; 3) $y = \dfrac{1}{\sqrt[12]{x^7}}$.

38.6. Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$; 2) $f(x) = \cos x$, $x_0 = -\dfrac{\pi}{6}$.

38.7. Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$; 2) $f(x) = \cos x$, $x_0 = -\dfrac{\pi}{4}$.

◆◆

38.8. Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = x\sqrt{x}$, $x_0 = 81$; 3) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt[6]{x}}$, $x_0 = 64$.

2) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}}$, $x_0 = 16$;

38.9. Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = x\sqrt[4]{x}$, $x_0 = 256$; 2) $f(x) = \sqrt[8]{x\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$.

38.10. Пользуясь определением производной, найдите $f'(x)$, если:

1) $f(x) = \dfrac{3}{x}$; 2) $f(x) = 4 - x^2$.

38.11. Пользуясь определением производной, найдите $f'(x)$, если:

1) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$; 2) $f(x) = x^2 + 3x - 2$.

38.12. Найдите с помощью графика функции f (рис. 38.7) значения $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$.

38.13. Найдите с помощью графика функции f (рис. 38.8) значения $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$.

38.14. На рисунке 38.9 изображён график функции f. Укажите несколько значений аргумента x, для которых:

1) $f'(x) > 0$; 2) $f'(x) < 0$; 3) $f'(x) = 0$.

38.15. К графику функции f в точке с абсциссой x_0 проведена касательная (рис. 38.10). Найдите $f'(x_0)$.

38.16. К графику функции f в точке с абсциссой x_0 проведена касательная (рис. 38.11). Найдите $f'(x_0)$.

38.17. На рисунке 38.12 изображён график функции f. Укажите точки, в которых производная равна нулю, и точки, в которых производная не существует.

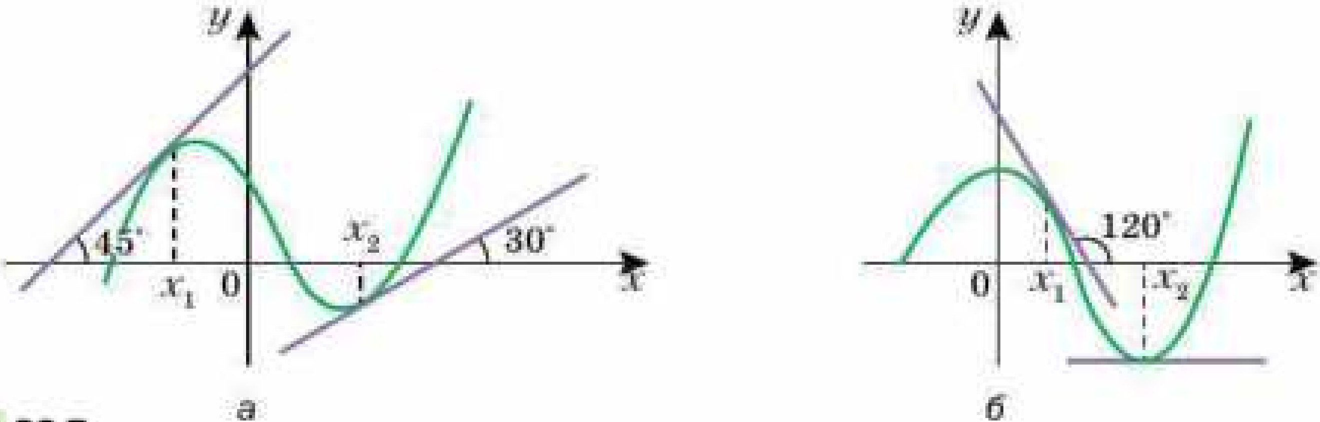


Рис. 38.7

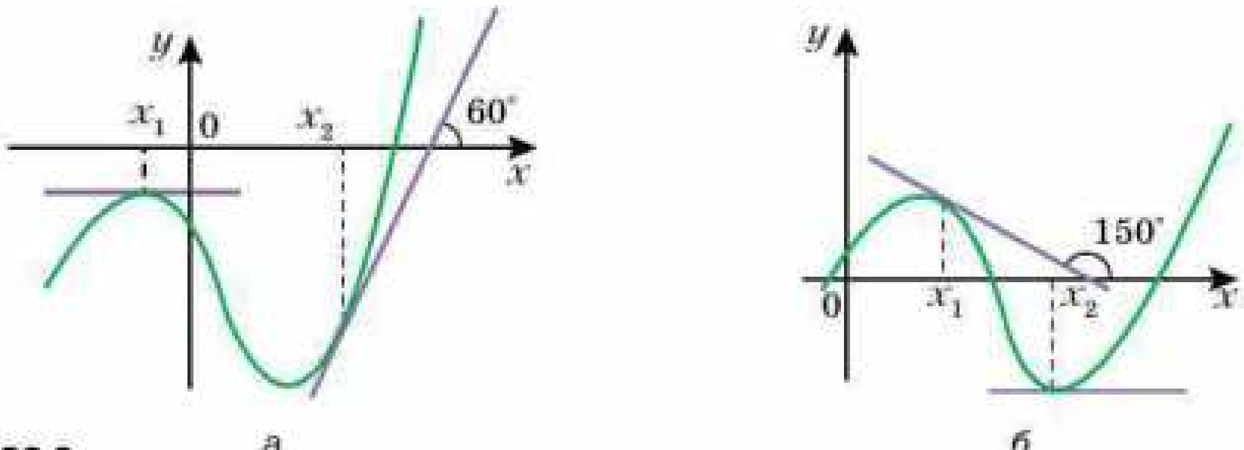


Рис. 38.8

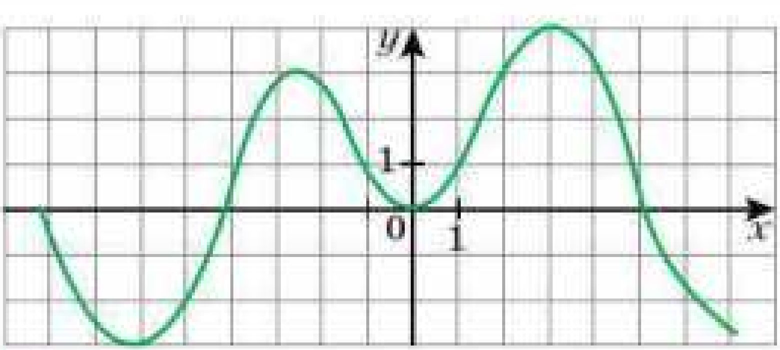


Рис. 38.9

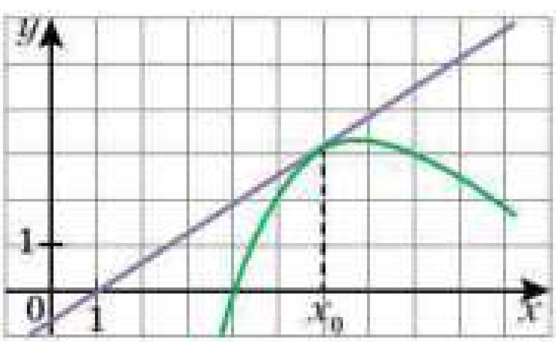


Рис. 38.10

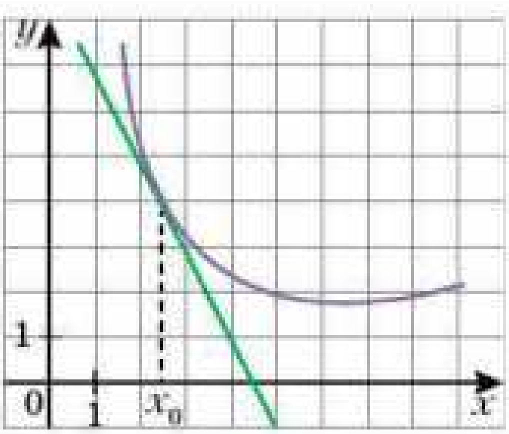


Рис. 38.11

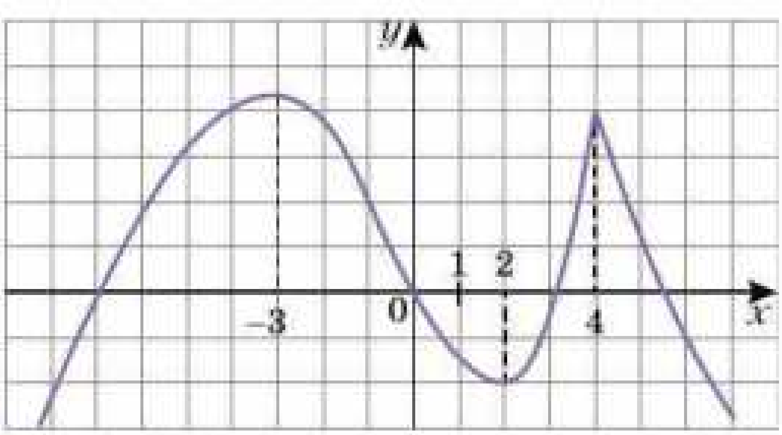


Рис. 38.12

38.18. На рисунке 38.13 изображён график функции f. Укажите точки, в которых производная равна нулю, и точки, в которых производная не существует.

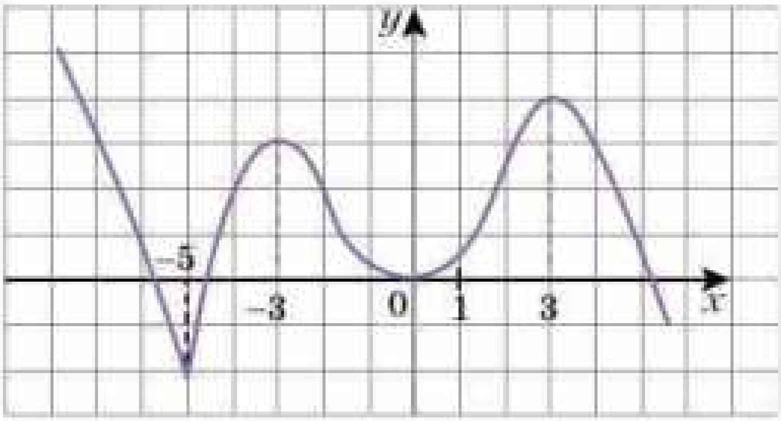


Рис. 38.13

38.19. На рисунке 38.14 изображён график функции f. Сравните:

1) $f'(-5)$ и $f'(1)$;
2) $f'(-1)$ и $f'(6)$;
3) $f'(-2)$ и $f'(4)$;
4) $f'(0)$ и $f'(5)$.

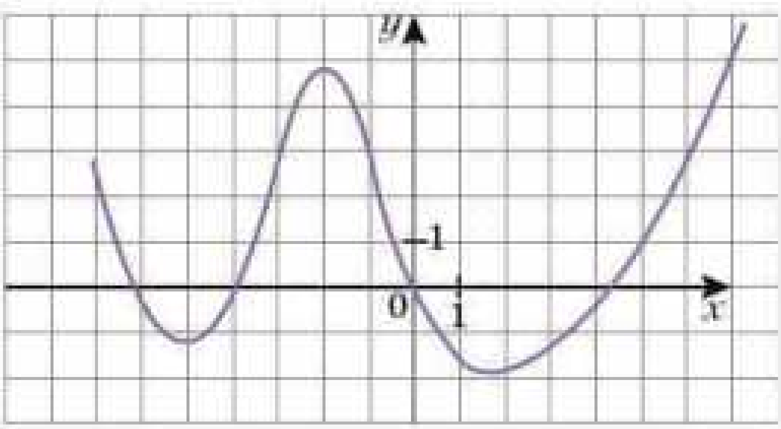


Рис. 38.14

38.20. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t) = t^2$. Найдите $s'\left(\frac{1}{2}\right)$. Какой механический смысл имеет найденная величина?

38.21. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t) = t^3$. Найдите $s'(2)$. Какой механический смысл имеет найденная величина?

38.22. Используя геометрический смысл производной, докажите, что функция $y = \sqrt{1 - x^2}$ не является дифференцируемой в точках $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

38.23. Докажите, пользуясь определением, что функция $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, \text{ если } x < 0, \\ 1, \text{ если } x \geqslant 0 \end{cases}$ является дифференцируемой в точке $x_0 = 0$. Проиллюстрируйте полученный результат графически.

38.24. Найдите производную функции $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, \text{ если } x \leqslant 2, \\ 4x - 6, \text{ если } x > 2 \end{cases}$ в точке $x_0 = 2$.

38.25. Докажите, пользуясь определением, что функция $f(x) = x|x|$ является дифференцируемой в точке $x_0 = 0$. Проиллюстрируйте полученный результат графически.

38.26. Найдите производную функции $f(x) = x^2|x|$ в точке $x_0 = 0$.

§ 39 Правила вычисления производных

Найдём, пользуясь определением, производную функции $f(x) = x^2 + x$ в точке $x_0 \in \boldsymbol{R}$.

1) $\Delta f = \underbrace{(x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)}_{f(x_0 + \Delta x)} - \underbrace{(x_0^2 + x_0)}_{f(x_0)} = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 + x_0 + \Delta x -$
$- x_0^2 - x_0 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2 + \Delta x$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x + 1$;

3) если $\Delta x \to 0$, то значения выражения $2x_0 + \Delta x + 1$ стремятся к числу $2x_0 + 1$. Следовательно, при любом $x_0 \in \boldsymbol{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x + 1) = 2x_0 + 1.$$

Так как x_0 — произвольная точка области определения функции $f(x) = x^2 + x$, то для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство

$$f'(x) = 2x + 1, \text{ то есть}$$
$$(x^2 + x)' = 2x + 1.$$

Из предыдущего пункта вам известно, что $(x^2)' = 2x$ и $(x)' = 1$. Таким образом, получаем:

$$(x^2 + x)' = (x^2)' + (x)'.$$

Следовательно, производную функции $f(x) = x^2 + x$ можно было найти, как сумму производных функций $y = x^2$ и $y = x$.

Справедлива следующая теорема[1].

---

[1] Условия теорем 39.1–39.4 предусматривают следующее: если функции f и g дифференцируемы в точке x_0, то соответственно функции $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x)g(x)$, $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и $y = f(g(x))$ определены на некотором промежутке, содержащем точку x_0.

Теорема 39.1

(производная суммы)

В тех точках, в которых дифференцируемы функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, также является дифференцируемой функция $y = f(x) + g(x)$, причём для всех таких точек выполняется равенство

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Коротко говорят: *производная суммы равна сумме производных*. Также принята такая упрощённая запись:

$$\boxed{(f + g)' = f' + g'}$$

Доказательство

Пусть x_0 — произвольная точка, в которой функции f и g дифференцируемы. Найдём приращение функции $y = f(x) + g(x)$ в точке x_0. Имеем:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - g(x_0) =$$
$$= (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) + (g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)) = \Delta f + \Delta g.$$

Запишем: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{\Delta f}{\Delta x} + \dfrac{\Delta g}{\Delta x} \right).$

Поскольку функции f и g дифференцируемы в точке x_0, то существуют пределы $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta g}{\Delta x}$. Отсюда получаем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Следовательно, функция $y = f(x) + g(x)$ является дифференцируемой в точке x_0, причём её производная в этой точке равна $f'(x_0) + g'(x_0)$. ■

Теорему 39.1 можно обобщить для любого конечного количества слагаемых:

$$(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)' = f_1' + f_2' + \ldots + f_n'.$$

Две теоремы, приведённые ниже, также упрощают нахождение производной.

Теорема 39.2

(производная произведения)

В тех точках, в которых дифференцируемы функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, также является дифференцируемой функция $y = f(x)\,g(x)$, причём для всех таких точек выполняется равенство

$$(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + g'(x)\,f(x).$$

Также принята такая упрощённая запись:

$$\boxed{(fg)' = f'g + g'f}$$

Доказательство

Пусть x_0 — произвольная точка, в которой функции f и g дифференцируемы. Найдём приращение функции $y = f(x)\,g(x)$ в точке x_0. Учитывая равенства $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$, $g(x_0 + \Delta x) = g(x_0) + \Delta g$, имеем:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x)\,g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\,g(x_0) =$$
$$= (f(x_0) + \Delta f)(g(x_0) + \Delta g) - f(x_0)\,g(x_0) =$$
$$= f(x_0)\,g(x_0) + \Delta f \cdot g(x_0) + \Delta g \cdot f(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g - f(x_0)\,g(x_0) =$$
$$= \Delta f \cdot g(x_0) + \Delta g \cdot f(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g.$$

Запишем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f \cdot g(x_0) + \Delta g \cdot f(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x_0) + \frac{\Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x} \right) =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x_0) + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \Delta x \right).$$

Так как функции f и g дифференцируемы в точке x_0, то существуют пределы $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$.

Теперь можно записать:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x =$$
$$= f'(x_0)\,g(x_0) + g'(x_0)\,f(x_0) + f'(x_0) \cdot g'(x_0) \cdot 0 = f'(x_0)\,g(x_0) + g'(x_0)\,f(x_0).$$

Таким образом, функция $y = f(x)\,g(x)$ дифференцируема в точке x_0, причём её производная в этой точке равна $f'(x_0)\,g(x_0) + g'(x_0)\,f(x_0)$. ■

Следствие 1

В тех точках, в которых дифференцируема функция $y = f(x)$, также является дифференцируемой функция $y = kf(x)$, где k — некоторое число, причём для всех таких точек выполняется равенство

$$(kf(x))' = kf'(x).$$

Коротко говорят: *постоянный множитель можно выносить за знак производной*.

Также принята такая упрощённая запись:

$$(kf)' = kf'$$

Доказательство

Так как функция $y = k$ дифференцируема в любой точке, то, применяя теорему о производной произведения, можно записать:

$$(kf(x))' = (k)'f(x) + kf'(x) = 0 \cdot f(x) + kf'(x) = kf'(x). \blacksquare$$

Следствие 2

В тех точках, в которых дифференцируемы функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, также является дифференцируемой функция $y = f(x) - g(x)$, причём для всех таких точек выполняется равенство

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x).$$

Доказательство

Имеем:

$$(f(x) - g(x))' = (f(x) + (-1) \cdot g(x))' = (f(x))' + ((-1)g(x))' =$$
$$= f'(x) + (-1) \cdot g'(x) = f'(x) - g'(x). \blacksquare$$

Теорема 39.3

(производная частного)

В тех точках, в которых функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ дифференцируемы и значение функции g не равно нулю, функция $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ также является дифференцируемой, причём для всех таких точек выполняется равенство

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}.$$

Также принята такая упрощённая запись:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

Пример 1. Найдите производную функции:

1) $y = \dfrac{1}{x} - \sin x + 4x^2$; 2) $y = x^3 \cos x$; 3) $y = \dfrac{2x^2 + 1}{3x - 2}$.

Решение. 1) Пользуясь теоремой о производной суммы и следствием из теоремы о производной произведения, получаем:

$$y' = \left(\frac{1}{x} - \sin x + 4x^2\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' - (\sin x)' + 4 \cdot (x^2)' = -\frac{1}{x^2} - \cos x + 4 \cdot 2x =$$
$$= -\frac{1}{x^2} - \cos x + 8x.$$

2) Имеем: $y' = (x^3 \cos x)' = (x^3)' \cdot \cos x + (\cos x)' \cdot x^3 = 3x^2 \cos x - \sin x \cdot x^3 = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$.

3) По теореме о производной частного получаем:

$$y' = \left(\frac{2x^2+1}{3x-2}\right)' = \frac{(2x^2+1)'(3x-2) - (3x-2)'(2x^2+1)}{(3x-2)^2} = \frac{4x(3x-2) - 3(2x^2+1)}{(3x-2)^2} =$$
$$= \frac{12x^2 - 8x - 6x^2 - 3}{(3x-2)^2} = \frac{6x^2 - 8x - 3}{(3x-2)^2}. ■$$

Используя теорему о производной частного, легко доказать, что:

$$\boxed{\begin{gathered}(\mathbf{tg}\,\boldsymbol{x})' = \frac{1}{\cos^2 \boldsymbol{x}},\\ (\mathbf{ctg}\,\boldsymbol{x})' = -\frac{1}{\sin^2 \boldsymbol{x}}\end{gathered}}$$

Действительно,

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Формулу $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ докажите самостоятельно.

Рассмотрим функции $f(t) = 2t - 1$ и $g(x) = x^2 + x + 1$. Значения одной функции могут служить значениями аргумента другой функции. Например, $f(g(x)) = 2g(x) - 1 = 2(x^2 + x + 1) - 1 = 2x^2 + 2x + 1$. Следовательно, можно говорить, что формула $y = 2x^2 + 2x + 1$ задаёт функцию $y = f(g(x))$.

Если для любого $x \in M$ все значения функции $t = g(x)$ являются значениями аргумента функции $y = f(t)$, то говорят, что задана **сложная функция** $y = f(g(x))$ с областью определения M.

Рассмотрим ещё несколько примеров.

Если $f(u) = \sin u$, а $g(x) = 1 - 3x$, то сложная функция $y = f(g(x))$ задаётся формулой $y = \sin(1 - 3x)$. Функцию $y = \cos^2 x$ можно рассматривать как сложную функцию $y = f(g(x))$, где $f(x) = x^2$, $g(x) = \cos x$.

Находить производную сложной функции можно с помощью следующей теоремы.

Теорема 39.4

(производная сложной функции)

Если функция $t = g(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $y = f(t)$ дифференцируема в точке t_0, где $t_0 = g(x_0)$, то сложная функция $y = f(g(x))$ является дифференцируемой в точке x_0, причём

$$y'(x_0) = f'(t_0) \cdot g'(x_0).$$

Пример 2. Найдите значение производной функции в точке x_0: 1) $y = (3x-7)^6$, $x_0 = 2$; 2) $y = \sqrt{4x^2+1}$, $x_0 = 0$; 3) $y = \sin\frac{x}{2}$, $x_0 = \pi$; 4) $y = \operatorname{tg}^3 5x$, $x_0 = \frac{\pi}{15}$.

Решение.

1) Данная функция $y = (3x-7)^6$ является сложной функцией $y = f(g(x))$, где $f(t) = t^6$, $g(x) = 3x - 7$. Так как $f'(t) = 6t^5$, а $g'(x) = 3$, то по теореме о производной сложной функции можно записать:

$$y'(x) = f'(t)g'(x) = 6t^5 \cdot 3 \text{ при } t = 3x - 7,$$

то есть

$$y'(x) = 6(3x-7)^5 \cdot 3 = 18(3x-7)^5;$$
$$y'(2) = 18 \cdot (3 \cdot 2 - 7)^5 = -18.$$

Решение этой задачи можно оформить и так:

$$y' = ((3x-7)^6)' = 6(3x-7)^5 \cdot (3x-7)' = 6(3x-7)^5 \cdot 3 = 18(3x-7)^5;$$
$$y'(2) = -18.$$

2) $$y' = (\sqrt{4x^2+1})' = \frac{1}{2\sqrt{4x^2+1}} \cdot (4x^2+1)' = \frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}};$$
$$y'(0) = 0.$$

3) $$y' = \left(\sin\frac{x}{2}\right)' = \cos\frac{x}{2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2};\; y'(\pi) = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0;$$

4) $$y' = (\operatorname{tg}^3 5x)' = 3\operatorname{tg}^2 5x \cdot (\operatorname{tg} 5x)' = 3\operatorname{tg}^2 5x \cdot \frac{(5x)'}{\cos^2 5x} = \frac{15\operatorname{tg}^2 5x}{\cos^2 5x};$$

$$y'\left(\frac{\pi}{15}\right) = \frac{15\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}}{\cos^2\frac{\pi}{3}} = 15 \cdot (\sqrt{3})^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 45 : \frac{1}{4} = 180.$$

Ответ: 1) –18; 2) 0; 3) 0; 4) 180. ■

? Сформулируйте теоремы, выражающие правила вычисления производных.

Упражнения

39.1. Найдите производную функции:

1) $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 10$;
2) $y = 4x^6 + 20\sqrt{x}$;
3) $y = 7x^6 + \dfrac{4}{x} - 1$;
4) $y = 4\sin x - 5\cos x$;
5) $y = \operatorname{tg} x - 9x$;
6) $y = 2x^{-2} + 3x^{-3}$.

39.2. Найдите производную функции:

1) $y = 2x^5 - x$;
2) $y = x^7 - 4\sqrt{x}$;
3) $y = \sin x + 2\cos x$;
4) $y = x - \dfrac{5}{x}$;
5) $y = 12 - \operatorname{ctg} x$;
6) $y = 0{,}4x^{-5} + \sqrt{3}$.

39.3. Найдите производную функции:

1) $y = (x + 2)(x^2 - 4x + 5)$;
2) $y = (3x + 5)(2x^2 - 1)$;
3) $y = x^2 \sin x$;
4) $y = x \operatorname{ctg} x$;
5) $y = (2x + 1)\sqrt{x}$;
6) $y = \sqrt{x} \cos x$.

39.4. Найдите производную функции:

1) $y = (x^3 - 2)(x^2 + 1)$;
2) $y = (x + 5)\sqrt{x}$;
3) $y = x^4 \cos x$;
4) $y = x \operatorname{tg} x$.

39.5. Найдите производную функции:

1) $y = \dfrac{5}{3x - 2}$;
2) $y = \dfrac{x^3}{\cos x}$;
3) $y = \dfrac{3 - x^2}{4 + 2x}$;
4) $y = \dfrac{x^2 - 5x}{x - 7}$.

39.6. Найдите производную функции:

1) $y = \dfrac{3x + 5}{x - 8}$;
2) $y = \dfrac{2x^2}{1 - 6x}$;
3) $y = \dfrac{\sin x}{x}$;
4) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

39.7. Чему равно значение производной функции f в точке x_0, если:

1) $f(x) = \dfrac{2 - 3x}{x + 2}$, $x_0 = -3$;
2) $f(x) = (1 + 3x)\sqrt{x}$, $x_0 = 9$;
3) $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - 10\sqrt[5]{x}$, $x_0 = 1$;
4) $f(x) = x\sin x$, $x_0 = 0$?

39.8. Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = \sqrt{x} - 16x$, $x_0 = \dfrac{1}{4}$;
2) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 - x}$, $x_0 = 0$;
3) $f(x) = x^{-2} - 4x^{-3}$, $x_0 = 2$;
4) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 1}{x + 1}$, $x_0 = 1$.

39.9. Задайте с помощью формул сложные функции $y = f(g(x))$ и $y = g(f(x))$, если:

1) $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2 - 1$;

2) $f(x) = x^4$, $g(x) = 5x + 2$;

3) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$;

4) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

39.10. Задайте с помощью формул сложные функции $y = f(g(x))$ и $y = g(f(x))$, если:

1) $f(x) = x^2$, $g(x) = \operatorname{tg} x$;

2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$.

39.11. Могут ли две разные функции иметь равные производные? Ответ проиллюстрируйте примерами.

39.12. Найдите производную функции:

1) $y = (2x + 3)^5$;

2) $y = \left(\dfrac{1}{3}x - 6\right)^{18}$;

3) $y = \cos 2x$;

4) $y = \sin^2 x$;

5) $y = 3\operatorname{ctg}\dfrac{x}{5}$;

6) $y = \sqrt{2x+1}$;

7) $y = \sqrt[3]{1-x}$;

8) $y = \sqrt{x^2+1}$;

9) $y = \dfrac{1}{4x+5}$;

10) $y = \left(\dfrac{x^2}{2} + 4x - 1\right)^{-6}$;

11) $y = \sqrt{\sin x}$;

12) $y = \sin\sqrt{x}$.

39.13. Найдите производную функции:

1) $y = (3x - 5)^6$;

2) $y = \sin\dfrac{x}{3}$;

3) $y = \cos^2 x$;

4) $y = 2\operatorname{tg} 4x$;

5) $y = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$;

6) $y = \sqrt{1-x^2}$;

7) $y = \sqrt[4]{6x+8}$;

8) $y = (9x - 2)^{-3}$;

9) $y = \sqrt{\cos x}$.

39.14. Найдите производную функции:

1) $y = x\sqrt{2x+1}$;

2) $y = \sin x \cos 2x$;

3) $y = \operatorname{tg} x \sin(2x + 5)$;

4) $y = \dfrac{\cos 3x}{x-1}$;

5) $y = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$;

6) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

39.15. Найдите производную функции:

1) $y = x\sqrt{x+3}$;

2) $y = \sin 2x \cos x$;

3) $y = (x + 2)^5(x - 3)^4$.

39.16. Найдите производную функции:

1) $y = \cos^3 2x$;

2) $y = \sqrt{\sin\left(\dfrac{x}{5} - \dfrac{\pi}{4}\right)}$;

3) $y = \left(\sin\dfrac{x}{3} - 5\right)^6$.

39.17. Вычислите:

1) $f'(0)$, если $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{2x-1}}$;

2) $f'(0)$, если $f(x) = (\cos 3x + 6)^3$.

39.18. Ученик предлагает находить производную функции $y = \sin 2x$ так:

1) делает замену $2x = t$ и получает функцию $y = \sin t$;

2) далее пишет: $y' = (\sin t)' = \cos t$;

3) потом подставляет значение $2x = t$ и делает вывод, что $(\sin 2x)' = \cos 2x$.

В чём ошибка этого ученика?

39.19. Тело движется по координатной прямой по закону $s(t) = \sqrt{4t^2 - 6t + 11}$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите скорость движения тела в момент времени $t_0 = 5$ с.

39.20. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t) = (t+2)^2(t+5)$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите её скорость движения в момент времени $t_0 = 3$ с.

39.21. Материальная точка массой 4 кг движется по координатной прямой по закону $s(t) = t^2 + 4$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите импульс $p(t) = mv(t)$ материальной точки в момент времени $t_0 = 2$ с.

39.22. Тело массой 2 кг движется по координатной прямой по закону $s(t) = 3t^2 - 4t + 2$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите кинетическую энергию $E(t) = \frac{mv^2(t)}{2}$ тела в момент времени $t_0 = 4$ с.

39.23. Тело движется по координатной прямой по закону $s(t) = 2t^2 - 8t + 15$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Определите координату тела в момент времени, когда его кинетическая энергия равна нулю.

◆ ◆ ◆

39.24. В точках $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$ найдите производную функции:

1) $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$; 2) $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$.

39.25. В точках $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$ найдите производную функции:

1) $f(x) = x^2 - 6|x| + 5$; 2) $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$.

39.26. Докажите, что производная периодической функции является периодической функцией. Приведите примеры.

39.27. Докажите, что производная чётной функции является нечётной функцией. Приведите примеры.

39.28. Докажите, что производная нечётной функции является чётной функцией. Приведите примеры.

39.29. Функции f и g определены на $\boldsymbol{R}$. Что можно утверждать о дифференцируемости функции $y = f(x) + g(x)$ в точке x_0, если:

1) f дифференцируема в точке x_0, а g — нет;

2) f и g не дифференцируемы в точке x_0?

39.30. Функции f и g определены на $\boldsymbol{R}$. Что можно утверждать о дифференцируемости функции $y = f(x)g(x)$ в точке x_0, если:

1) f дифференцируема в точке x_0, а g — нет;

2) f и g не дифференцируемы в точке x_0?

39.31. Вычислите сумму $S = 100 \cdot 3^{99} + 98 \cdot 3^{97} + 96 \cdot 3^{95} + \ldots + 2 \cdot 3$.

39.32. Вычислите сумму $S = 4^{30} - 2 \cdot 4^{29} + 3 \cdot 4^{28} - \ldots + 29 \cdot 4^2 - 30 \cdot 4$.

§ 40 Уравнение касательной

Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Тогда к графику функции f в точке с абсциссой x_0 можно провести невертикальную касательную (рис. 40.1).

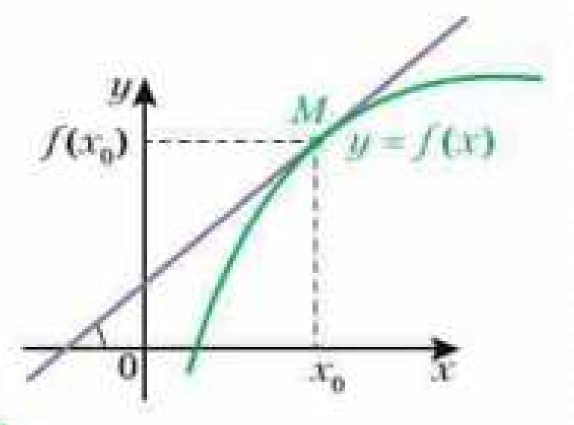


Рис. 40.1

Из курса геометрии 9 класса вы знаете, что уравнение невертикальной прямой имеет вид $y = kx + b$, где k — угловой коэффициент этой прямой.

Исходя из геометрического смысла производной, получаем $k = f'(x_0)$.

Тогда уравнение касательной можно записать так:

$$y = f'(x_0) \cdot x + b. \quad (1)$$

Эта прямая проходит через точку $M(x_0; f(x_0))$. Следовательно, координаты этой точки удовлетворяют уравнению (1). Имеем:

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b.$$

Отсюда $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$.

Тогда уравнение (1) можно переписать так:

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Итак, если функция f дифференцируема в точке x_0, то **уравнение касательной, проведённой к графику функции f в точке с абсциссой x_0**, имеет вид:

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

Пример 1. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.

Решение. Имеем: $f(x_0) = f(-2) = 2 - 4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-2)^2 = -2$; $f'(x) = -4 - 6x$; $f'(x_0) = f'(-2) = -4 - 6 \cdot (-2) = 8$. Подставив найденные числовые значения в уравнение касательной, получаем: $y = 8(x + 2) - 2$, то есть $y = 8x + 14$.

Ответ: $y = 8x + 14$. ■

Пример 2. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \dfrac{x+4}{x-4}$, если эта касательная параллельна прямой $y = -2x + 4$.

Решение. Имеем:

$$f'(x) = \frac{(x+4)'(x-4) - (x-4)'(x+4)}{(x-4)^2} = \frac{(x-4)-(x+4)}{(x-4)^2} = -\frac{8}{(x-4)^2}.$$

Если касательная параллельна прямой $y = -2x + 4$, то её угловой коэффициент k равен -2.

Так как $f'(x_0) = k$, где x_0 — абсцисса точки касания искомой прямой и графика функции f, то $f'(x_0) = -2$, то есть $-\dfrac{8}{(x_0-4)^2} = -2$. Отсюда

$$(x_0 - 4)^2 = 4; \quad \left[\begin{array}{l} x_0 - 4 = 2, \\ x_0 - 4 = -2; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x_0 = 6, \\ x_0 = 2. \end{array}\right.$$

Следовательно, на графике функции $f(x) = \dfrac{x+4}{x-4}$ существуют две точки, касательные в которых параллельны данной прямой.

При $x_0 = 6$ имеем: $f(x_0) = 5$. Тогда уравнение касательной имеет вид $y = -2(x - 6) + 5$; $y = -2x + 17$.

При $x_0 = 2$ получаем: $f(x_0) = -3$. Тогда уравнение касательной имеет вид $y = -2(x - 2) - 3$; $y = -2x + 1$.

Ответ: $y = -2x + 17$; $y = -2x + 1$. ■

Пример 3. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = -x^2 - 5x - 6$, проходящей через точку $M(-1; -1)$.

Решение. Заметим, что $f(-1) \neq -1$. Из этого следует, что точка $M(-1; -1)$ не принадлежит графику функции f.

Пусть $A(x_0; f(x_0))$ — точка касания искомой прямой к графику функции f. Так как $f(x_0) = -x_0^2 - 5x_0 - 6$ и $f'(x_0) = -2x_0 - 5$, то уравнение касательной имеет вид

$$y = (-2x_0 - 5)(x - x_0) + (-x_0^2 - 5x_0 - 6).$$

Учитывая, что координаты точки $M(-1; -1)$ удовлетворяют полученному уравнению, имеем:

$$-1 = (-2x_0 - 5)(-1 - x_0) + (-x_0^2 - 5x_0 - 6).$$

Отсюда, раскрыв скобки и решив квадратное уравнение, получим: $x_0 = 0$ или $x_0 = -2$. Таким образом, через точку M проходят две касательные к графику функции f: $y = -5x - 6$ и $y = -x - 2$.

Ответ: $y = -5x - 6$; $y = -x - 2$. ■

? Запишите общий вид уравнения касательной к графику функции в данной точке.

Упражнения

◆

40.1. Составьте уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x) = x^2 + 3x$, $x_0 = -1$;
2) $f(x) = 4\sqrt{x} - 3$, $x_0 = 9$;
3) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$;
4) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;
5) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $x_0 = -2$;
6) $f(x) = \sqrt{2x+5}$, $x_0 = 2$.

40.2. Составьте уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x) = 2x^3 - 3x$, $x_0 = 1$;
2) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;
3) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 3x}$, $x_0 = -1$;
4) $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 2}$, $x_0 = 3$.

◆◆

40.3. Запишите уравнение касательной к графику данной функции в точке его пересечения с осью ординат:

1) $f(x) = x^2 - 3x - 3$;
2) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$.

40.4. Запишите уравнение касательной к графику данной функции в точке его пересечения с осью ординат:

1) $f(x) = 2x^3 - 5x + 2$;
2) $f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

40.5. Составьте уравнение касательной к графику функции f в точке его пересечения с осью абсцисс:

1) $f(x) = 8x^3 - 1$;
2) $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

40.6. Составьте уравнение касательной к графику функции f в точке его пересечения с осью абсцисс:

1) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$;
2) $f(x) = 3x - x^2$.

40.7. Найдите координаты точки параболы $y = 2x^2 - x + 1$, в которой касательная к ней параллельна прямой $y = 7x - 8$.

40.8. В каких точках касательные к графику функции $y = \frac{1}{x}$ параллельны прямой $y = -x$?

40.9. Найдите такую точку графика функции f, что проведённая в этой точке касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол α, если:

1) $f(x) = x^2 - 7x + 3$, $\alpha = 45°$;

2) $f(x) = -3x^2 + 2\sqrt{3}x - 2$, $\alpha = 60°$;

3) $f(x) = \sqrt{3x + 2}$, $\alpha = 45°$;

4) $f(x) = \frac{x+7}{x-2}$, $\alpha = 135°$.

40.10. Найдите такую точку графика функции f, что проведённая в этой точке касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол α, если:

1) $f(x) = \sqrt{3}x - \frac{x^3}{3}$, $\alpha = 60°$;

2) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$, $\alpha = 45°$.

40.11. Докажите, что любая касательная к графику функции f образует тупой угол с положительным направлением оси абсцисс:

1) $f(x) = 6 - x - x^3$;

2) $f(x) = \frac{5-x}{x-3}$.

40.12. Докажите, что любая касательная к графику функции f образует острый угол с положительным направлением оси абсцисс:

1) $f(x) = x^5 + 2x - 8$;

2) $f(x) = \frac{4}{1-x}$.

40.13. Найдите уравнения горизонтальных касательных к графику функции:

1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$;

2) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 1$.

40.14. Найдите уравнения горизонтальных касательных к графику функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$.

◆◆◆

40.15. Составьте уравнение касательной к графику функции:

1) $f(x) = x - \frac{1}{x^2}$, если эта касательная параллельна прямой $y = 3x$;

2) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 10x - 1$, если эта касательная параллельна прямой $y = 2x + 1$.

40.16. Составьте уравнение касательной к графику функции:

1) $f(x) = 3x^2 + 5x + 3$, если эта касательная параллельна прямой $y = -7x + 3$;

2) $f(x) = \sqrt{x}$, если эта касательная параллельна прямой $y = x$.

40.17. Определите, является ли прямая $y = 12x - 10$ касательной к графику функции $f(x) = 4x^3$. В случае утвердительного ответа укажите абсциссу точки касания.

40.18. Определите, является ли прямая $y = x$ касательной к графику функции $y = \sin x$. В случае утвердительного ответа укажите абсциссу точки касания.

40.19. Вычислите площадь треугольника, образованного осями координат и касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 4$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.

40.20. Вычислите площадь треугольника, образованного осями координат и касательной к графику функции $f(x) = x^3 + x^2 - 6x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

40.21. На графике функции $f(x) = -\sqrt{2x + 1}$ найдите точку, касательная в которой перпендикулярна прямой $y - 2x + 1 = 0$.

40.22. Существуют ли касательные к графику функции $f(x) = x^3 + 2x - 1$, которые перпендикулярны прямой $y = -x$?

40.23. При каких значениях b и c парабола $y = x^2 + bx + c$ касается прямой $y = 4x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$?

40.24. При каких значениях a и b прямая $y = 7x - 2$ касается параболы $y = ax^2 + bx + 1$ в точке $A(1;\ 5)$?

40.25. Запишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2x^2 + 2$, если эта касательная проходит через точку $M(0;\ 1)$.

40.26. В какой точке графика функции $f(x) = \frac{4x - 1}{x}$ надо провести касательную, чтобы эта касательная проходила через начало координат?

40.27. Две перпендикулярные касательные к графику функции $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x^2$ пересекаются в точке A, которая принадлежит оси ординат. Найдите координаты точки A.

40.28. Две перпендикулярные касательные к графику функции $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}$ пересекаются в точке A, которая принадлежит оси ординат. Найдите координаты точки A.

40.29. При каких значениях a прямая $y = ax + 1$ является касательной к графику функции $f(x) = \sqrt{4x + 1}$?

40.30. При каких значениях a прямая $y = 2x + a$ является касательной к графику функции $f(x) = \sqrt{4x - 1}$?

40.31. Найдите уравнение общей касательной к графикам функций $f(x) = x^2 - 2x + 5$ и $g(x) = x^2 + 2x - 11$.

40.32. Найдите уравнение общей касательной к графикам функций $f(x) = x^2 + 4x + 8$ и $g(x) = x^2 + 8x + 4$.

§ 41 Признаки возрастания и убывания функции

Рассмотрим функцию f и такую точку x_0 интервала $(a; b)$, что $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_0)$ (рис. 41.1, *а*). На рисунке 41.1, *б* изображён график функции g такой, что $\min\limits_{[a;b]} g(x) = g(x_0)$.

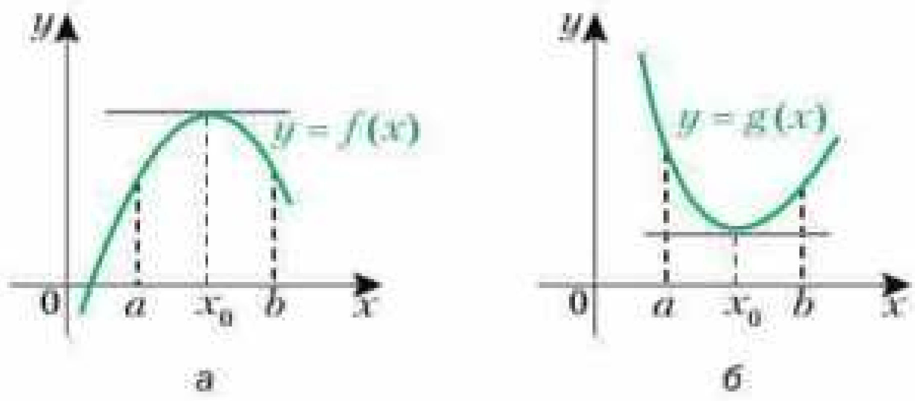


Рис. 41.1

Пусть функции f и g дифференцируемы в точке x_0. Тогда к графикам этих функций в точке с абсциссой x_0 можно провести касательные. Из наглядных соображений очевидно, что эти касательные будут горизонтальными прямыми. Поскольку угловой коэффициент горизонтальной прямой равен нулю, то $f'(x_0) = 0$ и $g'(x_0) = 0$.

Этот вывод можно проиллюстрировать с помощью механической интерпретации.

Если материальная точка движется по координатной прямой по закону $y = s(t)$, $t \in [a; b]$, и функция $y = s(t)$ принимает в точке $t_0 \in (a; b)$ наибольшее (наименьшее) значение, то это означает, что в момент времени t_0 материальная точка изменяет направление движения на противоположное. Понятно, что в этот момент времени скорость материальной точки равна нулю, то есть $v(t_0) = s'(t_0) = 0$.

Полученные выводы подтверждает следующая теорема.

Теорема 41.1

(теорема Ферма)

Пусть функция f, определённая на промежутке $[a; b]$, в точке $x_0 \in (a; b)$ принимает своё наименьшее (наибольшее) значение. Если функция f является дифференцируемой в точке x_0, то $f'(x_0) = 0$.

На рисунке 41.2 изображён график функции f, дифференцируемой на промежутке $[a; b]$, которая в точках a и b принимает одинаковые значения.

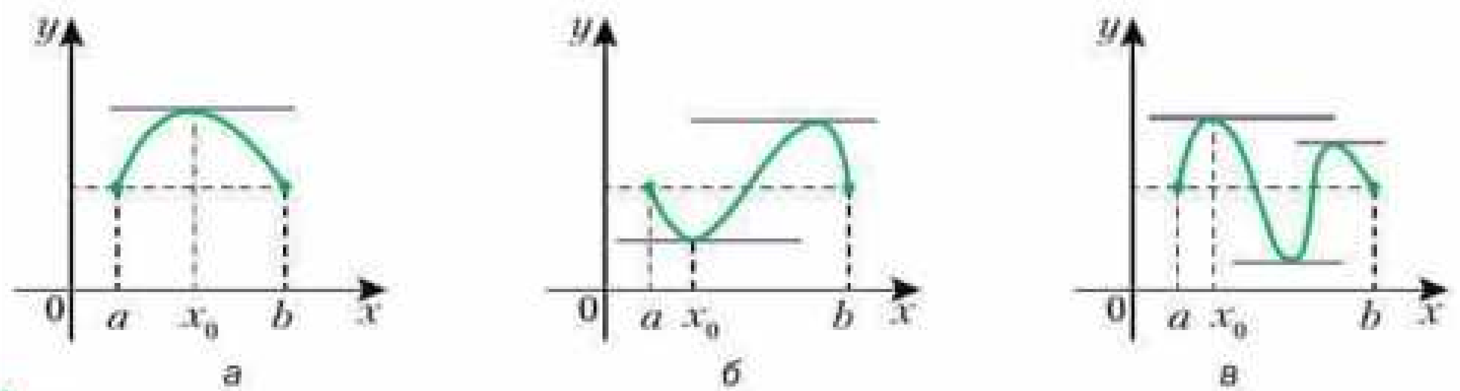


Рис. 41.2

Из рисунка видно: существует по крайней мере одна такая точка $x_0 \in (a; b)$, что касательная к графику в точке с абсциссой x_0 является горизонтальной прямой, то есть $f'(x_0) = 0$.

Этот вывод можно проиллюстрировать с помощью механической интерпретации.

Если материальная точка движется по координатной прямой по закону $y = s(t)$, $t \in [a; b]$, то равенство $s(a) = s(b)$ означает, что в момент времени $t = b$ материальная точка вернулась в начальное положение. Следовательно, в некоторый момент времени $t_0 \in (a; b)$ она изменила направление движения на противоположное, то есть $v(t_0) = s'(t_0) = 0$.

Полученные выводы подтверждает следующая теорема.

Теорема 41.2

(теорема Ролля)

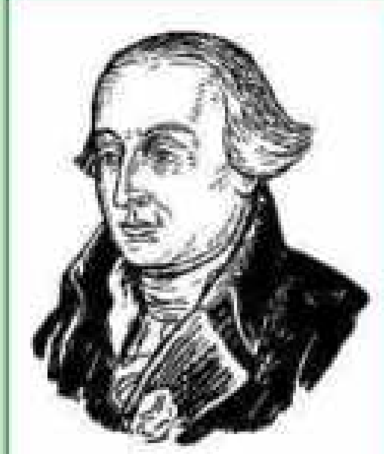
Если функция f дифференцируема на отрезке $[a; b]$, причём $f(a) = f(b)$, то существует такая точка $x_0 \in (a; b)$, что $f'(x_0) = 0$.

Мишель Ролль (1652—1719)

Французский математик, член Парижской академии наук. Основные его труды посвящены методам численного решения уравнений. Большинство научных достижений М. Ролля не были замечены при его жизни; их оценили значительно позже.

Жозеф Луи Лагранж (1736—1813)

Французский математик, механик и астроном, президент Берлинской академии наук, член Парижской академии наук. Основные труды — в области математического анализа, вариационного исчисления, алгебры, теории чисел, дифференциальных уравнений, механики. Кавалер ордена Почётного легиона.



На рисунке 41.3 изображён график функции, дифференцируемой на отрезке $[a; b]$.

Проведём прямую AB. Из треугольника AMB можно найти угловой коэффициент этой прямой: $\operatorname{tg}\angle BAM = \frac{BM}{AM} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Из рисунка видно, что на дуге AB существует такая точка C, что касательная к графику в этой точке параллельна прямой AB.

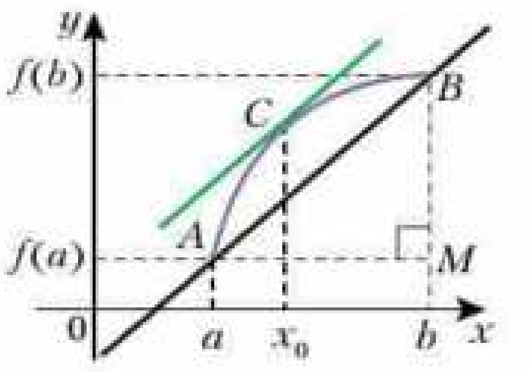


Рис. 41.3

Угловой коэффициент $f'(x_0)$ этой касательной равен угловому коэффициенту прямой AB, то есть существует точка $x_0 \in (a; b)$ такая, что

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Этот вывод иллюстрирует также механическая интерпретация.

Если материальная точка движется по координатной прямой по закону $y = s(t)$, $t \in [a; b]$, то средняя скорость равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}.$$

Понятно, что во время движения существует такой момент $t_0 \in (a; b)$, когда мгновенная скорость равна средней, то есть

$$v(t_0) = s'(t_0) = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}.$$

Полученные выводы подтверждает следующая теорема.

Теорема 41.3

(теорема Лагранжа)

Если функция f дифференцируема на отрезке $[a;\ b]$, то существует такая точка $x_0 \in (a;\ b)$, что

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Вы знаете, что если функция является константой, то её производная равна нулю. Возникает вопрос: если функция f такова, что для всех x из промежутка I выполняется равенство $f'(x) = 0$, то является ли функция f константой на промежутке I?

Обратимся к механической интерпретации.

Пусть $y = s(t)$ — закон движения материальной точки по координатной прямой. Если в любой момент времени t от t_1 до t_2 выполняется равенство $s'(t) = 0$, то на протяжении рассматриваемого промежутка времени мгновенная скорость равна нулю, то есть точка не движется и её координата не изменяется. Это означает, что на рассматриваемом промежутке функция $y = s(t)$ является константой.

Эти соображения подсказывают, что справедлива следующая теорема.

Теорема 41.4

(признак постоянства функции)

Если для всех x из промежутка I выполняется равенство $f'(x) = 0$, то функция f является константой на этом промежутке.

Доказательство

Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента функции f, взятые из промежутка I, причём $x_1 < x_2$.

Поскольку $[x_1;\ x_2] \subset I$ и функция f дифференцируема на I, то для отрезка $[x_1;\ x_2]$ выполняются все условия теоремы Лагранжа. Тогда существует точка $x_0 \in (x_1;\ x_2)$ такая, что

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Поскольку $x_0 \in I$, то $f'(x_0) = 0$. Следовательно, $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$. Отсюда $f(x_2) = f(x_1)$. Учитывая, что числа x_1 и x_2 выбраны произвольным образом, можем сделать вывод: функция f является константой на промежутке I. ■

На рисунке 41.4 изображён график некоторой функции f, которая является дифференцируемой на промежутке $[a; b]$. Этот график имеет такое свойство: любая касательная к графику образует острый угол с положительным направлением оси абсцисс.

Поскольку тангенс острого угла — положительное число, то угловой коэффициент любой касательной также является положительным. Тогда, исходя из геометрического смысла производной, можно сделать такой вывод: для любого $x \in [a; b]$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$.

Из рисунка 41.4 видно, что функция f возрастает на рассматриваемом промежутке.

На рисунке 41.5 изображён график некоторой функции f, дифференцируемой на промежутке $[a; b]$. Любая касательная к графику образует тупой угол с положительным направлением оси абсцисс.

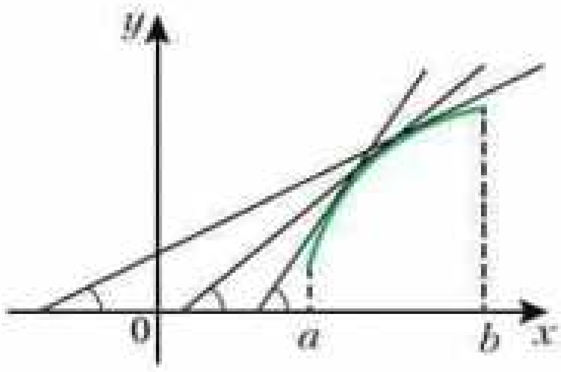


Рис. 41.4

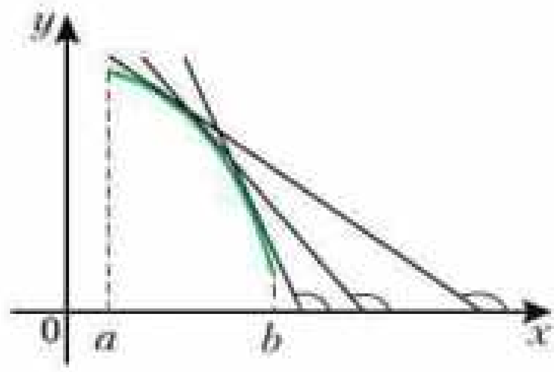


Рис. 41.5

Поскольку тангенс тупого угла — отрицательное число, то угловой коэффициент любой касательной также является отрицательным. Тогда для любого $x \in [a; b]$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$.

Из рисунка 41.5 видно, что функция f убывает на рассматриваемом промежутке.

Эти примеры показывают, что знак производной функции на некотором промежутке I связан с тем, является ли эта функция возрастающей (убывающей) на промежутке I.

Связь между знаком производной и возрастанием (убыванием) функции можно увидеть и с помощью механической интерпретации. Если скорость, то есть производная функции $y = s(t)$, положительна, то точка на координатной прямой движется вправо (рис. 41.6). Это означает, что из неравенства $t_1 < t_2$ следует неравенство

Рис. 41.6

$s(t_1) < s(t_2)$, то есть функция $y = s(t)$ является возрастающей. Аналогично, если скорость отрицательна, то точка движется влево, то есть функция $y = s(t)$ является убывающей.

Связь между знаком производной и возрастанием (убыванием) функции устанавливают следующие две теоремы.

Теорема 41.5

(признак возрастания функции)

Если для всех x из промежутка I выполняется неравенство $f'(x) > 0$, то функция f возрастает на этом промежутке.

Теорема 41.6

(признак убывания функции)

Если для всех x из промежутка I выполняется неравенство $f'(x) < 0$, то функция f убывает на этом промежутке.

Докажем теорему 41.5 (теорему 41.6 можно доказать аналогично).

Доказательство

Пусть x_1 и x_2 — произвольные значения аргумента функции f, взятые из промежутка I, причём $x_2 > x_1$.

Поскольку $[x_1; x_2] \subset I$ и функция f дифференцируема на I, то для отрезка $[x_1; x_2]$ выполняются все условия теоремы Лагранжа. Тогда существует точка $x_0 \in (x_1; x_2)$ такая, что

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Поскольку $x_0 \in I$, то $f'(x_0) > 0$. Следовательно, $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$. Тогда из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$, то есть функция f возрастает на I. ■

Заметим, что имеет место и такое утверждение: если дифференцируемая на промежутке I функция f возрастает (убывает), то для всех x из этого промежутка выполняется неравенство $f'(x) \geqslant 0$ $(f'(x) \leqslant 0)$.

Если функция f определена на промежутке $[a; b)$ и возрастает на интервале $(a; b)$, то это не означает, что она возрастает на промежутке $[a; b)$ (рис. 41.7). Исследовать воз-

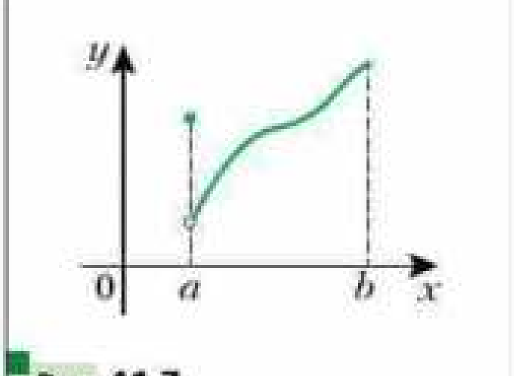


Рис. 41.7

растание и убывание функции на различных промежутках помогает следующая ключевая задача.

Задача. Пусть для произвольного $x \in (a;\ b)$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$ и функция f имеет производную в точке a. Докажите, что функция f возрастает на промежутке $[a;\ b)$.

Решение. Из теоремы 41.2 следует только то, что функция f возрастает на интервале $(a;\ b)$. Чтобы доказать, что функция f возрастает на промежутке $[a;\ b)$, нужно дополнительное исследование.

Пусть x — произвольная точка промежутка $(a;\ b)$. Докажем, что $f(x) > f(a)$. Из теоремы Лагранжа для функции f на отрезке $[a;\ x]$ следует существование такой точки $x_0 \in (a;\ x)$, что $f'(x_0) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Поскольку $x_0 \in (a;\ b)$, то $f'(x_0) > 0$. Отсюда $f(x) > f(a)$.

Таким образом, доказано, что функция f возрастает на промежутке $[a;\ b)$. ■

Замечание 1. На самом деле сформулированное в данном примере условие можно ослабить, заменив требование дифференцируемости функции f в точке $x = a$ на её непрерывность в этой точке. То есть имеет место такое утверждение: если для всех $x \in (a;\ b)$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$ и функция f непрерывна в точке $x = a$, то функция f возрастает на промежутке $[a;\ b)$.

Замечание 2. Используя соответствующие утверждения, можно обосновать возрастание (убывание) функции f на промежутках другого вида, например $[a;\ +\infty)$, $(-\infty;\ b]$, $[a;\ b]$. Например, если для всех $x \in (a;\ +\infty)$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$ и функция f непрерывна в точке $x = a$, то функция f возрастает на промежутке $[a;\ +\infty)$.

Пример 1. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = -\dfrac{3}{4}x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 5$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 1}{x - 1}$; 3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$.

Решение.

1) Имеем: $f'(x) = -3x^3 + 12x^2 - 12x = -3x(x^2 - 4x + 4) = -3x(x - 2)^2$.

Исследовав знак производной (рис. 41.8), приходим к выводу, что функция возрастает на промежутке $(-\infty;\ 0]$ и убывает на промежутке $[0;\ +\infty)$.

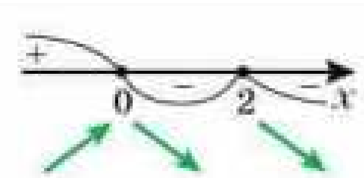


Рис. 41.8

2) Имеем: $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Найдя производную функции f, получаем: $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$.

Исследуем знак функции $y = f'(x)$ (рис. 41.9). Следовательно, данная функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; -1]$ и $[3; +\infty)$ и убывает на каждом из промежутков $[-1; 1)$ и $(1; 3]$.

3) Имеем: $D(f) = (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$. Найдём производную функции f: $f'(x) = \left(\sqrt{x^2 - 3x}\right)' = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x}}$. Заметим, что в точках $x = 0$ и $x = 3$ функция f не является дифференцируемой, однако является непрерывной.

Неравенство $\frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x}} > 0$ равносильно системе $\begin{cases} 2x - 3 > 0, \\ x^2 - 3x > 0. \end{cases}$ Решив её, получаем, что множеством решений рассматриваемого неравенства является промежуток $(3; +\infty)$.

Далее легко установить, что множеством решений неравенства $\frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x}} < 0$ является промежуток $(-\infty; 0)$.

Следовательно, если $x < 0$, то $f'(x) < 0$; если $x > 3$, то $f'(x) > 0$ (рис. 41.10).

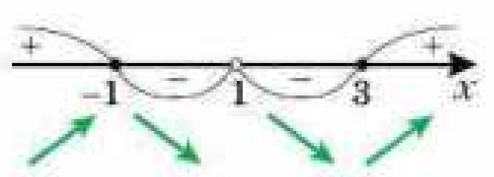


Рис. 41.9

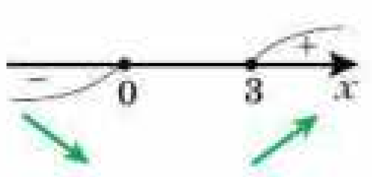


Рис. 41.10

Поэтому функция f возрастает на промежутке $[3; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 0]$. ■

Пример 2. Решите уравнение $x^3 + x - \sqrt{1 - 3x} + 4 = 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 + x - \sqrt{1 - 3x} + 4$, $D(f) = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$. Для всех $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ имеем: $f'(x) = 3x^2 + 1 + \frac{3}{2\sqrt{1 - 3x}}$. Очевидно, что $f'(x) > 0$ при $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$, то есть функция f возрастает на промежутке $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$. Поскольку функция f непрерывна в точке $x = \frac{1}{3}$, то эта функция возрастает на $D(f) = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$. Тогда функция f принимает каждое своё значение только один раз, а следовательно, данное уравнение не может иметь более одного корня.

Поскольку $f(-1) = 0$, то $x = -1$ является единственным корнем данного уравнения.

Ответ: -1. ■

1. Сформулируйте теоремы Ферма, Ролля и Лагранжа.
2. Сформулируйте признаки постоянства, возрастания, убывания функции.

Упражнения

41.1. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:
1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$;
2) $f(x) = -x^3 + 9x^2 + 21x$;
3) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$;
4) $f(x) = x^3 + 4x - 8$.

41.2. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:
1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$;
2) $f(x) = x^4 + 4x - 20$.

41.3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:
1) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 7$;
2) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$;
3) $f(x) = x + \frac{9}{x}$;
4) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{3 - x}$.

41.4. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:
1) $f(x) = 9 + 4x^3 - x^4$;
2) $f(x) = 3x + \frac{12}{x^2}$;
3) $f(x) = \frac{x^2 + 5x}{x - 4}$;
4) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$.

41.5. На рисунке 41.11 изображён график производной функции f, дифференцируемой на $\boldsymbol{R}$. Укажите промежутки убывания функции f.

41.6. На рисунке 41.12 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на $\boldsymbol{R}$. Среди приведённых на рисунке 41.13 графиков укажите тот, который может быть графиком функции $y = f'(x)$.

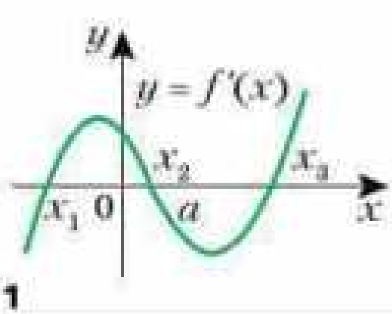


Рис. 41.11

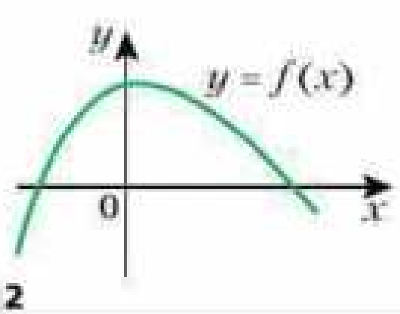


Рис. 41.12

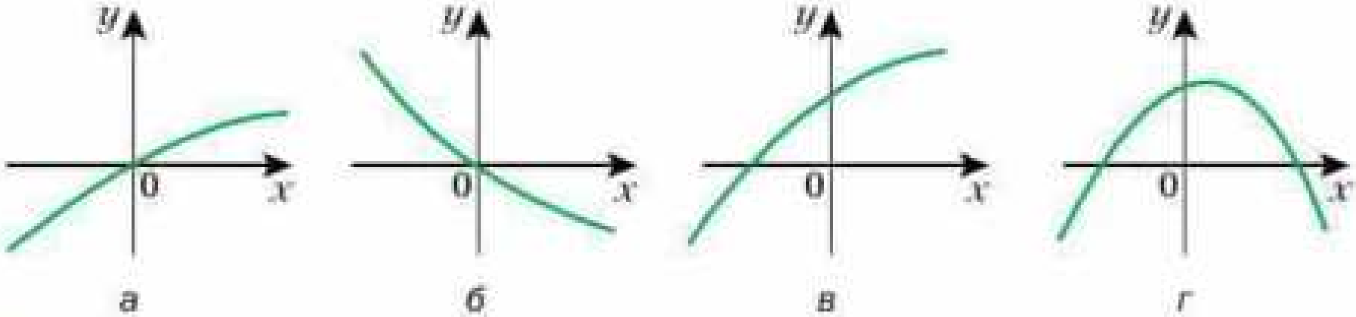


Рис. 41.13

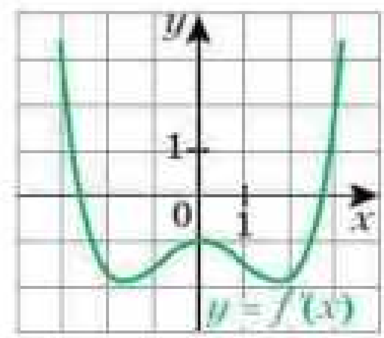


Рис. 41.14

41.7. На рисунке 41.14 изображён график производной функции f, дифференцируемой на $\boldsymbol{R}$. Укажите промежутки возрастания функции f.

41.8. На рисунке 41.15 изображены графики производных функций f, g и h, дифференцируемых на $\boldsymbol{R}$. Какая из функций f, g и h убывает на отрезке $[-1; 1]$?

41.9. На рисунке 41.16 изображены графики производных функций f, g и h. Какая из функций f, g и h убывает на $\boldsymbol{R}$?

41.10. Докажите, что функция является убывающей:

1) $f(x) = 6 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$; 2) $f(x) = \sin 2x - 3x$.

41.11. Докажите, что функция является возрастающей:

1) $f(x) = 10x^3 - 9x^2 + 24x - 90$; 2) $f(x) = \sin x + x^3 + x$.

41.12. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = x\sqrt{2} + \sin x$; 3) $y = \cos x + \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

2) $f(x) = x - \cos x$;

41.13. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = \sin x - x$; 2) $f(x) = \frac{x\sqrt{2}}{2} - \sin x$.

41.14. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x}$; 2) $f(x) = \sqrt{6x - x^2}$.

41.15. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

41.16. На рисунке 41.17 изображены графики функций f и g, определённых на $\boldsymbol{R}$. Используя эти графики, решите неравенство: 1) $f'(x) \leqslant 0$; 2) $g'(x) \geqslant 0$.

41.17. На рисунке 41.18 изображены графики функций f и g, определённых на $\boldsymbol{R}$. Используя эти графики, решите неравенство: 1) $f'(x) \geqslant 0$; 2) $g'(x) \leqslant 0$.

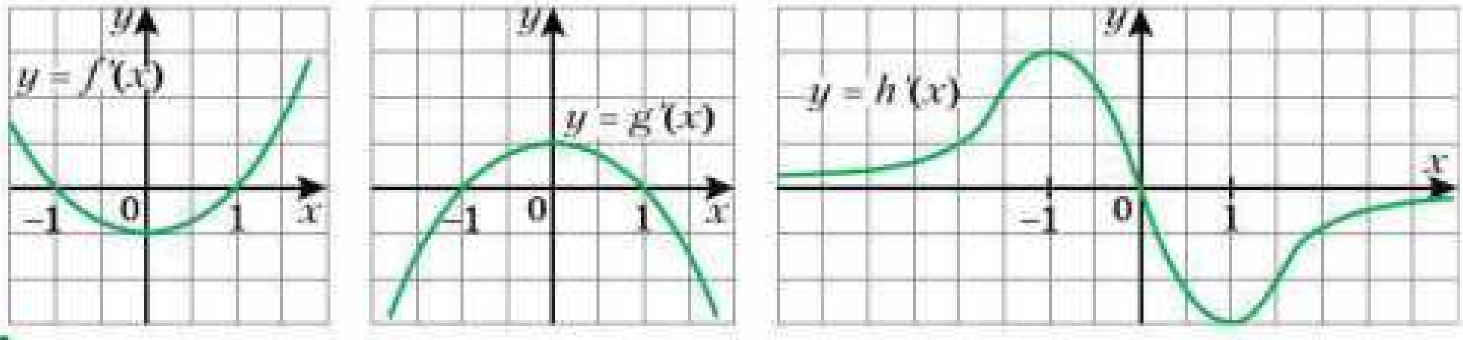


Рис. 41.15

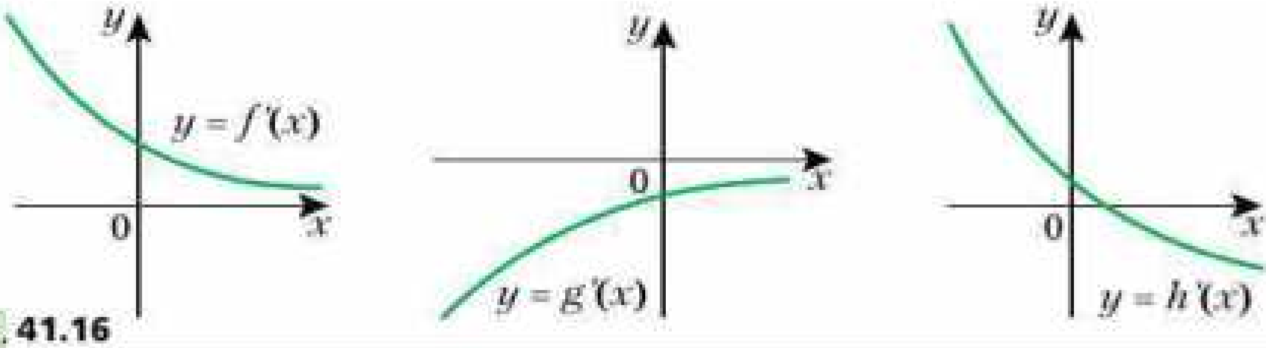


Рис. 41.16

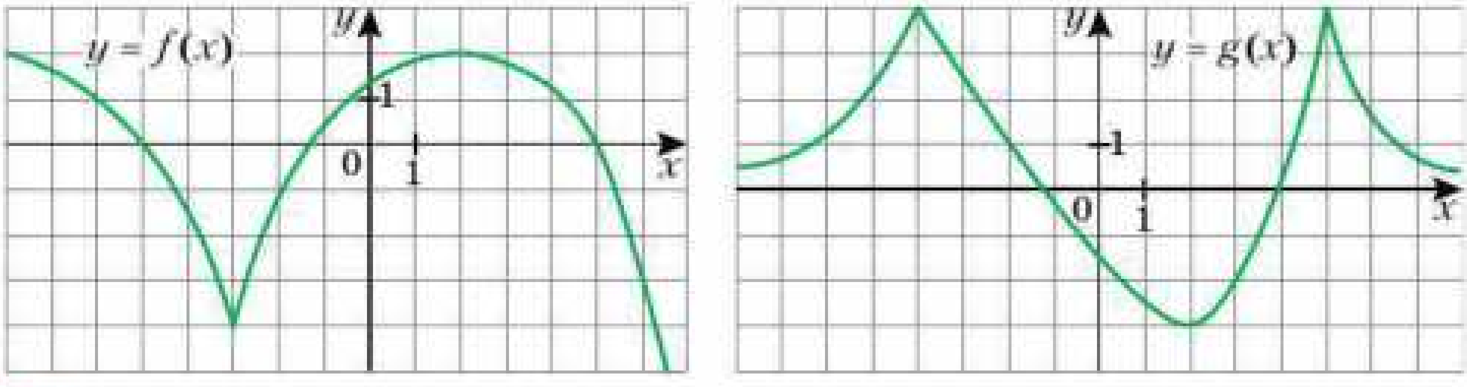


Рис. 41.17

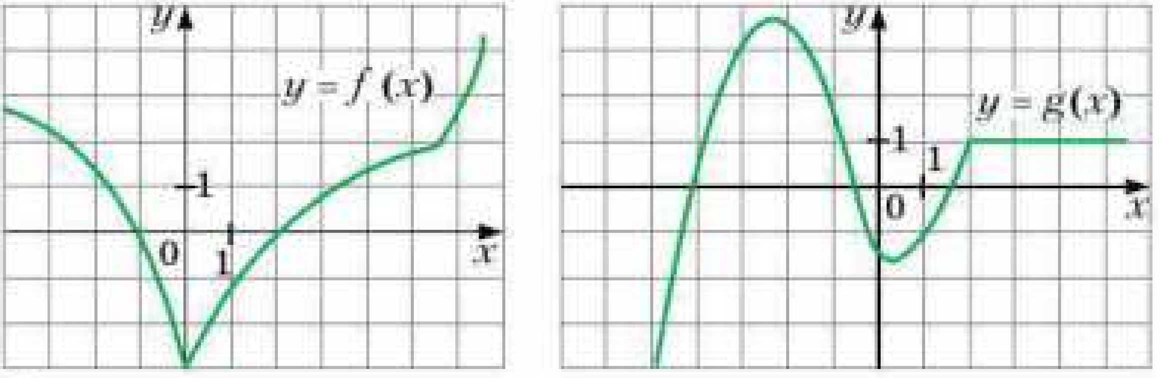


Рис. 41.18

41.18. При каких значениях параметра a является возрастающей функция:

1) $y = x^3 - ax$;

2) $y = 3\sin 4x + ax$;

3) $y = -2\sqrt{1-x} + ax$;

4) $y = \frac{x^3}{3} + 2(a+1)x^2 + 9x - 4$?

41.19. При каких значениях параметра a является убывающей функция:

1) $y = ax - x^5$;

2) $y = 2\cos 3x + ax$;

3) $y = -2\sqrt{x+3} + ax$;

4) $y = -\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} - 4x + 21$?

41.20. При каких значениях параметра c функция $f(x) = (c-12)x^3 + 3(c-12)x^2 + 6x + 7$ возрастает на $\boldsymbol{R}$?

41.21. При каких значениях параметра a функция $y = (a+3)x^3 + 3(a+3)x^2 - 5x + 12$ убывает на $\boldsymbol{R}$?

41.22. Докажите неравенство $\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$.

41.23. Докажите неравенство $x < \operatorname{tg} x$, где $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

41.24. Решите уравнение $3x^7 + x + 7 = \sqrt{1-8x}$.

41.25. Решите уравнение $x^5 + 4x + \cos x = 1$.

41.26. Решите уравнение $x^3 + 2x = \sin x$.

41.27. Решите неравенство $x^7 + 3x > 2x^4 + 2$.

41.28. Решите неравенство $x^5 + 4x < 2x^3 + 3$.

41.29. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = \sin x - \sin y, \\ 3x + 4y = 7. \end{cases}$

41.30. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x - 2y = \cos y - \cos x, \\ x + y = 8. \end{cases}$

41.31. Докажите, что уравнение $x^n + ax + b = 0$ имеет не больше трёх корней.

§ 42 Точки экстремума функции

Знакомясь с такими понятиями, как предел и непрерывность функции в точке, мы исследовали поведение функции вблизи этой точки, или, как принято говорить, в её **окрестности**.

Определение

Интервал $(a; b)$, содержащий точку x_0, называют окрестностью точки x_0.

Понятно, что любая точка имеет бесконечно много окрестностей. Например, промежуток $(-1; 3)$ — одна из окрестностей точки 2,5. Вместе с тем этот промежуток не является окрестностью точки 3.

На рисунке 42.1 изображены графики четырёх функций. Все эти функции имеют общую особенность: существует окрестность точки x_0 такая, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) \geqslant f(x)$.

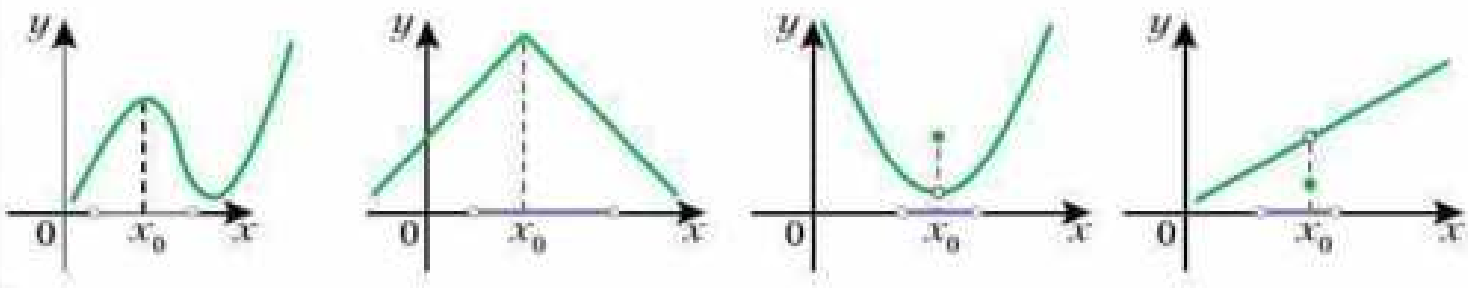


Рис. 42.1

Определение

Точку x_0 называют точкой максимума функции f, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) \geqslant f(x)$.

Например, точка $x_0 = \frac{\pi}{2}$ является точкой максимума функции $y = \sin x$ (рис. 42.2). Пишут: $x_{\max} = \frac{\pi}{2}$.

На рисунке 42.1 $x_{\max} = x_0$.

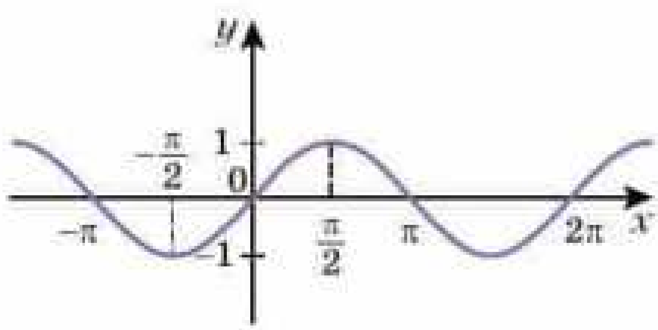


Рис. 42.2

Определение

Точку x_0 называют точкой минимума функции f, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) \leqslant f(x)$.

Например, точка $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ является точкой минимума функции $y = \sin x$ (рис. 42.2). Пишут: $x_{\min} = -\frac{\pi}{2}$.

На рисунке 42.3 изображены графики функций, для которых x_0 является точкой минимума, то есть $x_{\min} = x_0$.

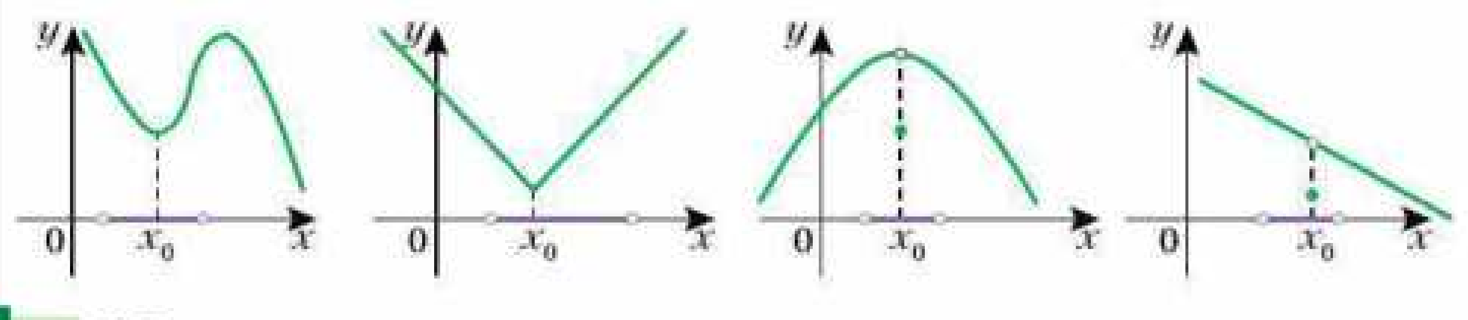


Рис. 42.3

Точки максимума и минимума имеют общее название: их называют **точками экстремума** функции (от латинского *extremum* — «крайний»).

На рисунке 42.4 точки x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6 являются точками экстремума.

Из определений 2 и 3 следует, что точки экстремума являются внутренними точками[1] области определения функции. Поэтому, например, точка $x_0 = 0$ не является точкой минимума функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 42.5),

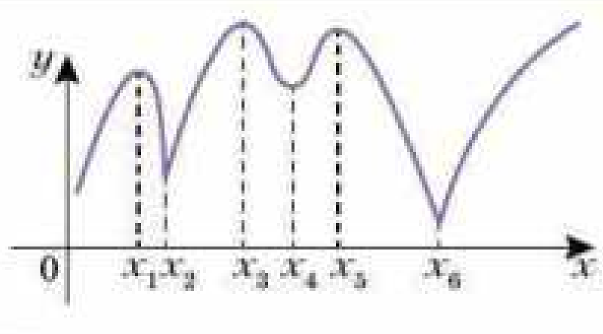


Рис. 42.4

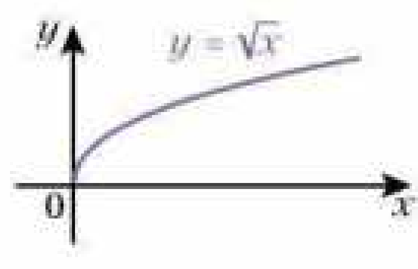


Рис. 42.5

а точка $x_0 = 1$ не является точкой максимума функции $y = \arcsin x$ (рис. 42.6). Вместе с тем наименьшее значение функции $y = \sqrt{x}$ на множестве $[0; +\infty)$ равно нулю, то есть $\min\limits_{[0;+\infty)} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$, а $\max\limits_{[-1;1]} \arcsin x = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

На рисунке 42.7 изображён график некоторой функции f, которая на промежутке $[x_1; x_2]$ является константой. Точка x_1 является точкой макси-

[1] Точку $x_0 \in M$ называют *внутренней* точкой множества M, если существует окрестность точки x_0, являющаяся подмножеством множества M.

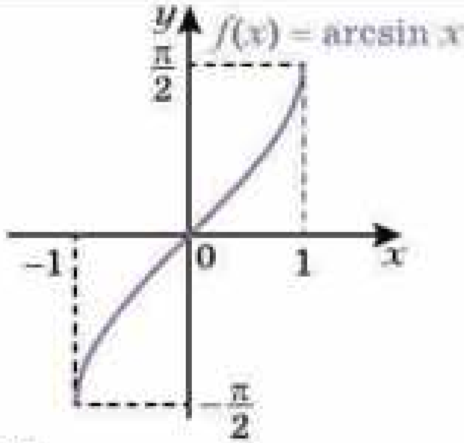


Рис. 42.6

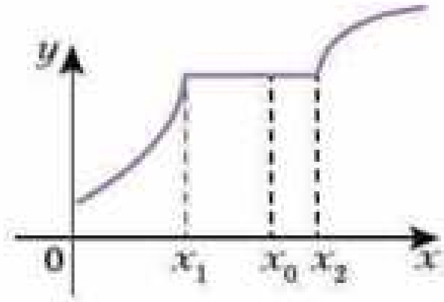


Рис. 42.7

мума, точка x_2 — минимума, а любая точка интервала $(x_1; x_2)$ является одновременно как точкой максимума, так и точкой минимума функции f.

Графики функций, изображённые на рисунках 42.8 и 42.9, показывают, что точки экстремума можно разделить на два вида: те, в которых производная равна нулю (на рисунке 42.8 касательная к графику в точке с абсциссой x_0 является горизонтальной прямой), и те, в которых функция недифференцируема (рис. 42.9).

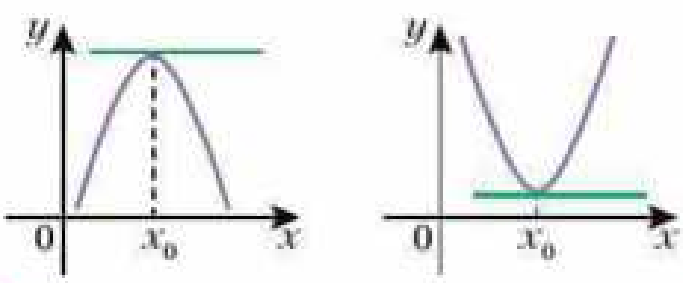


Рис. 42.8

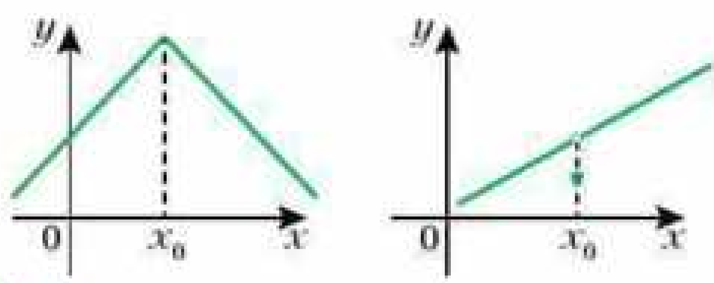


Рис. 42.9

На самом деле справедлива следующая теорема.

Теорема 42.1

Если x_0 — точка экстремума функции f, то либо $f'(x_0) = 0$, либо функция f не является дифференцируемой в точке x_0.

Возникает естественный вопрос: обязательно ли является точкой экстремума внутренняя точка области определения функции, в которой производная равна нулю или не существует?

Ответ на этот вопрос отрицательный.

Например, на рисунке 42.10 изображён график функции, недифференцируемой в точке x_0. Однако точка x_0 не является точкой экстремума.

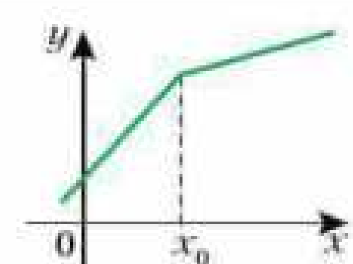


Рис. 42.10

Приведём ещё один пример. Для функции $f(x) = x^3$ имеем: $f'(x) = 3x^2$. Тогда $f'(0) = 0$. Однако точка $x_0 = 0$ не является точкой экстремума функции f (рис. 42.11).

Эти примеры показывают, что теорема 42.1 даёт необходимое, но не достаточное условие существования экстремума в данной точке.

Определение

Внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует, называют критическими точками функции.

Например, точка $x_0 = 0$ является критической точкой функций $y = x^3$ и $y = |x|$; точка $x_0 = \frac{\pi}{2}$ является критической точкой функции $y = \sin x$.

Из сказанного выше следует, что *каждая точка экстремума функции является её критической точкой, но не каждая критическая точка является точкой экстремума*. Иными словами, *точки экстремума следует искать среди критических точек*. Этот факт проиллюстрирован на рисунке 42.12.

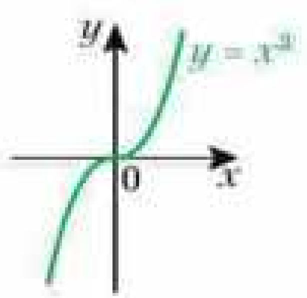


Рис. 42.11

Рис. 42.12

На рисунке 42.13 изображены графики функций, для которых x_0 является критической точкой.

На рисунках 42.13, *а—г* критическая точка x_0 является точкой экстремума, на рисунках 42.13, *д*, *е* критическая точка x_0 не является точкой экстремума.

Наличие экстремума функции в точке x_0 связано с поведением функции в окрестности этой точки. Так, для функций, графики которых изображены на рисунках 42.13, *а—г*, имеем: функция возрастает (убывает) на промежутке $(a; x_0]$ и убывает (возрастает) на промежутке $[x_0; b)$.

Функции, графики которых изображены на рисунках 42.13, *д*, *е*, таким свойством не обладают: первая из них возрастает на каждом из промежутков $(a; x_0]$ и $[x_0; b)$, вторая убывает на этих промежутках.

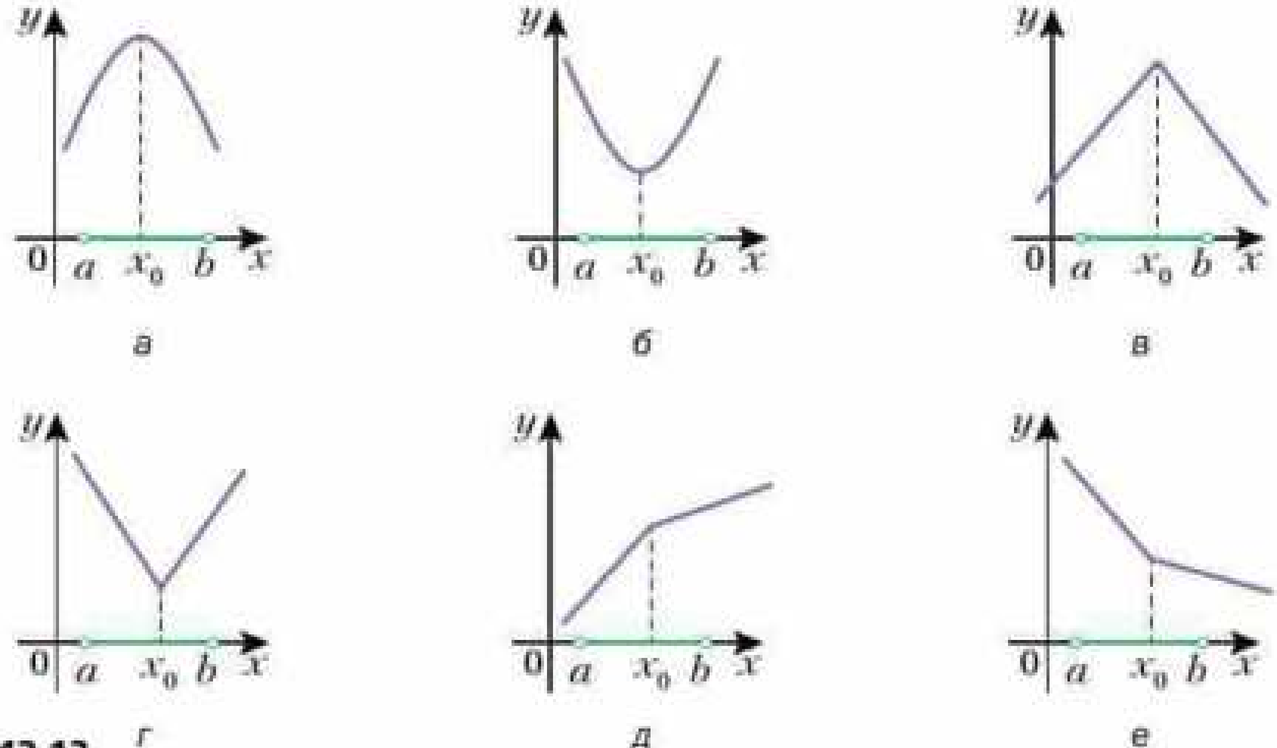


Рис. 42.13

Вообще, если область определения непрерывной функции разбита на конечное количество промежутков возрастания и убывания, то легко найти все точки экстремума (рис. 42.14).

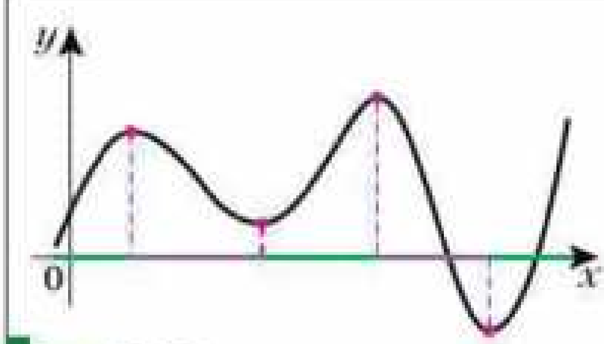


Рис. 42.14

Вы знаете, что с помощью производной можно находить промежутки возрастания (убывания) дифференцируемой функции. Две теоремы, приведённые ниже, показывают, как с помощью производной можно находить точки экстремума функции.

Теорема 42.2

(признак точки максимума функции)

Пусть функция f дифференцируема на интервале $(a;\ b)$ и x_0 — некоторая точка этого интервала. Если для всех $x \in (a;\ x_0]$ выполняется неравенство $f'(x) \geqslant 0$, а для всех $x \in [x_0;\ b)$ выполняется неравенство $f'(x) \leqslant 0$, то точка x_0 является точкой максимума функции f (см. рис. 42.13, *а*).

Теорема 42.3

(признак точки минимума функции)

Пусть функция f дифференцируема на интервале $(a;\ b)$ и x_0 — некоторая точка этого интервала. Если для всех $x \in (a;\ x_0]$ выполняется

неравенство $f'(x) \leqslant 0$, а для всех $x \in [x_0;\ b)$ выполняется неравенство $f'(x) \geqslant 0$, то точка x_0 является точкой минимума функции f (см. рис. 42.13, *б*).

Докажем теорему 42.2 (теорему 42.3 доказывают аналогично).

Доказательство

Пусть x_1 — произвольная точка интервала $(a;\ x_0)$. Из теоремы Лагранжа для отрезка $[x_1;\ x_0]$ следует существование такой точки $c \in (x_1;\ x_0)$, что

$$f'(c) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}.$$

Поскольку $c \in (a;\ x_0]$, то $f'(c) \geqslant 0$. Из неравенств $f'(c) \geqslant 0$ и $x_0 - x_1 > 0$ получаем: $f(x_0) \geqslant f(x_1)$.

Аналогично для произвольной точки $x_2 \in (x_0;\ b)$ можно доказать, что $f(x_0) \geqslant f(x_2)$.

Отсюда следует, что x_0 — точка максимума. ■

Иногда удобно пользоваться упрощёнными формулировками этих двух теорем: *если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 — точка максимума*; *если производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 — точка минимума*.

Для функции f точки экстремума можно искать по такой схеме.

1) Найти $f'(x)$.

2) Исследовать знак производной в окрестностях критических точек.

3) Пользуясь соответствующими теоремами, для каждой критической точки выяснить, является ли она точкой экстремума.

Пример. Найдите точки экстремума функции:

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$; 3) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{x - 1}$;

2) $f(x) = 2x^2 - x^4$; 4) $f(x) = \dfrac{x + 2}{\sqrt{x}}$.

Решение. 1) Имеем: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x + 1)(x - 2)$. Методом интервалов исследуем знак производной в окрестностях критических точек $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ (рис. 42.15). Получаем: $x_{\max} = -1$, $x_{\min} = 2$.

Рис. 42.15

2) Имеем: $f'(x) = 4x - 4x^3 = -4x(x^2 - 1) = -4x(x + 1)(x - 1)$.

Исследуем знак производной (рис. 42.16). Получаем: $x_{max} = -1$, $x_{min} = 0$ и $x_{max} = 1$.

3) Имеем:

$$f'(x) = \frac{(x^2 - x + 4)'(x - 1) - (x - 1)'(x^2 - x + 4)}{(x - 1)^2} = \frac{(2x - 1)(x - 1) - (x^2 - x + 4)}{(x - 1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = \frac{(x + 1)(x - 3)}{(x - 1)^2}.$$

Исследуем знак производной в окрестностях критических точек. Получаем: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ (рис. 42.17). Имеем: $x_{max} = -1$, $x_{min} = 3$.

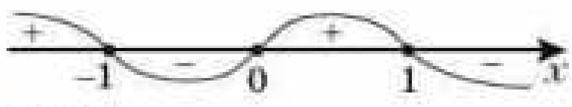


Рис. 42.16

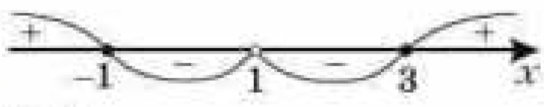


Рис. 42.17

4) Имеем:

$$f'(x) = \frac{(x + 2)' \cdot \sqrt{x} - (\sqrt{x})' \cdot (x + 2)}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x + 2)}{x} = \frac{2x - (x + 2)}{2x\sqrt{x}} = \frac{x - 2}{2x\sqrt{x}}.$$

Если $0 < x \leqslant 2$, то $f'(x) \leqslant 0$; если $x \geqslant 2$, то $f'(x) \geqslant 0$. Следовательно, критическая точка $x = 2$ является точкой минимума, то есть $x_{min} = 2$. ■

1. Какую точку называют точкой максимума функции; точкой минимума функции; критической точкой функции?
2. Сформулируйте признак максимума функции; признак минимума функции.

Упражнения

42.1. На рисунке 42.18 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $[-10; 9]$. Укажите: 1) критические точки функции; 2) точки минимума; 3) точки максимума.

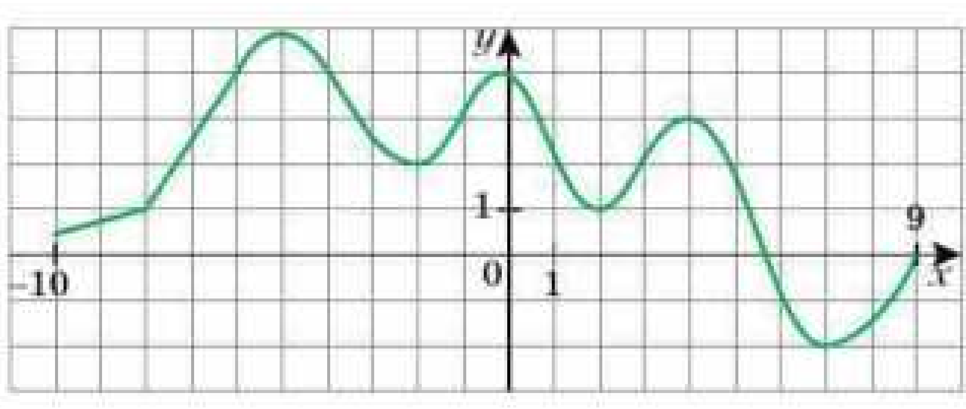


Рис. 42.18

42.2. На рисунке 42.19 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $[-7; 7]$. Укажите: 1) критические точки функции; 2) точки минимума; 3) точки максимума.

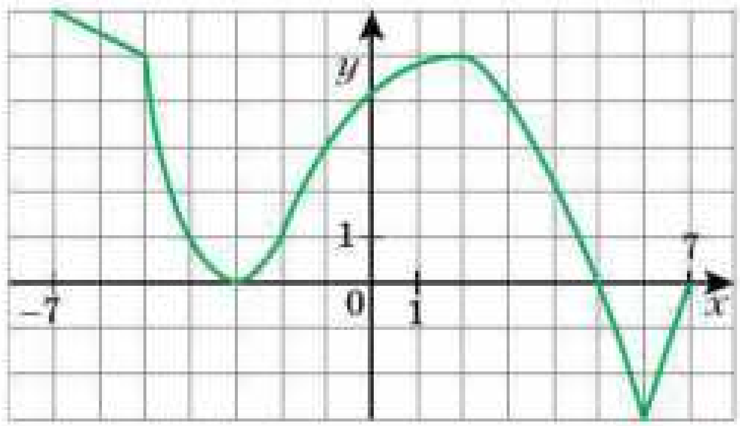


Рис. 42.19

42.3. На рисунке 42.20 укажите график функции, для которой точка x_0 является точкой минимума.

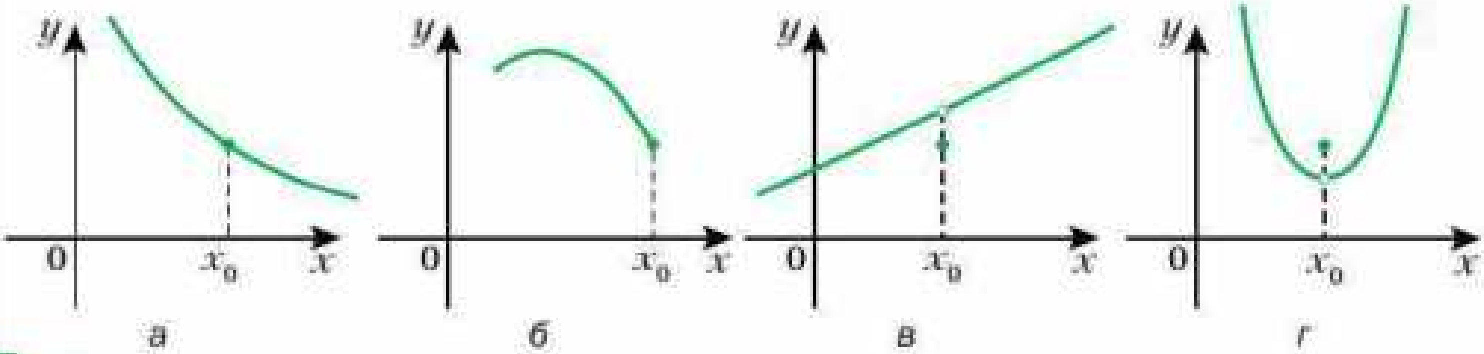


Рис. 42.20

42.4. Имеет ли критические точки функция:

1) $f(x) = x$;
2) $f(x) = x^5 + 1$;
3) $f(x) = 5$;
4) $f(x) = \sin x$;
5) $f(x) = \operatorname{tg} x$;
6) $f(x) = \sqrt{x}$?

42.5. На рисунке 42.21 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на множестве действительных чисел. Верно ли равенство:

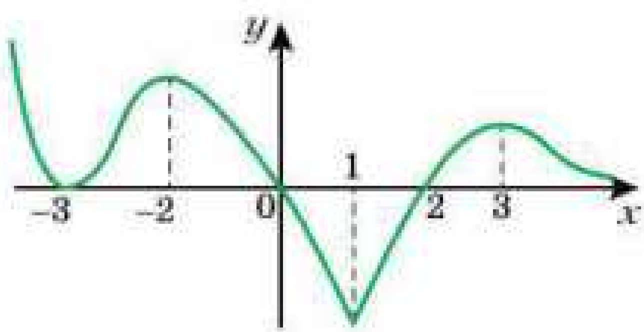


Рис. 42.21

1) $f'(-3) = 0$; 3) $f'(0) = 0$; 5) $f'(2) = 0$;
2) $f'(-2) = 0$; 4) $f'(1) = 0$; 6) $f'(3) = 0$?

42.6. Найдите точки минимума и максимума функции:
1) $f(x) = 12x - x^3$; 3) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 7$;
2) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$; 4) $f(x) = x^2 - \frac{x^4}{2}$.

42.7. Найдите точки минимума и максимума функции:
1) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$; 3) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2$;
2) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 7x + 4$; 4) $f(x) = 2 + x^2 + 2x^3 - 2x^4$.

42.8. Функция $y = f(x)$ дифференцируема на множестве действительных чисел. На рисунке 42.22 изображён график её производной. Укажите точки максимума и минимума функции $y = f(x)$.

42.9. Функция $y = f(x)$ определена на множестве действительных чисел и имеет производную в каждой точке области определения. На рисунке 42.23 изображён график функции $y = f'(x)$. Сколько точек экстремума имеет функция $y = f(x)$?

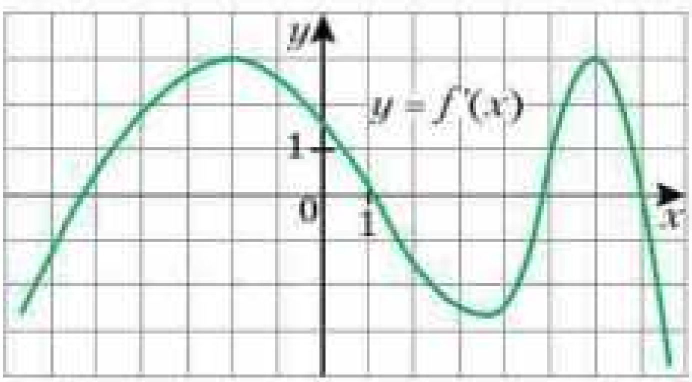


Рис. 42.22

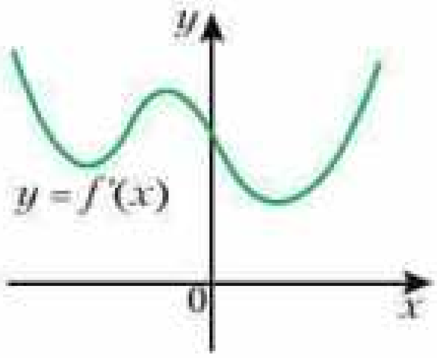


Рис 42.23

42.10. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:
1) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 7$; 3) $f(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{4}{5}x^5 + x^4 + 3$.
2) $f(x) = (x - 1)^3(x - 2)^2$;

42.11. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:
1) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 9$; 2) $f(x) = (x + 4)^4(x - 3)^3$.

42.12. Докажите, что данная функция не имеет точек экстремума:
1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 10$; 2) $f(x) = \sin x - x$.

42.13. Докажите, что данная функция не имеет точек экстремума:

1) $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 - 20$; 2) $f(x) = \cos x + x$.

42.14. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = x + \dfrac{4}{x^2}$; 3) $f(x) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{9}{x^2}$; 5) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 16}$;

2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$; 4) $f(x) = -\dfrac{1}{(x - 3)^2}$; 6) $f(x) = 2\sqrt{x} - x$.

42.15. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x}{x + 2}$; 3) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$; 5) $f(x) = \dfrac{1}{16 - x^2}$;

2) $f(x) = x + \dfrac{9}{x}$; 4) $f(x) = \dfrac{1}{(x + 1)^2}$; 6) $f(x) = 2x - \sqrt{x}$.

42.16. Верно ли утверждение:

1) значение функции в точке максимума может быть меньше значения функции в точке минимума;

2) функция в точке экстремума может быть недифференцируемой;

3) если производная в некоторой точке равна нулю, то эта точка является точкой экстремума функции?

42.17. Верно ли утверждение:

1) в точке экстремума производная функции равна нулю;

2) если функция в некоторой точке недифференцируема, то эта точка является точкой экстремума функции?

◆◆◆

42.18. Верно ли утверждение: если $\max\limits_M f(x) = f(x_0)$, $x_0 \in M$, и функция f дифференцируема в точке x_0, то $f'(x_0) = 0$?

42.19. Может ли иметь только одну точку экстремума: 1) чётная функция; 2) нечётная функция; 3) периодическая функция?

42.20. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = \dfrac{x}{2} - \sin x$; 2) $f(x) = \cos 2x - x\sqrt{3}$.

42.21. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = \cos x + \dfrac{x}{2}$; 2) $f(x) = \sin 2x - x\sqrt{2}$.

42.22. При каких значениях a функция $y = x^3 - 3ax^2 + 27x - 5$ имеет только одну критическую точку?

42.23. При каких значениях a функция $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2ax^2 + 4x - 15$ имеет только одну критическую точку?

42.24. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = x^2\sqrt{1-x}$; 2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$; 3) $f(x) = \dfrac{2x-7}{\sqrt{3-x}}$.

42.25. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = x^2\sqrt{x+2}$; 2) $f(x) = (x-2)^2\sqrt{x}$; 3) $f(x) = \dfrac{3x+1}{\sqrt{x-1}}$.

42.26. Точка x_0 — критическая точка функции f. Для всех $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, а для всех $x > x_0$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$. Может ли точка x_0 быть точкой минимума?

42.27. Найдите точки минимума и максимума функции:

1) $f(x) = \sin x \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; 2) $f(x) = \sin^2 x - \cos x$.

42.28. Найдите точки минимума и максимума функции:

1) $f(x) = \cos x \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$; 2) $f(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x - x$.

42.29. При каких значениях параметра a функция $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3a+1}{2}x^2 + (2a^2 + 2a)x - 17$ имеет положительную точку минимума?

42.30. При каких значениях параметра a функция $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3a-1}{2}x^2 + (2a^2 - a)x + 19$ имеет положительную точку минимума?

42.31. При каких значениях параметра a точка $x_0 = 1$ является точкой минимума функции $y = \dfrac{x^3}{3} + ax^2 + (a^2 - 4)x + 7$?

42.32. При каких значениях параметра a точка $x_0 = 0$ является точкой максимума функции $y = \dfrac{x^3}{3} - ax^2 + (a^2 - 1)x - 9$?

42.33. При каких значениях параметра a точка $x_0 = 1$ является точкой экстремума функции $y = x^3 - ax^2 + (a^2 - 2a)x - 7$?

42.34. При каких значениях параметра a точка $x_0 = 2$ является точкой экстремума функции $y = x^3 - 2ax^2 + (2a^2 - 2a)x + 9$?

§ 43 Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Какое количество продукции должно выпустить предприятие, чтобы получить наибольшую прибыль? Как, имея ограниченные ресурсы, выполнить производственное задание в кратчайшее время? Как организовать доставку товара на автомобиле по торговым точкам так, чтобы расход топлива был наименьшим?

Такие и подобные задачи на поиск наилучшего, или, как говорят, оптимального, решения занимают значительное место в практической деятельности человека.

Представим, что известна функция, которая описывает, например, зависимость прибыли предприятия от количества изготовленной продукции. Тогда задача сводится к поиску аргумента, при котором функция принимает наибольшее значение.

В этом параграфе мы выясним, как можно найти наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке $[a; b]$. Ограничимся рассмотрением только непрерывных функций.

Заметим, что точка, в которой функция принимает своё наименьшее значение, не обязательно является точкой минимума. Например, на рисунке 43.1 $\min\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(a)$, а точек минимума функция f не имеет. Точно так же точка минимума не обязательно является точкой, в которой функция принимает наименьшее значение. На рисунке 43.2, *а* точка x_2 — единственная точка минимума, а наименьшее значение $\min\limits_{[a;\,b]} f(x)$ достигается в точке a.

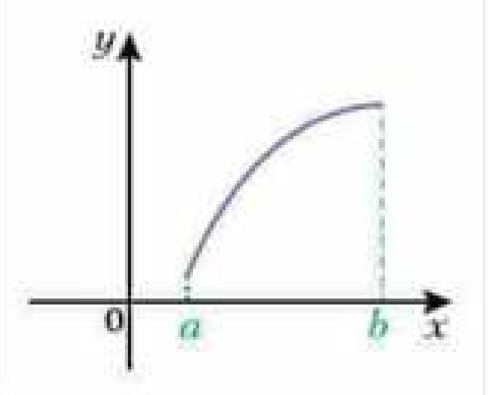
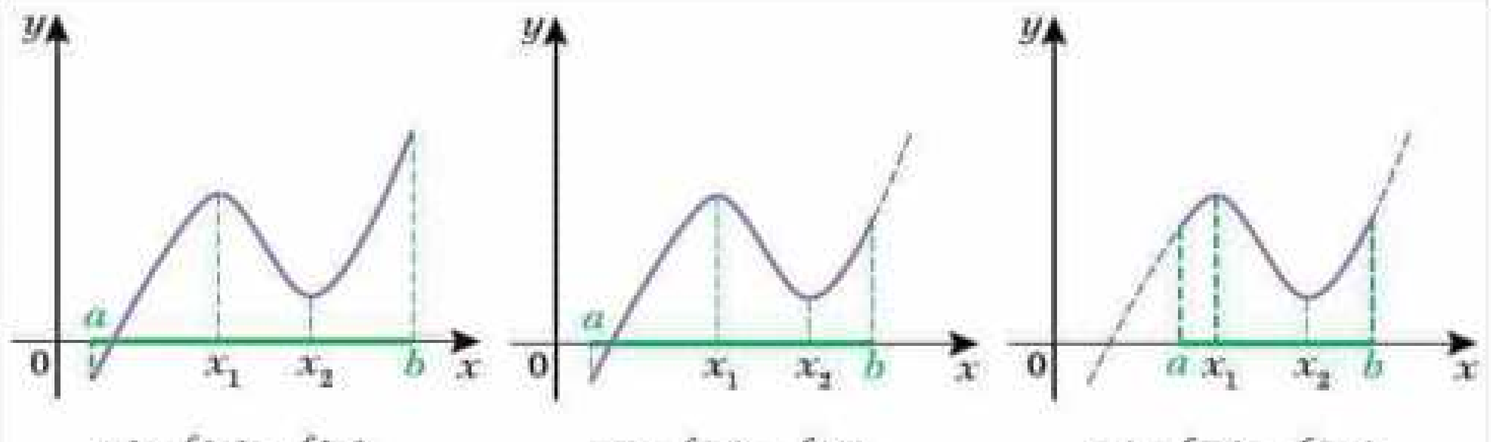


Рис. 43.1

Аналогичное замечание относится к точкам максимума и точкам, в которых функция принимает наибольшее значение.

На рисунке 43.2 представлены разные случаи расположения точек экстремумов и точек, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения.



$\min\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(a)$

$\max\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(b)$

а

$\min\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(a)$

$\max\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(x_1)$

б

$\min\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(x_2)$

$\max\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(x_1)$

в

Рис. 43.2

Здесь важно понять, что свойство функции иметь точку экстремума x_0 означает следующее: функция принимает в точке x_0 наибольшее (наименьшее) значение по сравнению со значениями функции во всех точках некоторой, возможно, очень малой окрестности точки x_0. Поэтому, если хотят подчеркнуть этот факт, то точки экстремума ещё называют **точками локального максимума** или **точками локального минимума** (от латинского *locus* — «место»).

Непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция достигает на этом промежутке свои наибольшее и наименьшее значения или на концах отрезка, или в точках экстремума (см. рис. 43.2).

Тогда для такой функции поиск наибольшего и наименьшего значений на отрезке $[a; b]$ можно проводить, пользуясь следующей схемой.

1. Найти критические точки функции f, принадлежащие промежутку $[a; b]$.

2. Вычислить значения функции в найденных критических точках и на концах рассматриваемого отрезка.

3. Из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Этот алгоритм можно реализовать только тогда, когда рассматриваемая функция f имеет конечное количество критических точек на отрезке $[a; b]$.

Отметим, что если определить, какие из критических точек являются точками экстремума, то количество точек, в которых следует искать значения функции, можно уменьшить. Однако выявление точек экстремума, как правило, требует больше вычислительной работы, чем поиск значений функции в критических точках.

Пример 1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 6$ на отрезке $[-2; 0]$.

Решение. Найдём критические точки данной функции:

$$f'(x) = 12x^2 - 18x - 12;$$

$$12x^2 - 18x - 12 = 0;$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0;$$

$$x = 2 \text{ или } x = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, функция f имеет две критические точки, а промежутку $[-2; 0]$ принадлежит одна: $x = -\frac{1}{2}$.

Имеем: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}$, $f(-2) = -38$, $f(0) = 6$.

Следовательно, $\max\limits_{[-2;\,0]} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}$, $\min\limits_{[-2;\,0]} f(x) = f(-2) = -38$.

Ответ: $\frac{37}{4}$; -38. ■

Пример 2. Представьте число 8 в виде суммы двух неотрицательных чисел так, чтобы сумма куба первого числа и квадрата второго была наименьшей.

Решение. Пусть первое число равно x, тогда второе равно $8 - x$. Из условия следует, что $0 \leqslant x \leqslant 8$.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 + (8 - x)^2$, определённую на промежутке $[0; 8]$, и найдём, при каком значении x она принимает наименьшее значение.

Имеем: $f'(x) = 3x^2 - 2(8 - x) = 3x^2 + 2x - 16$. Найдём критические точки данной функции:

$$3x^2 + 2x - 16 = 0;$$

$$x = 2 \text{ или } x = -\frac{8}{3}.$$

Среди найденных чисел промежутку $[0; 8]$ принадлежит только число 2. Имеем:

$$f(2) = 44,\ f(0) = 64,\ f(8) = 512.$$

Следовательно, функция f принимает наименьшее значение при $x = 2$.

Ответ: $8 = 2 + 6$. ■

Пример 3. Найдите стороны прямоугольника, вписанного в окружность радиусом R, если площадь прямоугольника принимает наибольшее значение.

Решение. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$, вписанный в окружность радиусом R (рис. 43.3). Пусть $AB = x$, тогда $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{4R^2 - x^2}$. Отсюда площадь прямоугольника $ABCD$ равна $x\sqrt{4R^2 - x^2}$. Из условия задачи следует, что значения переменной x удовлетворяют неравенству $0 < x < 2R$, то есть принадлежат промежутку $(0; 2R)$. Таким образом, задача свелась к нахождению наибольшего значения функции $S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$ на интервале $(0; 2R)$. Рассмотрим непрерывную функцию $f(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$, $D(f) = [0; 2R]$, и будем искать её наибольшее значение на промежутке $[0; 2R]$.

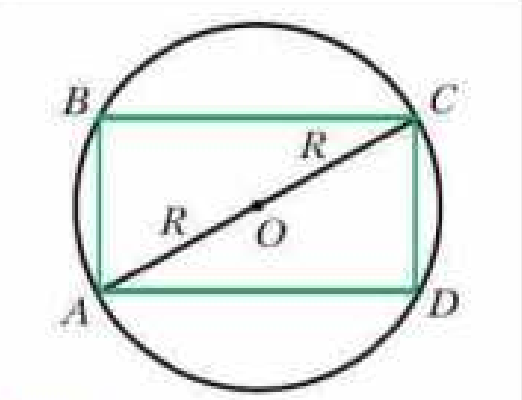


Рис. 43.3

Найдём критические точки функции f:

$$f'(x) = (x)' \cdot \sqrt{4R^2 - x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{4R^2 - x^2}} \cdot (4R^2 - x^2)' =$$

$$= \sqrt{4R^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{(4R^2 - x^2) - x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}.$$

Функция f имеет одну критическую точку $x = R\sqrt{2}$.

Имеем: $f(R\sqrt{2}) = 2R^2$, $f(0) = f(2R) = 0$. Следовательно, $\max\limits_{[0;\,2R]} f(x) = f(R\sqrt{2}) = 2R^2$.

Отсюда получаем, что функция $S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$ на интервале $(0;\ 2R)$ принимает наибольшее значение при $x = R\sqrt{2}$. Тогда $AB = R\sqrt{2}$, $BC = \sqrt{4R^2 - 2R^2} = R\sqrt{2}$.

Следовательно, среди прямоугольников, вписанных в окружность радиусом R, наибольшую площадь имеет квадрат со стороной $R\sqrt{2}$. ■

Пример 4. Решите уравнение $\sqrt[4]{x - 2} + \sqrt[4]{4 - x} = 2$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[4]{x - 2} + \sqrt[4]{4 - x}$, $D(f) = [2;\ 4]$. Для всех $x \in (2;\ 4)$ имеем:

$$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{(x-2)^3}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{(4-x)^3}}.$$

Решим уравнение $f'(x) = 0$. Запишем: $\dfrac{1}{4\sqrt[4]{(x-2)^3}} - \dfrac{1}{4\sqrt[4]{(4-x)^3}} = 0$. Отсюда легко найти, что $x = 3$. Получили, что функция f на отрезке $[2;\ 4]$ имеет единственную критическую точку $x = 3$.

Так как функция f непрерывна на отрезке $[2;\ 4]$, то её наибольшее и наименьшее значения находятся среди чисел $f(3)$, $f(2)$, $f(4)$. Имеем: $f(3) = 2$, $f(2) = f(4) = \sqrt[4]{2}$.

Следовательно, $\max\limits_{[2;\,4]} f(x) = f(3) = 2$, причём наибольшее значение функция f принимает только при $x = 3$.

Так как нам надо решить уравнение $f(x) = 2$, то получаем, что $x = 3$ является его единственным корнем.

Ответ: 3. ■

? Опишите, как находить наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке функции.

Упражнения

43.1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном отрезке:

1) $f(x) = 3x^2 - x^3$, $[-1; 3]$;
2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $[0; 2]$;
3) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 60x - 7$, $[-1; 3]$;
4) $f(x) = \frac{x^2+8}{x-1}$, $[-3; 0]$.

43.2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном отрезке:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$, $[0; 3]$;
2) $f(x) = x - 1 - x^3 - x^2$, $[-2; 0]$;
3) $f(x) = 2x^4 - 8x$, $[-2; 1]$;
4) $f(x) = \frac{x^4}{4} - 8x^2$, $[-1; 2]$.

43.3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном отрезке:

1) $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$, $[-6; 8]$;
2) $f(x) = \sqrt{0{,}5x^2 + 3x + 5}$, $[2; 4]$;
3) $f(x) = (x+1)^2(x-2)^2$, $[-2; 4]$;
4) $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$, $[-4; -1]$.

43.4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном отрезке:

1) $f(x) = \sqrt{9 + 8x - x^2}$, $[0; 7]$;
2) $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$, $[-2; 4]$;
3) $f(x) = (x-1)^2(x+5)^2$, $[-3; 2]$;
4) $f(x) = -x - \frac{9}{x}$, $[-6; -1]$.

43.5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном отрезке:

1) $f(x) = \sin x - \cos x$, $[0; \pi]$;
2) $f(x) = x\sqrt{3} - \cos 2x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

43.6. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном отрезке:

1) $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$, $[0; \pi]$;
2) $f(x) = 2\cos\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$, $\left[-\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{3}\right]$.

43.7. Представьте число 8 в виде суммы двух неотрицательных чисел так, чтобы произведение куба одного из этих чисел на второе число было наибольшим.

43.8. Представьте число 12 в виде суммы двух неотрицательных чисел так, чтобы произведение квадрата одного из этих чисел на удвоенное второе число было наибольшим.

43.9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном отрезке:

1) $f(x) = 2\sin 2x + \cos 4x$, $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$;

2) $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x - 5$, $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$;

43.10. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на указанном отрезке:

1) $f(x) = 2\cos x - \sin 2x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

2) $f(x) = 2\sqrt{3}\cos x + 2\sin x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

43.11. Разбейте число 180 на три неотрицательных слагаемых так, чтобы два из них относились как 1 : 2, а произведение всех трёх слагаемых было наибольшим.

43.12. Представьте число 18 в виде суммы трёх неотрицательных чисел так, чтобы два из них относились как 8 : 3, а сумма кубов этих трёх чисел была наименьшей.

◆◆◆

43.13. В треугольник ABC вписан прямоугольник так, что две его вершины лежат на стороне AC, а две другие — на сторонах AB и BC. Найдите наибольшее значение площади такого прямоугольника, если $AC = 12$ см, $BD = 10$ см, где BD — высота треугольника ABC.

43.14. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 16 см и острым углом 30° вписан прямоугольник, две вершины которого лежат на гипотенузе, а две другие — на катетах. Какими должны быть стороны прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

43.15. В полукруг радиусом 20 см вписан прямоугольник наибольшей площади. Найдите стороны прямоугольника.

43.16. В полукруг радиусом 6 см вписан прямоугольник наибольшего периметра. Найдите стороны прямоугольника.

43.17. Две вершины прямоугольника принадлежат графику функции $y = 12 - x^2$, $D(y) = [-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$, а две другие — оси абсцисс. Какую наибольшую площадь может иметь такой прямоугольник?

43.18. Две вершины прямоугольника принадлежат графику функции $y = 0{,}5x^2$, $D(y) = [-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}]$, а две другие — прямой $y = 9$. Какую наибольшую площадь может иметь такой прямоугольник?

43.19. Периметр равнобедренного треугольника равен 48 см. Какой должна быть длина основания треугольника, чтобы его площадь принимала наибольшее возможное значение?

43.20. В трапеции меньшее основание и боковые стороны равны a. Найдите большее основание трапеции, при котором её площадь принимает наибольшее значение.

43.21. В равнобедренный треугольник вписана окружность радиусом r. Каким должен быть угол при основании треугольника, чтобы его площадь была наименьшей?

43.22. Каким должен быть угол при вершине равнобедренного треугольника заданной площади, чтобы радиус вписанной в этот треугольник окружности был наибольшим?

43.23. На окружности радиусом R отметили точку A. На каком расстоянии от точки A надо провести хорду BC, параллельную касательной в точке A, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей?

43.24. Фигура ограничена графиком функции $y = \sqrt{x}$, прямой $y = 2$ и осью ординат. В какой точке графика функции $y = \sqrt{x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 4)$ надо провести касательную, чтобы она отсекала от указанной фигуры треугольник наибольшей площади?

43.25. На координатной плоскости расположен прямоугольный треугольник ABC ($\angle ABC = 90^\circ$). Вершина A имеет координаты $(-2; 0)$, вершина B принадлежит отрезку $[2; 3]$ оси абсцисс, а вершина C — параболе $y = x^2 - 4x + 1$. Какими должны быть координаты точки C, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей?

43.26. Пункты A, B и C находятся в вершинах прямоугольного треугольника ABC ($\angle ACB = 90^\circ$), $AC = 285$ км, $BC = 60$ км. Пункты A и C соединяет железная дорога. В какую точку отрезка AC следует провести грунтовую дорогу из пункта B, чтобы время пребывания в пути от пункта A до пункта B было наименьшим, если известно, что скорость движения по железной дороге равна 52 км/ч, а по грунтовой дороге — 20 км/ч?

43.27. Завод A расположен на расстоянии 50 км от прямолинейного участка железной дороги, которая ведёт в город B, и на расстоянии 130 км от города B. Под каким углом к железной дороге следует провести шоссе от завода A, чтобы доставка грузов из A в B была самой дешёвой, если стоимость перевозок по шоссе в 2 раза больше, чем по железной дороге?

43.28. Докажите неравенство $-20 \leqslant x^3 - 3x^2 \leqslant 16$, где $x \in [-2; 4]$.

43.29. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = -5x^3 + x|x - 1|$ на промежутке $[0; 2]$.

43.30. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 4x^3 - x|x-2|$ на промежутке $[0; 3]$.

43.31. Решите уравнение $\sqrt{5-x} + \sqrt{x-3} = x^2 - 8x + 18$.

43.32. Решите уравнение $\sqrt{x+7} + \sqrt{1-x} = x^2 + 6x + 13$.

§ 44 Вторая производная. Понятие выпуклости функции

Пусть материальная точка движется по закону $y = s(t)$ по координатной прямой. Тогда мгновенная скорость $v(t)$ в момент времени t определяется по формуле

$$v(t) = s'(t).$$

Рассмотрим функцию $y = v(t)$. Её производную в момент времени t называют ускорением движения и обозначают $a(t)$, то есть

$$a(t) = v'(t).$$

Таким образом, функция ускорение движения — это производная функции скорость движения, которая, в свою очередь, является производной функции закон движения, то есть

$$a(t) = v'(t) = (s'(t))'.$$

В таких случаях говорят, что функция ускорение движения $y = a(t)$ является **второй производной функции** $y = s(t)$. Пишут:

$$a(t) = s''(t)$$

(запись $s''(t)$ читают: «эс два штриха от тэ»).

Например, если закон движения материальной точки задан формулой $s(t) = t^2 - 4t$, то имеем:

$$s'(t) = v(t) = 2t - 4;$$
$$s''(t) = v'(t) = a(t) = 2.$$

Мы получили, что материальная точка движется с постоянным ускорением. Как вы знаете из курса физики, такое движение называют равноускоренным.

Обобщим сказанное.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, дифференцируемую на некотором множестве M. Тогда её производная также является некоторой функцией, заданной на этом множестве. Если функция f' дифференцируема в некоторой точке $x_0 \in M$, то производную функции f' в точке x_0 называют **второй производной функции** $y = f(x)$ **в точке** x_0 и обозначают $f''(x_0)$ или $y''(x_0)$. Саму функцию f называют **дважды дифференцируемой в точке** x_0.

Функцию, которая числу x_0 ставит в соответствие число $f''(x_0)$, называют **второй производной функции** $y = f(x)$ и обозначают f'' или y''.

Например, если $y = \sin x$, то $y'' = -\sin x$.

Если функция f дважды дифференцируема в каждой точке множества M, то её называют **дважды дифференцируемой на множестве** M. Если функция f дважды дифференцируема на $D(f)$, то её называют **дважды дифференцируемой**.

Вы знаете, что функцию характеризуют такие свойства, как чётность (нечётность), периодичность, возрастание (убывание) и т. д. Ещё одной важной характеристикой функции является выпуклость вверх и выпуклость вниз.

Обратимся к примерам.

О функциях $y = x^2$, $y = |x|$ говорят, что они являются выпуклыми вниз (рис. 44.1), а функции $y = -x^2$, $y = \sqrt{x}$ являются выпуклыми вверх (рис. 44.2). Функция $y = \sin x$ является выпуклой вверх на промежутке $[0; \pi]$ и выпуклой вниз на промежутке $[\pi; 2\pi]$ (рис. 44.3). Линейную функцию считают как выпуклой вверх, так и выпуклой вниз.

Рис. 44.1

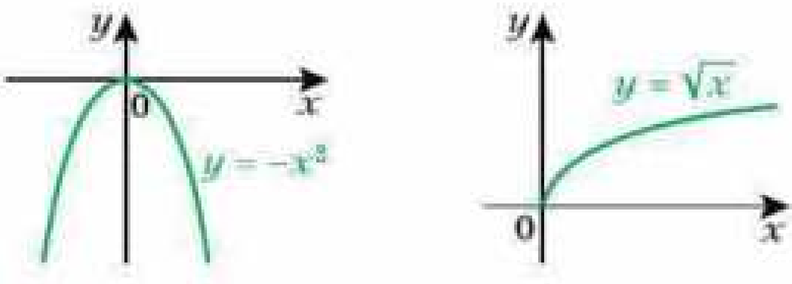


Рис. 44.2

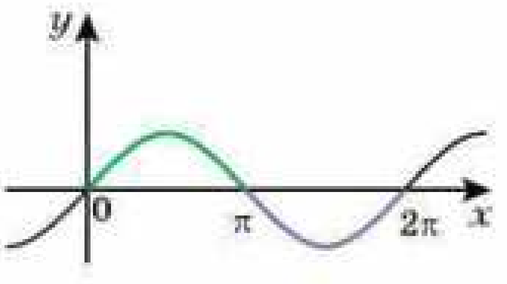


Рис. 44.3

Далее, изучая понятия выпуклости функции на промежутке I, ограничимся случаем, когда функция f дифференцируема[1] на этом промежутке.

Пусть функция f дифференцируема на промежутке I. Тогда в любой точке её графика с абсциссой $x \in I$ можно провести невертикальную касательную. Если при этом график функции на промежутке I расположен не

[1] В высшей школе понятие выпуклости распространяют и на более широкие классы функций, например непрерывные.

выше любой такой касательной (рис. 44.4), то функцию f называют **выпуклой вверх на промежутке** I; если же график на промежутке I расположен не ниже любой такой касательной (рис. 44.5), то — **выпуклой вниз на промежутке** I.

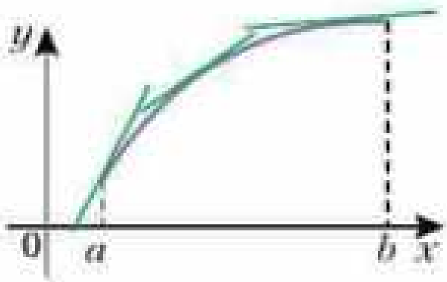


Рис. **44.4**

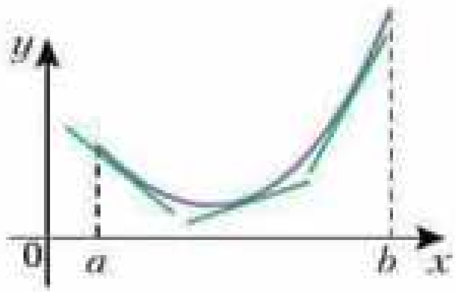


Рис. **44.5**

На рисунке 44.6 изображён график функции f, которая является выпуклой вниз на промежутке $[a; b]$. Из рисунка видно, что с увеличением аргумента x угол наклона соответствующей касательной увеличивается. Это означает, что функция f' возрастает на промежутке $[a; b]$.

Пусть функция f является выпуклой вверх на промежутке $[a; b]$ (рис. 44.7). Из рисунка видно, что с увеличением аргумента x угол наклона соответствующей касательной уменьшается. Это означает, что функция f' убывает на промежутке $[a; b]$.

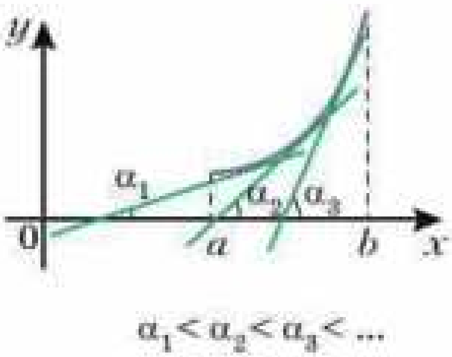


Рис. **44.6**

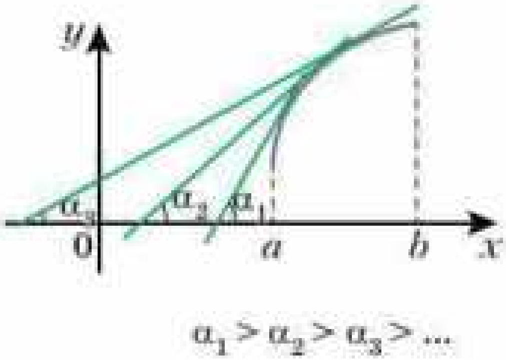


Рис. **44.7**

Эти примеры показывают, что характер выпуклости функции f на некотором промежутке I связан с возрастанием (убыванием) функции f' на этом промежутке.

Для дважды дифференцируемой на промежутке I функции f возрастание (убывание) функции f' определяется знаком второй производной функции f на промежутке I. Таким образом, характер выпуклости дважды дифференцируемой функции связан со знаком её второй производной.

Эту связь устанавливают следующие две теоремы.

Теорема 44.1

(признак выпуклости функции вниз)

Если для всех $x \in I$ выполняется неравенство $f''(x) \geqslant 0$, то функция f является выпуклой вниз на промежутке I.

Теорема 44.2

(признак выпуклости функции вверх)

Если для всех $x \in I$ выполняется неравенство $f''(x) \leqslant 0$, то функция f является выпуклой вверх на промежутке I.

Докажем теорему 44.1 (теорему 44.2 можно доказать аналогично).

Доказательство

В точке с абсциссой $x_0 \in I$ проведём касательную к графику функции f. Уравнение этой касательной имеет вид

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Рассмотрим функцию $r(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0))$.

Значения этой функции показывают, насколько отличается ордината точки графика функции f от ординаты соответствующей точки, которая лежит на проведённой касательной (рис. 44.8).

Если мы покажем, что $r(x) \geqslant 0$ для всех $x \in I$, то таким образом докажем, что на промежутке I график функции f лежит не ниже проведённой к нему касательной.

Пусть $x \in I$ и $x > x_0$ (случай, когда $x \leqslant x_0$, рассматривают аналогично).

Имеем: $r(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

Для функции f и отрезка $[x_0; x]$ применим теорему Лагранжа: $f(x) - f(x_0) = f'(c_1)(x - x_0)$, где $c_1 \in (x_0; x)$.

Отсюда $r(x) = f'(c_1)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$;

$$r(x) = (f'(c_1) - f'(x_0))(x - x_0).$$

Поскольку функция $y = f'(x)$ является дифференцируемой на отрезке $[x_0; c_1]$, то можно применить теорему Лагранжа: $f'(c_1) - f'(x_0) = f''(c_2)(c_1 - x_0)$, где $c_2 \in (x_0; c_1)$.

Отсюда $r(x) = f''(c_2)(c_1 - x_0)(x - x_0)$.

На рисунке 44.8 показано расположение точек c_1 и c_2.

Из неравенств $x_0 < c_2 < c_1 < x$ следует, что $(c_1 - x_0)(x - x_0) > 0$. Поскольку $c_2 \in I$, то с учётом условия теоремы получаем: $f''(c_2) \geqslant 0$. Отсюда для всех $x \in I$ выполняется неравенство $r(x) \geqslant 0$. Поэтому функция f является выпуклой вниз на промежутке I. ■

Пример 1. Исследуйте на выпуклость функцию $f(x) = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Имеем: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Отсюда $f''(x) = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = (\cos^{-2}x)' = -2(\cos x)^{-3}(\cos x)' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$.

Неравенство $f''(x) \geqslant 0$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ выполняется при $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, функция $y = \operatorname{tg} x$ является выпуклой вниз на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 44.9).

Неравенство $f''(x) \leqslant 0$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ выполняется при $-\frac{\pi}{2} < x \leqslant 0$. Следовательно, функция $y = \operatorname{tg} x$ является выпуклой вверх на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ (см. рис. 44.9). ■

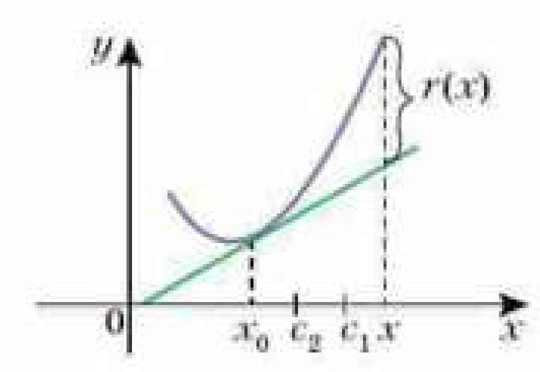


Рис. 44.8

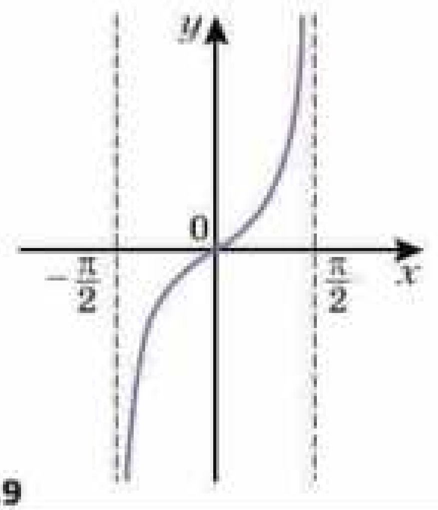


Рис. 44.9

На рисунке 44.10 изображены графики функций и касательные, проведённые к ним в точках с абсциссой x_0. Эти функции на промежутках $(a; x_0]$ и $[x_0; b)$ имеют разный характер выпуклости. Поэтому на этих про-

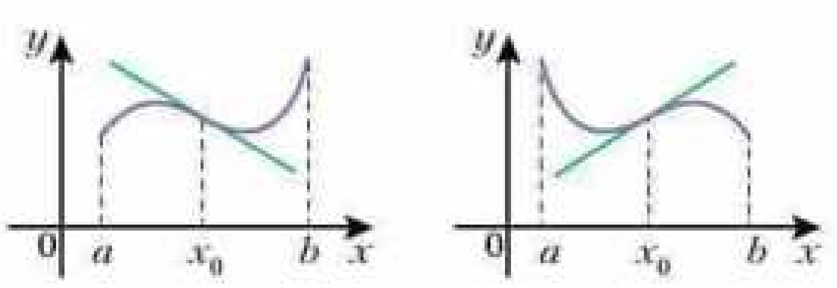


Рис. 44.10

межутках график функции расположен в различных полуплоскостях относительно касательной. В этом случае говорят, что точка x_0 является **точкой перегиба** функции.

Например, точка $x_0 = 0$ является точкой перегиба функции $y = x^3$ (рис. 44.11); точки вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, являются точками перегиба функции $y = \cos x$ (рис. 44.12).

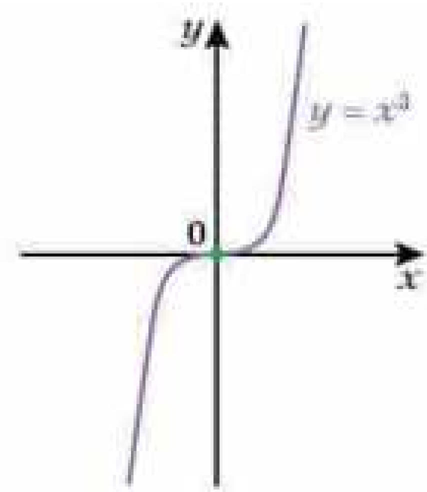


Рис. 44.11

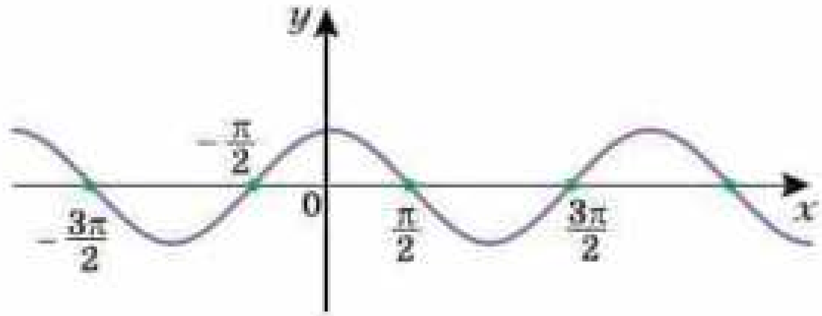


Рис. 44.12

Пример 2. Исследуйте характер выпуклости и найдите точки перегиба функции $f(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{12}$.

Решение. Имеем: $f'(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}$; $f''(x) = x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$.

Используя метод интервалов, исследуем знак функции $y = f''(x)$ (рис. 44.13). Получаем, что функция f выпуклая вверх на промежутке $(-\infty; 1]$ и выпуклая вниз на промежутке $[1; +\infty)$.

Рис. 44.13

Функция f на промежутках $(-\infty; 1]$ и $[1; +\infty)$ имеет разный характер выпуклости. В точке с абсциссой $x_0 = 1$ к графику функции f можно провести касательную. Следовательно, $x_0 = 1$ является точкой перегиба функции f. ■

1. Какую функцию называют дважды дифференцируемой в точке; на множестве?
2. Опишите, какую функцию называют выпуклой вниз; выпуклой вверх.
3. Сформулируйте признак выпуклости функции вниз; вверх.
4. Опишите, какую точку называют точкой перегиба.

Упражнения

44.1. Найдите вторую производную функции:

1) $y = x^2 - 2x + 5$;
2) $y = \frac{1}{x}$;
3) $y = \sqrt{x}$;
4) $y = \cos x$;
5) $y = (2x - 1)^5$;
6) $y = \cos^2 x$;
7) $y = \sin\frac{x}{4}$;
8) $y = x\sin x$.

44.2. Найдите вторую производную функции:

1) $y = x^4$;
2) $y = 3 - 5x + x^3$;
3) $y = \frac{1}{x-1}$;
4) $y = \sqrt[3]{x}$;
5) $y = (1 - 3x)^3$;
6) $y = \cos 2x$;
7) $y = \sin^2 x$;
8) $y = x\cos x$.

44.3. Чему равно значение второй производной функции $y = 5\sin x - 3\cos 4x$ в точке: 1) $x = \frac{\pi}{6}$; 2) $x = -\frac{\pi}{2}$?

44.4. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 4$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите её ускорение в момент времени $t_0 = 2$ с.

44.5. Одно тело движется по координатной прямой по закону $s_1(t) = t^3 - t^2 + 3t - 2$, а другое — по закону $s_2(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 5t - 8$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите ускорение каждого тела в момент времени, когда их скорости равны.

44.6. Тело массой 5 кг движется по координатной прямой по закону $s(t) = t^3 - 6t + 4$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах). Найдите силу $F(t) = ma(t)$, действующую на тело через 3 с после начала движения.

44.7. Найдите промежутки выпуклости и точки перегиба функции:

1) $y = x^3 - 3x + 2$;
2) $y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - x + 1$.

44.8. Найдите промежутки выпуклости и точки перегиба функции:

1) $y = x^3 - 2x^2 + x - 2$;
2) $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 3x + 4$.

44.9. Найдите точки перегиба функции $y = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 12x + 3$.

44.10. Найдите точки перегиба функции $y = 3x^5 + 10x^4 + 10x^3 - 5x - 4$.

44.11. Докажите, что функция $f(x) = x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 11x - 7$ является выпуклой вниз на $\boldsymbol{R}$.

44.12. Докажите, что функция $f(x) = \sin^2 x - 2x^2$ является выпуклой вверх на $\boldsymbol{R}$.

44.13. Найдите промежутки выпуклости и точки перегиба функции:

1) $y = \frac{x}{1 + x^2}$; 2) $y = \frac{x}{(x - 1)^2}$.

44.14. Найдите промежутки выпуклости и точки перегиба функции:

1) $y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$; 2) $y = \frac{x}{(x + 1)^2}$.

44.15. Найдите промежутки выпуклости и точки перегиба функции $y = x^2 + 4\sin x$.

44.16. Найдите промежутки выпуклости и точки перегиба функции $y = x^2 - 4\cos x$.

§ 45 Построение графиков функций

Когда в предыдущих классах вам приходилось строить графики, вы, как правило, поступали так: отмечали на координатной плоскости некоторое количество точек, принадлежащих графику, а затем соединяли их. Точность построения зависела от количества отмеченных точек.

На рисунке 45.1 изображены несколько точек, принадлежащих графику некоторой функции $y = f(x)$. Эти точки можно соединить поразному, например так, как показано на рисунках 45.2 и 45.3.

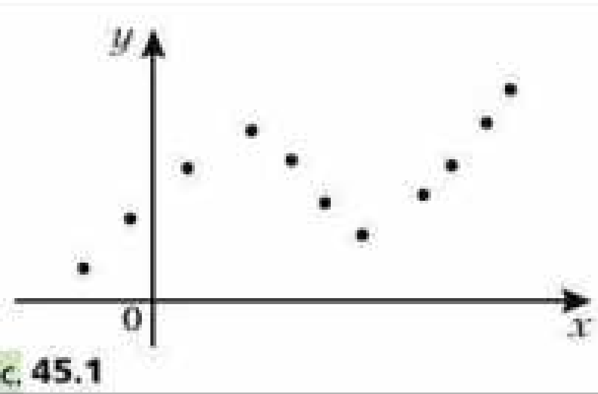


Рис. 45.1

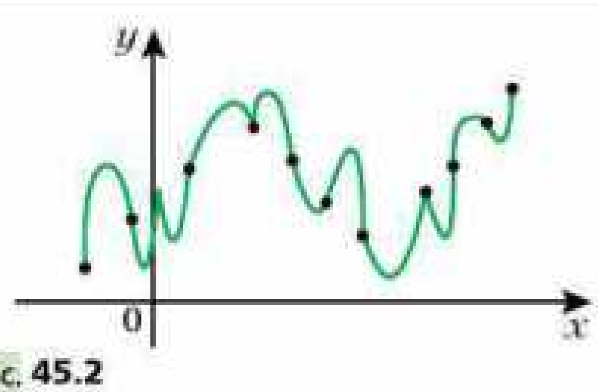


Рис. 45.2

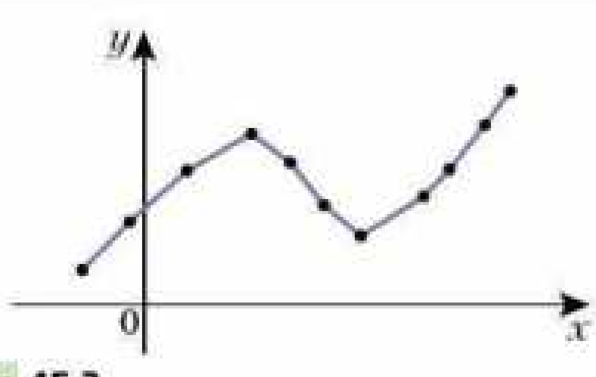


Рис. 45.3

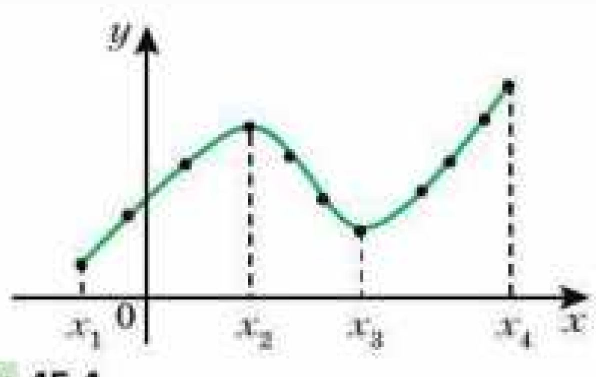


Рис. 45.4

Однако если знать, что функция f возрастает на каждом из промежутков $[x_1; x_2]$ и $[x_3; x_4]$, убывает на промежутке $[x_2; x_3]$ и является дифференцируемой, то, скорее всего, будет построен график, показанный на рисунке 45.4.

Вы знаете, какие особенности присущи графикам чётной, нечётной, периодической функций и т. д. Вообще, чем больше свойств функции удалось определить, тем точнее можно построить её график.

Исследование свойств функции будем проводить по такому плану.

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на чётность.
3. Найти нули функции.
4. Найти промежутки знакопостоянства функции.
5. Найти промежутки возрастания и убывания функции.
6. Найти точки экстремума и значения функции в точках экстремума.
7. Выявить другие особенности функции (периодичность функции, поведение функции в окрестностях отдельных важных точек и т. п.).

Заметим, что приведённый план исследования носит рекомендательный характер и не является постоянным и исчерпывающим. Важно при исследовании функции обнаружить такие её свойства, которые позволят корректно построить график.

Пример 1. Исследуйте функцию $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3$ и постройте её график.

Решение. 1. Функция определена на множестве действительных чисел, то есть $D(f) = \boldsymbol{R}$.

2. Имеем: $f(-x) = \frac{3}{2}(-x)^2 - \frac{1}{4}(-x)^3 = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3$. Отсюда $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, то есть функция $y = f(-x)$ не совпадает ни с функцией $y = f(x)$, ни с функцией $y = -f(x)$. Таким образом, данная функция не является ни чётной, ни нечётной.

3—4. Имеем: $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3 = \frac{x^2}{4}(6 - x)$.

Рис. 45.5

Числа 0 и 6 являются нулями функции f. Применив метод интервалов (рис. 45.5), находим промежутки знакопостоянства функции f, а именно: устанавливаем, что $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 6)$ и $f(x) < 0$ при $x \in (6; +\infty)$.

Рис. 45.6

5—6. Имеем: $f'(x) = 3x - \frac{3x^2}{4} = \frac{3x}{4}(4 - x)$.

Исследовав знак производной (рис. 45.6), приходим к выводу, что функция f возрастает на промежутке $[0; 4]$, убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0]$ и $[4; +\infty)$, $x_{max} = 4$, $x_{min} = 0$. Имеем: $f(4) = 8$, $f(0) = 0$.

7. Имеем: $f''(x) = 3 - \frac{3x}{2}$. Исследовав знак второй производной (рис. 45.7), приходим к выводу, что функция f является выпуклой вниз на промежутке $(-\infty; 2]$, выпуклой вверх на промежутке $[2; +\infty)$, $x_0 = 2$ является точкой перегиба и $f(2) = 4$.

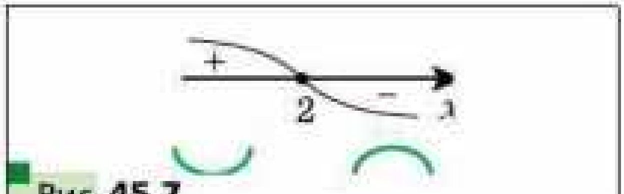


Рис. 45.7

Учитывая полученные результаты, строим график функции (рис. 45.8). ■

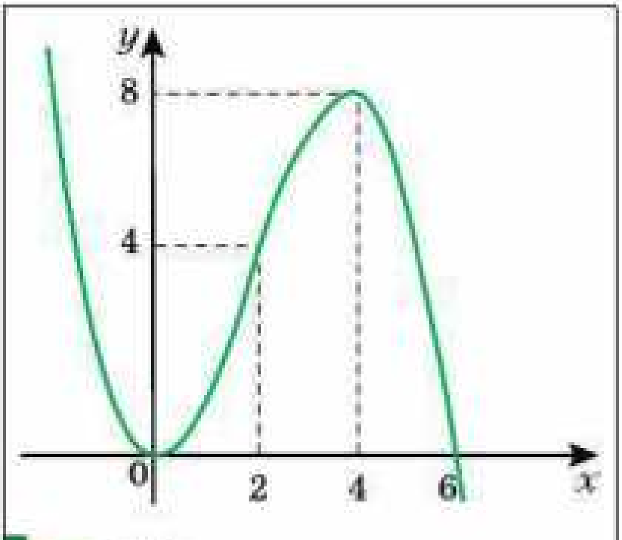


Рис. 45.8

Пример 2. Исследуйте функцию $f(x) = \frac{4}{x^2 + 4x}$ и постройте её график.

Решение. 1. Функция определена на множестве $(-\infty; -4) \cup (-4; 0) \cup \cup (0; +\infty)$.

2. Область определения функции несимметрична относительно начала координат, следовательно, данная функция не является ни чётной, ни нечётной.

3. Функция не имеет нулей.

4. Имеем: $f(x) = \frac{4}{x(x+4)}$. Отсюда $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$, $f(x) < 0$ при $x \in (-4; 0)$ (рис. 45.9).

5—6. Имеем:

$$f'(x) = \frac{(4)' \cdot (x^2 + 4x) - 4 \cdot (x^2 + 4x)'}{x^2(x+4)^2} = -\frac{4(2x+4)}{x^2(x+4)^2} = -\frac{8(x+2)}{x^2(x+4)^2}.$$

Исследовав знак f' (рис. 45.10), приходим к выводу, что функция f убывает на каждом из промежутков $[-2; 0)$ и $(0; +\infty)$, возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; -4)$ и $(-4; -2]$, $x_{max} = -2$, $f(-2) = -1$.

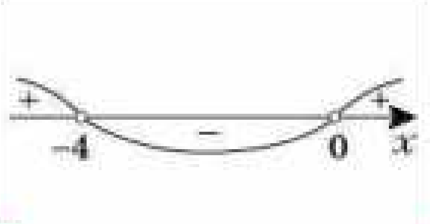


Рис. 45.9

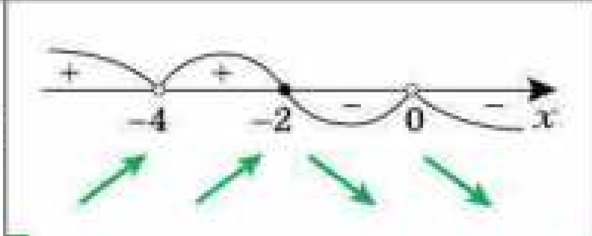


Рис. 45.10

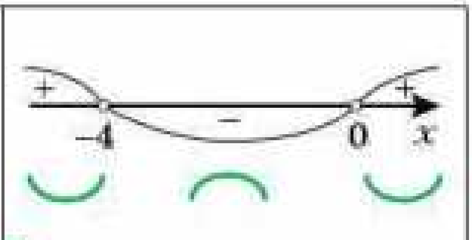


Рис. 45.11

7. Заметим, что если значения аргумента x выбирать всё бо́льшими и бо́льшими, то соответствующие значения функции $f(x) = \frac{4}{x^2 + 4x}$ всё меньше и меньше отличаются от числа 0 и могут стать сколь угодно малыми. Это свойство принято записывать так: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{x^2 + 4x} = 0$ или так: $\frac{4}{x^2 + 4x} \to 0$ при $x \to +\infty$. В этом случае прямую $y = 0$ называют *горизонтальной асимптотой* графика функции f при $x \to +\infty$. Аналогично можно установить, что прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой графика функции f при $x \to -\infty$.

Если значения аргумента x стремятся к нулю, оставаясь положительными, то соответствующие значения функции $f(x) = \frac{4}{x^2 + 4x}$ становятся всё бо́льшими и бо́льшими и могут стать бо́льшими произвольного наперёд заданного положительного числа. В этом случае прямую $x = 0$ называют *вертикальной асимптотой* графика функции f, когда x стремится к нулю справа. Прямая $x = 0$ также является *вертикальной асимптотой* графика функции f, когда x стремится к нулю слева. Функция f имеет ещё одну вертикальную асимптоту — прямую $x = -4$, когда x стремится к -4 как слева, так и справа.

Имеем: $f''(x) = -\frac{8x^2(x+4)^2 - 8(x+2)(2x(x+4)^2 + 2x^2(x+4))}{x^4(x+4)^4}$. Упростив дробь, получим $f''(x) = \frac{8(3x^2 + 12x + 16)}{x^3(x+4)^3}$.

Исследовав знак f'' (рис. 45.11), приходим к выводу, что функция f является выпуклой вниз на промежутках $(-\infty; -4)$ и $(0; +\infty)$, выпуклой вверх на промежутке $(-4; 0)$, точек перегиба не имеет.

Учитывая полученные результаты, строим график функции f (рис. 45.12). ■

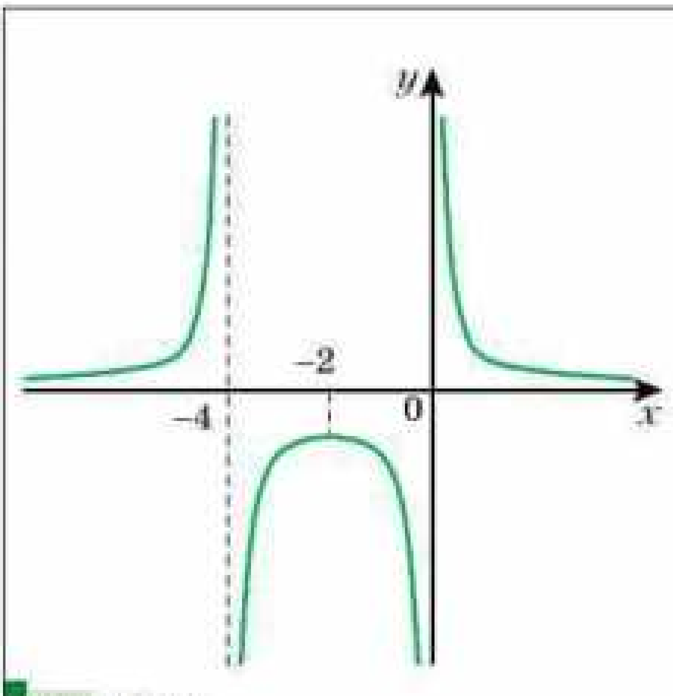


Рис. 45.12

В примере 2 при исследовании свойств функции f было установлено, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Функцию, обладающую таким свойством, называют **бесконечно малой при $x \to +\infty$.**

Например, функции $g(x) = \frac{1}{x}$ и $h(x) = \frac{1}{x^2}$ являются бесконечно малыми при $x \to +\infty$.

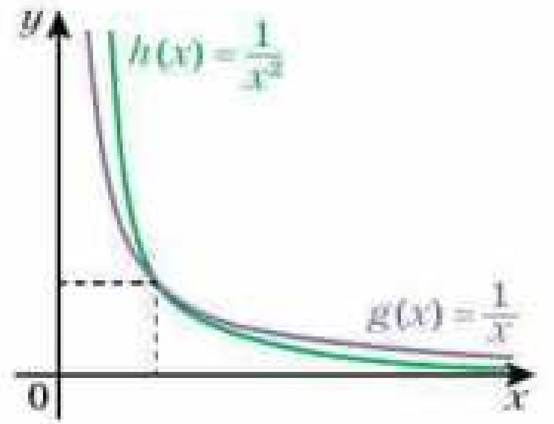


Рис. 45.13

Если функции h и g являются бесконечно малыми при $x \to +\infty$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$, то говорят, что функция h является **бесконечно малой более высокого порядка** по сравнению с функцией g при $x \to +\infty$. Так, функция $h(x) = \frac{1}{x^2}$ является бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с функцией $g(x) = \frac{1}{x}$.

Заметим, что с увеличением значений аргумента точки графика функции h «быстрее» приближаются к оси абсцисс, чем соответствующие точки графика функции g (рис. 45.13).

Аналогично рассматривают и бесконечно малые функции при $x \to -\infty$.

Если вы хотите узнать больше о бесконечно малых, а также о бесконечно больших функциях, то советуем принять участие в работе над проектом «Бесконечно большие и бесконечно малые функции» (с. 418).

Пример 3. Пользуясь графиком функции $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$, определите, сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$ в зависимости от значения параметра a.

Решение. Функция определена на множестве действительных чисел, то есть $D(f) = \mathbf{R}$.

Имеем: $f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2) = 4x(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$.

Рис. 45.14

Следовательно, функция f имеет три критические точки: $-\sqrt{2}$; 0; $\sqrt{2}$. Исследовав знак производной (рис. 45.14), получаем: функция f возрастает на промежутках $[-\sqrt{2}; 0]$ и $[\sqrt{2}; +\infty)$, убывает на промежутках $(-\infty; -\sqrt{2}]$ и $[0; \sqrt{2}]$, $x_{\min} = -\sqrt{2}$, $x_{\min} = \sqrt{2}$, $x_{\max} = 0$. Имеем: $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = -1$, $f(0) = 3$.

Учитывая полученные результаты, строим график функции (рис. 45.15).

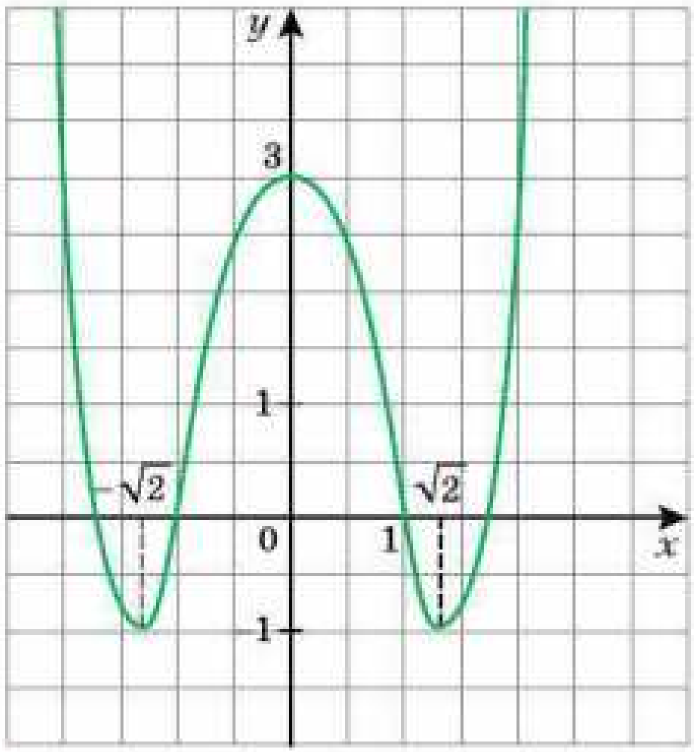


Рис. 45.15

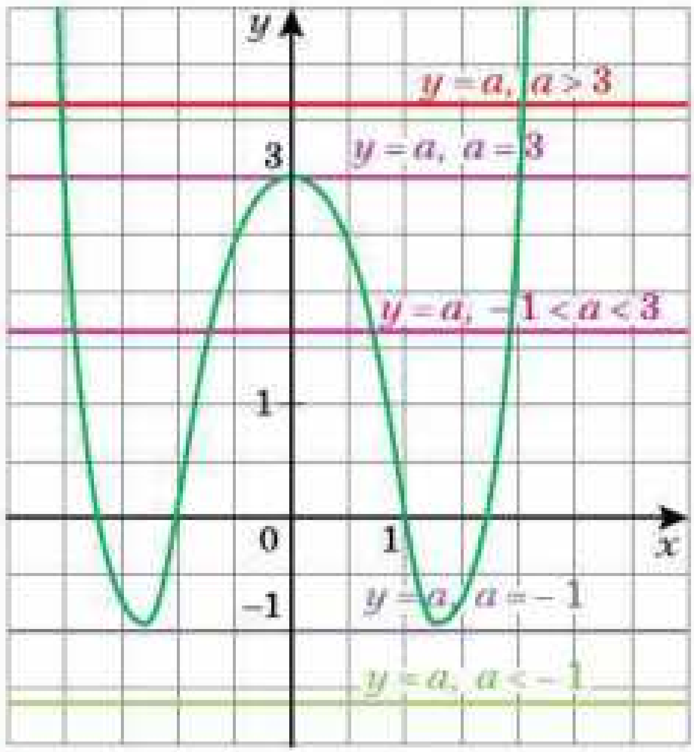


Рис. 45.16

Пользуясь построенным графиком, определяем количество корней уравнения $f(x) = a$ в зависимости от значения параметра a (рис. 45.16):

если $a < -1$, то корней нет;

если $a = -1$ или $a > 3$, то 2 корня;

если $a = 3$, то 3 корня;

если $-1 < a < 3$, то 4 корня.

Замечание. Из решения данной задачи исключены пункты 2—4, 7 плана исследования свойств функции. Свойства функции, которые исследуются в этих пунктах, не используются при определении количества корней уравнения $f(x) = a$. ■

Пример 4. Исследуйте функцию $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3 - 2}$ и постройте её график.

Решение.

1. Функция определена на множестве $(-\infty; \sqrt[3]{2}) \cup (\sqrt[3]{2}\ +\infty)$.

2. Функция не является ни чётной, ни нечётной.

3. Решив уравнение $\dfrac{x^4}{x^3 - 2} = 0$, определяем, что $x = 0$ — единственный нуль данной функции.

4. $f(x) > 0$ при $x \in (\sqrt[3]{2}; +\infty)$, $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \sqrt[3]{2})$.

5—6. Имеем: $f'(x) = \dfrac{x^6 - 8x^3}{(x^3 - 2)^2} = \dfrac{x^3(x^3 - 8)}{(x^3 - 2)^2}$.

Исследовав знак f' (рис. 45.17), приходим к выводу, что функция f убывает на промежутках $[0; \sqrt[3]{2})$ и $(\sqrt[3]{2}; 2]$, возрастает на промежутках $(-\infty; 0]$ и $[2; +\infty)$, $x_{\min} = 2$, $f(2) = \frac{8}{3}$, $x_{\max} = 0$, $f(0) = 0$.

7. Имеем: $f''(x) = \frac{12x^2(x^3+4)}{(x^3-2)^3}$.

Исследовав знак f'' (рис. 45.18), приходим к выводу, что $x = -\sqrt[3]{4}$ — точка перегиба и $f(-\sqrt[3]{4}) = -\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}$, функция f является выпуклой вниз на промежутках $(-\infty; -\sqrt[3]{4}]$ и $(\sqrt[3]{2}; +\infty)$, выпуклой вверх на $[-\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{2})$.

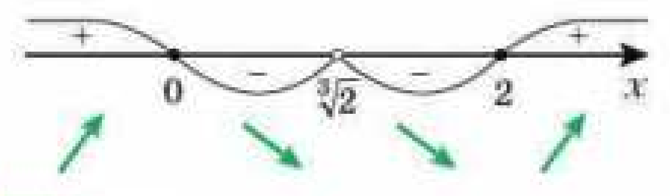


Рис. 45.17

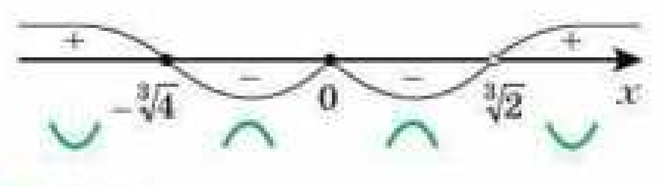


Рис. 45.18

Прямая $x = \sqrt[3]{2}$ — вертикальная асимптота графика данной функции.

Имеем: $f(x) = \frac{x^4}{x^3-2} = \frac{(x^4-2x)+2x}{x^3-2} = x + \frac{2x}{x^3-2}$.

Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^3-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2 - \frac{2}{x}} = 0$, то при $x \to +\infty$ расстояния от точек графика функции f до соответствующих точек прямой $y = x$ становятся всё меньшими и меньшими и могут стать меньше произвольного наперёд заданного положительного числа. В этом случае прямую $y = x$ называют *наклонной асимптотой* графика функции f при $x \to +\infty$. Также можно показать, что прямая $y = x$ является наклонной асимптотой графика функции f при $x \to -\infty$.

Учитывая полученные результаты, строим график функции (рис. 45.19). ■

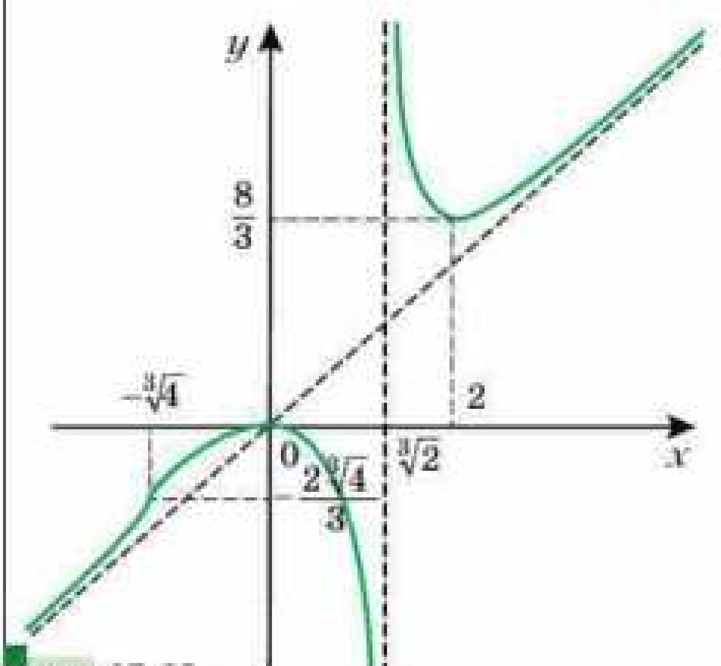


Рис. 45.19

Опишите схему исследования функции.

Упражнения

45.1. Исследуйте данную функцию и постройте её график:

1) $f(x) = 3x - x^3 - 2$;
2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$;
3) $f(x) = 3x - \frac{x^3}{9}$;
4) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - x^3$;
5) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$;
6) $f(x) = (x + 3)^2(x - 1)^2$.

45.2. Исследуйте данную функцию и постройте её график:

1) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$;
2) $f(x) = x - x^3$;
3) $f(x) = \frac{x^4}{2} - 4x^2$;
4) $f(x) = 8x^2 - 7 - x^4$.

45.3. Постройте график функции:

1) $f(x) = \frac{4 - x}{x + 2}$;
2) $f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$;
3) $f(x) = \frac{6x - 6}{x^2 + 3}$;
4) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$;
5) $f(x) = \frac{x}{4 - x^2}$;
6) $f(x) = -\frac{2x}{x^2 + 1}$;
7) $f(x) = \frac{2(x - 1)}{x^2}$;
8) $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$.

45.4. Постройте график функции:

1) $f(x) = \frac{x - 3}{x - 1}$;
2) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$;
3) $f(x) = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$;
4) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$;
5) $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 9}$;
6) $f(x) = \frac{2x}{(x + 1)^2}$.

45.5. Постройте график функции $f(x) = x^2(2x - 3)$ и определите, пользуясь им, количество корней уравнения $f(x) = a$ в зависимости от значения параметра a.

45.6. Постройте график функции $f(x) = -x^2(x^2 - 4)$ и определите, пользуясь им, количество корней уравнения $f(x) = a$ в зависимости от значения параметра a.

45.7. Постройте график функции:

1) $f(x) = x + \frac{1}{x}$;
2) $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$;
3) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$;
4) $f(x) = \frac{x^4 - 8}{(x + 1)^4}$.

45.8. Постройте график функции:

1) $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$;
2) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$;
3) $f(x) = \frac{x^3 - 4}{(x - 1)^3}$.

Алеф-17

«Алеф-17». В мыслях сразу возникают образы из очередного блокбастера — космического корабля, мчащегося к неизвестной планете, или загадочного вируса, атакующего Землю... Однако вы вряд ли догадаетесь, что этот знак (рис. 45.19) связан с... московской математической школой Н. Н. Лузина — абсолютно уникальным явлением в истории науки.

$$\aleph_{17}$$

Рис. 45.19

В начале XX в. математическая жизнь в Московском университете была довольно размеренной и академичной. Заслуженный профессор МГУ В. М. Тихомиров вспоминает, что в то время в университете работал всего один математический семинар, посвящённый, главным образом, научным интересам его руководителя Д. Ф. Егорова. И вдруг буквально за несколько лет молодой математик Н. Н. Лузин, ученик Д. Ф. Егорова, совершенно изменяет ритм университетской жизни. Количество математических семинаров начало быстро расти и со временем стало исчисляться десятками, а потом перевалило за сотню.

Николай Николаевич Лузин 1883—1950

За короткий промежуток времени Н. Н. Лузин собрал вокруг себя невероятное количество молодых математиков, многие из которых стали учёными с мировым именем и создали собственные научные школы. Ни в одном другом научном центре мира того времени не было подобного созвездия выдающихся математиков! Когда в середине 30-х гг. XX в. одного известного американского учёного попросили назвать крупнейших молодых математиков современности, он назвал четырёх московских учёных: А. О. Гельфонда, А. Н. Колмогорова, Л. С. Понтрягина и Л. Г. Шнирельмана.

Недавно на механико-математическом факультете было создано «генеалогическое» древо учеников Н. Н. Лузина (рис. 45.20). Во всемирной компьютерной базе данных «Математическая генеалогия» Н. Н. Лузин имеет более 5000 научных потомков!

Н. Н. Лузин решительно реформировал методы подготовки молодых математиков. Даже начинающим студентам предлагалось сразу браться за решение открытых математических проблем. Целью ставилось получение самостоятельных научных результатов, развитие способности видеть новые задачи, искать нестандартные пути их решения. Говорят,

Рис. 45.20

что существовало негласное правило: если у аспиранта, сдающего экзамен, уже был самостоятельный научный результат, то вопросы задавали только по этому результату. «Мы все стремились вместо изучения толстой монографии в 200—300 страниц придумать новую постановку задачи», — вспоминает академик М. А. Лаврентьев.

Атмосфере школы Лузина были присущи юмор, ирония и театральность. Например, Н. Н. Лузин мог закончить лекцию словами: «Теперь перед нашим интеллектуальным взором открывается зрелище необычайной красоты». Среди членов школы была введена иерархия по их достижениям с помощью так называемых «алефов» — символов на основе первой буквы $\aleph$ некоторых алфавитов (еврейского, финикийского, арабского и др., читается «алеф»). Дело в том, что в математике символы $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, ... используют для классификации множеств по их мощности. Каждый вступающий в ряды учеников Лузина получал звание $\aleph_0$ — «алеф-нуль». За каждое достижение к индексу добавлялась единица. Всемирно известные учёные П. С. Александров и П. С. Урысон получили высокие звания $\aleph_5$ — «алеф-5», а символ $\aleph_{17}$ — «алеф-17» стал гербом школы.

Математическая школа Лузина стала ещё одним ярким подтверждением глубоких математических традиций в России. Поэтому все, кто любит и увлекается этой наукой, могут смело выбирать замечательную профессию математика.

глава

6 ПРИЛОЖЕНИЕ
Элементы теории чисел. Метод математической индукции

- Изучая материал этой главы, вы ознакомитесь с целым рядом понятий и теорем, связанных с делимостью целых чисел.
- Научитесь доказывать свойства и признаки делимости нацело.
- Ознакомитесь с эффективным приёмом нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел.
- Узнаете об особой роли простых чисел.
- Изучите основную теорему арифметики.
- Научитесь доказывать утверждения методом математической индукции.

§ 46 Делимость нацело и её свойства

Определение

Говорят, что целое число a делится нацело на целое число b, $b \neq 0$, если существует такое целое число k, что $a = bk$.

Если целое число a делится нацело на целое число b, то пишут: $a \,\vdots\, b$. Например, $12 \,\vdots\, -3$, $0 \,\vdots\, 1000$, $-2 \,\vdots\, -1$.

Если $a \,\vdots\, b$, то число b называют **делителем** числа a, а число a — **кратным** числа b. Также говорят, что число a кратно числу b.

Например, $\{-4, 4, -2, 2, -1, 1\}$ — множество делителей числа 4; $\{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ — множество чисел, кратных числу 3.

Рассмотрим **основные свойства делимости нацело** (буквами обозначены целые числа).

1. ***Если*** $\boldsymbol{a \neq 0}$***, то*** $\boldsymbol{a \,\vdots\, a}$.
2. ***Если*** $\boldsymbol{a \neq 0}$***, то*** $\boldsymbol{0 \,\vdots\, a}$.
3. ***Если*** $\boldsymbol{a \,\vdots\, b}$***, то*** $\boldsymbol{ka \,\vdots\, b}$.
4. ***Если*** $\boldsymbol{a \,\vdots\, b}$ ***и*** $\boldsymbol{b \,\vdots\, c}$***, то*** $\boldsymbol{a \,\vdots\, c}$.
5. ***Если*** $\boldsymbol{a \,\vdots\, m}$ ***и*** $\boldsymbol{b \,\vdots\, n}$***, то*** $\boldsymbol{ab \,\vdots\, mn}$.
6. ***Если*** $\boldsymbol{a \,\vdots\, c}$ ***и*** $\boldsymbol{b \,\vdots\, c}$***, то*** $\boldsymbol{(a \pm b) \,\vdots\, c}$.

Эти свойства доказывают с помощью определения деления нацело. Докажем, например, свойство 6 (остальные свойства докажите самостоятельно).

Так как $a \,\vdots\, c$ и $b \,\vdots\, c$, то существуют такие целые числа m и n, что $a = mc$ и $b = nc$.

Имеем: $a \pm b = mc \pm nc = (m \pm n)\, c$. Так как $(m \pm n) \in \mathbb{Z}$, то по определению деления нацело получаем, что $(a \pm b) \,\vdots\, c$.

Пример 1. Целые числа a, b и c таковы, что $(a+b) \vdots c$, $ab \vdots c$. Докажите, что $(a^3 - b^3) \vdots c$.

Решение. Имеем: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)((a + b)^2 - ab)$. Так как $(a + b)^2 \vdots c$ и $ab \vdots c$, то по свойству 6 $((a + b)^2 - ab) \vdots c$. Тогда из свойства 3 следует справедливость доказываемого утверждения. ■

Решить уравнение с двумя переменными в целых (натуральных) числах означает найти все пары целых (натуральных) чисел, являющиеся решениями этого уравнения.

Пример 2. Решите в целых числах уравнение $x^2 + xy - x - y = 5$.

Решение. Разложим левую часть уравнения на множители. Имеем: $x(x + y) - (x + y) = 5$; $(x + y)(x - 1) = 5$. Отсюда получаем, что значения выражений $x + y$ и $x - 1$ являются делителями числа 5. Тогда возможны четыре случая:

1) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x - 1 = 1. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} y = 3, \\ x = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x - 1 = 5. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} y = -5, \\ x = 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = -5, \\ x - 1 = -1. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} y = -5, \\ x = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y = -1, \\ x - 1 = -5. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} y = 3, \\ x = -4. \end{cases}$

Ответ: (2; 3), (6; –5), (0; –5), (–4; 3). ■

Пример 3. Решите в целых числах уравнение $x^2 - y^2 = 14$.

Решение. Имеем: $(x + y)(x - y) = 14$. Далее можно применить метод, описанный в примере 2. Однако эффективнее воспользоваться такими соображениями: значения выражений $x + y$ и $x - y$ всегда имеют одинаковую чётность (либо оба чётные, либо оба нечётные), следовательно, их произведение является либо числом нечётным, либо числом, кратным 4.

Число 14, стоящее в правой части уравнения, является чётным и не делится нацело на 4. Поэтому рассматриваемое уравнение не имеет решений в целых числах. ■

Пример 4. Докажите, что если $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, то для любых целых чисел p и q, $p \neq q$, справедливо следующее: $(P(p) - P(q)) \vdots (p - q)$.

Решение. Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$, где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — целые числа. Тогда $P(p) - P(q) = a_n(p^n - q^n) + a_{n-1}(p^{n-1} - q^{n-1}) + \ldots + a_1(p - q)$. Из формулы разложения на множители выражения вида $a^m - b^m$ следует, что разность $P(p) - P(q)$ можно представить в виде $(p - q)k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Отсюда получаем, что $(P(p) - P(q)) \vdots (p - q)$. ■

1. Когда говорят, что целое число a делится нацело на целое число b?
2. Какое число называют делителем числа a?
3. Какое число называют кратным числа b?
4. Сформулируйте свойства делимости нацело.

Упражнения

46.1. Число[1] m кратно 6. Докажите, что $(m^2 - 4m) \vdots 12$.

46.2. Число n кратно 4. Докажите, что $(n^2 + 8n) \vdots 16$.

46.3. Докажите, что если $a \vdots c$ и $(a + b) \vdots c$, то $b \vdots c$.

46.4. Числа a и b таковы, что каждое из чисел $a + 3$ и $b + 29$ кратно 13. Докажите, что число $a - b$ также кратно 13.

46.5. Числа m и n таковы, что каждое из чисел $m + 5$ и $39 - n$ кратно 17. Докажите, что число $m + n$ также кратно 17.

46.6. Числа a, b и m таковы, что $am \vdots (a + b)$. Докажите, что $bm \vdots (a + b)$.

46.7. Числа x, y и z таковы, что $xz \vdots (z - y)$. Докажите, что $xy \vdots (z - y)$.

46.8. Числа m, n и k таковы, что $(m - n) \vdots k$ и $mn \vdots k$. Докажите, что $(m^3 + n^3) \vdots k$.

46.9. Решите в целых числах уравнение:

1) $9x^2 - y^2 = 6$;
2) $x^2 + 2xy = 2x + 9$;
3) $x^2 + xy - 6y^2 = 6$;
4) $x^2 - 2xy - 3y^2 + x + y = 14$.

46.10. Решите в целых числах уравнение:

1) $x^2 - 4y^2 = 5$;
2) $y^2 + 3xy = 15 + y$;
3) $x^2 - 3xy + 3y - x = 10$;
4) $2y^2 - xy - x^2 = 2$.

46.11. Существует ли многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $P(1) = 17$, $P(9) = 53$?

46.12. Решите в целых числах уравнение:

1) $xy = x + y$;
2) $xy - x - 2y = 5$.

46.13. Решите в целых числах уравнение $2xy + 2x - 3y - 4 = 0$.

---

[1] В упражнениях к этому параграфу строчными латинскими буквами обозначены целые числа. Случаи, когда буквой обозначено натуральное число, будут оговорены отдельно.

46.14. Докажите, что при любых нечётных натуральных значениях n значение выражения $1^n + 2^n + 3^n + \ldots + 9^n$:

1) кратно 5; 2) не кратно 10.

46.15. Докажите, что при любых нечётных натуральных значениях $n > 1$ значение выражения $1^n + 2^n + 3^n + \ldots + 99^n$ кратно 100.

46.16. Числа x и y таковы, что значение выражения $3x + 8y$ кратно 19. Докажите, что значение выражения $13x + 3y$ кратно 19.

46.17. Числа c и d таковы, что значение выражения $2c + 5d$ кратно 17. Докажите, что значение выражения $11c + 2d$ кратно 17.

46.18. Числа x и y таковы, что $(3x + 10y) \vdots 13$. Докажите, что $(3x + 10y)(3y + 10x) \vdots 169$.

46.19. Натуральные числа m и n таковы, что $n^2 \vdots (m + n)$. Докажите, что $m^3 \vdots (m + n)$.

46.20. Трёхзначное число $\overline{abc}$ кратно числу 37. Докажите, что сумма чисел $\overline{bca}$ и $\overline{cab}$ также кратна числу 37.

46.21. Цифры a и b трёхзначного числа $m = \overline{aba}$ таковы, что $(a + b) \vdots 7$. Докажите, что $m \vdots 7$.

46.22. Докажите, что количество делителей квадрата натурального числа — число нечётное. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

46.23. Дано 19-значное число, десятичная запись которого не содержит нулей. Докажите, что в записи этого числа можно зачеркнуть несколько цифр так, чтобы число, полученное в результате, было кратным числу 111.

46.24. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Разные числа a, b и c таковы, что $P(a) = P(b) = P(c) = -1$. Докажите, что не существует такого $x_0 \in \mathbf{Z}$, что $P(x_0) = 0$.

§ 47 Деление с остатком. Сравнения по модулю и их свойства

Вы знаете, что если натуральное число a не делится нацело на натуральное число b и $a > b$, то можно выполнить деление с остатком.

Например, при делении числа 47 на 5 в частном получаем 9, а в остатке 2. Пишут: $47 : 5 = 9$ (ост. 2) или $47 = 5 \cdot 9 + 2$ и говорят, что число 47 при делении на 5 даёт в остатке число 2.

В теории делимости важную роль играет следующая теорема.

Теорема 47.1

(теорема о делении с остатком)

Для любого целого числа a и натурального числа b существует единственная пара целых чисел q и r таких, что $a = bq + r$, где $0 \leqslant r < b$.

Число r называют **остатком** при делении числа a на число b. Если $r \neq 0$, то число q называют **неполным частным** при делении числа a на число b.

Следующие примеры иллюстрируют эту теорему.

Для чисел $a = 2$, $b = 7$ существует пара $q = 0$ и $r = 2$ такая, что $2 = 7 \cdot 0 + 2$.

Для чисел $a = -2$, $b = 5$ существует пара $q = -1$ и $r = 3$ такая, что $-2 = 5 \cdot (-1) + 3$.

Для чисел $a = -8$, $b = 4$ существует пара $q = -2$ и $r = 0$ такая, что $-8 = 4 \cdot (-2) + 0$.

Теперь докажем теорему.

Доказательство

Если $a \vdots b$, то существует единственное целое число q такое, что $a = bq$. В этом случае $r = 0$.

Пусть теперь число a не делится нацело на число b. Отметим на координатной прямой множество чисел, кратных числу b (рис. 47.1):

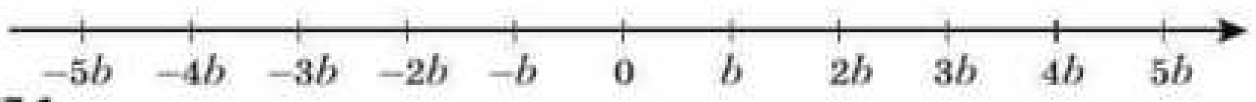


Рис. 47.1

Поскольку число a не делится нацело на число b, то изображение числа a на координатной прямой не совпадает ни с одной из отмеченных точек, а значит, принадлежит одному из промежутков вида $(bq;\ bq + b)$, где $q \in \mathbb{Z}$. Тогда $bq < a < bq + b$ (рис. 47.2). Отсюда $0 < a - bq < b$.

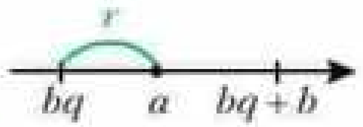


Рис. 47.2

Обозначим разность $a - bq$ буквой r. Тогда $0 < r < b$.

Имеем: $a - bq = r$, $a = bq + r$.

Для заданных чисел a и b промежуток $(bq;\ bq + b)$, которому принадлежит число a, определяется однозначно. Поэтому числа a и b определяют единственную пару чисел q и r. ■

Поскольку остаток — неотрицательное число, меньшее делителя, то любое целое число при делении на 2 даёт в остатке либо 0, либо 1. Мы часто пользуемся этим фактом, разбивая множество целых чисел на два непересекающихся подмножества: множество чётных чисел и множество нечётных чисел.

При делении целого числа на 3 можно получить только такие остатки: 0, 1, 2. Поэтому множество $\boldsymbol{Z}$ можно разбить на 3 непересекающихся подмножества:

$$\boldsymbol{Z} = \{x \mid x = 3n,\ n \in \boldsymbol{Z}\} \cup \{x \mid x = 3n + 1,\ n \in \boldsymbol{Z}\} \cup$$
$$\cup \{x \mid x = 3n + 2,\ n \in \boldsymbol{Z}\}.$$

Вообще, для заданного натурального числа m, где $m > 1$, множество $\boldsymbol{Z}$ можно разбить на m непересекающихся подмножеств таким образом, что первому подмножеству будут принадлежать все числа, которые при делении на m дают в остатке 0, второму — которые дают в остатке 1, третьему — которые дают в остатке 2, и т. д., m-му — которые дают в остатке $m - 1$. Можно записать:

$$\boldsymbol{Z} = \{x \mid x = mn,\ n \in \boldsymbol{Z}\} \cup \{x \mid x = mn + 1,\ n \in \boldsymbol{Z}\} \cup \ldots \cup$$
$$\cup \{x \mid x = mn + m - 1,\ n \in \boldsymbol{Z}\}.$$

Теорема 47.2

Если целые числа a и b при делении на натуральное число m дают одинаковые остатки, то $(a - b) \vdots m$.

Доказательство

Воспользовавшись теоремой 47.1, можно записать: $a = mq_1 + r$, $b = mq_2 + r$, где q_1, q_2 и r — целые числа, причём $0 \leqslant r < m$. Тогда $a - b = m(q_1 - q_2)$. Отсюда $(a - b) \vdots m$. ■

Справедлива и обратная теорема.

Теорема 47.3

Если целые числа a и b таковы, что $(a - b) \vdots m$, где $m \in N$, то числа a и b дают одинаковые остатки при делении на m.

Воспользовавшись методом доказательства от противного, докажите эту теорему самостоятельно.

Определение

Целые числа a и b называют сравнимыми по модулю m, где $m \in N$, если эти числа дают одинаковые остатки при делении на число m.

Пишут: $a \equiv b \pmod{m}$. Читают: «a сравнимо с b по модулю m».

Например, $5 \equiv 8 \pmod 3$, $7 \equiv -1 \pmod 4$, $18 \equiv 0 \pmod 9$, $25 \equiv 35 \pmod 5$.

Понятие сравнения по модулю ввёл выдающийся немецкий математик Карл Фридрих Гаусс.

Карл Фридрих Гаусс (1777—1855)

Труды Гаусса оказали значительное влияние на развитие алгебры, теории чисел, дифференциальной геометрии, теории электричества и магнетизма, геодезии, теоретической астрономии.

Теорема 47.4

Для того чтобы целые числа a и b были сравнимы по модулю m, где $m \in N$, необходимо и достаточно, чтобы разность $a - b$ делилась нацело на число m.

Справедливость этой теоремы следует из теорем 47.2 и 47.3. Убедитесь в этом самостоятельно.

Рассмотрим основные свойства сравнений (буквами a, b, c и d обозначены целые числа, буквами m и n — натуральные числа).

1. ***Если*** $a \equiv b \pmod m$ ***и*** $b \equiv c \pmod m$, ***то*** $a \equiv c \pmod m$.
2. ***Если*** $a \equiv b \pmod m$, ***то*** $a + c \equiv b + c \pmod m$.
3. ***Если*** $a \equiv b \pmod m$, ***то*** $ac \equiv bc \pmod m$.
4. ***Если*** $a \equiv b \pmod m$ ***и*** $c \equiv d \pmod m$, ***то*** $a \pm c \equiv b \pm d \pmod m$.
5. ***Если*** $a \equiv b \pmod m$ ***и*** $c \equiv d \pmod m$, ***то*** $ac \equiv bd \pmod m$.
6. ***Если*** $a \equiv b \pmod m$, ***то*** $a^n \equiv b^n \pmod m$.

Докажем свойство 5.

Из условия следует, что $(a - b) \,\vdots\, m$. Отсюда $a - b = mt_1$, то есть $a = b + mt_1$, где $t_1 \in Z$. Также $(c - d) \,\vdots\, m$. Отсюда $c = d + mt_2$, где $t_2 \in Z$.

Имеем: $ac - bd = (b + mt_1)(d + mt_2) - bd = bmt_2 + dmt_1 + m^2t_1t_2 = m(bt_2 + dt_1 + mt_1t_2)$. Следовательно, $(ac - bd) \,\vdots\, m$. Тогда $ac \equiv bd \pmod m$.

Остальные свойства докажите самостоятельно.

Свойства 4 и 5 можно обобщить и для тех случаев, когда количество сравнений больше двух.

Если $a_1 \equiv b_1 \pmod m$, $a_2 \equiv b_2 \pmod m$, ..., $a_n \equiv b_n \pmod m$,

то $a_1 + a_2 + ... + a_n \equiv b_1 + b_2 + ... + b_n \pmod m$

и $a_1a_2 ... a_n \equiv b_1b_2 ... b_n \pmod m$.

Пример 1. Докажите, что среди пяти последовательных целых чисел есть только одно, кратное 5.

Решение. Рассмотрим пять последовательных целых чисел: n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ и $n + 4$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. Разность любых двух таких чисел не делится нацело на 5. Следовательно, все эти пять чисел дают разные остатки при делении на 5. Разных остатков при делении на 5 также 5. Следовательно, ровно одно из этих чисел при делении на 5 даёт в остатке 0. ■

Замечание. Рассуждая аналогично, можно доказать, что среди m последовательных целых чисел только одно кратно m.

Пример 2. Найдите остаток при делении числа 7^{29} на 5.

Решение. Задача сводится к тому, чтобы найти целое число x, удовлетворяющее двум условиям: $0 \leqslant x < 5$ и $7^{29} \equiv x \pmod 5$. Имеем:

$$7^2 \equiv -1 \pmod 5;$$

$$7^{28} \equiv (-1)^{14} \equiv 1 \pmod 5.$$

Отсюда $7^{29} \equiv 7 \equiv 2 \pmod 5$.

Следовательно, искомым остатком является число 2.

Решение этой задачи допускает и другие схемы. Например,

$$7 \equiv 2 \pmod 5;$$

$$7^4 \equiv 2^4 \equiv 1 \pmod 5.$$

Отсюда $7^{28} \equiv 1^7 \pmod 5$.

Тогда $7^{29} \equiv 7 \equiv 2 \pmod 5$, т. е. $7^{29} \equiv 2 \pmod 5$. ■

Пример 3. Найдите все натуральные значения n, при которых значение выражения $2^n - 1$ делится нацело на 7.

Решение. Рассмотрим три возможных случая: $n = 3k$, $n = 3k - 1$ и $n = 3k - 2$, $k \in \boldsymbol{N}$. Нетрудно убедиться (сделайте это самостоятельно), что $2^{3k} - 1 \equiv 0 \pmod 7$, $2^{3k-1} - 1 \equiv 3 \pmod 7$ и $2^{3k-2} - 1 \equiv 1 \pmod 7$. Следовательно, ответом являются все натуральные значения n, кратные 3.

Покажем другое решение этой задачи. Из курса информатики вы знаете, что, помимо десятичной, существуют и другие системы счисления. Например, любое число может быть представлено в виде $2^n \cdot a_n + 2^{n-1} \cdot a_{n-1} + \ldots + 2a_1 + a_0$, где $a_n = 1$, а каждое из чисел $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ принимает одно из двух значений: 0 или 1. Например, для числа 7 запишем: $7 = 2^2 \cdot 1 + 2^1 \cdot 1 + 1$. Таким образом, запись числа 7 в двоичной системе имеет вид: 111. Имеем: $2^n - 1 = (2 - 1)(2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1)$. Тогда двоичная запись числа $2^n - 1$ имеет вид: $\underbrace{11\ldots1}_{n}$. Теперь становится очевидным, что число $\underbrace{11\ldots1}_{n}$ делится нацело на число 111 только при условии, что n кратно 3. ■

Если вы хотите узнать больше о двоичной (q-ичной) системе счисления, то советуем принять участие в работе над проектом «Системы счисления и кодирование» (с. 418).

Пример 4. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $2^{4n+3} + 13 \cdot 3^{2n}$ кратно 7.

Решение. Имеем: $2^{4n+3} + 13 \cdot 3^{2n} = 8 \cdot 16^n + 13 \cdot 9^n$. Очевидно, что $16 \equiv 9 \pmod 7$. Применяя последовательно свойства 6, 3 и 2 сравнений, запишем:

$$16^n \equiv 9^n \pmod 7,$$
$$8 \cdot 16^n \equiv 8 \cdot 9^n \pmod 7,$$
$$8 \cdot 16^n + 13 \cdot 9^n \equiv 8 \cdot 9^n + 13 \cdot 9^n \pmod 7.$$

Поскольку $8 \cdot 9^n + 13 \cdot 9^n = 21 \cdot 9^n$, то получаем:

$$8 \cdot 16^n + 13 \cdot 9^n \equiv 21 \cdot 9^n \pmod 7.$$

Правая часть последнего сравнения при делении на 7 даёт в остатке 0. Следовательно, таким же свойством обладает и левая часть сравнения, т. е. значение выражения $8 \cdot 16^n + 13 \cdot 9^n$ кратно 7. ■

Пример 5. Докажите, что из $n + 1$ целых чисел всегда можно выбрать два таких, разность которых делится нацело на n.

Решение. При делении целых чисел на n можно получить n разных остатков: $0, 1, \ldots, n - 1$. Так как заданных чисел $n + 1$, то как минимум два из них дают одинаковые остатки при делении на n. Тогда их разность будет делиться нацело на n. ■

При решении этой задачи был использован приём, который называют принцип Дирихле. Его суть можно выразить в такой образной форме: если $n + 1$ кролик рассадить в n клеток, то найдётся клетка, в которой сидят по крайней мере два кролика. В решённой задаче роль кроликов исполнило $n + 1$ данное число, а роль клеток — все возможные остатки при делении на n. Отметим, что этот же приём используется при решении задач 46.23, 47.36, 47.37.

Несмотря на простоту, принцип Дирихле лежит в основе доказательства многих фундаментальных теорем. Так, доказательства ряда важных утверждений о приближении иррациональных чисел рациональными опираются на принцип Дирихле. Если вы хотите узнать больше об этих результатах, то советуем принять участие в работе над проектом «Теоремы о приближении действительных чисел рациональными» (с. 418).

?

1. Сформулируйте теорему о делении с остатком.

2. Какие числа называют сравнимыми по модулю m, где $m \in N$?

3. Сформулируйте необходимое и достаточное условие того, что целые числа a и b сравнимы по модулю m, где $m \in \mathbf{N}$.

4. Сформулируйте свойства сравнений.

Упражнения

47.1. Найдите неполное частное и остаток при делении числа[1] a на число b, если:

1) $a = 8$, $b = 13$; 2) $a = -26$, $b = 3$; 3) $a = -1$, $b = 7$.

47.2. Найдите неполное частное и остаток при делении числа m на число n, если:

1) $m = 9$, $n = 15$; 2) $m = -31$, $n = 10$; 3) $m = -6$, $n = 11$.

47.3. Даны попарно непересекающиеся множества A, B и X, причём $A \cup B \cup X = \mathbf{Z}$. Найдите множество X, если $A = \{3k \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{3k + 2 \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

47.4. Какой остаток при делении на 3 даёт число вида $3k - 2$, где $k \in \mathbf{Z}$?

47.5. Какой остаток при делении на 6 даёт число вида $6n - 1$, где $n \in \mathbf{Z}$?

47.6. Число m кратно 6. Чему может быть равен остаток при делении числа m на 18?

47.7. Число n кратно 4. Чему может быть равен остаток при делении числа n на 16?

47.8. Число a при делении на 6 даёт в остатке 3, а при делении на 4 даёт в остатке 1. Найдите остаток при делении числа a на 12.

47.9. Число b при делении на 5 даёт в остатке 2, а при делении на 3 даёт в остатке 1. Найдите остаток при делении числа b на 15.

47.10. Существует ли такое число x, которое при делении: 1) на 30 и 18 даёт соответственно остатки 13 и 5; 2) на 4 и 5 даёт соответственно остатки 3 и 4?[2]

47.11. Вместо звёздочки запишите такое наименьшее неотрицательное целое число, чтобы полученное сравнение было правильным:

1) $-43 \equiv * \pmod{5}$; 2) $* \equiv -2 \pmod{18}$; 3) $* \equiv 6 \pmod{2}$.

47.12. Вместо звёздочки запишите такое наименьшее неотрицательное целое число, чтобы полученное сравнение было правильным:

1) $84 \equiv * \pmod{9}$; 2) $-26 \equiv * \pmod{6}$; 3) $* \equiv -3 \pmod{11}$.

---

[1] В упражнениях к этому параграфу строчными латинскими буквами обозначены целые числа.

[2] Можно поставить более общую задачу: существует ли такое число x (а если существует, то как его найти), которое при делении на b_1 и b_2 даёт соответственно остатки r_1 и r_2? Достаточное условие существования такого числа даёт теорема, которую называют китайской теоремой об остатках. Если вы хотите узнать об этой теореме и её применении, то советуем принять участие в работе над соответствующим проектом (с. 418).

47.13. Известно, что $a \equiv -11 \pmod 8$, $b \equiv -2 \pmod 8$. Найдите остаток при делении на 8 числа: 1) $a + b$; 2) $a - b$; 3) $2a - 3b$; 4) ab; 5) a^2; 6) b^3.

47.14. Известно, что $a \equiv -4 \pmod 6$, $b \equiv -9 \pmod 6$. Найдите остаток при делении на 6 числа: 1) $3a + 4b$; 2) $a^2 - b$; 3) $b^2 + ba$.

◆◆

47.15. Докажите, что квадрат целого числа при делении на 3 даёт в остатке 0 или 1.

47.16. Докажите, что квадрат целого числа при делении на 4 даёт в остатке 0 или 1.

47.17. Докажите, что квадрат нечётного числа при делении на 8 даёт в остатке 1.

47.18. Докажите, что значение выражения m^3 при делении на 7 даёт в остатке 0, 1 или 6.

47.19. Докажите, что значение выражения k^3 при делении на 9 даёт в остатке 0, 1 или 8.

47.20. Числа a и b таковы, что $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 3$. Докажите, что $a \equiv 0 \pmod 3$ и $b \equiv 0 \pmod 3$.

47.21. Известно, что $(m^2 + n^2) \vdots 7$. Докажите, что $(m^2 + n^2) \vdots 49$.

47.22. Решите в целых числах уравнение:

1) $x^2 - 3y = 8$; 3) $m^3 - 7n^2 = 19$;
2) $x^2 - 4y^3 = 11$; 4) $z^3 - 9t = 16$.

47.23. Решите в целых числах уравнение:

1) $x^2 - 3y^2 = 17$; 3) $8x^3 + 7y^3 = 38$.
2) $9x^2 - 28y = 15$;

◆◆◆

47.24. Найдите остаток при делении числа a на число b, если:

1) $a = 5^{99}$, $b = 3$; 2) $a = 7^{36}$, $b = 4$; 3) $a = 3^{70} + 2^{52}$, $b = 5$.

47.25. Найдите остаток при делении числа m на число n, если:

1) $m = 11^{43}$, $n = 7$; 2) $m = 13^{52}$, $n = 17$; 3) $m = 3^{30}$, $n = 31$.

47.26. Найдите все натуральные значения n, при которых значение выражения $3^n - 1$ делится нацело на 13.

47.27. Используя сравнения по модулю, докажите, что при любом натуральном значении n значение выражения:

1) $3^{2n} + 11 \cdot 5^n$ кратно 4; 4) $3^{3n+2} + 5 \cdot 2^{3n+1}$ кратно 19;
2) $21^n + 2^{2n+4}$ кратно 17; 5) $5^n + 8^n - 2^{n+1}$ кратно 3;
3) $4 \cdot 13^n + 37^n + 1$ кратно 6; 6) $2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}$ кратно 37.

47.28. Используя сравнения по модулю, докажите, что при любом натуральном значении n значение выражения:

1) $17^n + 25 \cdot 4^n$ кратно 13; 3) $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ кратно 11;
2) $15^n + 2^{3n} - 30$ кратно 7; 4) $2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$ кратно 17.

47.29. Сумма остатков при делении натурального числа n на числа 3, 6 и 9 равна 15. Найдите эти остатки.

47.30. Докажите, что среди чисел вида $4^n + 4^m$ (m и n — натуральные числа) нет ни одного квадрата натурального числа.

47.31. Докажите, что среди чисел вида $5^n + 5^m$ (m и n — натуральные числа) нет ни одного квадрата натурального числа.

47.32. О числах m, n, p, q, r и s известно, что $m^2 + n^2 + p^2 + q^2 + r^2 = s^2$. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел чётное.

47.33. Остаток при делении трёхзначного числа $n = \overline{aa5}$ на некоторое однозначное число равен 8. Найдите число n.

47.34. Остаток при делении трёхзначного числа $m = \overline{2bb}$ на некоторое однозначное число равен 8. Найдите число m.

47.35. При делении натурального числа n на 9 остаток равен неполному частному, при делении n на 14 остаток также равен неполному частному. Найдите все возможные значения n.

47.36. Докажите, что среди натуральных степеней числа 2 существуют две такие, что их разность кратна числу 1001.

47.37. Докажите, что для любого натурального числа n найдётся натуральное число, кратное n, в десятичной записи которого используются только цифры 1 и 0.

§ 48 Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух натуральных чисел. Взаимно простые числа

Если каждое из чисел[1] a и b делится нацело на число d, то число d называют **общим делителем** чисел a и b.

Если число d — общий делитель чисел a и b, то $d \leqslant a$ и $d \leqslant b$. Следовательно, множество общих делителей чисел a и b конечно. Выберем в этом множестве наибольший элемент. Его называют **наибольшим общим делителем** чисел a и b и обозначают НОД $(a; b)$.

Например, НОД (18; 12) = 6, НОД (5; 6) = 1, НОД (7; 14) = 7.

Теорема 48.1

Если $a > b$, то НОД $(a; b)$ = НОД $(a - b; b)$.

[1] В этом параграфе строчными латинскими буквами обозначены натуральные числа. Случаи, когда буквами обозначены целые числа, будут оговорены отдельно.

Доказательство

Пусть $a \vdots d$ и $b \vdots d$, тогда $(a - b) \vdots d$. Пусть $(a - b) \vdots d_1$ и $b \vdots d_1$, тогда $a \vdots d_1$. Получили, что любой общий делитель чисел a и b является общим делителем чисел $a - b$ и b. И наоборот, любой общий делитель чисел $a - b$ и b является общим делителем чисел a и b. Следовательно, множество общих делителей чисел a и b совпадает с множеством общих делителей чисел $a - b$ и b. Отсюда НОД $(a; b)$ = НОД $(a - b; b)$. ■

С помощью этой теоремы можно находить наибольший общий делитель двух чисел.

Пример 1. Найдите НОД $(6n + 3; 3n)$.

Решение. Согласно теореме 48.1 можно записать: НОД $(6n + 3; 3n)$ = = НОД $(6n + 3 - 3n; 3n)$ = НОД $(3n + 3; 3n)$ = НОД $(3n + 3 - 3n; 3n)$ = = НОД $(3; 3n) = 3$. ■

Теперь познакомимся с более общим методом нахождения наибольшего общего делителя двух чисел.

Если $a \vdots b$, то очевидно, что НОД $(a; b) = b$.

Рассмотрим случай, когда a не делится нацело на b. Для определённости будем считать, что $a > b$.

Лемма

Если число r — остаток при делении числа a на число b, то есть $a = bq + r$, где $0 < r < b$, то НОД $(a; b)$ = НОД $(b; r)$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству теоремы 48.1. Проведите его самостоятельно.

Из леммы следует, что нахождение НОД $(a; b)$ сводится к нахождению НОД $(b; r)$.

Обозначим через r_1 остаток при делении числа b на число r, т. е. $b = rq_1 + r_1$. Тогда согласно лемме НОД $(b; r)$ = НОД $(r; r_1)$. Далее обозначим через r_2 остаток при делении числа r на число r_1, т. е. $r = r_1q_2 + r_2$. Тогда НОД $(r; r_1)$ = НОД $(r_1; r_2)$. Действуя аналогично, будем находить остатки $r_3, r_4, \ldots$. Имеем:

$$a = bq + r,\ 0 < r < b;$$
$$b = rq_1 + r_1,\ 0 < r_1 < r;$$
$$r = r_1q_2 + r_2,\ 0 < r_2 < r_1;$$
$$r_1 = r_2q_3 + r_3,\ 0 < r_3 < r_2;$$
$$\ldots$$

Отсюда $1 = 3 - 2 \cdot 1 = 3 - (11 - 3 \cdot 3) = 4 \cdot 3 - 11 = 4\,(25 - 11 \cdot 2) - 11 = 4 \cdot 25 - 9 \cdot 11 = 4 \cdot 25 - 9(36 - 25 \cdot 1) = 13 \cdot 25 - 9 \cdot 36$.

Следовательно, $13 \cdot 25 - 9 \cdot 36 = 1$, т. е. пара чисел (13; 9) является решением уравнения $25x - 36y = 1$, поэтому ответ на вопрос задачи утвердительный.

Покажем, как пару чисел (13; 9) можно найти другим способом.

Рассмотрим дробь $\frac{36}{25}$. Выделим из неё целую часть: $\frac{36}{25} = 1 + \frac{11}{25}$. Правильную дробь $\frac{11}{25}$ заменим дробью $\frac{1}{\frac{25}{11}}$ и в дроби $\frac{25}{11}$ тоже выделим целую часть. Запишем: $\frac{36}{25} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{11}}$. Далее, действуя аналогично, получим:

$$\frac{36}{25} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{11}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{11}{3}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{2}{3}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\cfrac{3}{2}}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}.$$

Если дробь $\frac{1}{2}$ заменить дробью $\frac{1}{\frac{2}{1}}$, то мы не сможем представить $\frac{2}{1}$ в виде суммы натурального числа и правильной дроби. Поэтому продолжить аналогичные преобразования мы уже не можем.

О равенстве $\frac{36}{25} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}$ говорят, что дробь $\frac{36}{25}$ представили в виде **конечной цепной дроби** $1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}$. Если в полученной цепной дроби отбросить её последнее звено — дробь $\frac{1}{2}$, то получим выражение $1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1}}}$, значение которого равно $\frac{13}{9}$. Рассмотрим разность $\frac{36}{25} - \frac{13}{9}$. Имеем: $\frac{36}{25} - \frac{13}{9} = \frac{36 \cdot 9 - 25 \cdot 13}{25 \cdot 9} = \frac{-1}{25 \cdot 9}$. Отсюда $25 \cdot 13 - 36 \cdot 9 = 1$.

Итак, мы установили, что пара чисел (13; 9) является решением уравнения $25x - 36y = 1$. ■

Полученный результат позволяет предположить, что и в общем случае для нахождения решения уравнения вида $ax - by = 1$, где НОД $(a; b) = 1$, надо разложить дробь $\frac{b}{a}$ в конечную цепную дробь, отбросить последнее звено и проделать выкладки, подобные проведённым выше.

Возникает естественный вопрос: почему с помощью алгоритма Евклида или представления обыкновенной дроби в виде цепной дроби нам удалось найти пару целых чисел, являющуюся решением рассматриваемого уравнения? Ответ на этот вопрос вы сможете получить, если примете участие в работе над проектом «Цепные дроби и диофантовы уравнения» (с. 419).

Также отметим: зная одно из решений $(x_0; y_0)$ уравнения $ax - by = 1$, где НОД $(a; b) = 1$, все его целые решения можно найти по формулам $x = x_0 + bt$, $y = y_0 + at$, где $t \in \mathbf{Z}$.

Если числа a и b являются делителями числа k, то число k называют **общим кратным** чисел a и b.

Среди общих кратных чисел a и b существует наименьшее. Его называют **наименьшим общим кратным** чисел a и b и обозначают НОК $(a; b)$.

Например, НОК (8; 12) = 24, НОК (7; 8) = 56, НОК (64; 16) = 64.

Теорема 48.2

НОК $(a; b)$ является делителем любого общего кратного чисел a и b.

Доказательство

Пусть НОК $(a; b) = k$ и k_1 — общее кратное чисел a и b.

Предположим, что k_1 не делится нацело на k. Тогда $k_1 = kq + r$, где $0 < r < k$. Отсюда $r = k_1 - kq$. Каждое из чисел k_1 и k кратно и a, и b, следовательно, $r \vdots a$ и $r \vdots b$, то есть r — общее кратное чисел a и b. Но $r < k$. Получили противоречие. ■

Теорема 48.3

Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то число $\frac{ab}{c}$ является общим кратным чисел a и b.

Доказательство

Из условия следует, что существуют такие числа m и n, что $a = cm$ и $b = cn$. Тогда $\frac{ab}{c} = \frac{cmcn}{c} = cmn = an = bm$. Следовательно, число $\frac{ab}{c}$ кратно числам a и b. ■

Теорема 48.4

НОК $(a; b) \cdot$ НОД $(a; b) = ab$.

Доказательство

Пусть НОК $(a; b) = k$, НОД $(a; b) = d$. Очевидно, что число ab является общим кратным чисел a и b. Тогда из теоремы 48.2 получаем, что $ab \vdots k$. Следовательно, существует такое число c, что

$$ab = ck.$$

Поскольку $k \vdots a$, то существует такое число m, что $k = ma$. Имеем: $ab = cma$. Отсюда $b = cm$. Следовательно, $b \vdots c$.

Аналогично можно доказать, что $a \vdots c$. Следовательно, c — общий делитель чисел a и b. Тогда $d \geqslant c$. Из равенства $ab = ck$ получаем:

$$k = \frac{ab}{c} \geqslant \frac{ab}{d}. \qquad (1)$$

В то же время по теореме 48.3 число $\frac{ab}{d}$ является общим кратным чисел a и b. Следовательно,

$$\frac{ab}{d} \geqslant k. \qquad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) получаем, что $\frac{ab}{d} = k$. ■

Определение

Если НОД $(a; b) = 1$, то числа a и b называют взаимно простыми.

Например, 9 и 25, 16 и 1, 28 и 29 — пары взаимно простых чисел.

Теорема 48.5

Если НОД $(a; b) = 1$, то НОК $(a; b) = ab$.

Справедливость этого утверждения следует из теоремы 48.4.

Теорема 48.6

Если НОД $(b; c) = 1$, $a \vdots b$ и $a \vdots c$, то $a \vdots bc$.

Доказательство

Так как НОД $(b; c) = 1$, то НОК $(b; c) = bc$. Из условия следует, что a — общее кратное чисел b и c. Тогда по теореме 48.2 $a \vdots$ НОК $(b; c)$, то есть $a \vdots bc$. ■

Теорема 48.7

Если НОД $(a; b) = 1$ и $ac \vdots b$, то $c \vdots b$.

Доказательство

Из условия следует, что НОК $(a; b) = ab$. Также понятно, что ac — общее кратное чисел a и b. Следовательно, $ac \vdots ab$. Тогда существует такое число k, что $ac = kab$. Отсюда $c = kb$. Следовательно, $c \vdots b$. ■

Пример 4. Докажите, что значение выражения $n^3 - n$ делится нацело на 6 при любом значении n.

Решение. Имеем: $n^3 - n = (n-1)\,n\,(n+1)$. Так как из двух последовательных натуральных чисел одно кратно 2, а из трёх последовательных натуральных чисел одно кратно 3, то по теореме 48.6 значение данного выражения кратно $2 \cdot 3$, то есть 6.

Рассмотрим другое, комбинаторное решение этой задачи. Заметим, что $C_{n+1}^3 = \frac{(n+1)!}{3!(n-2)!} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$. Осталось заметить, что C_{n+1}^3 — натуральное число. ■

Решив эту задачу, мы установили следующий факт: многочлен $\frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{6}n$ является **целозначным**, т. е. при любом натуральном n принимает только целые значения. С целозначными многочленами вы встретитесь также при решении задач 48.7, 48.8 и 48.10.

Пример 5. Докажите, что если $a \equiv b \pmod{m}$, $a \vdots n$, $b \vdots n$ и НОД $(m; n) = 1$, то $\frac{a}{n} \equiv \frac{b}{n} \pmod{m}$.

Решение. Из условия следует, что существуют такие числа k_1 и k_2, что $a = nk_1$ и $b = nk_2$. Имеем: $a - b = n(k_1 - k_2) \vdots m$. Так как НОД $(m; n) = 1$, то по теореме 48.7 получаем, что $(k_1 - k_2) \vdots m$. Отсюда $k_1 \equiv k_2 \pmod{m}$, то есть $\frac{a}{n} \equiv \frac{b}{n} \pmod{m}$. ■

1. Какое число называют наибольшим общим делителем чисел a и b?
2. Чему равен НОД $(a; b)$, если $a \vdots b$?
3. Опишите алгоритм Евклида.
4. Какое число называют наименьшим общим кратным чисел a и b?
5. Какие числа называют взаимно простыми?

Упражнения

48.1. Найдите НОД чисел:
1) 253 и 299; 2) 2491 и 2773.

48.2. Найдите НОД чисел:

1) 899 и 1073; 2) 4757 и 5561.

48.3. Докажите, что для любого $n \in N$:

1) НОД $(n; n + 1) = 1$; 2) НОД $(2n; 2n + 2) = 2$.

48.4. Докажите, что для любого $n \in N$:

1) НОД $(n; 2n + 1) = 1$; 2) НОД $(8n + 4; 4n) = 4$.

48.5. Чему может быть равным НОД $(a; b)$, если:

1) $a = 2n + 1$, $b = 2n + 3$; 2) $a = 2n + 1$, $b = 8n + 7$?

48.6. Докажите, что при любом $n \in N$ является несократимой дробь:

1) $\frac{4n + 3}{20n + 23}$; 2) $\frac{12n + 1}{30n + 2}$.

48.7. Докажите, что при любом $n \in Z$ значение выражения:

1) $n^3 + 3n^2 + 2n$ кратно 6; 2) $n^4 - n^2$ кратно 12.

48.8. Докажите, что при любом $n \in Z$ значение выражения:

1) $n^3 + 11n$ кратно 6; 2) $(n^2 - 1)(n^2 - 2n)$ кратно 24.

◆◆

48.9. Существуют ли такие целые числа a, b и c, что:

1) $a + b + c + a^2 + b^2 + c^2 = 1001$;

2) $a^3 + b^3 + c^3 - a - b - c = 1004$?

48.10. Докажите, что при любом $n \in Z$ является целым числом значение выражения:

1) $\frac{n^3 + 5n}{6}$; 2) $\frac{n(n + 1)^2(n + 2)}{12}$; 3) $\frac{(n^2 - 1)(n^2 + 2n)}{24}$.

48.11. Найдите хотя бы одну пару целых чисел, являющуюся решением уравнения $73x - 13y = 1$.

◆◆◆

48.12. От прямоугольника размерами 324×141 мм отрезают квадраты со стороной 141 мм, пока не останется прямоугольник, у которого длина одной стороны меньше, чем 141 мм. От полученного прямоугольника снова отрезают квадраты, сторона которых равна длине его меньшей стороны, и т. д. Какова длина стороны последнего квадрата?

48.13. Из 100 последовательных натуральных чисел выбрали 51 число. Докажите, что среди выбранных чисел есть такие числа a и b, что НОД $(a; b) = 1$.

48.14. Наименьшее общее кратное некоторых двух натуральных чисел в 16 раз больше их наибольшего общего делителя. Докажите, что одно из этих чисел кратно другому.

48.15. Наименьшее общее кратное некоторых двух натуральных чисел в 27 раз больше их наибольшего общего делителя. Докажите, что одно из этих чисел кратно другому.

48.16. Решите в натуральных числах уравнение $x(y+1)^2 = 243y$.

48.17. Найдите все пары натуральных чисел m и n таких, что НОК $(m; n)$ – – НОД $(m; n) = \frac{mn}{3}$.

48.18. Три автомата печатают на карточках пары целых чисел. Каждый автомат, прочитав некоторую карточку, выдаёт новую карточку. Прочитав карточку с парой чисел $(m; n)$, первый автомат выдаёт карточку с числами $(m - n; n)$, второй — карточку с числами $(m + n; n)$, третий — карточку с числами $(n; m)$. Сначала есть карточка с парой чисел (46; 51). Можно ли, используя автоматы в некотором порядке, получить карточку с парой чисел (15; 33)?

§ 49 Простые и составные числа

Определение

Натуральное число называют простым, если оно имеет только два разных натуральных делителя: единицу и само это число.

Числа 2, 5, 17 являются примерами простых чисел.

Определение

Натуральное число, имеющее более двух натуральных делителей, называют составным.

Например, числа 4 и 6 — составные числа.

Так как число 1 имеет только один натуральный делитель, то его не относят ни к простым, ни к составным.

Если последовательно выписывать натуральные числа, то легко заметить, что простые числа встречаются намного реже, чем составные. Так, первая тысяча натуральных чисел содержит 168 простых чисел, вторая — 135, третья — 127. Более того, можно указать промежутки натурального ряда любой длины, не содержащие ни единого простого числа.

Например, среди последовательных натуральных чисел $n! + 2$, $n! + 3$, ..., $n! + n$, где $n > 1$, нет ни одного простого числа. Действительно, первое число делится нацело на 2 и больше 2, второе число делится нацело на 3 и больше 3 и т. д.

Может возникнуть гипотеза, что в натуральном ряду, начиная с некоторого места, вообще невозможно встретить простое число. Но это не так. Древнегреческий учёный Евклид в своей знаменитой книге «Начала» доказал, что простых чисел бесконечно много.

Теорема 49.1

Множество простых чисел бесконечно.

Доказательство

Пусть множество простых чисел конечно и состоит из простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Рассмотрим число $p = p_1p_2 \ldots p_n + 1$.

Ни одно из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ не является делителем числа p. Действительно, число p при делении на каждое из этих чисел даёт в остатке 1.

Пусть m — наименьший делитель числа p, отличный от 1. Если число m составное, то существует делитель числа p, меньший, чем m, и отличный от 1. Следовательно, число m — простое и не содержится среди чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Получили противоречие. ■

Рассмотрим некоторые свойства простых чисел.

Теорема 49.2

Если простое число p_1 делится нацело на простое число p_2, то $p_1 = p_2$.

Доказательство

Число p_1 имеет только два натуральных делителя: 1 и p_1. Так как $p_2 \neq 1$, то $p_2 = p_1$. ■

Теорема 49.3

Для любого натурального числа n и данного простого числа p справедливо одно из двух утверждений: $n \vdots p$ или НОД $(n; p) = 1$.

Доказательство

Число p имеет только два натуральных делителя: 1 и p. Следовательно, НОД $(n; p)$ может принимать только два значения: 1 и p. Если НОД $(n; p) = p$, то $n \vdots p$. ■

Теорема 49.4

Если $ab \vdots p$, где $a \in N$, $b \in N$, p — простое число, то или $a \vdots p$, или $b \vdots p$.

Доказательство

Если $a \vdots p$, то теорема доказана. Если число a не кратно числу p, то согласно теореме 49.3 имеем, что НОД $(a; p) = 1$. Тогда по теореме 48.7 $b \vdots p$. ■

Следствие

Если произведение $a_1a_2...a_n$ натуральных чисел делится нацело на простое число p, то хотя бы один из множителей a_1, a_2, ..., a_n делится нацело на p.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Понятно, что любое составное число можно представить в виде произведения простых чисел (разложить на простые множители). Этот факт подчёркивает особую роль простых чисел как элементов, из которых строится любое натуральное число.

Поэтому теорему, обосновывающую существование такого разложения, называют **основной теоремой арифметики**. Первым её строго сформулировал и доказал К. Ф. Гаусс.

Теорема 49.5

(основная теорема арифметики)

Любое натуральное число, отличное от 1, либо является простым, либо может быть представлено в виде произведения простых чисел. Два разложения натурального числа на простые множители могут отличаться друг от друга только порядком следования множителей.

Доказательство

Рассмотрим составное число n. Оно имеет натуральный делитель, меньший, чем n, и отличный от 1. Тогда его можно представить в виде произведения натуральных чисел, отличных от 1. Существует такое натуральное число k, что $2^k \geqslant n$. Тогда количество множителей в любом разложении числа n не больше, чем k. Действительно, каждый из этих множителей не меньше 2. Если бы их количество было больше, чем k, то их произведение было бы больше, чем 2^k, что противоречит неравенству $2^k \geqslant n$.

Так как количество множителей в разложении числа n не превышает k, то существует разложение числа n, содержащее наибольшее количество множителей. Это и есть разложение числа n на простые множители. Действительно, если какой-либо из множителей является составным, то, разложив его на множители, получим «более длинное» разложение числа n на множители.

Итак, мы показали, что любое составное число можно разложить на простые множители.

Докажем, что такое разложение единственное, т. е. два разложения натурального числа на простые множители могут отличаться друг от друга только порядком следования множителей.

Пусть число n можно представить в виде произведения простых чисел двумя способами, т. е. $n = p_1p_2...p_m$ и $n = q_1q_2...q_t$, где p_1, ..., p_m, q_1, ..., q_t — простые числа, $m \geqslant 2$, $t \geqslant 2$.

Имеем: $p_1p_2...p_m = q_1q_2...q_t$.

Левая часть этого равенства делится нацело на число p_1. Тогда и правая часть делится нацело на число p_1. Поскольку p_1 — простое число, то согласно следствию из теоремы 49.4 один из множителей правой части делится нацело на число p_1. Так как все множители правой части равенства являются простыми числами, то по теореме 49.2 один из них равен p_1. Пусть, например, это число q_1. Разделив обе части равенства на p_1, получим:

$$p_2p_3...p_m = q_2q_3...q_t.$$

Рассуждая аналогично, можно получить равенство $p_3p_4...p_m = q_3q_4...q_t$ и т. д. Понятно, что в конце концов мы придём к равенству $1 = 1$.

Таким образом, каждому множителю левой части равенства $p_1p_2...p_m = q_1q_2...q_t$ соответствует равный ему множитель в правой части этого равенства, и наоборот. Это доказывает, что разложение натурального числа на простые множители — единственное. ■

Если в разложении натурального числа некоторые простые множители повторяются, то их произведение записывают в виде степени.

Например, $2940 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$.

Вообще, разложение составного числа на простые множители можно записать в виде:

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_m^{k_m},$$

где k_1, k_2, ..., k_m — натуральные числа, p_1, p_2, ..., p_m — разные простые числа.

Такую запись называют **каноническим разложением составного числа на простые множители.**

Рассмотрим ещё одно важное свойство простых чисел.

Теорема 49.6

(малая теорема Ферма)

Если натуральное число a не делится нацело на простое число p, то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Пьер Ферма (1601—1665)

Французский математик, по профессии юрист. Один из основателей теории чисел. Автор ряда выдающихся трудов в разных областях математики, которые оказали значительное влияние на дальнейшее её развитие.

Доказательство

Рассмотрим $p - 1$ число: a, $2a$, $3a$, ..., $(p - 1)a$. Очевидно, что каждое из этих чисел не делится нацело на p. Пусть r_1, r_2, ..., r_{p-1} — ненулевые остатки при делении этих чисел на число p соответственно. Докажем, что никакие два из чисел a, $2a$, $3a$, ..., $(p - 1)a$ не дают одинаковых остатков при делении на p.

Предположим, что такие два числа найдутся. Обозначим их ma и na, где $1 \leqslant m \leqslant p - 1$, $1 \leqslant n \leqslant p - 1$, $m > n$. Тогда $(ma - na) \, ⋮ \, p$, то есть $(m - n)\, a \, ⋮ \, p$. Однако НОД $(a; p) = 1$. Тогда $(m - n) \, ⋮ \, p$, что невозможно, так как $0 < m - n < p$.

Поскольку при делении на число p существует $p - 1$ ненулевой остаток, а числа a, $2a$, $3a$, ..., $(p - 1)a$ дают разные остатки при делении на p, то

$$\{r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}\} = \{1, 2, \ldots, p - 1\}. \qquad (1)$$

Имеем: $a \equiv r_1 \pmod{p}$,

$$2a \equiv r_2 \pmod{p},$$

$$\ldots$$

$$(p - 1)a \equiv r_{p-1} \pmod{p}.$$

Отсюда $a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \ldots \cdot (p - 1)a \equiv r_1 r_2 \ldots r_{p-1} \pmod{p}$. Учитывая равенство (1), можно записать:

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p - 1)a^{p-1} \equiv 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p - 1) \pmod{p}.$$ Отсюда

$$(p - 1)! \cdot a^{p-1} \equiv (p - 1)! \pmod{p}.$$

Поскольку НОД $((p - 1)!; p) = 1$, то в силу примера 5 § 48 можно записать:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \blacksquare$$

Следствие

Для любого натурального числа a и простого числа p справедливо следующее сравнение: $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Каждому натуральному числу n поставим в соответствие число $\varphi(n)$, равное количеству натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n. Например, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(9) = 6$.

Понятно, что правило, по которому каждому натуральному числу n ставится в соответствие число $\varphi(n)$, является функцией. Её называют **функцией Эйлера**.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 49.7

(теорема Эйлера)

Если НОД $(a;\ n) = 1$, то $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Поскольку $\varphi(p) = p - 1$ для любого простого числа p, то теорема Эйлера является обобщением малой теоремы Ферма.

Если вы хотите узнать больше о функции и теореме Эйлера, то советуем принять участие в работе над проектом «Числовые функции теории чисел» (с. 419).

Пример 1. Известно, что квадрат каждого отличного от 1 делителя числа n больше, чем n. Докажите, что число n — простое.

Решение. Предположим, что число n составное. Тогда $n = k_1 \cdot k_2$, где $k_1 > 1$ и $k_2 > 1$. По условию $k_1^2 > n$ и $k_2^2 > n$. Отсюда $(k_1 \cdot k_2)^2 > n^2$, то есть $k_1 \cdot k_2 > n$. Получили противоречие. ■

Доказанное свойство позволяет сократить техническую работу при определении того, является ли данное число n простым: достаточно ограничиться проверкой делимости числа n на простые числа, квадраты которых не превосходят n.

Пример 2. Найдите все такие натуральные числа n, что числа $n + 1$, $n + 11$ и $n + 27$ являются простыми.

Решение. Так как разность никаких двух из данных чисел не делится нацело на 3, то все они дают разные остатки при делении на 3. Следовательно, одно из этих чисел, будучи простым, кратно 3, а значит, оно равно 3. Понятно, что это может быть только число $n + 1$. Отсюда $n = 2$. Тогда $n + 11 = 13$, $n + 27 = 29$. ■

Пример 3. Сколько натуральных делителей имеет число $2^4 \cdot 5^3 \cdot 7^6$?

Решение. Любой делитель данного числа имеет вид $2^{k_1} \cdot 5^{k_2} \cdot 7^{k_3}$, где k_1, k_2 и k_3 — целые числа, удовлетворяющие условиям $0 \leqslant k_1 \leqslant 4$,

$0 \leqslant k_2 \leqslant 3$, $0 \leqslant k_3 \leqslant 6$. Количество делителей данного числа равно количеству наборов, которые можно составить из чисел k_1, k_2 и k_3 (при этом наборы, отличающиеся друг от друга порядком элементов, считаются различными). Число k_1 можно выбрать 5 способами, число k_2 — 4 способами, число k_3 — 7 способами. Следовательно, по обобщённому правилу произведения такой набор можно выбрать $5 \cdot 4 \cdot 7 = 140$ способами. Поэтому данное число имеет 140 делителей. ■

Количество натуральных делителей числа n, $n \in \boldsymbol{N}$, принято обозначать так: $\tau(n)$.

Если $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ — каноническое разложение натурального числа n на простые множители, то, рассуждая аналогично, можно установить, что $\tau(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1)\dots(k_m + 1)$.

Пример 4. Найдите сумму делителей числа $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$.

Решение. Рассмотрим выражение

$$(1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{k_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \dots + p_2^{k_2})\dots(1 + p_m + p_m^2 + \dots + p_m^{k_m}).$$

Если в этом выражении раскрыть скобки, то полученная сумма будет представлять сумму всех делителей числа n. Эту сумму обозначают так: $\sigma(n)$. Применяя формулу суммы геометрической прогрессии, можно записать: $\sigma(n) = \dfrac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \dfrac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1} \dots \dfrac{p_m^{k_m+1} - 1}{p_m - 1}$.

Пример 5. Найдите остаток при делении числа 3^{102} на 101.

Решение. Так как 101 — простое число, то согласно малой теореме Ферма

$$3^{100} \equiv 1 \pmod{101}.$$

Отсюда

$$3^{102} \equiv 9 \pmod{101}.$$

Ответ: 9. ■

?

1. Какое число называют простым?
2. Какое число называют составным?
3. Сформулируйте основную теорему арифметики.
4. Что называют каноническим разложением составного числа на простые множители?
5. Сформулируйте малую теорему Ферма.

Упражнения

49.1. Известно, что числа[1] a и b таковы, что $ab \vdots q$. Верно ли утверждение, что $a \vdots q$ или $b \vdots q$, если: 1) $q = 13$; 2) $q = 21$?

49.2. Известно, что числа m и n таковы, что $mn \vdots p$. Верно ли утверждение, что $m \vdots p$ или $n \vdots p$, если: 1) $p = 29$; 2) $p = 39$?

49.3. Докажите, что остаток при делении простого числа на 30 равен 1 или простому числу.

49.4. Докажите, что каждое простое число p ($p > 3$) можно записать в виде $6k + 1$ или $6k - 1$, $k \in \mathbf{N}$.

49.5. Докажите, что если p — простое число и $p > 3$, то $(p^2 - 1) \vdots 24$.

49.6. Простые числа p и q таковы, что $p > 3$ и $q > 3$. Докажите, что $(p^2 - q^2) \vdots 24$.

49.7. Найдите все простые числа p такие, что числа $p + 26$ и $p + 28$ также простые.

49.8. Найдите все простые числа p такие, что числа $2p + 1$ и $4p + 1$ также простые.

49.9. Целые числа a и b таковы, что значение выражения $a^2 + 9ab + b^2$ кратно 11. Докажите, что значение выражения $a - b$ кратно 11.

49.10. Целые числа m и n таковы, что значение выражения $m^2 - 15mn + n^2$ кратно 17. Докажите, что значение выражения $m + n$ кратно 17.

49.11. Числа p и $8p^2 + 1$ — простые. Найдите p.

49.12. Числа p и $p^2 + 2$ — простые. Докажите, что число $p^3 + 2$ также простое.

49.13. Найдите все простые числа p и q, удовлетворяющие уравнению $p^2 - 2q^2 = 1$.

49.14. Найдите все простые числа p и q, удовлетворяющие уравнению $q - p^2 = 2$.

49.15. Натуральное число n таково, что числа $2n - 1$ и $n + 12$ делятся нацело на простое число p. Найдите p.

49.16. Натуральное число n таково, что числа $5n - 1$ и $n - 10$ делятся нацело на простое число p. Найдите p.

49.17. Натуральные числа m, n и k таковы, что числа $p = m + n$, $q = n + k$ и $r = m + k$ являются простыми. Докажите, что одно из чисел p, q, r равно 2.

[1] В упражнениях к этому параграфу строчными латинскими буквами обозначены натуральные числа. Случаи, в которых буквой обозначено целое число, будут оговорены отдельно.

49.18. Натуральные числа a, b и c таковы, что $(a + b + c) \vdots 13$. Докажите, что число $a^{13} + b^{13} + c^{13}$ также кратно 13.

49.19. Докажите, что при любом натуральном a значение выражения $a^{14} + 13a^2$ кратно 7.

49.20. Докажите, что при любом натуральном a значение выражения $a^{57} - 39a^3$ кратно 19.

49.21. Используя малую теорему Ферма, найдите остаток от деления числа a на число b, если:

1) $a = 5^{52}$, $b = 53$; 2) $a = 2^{47}$, $b = 41$.

49.22. Докажите, что число $24^{24} - 1$ кратно 35.

49.23. Натуральное число a не делится нацело на 29. Докажите, что одно из чисел, $a^{14} - 1$ или $a^{14} + 1$, делится нацело на 29.

49.24. Найдите все простые p такие, что число $p^2 + 11$ имеет 6 различных натуральных делителей.

49.25. Докажите, что значение выражения $42^{47} + 47^{42}$ является составным числом.

49.26. Докажите, что $p^q + q^p \equiv (p + q) \pmod{pq}$, где p и q — различные простые числа.

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

О проблемах, связанных с простыми числами

Ещё учёные Древнего мира составляли таблицы простых чисел. Решение такой задачи без современной вычислительной техники — труд нелёгкий. Поэтому поиск простых чисел был неразрывно связан с попытками открыть удобную формулу, пользуясь которой можно было бы составлять указанные таблицы.

Многие известные математики приложили немало усилий, чтобы найти «формулу простых чисел». Часто им казалось, что цель достигнута, но позже выяснялось, что выдвинутые гипотезы неверны.

Так, Пьер Ферма высказал предположение, что все числа вида

$$F(n) = 2^{2^n} + 1 \qquad (1)$$

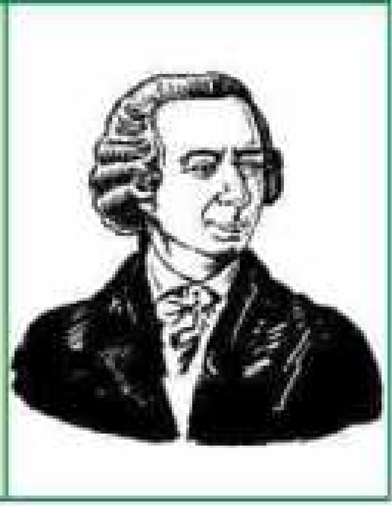
при целом неотрицательном n являются простыми.

Имеем: $F(0) = 3$, $F(1) = 5$, $F(2) = 17$, $F(3) = 257$, $F(4) = 65\,537$. Гипотеза Ферма основывалась на том, что числа 3, 5, 17, 257, 65 537 — простые. Однако в 1732 г. выдающийся математик Л. Эйлер установил, что число $F(5)$ — составное:

$$F(5) = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417.$$

Леонард Эйлер (1707—1783)

Математик, механик и физик, член Петербургской и Берлинской академий наук, автор более 850 научных трудов, свыше 100 из которых относятся к теории чисел.



Таким образом, среди чисел, полученных с помощью формулы (1), есть как простые, так и составные. Простые числа вида $2^{2^n}+1$ называют простыми числами Ферма. Однако конечным или бесконечным является множество простых чисел Ферма — до сих пор неизвестно.

Заметим, что каждое простое число Ферма является числом вида $4k+1$ и может быть представлено в виде суммы квадратов двух натуральных чисел (чётной степени числа 2 и числа 1). Вообще, имеет место следующий факт, который называют теоремой Ферма о сумме двух квадратов.

Каждое простое число вида $4k+1$ можно представить в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

Если вы хотите узнать больше об этой теореме и её роли, то советуем принять участие в работе над соответствующим проектом (с. 419).

С числами Ферма связана ещё одна знаменитая проблема. Ещё учёные Древней Греции заметили, что при $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12$ правильные n-угольники построить с помощью циркуля и линейки достаточно просто, а при некоторых других значениях n ($n = 7, 9, 11, 13$) это не удаётся.

В конце XVIII в. Карл Фридрих Гаусс доказал, что с помощью циркуля и линейки можно построить правильный n-угольник тогда и только тогда, когда $n = 2^k$, где $k \in \mathbf{N}$, $k > 1$, или $n = 2^k \cdot p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_m$, где k — целое неотрицательное число, $p_1, p_2, \ldots, p_m$ — разные простые числа Ферма.

В XVIII в. Леонард Эйлер доказал, что не существует многочлена $F(x)$ с целыми коэффициентами, значения которого при всех натуральных значениях x были бы простыми числами.

Вместе с тем Эйлер указал на такие многочлены:

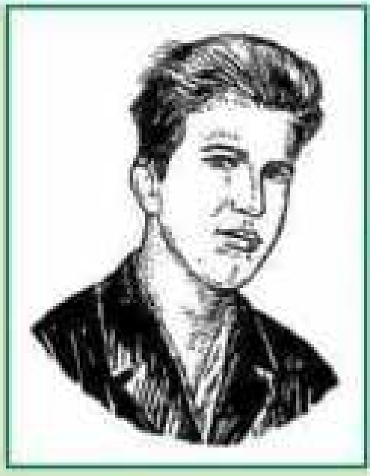
$$h(n) = n^2 - n + 17;$$
$$f(n) = n^2 - n + 41;$$
$$g(n) = n^2 - 79n + 1601.$$

Интересно, что значения многочлена $h(n)$ при $n = 0, 1, 2, \ldots, 16$ являются простыми числами. Однако $h(17)$ — составное число.

Значениями многочленов $f(n)$ и $g(n)$ являются простые числа при $n = 0, 1, 2, \ldots, 40$ и $n = 0, 1, 2, \ldots, 79$ соответственно.

К сожалению, математики до сих пор не нашли удобной формулы, которая позволяла бы получать все простые числа друг за другом.

С проблемой поиска формулы простых чисел неразрывно связана задача нахождения закономерности распределения простых чисел в натуральном ряду.



Юрий Владимирович Матиясевич (род. 1947)

Выдающийся советский и российский математик, автор целого ряда фундаментальных открытий в области теории чисел Ю. В. Матиясевич писал: «Простые числа разбросаны в натуральном ряду очень прихотливым образом».

Действительно, достаточно даже беглого взгляда на таблицу простых чисел, чтобы увидеть неравномерное распределение их среди натуральных чисел.

Как определить промежутки натурального ряда, содержащие по крайней мере одно простое число? Как определить количество простых чисел на заданном промежутке натурального ряда? В частности, сколько существует простых чисел, не превышающих заданного натурального числа n?

Ответы на эти вопросы являются ключом к решению проблемы распределения простых чисел.

Указать промежуток натурального ряда, содержащий по крайней мере одно простое число, довольно просто. Покажем, например, что любому промежутку от n до $n! + 1$ включительно принадлежит простое число.

Если число $n! + 1$ — простое, то утверждение очевидно.

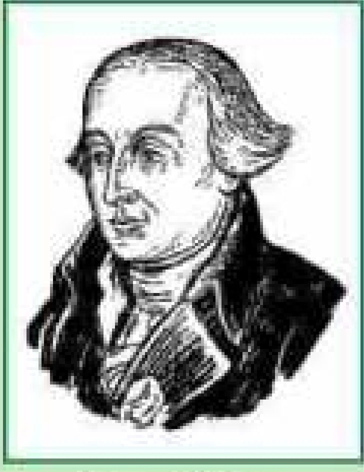
Пусть $n! + 1$ является составным числом и k — его простой делитель. Так как ни одно из чисел $2, 3, \ldots, n$ не является делителем числа $n! + 1$, то $n < k < n! + 1$.

Из доказанного утверждения следует, что числа $2, 2! + 1, (2! + 1)! + 1, \ldots$ разбивают натуральный ряд на промежутки, каждый из которых содержит по крайней мере одно простое число. Этот факт можно рассматривать как ещё одно доказательство бесконечности множества простых чисел.

Так как ни одно из чисел $2, 3, \ldots, p - 1$ не является делителем числа $(p - 1)! + 1$, то если $((p - 1)! + 1) \vdots p$, $p > 1$, то p — простое число. Этот факт является частью известной теоремы Вильсона (критерия проверки того, является ли данное натуральное число простым).

Для того чтобы натуральное число $n > 1$ было простым, необходимо и достаточно, чтобы число $(n-1)!+1$ делилось нацело на n.

Достаточное условие мы фактически доказали. С доказательством необходимого условия вы сможете ознакомиться в ходе работы над проектом «Теорема Ферма о сумме двух квадратов» (с. 419).



Жозеф Луи Франсуа Бертран (1822—1900)

Понятно, что с возрастанием n длина промежутка натурального ряда от n до $n!+1$ быстро увеличивается. Поэтому желательно уметь указывать промежуток натурального ряда как можно меньшей длины, содержащий по крайней мере одно простое число.

Исследуя таблицы простых чисел, французский математик Жозеф Луи Франсуа Бертран выдвинул предположение, что при $n \geqslant 3$ между числами n и $2n-2$ содержится хотя бы одно простое число. Доказать эту гипотезу он не смог и пользовался ею как постулатом — утверждением, принимаемым без доказательства. Первым доказал постулат Бертрана выдающийся русский математик П. Л. Чебышёв.

Пафнутий Львович Чебышёв (1821—1894)

Русский математик и механик, основатель петербургской математической школы, автор свыше 70 научных трудов по теории чисел, теории вероятностей, теории функций и другим областям математики, основатель теории машин и механизмов.

Обозначим через $\pi(n)$ количество простых чисел, не превышающих числа n. Для маленьких n легко установить, что, например, $\pi(1)=0$, $\pi(2)=1$, $\pi(3)=2$, $\pi(4)=2$, $\pi(10)=4$, $\pi(100)=25$.

Сложное распределение простых чисел не позволяет найти простую формулу для нахождения $\pi(n)$. Поэтому математики сосредоточили свои усилия на поиске приближённой формулы.

Отношение $\frac{\pi(n)}{n}$ называют **плотностью распределения простых чисел**.

В следующей таблице приведены значения плотности распределения простых чисел при некоторых значениях n.

n	$\pi(n)$	$\frac{\pi(n)}{n}$
10	4	0,4
100	25	0,25
1000	168	0,17
10 000	1229	0,12
100 000	9592	0,096
1 000 000	78 498	0,078
10 000 000	664 579	0,066
100 000 000	5 761 455	0,058
1 000 000 000	50 847 534	0,051

Л. Эйлер доказал, что с увеличением n плотность $\frac{\pi(n)}{n}$ становится всё меньше и меньше. П. Л. Чебышёву удалось найти более точную оценку величины $\frac{\pi(n)}{n}$.

Рассмотрим ещё одну проблему, связанную с простыми числами. Древние математики уделяли особое внимание двум числам: 6 и 28. Их привлекало удивительное свойство этих чисел: каждое из них равно сумме своих собственных делителей, т. е. всех делителей, отличных от самого числа. Имеем:

$$6 = 1 + 2 + 3,$$
$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

Такие числа называют **совершенными**.

Ещё Евклид доказал, что любое натуральное число, которое можно представить в виде $2^{n-1}(2^n - 1)$, где $2^n - 1$ — простое число, является совершенным.

Убедимся в этом и мы. Обозначим $2^n - 1 = p$ и запишем сумму всех делителей рассматриваемого числа:

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} + p + 2p + 2^2p + \ldots + 2^{n-1}p =$$
$$= (1 + p)(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}) =$$
$$= (1 + p)(2 - 1)(2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1) = (1 + p)(2^n - 1) = 2^n(2^n - 1).$$

В записанную сумму входит само число $2^{n-1}(2^n - 1)$. Тогда сумма собственных делителей рассматриваемого числа равна $2^n(2^n - 1) - 2^{n-1}(2^n - 1) = (2^n - 1)(2^n - 2^{n-1}) = 2^{n-1}(2^n - 1)$.

Подставив в выражение $2^{n-1}(2^n - 1)$ числа $n = 2$ и $n = 3$, получим уже известные совершенные числа 6 и 28.

Благодаря доказанному свойству Евклид нашёл ещё два совершенных числа. При $n = 5$ имеем: $2^5 - 1 = 31$ — простое число, при $n = 7$ имеем $2^7 - 1 = 127$ — простое число. Значения выражений $2^{5-1}(2^5 - 1)$ и $2^{7-1}(2^7 - 1)$ соответственно равны 496 и 8128. Согласно доказанному выше свойству, эти числа являются совершенными.

Почти полтора тысячелетия люди знали только четыре совершенных числа 6, 28, 496 и 8128. Поиск новых совершенных чисел был неразрывно связан с поиском простых чисел вида $2^n - 1$, $n \in \boldsymbol{N}$. Простые числа такого вида называют **простыми числами Мерсенна** в честь Марена Мерсенна, французского математика, физика и музыканта, который в 1664 г., не приводя доказательств, заявил, что при $n = 17, 19, 31, 67, 127, 257$ число $2^n - 1$ является простым.

Л. Эйлер установил, что числа $2^{17} - 1$, $2^{19} - 1$, $2^{31} - 1$ являются простыми. Позже оказалось, что число $2^{127} - 1$ также является простым, а вот числа $2^{67} - 1$ и $2^{257} - 1$ являются составными, причём вывод о числе $2^{257} - 1$ был получен только в 1932 г.

Л. Эйлер доказал, что все чётные совершенные числа имеют вид, указанный Евклидом. До сих пор не найдено ни одного нечётного совершенного числа. Также остаётся открытым вопрос, конечным или бесконечным является множество простых чисел Мерсенна, а следовательно, неизвестно, конечно или бесконечно множество чётных совершенных чисел.

Поиск новых совершенных чисел требует огромного объёма вычислений. И тут, конечно, незаменимую помощь оказывает современная вычислительная техника. По данным на январь 2016 г., известно 49 простых чисел Мерсенна, а следовательно, 49 чётных совершенных чисел. Также с помощью современных компьютеров установлено: если существует нечётное совершенное число, то оно больше 10^{1500}.

В мире простых чисел много и других нерешённых задач. Ограничимся ещё одним примером. Два простых числа, которые отличаются на 2, называют **числами-близнецами**. Так, 3 и 5, 5 и 7, 419 и 421 — пары близнецов. Конечно или бесконечно количество пар чисел-близнецов, пока что неизвестно.

§ 50 Деление многочленов. Теорема Безу

Вы умеете складывать, вычитать и умножать многочлены. В этом параграфе мы введём действие деления многочленов.

Определение

Говорят, что многочлен $A(x)$ делится нацело на тождественно не равный нулю многочлен $B(x)$, если существует такой многочлен $Q(x)$, что для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$.

Многочлен $A(x)$ называют **делимым**, многочлен $B(x)$ — **делителем**, многочлен $Q(x)$ — **частным**.

Если многочлен $A(x)$ делится нацело на многочлен $B(x)$, то это обозначают так: $A(x) \,\vdots\, B(x)$.

Рассмотрим несколько примеров.

Многочлен $x^3 + 1$ делится нацело на многочлен $x + 1$. Действительно, $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$. Здесь делимым является многочлен $x^3 + 1$, делителем — многочлен $x + 1$, частным — многочлен $x^2 - x + 1$.

Многочлен $6x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x$ делится нацело на многочлен $2x^2 - x + 1$. Действительно, $6x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x = (2x^2 - x + 1)(3x^2 - x)$.

Заметим, что если делимое — это нулевой многочлен, то он делится нацело на любой многочлен, тождественно не равный нулю. При этом частное равно нулевому многочлену.

Поиск частного от деления двух многочленов можно осуществлять по алгоритму деления «уголком», аналогично тому, как это делают при делении чисел:

$$
\begin{array}{r|l}
-\; x^3 + 1 & x + 1 \\ \cline{2-2}
x^3 + x^2 & x^2 - x + 1 \\ \cline{1-1}
-\; -x^2 + 1 & \\
-x^2 - x & \\ \cline{1-1}
-\; x + 1 & \\
x + 1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
-\; 6x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x & 2x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2}
6x^4 - 3x^3 + 3x^2 & 3x^2 - x \\ \cline{1-1}
-\; -2x^3 + x^2 - x & \\
-2x^3 + x^2 - x & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Если $A(x) \,\vdots\, B(x)$, т. е. существует такой многочлен $Q(x)$, что для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$, и многочлен $A(x)$ ненулевой, то ненулевыми являются многочлены $B(x)$ и $Q(x)$, причём степень многочлена $A(x)$ равна сумме степеней многочленов $B(x)$ и $Q(x)$. Поэтому, для того чтобы ненулевой многочлен $A(x)$ делился нацело на ненулевой многочлен $B(x)$, необходимо, чтобы степень делимого была не меньше степени делителя. Однако это условие не является достаточным. Так, многочлен $x^3 + 1$, степень которого равна 3, не делится нацело на многочлен $x - 1$, степень которого равна 1. Действительно, если бы существовал многочлен $Q(x)$ такой, что для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполнялось равенство $x^3 + 1 = (x - 1)\,Q(x)$, то при $x = 1$ получили бы неверное равенство $1^3 + 1 = 0$.

Теорема 50.1

Для любого многочлена $A(x)$ и ненулевого многочлена $B(x)$ существует единственная пара многочленов $Q(x)$ и $R(x)$ таких, что

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

где степень многочлена $R(x)$ меньше степени многочлена $B(x)$ или $R(x)$ — нулевой многочлен.

В этом равенстве многочлен $Q(x)$ называют **неполным частным**, а многочлен $R(x)$ — **остатком**.

Доказательство этой теоремы выходит за пределы рассматриваемого курса.

Рассмотрим многочлены $A(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - 1$ и $B(x) = x^2 - 3x + 2$. Найдём для этих многочленов неполное частное и остаток. Это можно сделать с помощью деления «уголком»:

$$\begin{array}{l|l}
-\;2x^4 - x^3 + x^2 - 1 & x^2 - 3x + 2 \\ \cline{2-2}
\underline{\;\;\;2x^4 - 6x^3 + 4x^2} & 2x^2 + 5x + 12 \text{ (неполное частное)} \\
\qquad -\;5x^3 - 3x^2 - 1 & \\
\qquad\quad \underline{5x^3 - 15x^2 + 10x} & \\
\qquad\qquad -\;12x^2 - 10x - 1 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{12x^2 - 36x + 24} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 26x - 25 \text{ (остаток)} &
\end{array}$$

Теперь можно записать:

$$2x^4 - x^3 + x^2 - 1 = (x^2 - 3x + 2)(2x^2 + 5x + 12) + 26x - 25. \qquad (1)$$

Определение

Число α называют корнем многочлена $A(x)$, если $A(\alpha) = 0$.

Корень многочлена $A(x)$ — это корень уравнения $A(x) = 0$.

Легко найти множество корней уравнения

$$(3x - 7)(5x + 1)(2x - 9)(x + 1) = 0.$$

Однако если левую часть этого уравнения представить в виде многочлена $30x^4 - 169x^3 + 75x^2 + 337x + 63$, то задача поиска его корней становится непростой.

Поэтому при решении уравнений вида $A(x) = 0$, где $A(x)$ — ненулевой многочлен, важно научиться выделять в многочлене линейный множитель, т. е. представлять многочлен в виде произведения $A(x) = (x - \alpha)B(x)$, где $B(x)$ — некоторый многочлен, степень которого на 1 меньше степени многочлена $A(x)$.

Этому будут способствовать следующие теоремы.

Теорема 50.2

(теорема Безу)

Остаток от деления многочлена $A(x)$ на двучлен $x - \alpha$ равен $A(\alpha)$.

Доказательство

Поскольку степень делителя (двучлена $x - \alpha$) равна 1, то степень остатка должна быть равна нулю или остаток должен быть нулевым многочленом, т. е. искомый остаток — это некоторое число r. Для любого $x \in \mathbf{R}$ имеем:

$$A(x) = (x - \alpha)\, Q(x) + r.$$

Положив в этом равенстве $x = \alpha$, получим:

$$A(\alpha) = (\alpha - \alpha)\, Q(\alpha) + r.$$

Отсюда $A(\alpha) = r$. ■

Этьен Безу́ (1730—1783)

Французский математик, основные труды которого относятся к высшей алгебре. Преподавал математику в училище гардемаринов, Королевском артиллерийском корпусе. Автор шеститомного труда «Курс математики».

Теорема 50.3

Число α является корнем многочлена $A(x)$ тогда и только тогда, когда многочлен $A(x)$ делится нацело на двучлен $x - \alpha$.

Доказательство

Пусть $A(\alpha) = 0$. Докажем, что $A(x) \vdots (x - \alpha)$.

По теореме Безу $A(\alpha)$ является остатком от деления многочлена $A(x)$ на двучлен $x - \alpha$. Но $A(\alpha) = 0$, следовательно, $A(x) \vdots (x - \alpha)$.

Пусть теперь $A(x) \vdots (x - \alpha)$. Докажем, что $A(\alpha) = 0$.

Поскольку $A(x) \vdots (x - \alpha)$, то остаток от деления многочлена $A(x)$ на двучлен $x - \alpha$ равен 0, т. е. $A(\alpha) = 0$. ■

Следствие 1

Если $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ — множество корней многочлена $A(x)$, то $A(x) = (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n) \cdot Q(x)$, где $Q(x)$ — некоторый многочлен.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Следствие 2

Множество корней многочлена степени n содержит не более n элементов.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Следствие 3

Если множество корней многочлена $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ содержит более n элементов, то $a_n = a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0$, то есть этот многочлен тождественно равен нулю.

Доказательство

Если предположить, что данный многочлен ненулевой, то его степень не превосходит n. Тогда множество его корней не может содержать более n элементов. Следовательно, данный многочлен является нулевым. ■

Пример 1. Остатки от деления многочлена $P(x)$ на двучлены $x - 2$ и $x - 3$ соответственно равны 5 и 7. Найдите остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $x^2 - 5x + 6$.

Решение. Так как степень многочлена $x^2 - 5x + 6$ равна 2, то степень искомого остатка не превышает 1 или остаток является нулевым многочленом. Поэтому остаток — это многочлен вида $ax + b$.

Имеем: $P(x) = (x^2 - 5x + 6)\, Q(x) + ax + b$. Отсюда

$$P(x) = (x - 2)(x - 3)\, Q(x) + ax + b.$$

Подставим по очереди в это равенство $x = 2$ и $x = 3$. Получаем:

$$P(2) = 2a + b,\ P(3) = 3a + b.$$

С учётом условия и теоремы Безу $P(2) = 5$ и $P(3) = 7$.

$$\text{Тогда } \begin{cases} 2a + b = 5, \\ 3a + b = 7. \end{cases}$$

Отсюда $a = 2$, $b = 1$. Следовательно, искомым остатком является многочлен $2x + 1$.

Ответ: $2x + 1$. ■

Пример 2. Докажите тождество:

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}-1=0.$$

Решение. Очевидно, что $a \neq b$, $b \neq c$ и $c \neq a$. Отметим, что выражение $f(x)$, записанное в левой части доказываемого равенства, тождественно равно или нулевому многочлену, или многочлену, степень которого не превышает 2.

Предположим, что многочлен $f(x)$ ненулевой. Легко проверить, что $f(a) = f(b) = f(c) = 0$. Тогда ненулевой многочлен $f(x)$ степени не выше 2 имеет три различных корня. Следовательно, многочлен $f(x)$ тождественно равен нулю. ■

1. В каком случае говорят, что многочлен $A(x)$ делится нацело на многочлен $B(x)$?

2. Каково необходимое условие деления нацело одного многочлена на другой?

3. Сформулируйте теорему о делении многочленов с остатком.

4. Что называют корнем многочлена?

5. Сформулируйте теорему Безу.

6. Сформулируйте необходимое и достаточное условие, при котором число α является корнем многочлена $A(x)$.

Упражнения

50.1. Докажите, что многочлен $x^4 - 1$ делится нацело на многочлен $x^3 + x^2 + x + 1$.

50.2. Докажите, что многочлен $A(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 1$ делится нацело на многочлен $B(x) = x^2 - x + 1$.

50.3. Разделив «уголком» многочлен $A(x)$ на многочлен $B(x)$, найдите неполное частное и остаток:

1) $A(x) = x^4 + x + 1$, $B(x) = x^2 + x + 1$;

2) $A(x) = x^4 + x^2 + 1$, $B(x) = x + 5$.

50.4. Разделив «уголком» многочлен $A(x)$ на многочлен $B(x)$, найдите неполное частное и остаток:

1) $A(x) = x^7 - 1$, $B(x) = x^3 + x + 1$;

2) $A(x) = x^3 + 5x^2 - 6x - 6$, $B(x) = x - 2$.

50.5. Найдите остаток от деления многочлена $A(x)$ на двучлен $B(x)$:

1) $A(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$, $B(x) = x - 1$;

2) $A(x) = 2x^4 - 4x^3 - x - 1$, $B(x) = x + 2$.

50.6. Докажите, что многочлен $A(x)$ делится нацело на двучлен $B(x)$:

1) $A(x) = 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$, $B(x) = x + 2$;

2) $A(x) = 5x^5 - 6x^4 - x^2 + x + 1$, $B(x) = x - 1$.

50.7. Докажите, что $(x^n - a^n) \vdots (x^k - a^k)$, если $n \vdots k$, $n \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}$.

50.8. Докажите, что многочлен, тождественно равный выражению $(x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$, где $n \in \mathbf{N}$, делится нацело на многочлен, тождественно равный выражению $x(x+1)(2x+1)$.

50.9. Докажите, что многочлен, тождественно равный выражению $(x^2 + x - 1)^{2n} + (x^2 - x + 1)^{2n} - 2$, где $n \in \mathbf{N}$, делится нацело на многочлен $x^2 - x$.

50.10. При каких значениях параметра a остаток от деления многочлена $2x^4 - 3x^3 - ax^2 - x - 2$ на двучлен $x + 1$ равен 3?

50.11. При каких значениях параметра b многочлен $x^3 + 3x^2 - bx + 6$ делится нацело на двучлен $x + 2$?

50.12. При каких значениях параметров a, b и c многочлен $x^3 + ax^2 + bx + c$ делится нацело на двучлены $x - 1$ и $x + 2$, а при делении на двучлен $x + 1$ даёт в остатке 10?

50.13. При каких значениях параметров a и b многочлен $x^3 + ax^2 + bx + ab$ при делении на $x - 2$ даёт в остатке 15, а при делении на $x + 1$ даёт в остатке 0?

50.14. Докажите, что выражение $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$ делится нацело на выражение $(a-b)(b-c)(c-a)$.

50.15. Докажите, что выражение $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ делится нацело на выражение $x + y + z$.

50.16. Докажите тождество

$$a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x.$$

50.17. Степень многочлена $P(x)$ равна 100. Известно, что $P(-1) = P(1)$, $P(-2) = P(2)$, ..., $P(-50) = P(50)$. Верно ли, что для любого $x \in \mathbf{R}$ выполняется равенство $P(-x) = P(x)$?

Целое рациональное уравнение

Рассмотрим многочлен $A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Уравнение вида $A(x) = 0$ называют **целым рациональным уравнением**.

Числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ называют **коэффициентами** целого рационального уравнения, число a_0 — **свободным членом** этого уравнения.

Теорема 51.1

Если целое рациональное уравнение с целыми коэффициентами имеет целый корень, то он является делителем свободного члена.

Доказательство

Пусть x_0 — целый корень уравнения

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — целые числа. Тогда выполняется равенство

$$a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 = 0.$$

Отсюда $a_0 = -a_n x_0^n - a_{n-1}x_0^{n-1} - \ldots - a_1 x_0$;

$$a_0 = x_0(-a_n x_0^{n-1} - a_{n-1}x_0^{n-2} - \ldots - a_1).$$

Следовательно, целое число a_0 равно произведению двух целых чисел, одно из которых равно x_0. Тогда $a_0 \vdots x_0$. ■

Обратим внимание на следующее: для того чтобы целое число было корнем целого рационального уравнения с целыми коэффициентами, необходимо, чтобы оно было делителем свободного члена (рис. 51.1). Однако это условие не является достаточным.

Рис. 51.1

Например, числа –2 и 2 являются делителями свободного члена уравнения $3x^2 - 5x - 2 = 0$. Но только одно из них является корнем уравнения.

Также отметим, что теорема 51.1 помогает решать те целые рациональные уравнения с целыми коэффициентами, которые имеют целые корни.

Пример. Решите уравнение $2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - x - 6 = 0$.

Решение. Чтобы проверить наличие целых корней у этого уравнения, выпишем все делители его свободного члена: 1; –1; 2; –2; 3; –3; 6; –6.

Проверкой устанавливаем, что $x = -1$ является корнем данного уравнения. Следовательно, многочлен $A(x)$, стоящий в левой части уравнения, делится нацело на двучлен $x + 1$, т. е. $A(x) = (x + 1)B(x)$.

Многочлен $B(x)$ можно найти, выполнив деление «уголком» многочлена $A(x)$ на двучлен $x + 1$. Однако существует и другой способ, позволяющий найти многочлен $B(x)$.

Представим многочлен $A(x)$ в виде суммы двучленов, каждый из которых делится нацело на $x + 1$. Имеем:

$$2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - x - 6 = 2x^4 + \underbrace{2x^3 - 7x^3}_{= -5x^3} \underbrace{-7x^2 + 5x^2}_{= -2x^2} + \underbrace{5x - 6x}_{= -x} - 6 =$$

$$= (2x^4 + 2x^3) + (-7x^3 - 7x^2) + (5x^2 + 5x) + (-6x - 6).$$

Далее можно записать:

$$A(x) = 2x^3(x + 1) - 7x^2(x + 1) + 5x(x + 1) - 6(x + 1) =$$

$$= (x + 1)(2x^3 - 7x^2 + 5x - 6).$$

Следовательно, $B(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5x - 6$.

Выясним, имеет ли целые корни уравнение $2x^3 - 7x^2 + 5x - 6 = 0$. Выпишем делители свободного члена: 1; –1; 2; –2; 3; –3; 6; –6.

Проверкой устанавливаем, что число 3 является корнем этого уравнения. Тогда $B(x) = (x - 3)C(x)$. Найдём многочлен $C(x)$. Для этого представим многочлен $B(x)$ в виде суммы двучленов, каждый из которых делится нацело на $x - 3$:

$$2x^3 - 7x^2 + 5x - 6 = 2x^3 \underbrace{-6x^2 - x^2}_{= -7x^2} + \underbrace{3x + 2x}_{= 5x} - 6 =$$

$$= (2x^3 - 6x^2) + (-x^2 + 3x) + (2x - 6).$$

Далее можно записать

$$B(x) = 2x^2(x - 3) - x(x - 3) + 2(x - 3) = (x - 3)(2x^2 - x + 2).$$

Следовательно, $C(x) = 2x^2 - x + 2$.

Очевидно, что уравнение $C(x) = 0$ корней не имеет. Таким образом, исходное уравнение имеет два корня –1 и 3.

Ответ: –1; 3. ■

Если многочлен с целыми коэффициентами можно представить в виде произведения нескольких многочленов, отличных от константы, с целыми коэффициентами, то такой многочлен называют **приводимым над множеством** целых чисел. Поскольку многочлен $A(x)$ из рассмотренного примера можно записать так: $A(x) = (x + 1)(x - 3)(2x^2 - x + 2)$, то он является приводимым над $\mathbb{Z}$.

Понятно, что не каждый многочлен с целыми коэффициентами является приводимым над $\mathbb{Z}$. Например, многочлены $2x + 1$ и $x^2 - 3$ являются неприводимыми над $\mathbb{Z}$.

Признаком неприводимости многочлена над $\mathbb{Z}$ является следующая теорема.

Теорема 51.2

(теорема Эйзенштейна)

Если для многочлена $A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ существует такое простое число p, что a_n не делится нацело на p, а все остальные коэффициенты делятся на p, причём a_0 не делится нацело на p^2, то многочлен $A(x)$ не приводим над Z.

Например, пользуясь этой теоремой, легко установить (сделайте это самостоятельно), что многочлен $3x^7 - 4x^6 + 2x^5 - 6x^3 - 8x - 2$ является неприводимым над Z.

Если вы хотите узнать больше о приводимых и неприводимых многочленах, то советуем принять участие в работе над соответствующим проектом (с. 420).

1. Какое уравнение называют целым рациональным?
2. Каким свойством обладают целые корни целого рационального уравнения с целыми коэффициентами?
3. Каково соотношение между множеством делителей свободного члена целого рационального уравнения с целыми коэффициентами и множеством его целых корней?

Упражнения

51.1. Решите уравнение:

1) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15 = 0$;
2) $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$;
3) $3x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$;
4) $5x^4 + 9x^3 - 2x^2 - 4x - 8 = 0$;
5) $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = 0$;
6) $x^5 + 8x^4 + 24x^3 + 35x^2 + 28x + 12 = 0$.

51.2. Решите уравнение:

1) $x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0$;
2) $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$;
3) $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0$;
4) $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x + 1 = 0$;
5) $x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 = 0$;
6) $3x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 9x + 10 = 0$.

51.3. Докажите, что если целое рациональное уравнение с целыми коэффициентами $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ имеет рациональный корень, то он является целым числом.

51.4. Докажите, что если целое рациональное уравнение с целыми коэффициентами $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ имеет рациональный корень $x_0 = \frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь, то p — делитель свободного члена a_0, q — делитель старшего коэффициента a_n.

§ 52 Метод математической индукции

Изучая окружающий мир, нам часто приходится делать выводы на основании результатов наблюдений и опытов.

Общие выводы, полученные на основании изучения частных случаев, называют **индуктивными**, а сам метод, с помощью которого сделаны эти выводы, называют **индуктивным методом** или **индукцией** (от лат. *inductio* — «наведение»).

Например, задолго до открытия законов движения Земли люди пришли к выводу, что Солнце утром встаёт на востоке, а вечером уходит за горизонт на западе. Этот вывод являлся индуктивным: ведь он основывался только на наблюдениях.

Конечно, с помощью индукции не всегда можно получить правильные выводы. Так, если в вашей и соседней школах среди учителей начальных классов нет мужчин, то это не означает, что все учителя начальных классов — женщины.

Несмотря на необходимость относиться к индуктивным выводам с определённой степенью недоверия, индуктивный метод широко применяется в математике.

Рассмотрим два примера.

• Попробуем подметить закономерность в поведении сумм n первых нечётных натуральных чисел. Обозначим символом S_n сумму n первых нечётных чисел. Договоримся, что $S_1 = 1$. Имеем:

$S_1 = 1 = 1;$
$S_2 = 1 + 3 = 4;$
$S_3 = 1 + 3 + 5 = 9;$
$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16;$
$S_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$

Числа 1, 4, 9, 16 и 25 являются квадратами последовательных натуральных чисел.

Можно сделать такое предположение: для любого натурального n

$$S_n = n^2. \qquad (1)$$

• Рассмотрим значения многочлена $f(n) = n^2 - n + 41$ при значениях n, равных 1, 2, 3, 4 и 5. Имеем:

$f(1) = 41$ — простое число;
$f(2) = 43$ — простое число;

$f(3) = 47$ — простое число;

$f(4) = 53$ — простое число;

$f(5) = 61$ — простое число.

Можно сделать такое предположение: для любого натурального n значение многочлена $f(n)$ является простым числом.

Два приведённых предположения являются лишь гипотезами, которые следует или доказать, или опровергнуть.

Один из способов опровергнуть гипотезу — привести контрпример. Для второго предположения такой контрпример легко найти. Имеем: $f(41) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$ — составное число. Таким образом, гипотеза опровергнута.

Попытка найти контрпример для первого индуктивного вывода может привести к таким равенствам:

$S_6 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6^2$;

$S_7 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49 = 7^2$;

$S_8 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64 = 8^2$.

Полученные равенства только подкрепляют уверенность в том, что выдвинутая гипотеза верна.

Понятно, что вычисление суммы с очередным нечётным слагаемым не приведёт к доказательству гипотезы: сколько бы сумм мы ни вычислили, нельзя гарантировать того, что среди бесконечного количества оставшихся сумм не встретится такая, для которой равенство (1) не выполняется.

Чтобы доказать справедливость высказанной гипотезы, нужно провести некоторые общие рассуждения.

Пусть равенство (1) справедливо для k слагаемых, то есть

$$S_k = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2.$$

Рассмотрим сумму, содержащую $k + 1$ слагаемое:

$$S_{k+1} = \underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)}_{S_k} + (2k + 1) = S_k + (2k + 1).$$

С учётом предположения $S_k = k^2$ имеем:

$$S_{k+1} = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

Приведённые рассуждения гарантируют, что *если равенство* (1) *верно для $n = k$, то оно остаётся верным и для $n = k + 1$.*

Теперь можно утверждать, что равенство (1) доказано для любого натурального значения n. Поясним это.

Поскольку $S_1 = 1$, то равенство (1) верно для $n = 1$. Следовательно, оно верно для $n = 1 + 1 = 2$, а тогда оно верно при $n = 2 + 1 = 3$, при $n = 3 + 1 = 4$, при $n = 4 + 1 = 5$ и т. д. Таким образом можно достичь любого натурального значения n. Следовательно, равенство (1) верно при всех натуральных значениях n.

Рассмотренный метод доказательства называют **методом математической индукции**. В общем виде его можно описать так.

Пусть надо доказать, что некоторое утверждение верно для любого натурального значения n.

Доказательство этого факта методом математической индукции состоит из двух частей (*теорем*):

1) *доказывают* (*проверяют*) *справедливость утверждения для* $n = 1$;

2) *предполагают, что утверждение верно для* $n = k$, $k \in \boldsymbol{N}$, *и на основании этого доказывают, что оно верно для* $n = k + 1$.

Теорему, которую доказывают в первой части, называют **базой индукции**.

Например, при доказательстве равенства (1) базой индукции являлось утверждение, что равенство (1) выполняется при $n = 1$.

Теорему, которую доказывают во второй части метода, называют **индуктивным переходом**.

Пример 1. Выведите формулу для вычисления значения суммы

$$S_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!}, \text{ где } n \in \boldsymbol{N}.$$

Решение. Для $n = 1$ имеем: $S_1 = \frac{1}{2!}$.

Для $n = 2$ имеем: $S_2 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} = \frac{5}{3!}$.

Для $n = 3$ имеем: $S_3 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} = \frac{23}{4!}$.

Для $n = 4$ имеем: $S_4 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} = \frac{119}{5!}$.

Можно сделать такое предположение: для всех $n \in \boldsymbol{N}$ выполняется равенство

$$S_n = \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!}. \qquad (2)$$

Докажем эту гипотезу методом математической индукции.

Ранее мы проверили справедливость формулы (2) для $n = 1$, тем самым доказав теорему «база индукции».

Теперь докажем теорему «индуктивный переход».

Пусть формула (2) верна при $n = k$, то есть $S_k = \frac{(k+1)! - 1}{(k+1)!}$.

Имеем:

$$S_{k+1} = \underbrace{\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{k}{(k+1)!}}_{S_k} + \frac{k+1}{(k+2)!} = \frac{(k+1)!-1}{(k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} = \frac{(k+2)!-1}{(k+2)!}.$$

Итак, предположив, что формула (2) верна при $n = k$, мы доказали, что она верна и при $n = k + 1$. А с учётом теоремы «база индукции» можно сделать вывод, что гипотеза (2) верна. ■

Полученную формулу можно представить в таком виде: $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$. Заметим, что при неограниченном увеличении n значение выражения $\frac{1}{(n+1)!}$ стремится к числу 0, а значит, значение суммы S_n стремится к числу 1. Эти соображения позволяют рассматривать сумму $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} + \ldots$, содержащую бесконечное число слагаемых, и считать, что её значение равно 1. Сумму вида $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$, где (a_n) — бесконечная числовая последовательность, называют **рядом**. Напомним, что с рядами вы встречались при изучении бесконечной геометрической прогрессии, у которой знаменатель по модулю меньше единицы. Если вы хотите узнать больше о рядах, то советуем принять участие в работе над проектом «О сходимости рядов» (с. 420).

Пример 2. Докажите, что для любого $n \in \mathbf{N}$ значение выражения $5^n - 3^n + 2n$ кратно 4.

Решение. При $n = 1$ получаем $5^1 - 3^1 + 2 \cdot 1 = 4$. Поскольку число 4 делится нацело на 4, то есть $4 \vdots 4$, то теорема «база индукции» доказана.

Пусть при $n = k$ утверждение верно, то есть

$$(5^k - 3^k + 2k) \vdots 4.$$

Докажем, что тогда это утверждение верно при $n = k + 1$, то есть

$$(5^{k+1} - 3^{k+1} + 2(k+1)) \vdots 4.$$

Для доказательства достаточно показать, что разность $(5^{k+1} - 3^{k+1} + 2k + 2) - (5^k - 3^k + 2k)$ кратна 4.

Перепишем эту разность так:

$$5^k(5-1) - 3^k(3-1) + 2 = 4 \cdot 5^k - 2(3^k - 1).$$

Поскольку 3^k — нечётное число, то $3^k - 1$ — чётное число, то есть $(3^k - 1) \vdots 2$. Поэтому значение полученного выражения кратно 4.

Следовательно, доказываемое утверждение верно, в чём мы убедились с помощью метода математической индукции. ■

Методом математической индукции можно пользоваться и в тех случаях, когда надо доказать утверждение, верное для всех натуральных n таких, что $n \geqslant n_0$, где $n_0 \in \boldsymbol{N}$, $n_0 > 1$. В этом случае теорему «база индукции» доказывают (проверяют) для $n = n_0$.

Пример 3. Докажите, что для любого $n \in \boldsymbol{N}$ и $n > 4$ выполняется неравенство $2^n > n^2$.

Решение. При $n = 5$ имеем верное неравенство $2^5 > 5^2$.

Пусть доказываемое неравенство верно при $n = k$, то есть $2^k > k^2$, где $k \in \boldsymbol{N}$, $k > 4$. Имеем:

$$2 \cdot 2^k > 2k^2;$$

$$2^{k+1} > 2k^2.$$

Легко показать (убедитесь в этом самостоятельно), что при $k > 1 + \sqrt{2}$, а тем более при $k > 4$, выполняется неравенство $2k^2 > (k+1)^2$. Отсюда

$$2^{k+1} > (k+1)^2.$$

Мы показали, что при $n = 5$ выполняется теорема «база индукции», и при $n > 4$ доказали теорему «индуктивный переход». Следовательно, рассматриваемое неравенство верно при любых натуральных n таких, что $n > 4$. ■

1. Какие выводы называют индуктивными?
2. Опишите схему доказательства методом математической индукции.
3. Из каких двух теорем состоит доказательство методом математической индукции?

Упражнения

52.1. Числа 24, 44, 64, 84 кратны 4. Можно ли отсюда сделать вывод, что число, которое оканчивается цифрой 4, кратно 4?

52.2. Рассмотрите значения многочлена $f(n) = n^2 + n + 17$ при $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ и $n = 5$. Сделайте предположение. Установите, является ли высказанная гипотеза верной.

52.3. Докажите, что при любом натуральном n выполняется равенство:

1) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$;

3) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

4) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$.

52.4. Докажите, что при любом натуральном n выполняется равенство:

1) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

2) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(3n+1) = n(n+1)^2$;

3) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$.

52.5. Выведите формулу для вычисления суммы

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}, \text{ где } n \in \boldsymbol{N}.$$

52.6. Выведите формулу для вычисления суммы

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}, \text{ где } n \in \boldsymbol{N}.$$

52.7. Докажите неравенство $2^n > 2n + 1$, где $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant 3$.

52.8. Докажите неравенство $3^n > 4n + 1$, где $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant 3$.

52.9. Докажите, что для любого натурального n:

1) $(3^{2n+1} + 2^{n+2}) \vdots 7$; 2) $(6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}) \vdots 17$.

52.10. Докажите, что для любого натурального n:

1) $(7^{n+1} + 8^{2n-1}) \vdots 19$; 2) $(7 \cdot 24^n - 5 \cdot 13^n - 2^{n+1}) \vdots 11$.

Упражнения для повторения курса алгебры и начал анализа 10 класса

Множества, логика, функции

1. Задайте с помощью перечисления элементов множество:
1) $A = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, x(2|x| - 1) = 0\}$;
2) $B = \{x \mid x \in \mathbf{N}, -3 \leqslant x < 2\}$.

2. Укажите равные множества:
$A = \{x \mid x = 6n - 3, n \in \mathbf{N}\}$; $C = \{x \mid x$ кратно 3 и не кратно 2$\}$;
$B = \{x \mid x = 3n, n \in \mathbf{N}\}$; $D = \{x \mid x = 6n + 3, n \in \mathbf{N}\}$.

3. На языке «необходимо и достаточно» опишите принадлежность элемента x множествам A, B и C (рис. 1).

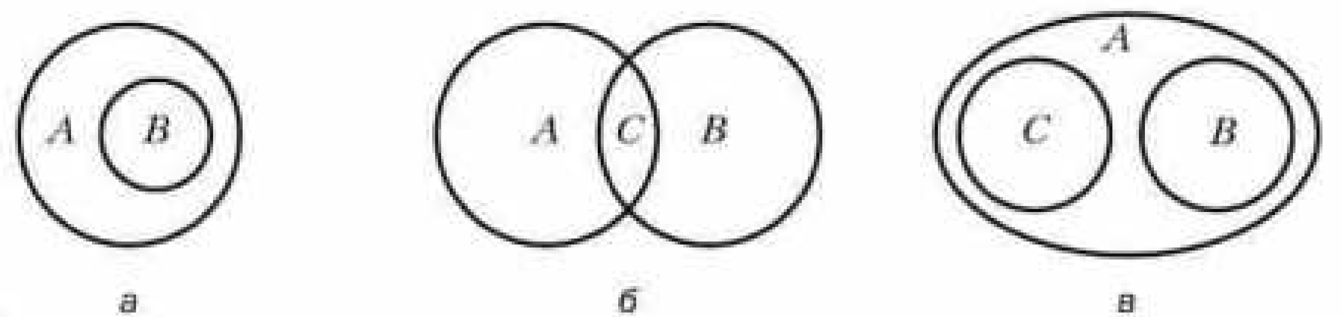


Рис. 1

4. Из анкетирования, проведённого в классе, выяснилось, что из 30 учащихся класса у 18 есть брат, у 14 — сестра, а у 10 учащихся есть сестра и брат. Есть ли в этом классе учащиеся, у которых нет ни сестры, ни брата?

5. В декабре было 10 ясных и безветренных дней, 15 дней был ветер и 12 дней шёл снег. Сколько дней в декабре была вьюга (снег и ветер)?

6. Автобусные билеты имеют номера от 000 000 до 999 999. Билет называют «счастливым», если сумма первых трёх цифр его номера равна сумме последних трёх цифр. Докажите, что:
1) количество всех «счастливых» билетов чётно;
2) сумма номеров всех «счастливых» билетов кратна 999;
3) количество всех «счастливых» билетов равно количеству билетов, сумма цифр которых равна 27.

7. Найдите нули функции:
1) $y = \sqrt{x^2 - 1}$; 3) $y = x^3 - 4x$;
2) $y = \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3}$; 4) $y = x^2 + 1$.

8. Найдите промежутки знакопостоянства функции:

1) $y = x^2 - 2x + 1$; 2) $y = \dfrac{9}{3 - x}$.

9. Исследуйте функцию на чётность:

1) $f(x) = \sqrt{4 - x} + \sqrt{4 + x}$;

2) $f(x) = \dfrac{|5x - 2| + |5x + 2|}{x^2 - 1}$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{(3x - 1)^7} + \dfrac{1}{(3x + 1)^7}$.

10. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{(x - 1)^2 (x - 2)}$; 3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3 - |x|}} + \dfrac{1}{x - 2}$;

2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 (x + 2)}}$; 4) $y = \sqrt{|x + 5| (x + 2)}$.

11. Найдите область значений функции:

1) $y = 3x^2 - 2x + 1$; 3) $y = -3x^2 - x - 2$;

2) $y = x + \dfrac{9}{x}$; 4) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$.

12. Постройте график функции:

1) $y = 2\sqrt{3x - 1} + 1$; 5) $y = \sqrt{1 - |x|}$;

2) $y = 4\sqrt{2x - 3} - 1$; 6) $y = \dfrac{1}{|x| - 4}$;

3) $y = 3(2x + 1)^2 - 2$; 7) $y = \dfrac{1}{|x + 1| - 3}$;

4) $y = 2(3x - 1)^2 + 1$; 8) $y = (|x + 1| + 2)^2$.

13. Сколько корней имеет уравнение $|(x + 1)^2 - 1| = a$ в зависимости от значения параметра a?

14. Какие из функций, графики которых изображены на рисунке 2, являются обратимыми?

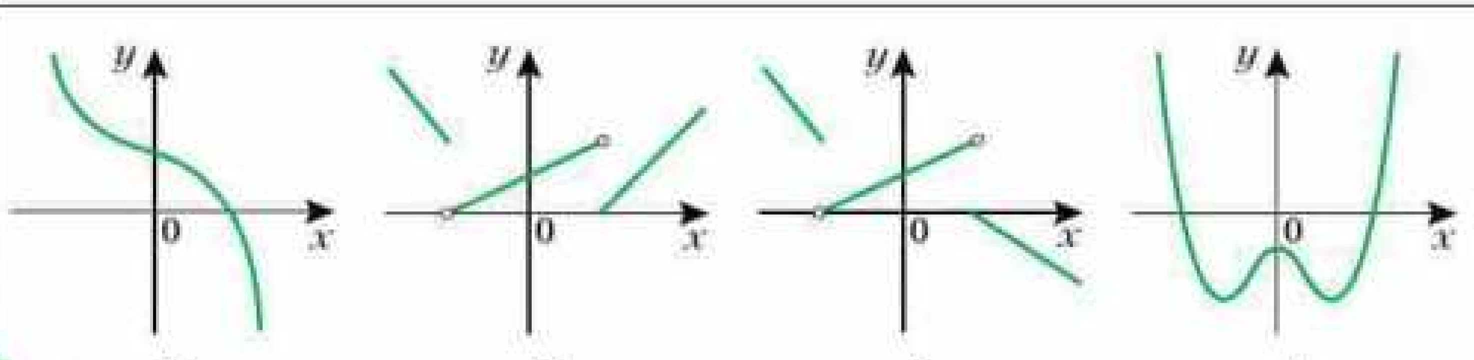


Рис. 2

15. Найдите функцию, обратную к данной:

1) $y = \frac{1-x}{1+x}$; 2) $y = \begin{cases} \sqrt{x-2}, \text{ если } x \geqslant 3, \\ 2x-5, \text{ если } x < 3. \end{cases}$

16. Решите неравенство:

1) $(x^2 - 6x)(x^2 + 5x - 6) < 0$;
2) $(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 3x + 2) \geqslant 0$;
3) $4x^3 - 25x < 0$;
4) $\frac{x^3 - 16x}{x^2 - x - 30} < 0$;
5) $(x-1)(x+3)^2(x-2) < 0$;
6) $(2x+1)^2(x^2 - 4x + 3) > 0$;
7) $(2x+1)^2(x-1)(x-2) \geqslant 0$;
8) $(x-5)(x+4)(x^2 + 6x + 9) \geqslant 0$.

17. Решите неравенство:

1) $\frac{x^2 + x - 20}{x^2 - 6x + 9} \geqslant 0$; 2) $\frac{x^2 + x - 20}{x^2 - 6x + 9} < 0$.

18. Решите неравенство:

1) $\frac{x-2}{x+3} \geqslant \frac{3x-4}{x+3}$; 2) $\frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{x-1} < 2$.

19. Решите неравенство:

1) $(x-3)\sqrt{14 + 5x - x^2} \geqslant 0$;
2) $(x-3)\sqrt{14 + 5x - x^2} < 0$.

20. Решите неравенство $\left|\frac{x}{x^2 - 9}\right| \leqslant \frac{x}{x^2 - 9}$.

21. Для каждого значения a решите неравенство:

1) $\frac{x-5}{x-a} \geqslant 0$; 2) $\frac{(x+1)(x-a)}{x+1} \geqslant 0$.

Степенная функция

22. Постройте график функции:

1) $y = (x+1)^4$; 3) $y = (|x| - 2)^3$;
2) $y = (x-1)^3 + 2$; 4) $y = |x+1|^3$.

23. Постройте график функции:

1) $f(x) = \begin{cases} x^4, \text{ если } x < 0, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x \geqslant 0; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} x^5, \text{ если } x < -1, \\ -x-2, \text{ если } x \geqslant -1. \end{cases}$

Пользуясь построенным графиком, укажите промежутки возрастания и промежутки убывания данной функции.

24. Дана функция $f(x) = x^{-19}$. Сравните:

1) $f(1{,}6)$ и $f(2)$; 3) $f(-9{,}6)$ и $f(9{,}6)$;

2) $f(-5{,}6)$ и $f(-6{,}5)$; 4) $f(0{,}1)$ и $f(-10)$.

25. Функция задана формулой $f(x) = x^{-16}$. Сравните:

1) $f(1{,}6)$ и $f(2{,}2)$; 3) $f(-3{,}4)$ и $f(3{,}4)$;

2) $f(-4{,}5)$ и $f(-3{,}6)$; 4) $f(-18)$ и $f(3)$.

26. Постройте график функции:

1) $y = (x-1)^{-3}$; 2) $y = |x^{-3}|$; 3) $y = |x-1|^{-3}$.

27. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt[3]{x-2} - 2$; 3) $y = \sqrt[4]{|x|+1}$;

2) $y = \sqrt[3]{|x-1|}$; 4) $y = \left|\sqrt[4]{x+2} - 2\right|$.

28. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \sqrt[4]{|x|}$ на промежутке:

1) $[1; 2]$; 2) $[-1; 1]$; 3) $(-\infty; -1]$.

29. Сколько корней имеет уравнение в зависимости от значения параметра a:

1) $\sqrt[3]{x} = a - x$; 2) $\sqrt[4]{x} = a - x$?

30. Упростите выражение:

1) $\sqrt[8]{(\sqrt{5}-2)^4}$; 3) $\sqrt[12]{(\sqrt{11}-3)^3}$;

2) $\sqrt[10]{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}$; 4) $\sqrt[15]{(\sqrt{7}-3)^3}$.

31. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{6}} \cdot \sqrt[6]{9-6\sqrt{2}} - \sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}$.

32. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3}$; 2) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt[6]{x^6}} + 2$.

33. Упростите выражение:

1) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}-1} - \dfrac{\sqrt[4]{a}+1}{\sqrt{a}}\right) : \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{a}+1}$;

2) $\dfrac{\sqrt{a}+27}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}} \cdot \left(\dfrac{\sqrt[6]{a}-3}{\sqrt[3]{a}-3\sqrt[6]{a}+9} - \dfrac{\sqrt[6]{ab}-9}{\sqrt{a}+27}\right)$.

34. Вычислите значение выражения:

1) $\dfrac{10\,000^{0,4} \cdot 10^{0,5}}{100^{0,3} \cdot 1000^{\frac{1}{6}}}$; 2) $\left(\dfrac{3^{-\frac{5}{6}} \cdot 7^{-\frac{5}{6}}}{21^{-1} \cdot 5^{\frac{1}{3}}}\right)^{-6}$.

35. Упростите выражение:

1) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+2a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{5}{6}}-a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{7}{6}}}\cdot\dfrac{a-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}}}$;

2) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{(a^2-ab)^{\frac{2}{3}}}:\dfrac{a^{-\frac{2}{3}}(a-b)^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}$;

3) $\left(1-a^{\frac{1}{36}}\right)\left(1+a^{\frac{1}{36}}+a^{\frac{1}{18}}\right)+\dfrac{4-a^{\frac{1}{6}}}{2-a^{\frac{1}{12}}}$;

4) $\dfrac{m^{\frac{4}{3}}-27m^{\frac{1}{3}}n}{m^{\frac{2}{3}}+3\sqrt[3]{mn}+9n^{\frac{2}{3}}}:\left(1-3\sqrt[3]{\dfrac{n}{m}}\right)-\sqrt[3]{m^2}$.

36. Решите уравнение:

1) $x=\sqrt{x+5}+1$; 2) $3\sqrt{x+10}-11=2x$.

37. Решите уравнение:

1) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+1}=2$; 2) $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}=1$.

38. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-6=0$; 2) $\sqrt[3]{x^2-4x+4}-2\sqrt[3]{x-2}-3=0$.

39. Решите уравнение, используя метод замены переменной:

1) $x^2-5x+16-3\sqrt{x^2-5x+20}=0$; 2) $x^2+4-5\sqrt{x^2-2}=0$.

40. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases}\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}=1,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=7;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}}+\sqrt{\dfrac{2x}{3x-2y}}=2,\\ x^2-8y^2=18-18y.\end{cases}$

41. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x^2+3x-2}+\sqrt{x^2-x+1}=4x-3$;

2) $(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}+x^2+x-7)=x$.

42. Решите неравенство:

1) $\sqrt{2x-4}\geqslant\sqrt{5-x}$; 2) $\sqrt{x^2+x}<\sqrt{x^2+1}$.

43. Решите неравенство:

1) $\sqrt{3x-x^2}<4-x$; 3) $\sqrt{2-x}>x$;

2) $\sqrt{x^2+3x+3}<2x+1$; 4) $\sqrt{x^2-1}>x$.

44. Решите неравенство:

1) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}\leqslant 0$; 2) $(x-12)\sqrt{x-3}\leqslant 0$.

45. Решите неравенство $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{4-x^2}<2$.

46. При каких значениях a возможно равенство $\cos x = a^2 - 3$?

47. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $2\cos\alpha + 3\sin\alpha - \frac{2\cos^2\alpha}{\cos\alpha}$.

48. Исследуйте на чётность функцию:

1) $f(x) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$;
2) $f(x) = x^3 + \cos x$;
3) $f(x) = \frac{(x^2-1)\operatorname{ctg} x}{x^2-1}$.

49. Найдите значение выражения:

1) $\sin 420^\circ$; 2) $\cos 405^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 765^\circ$.

50. Найдите главный период функции:

1) $f(x) = \cos(3x+1)$;
2) $f(x) = \operatorname{ctg}(-7x+2)$;
3) $f(x) = \cos \pi x$.

51. Докажите, что функция $f(x) = \cos(\sqrt{x})^2$ не является периодической.

52. Найдите период функции $f(x) = \operatorname{tg}\frac{4\pi x}{9} + \operatorname{ctg}\frac{9\pi x}{4}$.

53. Расположите числа в порядке возрастания:

1) $\sin 3{,}2$, $\sin 4$, $\sin 3{,}6$, $\sin 2{,}4$, $\sin 1{,}8$;
2) $\cos 3{,}5$, $\cos 4{,}8$, $\cos 6{,}1$, $\cos 5{,}6$, $\cos 4{,}2$.

54. Постройте график функции:

1) $y = \sin x + \sin|x|$; 2) $y = \operatorname{tg} x \cos x$.

55. Возможно ли равенство:

1) $\sin\alpha = \frac{2}{3}\operatorname{tg} 80^\circ$; 2) $\cos\alpha = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{18}$; 3) $\cos\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{9}$?

56. Упростите выражение:

1) $\frac{\sin^2\alpha - 1}{\cos^2\alpha - 1} + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha$;
2) $(\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha)^2 + (\operatorname{ctg}\alpha\sin\alpha)^2$;
3) $\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$;
4) $(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\beta)^2 - (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{ctg}\beta)^2$.

57. Найдите значение выражения $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$.

58. Упростите выражение $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$, если $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

59. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{4}$. Найдите значение выражения $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

60. Докажите тождество:

1) $\frac{\cos(\alpha+\beta) + \sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta) - \sin\alpha\sin\beta} = 1$;
2) $\frac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos(45^\circ+\alpha)}{2\sin(45^\circ+\alpha) - \sqrt{2}\sin\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

61. Докажите тождество:

1) $\sin(\pi + x)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(2\pi + x)\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -1;$

2) $\sqrt{\sin^{-2}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos^{-2}\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right)} = \frac{1}{|\sin\alpha\cos\alpha|}.$

62. Упростите выражение:

1) $\left(\sin\frac{\alpha}{4} + \cos\frac{\alpha}{4}\right)\left(\sin\frac{\alpha}{4} - \cos\frac{\alpha}{4}\right);$ 2) $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha}.$

63. Докажите тождество:

1) $\cos 3\alpha - \cos 4\alpha - \cos 5\alpha + \cos 6\alpha = -4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\cos\frac{9\alpha}{2};$

2) $\frac{2(\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1)}{\cos\alpha - \sin\alpha - \cos 3\alpha + \sin 3\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha};$

3) $(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 4\sin^2\frac{\alpha - \beta}{2};$

4) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha - \beta) = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2};$

5) $\frac{\sin 2\alpha\cos 4\alpha(1 + \cos 2\alpha)}{(\sin 3\alpha + \sin\alpha)(\cos 3\alpha + \cos 5\alpha)} = \frac{1}{2};$

6) $\sin^2\left(\frac{15\pi}{8} - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{17\pi}{8} - 2\alpha\right) = -\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}.$

Тригонометрические уравнения и неравенства

64. Вычислите:

1) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5} - \arccos\frac{5}{13}\right);$ 3) $\cos(\operatorname{arctg} 2);$

2) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3} + \arccos\frac{2}{3}\right);$ 4) $\sin(\operatorname{arcctg}(-2)).$

65. Вычислите:

1) $\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{9}\right);$ 2) $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{8}\right).$

66. Решите уравнение $\arcsin x \cdot \arccos x = -\frac{3\pi^2}{16}.$

67. Решите уравнение:

1) $\cos\frac{x}{2} + \cos x = 0;$ 2) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2;$

68. Решите уравнение:

1) $\cos^2 5x + 7\sin^2 5x = 4\sin 10x$;

2) $3\sin^2 x - 7\sin x\cos x + 14\cos^2 x - 2 = 0$.

69. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$.

70. Сколько корней уравнения $\cos 2x + \sin x = \cos^2 x$ принадлежит промежутку $[-\pi;\ \pi]$?

71. При каких значениях параметра a имеет корни уравнение:

1) $\sin^2 x - (3a - 3)\sin x + a(2a - 3) = 0$;

2) $\cos^2 x + 2\cos x + a^2 - 6a + 10 = 0$?

72. Решите уравнение $\cos^3 x\sin x + \cos^2 x\sin^2 x - 3\cos x\sin^3 x - 3\sin^4 x = 0$.

73. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $\cos^2 x - \left(\frac{7}{10} + a\right)\cos x + \frac{7a}{10} = 0$ имеет на промежутке $\left[\frac{\pi}{3};\ \frac{11\pi}{6}\right]$: 1) один корень; 2) два корня.

74. При каких значениях параметра a уравнение $\cos^2 x + (2a + 3)\sin x - a^2 = 0$ имеет:

1) один корень на промежутке $[0;\ \pi]$;

2) один корень на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{6}\right)$;

3) один корень на промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$;

4) два корня на промежутке $\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right]$;

5) три корня на промежутке $[0;\ 2\pi)$;

6) четыре корня на промежутке $\left(-\frac{\pi}{6};\ \frac{4\pi}{3}\right)$?

75. Решите уравнение:

1) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$;

2) $\cos 9x = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right)$.

76. Решите уравнение:

1) $2\sin x\sin 2x + \cos 3x = 0$;

2) $\sin(x + 45^\circ)\sin(x - 15^\circ) = 0{,}5$.

77. Решите уравнение $(x + y)^2 + 10(x + y)\cos(\pi xy) + 25 = 0$.

78. Решите уравнение $y^2 - 3\sqrt{2}(\cos x - \sin x)y + 9 = 0$.

79. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{3}, \\ \cos^2 x - \cos^2 y = -\dfrac{3}{4}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = \dfrac{1}{3}, \\ \sin \pi x + \sin \pi y = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{3}, \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{3}, \\ \sin x \sin y = 0{,}25. \end{cases}$

80. Решите уравнение:

1) $\dfrac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} = 0;$ 3) $\dfrac{3\sin^2 2\pi x + 7\cos 2\pi x - 3}{4x^2 - 7x + 3} = 0.$

2) $\dfrac{\cos 2x - 2\cos x + 1}{12x^2 - 8\pi x + \pi^2} = 0;$

81. Решите уравнение:

1) $\dfrac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0;$ 2) $\dfrac{\sin 2x \cos 3x - \cos 2x \sin 3x}{1 + \cos x} = 0.$

82. Решите уравнение:

1) $\dfrac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = 0;$ 2) $\dfrac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 0.$

83. Решите уравнение $\dfrac{1 - \cos x - \sin x}{\cos x} = 0.$

84. Решите уравнение $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 1\dfrac{3}{4}.$

85. Решите уравнение $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x.$

86. Решите неравенство:

1) $\sin 2x > \dfrac{\sqrt{3}}{2};$ 3) $\operatorname{ctg} 5x > 1;$

2) $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{x}{4}\right) < \sqrt{3};$ 4) $\cos(-3x) > \dfrac{1}{3}.$

87. Решите неравенство:

1) $\sin \dfrac{x}{3} < \dfrac{1}{2};$ 3) $\operatorname{tg} 2x < -\dfrac{\sqrt{3}}{3};$

2) $\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{x}{2}\right) > \sqrt{3};$ 4) $\cos 4x < \dfrac{1}{4}.$

88. Решите неравенство:

1) $-\dfrac{1}{2} < \cos x \leqslant \dfrac{1}{4};$ 3) $\dfrac{1}{3} \leqslant \sin x < \dfrac{1}{2};$ 5) $|\operatorname{tg} x| < \sqrt{3};$

2) $-2 < \operatorname{tg} x < 3;$ 4) $-4 < \operatorname{ctg} x < 1{,}5;$ 6) $|\cos 2x| \geqslant \dfrac{1}{2}.$

89. Решите неравенство:

1) $\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} > \frac{1}{2}$; 2) $\cos \pi x + \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

90. Решите неравенство:

1) $4\cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{3}$; 3) $3 + 2\sin 3x \sin x > 3\cos 2x$;

2) $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos x < \sqrt{3}$; 4) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{4}$.

91. Решите неравенство $1 - \sin 3x \leqslant \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2$.

Производная и её применение

92. Найдите производную функции:

1) $y = \frac{x-1}{x+1}$; 2) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

93. Чему равно значение производной функции f в точке x_0, если:

1) $f(x) = \frac{8}{x} + 5x - 2,\ x_0 = 2$; 2) $f(x) = \frac{x^2+2}{x-2} - 2\sin x,\ x_0 = 0$?

94. Найдите производную функции:

1) $y = \frac{1}{x^9} - \frac{3}{x^3}$; 2) $y = (x+1)^3(x-2)^4$.

95. Составьте уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 2,\ x_0 = 0$; 2) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right),\ x_0 = -\frac{\pi}{2}$.

96. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 5x$, если эта касательная параллельна прямой $y = -x$.

97. Определите, является ли прямая $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ касательной к графику функции $y = \sqrt{x}$. В случае утвердительного ответа укажите абсциссу точки касания.

98. Запишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 4$, если эта касательная проходит через точку $M(2; -1)$.

99. В какой точке графика функции $y = x + \frac{3}{x}$ надо провести касательную, чтобы эта касательная пересекла ось ординат в точке $(0; 6)$?

100. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

1) $f(x) = x^2 + 4x - 7$; 3) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$;

2) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8x + 9$; 4) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$.

101. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = \operatorname{tg} x - 2x$.

102. При каких значениях параметра a функция $y = (a + 2)\,x^3 - 3ax^2 + 9ax - 2$ убывает на $\boldsymbol{R}$?

103. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$;   2) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$;   3) $f(x) = (1 - x)\sqrt{x}$.

104. Найдите точки минимума и максимума функции $f(x) = \sin x - \cos x + x$.

105. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ на отрезке $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Проектная работа

Эта рубрика адресована прежде всего тем, кто хочет научиться приобретать знания самостоятельно, творчески мыслить, формировать, выражать и отстаивать свою точку зрения, выдвигать гипотезы, находить наиболее рациональные и нестандартные решения.

Первым шагом, который может помочь в реализации этих целей, является участие в проектной работе.

Проект — это самостоятельное исследование по выбранной теме, которое может выполняться как индивидуально, так и группой учащихся.

Дадим несколько советов по организации работы над проектом и оформлению результатов исследования.

1. При выборе темы необходимо учитывать её актуальность, наличие источников информации в литературе и интернет-ресурсов. Здесь важно ваше желание проявить себя в качестве исследователя в работе именно над выбранной темой.

2. Работа начинается с составления предварительного плана, в котором отражается замысел и этапы реализации задуманного. После знакомства с основными источниками и литературой с помощью руководителя проекта составляется окончательный план.

3. Важно чётко сформулировать цели исследования. Они могут быть записаны в такой форме: изучить, описать, проанализировать, доказать, сравнить и т. п.

4. Работа завершается подведением итогов исследования, делаются выводы, намечаются перспективы дальнейшего изучения темы.

5. Примерный объём работы — 10—15 страниц. Дополнительно может прилагаться иллюстративный материал.

6. Работа может быть оформлена в виде реферата, доклада, компьютерной презентации.

Ниже приводится рекомендуемый список тем, которые могут быть выбраны для проектной работы.

1. Периодические функции.

Рекомендуемая литература:

1) *Рывкин А. А.* Периодические функции // Квант. 1973. № 5.
2) *Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Рабинович Е. М., Якир М. С.* Тригонометрия. — К. : Генеза, 2008.
3) *Фалин Г. И., Фалин А. И.* Тригонометрия на вступительных экзаменах по математике в МГУ. — М. : БИНОМ, 2007.
4) *Земляков А., Ивлев Б.* Периодические функции // Квант. 1976. № 12.
5) *Дорофеев Г. В., Розов Н. Х.* Функции периодические и непериодические // Квант. 1987. № 9.

2. Определение элементарных функций с помощью функциональных уравнений Коши.

Рекомендуемая литература:

1) *Бродский Я. С., Слипенко А. К.* Функциональные уравнения. — К. : Вища шк., 1983.
2) *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. — М. : Физматлит, 2001.
3) *Андреев А. А., Кузьмин Ю. Н., Савин А. Н.* Функциональные уравнения. — Самара : Пифагор, 1997.

3. Парадоксы теории множеств.

Рекомендуемая литература:

1) *Ященко И. В.* Парадоксы теории множеств. — М. : МЦМНО, 2002.
2) *Виленкин Н. Я.* Рассказы о множествах. — М. : Наука, 1965.

4. Математическая логика — язык математики.

Рекомендуемая литература:

1) *Болтянский В. Г., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И.* Лекции и задачи по элементарной математике. — М. : Наука, 1974.
2) *Челпанов Г. И.* Учебник логики. — М. : URSS, 2012.
3) *Бизам Д., Герцег Я.* Игра и логика. — М. : Мир, 1975.
4) *Никольская И. Л.* Математическая логика. — М. : Высшая школа, 1981.
5) *Мадер В. В.* Школьнику об алгебре логики. — М. : Просвещение, 1993.
6) *Гжегорчик А.* Популярная логика. — М. : Наука, 1979.
7) *Эдельман С. Л.* Математическая логика. — М. : Высшая школа, 1975.

5. **Тригонометрическая подстановка.**

Рекомендуемая литература:

1) *Алексеев Р., Курляндчик Л.* Тригонометрические подстановки // Квант. 1995. № 2.
2) *Горнштейн П. И.* Тригонометрия помогает алгебре // Бюро Квантум, приложение к журналу «Квант». 1995. № 3.
3) *Смоляков А. Н.* Тригонометрические подстановки в уравнения и неравенства // Математика в школе. 1996. № 1.
4) *Олехник С. Н., Потапов М. К., Пасиченко П. И.* Нестандартные методы решения уравнений и неравенств. — М. : Изд-во МГУ, 1991.
5) *Фалин Г. И., Фалин А. И.* Алгебра на вступительных экзаменах по математике в МГУ. — М. : БИНОМ, 2006.

6. **Числа Каталана.**

Рекомендуемая литература:

1) *Спивак А.* Числа Каталана // Квант. 2004. № 3.
2) *Бурман Ю., Спивак А.* Автостоянки, перестановки и деревья // Квант. 2004. № 4.
3) *Сендеров В., Френкин Б.* Гипотеза Каталана // Квант. 2007. № 4.
4) *Гарднер М.* Числа Каталана // Квант. 1978. № 7.
5) *Шень А.* Программирование: теоремы и задачи. — М. : МЦНМО, 2004.

7. **История возникновения дифференциального и интегрального исчислений.**

Рекомендуемая литература:

1) *Юшкевич А. П.* Из истории возникновения математического анализа. — М. : Знание, 1985.
2) *Рыбников К. А.* История математики : в 2 ч. — М. : Моск. унив., 1960.

8. **Бесконечно малые и бесконечно большие функции.**

Рекомендуемая литература:

1) *Гурова З. И. и др.* Математический анализ. Начальный курс с примерами и задачами / под ред. А. И. Кибзуна — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002.
2) Мир математики : в 40 т. Т. 14 : Антонио Дуран. Истина в пределе. Анализ бесконечно малых / пер. с исп. — М. : Де Агостини, 2014.
3) Мир математики : в 40 т. Т. 18 : Энрике Грасиан. Открытие границ. Бесконечность в математике / пер. с исп. — М. : Де Агостини, 2014.

4) *Натансон И. П.* Суммирование бесконечно малых величин. — 3-е изд., испр. — М. : Физматгиз, 1960. (Популярные лекции по математике; вып. 12).

9. Системы счисления и кодирование.

Рекомендуемая литература:

1) *Аршинов М. Н., Садовский Л. Е.* Коды и математика (рассказы о кодировании). — М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. (Библиотечка «Квант»; вып. 30).
2) *Гашков С. Б.* Системы счисления и их применение. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : МЦНМО, 2012. (Библиотека «Математическое просвещение»; вып. 29).
3) Мир математики : в 40 т. Т. 2 : Жуан Гомес. Математики, шпионы и хакеры. Кодирование и криптография / пер. с англ. — М.: Де Агостини, 2014.
4) *Оре О.* Приглашение в теорию чисел. — 2-е изд., стер. / пер. с англ. — М. : Едиториал УРСС, 2003.
5) *Фомин С. В.* Системы счисления. — 5-е изд. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. (Популярные лекции по математике; вып. 40).

10. Теоремы о приближении действительных чисел рациональными.

Рекомендуемая литература:

1) *Бухштаб А. А.* Теория чисел : учебное пособие. — 4-е изд., стер. — СПб. [и др.] : Лань, 2015. табл. — (Классическая учебная литература по математике).
2) *Клепцын В. А.* Рациональные приближения действительных чисел. Летняя школа «Современная математика», 20 июля 2014 г., г. Дубна
3) *Нестеренко Ю. В.* Теория чисел. — М. : Издательский центр «Академия», 2008.

11. Китайская теорема об остатках.

Рекомендуемая литература:

1) *Бухштаб А. А.* Теория чисел : учебное пособие. — 4-е изд., стер. — СПб. [и др.] : Лань, 2015. (Классическая учебная литература по математике).
2) *Коутинхо С.* Введение в теорию чисел. Алгоритм RSA. — М. : Постмаркет, 2001.

3) *Нестеренко Ю. В.* Теория чисел. — М. : Издательский центр «Академия», 2008.

12. Целозначные многочлены.

Рекомендуемая литература:

1) *Панкратьев Е. В.* Элементы компьютерной алгебры : учебное пособие. — М. : Интернет-ун-т информ. технологий : БИНОМ. Лаб. знаний, 2007. (Основы информатики и математики).
2) *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2. — М. : Наука, 1978.
3) *Прасолов В. В.* Многочлены. — 4-е изд. , испр. — М. : МЦНМО, 2014. (Классические направления в математике).

13. Цепные дроби и диофантовы уравнения.

Рекомендуемая литература:

1) *Арнольд В. И.* Цепные дроби. — 2-е изд., стер. — М. : МЦНМО, 2009. (Библиотека «Математическое просвещение»; вып. 14).
2) *Бухштаб А. А.* Теория чисел : учебное пособие. — 4-е изд., стер. — СПб. [и др.] : Лань, 2015. (Классическая учебная литература по математике).
3) *Нестеренко Ю. В., Никишин Е. М.* Очерк о цепных дробях // Квант. 1983. № 5. — С. 16—20; № 6. — С. 26—30.
4) *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. — 4-е изд., стер. — М. : Едиториал УРСС, 2004.

14. Числовые функции теории чисел.

Рекомендуемая литература:

1) *Бухштаб А. А.* Теория чисел : учебное пособие. — 4-е изд., стер. — СПб. [и др.] : Лань, 2015. (Классическая учебная литература по математике).
2) *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. — 10-е изд., стер. — СПб. [и др.] : Лань, 2004.
3) *Деза Е. И., Котова Л. В.* Сборник задач по теории чисел : 112 задач с подробными решениями. — М. : URSS, 2011.

15. Теорема Ферма о сумме двух квадратов.

Рекомендуемая литература:

1) *Бухштаб А. А.* Теория чисел : учебное пособие. — 4-е изд., стер. — СПб. [и др.] : Лань, 2015. (Классическая учебная литература по математике).

2) *Сендеров В., Спивак А.* Суммы квадратов и целые гауссовы числа // Квант. 1999. № 3. С. 14—22.
3) *Спивак А. А.* Суммы квадратов // Популярные лекции по математике ММ МГУ, 2013/14 у. г., лекция № 19 (334).
4) *Тихомиров В.* Теорема Ферма — Эйлера о двух квадратах // Квант. 1991. № 10. С. 9—12.
5) *Тихомиров В. М.* Великие математики прошлого и их великие теоремы. — 2-е изд., испр. — М. : МЦНМО, 2003. (Библиотека «Математическое просвещение»; вып. 1).

16. Методы решения функциональных уравнений.

Рекомендуемая литература:

1) *Андреев А. А. и др.* Функциональные уравнения : учебное издание. Серия А: Математика. Вып. 3. — Самара : Пифагор, 1997.
2) *Бродский Я., Слипенко А.* Функциональные уравнения и группы // Квант. 1985. № 7. С. 23—26, 32.
3) *Ильин В. А.* Итеграционные методы решения функциональных уравнений // Соросовский образовательный журнал. Т. 7. 2001. № 2. С. 116—120.
4) *Лихтарников Л. М.* Элементарное введение в функциональные уравнения. — СПб. : Лань, 1997.

17. Приводимые и неприводимые многочлены.

Рекомендуемая литература:

1) *Олейников В.* Иррациональность и неприводимость // Квант. 1986. № 10. С. 6—10.
2) *Прасолов В. В.* Многочлены. — 4-е изд., испр. — М. : МЦНМО, 2014. (Классические направления в математике).
3) Энциклопедия элементарной математики. Т. 2 : Алгебра. / Акад. пед. наук РСФСР; под ред. П. С. Александрова [и др.]. — М. ; Л. : Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1951.

18. О сходимости рядов.

Рекомендуемая литература:

1) *Давидович Б. М. и др.* Математический анализ в математических классах пятьдесят седьмой школы. — М. : МЦНМО : ЧеРо 1998.

2) *Кустов Ю. А., Юмагулов М. Г.* Математика. Основы математического анализа: теория, примеры, задачи. — М. : Рольф : Айрис-пресс, 1998.
3) *Маркушевич А. И.* Ряды. Элементарный очерк. — М. ; Л. : Объединённое научно-техническое издательство НКТП СССР, 1936.
4) *Мордкович А. Г., Солодовников А. С.* Математический анализ : учебник для техникумов. — М. : Высш. шк., 1990.

Дружим с компьютером

В этом учебном году вы систематизируете и усовершенствуете свои знания, позволяющие использовать компьютер в ходе изучения курса математики. Определяйте самостоятельно, какую техническую работу вы можете выполнять с помощью компьютера; каким образом представлять изучаемый материал в наглядном виде, иллюстрировать его таблицами и графиками. Рекомендуем также составлять алгоритмы для решения упражнений и программы на изучаемом языке программирования для их реализации. Ниже приведены задания, соответствующие изучаемым темам; но этими заданиями далеко не ограничиваются возможности применения компьютера в курсе алгебры. Рекомендуем вам самостоятельно искать такие возможности и реализовывать их, особенно если вы выбираете профессию, связанную с информатикой и компьютерными науками.

В этом разделе приведены задания, которые вы сможете выполнять с помощью компьютера по мере изучения соответствующих тем либо при их повторении. Задания, содержащие элементы программирования, отмечены звёздочкой (*). В зависимости от уровня изучения информатики их можно выполнять, записывая алгоритм словами или в виде блок-схемы; либо же реализовывать эти алгоритмы в виде программ на изучаемом языке программирования.

! Наиболее сложные задания отмечены восклицательным знаком.

К главе 1 «Повторение и расширение сведений о множествах, математической логике и функциях»

1.1. Повторите, какими способами задания функции вы пользовались в предыдущих классах для того, чтобы представить эту функцию с помощью компьютера.

1.2. Каким образом характеристики функции помогают построить её график на экране компьютера?

1.3.!* Функция задана таблично. Запишите алгоритм для определения того, является ли эта функция возрастающей либо убывающей. Какую структуру данных изучаемого языка программирования вы используете для табличного представления функции?

1.4. Каким образом следует учитывать наибольшее и наименьшее значения функции при построении графика функции на экране компьютера?

1.5. Задайте в табличном редакторе некоторую функцию для положительных значений аргумента. Дополните таблицу так, чтобы получилась: 1) чётная функция; 2) нечётная функция. Как сделать это автоматически? Постройте график этой функции.

1.6. На основании теорем 5.1 и 5.2 сделайте вывод о том, какие инструменты графического редактора полезны для построения графика чётной функции; нечётной функции.

1.7.* Функция задана таблично. Запишите алгоритм для поиска наибольшего и наименьшего значений функции.

1.8.! Предположим, что у вас есть подпрограмма, позволяющая вычислить значение некоторой функции в любой точке. Можно ли с помощью этой подпрограммы найти наибольшее и наименьшее значения этой функции?

1.9. Придумайте самостоятельно и выполните задания, иллюстрирующие построение графика $y = f(kx)$ с помощью табличного редактора и с помощью графического редактора. Какие отдельные случаи надо рассмотреть?

1.10. Задайте таблично некоторую функцию с помощью табличного редактора. С помощью средств табличного редактора задайте обратную к ней функцию.

1.11.!* Запишите алгоритм, который для функции, заданной таблично, определяет, является ли она обратимой.

1.12.!* Запишите алгоритм, который для двух функций, заданных таблично, определяет, являются ли они взаимно обратными.

1.13. Приведите примеры того, как при составлении алгоритмов следует учитывать область определения используемых выражений. Какой может быть реакция компьютера, если этого не сделать? Приведите примеры наиболее распространённых ошибок.

1.14.* Предположим, что у вас есть подпрограмма, позволяющая вычислить значение некоторой непрерывной функции в любой точке, и известны все нули этой функции.

1) Запишите алгоритм, который выдаёт все промежутки знакопостоянства этой функции.

2) Запишите алгоритм построения графического изображения нулей и промежутков знакопостоянства этой функции (см. рисунки к § 8).

1.15.!* Предположим, что у вас есть подпрограмма, позволяющая вычислить значение некоторой функции в любой точке. Можно ли с помощью этой подпрограммы найти все нули этой функции? Для каких функций это возможно? Сделайте вывод об особенностях решения уравнений с помощью компьютера. Найдите в Интернете информацию о численных методах решения уравнений.

1.16.!* Известно, что $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены. Предположим, что у вас есть подпрограммы, позволяющие вычислить значения функций $f(x)$ и $g(x)$ в любой точке. Запишите алгоритм, который выдаёт промежутки знакопостоянства функции $\frac{f(x)}{g(x)}$. Будем пользоваться такими договорённостями: 1) считать нулём функции точку, в которой значение функции меньше 0,001; 2) соседние нули функции расположены на расстоянии не менее 0,1 друг от друга. Зачем нужны эти договорённости?

К главе 2 «Степенная функция»

2.1. С помощью табличного редактора составьте таблицу значений нескольких степенных функций для разных значений n, $n \in Z$. Каким образом заполнить эту таблицу автоматически? Постройте графики этих функций, исследуйте их взаимное расположение. Какое ограничение следует наложить на аргументы функции в зависимости от значения n?

2.2.!*В языке программирования нет операции извлечения корня n-й степени. Пользуясь определением корня n-й степени, запишите алгоритм для нахождения корня n-й степени из данного числа (считайте, что искомый корень найден, если n-я степень найденного корня отличается от данного числа менее чем на 0,01).

2.3.!*Пользуясь результатами задачи 2.2, запишите алгоритм, который по входным значениям a, m и n выдаёт значение $a^{\frac{m}{n}}$. Какие проверки входных данных надо сделать и какие частные случаи рассмотреть?

2.4.!*Пусть имеется несколько неравенств и для каждого из них записаны их решения в виде объединения некоторого количества промежутков. Придумайте способ представления этих промежутков в виде, удобном для компьютерной обработки. Запишите алгоритм, который решает систему этих неравенств и выдаёт результат также в виде объединения некоторого количества промежутков.

К главе 3 «Тригонометрические функции»

3.1. Запишите алгоритм для перевода градусной меры угла в радианную и наоборот.

3.2. Научитесь вычислять тригонометрические функции числового аргумента с помощью микрокалькулятора; программы «Калькулятор» из набора стандартных программ на компьютере. В каких единицах должен измеряться исходный угол?

3.3. Найдите в изучаемом языке программирования стандартные функции для вычисления тригонометрических функций числового аргумента.

3.4. Какие инструменты графического редактора следует применять для построения графика периодической функции?

3.5. Задайте в табличном редакторе значения некоторой функции на отрезке длиной в период этой функции. Какие инструменты табличного редактора следует применить, чтобы автоматически задать функцию на отрезке длиной в несколько периодов и построить график этой функции на этом отрезке? Пользуясь этими инструментами, составьте в табличном редакторе таблицу значений функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ и постройте их графики на одном и том же экране. Выполните это же задание для функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.

3.6.! С помощью табличного редактора проиллюстрируйте преобразования графиков функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$; придумайте для этого примеры, аналогичные примеру 3 § 21.

3.7. Для всех ли тригонометрических функций есть своя кнопка на микрокалькуляторе; функция калькулятора из набора стандартных программ компьютера; отдельная стандартная функция в изучаемом вами языке программирования? Реализуйте вычисление недостающих функций с помощью имеющихся.

К главе 4 «Тригонометрические уравнения и неравенства»

4.1. Запишите общие алгоритмы для решения простейших тригонометрических уравнений и неравенств.

4.2. Научитесь находить значения функций арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс с помощью микрокалькулятора; программы «Калькулятор» из набора стандартных программ на компьютере; стандартных функций изучаемого языка программирования.

К главе 5 «Производная и её применение»

5.1. Каким образом с помощью табличного редактора можно проиллюстрировать понятие предела функции в точке?

5.2.! Предположим, что у вас есть подпрограмма, позволяющая вычислить значение некоторой функции в любой точке. Можно ли с помощью этой подпрограммы определить, является ли функция непрерывной на некотором промежутке?

5.3. Предположим, что у вас есть подпрограмма, позволяющая вычислить значение некоторой функции в любой точке. Напишите программу для определения $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ в данной точке. Когда эта программа будет прекращать свою работу? Какие выводы о точности её результатов можно сделать?

5.4. Найдите в Интернете информацию о численных методах дифференцирования.

5.5.* Предположим, что у вас есть подпрограмма, позволяющая вычислить значение некоторой функции в любой точке, и известны все критические точки этой функции.

1) Запишите алгоритм, который выдаёт все промежутки возрастания и убывания этой функции.

2) Можно ли на основании приведённых исходных данных определить, являются ли критические точки точками максимума, минимума, разрыва? Приведите примеры.

5.6.* Функция задана формулой. Предположим, что у вас есть подпрограмма, позволяющая вычислить значение этой функции в любой точке. Каким образом построить график этой функции на некотором промежутке на экране компьютера? Какие факторы могут привести к тому, что график будет некорректно отображать поведение функции? Как следует учесть их в программе построения графиков «по точкам»?

Глава 1. 1.21. $A = C$, $B = \varnothing$. *Указание*. Подставьте в данное равенство вместо X множество C, а затем вместо X пустое множество. **2.8.** Больше тех чисел, все цифры которых нечётны. **2.9.** Больше тех, у которых цифры записаны в порядке убывания. **2.11.** Одинаковое количество. *Указание*. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством меньших сторон прямоугольников одного вида и множеством меньших сторон прямоугольников другого вида. **2.13.** См. рисунок. **2.14.** *Указание*. Пусть $B \subset A$. Множеству B поставим в соответствие множество $C = A \setminus B$. Очевидно, что числа $n(B)$ и $n(C)$ разной чётности. **2.16.** Больше тех чисел, у которых вторая цифра меньше первой и третьей. *Указание*. Числа, у которых вторая цифра наибольшая, назовём числами первого вида, а те, у которых вторая цифра наименьшая, — числами второго вида. Понятно, что ни одно из чисел первого вида не начинается с цифры 9. Каждому числу $\overline{abc}$ первого вида поставим в соответствие число $999 - \overline{abc}$, являющееся числом второго вида. **2.17.** См. рисунок. **2.18.** Мно-

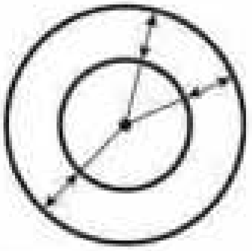


Рис. к задаче 2.13

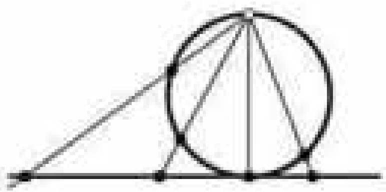


Рис. к задаче 2.17

гоугольников, содержащих вершину A_1, больше. *Указание*. Каждому n-угольнику с вершиной A_1 при $n \geqslant 4$ можно поставить в соответствие $(n-1)$-угольник, полученный исключением точки A_1 из числа вершин. Таким образом можно получить все многоугольники, не содержащие вершину A_1. Однако для треугольников с вершиной A_1 соответствующих пар не существует. **3.5.** 1) 1; 2) определить невозможно; 3) определить невозможно; 4) 0. **3.6.** 1) 0; 2) определить невозможно; 3) 1; 4) определить невозможно. **3.7.** 1) 1; 2) 1. **3.8.** 1) 1; 2) 0; 3) 1; 4) 1. **3.11.** 1) Да; 2) определить невозможно; 3) нет; 4) да; 5) да. **3.12.** 1) Нет; 2) нет; 3) да. **3.15.** 1) $A \vee B = \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$; 2) $A \Rightarrow B = \overline{A \wedge \overline{B}}$. **3.16.** $A \wedge B = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$. **4.1.** Предикатами являются утверждения с номерами 1), 3) и 4). **4.4.** 1) $\boldsymbol{R} \setminus \{-2, 5\}$; 2) $\boldsymbol{R}$. **4.5.** $\boldsymbol{N}$. **4.6.** $\boldsymbol{R}$. **4.7.** 1) $(-\infty; 2] \cup (5; +\infty)$; 2) $\boldsymbol{R}$. **4.8.** 1) $(-\infty; 5)$; 2) $[2; +\infty)$. **4.10.** $A(x) \Leftrightarrow C(x)$, $B(x) \Leftrightarrow D(x)$. **5.1.** 1) $(-\infty; -7) \cup (-7; 7) \cup (7; +\infty)$; 2) $[4; 6) \cup (6; +\infty)$. **5.6.** 1) 1; 2) 1; 3) $[0; +\infty)$; 4) $\boldsymbol{Z}$; 5) $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$. **5.7.** 1) $(-\infty; 0]$; 2) 3; 3) $[0; 1)$; 4) $\{0\} \cup (\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q})$. **5.8.** 2) $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$; 6) $(k; k+1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

5.9. 3) $(1; 3)$, $(3; +\infty)$; 4) $(-\infty; 0)$, $[1; +\infty)$. **5.14.** 4) Нечётная. **5.15.** 3) $\{-1\} \cup [3; +\infty)$. **5.16.** 2) $(-3; -1) \cup (-1; +\infty)$; 3) $\{-4\} \cup [3; +\infty)$. **5.17.** 1) $\min\limits_{M} f(x) = 1$, наибольшего значения не существует; 2) $\min\limits_{[-4;4]} f(x) = 0$, $\max\limits_{[-4;4]} f(x) = 4$. **5.18.** 1) $\max\limits_{M} f(x) = 13$, наименьшего значения не существует; 2) $\min\limits_{[0;2]} f(x) = 0$, $\max\limits_{[0;2]} f(x) = 1$. **5.19.** 0. **5.21.** 0. **5.22.** 0. **5.23.** 2; 5. **5.24.** -3; -1. **5.25.** 1) $\left(-\infty; -\frac{23}{8}\right]$; 2) $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$; 3) $(-\infty; +\infty)$. **5.26.** 1) $\left[\frac{19}{20}; +\infty\right)$; 2) $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$; 3) $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$. **5.27.** 1) 2; 2) 2; 3) 1. **5.28.** 0. **5.29.** 0. **6.9.** 3) См. рисунок. *Указание.* Воспользуйтесь схемой: $y =$

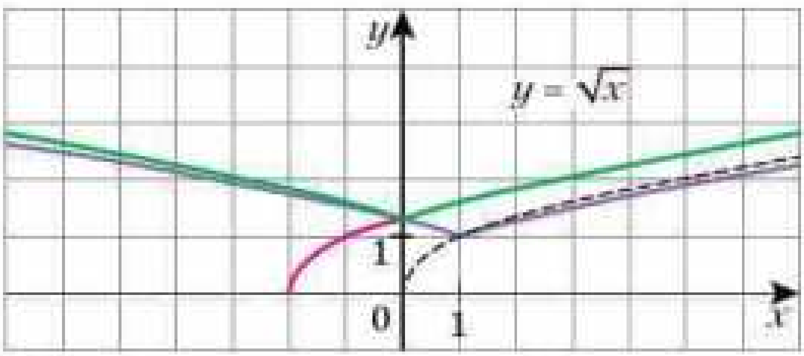


Рис. к задаче 6.9 (3)

$= \sqrt{x} \rightarrow y = \sqrt{x+2} \rightarrow y = \sqrt{|x|+2} \rightarrow y = \sqrt{|x-1|+2}$. **6.11.** 1) Если $a < 0$, то корней нет; если $a = 0$ или $a > 1$, то 2 корня; если $a = 1$, то 3 корня; если $0 < a < 1$, то 4 корня; 2) если $a < 0$, то корней нет; если $a = 0$, то 3 корня; если $0 < a < 1$, то 6 корней; если $a = 1$, то 4 корня; если $a > 1$, то 2 корня; 3) если $a < 0$, то корней нет; если $a = 0$ или $a > 2$, то 1 корень; если $0 < a < 2$, то 2 корня. **6.12.** 3) Если $a < 0$, то корней нет; если $a = 0$ или $a = 3$, то 4 корня; если $0 < a < 1$, то 8 корней; если $a = 1$, то 7 корней; если $1 < a < 3$, то 6 корней; если $a > 3$, то 2 корня. **6.15.** $a = 0$ или $a = 2$. **6.16.** $a = 1$ или $a = -\frac{1}{3}$. **6.17.** $a = -\frac{1}{2}$. **6.18.** $a = \frac{8}{3}$. **7.4.** 3) $y = \frac{1-x}{2x}$. **7.5.** 1) $y = 5(x-3)$. **7.10.** *Указание.* Пусть функция f — нечётная, функция g — обратная к ней. Имеем: $f(x_0) = y_0$, $g(y_0) = x_0$. Тогда $g(-y_0) = g(-f(x_0)) = g(f(-x_0)) = -x_0 = -g(y_0)$. **7.11.** 1) 1; 2) -7; 3) один корень при любом c. **7.12.** 2) Корней нет. **7.13.** 1. *Указание.* Воспользуйтесь следствием из теоремы 7.4. **7.14.** 2. **7.15.** $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$; $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$. *Указание.* Функция $f(x) = x^2 + \frac{1}{8}$, $D(f) = [0; +\infty)$, является обратной к функции $g(x) = \sqrt{x - \frac{1}{8}}$.

Кроме того, функции f и g возрастающие. **7.16.** $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. *Указание*. Сделайте замену $\sqrt{x} = t$. Далее рассмотрите функции $f(t) = \sqrt{1+t}$, $D(f) = [0; +\infty)$ и $g(t) = t^2 - 1$, $D(g) = [1; +\infty)$. **7.17.** *Указание*. Воспользуйтесь методом от противного. **7.18.** $\frac{\sqrt{17}+3}{4}$. *Указание*. График функции f принадлежит «полосе», ограниченной прямыми $y = \frac{1}{2}x - 1$ и $y = \frac{1}{2}x + 1$ (см. рисунок). Поскольку графики функций f и g симметричны относительно прямой $y = x$, то график функции g принадлежит «полосе», ограниченной прямыми $y = 2x + 2$ и $y = 2x - 2$. Пусть x_1 и x_2 ($x_1 > 0$, $x_2 > 0$) — абсциссы точек пересечения параболы $y = 10 - 2x^2$ с этими прямыми соответственно. Так как корень уравнения $g(x) = 10 - 2x^2$ принадлежит промежутку $(x_1; x_2)$ и $x_2 - x_1 < 0,5$, то в качестве ответа к задаче можно выбрать середину промежутка $(x_1; x_2)$. **8.1.** 3) $\left(-1; \frac{1}{2}\right) \cup (3; +\infty)$. **8.5.** 1) $(-\infty; -3) \cup (-2; 2) \cup (3; +\infty)$; 2) $[0; 1) \cup [3; 7)$; 3) $(-\infty; -1) \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right] \cup (4; +\infty)$. **8.6.** 2) $(-6; -3] \cup [4; 6)$; 3) $(-\infty; -1] \cup \left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{3}\right] \cup (1; +\infty)$. **8.7.** 2) $\left(-\frac{5}{3}; 2\right)$. **8.8.** 1) $\left(-\infty; \frac{5}{6}\right) \cup (2; +\infty)$; 2) $\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$; **8.9.** 1) $(2; 4) \cup (4; 5)$; 2) $[2; 5]$; 3) $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$; 4) $(-\infty; 2] \cup \{4\} \cup [5; +\infty)$. **8.10.** 1) $(-2; 1)$; 2) $[-2; 1] \cup \{3\}$; 3) $(-\infty; -2) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$; 4) $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$. **8.11.** 1) $(-\infty; -5) \cup (4; +\infty)$; 2) $[-5; 3) \cup (3; 4]$; 3) $(-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$; 4) $(-\infty; -4) \cup \{1\} \cup (2; +\infty)$; 5) $(-4; 1) \cup (1; 2)$; 6) $(-4; 2)$. **8.12.** 5) $(0; 1)$; 6) $\left(-3; \frac{3}{4}\right) \cup [2; 6]$. **8.13.** 1) $(-\infty; -2) \cup [-1; +\infty)$; 2) $[-2; -1)$; 3) $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$; 4) $(-3; 1) \cup [5; +\infty)$. **8.14.** 1) $(-\infty; -4) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right)$; 2) $(-\infty; -5] \cup \{1, 3\}$. **8.15.** 1) $(1; 2,5) \cup (3; +\infty)$; 2) $[1; 2] \cup \{-2\}$. **8.16.** 1) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{5}; 2\right)$; 2) $(-\infty; -4) \cup (-4; -3] \cup \left[-\frac{2}{5}; 1\right) \cup [3; +\infty)$; 3) $(-\infty; -3] \cup [0; 2)$;

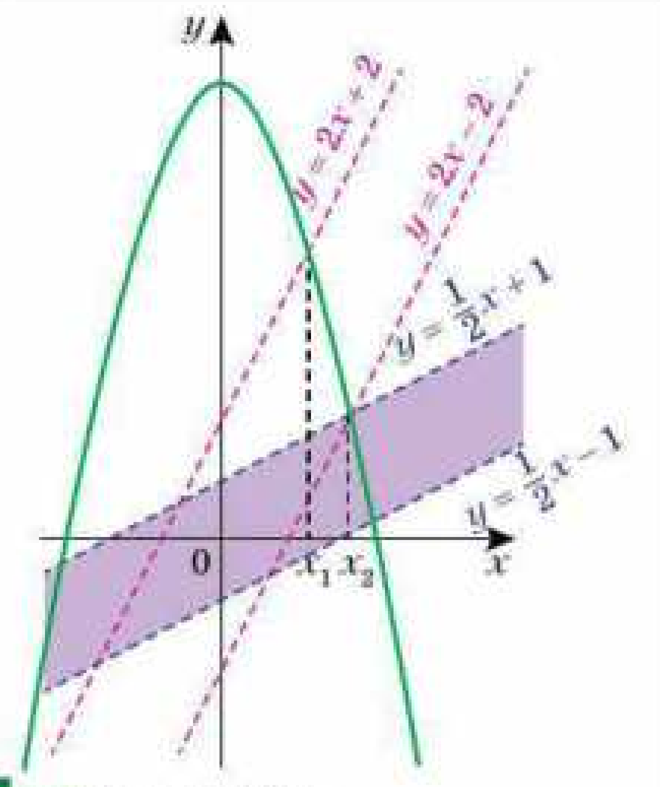


Рис. к задаче 7.18

4) $\left[-\frac{3}{4}; -2\right] \cup (3; +\infty)$. **8.17.** 1) $[1; 3)$; 2) $(-\infty; -2] \cup \{1\} \cup (5; +\infty)$; 3) $(-1; 0) \cup$ $\cup (0; 1) \cup (4; +\infty)$. **8.18.** 1) $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup (-1; 0) \cup (1; \sqrt{3}]$; 2) $[-4; -3) \cup (-2; 2) \cup$ $\cup (3; 4]$. **8.19.** 1) $(-\infty; 0) \cup (1; 6)$; 2) $(-\infty; -4) \cup (-3; 3) \cup (6; +\infty)$. **8.20.** 1) $\{-2, 2\}$; 2) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; 3) $[1; 2] \cup \{5\}$; 4) $(-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [5; +\infty)$. **8.21.** 1) $(3; 7)$; 2) $[-2; 3] \cup \{7\}$; 3) $\varnothing$; 4) $\{-4, 4\}$. **8.22.** 1) Если $a = 3$, то решений нет; если $a < 3$, то $a < x < 3$; если $a > 3$, то $3 < x < a$; 2) если $a \leqslant 3$, то $x > 3$; если $a > 3$, то $3 < x < a$ или $x > a$; 3) если $a < 3$, то $x \geqslant 3$ или $x = a$; если $a \geqslant 3$, то $x \geqslant 3$; 4) если $a \leqslant -5$, то $x < a$; если $a > -5$, то $x < -5$ или $-5 < x < a$; 5) если $a < -5$, то $x \leqslant a$ или $x = -5$; если $a \geqslant -5$, то $x \leqslant a$; 6) если $a = -1$, то $x < -1$; если $a < -1$, то $x < a$ или $a < x \leqslant -1$; если $a > -1$, то $x \leqslant -1$.

Глава 2. **9.7.** 4) $\min\limits_{(-\infty; -2]} f(x) = 256$, наибольшего значения не существует; 5) $\min\limits_{(-2; 1)} f(x) = 0$, наибольшего значения не существует. **9.9.** 1) Нечётным; 2) чётным; 3) определить невозможно. **9.10.** 1) 1; 2) -1; 1. *Указание*. Рассмотрите функцию $f(x) = 2x^4 + x^{10}$. Она является чётной. Поэтому достаточно найти неотрицательные корни данного уравнения. На промежутке $[0; +\infty)$ функция f является возрастающей, следовательно, уравнение $f(x) = 3$ на этом промежутке имеет не более одного корня. **9.11.** 1) -1; 2) -1; 1. **9.12.** Если $-1 < a \leqslant 0$, то $\min\limits_{[-1; a]} f(x) = f(a) = a^8$, $\max\limits_{[-1; a]} f(x) = f(-1) = 1$; если $0 < a \leqslant 1$, то $\min\limits_{[-1; a]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[-1; a]} f(x) = f(-1) = 1$; если $a > 1$, то $\min\limits_{[-1; a]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[-1; a]} f(x) = f(a) = a^8$. **9.13.** Если $a < -2$, то $\min\limits_{[a; 2]} f(x) =$ $= f(0) = 0$, $\max\limits_{[a; 2]} f(x) = f(a) = a^6$; если $-2 \leqslant a \leqslant 0$, то $\min\limits_{[a; 2]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[a; 2]} f(x) = f(2) = 64$; если $0 < a < 2$, то $\min\limits_{[a; 2]} f(x) = f(a) = a^6$, $\max\limits_{[a; 2]} f(x) =$ $= f(2) = 64$. **9.14.** 1. *Указание*. Перепишите уравнение в виде $\frac{2}{x^{17}} + \frac{3}{x^9} = 5$ и выполните замену $\frac{1}{x} = t$. **9.15.** -1. **10.3.** 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) $(-\infty; 2) \cup$ $\cup (2; +\infty)$. **10.6.** 1) $\max\limits_{\left[\frac{1}{2}; 1\right]} f(x) = 64$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{2}; 1\right]} f(x) = 1$; 2) $\max\limits_{\left[-1; -\frac{1}{2}\right]} f(x) = 64$, $\min\limits_{\left[-1; -\frac{1}{2}\right]} f(x) = 1$; 3) $\max\limits_{[1; +\infty)} f(x) = 1$, наименьшего значения не существует; 4) наибольшего значения не существует, $\min\limits_{[-1; 0)} f(x) = 1$. **10.7.** 1) $\max\limits_{\left[\frac{1}{3}; 2\right]} f(x) =$ $= 27$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{3}; 2\right]} f(x) = \frac{1}{8}$; 2) $\max\limits_{[-2; -1]} f(x) = -\frac{1}{8}$, $\min\limits_{[-2; -1]} f(x) = -1$; 3) наибольшего значения не существует, $\min\limits_{(-\infty; -3]} f(x) = -\frac{1}{27}$; 4) наибольшего значения не существует, $\min\limits_{(0;\,2]} f(x)=\frac{1}{8}$. **10.8.** 1) 4 решения; 2) 2 решения. **10.9.** 1) 3 решения; 2) 2 решения. **10.10.** 1) Определить невозможно; 2) чётным; 3) определить невозможно. **11.3.** 2) 56. **11.4.** 2) $58\frac{1}{3}$. **11.5.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) $(-\infty;\,-1]\cup\cup[1;\,+\infty)$; 3) $[3;\,+\infty)\cup\{0\}$. **11.6.** 1) $[2;\,+\infty)$; 2) $(-\infty;\,1]\cup[3;\,+\infty)$; 3) $[6;\,+\infty)\cup\cup\{0\}$. **11.7.** 1) $[-2;\,+\infty)$; 2) $\boldsymbol{R}$; 3) $[0;\,+\infty)$. **11.8.** 1) $[-4;\,+\infty)$; 2) $\boldsymbol{R}$; 3) $[0;\,+\infty)$. **11.9.** 3) 4 и 5; 4) -5 и -4. **11.14.** 1) $(-\infty;\,-3)\cup[-1;\,1]\cup(3;\,+\infty)$; 2) $[-6;\,3)$. **11.15.** 1) $(-\infty;\,-6)\cup[-4;\,4]\cup(6;\,+\infty)$; 2) $(-4;\,-3]\cup[3;\,+\infty)$. **11.16.** 1) -1; 2; 2) -1; 3. **11.17.** 1) -3; 2; 2) -3; 1. **11.20.** 1) $\max\limits_{[-3;\,-1]} f(x)=\sqrt[4]{3}$, $\min\limits_{[-3;\,-1]} f(x)=1$; 2) $\max\limits_{[-1;\,2]} f(x)=\sqrt[4]{2}$, $\min\limits_{[-1;\,2]} f(x)=0$; 3) наибольшего значения не существует, $\min\limits_{[-3;\,+\infty)} f(x)=0$. **11.21.** 3) наибольшего значения не существует, $\min\limits_{(-\infty;\,2)} f(x)=0$. **11.22.** 1) $(-\infty;\,21)$; 2) $\left[-\frac{1}{4};\,0\right]$; 3) $(4;\,+\infty)$. **11.23.** 1) $(-1;\,+\infty)$; 2) $\left[-\frac{1}{5};\,16\right]$; 3) $[-5;\,-2)\cup(2;\,5]$. **11.24.** 1) Если $a\leqslant-1$, то один корень; если $a>-1$, то 2 корня; 2) если $a<0$, то корней нет; если $a\geqslant0$, то один корень; 3) если $a<0$ или $a=1$, то один корень; если $0\leqslant a<1$ или $a>1$, то 2 корня. **11.25.** 1) Если $a\geqslant-1$, то один корень; если $a<-1$, то 2 корня; 2) если $a<0$ или $a=1$, то один корень; если $a\geqslant0$ и $a\neq1$, то 2 корня. **11.26.** 27. *Указание.* Функция $y=\sqrt[4]{x-26}+\sqrt[3]{x}$ — возрастающая. **11.27.** 10. **11.28.** (3; 3). *Указание.* Воспользуйтесь тем, что функция $f(t)=t+\sqrt[6]{t}$ возрастает на $D(f)$. **11.29.** (1; 1), (-1; -1). **11.30.** 2. *Указание.* Воспользуйтесь неравенством $\sqrt[3]{24}<\sqrt[3]{27}$. **11.31.** 1. **11.32.** 1; $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что функции $f(x)=\frac{x^3+1}{2}$ и $g(x)=\sqrt[3]{2x-1}$ — взаимно обратные и возрастающие. **11.33.** 1; -2. **12.7.** 2) $\sqrt[30]{b^7}$; 3) $\sqrt[3]{x^2}$; 4) $\sqrt[12]{128}$. **12.8.** 3) $\sqrt[6]{x^5}$; 4) $\sqrt[3]{a}$. **12.15.** 1) $a\leqslant0$, $b\leqslant0$; 2) $a\geqslant0$, $b\leqslant0$; 3) a и b — произвольные числа. **12.16.** 2) [3; 7]. **12.17.** 2) c^4. **12.19.** 1) $m^2\sqrt[4]{-m}$; 2) $2m^4n^4\sqrt[4]{2m^2n}$; 3) $a^2b^3\sqrt[4]{b}$; 4) $|x|\cdot y\sqrt[6]{y}$; 5) $a^3b^3\sqrt[4]{a^3b^3}$; 6) $-a^3b^6\sqrt[8]{-ab^2}$. **12.20.** 1) $-2a\sqrt[4]{2a^2}$; 2) $-5a\sqrt[4]{-a}$; 3) $ab\sqrt[6]{ab}$; 4) $a^3b^3\sqrt[6]{a^2b}$. **12.21.** 1) $\sqrt[4]{2a^4}$; 2) $\sqrt[4]{mn}$; 3) $-\sqrt[6]{6a^3b^4}$; 4) $-\sqrt[4]{a^5b^6}$; 5) $\sqrt[6]{6b^6}$, если $b\geqslant0$, $-\sqrt[6]{6b^6}$, если $b<0$; 6) $-\sqrt[6]{-a^7}$. **12.22.** 1) $-\sqrt[8]{3c^8}$; 2) $\sqrt[6]{a^7}$; 3) $\sqrt[4]{6a^4b^4}$; 4) $-\sqrt[8]{3a^4b^3}$; 5) $-\sqrt[4]{-a^7}$. **12.24.** 1) 1; 2) 2. **12.25.** 1) 1; 2) $\sqrt{23}$. **12.28.** 1) $\sqrt[6]{x}$;

2) $-\sqrt[4]{a}$; 3) $\sqrt[6]{a^2-1}$. **12.32.** $\dfrac{1}{\sqrt[32]{2}-1}$. **12.33.** Если $a=1$, то 2^6; если $a\neq 1$, то $\dfrac{a-1}{\sqrt[64]{a}-1}$. **12.34.** $x^3-9x-12$. *Указание*. Возведите обе части равенства $x=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$ в куб. **12.35.** *Указание*. Если $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}=x$, где $x\in \boldsymbol{Q}$, то $x^3=\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}\right)^3$, $x^3=7+3\cdot\sqrt[3]{10}x$. Поскольку $x\neq 0$, то получаем, что $\sqrt[3]{10}=\dfrac{x^3-7}{3x}\in \boldsymbol{Q}$. **12.36.** *Указание*. Используя метод математической индукции, докажите равенство $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2+\sqrt{6}}}}}}_{n\ \text{радикалов}}=\sqrt[2^n]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[2^n]{2-\sqrt{3}}$.

13.1. 2) $\dfrac{5}{3}$; 4) $\dfrac{1}{2}$. **13.2.** 4) 4. **13.3.** 2) $[3;+\infty)$; 3) $(-\infty;-1)\cup(7;+\infty)$. **13.5.** 4) 4. **13.6.** 2) 49; 4) 32. **13.7.** 3) $(\sqrt[8]{a})^8$. **13.11.** 1) $a^{0,5}-2b^{0,5}$; 6) $3^{\frac{1}{5}}$. **13.12.** 2) $1+\dfrac{b}{a^{\frac{1}{2}}}$; 3) $x^{2,5}y^{2,5}\cdot\dfrac{x^{0,5}-y^{0,5}}{x^{0,5}+y^{0,5}}$; 6) $2^{\frac{1}{2}}$. **13.13.** 1) $[2;+\infty)$; 2) $(2;+\infty)$. **13.15.** 1) $12\dfrac{4}{9}$; 2) 2; 3) $\dfrac{2}{15}$; 4) 3. **13.16.** 1) 7; 2) 10; 3) $\dfrac{1}{4}$; 4) 21. **13.17.** 1) 125; 2) 6; 3) корней нет. **13.18.** 1) $\dfrac{1}{9}$; 3) 5. **13.21.** 1) $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$; 2) -1. **13.22.** $\dfrac{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}}$. **13.23.** 2^{77}. **13.24.** 2^{-7}. **13.26.** 24, если $a=1$; $\dfrac{a^{7,4}-a^{0,2}}{a^{0,3}-1}$, если $a\in[0;1)\cup(1;+\infty)$. **13.27.** $\dfrac{b^{12,8}+b^{3,3}}{b^{0,1}+1}$. **14.1.** 1) $\dfrac{4}{3}$; 2) $\dfrac{1}{2}$; 3) корней нет; 4) 3. **14.2.** 2) Корней нет; 3) -5; 7; 4) 7. **14.3.** 1) 1; 2) 3; 3) 1; 2; 4) $\dfrac{6-\sqrt{6}}{3}$; 5) 3; 6) -4. **14.4.** 1) -5; 2) 0; 3) $\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$; 4) 5. **14.8.** 1) 6; 2) $\dfrac{14+\sqrt{7}}{2}$; 3) -1; 3; 4) -2. **14.9.** 1) 2; 2) $22-\sqrt{464}$. **14.10.** 1) 6; 9; 2) $\dfrac{137}{16}$; 3) $6-4\sqrt{2}$; 4) 1; -3. **14.12.** 1) 4; 2) 2; 3) корней нет; 4) 7; 8. **14.13.** 1) -1; 2) 6. **14.14.** 1) 27; 2) $[5;10]$; 3) корней нет. **14.15.** 1) 10; 2) $[-4;+\infty)$. **14.16.** 1) 2; $\dfrac{-2-4\sqrt{13}}{3}$; 2) -2; 1; 13. **14.17.** 1) 0; 2; 2) -2; $\dfrac{-2+2\sqrt{91}}{3}$. **14.18.** При $a<\dfrac{1}{4}$ корней нет, при $a\geqslant\dfrac{1}{4}$ $x=a-\sqrt{a}$. *Указание*. $x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}=\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{4}}+\dfrac{1}{2}\right)^2$. **14.19.** При $a<1$ корней нет, при $a\geqslant 1$ $x=a-2\sqrt{a}$. **14.20.** $\dfrac{1}{5}\leqslant a<\dfrac{1}{3}$ или $a=\dfrac{8}{15}$. *Указание*. Рассмотрите графики функций $y=ax-1$ и $y=\sqrt{8x-x^2-15}$.

14.21. $1 < a \leqslant 3$ или $a = 2 - \sqrt{2}$. **15.1.** 1) 8; 2) 0; 1; 3) $\frac{9}{8}$; 4) 8. **15.2.** 1) –4; 11; 2) –61; 3) 0; 1; 4) 2,8; –1,1. **15.3.** 1) –1; 4; 2) –2; 5; 3) –4; 1; $\frac{-3 \pm \sqrt{22}}{2}$; 4) 1024. **15.4.** 1) –1; 5; 2) 1; 2; 3) 1; 2; 4) –6; 4. **15.5.** 1) (9; 4), (4; 9); 2) (8; 1), (1; 8); 3) (41; 40); 4) (–2; 3), (12; 24). **15.6.** 1) (27; 1), (–1; –27); 2) (4; 1), (1; 4); 3) (2; 3), $\left(\frac{13}{3}; -\frac{5}{3}\right)$; 4) (6; 3), (3; 1,5). **15.7.** 1. *Указание.* Воспользуйтесь заменой $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} = t$ или свойствами возрастающих и убывающих функций. **15.8.** 3. *Указание.* Замена $\sqrt{x+6} + \sqrt{x-2} = y$. **15.9.** 3. **15.10.** $1 + \sqrt{6}$. *Указание.* Замена $\frac{x}{\sqrt{2x+5}} = t$. **15.11.** 3; $\frac{81 - 9\sqrt{97}}{8}$. *Указание.* Разделите обе части уравнения на x^2. **15.12.** 1; $\frac{1 + \sqrt{109}}{18}$. **15.13.** –2; 5. *Указание.* Пусть $\sqrt[3]{x+3} = a$, $\sqrt[3]{6-x} = b$. Тогда $a^3 + b^3 = 9$. **15.14.** –3; 4. **15.15.** 8. **15.16.** $-\frac{17}{5}$; $\frac{63}{5}$. **15.17.** 10. *Указание.* Замена $\sqrt[3]{x-2} = a$, $\sqrt{x-1} = b$. Тогда $a^3 - b^2 = -1$. Другое решение можно получить, если учесть возрастание функции $f(x) = \sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x-1}$. **15.18.** 1; 2; 10. **15.19.** 1. *Указание.* Пусть $\sqrt{2-x} = y$. Тогда можно получить систему $\begin{cases} \sqrt{2-x} = y, \\ \sqrt{2-y} = x. \end{cases}$ **15.20.** 2. **15.21.** 1) 4. *Указание.* Умножив обе части уравнения на выражение $\sqrt{2x^2+3x+5} - \sqrt{2x^2-3x+5}$, получим $6x = 3x(\sqrt{2x^2+3x+5} - \sqrt{2x^2-3x+5})$. Отметим, что $x = 0$ не является корнем исходного уравнения. Далее сложим почленно исходное уравнение и уравнение $\sqrt{2x^2+3x+5} - \sqrt{2x^2-3x+5} = 2$; 2) –1. *Указание.* Умножьте обе части уравнения на выражение $\sqrt{x+1} - 1$. **15.22.** $\frac{7 + \sqrt{13}}{6}$. **16.1.** 1) $[0; +\infty)$; 2) $(4; +\infty)$; 3) $[-8; -4]$; 4) $(-\infty; -1) \cup [2; +\infty)$. **16.2.** 1) $(-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$; 2) $\varnothing$. **16.3.** 1) $\left(3; \frac{24}{5}\right]$; 2) $[1; +\infty)$; 3) $[-1; 0) \cup (0,6; 1]$; 4) $[1; 6]$. **16.4.** 1) $\left[2\frac{2}{9}; 4\right) \cup (5; +\infty]$; 2) $(3; +\infty)$; 3) $[-2; -1,6] \cup [0; 2]$; 4) $\varnothing$. **16.5.** 1) $[-7; 2]$; 2) $\left[\frac{8}{3}; +\infty\right)$; 3) $(-\infty; -2] \cup (2; +\infty)$; 4) $(3; 5]$. **16.6.** 1) $[-2; 2)$; 2) $[-7; 1)$; 3) $(-\infty; -3]$; 4) $(-\infty; -5] \cup [1; +\infty)$. **16.7.** 1) 4; 2) $[-2; 4] \cup [5; +\infty)$. **16.8.** 1) $\{-2, 1\} \cup [3; +\infty)$; 2) $[-4; -3] \cup [3; 4]$. **16.9.** 1) $\left[\frac{1}{2}; 2\right) \cup (5; +\infty)$; 2) $\left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$; 3) $[-4; 1] \cup \{2\}$;

4) $(-\infty; -1] \cup [4; 6) \cup (8; +\infty)$. **16.10.** 1) $(-1; +\infty)$; 2) $[-20; 0] \cup [5; +\infty]$; 3) $\{-4\} \cup [2; 3]$; 4) $[-7; -5)$. **16.11.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $\left(\frac{2\sqrt{21}}{3}; +\infty\right)$. **16.12.** 1) $[6; +\infty)$; 2) $\left(\frac{16}{5}; 4\right)$. **16.13.** $[1; +\infty)$. *Указание*. Воспользуйтесь тем, что функция $y = \sqrt{x+3} + \sqrt[3]{x^3 + x + 6}$ возрастающая. **16.14.** $[-2; 2)$. **16.15.** $a = \frac{7}{40}$. *Указание*. Воспользуйтесь тем, что график функции $y = \sqrt{1-(x+2a)^2}$ — полуокружность радиусом 1 с центром в точке $A(-2a; 0)$. **16.16.** $a = \frac{7}{20}$.

Глава 3. **17.3.** 2) $\frac{9\pi}{2}$. **17.10.** 1) $(0; -1)$; 3) $(0; 1)$; 6) $(1; 0)$. **17.11.** 2) $(-1; 0)$; 5) $(-1; 0)$. **17.12.** 3) $\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; 4) 2π; -2π. **17.13.** б) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **17.14.** б) $\frac{7\pi}{15} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **17.15.** 1) $(0; -1)$; 2) $(0; 1)$, $(0; -1)$; 3) $(1; 0)$, $(-1; 0)$. **17.17.** 1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **17.18.** 1) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **17.20.** 1) $\{\pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$; 2) $\varnothing$; 3) $\left\{\frac{\pi n}{3} \mid n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; 4) $\left\{\frac{3\pi}{2} + 3\pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. **17.21.** 1) $\{\pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$; 2) $\{2\pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$; 3) $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\right\}$; 4) $\left\{\frac{\pi}{3} + \pi n \mid n \in \boldsymbol{Z}\right\}$. **18.1.** 2) -3; 3) $\frac{7}{4}$. **18.2.** 2) 9. **18.3.** 1) Да; 2) нет; 3) да. **18.4.** 1) Нет; 3) да. **18.5.** 1) 3; 1; 3) 1; 0. **18.6.** 2) -1; -3; 4) 10; 4. **18.9.** 1) $a = 0$; 2) $-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$; 3) $1 \leqslant a \leqslant 2$ или $3 \leqslant a \leqslant 4$. **18.10.** 1) $1 \leqslant a \leqslant 3$; 2) таких значений a не существует; 3) $a = 1$. **18.13.** 1) Наибольшего значения не существует; $\frac{1}{2}$ — наименьшее; 2) наибольшее значение 1; наименьшего не существует; 3) наибольшего и наименьшего значений не существует. **18.14.** 1) $-\frac{1}{3}$; -1; 2) наибольшего и наименьшего значений не существует; 3) 1; -1. **18.15.** 1) $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$; 2) $[0,5; +\infty)$; 3) $\left(-\infty; -\frac{2}{7}\right] \cup [2; +\infty)$. **18.16.** 1) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; 2) $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 3) $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

19.3. 1) 2; 2) 4. **19.4.** 1) 1,5; 2) $4\sqrt{3} - 3$. **19.9.** 1) $2\sin\alpha$; 2) $-2\cos\alpha$; 3) 0. **19.10.** 1) 0; 2) 0; 3) $-2\operatorname{ctg}\beta$. **19.11.** 1) II; 3) I или II. **19.12.** 2) IV; 4) I или III. **19.13.** 1) Чётная. **19.14.** 1) Чётная; 3) не является ни чётной, ни нечётной. **20.1.** 1) $\sqrt{3}$; 4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **20.2.** 1) 1; 3) $\frac{1}{2}$. **20.5.** 2) 1; 3) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{1}{6}$. **20.6.** 3) 4. **20.8.** π. **20.9.** π. **20.10.** *Указание*. Если предположить, что данная функция — периодическая с периодом T, то обязательно одно из чисел, $0 - T$ или $0 + T$, не будет принадлежать области определения, тогда как $0 \in D(f)$. **20.12.** 1) 4π; 2) $\frac{40\pi}{3}$; 3) 6; 4) 2. **20.13.** 1) 10π; 3) 14. **20.14.** $a = 0$. **20.15.** $a = 0$. **20.16.** $a = -1$ или $a = \frac{1}{5}$. **20.17.** $a = -1$; 0; $\frac{1}{3}$. **20.18.** 1; –1; 5; –5. *Указание*. Равенство $\cos n(x + 5\pi)\sin\frac{15(x + 5\pi)}{n^2} = \cos nx \sin\frac{15x}{n^2}$ должно выполняться при всех $x \in \boldsymbol{R}$, а при $x = 0$ имеем $\cos 5\pi n \sin\frac{75\pi}{n^2} = 0$. Так как $\cos 5\pi n \neq 0$, то $\sin\frac{75\pi}{n^2} = 0$; $\frac{75\pi}{n^2} = \pi k$; $\frac{75}{n^2} = k$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. Отсюда следует, что n^2 — делитель числа 75. **20.19.** 1; –1; 3; –3. **20.20.** Не существует. *Указание*. Сумма двух иррациональных чисел может быть рациональным числом. **20.21.** *Указание*. Функция $g(t) = t^3 + t$ является возрастающей, а следовательно, и обратимой. Пусть T — период функции $y = (f(x))^3 + f(x)$. Тогда для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $(f(x + T))^3 + f(x + T) = (f(x))^3 + f(x)$. Отсюда для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(x + T) = f(x)$. **20.22.** Нет. *Указание*. Рассмотрите, например, функцию $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -1, \text{ если } x < 0. \end{cases}$ **20.23.** 1. *Указание*. $f(x + 4) = f((x + 2) + 2) =$

$$= \frac{f(x+2)}{5f(x+2)-1} = \frac{\frac{f(x)}{5f(x)-1}}{\frac{5f(x)}{5f(x)-1}-1} = f(x).$$

20.24. *Указание*. Докажите, что $f(x+4) = f(x)$. **21.3.** 2) $\cos 20° > \cos 21°$; 4) $\cos\frac{10\pi}{9} < \cos\frac{25\pi}{18}$; 6) $\sin 2 > \sin 2{,}1$. **21.4.** 2) $\sin\frac{5\pi}{9} > \sin\frac{17\pi}{18}$; 4) $\cos\frac{10\pi}{7} > \cos\frac{11\pi}{9}$. **21.13.** 1) Да; 2) нет. **21.18.** 1) См. рисунок. *Указание*. $\pi(x^2 + y^2) = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x^2 + y^2 = n$,

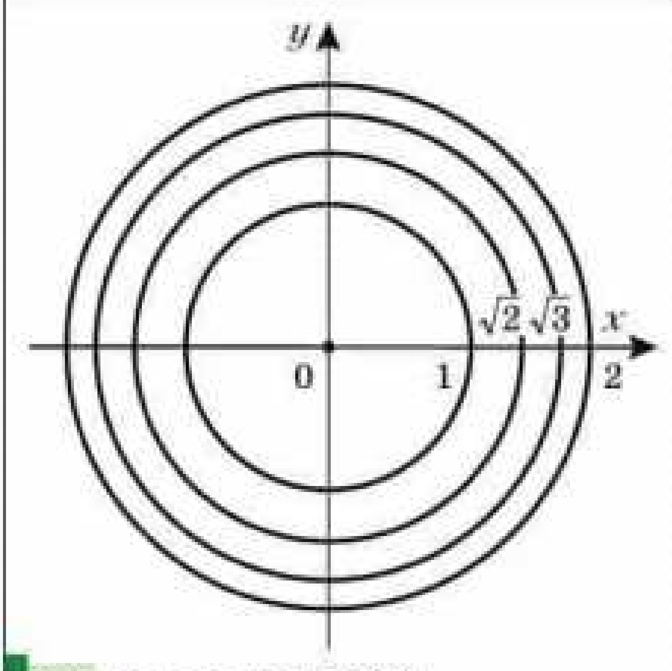


Рис. к задаче 21.18 (1)

$n = 0, 1, 2, \ldots$. **21.20.** $-8\pi < a < -6\pi$ или $6\pi < a < 8\pi$. **22.1.** 4) $\operatorname{tg} 1 < \operatorname{tg} 1{,}5$; 5) $\operatorname{ctg}(-40^\circ) < \operatorname{ctg}(-60^\circ)$. **22.2.** 1) $\operatorname{tg} 100^\circ > \operatorname{tg} 92^\circ$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8} > \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$; 6) $\operatorname{ctg}(-3) < \operatorname{ctg}(-3{,}1)$. **22.7.** 1) Нет. *Указание.* $\operatorname{tg} 80^\circ > \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$; 2) нет. **22.11.** 1) Множество прямых вида $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, из которых «выколоты» точки с ординатами $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} \operatorname{tg} x = 0, \\ \sin y \neq 0, \\ \cos y \neq 0. \end{cases}$ **23.1.** 1) $\frac{2}{\cos^2\alpha}$; 2) 1; 3) $\frac{2}{\sin\alpha}$; 4) $\cos^2\alpha$; 5) $-\operatorname{ctg}\gamma$; 6) $\sin^4\alpha$; 7) 1; 8) $\frac{1}{\cos\alpha}$. **23.2.** 1) $\frac{2}{\sin^2\beta}$; 2) 1; 3) $\frac{2}{\cos\beta}$; 4) $\operatorname{tg}^2\alpha$; 5) -1; 6) $-\cos^2\alpha$. **23.3.** 2) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3}$; 3) $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$. **23.4.** 1) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{12}{5}$; 4) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{50}}$, $\cos\alpha = -\frac{7}{\sqrt{50}}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{7}$. **23.5.** 2) *Указание.* Рассмотрите разность левой и правой частей данного равенства и докажите, что она равна нулю. **23.9.** 1) $-\frac{1}{2}$. *Указание.* Разделите числитель и знаменатель данной дроби на $\cos\alpha$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) -27. *Указание.* Умножьте числитель данной дроби на $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$. **23.10.** 1) $-\frac{16}{11}$; 2) $\frac{125}{357}$. **23.11.** 1) $-\sin\beta - \cos\beta$; 2) $-\sin\alpha\cos\beta$; 3) 1. **23.12.** 1) $\frac{1}{\sin\alpha}$; 2) $2\operatorname{ctg}\alpha$; 3) -1. *Указание.* Так как $\frac{2\pi}{3} \leqslant \alpha \leqslant \pi$, то $\cos\frac{2\pi}{3} \geqslant \cos\alpha$. **23.13.** 1) $\frac{b^2-1}{2}$. *Указание.* $b^2 = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$; 2) $\frac{b(3-b^2)}{2}$; 3) $\frac{1+6b^2-3b^4}{4}$. **23.14.** 1) $b^2 - 2$; 2) $b(b^2-3)$; 3) $\frac{b+2}{b}$. *Указание.* Из условия следует, что $\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = b$. Отсюда $2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2}{b}$. **23.15.** 1) $3\frac{1}{8}$, -3. *Указание.* $2\cos^2\alpha - 3\sin\alpha = 2(1-\sin^2\alpha) - 3\sin\alpha = -2\sin^2\alpha - 3\sin\alpha + 2$. Обозначим $\sin\alpha = t$ и рассмотрим функцию $f(t) = -2t^2 - 3t + 2$, определённую на промежутке $[-1; 1]$. Это квадратичная функция со старшим отрицательным коэффициентом $a = -2$. Она принимает наибольшее значение в точке $t_0 = -\frac{-3}{2\cdot(-2)} = -\frac{3}{4}$, принадлежащей промежутку $[-1; 1]$. Следовательно,

$\max\limits_{[-1;1]} f(t) = f\left(-\frac{3}{4}\right) = -2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 3\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) + 2 = 3\frac{1}{8}$. Для нахождения наименьшего значения вычислим значение функции $f(t)$ на концах промежутка $[-1; 1]$: $f(-1) = -2 + 3 + 2 = 3$, $f(1) = -2 - 3 + 2 = -3$. Следовательно, $\min\limits_{[-1;1]} f(t) = -3$; 2) наибольшего значения не существует, наименьшее равно -1; 3) 0; $-1\frac{1}{8}$; 4) наибольшего и наименьшего значений не существует.

23.16. 1) $3\frac{1}{3}$; -2; 2) $3\frac{1}{8}$; 2; 3) наибольшего и наименьшего значений не существует. **23.17.** 1) См. рисунок; 2) прямая $y = -1$, из которой «выколоты» точки вида $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; -1\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. **23.19.** 1. *Указание*. Воспользуйтесь тем, что $\sin^{14} x \leqslant \sin^2 x$ и $\cos^{14} x \leqslant \cos^2 x$. **23.20.** 1; -1. **24.1.** 3) $\cos\beta$.

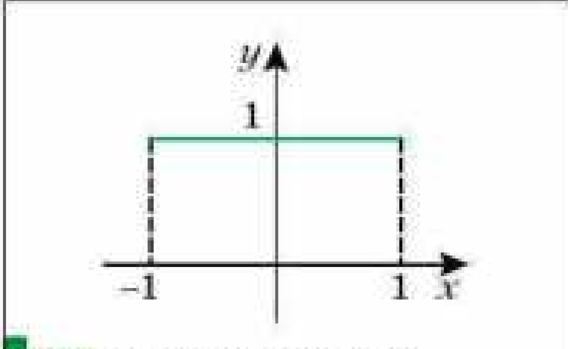


Рис. к задаче 23.17 (1)

24.2. 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos(\alpha + \beta)$. **24.3.** 1) -1; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **24.4.** 1) $\sqrt{3}$. **24.7.** $-\frac{31\sqrt{2}}{82}$. **24.8.** $-\frac{3 + 4\sqrt{3}}{10}$. **24.9.** $-\frac{24}{25}$. **24.10.** $-\frac{297}{425}$. **24.11.** 2. **24.12.** 5. **24.15.** 1) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$; 2) $\cos 2\alpha$. **24.16.** 1) 1; 2) -1. **24.17.** 1) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$; 3) $\sqrt{3} - 2$. **24.18.** 1) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. **24.19.** 1) $\sqrt{3}$; 2) 1. **24.20.** 1) $\sqrt{3}$; 2) 1. **24.23.** 1) 2; 2) $\sqrt{41}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{5}$. **24.24.** 1) 2; 2) 5; 3) $\sqrt{10}$. **24.25.** $\frac{\sqrt{21} - 2\sqrt{3}}{10}$. *Указание*. $\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\right)$. **24.26.** $-0{,}6$. **24.27.** $\frac{48 + 25\sqrt{3}}{11}$. **24.28.** $\frac{\sqrt{3(1 - b^2)} - b}{2}$. **24.29.** $-\frac{\pi}{4}$. **24.30.** 60°. **24.31.** 120°. **24.32.** 1) Из графика функции $y = \operatorname{tg} x$ исключите точки, абсциссы которых равны $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. **24.34.** *Указание*. Из равенства $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ следует, что $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\pi - \gamma)(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) + \operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}\gamma(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) + \operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$. **24.38.** *Указание*. Предположим, что $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > 2$. Тогда $(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2 > 4$ и $(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2 \geqslant 5$. Почленно сложив два последних неравенства, получим $3+2(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\beta-\gamma)+\cos(\gamma-\alpha)) > 9$. **24.39.** *Указание*. Воспользуемся тождеством для углов треугольника (см. задачу 24.35): $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=1$. Имеем: $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}-\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\right.$ $\left.+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^2+\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^2\right)\geqslant 0$.

Отсюда $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}-1\geqslant 0$. **24.40.** *Указание*. Рассмотрите выражение $\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^2$ и воспользуйтесь результатами задачи 24.39.

25.3. 1) $-\cos\alpha$; 2) 1; 3) 2; 4) 2; 5) $-\operatorname{tg}^2\alpha$. **25.5.** 1) 1; 2) 0; 3) 0. **25.6.** 1) -1; 2) 1; 3) 0. **25.8.** 2. *Указание*. Поскольку $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{11}+\frac{5\pi}{22}=\frac{\pi}{2}$, то $\cos^2\frac{3\pi}{8}=\sin^2\frac{\pi}{8}$ и $\cos^2\frac{5\pi}{22}=\sin^2\frac{3\pi}{11}$. **25.9.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $\frac{1}{\cos^2(\alpha+10^\circ)}$.

25.10. *Указание*. Из условия следует, что $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$. Тогда $\alpha<\frac{\pi}{2}-\beta$; $\cos\alpha>\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\sin\beta$. Аналогично доказываем, что $\cos\beta>\sin\gamma$, $\cos\gamma>\sin\alpha$. **26.1.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $\sin 25^\circ$; 3) $\cos\alpha+\sin\alpha$; 4) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha$; 7) $\sin 2\alpha$; 8) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}2\alpha$. **26.2.** 1) 1; 2) $\cos 35^\circ-\sin 35^\circ$; 3) 1; 4) $\frac{1}{4}\sin 4\alpha$; 5) $2\sin 2\alpha$; 6) $\frac{1}{2}\cos 2\alpha$; 7) $-\sin 2\beta$; 8) $\sin 3\alpha$. **26.5.** 2) $-4\sqrt{5}$. **26.6.** 2) $-\frac{24}{7}$. **26.10.** 1) 1; 2) $\operatorname{ctg}4\alpha$. **26.11.** $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\sin 2\alpha}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{5}{12}$. **26.12.** $-0{,}8$. **26.13.** $\cos 20^\circ$, $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$. **26.14.** $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{14}}{4}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{7}}{7}$. **26.15.** 1) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; 3) $2+\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; 5) $-(1+\sqrt{2})$; 6) $\sqrt{2}-1$. **26.16.** 1) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$; 2) 2; 3) $\sin 4\alpha$; 4) $\sin 2\alpha$; 5) $\cos^2\frac{\alpha}{2}$; 6) $\cos\alpha$. **26.17.** 1) $\sin 2\alpha$; 2) $4\sin\alpha$; 3) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha$. **26.24.** $\frac{1}{2}$. **26.25.** $-\frac{1}{2}$. **26.26.** $\frac{47}{37}$. **26.27.** $\frac{57}{7}$. **26.28.** 2. **26.29.** $-\frac{8}{9}$. **26.30.** $\frac{3}{4}$. **26.31.** 1) $\cos 4\alpha$; 2) $\sin 8\alpha$; 3) $\operatorname{tg}^4\alpha$; 4) -1. **26.32.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}$; 3) $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}2\alpha$;

4) $-\frac{1}{2}$. **26.35.** 1) $\frac{3+\cos 4\alpha}{4}$; 2) $\frac{17+14\cos 4\alpha+\cos^2 4\alpha}{32}$. **26.36.** $\frac{10+3\sqrt{3}}{16}$.

26.38. 1) $\operatorname{ctg}^4\frac{\alpha}{2}$; 2) $\cos^2\frac{\alpha}{2}$. **26.39.** 1) –2; 2) 0. **26.40.** 1) 4; 2) $-\frac{1}{2}\sin 2\alpha$.

26.45. 1) $\cos\frac{\alpha}{4}$; 2) $\sqrt{2}\operatorname{ctg}2\alpha$; 3) $\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$. **26.46.** 1) Если $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$, то $2\cos\alpha$; если $\frac{\pi}{4} < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $2\sin\alpha$; 2) $\cos\frac{\alpha}{8}$; 3) $2\cos\frac{\varphi}{2}$. **26.47.** $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. *Указание*. Имеем: $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$. Тогда: $\sin(2\cdot 18^\circ) = \cos(3\cdot 18^\circ)$; $2\sin 18^\circ\cos 18^\circ = 4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ$; $2\sin 18^\circ\cos 18^\circ = \cos 18^\circ(4\cos^2 18^\circ - 3)$; $2\sin 18^\circ = 4\cos^2 18^\circ - 3$; $2\sin 18^\circ = 4(1-\sin^2 18^\circ) - 3$; $2\sin 18^\circ = 4 - 4\sin^2 18^\circ - 3$; $4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0$. Рассмотрите последнее равенство как квадратное уравнение относительно $\sin 18^\circ$ и учтите, что $\sin 18^\circ > 0$. **26.48.** *Указание*. Воспользуйтесь равенством $\sin 30^\circ = 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ$. **26.50.** *Указание*. Воспользуйтесь методом математической индукции. **27.1.** 1) $\operatorname{tg}5\alpha$; 2) $-\operatorname{ctg}3\alpha$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **27.2.** 1) $\frac{\cos\alpha}{\cos 4\alpha}$; 2) $\operatorname{tg}6\alpha$; 3) 1. **27.3.** 1) $4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$; 2) $4\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)$; 3) $2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)}{\sin\alpha}$.

27.4. 1) $4\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)$; 2) $4\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$; 3) $4\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\cos\alpha}$. **27.5.** 1) $\sin 3\alpha$; 2) 0,5.

27.6. 1) $\cos\alpha$; 2) $\frac{1}{2}$. **27.13.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) 1; 3) $-\sin 2\alpha$. **27.14.** 1) 1; 2) $\sin 2\alpha$.

27.19. 1) *Указание*. Умножьте и разделите левую часть равенства на $2\sin\frac{\pi}{7}$. **27.21.** $\frac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}n\alpha}{\sin\alpha}$. *Указание*. Воспользуйтесь равенством $\frac{\sin\alpha}{\sin k\alpha\sin(k+1)\alpha} = \operatorname{ctg}k\alpha - \operatorname{ctg}(k+1)\alpha$. **27.22.** $\frac{\operatorname{ctg}1 - \operatorname{ctg}(2n+1)}{\sin 2}$.

27.23. $\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{1}{2^n} - \operatorname{ctg}1$. *Указание*. Воспользуйтесь равенством $\operatorname{tg}\beta - \operatorname{ctg}\beta = -2\operatorname{ctg}2\beta$. **27.24.** *Указание*. Умножьте и разделите левую часть равенства на $2\sin\frac{\pi}{n}$. Заметим, что данная задача имеет и геометрическое решение. Рассмотрим точки $A_k\left(\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right); \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right)$, где k принимает все натуральные значения от 1 до n. Эти точки являются вершинами правильного n-угольника с центром в точке $O(0;\ 0)$. Сумма векторов $\vec{s} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$. В то же время первая координата вектора $\vec{s}$ равна $\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + \cos\frac{2n\pi}{n}$. **27.26.** 1) Если $\alpha = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, то $S = n$; если $\alpha \neq 2\pi k$, то $S = \dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. *Указание*. При $\alpha \neq 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, умножьте и разделите данную сумму на $2\sin\frac{\alpha}{2}$; 2) если $\alpha = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, то $S = 0$; если $\alpha \neq \pi k$, то $S = \dfrac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha}$. *Указание*. При $\alpha \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, умножьте и разделите данную сумму на $2\sin\alpha$; 3) если $\alpha = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, то $S = 0$; если $\alpha \neq \pi k$, то $S = \dfrac{n}{2} - \dfrac{\sin n\alpha\cos(n+1)\alpha}{2\sin\alpha}$. *Указание*. Воспользуйтесь формулами понижения степени. **27.27.** 1) Если $\alpha = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, то $S = 0$; если $\alpha \neq \pi k$, то $S = \dfrac{\sin n\alpha\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$; 2) если $\alpha = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, то $S = n$; если $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, то $S = 0$; если $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, то $S = \dfrac{n}{2} + \dfrac{\sin 4n\alpha}{4\sin 2\alpha}$. **27.28.** *Указание*. Перепишем данное неравенство в виде $8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 1 \leqslant 0$. Преобразуем выражение $8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$. Имеем: $8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 1 = 4(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))\cos\gamma - 1 = 4(\cos(\alpha-\beta) - \cos\gamma)\cos\gamma - 1 = 4\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma - 4\cos^2\gamma - 1 = (4\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma - 4\cos^2\gamma - \cos^2(\alpha-\beta)) + \cos^2(\alpha-\beta) - 1 = -(\cos(\alpha-\beta) - 2\cos\gamma)^2 - \sin^2(\alpha-\beta)$. Теперь неравенство становится очевидным.

Глава 4. **28.3.** 2) $\pm\frac{\pi}{5} + \frac{12\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\pm 3\arccos\frac{\sqrt{3}}{3} + 6\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **28.4.** 2) $\pm\frac{25\pi}{6} + 10\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{4\pi}{3} + \frac{8\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **28.5.** 2) $12 + 6\pi + 12\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{24} \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **28.6.** 2) $\pm\frac{3\pi}{2} - 6 + 4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **28.7.** 4 корня. **28.8.** $\frac{7\pi}{12}$; $\frac{31\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$. **28.9.** 2) $\left(\frac{5}{6} + 2k\right)^2$, $k \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$, $\left(-\frac{5}{6} + 2n\right)^2$, $n \in \boldsymbol{N}$; 3) решений нет. **28.10.** 1) $\frac{64}{(8k+1)^2}$, $k \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$, $\frac{64}{(8n-1)^2}$, $n \in \boldsymbol{N}$; 2) $\pm\arccos\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $\pm\arccos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **28.11.** $a = \frac{1}{2}$. **28.12.** $a = 0$. **28.13.** $a \in \left[\frac{7\pi}{3};\ +\infty\right)$. **28.14.** $a \in \left[\frac{8\pi}{3};\ +\infty\right)$. **28.15.** Если $a < -1$ или $a > 1$, то корней нет; если $a = -1$ или $a = 1$, то один корень; если $-1 < a \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 1$, то 2 корня; если $\frac{\sqrt{2}}{2} < a \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, то 3 корня. **28.16.** Если $a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $a > 1$, то корней нет; если $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant a < 0$ или $a = 1$, то один корень; если $0 \leqslant a < 1$, то 2 корня. **28.17.** $a < \pi$, или $a > \frac{3\pi}{2}$, или $a = \frac{7\pi}{6}$. **28.18.** $a < 0$, или $a > \frac{\pi}{2}$, или $a = \frac{\pi}{4}$. **29.3.** 2) $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in Z$; 3) $\frac{(-1)^{n+1}}{8}\arcsin\frac{2}{9} + \frac{\pi n}{8}$, $n \in Z$. **29.4.** 3) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi n}{2}$, $n \in Z$. **29.6.** 2) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{5\pi}{6} + 20 + 5\pi n$, $n \in Z$. **29.7.** $-\frac{5\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{6}$. **29.8.** 6 корней. **29.9.** 1) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; 2) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; 3) $\pi + 4\pi n$, $\frac{\pi}{3} + 4\pi n$, $n \in Z$. **29.10.** 1) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$. **29.11.** 2) $\left(2k - \frac{1}{2}\right)^2$, $k \in N$; 3) $\pm\arccos\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$. **29.12.** 1) $\frac{81}{(3k + (-1)^{k+1})^2}$, $k \in Z$; 2) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. **29.13.** $a \geqslant \frac{17\pi}{6}$. **29.14.** $a \leqslant -\frac{13\pi}{6}$. **29.15.** 1) Если $a < -1$ или $a > 1$, то корней нет; если $a = -1$, или $-\frac{1}{2} < a < 0$, или $a = 1$, то 1 корень; если $-1 < a \leqslant -\frac{1}{2}$ или $0 \leqslant a < 1$, то 2 корня; 2) если $a < -1$ или $a > 1$, то корней нет; если $a = 1$, или $a = -1$, или $-\frac{\sqrt{2}}{2} < a \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$, то 1 корень; если $-1 < a \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1$, то 2 корня. **29.16.** Если $a \leqslant -\frac{1}{2}$ или $a > 1$, то корней нет; если $-\frac{1}{2} < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$ или $a = 1$, то 1 корень; если $\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant a < 1$, то 2 корня. **29.17.** Если $-1 < a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, или $-\frac{\sqrt{2}}{2} < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$, или $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1$, то 4 корня; если $a = -1$, или $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, или $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, или $a = 1$, то 3 корня; если $a < -1$ или $a > 1$, то 2 корня. **29.18.** Если $-1 < a < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, или $-\frac{\sqrt{3}}{2} < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$, или $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 1$, то 4 корня; если $a = -1$, или $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, или $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, или $a = 1$, то 3 корня; если $a < -1$ или $a > 1$, то 2 корня.

30.3. 1) $-\frac{4\pi}{21} + \frac{4\pi n}{7}$, $n \in Z$; 3) $\frac{1}{6}\operatorname{arcctg}\frac{6}{11} + \frac{\pi n}{6}$, $n \in Z$. **30.5.** 2) $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **30.6.** 3) $-\frac{1}{3} + \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$. **30.7.** 2) $\frac{16}{(4k+1)^2}$, $k \in N \cup \{0\}$; 3) $(-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k$, $(-1)^k \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + \pi k$, $k \in Z$. **30.8.** 1) $\frac{8}{20k+5}$, $k \in Z$; 2) $\frac{16}{(4\pi k - \pi)^2}$, $k \in N$; 3) $\pm\arccos\frac{1}{4} + 2\pi k$, $\pm\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi k$, $k \in Z$. **30.9.** 1) $a < -\frac{1}{3}$, или $-\frac{1}{3} < a < 0$, или $a > 0$; 2) $-1 < a < -\frac{1}{2}$, или $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$, или $\frac{1}{2} < a < 1$. **30.10.** 1) $a < -\frac{1}{2}$, или $-\frac{1}{2} < a < 0$, или $a > 0$; 2) $-1 < a < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, или $-\frac{\sqrt{3}}{2} < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$, или $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 1$. **30.11.** $a = -\frac{\pi}{3}$, или $a \leqslant -\frac{\pi}{2}$, или $a \geqslant 0$. **30.12.** $a = -\frac{\pi}{4}$, или $a \leqslant -\frac{\pi}{2}$, или $a \geqslant 0$. **31.1.** 1) $[0; 2]$; 2) $[0; 1]$; 3) $(-\infty; -\pi - 4] \cup [\pi - 4; +\infty)$. **31.2.** 1) $\left[-\frac{\pi}{2} - 1; 1 - \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $[2; 3]$; 3) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **31.3.** 1) R; 2) $[1; +\infty)$. **31.4.** R. **31.5.** 1) π; 0; 2) $2 + \pi$; 2. **31.6.** 1) 2π; π; 2) $\frac{\pi}{2} + 1$; $-\frac{\pi}{2} + 1$. **31.7.** 1) $\left(2 - \frac{\pi}{2}; 2 + \frac{\pi}{2}\right)$; 2) $\left[0; \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$. **31.8.** 1) $(4; \pi + 4)$; 2) $\left[0; \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$. **31.9.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\cos\frac{1}{2}$; 3) корней нет. **31.10.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) корней нет; 3) $\frac{3}{2}$. **31.11.** 1) 1; 2) $\operatorname{tg} 1$; 3) корней нет. **31.12.** 1) -1; 2) корней нет; 3) корней нет. **31.13.** 1) $(-1; 1]$; 2) $[-1; 1]$; 3) решений нет; 6) $(-1; 1]$. **31.14.** 1) $\{-1\}$; 2) $[-1; 1)$; 3) $[-1; 1]$; 4) $[-1; 1]$; 5) решений нет. **31.15.** 1) $[-1; 1]$; 2) $\{-1\}$; 3) $\{0\}$. **31.16.** 1) $[-1; 1]$; 2) $\{1\}$; 4) $\{1\}$. **31.17.** 1) $\left[4; \frac{\pi}{2} + 4\right]$; 2) $\left(-\infty; -\frac{2}{\pi}\right] \cup \left[\frac{2}{\pi}; +\infty\right)$; 3) $\left[\sqrt{\frac{1}{\pi}}; +\infty\right)$. **31.18.** 1) $\left[2; \frac{\pi}{2} + 2\right]$; 2) $\left[\frac{1}{\pi}; +\infty\right)$; 3) $\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}; +\infty\right)$. **31.19.** $\left(-\infty; -\frac{2}{\pi}\right) \cup \left(\frac{2}{\pi}; +\infty\right)$. **31.20.** $\left(\frac{1}{\pi}; +\infty\right)$.

31.23. 1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{24}{25}$. *Указание.* $\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right) = 2\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$; 3) $\frac{3}{4}$. **31.24.** 1) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 2) $\frac{7}{25}$; 3) $\frac{5}{\sqrt{26}}$. **31.25.** 1) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 2) $\frac{7}{\sqrt{50}}$. **31.26.** 1) $-\frac{3}{\sqrt{10}}$;

2) $\frac{13}{85}$. **31.27.** 1) $x = 2$. *Указание.* $\cos(\arccos(4x-9)) = 4x-9$ только при условии $|4x-9| \leqslant 1$; 2) $[-3; -1]$. *Указание.* Множество корней этого уравнения — его область определения. **31.28.** 1) $\frac{1}{3}$. *Указание.* Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} |4x-1| \leqslant 1, \\ 4x-1 = 3x^2; \end{cases}$ 2) $[0; 2]$. **31.29.** 1) $\left[0; \frac{3}{4}\right)$; 2) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$; 3) $\left(\frac{\sqrt{3}+10}{6}; 2\right]$. **31.30.** 1) $\left[0; \frac{2-\sqrt{2}}{8}\right)$; 2) $\left(\frac{4-\sqrt{2}}{6}; 1\right]$; 3) $\left[\frac{3}{7}; \frac{8+\sqrt{3}}{14}\right)$. **31.31.** 1) $\left(-\frac{3+\sqrt{3}}{5}; +\infty\right)$; 2) $(2-\sqrt{3}; +\infty)$. **31.32.** $\left(-\infty; \frac{21-\sqrt{3}}{9}\right)$. **31.33.** 3) См. рисунок. *Указание.* Заметим, что $D(y) = [-1; 1]$. Запишем: $\cos(2\arcsin x) = 1 - 2\sin^2(\arcsin x) = 1 - 2x^2$. Следовательно, искомый график — часть параболы $y = -2x^2 + 1$; 4) *Указание.* Поскольку $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, то $y = 1$. Однако искомый график — это не прямая $y = 1$, а лишь её отрезок, так как $D(y) = [-1; 1]$. **31.34.** 2) *Указание.* $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$; 3) *Указание.* $\cos(2\arccos x) = 2x^2 - 1$ при условии $|x| \leqslant 1$. **31.35.** 1) *Указание.* $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ при любом x. **31.36.** 2) *Указание.* $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}$. **31.37.** См. рисунок. **31.40.** 1) $\frac{3\pi}{7}$; 2) $\pi - 3$; 3) $\frac{5\pi}{2} - 8$; 4) $-\frac{3\pi}{13}$; 5) $5 - 2\pi$;

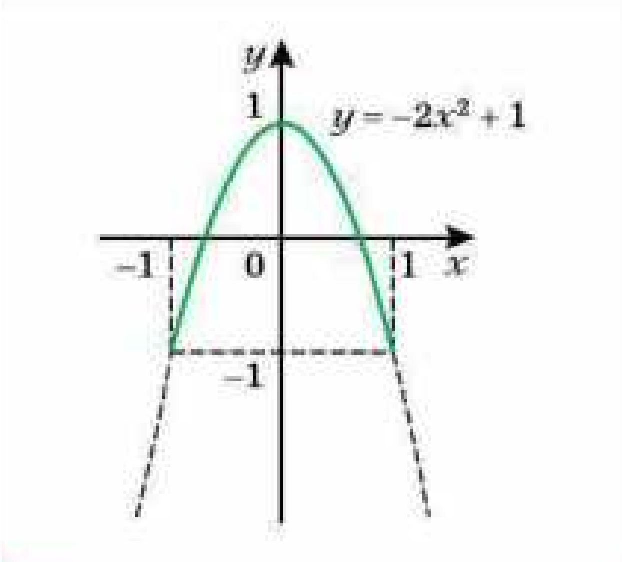


Рис. к задаче 31.33 (3)

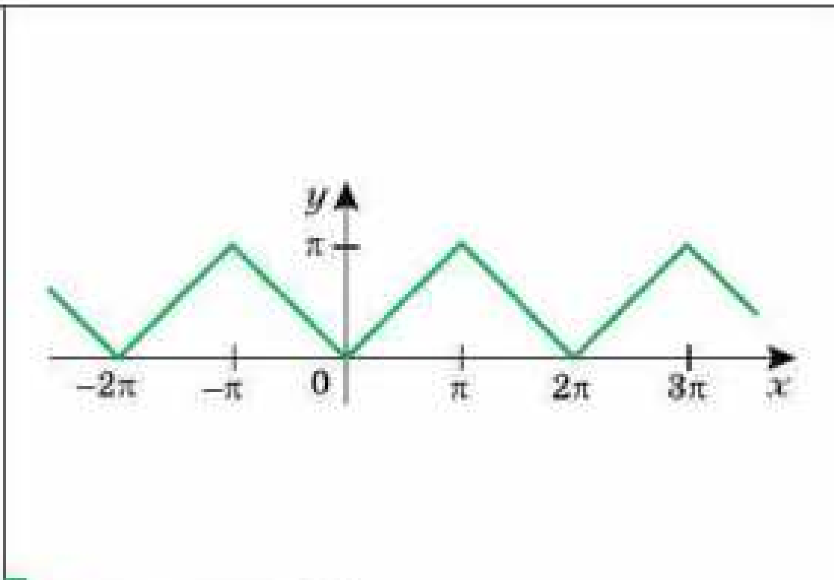


Рис. к задаче 31.37

6) $-\frac{5\pi}{42}$. **31.41.** 1) $\frac{7\pi}{9}$. *Указание.* $\cos\frac{11\pi}{9} = \cos\left(2\pi - \frac{7\pi}{9}\right)$; 2) $2\pi - 6{,}28$; 3) $\frac{9\pi}{2} - 12$; 4) $\frac{4\pi}{11}$; 5) $\frac{7\pi}{2} - 10$. **31.42.** $x = \frac{1}{2}$ или $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. *Указание.*

Тождество $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ позволяет перейти к системе $\begin{cases} (\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 = \frac{5\pi^2}{36}, \\ \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$ После очевидной замены $\arcsin x = t$, $\arccos x = z$ получаем: $\begin{cases} t^2 + z^2 = \frac{5\pi^2}{36}, \\ t + z = \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leqslant z \leqslant \pi. \end{cases}$ **31.43.** $-\sqrt{3}$. **31.44.** *Указание*. Выгодно доказать такое равенство: $\arcsin\frac{3}{5} = \arcsin\frac{56}{65} - \arcsin\frac{5}{13}$. Значения выражений, записанных в левой и правой частях этого равенства, принадлежат промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то есть промежутку, на котором функция $y = \sin x$ возрастает, поэтому достаточно доказать, что $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) = \sin\left(\arcsin\frac{56}{65} - \arcsin\frac{5}{13}\right)$. **31.46.** $\sqrt{\frac{3}{28}}$. *Указание*. Это уравнение перепишем так: $\arcsin 2x = \frac{\pi}{3} - \arcsin x$. Его следствием будет уравнение $\sin(\arcsin 2x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \arcsin x\right)$. Отсюда $2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{2}x$; $5x = \sqrt{3 - 3x^2}$. Это уравнение равносильно системе $\begin{cases} 25x^2 = 3 - 3x^2, \\ x \geqslant 0, \end{cases}$ решая которую получаем $x = \sqrt{\frac{3}{28}}$. Кроме того, $\sqrt{\frac{3}{28}} < \frac{1}{2}$. Поэтому $0 < \arcsin 2\sqrt{\frac{3}{28}} < \frac{\pi}{2}$ и $0 < \frac{\pi}{3} - \arcsin\sqrt{\frac{3}{28}} < \frac{\pi}{2}$. **31.47.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **32.1.** 1) $-\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; 2) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 4 + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 3) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg} 4 + \pi n$, $n \in Z$; 4) $\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. **32.2.** 1) $\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$; 2) $-\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$, $n \in Z$; 3) $\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $\operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in Z$; 4) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \pi n$, $n \in Z$. **32.3.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; 2) $2\pi n$, $\pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{3}\right) + 2\pi n$, $n \in Z$; 3) $\pm 2\pi + 6\pi n$, $n \in Z$; 4) πn, $n \in Z$; 5) $\pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$; 6) $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$, $\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in Z$; 7) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$,

$\operatorname{arcctg} 2 + \pi n$, $n \in Z$; 8) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$. **32.4.** 1) $(-1)^{n+1}\pi + 6\pi n$, $n \in Z$; 2) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $\pi + 4\pi n$, $n \in Z$; 3) $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 4) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in Z$; 5) $\frac{\pi}{6} + \pi n$, πn, $n \in Z$; 6) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$. **32.5.** 1) $\left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} - \pi n\right)$, $n \in Z$; 2) $\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \pi n\right)$, $\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n; \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{1}{3} - \pi n\right)$, $n \in Z$. **32.6.** 1) $\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}; -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in Z$; 2) $\left(\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi n; -\frac{\pi}{3} + \pi n\right)$, $n \in Z$. **32.7.** 1) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $-\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in Z$; 2) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{3}{5} + \pi n$, $n \in Z$; 3) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. **32.8.** 1) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in Z$. *Указание*. $\sin 2x = 2\sin x \cos x$; 2) πn, $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. **32.9.** 1) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 2) $(-1)^n \cdot \arcsin\frac{1 - \sqrt{10}}{3} + \pi n$, $n \in Z$; 3) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; 4) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. **32.10.** 1) $\pm\arccos\frac{\sqrt{29} - 2}{5} + 2\pi n$, $n \in Z$; 2) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; 3) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 4) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$. **32.11.** 1) $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **32.12.** $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. **32.13.** 1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $-2\operatorname{arctg}\frac{11}{5} + 2\pi n$, $n \in Z$; 2) $2\operatorname{arctg}(-1 \pm \sqrt{5}) + 2\pi n$, $n \in Z$. **32.14.** 1) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $2\operatorname{arctg} 4 + 2\pi n$, $n \in Z$; 2) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $2\operatorname{arctg} 2\sqrt{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. **32.15.** 1) πn, $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; 2) πn, $n \in Z$. **32.16.** 1) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$. **32.17.** 1) $\pm\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; 2) $\pm\frac{3\pi}{3} + 2\pi n$, $\pm\left(\pi - \arccos\frac{2}{3}\right) + 2\pi n$, $n \in Z$. *Указание*. $5\left(3\cos x + \frac{1}{\cos x}\right) + 2\left(9\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) + 5 = 0$. Сделайте замену $3\cos x + \frac{1}{\cos x} = y$, тогда $9\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} = y^2 - 6$. **32.18.** 1) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. *Указание*. $(\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x) + (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x) - 4 = 0$. Сделайте замену $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = y$;

2) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k$, $(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{17}-5}{4}+\pi k$, $k\in Z$. **32.19.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$. *Указание*. $2\cos^2 x+5\sin^2 x\cos^2 x+\sin^4 x+\cos^2 x-\sin^2 x=0$; $\sin^2 x-3\cos^2 x=5\sin^2 x\cos^2 x+\sin^4 x$. Умножьте левую часть на выражение $\sin^2 x+\cos^2 x$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$. **32.20.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. **32.21.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$; 2) $\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. **32.22.** 1) $3\pi n$, $n\in Z$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\pm\arccos\frac{1-\sqrt{13}}{4}+2\pi n$, $n\in Z$. **32.23.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; 2) πn, $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$. *Указание*. $\cos 4x=\frac{1+\cos 6x}{2}$; $4\cos^2 2x-2=1+4\cos^3 2x-3\cos 2x$; $4\cos^3 2x-4\cos^2 2x-3\cos 2x+3=0$; $4\cos^2 2x(\cos 2x-1)-3(\cos 2x-1)=0$; $(4\cos^2 2x-3)(\cos 2x-1)=0$; 3) $\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$. **32.24.** 1) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$; 2) πn, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. **32.25.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; 2) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. **32.26.** 1) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$; 2) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$. **32.27.** $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. **32.28.** $(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{29}-5}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. **32.29.** 1) $2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$. *Указание*. $(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=1$; 2) πn, $\operatorname{arctg} 2+\pi n$, $n\in Z$. *Указание*. Сделайте замену $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}=t$. **32.30.** $2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$. **32.31.** 1) $\frac{5\pi}{6}\leqslant a<\pi$; 2) $\frac{3\pi}{2}\leqslant a<\frac{11\pi}{6}$. **32.32.** 1) $\frac{11\pi}{6}\leqslant a<2\pi$; 2) $\frac{4\pi}{3}\leqslant a<\frac{3\pi}{2}$. **32.33.** 1) $a<-\frac{\sqrt{3}}{2}$, или $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$, или $a>1$; 2) $a=1$ или $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant a<0$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}<a\leqslant 1$ или $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant a<\frac{\sqrt{2}}{2}$. **32.34.** 1) $a>\frac{\sqrt{2}}{2}$, или $a=-\frac{1}{3}$, или $a<-1$; 2) $\frac{1}{2}<a\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $a=-1$; 3) $-\frac{1}{3}<a\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $-1\leqslant a<-\frac{1}{3}$. **32.35.** $a<0$, или $a=2$, или $a=3$, или $a>4$. *Указание*. Покажите, что второе уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin x=\frac{1}{2},\\ \sin x=\frac{a-2}{2}.\end{array}\right.$ **32.36.** $a=2$. *Указание*. Заметим, что число $\frac{\pi}{3}$ явля-

ется корнем первого уравнения при всех значениях a. Подставляя $x = \frac{\pi}{3}$ во второе уравнение, получаем $2a^2 - 5a + 2 = 0$. Отсюда $a = 2$ или $a = \frac{1}{2}$. Остаётся проверить найденные значения параметра. **33.1.** 1) $\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $-\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **33.2.** 1) $\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $\operatorname{arcctg} 3 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **33.3.** 2) $\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{6}$, $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **33.4.** $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **33.5.** 1) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) πn, $\pm\arccos\frac{3}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{2\pi n}{5}$, $\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **33.6.** 1) πn, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $2\pi n$, $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{4}$, $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **33.7.** 1) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $2\pi n$, $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\frac{\pi}{48} + \frac{\pi n}{4}$, $-\frac{\pi}{12} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **33.8.** 1) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **33.9.** 1) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $-60^\circ + 180^\circ n$, $40^\circ + 180^\circ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{10}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **33.10.** 1) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{4}$, $\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{12}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **33.11.** 1) -2; 2) корней нет. **33.12.** 1) 2; 2) корней нет. **33.13.** 1) $x = 2\pi n$, $y = \frac{1}{2}$ или $x = \pi + 2\pi n$, $y = -\frac{1}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **33.14.** 1) $x = -4$, $y = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ или $x = 4$, $y = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **33.15.** 1) $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ 2\pi n\right)$, $\left(2\pi n;\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{3} - \pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{3} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} - \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}(n + 2k);\ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(n - 2k)\right)$, $\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}(n + 2k);\ \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}(n - 2k)\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **33.16.** 1) $(360^\circ n;\ 60^\circ + 360^\circ n)$,

$(-60^\circ + 360^\circ n;\ 360^\circ n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2};\ -\frac{\pi}{8} - \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi\left(\frac{n}{2} - k\right);\ \frac{\pi}{4} + \pi\left(\frac{n}{2} + k\right)\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **33.17.** 1) $-\frac{\pi}{24} + \pi n$, $\frac{5\pi}{144} + \frac{\pi n}{6}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{2\pi}{3} + \pi n$, $(-1)^n \arcsin\frac{1}{4} - \frac{\pi n}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание*. $4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin 2x\right) - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) = 0$; $2\left(\sin\frac{\pi}{3} + \sin 2x\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$; $4\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$; $4\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\right) = 0$. **33.18.** 1) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{12} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $-\frac{5\pi}{12} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание*. $4\left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)^2 - 5 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} + 2x\right)\right)$; $4\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 5 = 0$. **33.19.** 1) $2\pi n$, $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\frac{\pi}{2} + \pi n$ $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание*. $2\sin 2x\cos x - 2\sin x\cos x - 2\cos x(\cos x - 1) = 0$; $2\cos x(\sin 2x - \sin x - \cos x + 1) = 0$; $2\cos x((1 + \sin 2x) - (\sin x + \cos x)) = 0$; $2\cos x((\sin x + \cos x)^2 - (\sin x + \cos x)) = 0$; $2\cos x(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x - 1) = 0$; 2) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **33.20.** 1) $\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание*. $(\sin 4x + \cos 4x)(\sin^2 4x + \cos^2 4x - \sin 4x\cos 4x) - (1 - \sin 4x\cos 4x) = 0$; $(\sin 4x + \cos 4x - 1)(1 - \sin 4x\cos 4x) = 0$; 2) $-\frac{\pi}{8} + \pi n$, $\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **33.21.** 1) $4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{5\pi}{4} + \frac{5\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **33.22.** 1) $6\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{9\pi}{4} + 3\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **33.23.** 1) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание*. Запишем два очевидных неравенства: $\cos^7 x \leqslant \cos^2 x$; $\sin^4 x \leqslant \sin^2 x$. Складывая почленно эти неравенства, получаем $\cos^7 x + \sin^4 x \leqslant 1$. Теперь очевидно, что исходное уравнение равносильно системе $\begin{cases}\cos^7 x = \cos^2 x,\\ \sin^4 x = \sin^2 x;\end{cases}$ 2) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание*. Покажите, что при всех допустимых значениях x выполняются неравенства $\sqrt{\cos x} \geqslant \cos^2 x$ и $\sqrt{\sin x} \geqslant \sin^2 x$. **33.24.** 1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, πn, $n \in \boldsymbol{Z}$. **33.25.** 1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание*. Запишем очевидные неравенства: $\sin^5 x \leqslant \sin^2 x$; $\cos^5 x \leqslant \cos^2 x$; Отсюда $\sin^5 x + \cos^5 x \leqslant$

$\leqslant \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Вместе с тем понятно, что $2 - \sin^4 x \geqslant 1$. Таким образом, исходное уравнение равносильно системе $\begin{cases} \sin^5 x = \sin^2 x, \\ \cos^5 x = \cos^2 x, \\ 2 - \sin^4 x = 1; \end{cases}$ 2) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **33.26.** 1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) решений нет. *Указание.* Покажите, что $\sin x + 2\cos x \leqslant \sqrt{5}$. **33.27.** $\frac{2}{3} + 2n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Преобразуйте уравнение к виду $\sqrt{4 - \mathrm{tg}^2 \frac{3\pi x}{2}} \sin(\pi x - \alpha) = 2$, где $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{4 - \mathrm{tg}^2 \frac{3\pi x}{2}}}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3 - \mathrm{tg}^2 \frac{3\pi x}{2}}}{\sqrt{4 - \mathrm{tg}^2 \frac{3\pi x}{2}}}$. Теперь надо заметить, что левая часть полученного уравнения не превышает 2. **33.28.** $\frac{1}{4} + 2n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **33.29.** 1) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $y = \pi n$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание*. Оценим каждый из множителей левой части данного уравнения. Имеем: $5 + \frac{3}{\sin^2 x} \geqslant 8$ и $2 - \sin^6 x \geqslant 1$. Тогда $\left(5 + \frac{3}{\sin^2 x}\right)(2 - \sin^6 x) \geqslant 8$. Однако, очевидно, что $7 + \cos 2y \leqslant 8$. Следовательно, исходное уравнение равносильно системе $\begin{cases} 5 + \frac{3}{\sin^2 x} = 8, \\ 2 - \sin^6 x = 1, \\ 7 + \cos 2y = 8, \end{cases}$ отсюда $\begin{cases} \sin^2 x = 1, \\ \cos 2y = 1; \end{cases}$ 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание*. Для любых действительных чисел a и b верно неравенство $a^2 + b^2 \geqslant \frac{1}{2}(a+b)^2$. Тогда $\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 \geqslant \frac{1}{2}\left(\sin^2 x + \cos^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{\sin^2 2x}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}$. **33.30.** 1) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi(n-k)$, $y = -\pi + 2\pi(n - 2k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $y = \frac{\pi}{4} + \pi\left(n - \frac{k}{2}\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание*. Воспользуйтесь неравенством $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$. Тогда $\mathrm{tg}^4 x + \mathrm{tg}^4 y \geqslant 2\mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{tg}^2 y$ и $\mathrm{tg}^4 x + \mathrm{tg}^4 y + 2\mathrm{ctg}^2 x\,\mathrm{ctg}^2 y \geqslant 2(\mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{tg}^2 y + \mathrm{ctg}^2 x\,\mathrm{ctg}^2 y) \geqslant 4$. **33.31.** 7. *Указание*. Заметим, что если число x_0 — корень данного уравнения, то и число $(-x_0)$ — также корень этого уравнения. Тогда данное уравнение мо-

жет иметь единственный корень только при условии $x_0 = 0$. **33.32.** 3. **33.33.** $\frac{1}{\sin 1}$. **33.34.** 0; $\operatorname{tg} 1$. **33.35.** (0; 0), (1; 0). *Указание*. Подставив вместо x числа 0, 2π и $\frac{\pi}{2}$, можно получить необходимые условия, которым удовлетворяют числа a и b. **34.1.** 1) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; 2) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $2\pi n$, $n \in Z$; 3) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 4) $(-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. **34.2.** 1) $\pi + 2\pi n$, $n \in Z$; 2) $2\pi n$, $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; 3) $\pi + 2\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. **34.3.** 1) $x = n$, $n \in N$, $n \neq 1$; 2) $x = 0$, $x = \pm 1$, $x = \pm 2$, $x = \pm\frac{5}{2}$. **34.4.** 1) $x = 3$, $x = \frac{1}{2} + n$, $n \in Z$, $n \leqslant 2$; 2) $x = \pm\frac{7}{2}$, $x = \pm 3$, $x = \pm 1$. **34.5.** 1) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; 2) $-\frac{3\pi}{2} + 4\pi n$, $n \in Z$. *Указание*. Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos 4x = 1, \\ \cos\frac{x}{2} \neq \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$ **34.6.** 1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$; 2) $\pi + 2\pi n$, $n \in Z$. **34.7.** 1) πn, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; 3) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. **34.8.** 1) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $2\pi n$, $n \in Z$; 2) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $2\pi n$, $n \in Z$; 3) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, πn, $n \in Z$. **34.9.** 1) $\frac{2\pi k}{15}$, $k \in Z$, $k \neq 15p$, $p \in Z$, $\frac{\pi}{17} + \frac{2\pi n}{17}$, $n \in Z$, $n \neq 17m + 8$, $m \in Z$; 2) $\frac{2\pi k}{9}$, $k \in Z$, $k \neq 9p$, $p \in Z$. *Указание*. Умножьте обе части равенства на $2\sin\frac{x}{2}$. **34.10.** 1) $\frac{\pi k}{14}$, $k \in Z$, $k \neq 14p$, $p \in Z$; 2) $\frac{\pi k}{9}$, $k \in Z$, $k \neq 9p$, $p \in Z$. **34.11.** 1) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{6+\sqrt{3}}{11} + \pi n$, $n \in Z$. **34.12.** 1) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n$, $n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{3}}{13} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 3) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{3(5 - \sqrt{3})}{11} + \pi n$, $n \in Z$.
35.1. 2) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; 3) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$;

6) $\frac{\pi}{6} + \pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 8) $\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 9) $\pi - \arcsin\frac{1}{6} + 2\pi n < x < 2\pi + \arcsin\frac{1}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **35.2.** 2) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 8) $\frac{\pi}{4} + \pi n \leqslant x < \pi + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 10) $\operatorname{arcctg} 2 + \pi n < x < \pi + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **35.3.** 1) $-\frac{\pi}{6} + \pi n < x \leqslant \frac{2\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{5\pi}{12} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{11\pi}{12} + \pi n < x < \frac{5\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $\pi + 4\pi n \leqslant x \leqslant 2\pi + 4\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} + \pi n < x < \frac{3\pi}{8} + \frac{1}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **35.4.** 1) $-\frac{\pi}{6} + \pi n < x \leqslant \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{5\pi}{6} + 4\pi n < x < \frac{11\pi}{6} + 4\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{11\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{9\pi}{4} + 3\pi n < x < -\frac{\pi}{4} + 3\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\frac{17\pi}{60} + \frac{\pi n}{2} \leqslant x \leqslant \frac{22\pi}{60} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$. **35.5.** 1) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x < \arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n$ или $\pi - \arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n < x \leqslant \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6} + \pi n \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{4} + \pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < -\operatorname{arctg} 2 + \pi n$ или $\operatorname{arctg} 2 + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **35.6.** 1) $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x \leqslant -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ или $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{5\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $\pi n < x < \operatorname{arcctg} 5 + \pi n$ или $\pi - \operatorname{arcctg} 5 + \pi n < x < \pi + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **35.7.** 1) $2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{5\pi}{12} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **35.8.** 1) $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **35.9.** 1) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $-\operatorname{arctg} 2 + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$,

$n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\operatorname{arctg}\sqrt{2} + \pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi n$ или $-\operatorname{arctg}\sqrt{2} + \pi n \leqslant x < \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
35.10. 1) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\pi n < x \leqslant \frac{\pi}{2} + \pi n$ или $\frac{3\pi}{4} + \pi n \leqslant x < \pi + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{3\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < -\frac{\pi}{4} + \pi n$ или $\pi n < x < \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **35.11.** 1) $\frac{\pi}{5} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{5} + 2\pi n$, или $\pi + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{5} + 2\pi n$, или $\frac{9\pi}{5} + 2\pi n < x < 2\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant x \leqslant 2\pi n$ или $\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, или $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n$, или $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **35.12.** 1) $2\pi n < x < \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $-\frac{2\pi}{5} + 2\pi n < x < 2\pi n$, или $\frac{2\pi}{5} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, или $\frac{4\pi}{5} + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n$, или $\frac{6\pi}{5} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$ или $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{5\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ или $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Глава 5. 36.8. 1) 2; 2) 1,5; 3) 28. **36.11.** 1) –2; 2) –1. **36.12.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{6}$. **36.13.** 1) –1; 2) $\frac{1}{4}$; 3) –3. **36.14.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) –2; 3) $\frac{2}{3}$. *Указание.* $\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{(\sqrt[6]{x} - 1)(\sqrt[6]{x} + 1)}{(\sqrt[6]{x} - 1)(\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} + 1)}$. **37.7.** 8 м/с. **37.8.** 1) 20 м/с; 2) 10 м/с. **37.9.** 1) 2,6; 2) 2. **37.10.** 1) 7; 2) 12. **38.6.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$. **38.7.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **38.8.** 1) 13,5; 2) $\frac{3}{8}$; 3) $\frac{176}{3}$. **38.9.** 1) 5; 2) $\frac{3}{16}$. **38.10.** 1) $f'(x) = -\frac{3}{x^2}$; 2) $f'(x) = -2x$. **38.11.** 1) $f'(x) = \frac{2}{x^3}$; 2) $f'(x) = 2x + 3$. **38.20.** 1. Величина $s'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ задаёт мгновенную скорость материальной точки в момент времени $t_0 = \frac{1}{2}$. **38.21.** 12. **39.14.** 1) $y' = \frac{3x + 1}{\sqrt{2x + 1}}$; 2) $y' = \cos x \cos 2x - 2\sin x \sin 2x$; 3) $y' = \frac{\sin(2x + 5)}{\cos^2 x} + 2\operatorname{tg} x \cos(2x + 5)$; 4) $y' = \frac{3(1 - x)\sin 3x - \cos 3x}{(x - 1)^2}$;

5) $y' = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$; 6) $y' = -\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$. **39.15.** 1) $y' = \frac{3x+6}{2\sqrt{x+3}}$; 2) $y' = 2\cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x$; 3) $y' = (x-3)^3(x+2)^4(9x-7)$. **39.16.** 1) $y' = -6\cos^2 2x\sin 2x$; 2) $y' = \frac{\cos\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{4}\right)}{10\sqrt{\sin\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{4}\right)}}$; 3) $y' = 2\cos\frac{x}{3}\left(\sin\frac{x}{3}-5\right)^5$.

39.17. 1) $\frac{1}{2}$; 2) 0. **39.19.** $\frac{17}{9}$ м/с. **39.20.** 105 м/с. **39.21.** 16 кг · м/с. **39.22.** 400 Дж. **39.23.** 7 м. **39.24.** 1) 2; 0; 2) –6; 0. **39.25.** 1) 2; –2; 2) –10; 2. **39.29.** 1) Не дифференцируема; 2) может быть как дифференцируемой, так и недифференцируемой. *Указание*. Рассмотрите, например, функции $f(x) = |x|$ и $g(x) = -|x|$. **39.30.** 1) Может быть как дифференцируемой, так и недифференцируемой. *Указание*. Рассмотрите, например, функции $f(x) = 0$ и $g(x) = |x|$. **39.31.** $\frac{798 \cdot 3^{101}+6}{64}$. *Указание*. Рассмотрите функцию $f(x) = x^{100} + x^{98} + \ldots + x^2 + 1 = \frac{x^{102}-1}{x^2-1}$. Тогда $S = f'(3)$. **39.32.** $\frac{4^{32}-616}{25}$. *Указание*. Рассмотрите функцию $f(x) = -1 + x - x^2 + x^3 - \ldots - x^{30} = -\frac{x^{31}+1}{x+1}$. Тогда $S = 4^{30} \cdot f'\left(\frac{1}{4}\right)$. **40.1.** 1) $y = x - 1$; 2) $y = \frac{2}{3}x + 3$; 3) $y = x$; 4) $y = 2x - \pi + 1$; 5) $y = x + 4$; 6) $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$. **40.2.** 1) $y = 3x - 4$; 2) $y = -x + \frac{\pi}{2}$; 3) $y = -2{,}5x - 1{,}5$; 4) $y = 5x - 18$. **40.3.** 1) $y = -3x - 3$; 2) $y = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{2}$. **40.4.** 1) $y = -5x + 2$; 2) $y = \frac{3\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}$. **40.5.** 1) $y = 6x - 3$; 2) $y = 2x - 2$, $y = 2x + 2$. **40.6.** 1) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$; 2) $y = -3x + 9$, $y = 3x$. **40.7.** (2; 7). **40.8.** (1; 1), (–1; –1). **40.9.** 1) (4; –9); 2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{6}; -\frac{5}{4}\right)$; 3) $\left(\frac{1}{12}; \frac{3}{2}\right)$; 4) (5; 4), (–1; –2). **40.10.** 1) (0; 0); 2) (0; –1), $\left(\frac{4}{3}; -\frac{23}{27}\right)$. **40.13.** 1) $y = -1$, $y = 3$; 2) $y = 1$, $y = -7$. **40.14.** $y = -5$, $y = \frac{17}{3}$. **40.15.** 1) $y = 3x - 3$; 2) $y = 2x - 8$, $y = 2x + 19$. **40.16.** 1) $y = -7x - 9$; 2) $y = x + \frac{1}{4}$. **40.17.** Нет. **40.18.** Да, $x_0 = 0$. **40.19.** 8. **40.20.** 2. **40.21.** (1,5; –2). *Указание*. Воспользуйтесь тем, что прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда выполняется равенство $k_1k_2 = -1$. **40.22.** Нет. **40.23.** $b = c = 2$. **40.24.** $a = 3$,

$b = 1$. **40.25.** $y = 2\sqrt{2}x + 1$, $y = -2\sqrt{2}x + 1$. **40.26.** $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. **40.27.** $\left(0; \frac{7}{2}\right)$. *Указание*. Воспользуйтесь тем, что у перпендикулярных прямых произведение угловых коэффициентов равно -1. **40.28.** $(0; -3)$. **40.29.** 2. **40.30.** 0. **40.31.** $y = 8x - 20$. *Указание*. Запишите уравнения касательных к графикам функций f и g в точках $A(x_1; f(x_1))$ и $B(x_2; g(x_2))$ соответственно, а затем установите, при каких условиях эти касательные совпадают. **40.32.** $y = 8x + 4$. **41.1.** 1) Возрастает на $(-\infty; 0]$ и $[1; +\infty)$, убывает на $[0; 1]$; 2) возрастает на $[-1; 7]$, убывает на $(-\infty; -1]$ и $[7; +\infty)$; 3) возрастает на $[-1; 0]$ и $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -1]$ и $[0; 1]$; 4) возрастает на $\boldsymbol{R}$. **41.2.** 1) Возрастает на $(-\infty; -3]$ и $[1; +\infty)$, убывает на $[-3; 1]$; 2) возрастает на $[-1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -1]$. **41.3.** 1) Возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 1]$; 2) возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0)$ и $(0; 1]$; 3) возрастает на $(-\infty; -3]$ и $[3; +\infty)$, убывает на $[-3; 0)$ и $(0; 3]$; 4) возрастает на $[1; 3)$ и $(3; 5]$, убывает на $(-\infty; 1]$ и $[5; +\infty)$. **41.4.** 1) Возрастает на $(-\infty; 3]$, убывает на $[3; +\infty)$; 2) убывает на $(0; 2]$, возрастает на $(-\infty; 0)$ и $[2; +\infty)$; 3) возрастает на $(-\infty; -2]$ и $[10; +\infty)$, убывает на $[-2; 4)$ и $(4; 10]$; 4) возрастает на $(-\infty; -2)$ и $(-2; 0]$, убывает на $[0; 2)$ и $(2; +\infty)$. **41.5.** $(-\infty; x_1]$ и $[x_2; x_3]$. **41.7.** $(-\infty; -3]$ и $[3; +\infty)$. **41.12.** 1) Возрастает на $\boldsymbol{R}$; 2) возрастает на $\boldsymbol{R}$; 3) возрастает на промежутках вида $\left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{7\pi}{3} + 2\pi k\right]$, убывает на промежутках вида $\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **41.13.** 1) Убывает на $\boldsymbol{R}$; 2) возрастает на промежутках вида $\left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{7\pi}{4} + 2\pi k\right]$, убывает на промежутках вида $\left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **41.14.** 1) Возрастает на $[0; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -4]$; 2) возрастает на $[0; 3]$, убывает на $[3; 6]$. **41.15.** Возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -1]$. **41.16.** 1) $(-\infty; -3) \cup [2; +\infty)$; 2) $(-\infty; -4) \cup [2; 5)$. **41.17.** 1) $(0; 7) \cup (7; +\infty)$; 2) $[-3; 0] \cup (2; +\infty)$. **41.18.** 1) $(-\infty; 0]$; 2) $[12; +\infty)$; 3) $[0; +\infty)$; 4) $\left[-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right]$. **41.19** 1) $(-\infty; 0]$; 2) $(-\infty; -6]$; 3) $(-\infty; 0]$; 4) $[-4; 4]$. **41.20.** $[12; 14]$. **41.21.** $\left[-\frac{14}{3}; -3\right]$. **41.24.** -1. **41.25.** 0. **41.26.** 0. **41.27.** $(1; +\infty)$. *Указание*. Докажите, что функция $f(x) = x^7 - 2x^4 + 3x - 2$ возрастает на $\boldsymbol{R}$, причём $f(1) = 0$. **41.28.** $(-\infty; 1)$. **41.29.** $(1; 1)$. *Указание*. Рассмотрите функцию $f(t) = t - \sin t$. Покажите, что эта функция возрастает на $\boldsymbol{R}$. Тогда из равенства $f(x) = f(y)$

следует, что $x = y$. **41.30.** (4; 4). **41.31.** *Указание.* Рассмотрим многочлен $f(x) = x^n + ax + b$, где $n > 3$. Предположим, что он имеет не менее 4 корней. Тогда по теореме Ролля функция $y = f'(x)$, то есть функция $y = nx^{n-1} + a$, имеет не менее 3 нулей. **42.6.** 1) $x_{\min} = -2$, $x_{\max} = 2$; 2) $x_{\min} = -2$, $x_{\min} = 2$, $x_{\max} = 0$; 3) $x_{\min} = 5$, $x_{\max} = -1$; 4) $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = -1$, $x_{\max} = 1$. **42.7.** 1) $x_{\min} = -2$, $x_{\max} = 2$; 2) $x_{\min} = 1$, $x_{\max} = -7$; 3) $x_{\min} = \frac{3}{2}$; 4) $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = -\frac{1}{4}$, $x_{\max} = 1$. **42.9.** Ни одной. **42.10.** 1) Возрастает на $[6; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 6]$, $x_{\min} = 6$; 2) возрастает на $\left(-\infty; \frac{8}{5}\right]$ и $[2; +\infty)$, убывает на $\left[\frac{8}{5}; 2\right]$, $x_{\min} = 2$, $x_{\max} = \frac{8}{5}$; 3) возрастает на $[0; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0]$, $x_{\min} = 0$. **42.11.** 1) Возрастает на $[0; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0]$, $x_{\min} = 0$; 2) возрастает на $(-\infty; -4]$ и $[0; +\infty)$, убывает на $[-4; 0]$, $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = -4$. **42.14.** 1) Возрастает на $(-\infty; 0)$ и $[2; +\infty)$, убывает на $(0; 2]$, $x_{\min} = 2$; 2) возрастает на $(-\infty; 1]$ и $[3; +\infty)$, убывает на $[1; 2)$ и $(2; 3]$, $x_{\min} = 3$, $x_{\max} = 1$; 3) возрастает на $[-\sqrt{6}; 0)$ и $[\sqrt{6}; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -\sqrt{6}]$ и $(0; \sqrt{6}]$, $x_{\min} = -\sqrt{6}$, $x_{\min} = \sqrt{6}$; 4) возрастает на $(3; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 3)$, точек экстремума нет; 5) возрастает на $(-\infty; -4)$ и $(-4; 0]$, убывает на $[0; 4)$ и $(4; +\infty)$, $x_{\max} = 0$; 6) возрастает на $[0; 1]$, убывает на $[1; +\infty)$, $x_{\max} = 1$. **42.15.** 1) Возрастает на $(-\infty; -6]$ и $[2; +\infty)$, убывает на $[-6; -2)$ и $(-2; 2]$, $x_{\max} = -6$, $x_{\min} = 2$; 2) возрастает на $(-\infty; -3]$ и $[3; +\infty)$, убывает на $[-3; 0)$ и $(0; 3]$, $x_{\max} = -3$, $x_{\min} = 3$; 3) возрастает на $[0; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0]$, $x_{\min} = 0$; 4) возрастает на $(-\infty; -1)$, убывает на $(-1; +\infty)$, точек экстремума нет; 5) возрастает на $[0; 4)$ и $(4; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -4)$ и $(-4; 0]$, $x_{\min} = 0$; 6) возрастает на $\left[\frac{1}{16}; +\infty\right)$, убывает на $\left[0; \frac{1}{16}\right]$, $x_{\min} = \frac{1}{16}$. **42.18.** Нет. **42.19.** 1) Да; 2) нет; 3) нет. **42.20.** 1) Убывает на промежутках вида $\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right]$, возрастает на промежутках вида $\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right]$, $x_{\max} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x_{\min} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) возрастает на промежутках вида $\left[-\frac{\pi}{3} + \pi k; -\frac{\pi}{6} + \pi k\right]$, убывает на промежутках вида $\left[-\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{2\pi}{3} + \pi k\right]$, $x_{\max} = -\frac{\pi}{6} + \pi k$, $x_{\min} = -\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **42.21.** 1) Возрастает на промежутках вида $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right]$, убывает на промежутках вида $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right]$, $x_{\max} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $x_{\min} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 2) возрастает на промежутках вида $\left[-\frac{\pi}{8}+\pi k; \frac{\pi}{8}+\pi k\right]$, убывает на промежутках вида $\left[\frac{\pi}{8}+\pi k; \frac{7\pi}{8}+\pi k\right]$,

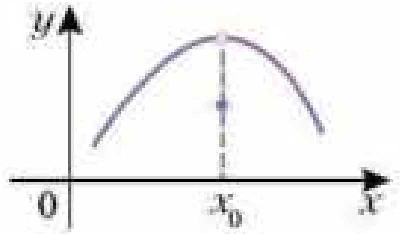


Рис. к задаче 42.26

$x_{\max} = \frac{\pi}{8} + \pi k$, $x_{\min} = -\frac{\pi}{8} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **42.22.** –3; 3. **42.23.** –1; 1. **42.26.** Может. *Указание*. См. рисунок. **42.27.** 1) $x_{\min} = \frac{\pi}{8} + \pi k$, $x_{\max} = -\frac{3\pi}{8} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x_{\min} = \pi k$, $x_{\max} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **42.28.** 1) $x_{\min} = \frac{2\pi}{3} + \pi k$, $x_{\max} = \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x_{\min} = \pi + 2\pi k$, $x_{\max} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **42.29.** $(-1; 1) \cup (1; +\infty)$. **42.30.** $(0; 1) \cup (1; +\infty)$. **42.31.** 1. **42.32.** 1. **42.33.** 1. **42.34.** 2. **43.1.** 1) 4; 0; 2) 13; 4; 3) 60; –75; 4) –4; –8. **43.2.** 1) 0; $-\frac{16}{3}$; 2) 1; –2; 3) 48; –6; 4) 0; –28. **43.3.** 1) 10; 6; 2) 5; $\sqrt{13}$; 3) 100; 0; 4) –2; –2,5. **43.4.** 1) 5; 3; 2) 2; –2; 3) 81; 0; 4) 10; 6. **43.5.** 1) $\sqrt{2}$; –1; 2) $\frac{2+\pi\sqrt{3}}{2}$; $\frac{2-\pi\sqrt{3}}{2}$. **43.6.** 1) 2; –1; 2) 2; –2. **43.7.** 8 = 6 + 2. **43.8.** 12 = 8 + 4. **43.9.** 1) $\frac{3}{2}$; 1; 2) –3; –4. **43.10.** 1) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 0; 2) 4; –2. **43.11.** 180 = 40 + 80 + 60. **43.12.** 18 = 8 + 3 + 7. **43.13.** 30 см². **43.14.** 8 см и $2\sqrt{3}$ см. **43.15.** $20\sqrt{2}$ см и $10\sqrt{2}$ см. **43.16.** $\frac{24\sqrt{5}}{5}$ см, $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ см. **43.17.** 32. **43.18.** $12\sqrt{6}$. **43.19.** 16 см. **43.20.** $2a$. **43.21.** $\frac{\pi}{3}$. **43.22.** $\frac{\pi}{3}$. **43.23.** $1{,}5R$. **43.24.** $\left(\frac{16}{9}; \frac{4}{3}\right)$. **43.25.** $\left(\frac{7}{3}; -\frac{26}{9}\right)$. **43.26.** Искомая точка находится на расстоянии 25 км от пункта C. **43.27.** 60°. **43.29.** $\frac{3}{25}$; –38. *Указание.* Исследуйте функцию на отрезках [0; 1] и [1; 2]. **43.30.** 105; $-\frac{11}{27}$. **43.31.** 4. **43.32.** –3. **44.1.** 5) $80(2x-1)^3$; 6) $-2\cos 2x$; 8) $2\cos x - x\sin x$. **44.2.** 5) $54(1-3x)$; 6) $-4\cos 2x$; 7) $2\cos 2x$; 8) $-2\sin x - x\cos x$. **44.3.** 1) –26,5; 2) 53. **44.4.** 14 м/с². **44.5.** 10 м/с², 5 м/с². **44.6.** 90 Н. **44.7.** 1) Выпуклая вверх на $(-\infty; 0]$, выпуклая вниз на $[0; +\infty)$, $x = 0$ — точка перегиба; 2) выпуклая вверх на [1; 3], выпуклая вниз на $(-\infty; 1]$ и $[3; +\infty)$, $x = 1$ и $x = 3$ — точки перегиба. **44.8.** 1) Выпуклая вверх на $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$, выпуклая вниз на $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$, $x = \frac{2}{3}$ — точка перегиба; 2) выпуклая вверх на $[1; 2]$, выпуклая вниз на $(-\infty; 1]$ и $[2; +\infty)$, $x = 1$ и $x = 2$ — точки перегиба. **44.9.** 0. **44.10.** 0. **44.13.** 1) Выпуклая вверх на каждом из промежутков $(-\infty; -\sqrt{3}]$ и $[0; \sqrt{3}]$, выпуклая вниз на каждом из промежутков $[-\sqrt{3}; 0]$ и $[\sqrt{3}; +\infty)$, $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ — точки перегиба; 2) выпуклая вверх на $(-\infty; -2]$, выпуклая вниз на $[-2; 1)$ и $(1; +\infty)$, $x = -2$ — точка перегиба. **44.14.** 1) Выпуклая вверх на $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, выпуклая вниз на $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ и $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$, $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ — точки перегиба; 2) выпуклая вверх на $(-\infty; -1)$ и $(-1; 2]$, выпуклая вниз на $[2; +\infty)$, $x = 2$ — точка перегиба. **44.15.** Выпуклая вверх на каждом из промежутков вида $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right]$, выпуклая вниз на каждом из промежутков вида $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right]$, точками перегиба являются точки вида $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. **44.16.** Выпуклая вверх на каждом из промежутков вида $\left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right]$, выпуклая вниз на каждом из промежутков вида $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right]$, точками перегиба являются точки вида $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. **45.1.** См. рисунок. **45.2.** См. рисунок. **45.3.** См. рисунок.

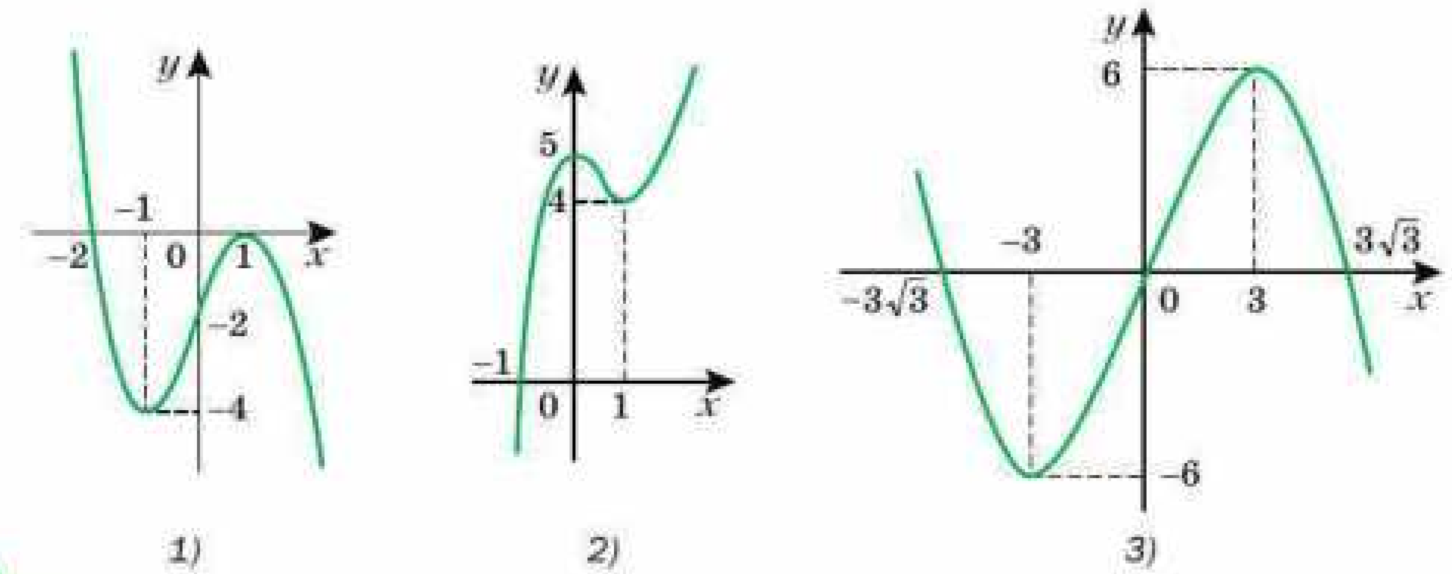


Рис. к задаче 45.1

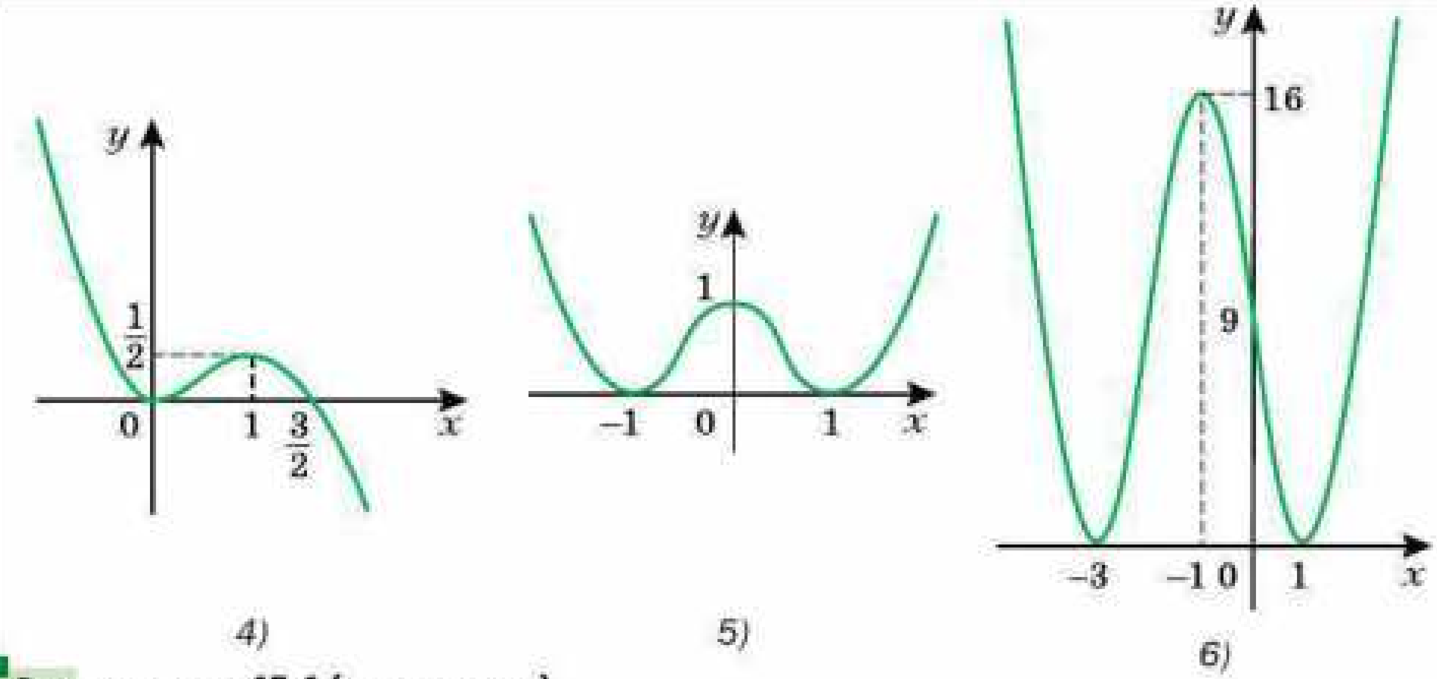


Рис. **к задаче 45.1 (окончание)**

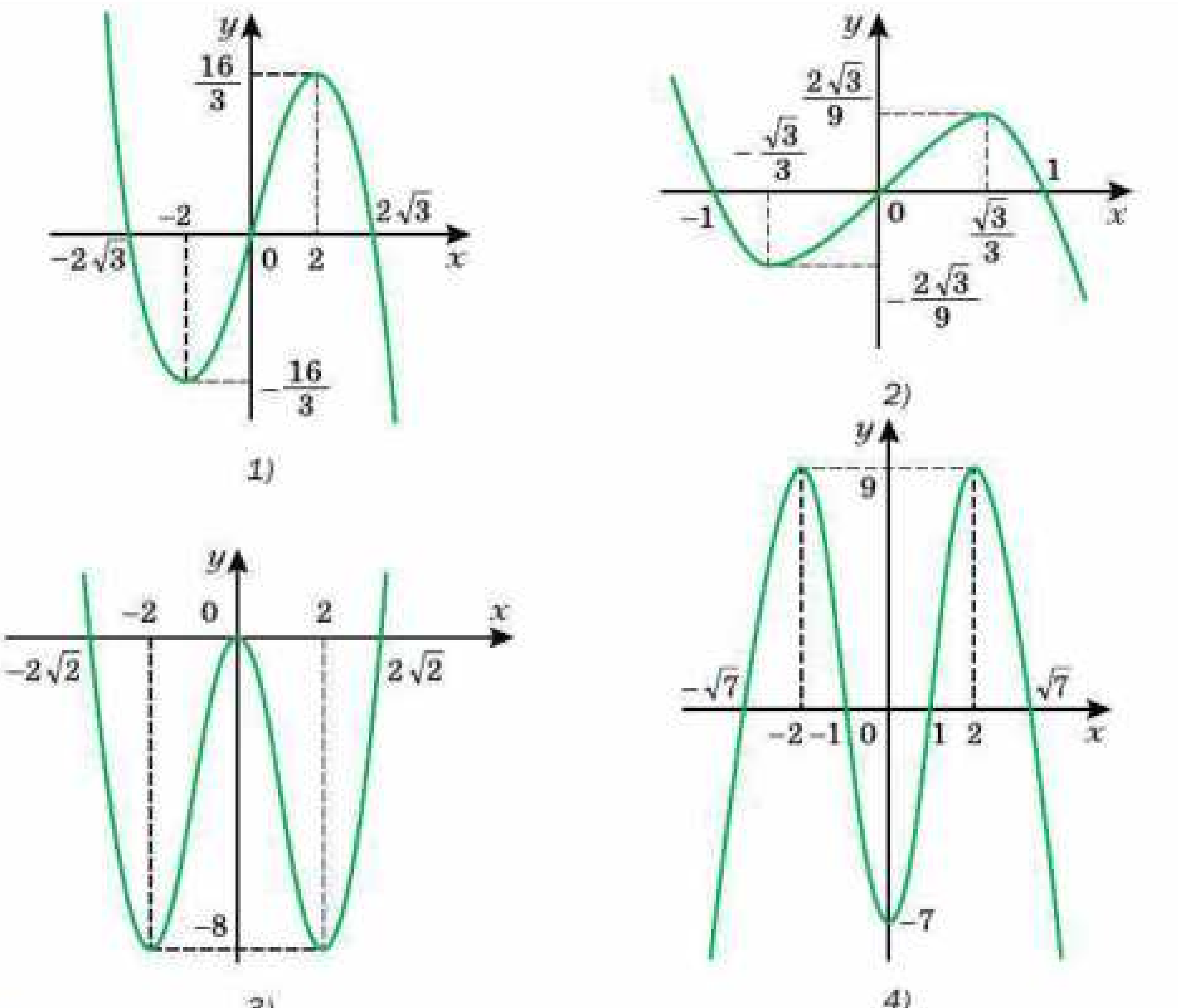


Рис. **к задаче 45.2**

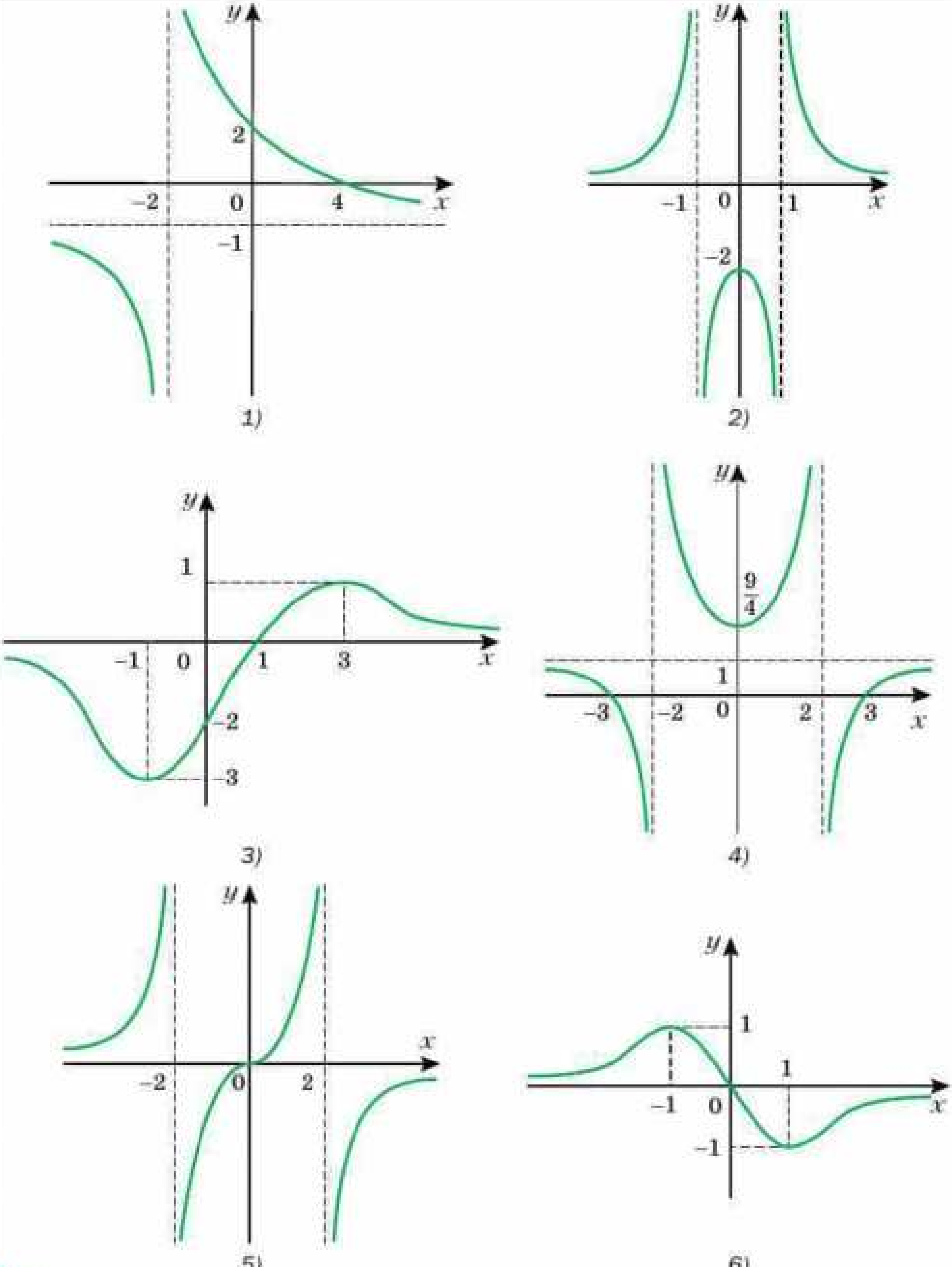


Рис. к задаче 45.3

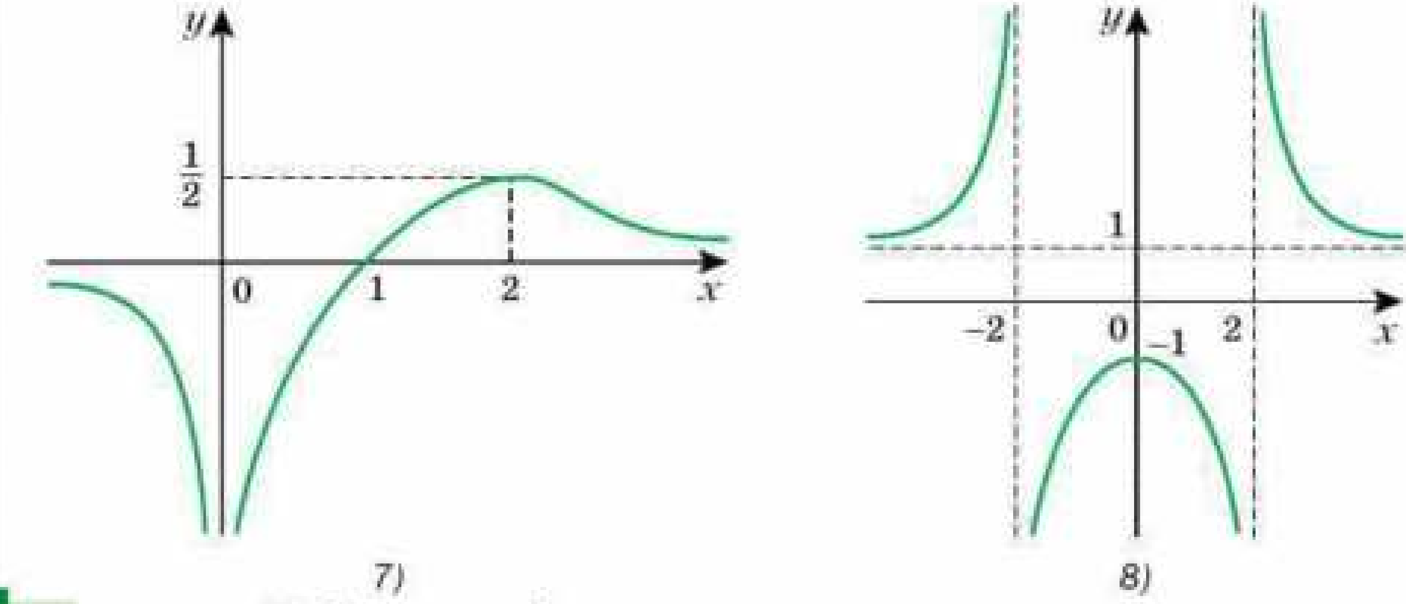


Рис. **к задаче 45.3 (окончание)**

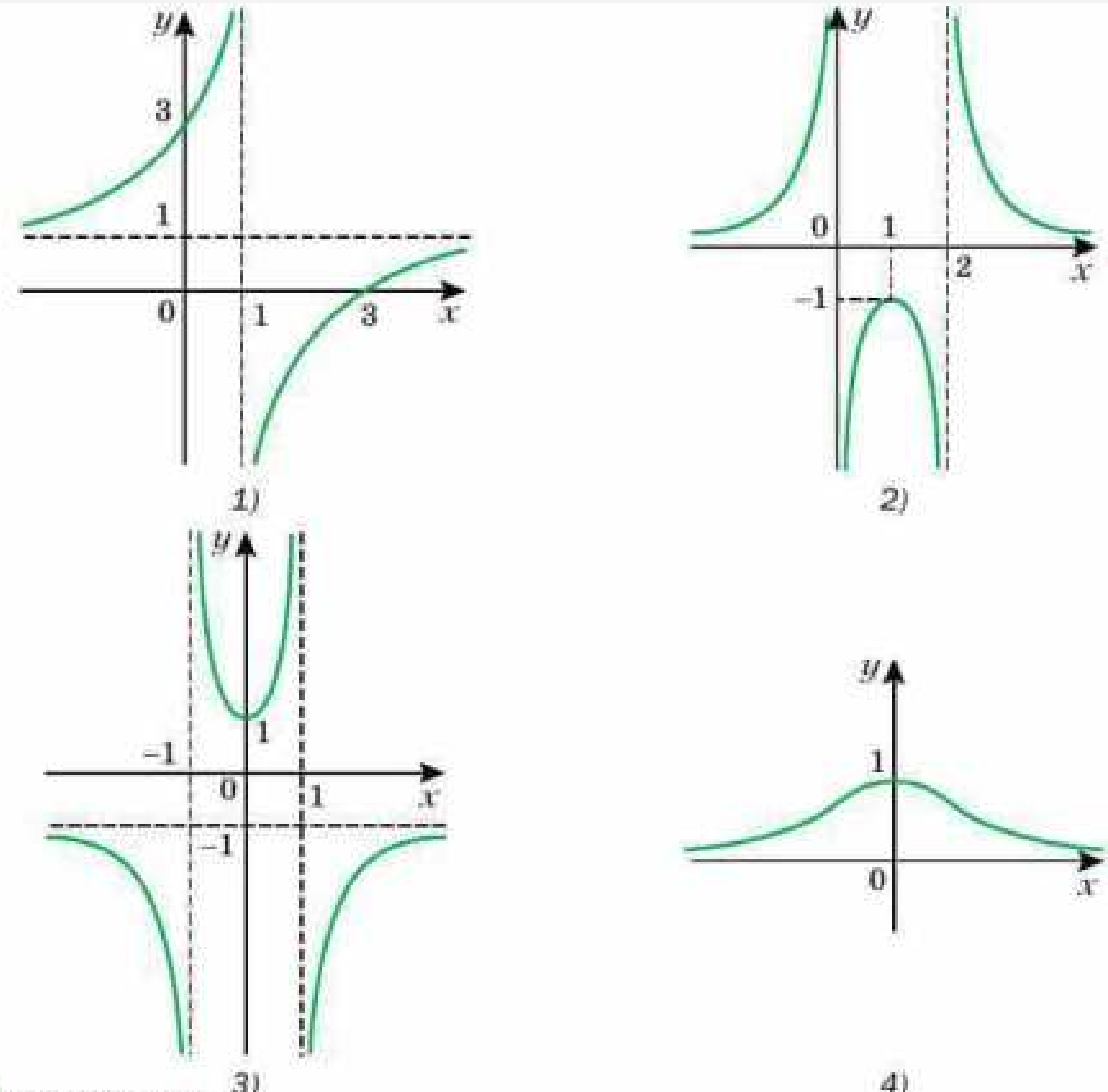


Рис. **к задаче 45.4**

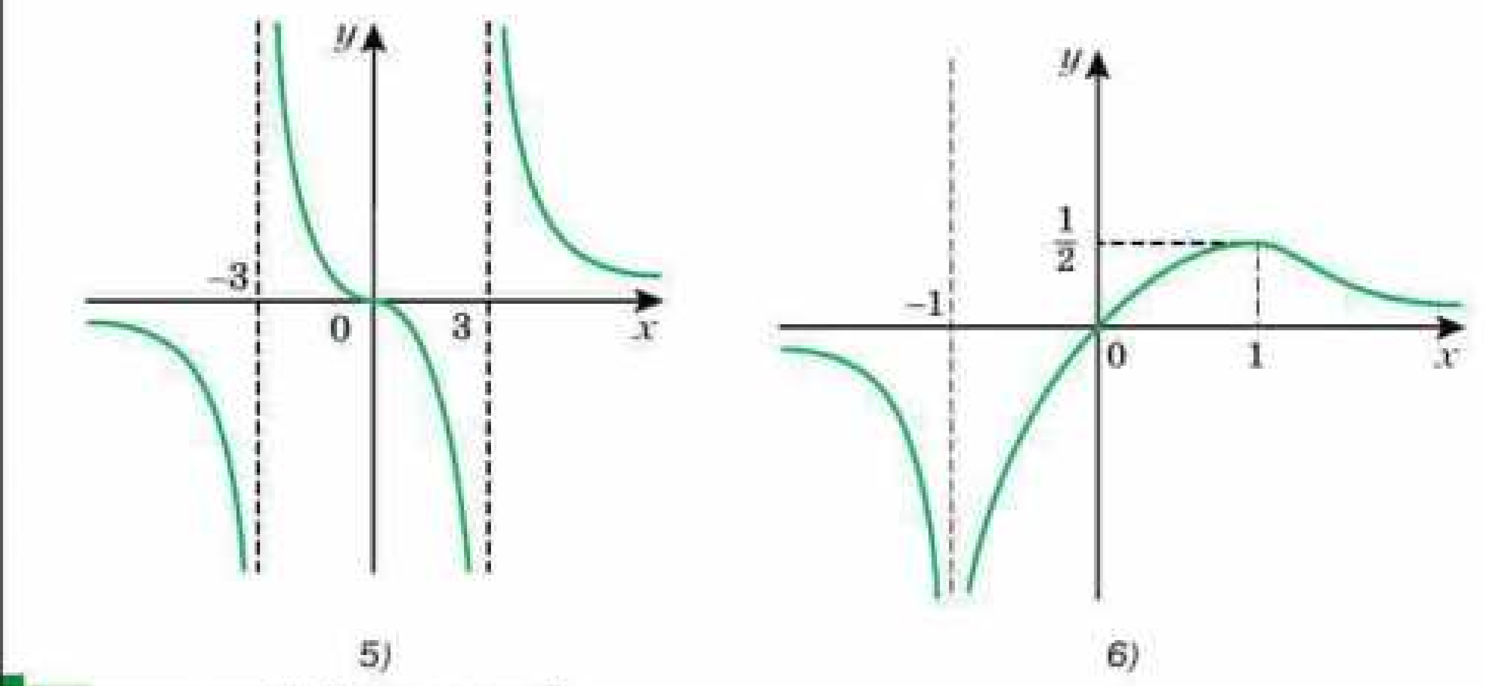


Рис. к задаче 45.4 (окончание)

45.4. См. рисунок. **45.5.** Если $a < -1$ или $a > 0$, то 1 корень; если $a = -1$ или $a = 0$, то 2 корня; если $-1 < a < 0$, то 3 корня. **45.6.** Если $a > 4$, то корней нет; если $a = 4$ или $a < 0$, то 2 корня; если $a = 0$, то 3 корня; если $0 < a < 4$, то 4 корня. **45.7.** См. рисунок. **45.8.** См. рисунок.

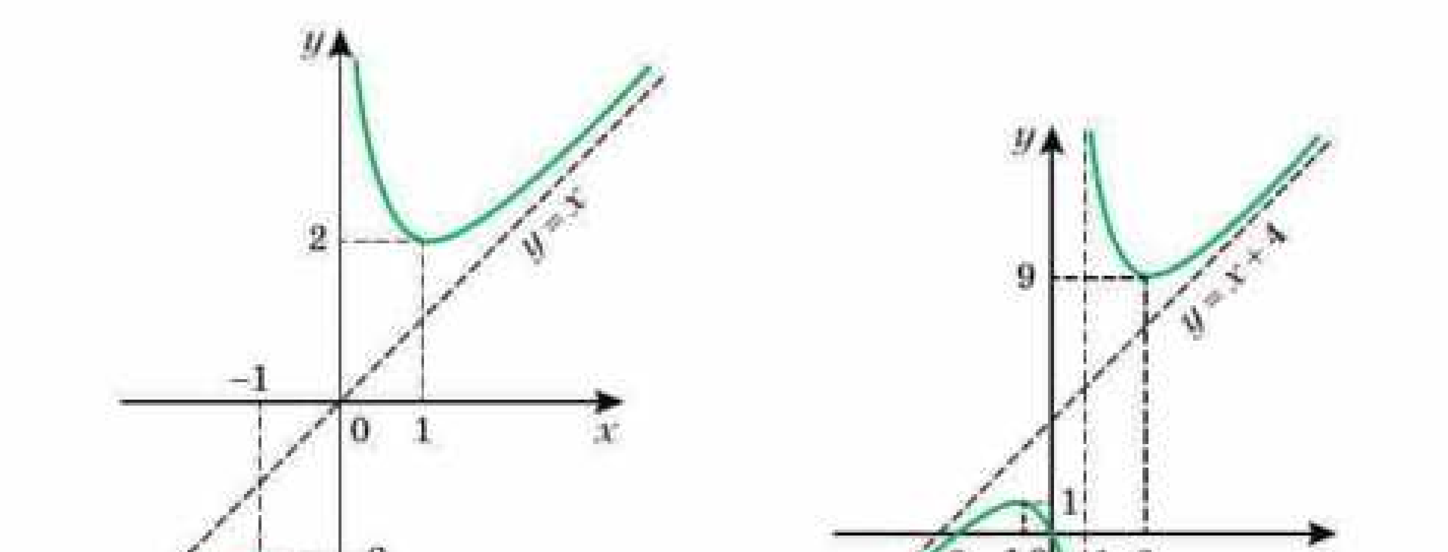


Рис. к задаче 45.7

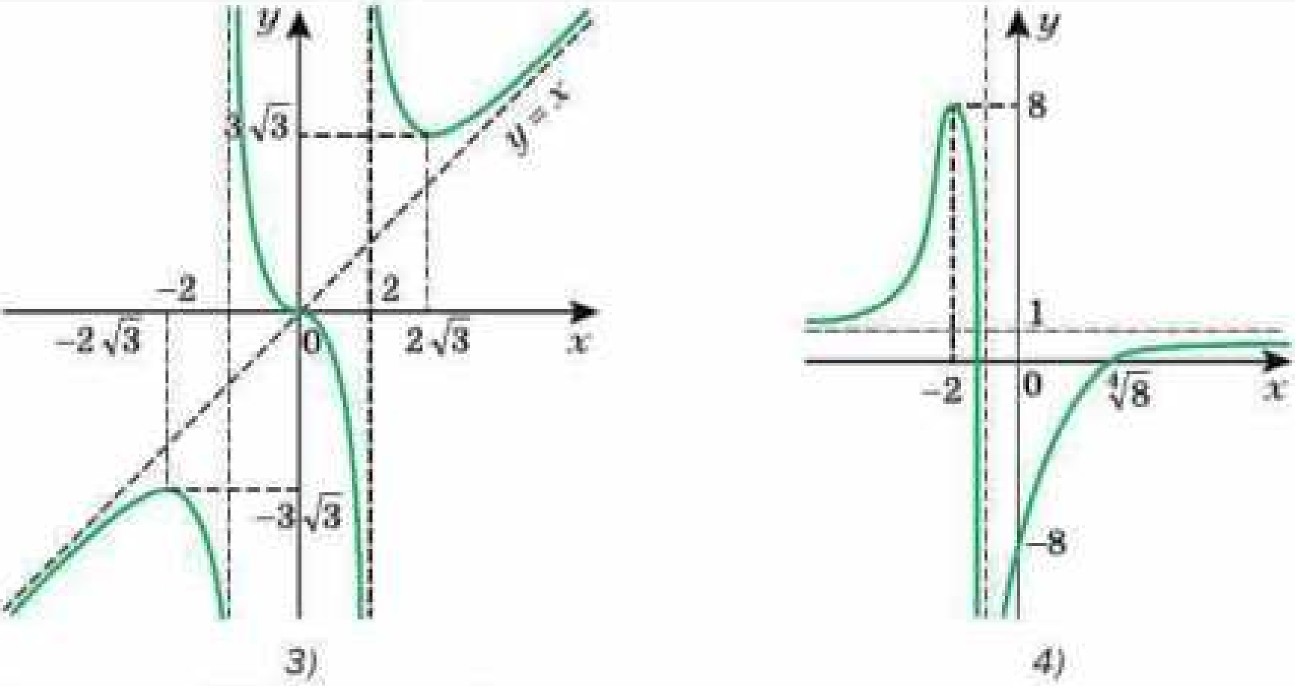


Рис. **к задаче 45.7 (окончание)**

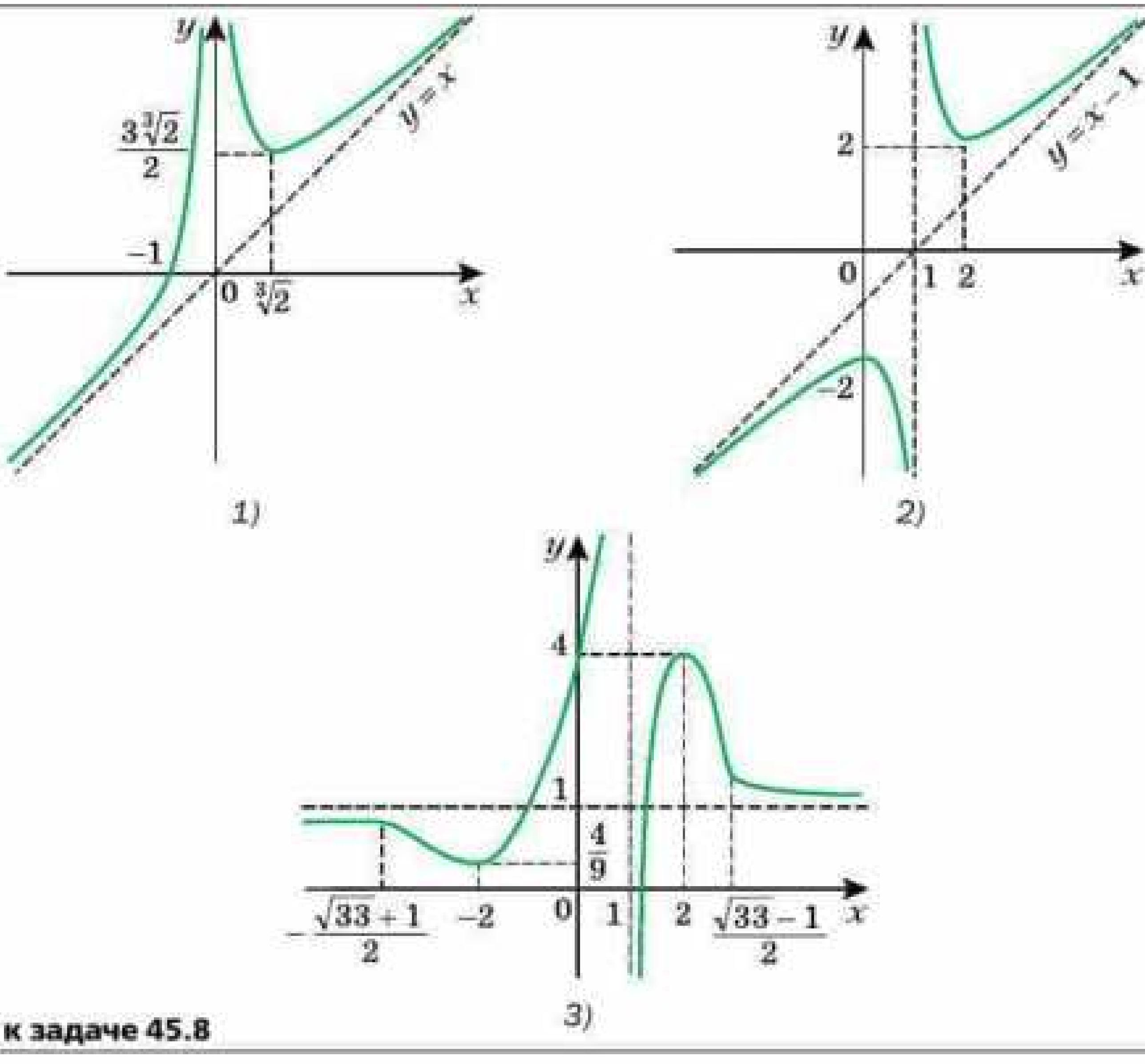


Рис. **к задаче 45.8**

Глава 6. **46.6.** *Указание*. Воспользуйтесь задачей 46.3. **46.9.** 1) Решений нет; 2) (1; 5), (9; –3), (–1; –3), (–9; 5), (3; 1), (–3; 1); 3) (4; –1), (–4; 1), (3; 1), (–3; –1); 4) (4; –3), (–11; –3), (3; –1), (–6; –1). *Указание*. $x^2 - 2xy - 3y^2 + x + y = (x + y)(x - 3y) + (x + y) = (x + y)(x - 3y + 1)$. **46.10.** 1) (3; 1), (3; –1), (–3; 1), (–3; –1); 2) (5; 1), (1; 3), (1; –5), (5; –15); 3) решений нет; 4) (0; 1), (0; –1), (–1; 1), (1; –1). **46.11.** Не существует. *Указание*. Если предположить, что такой многочлен P существует, то $(P(9) - P(1)) \vdots (9 - 1)$ (см. пример 4 § 46), а это не так. **46.12.** 1) (0; 0), (2; 2). *Указание*. Представьте уравнение в виде $(x - 1)(y - 1) = 1$; 2) (9; 2), (–5; 0), (3; 8), (1; –6). **46.13.** (2; 0), (1; –2). **46.14.** *Указание*. Запишите данное выражение в виде $(1^n + 9^n) + (2^n + 8^n) + (3^n + 7^n) + (4^n + 6^n) + 5^n$. **46.16.** *Указание*. $19(x + y) - 2(3x + 8y) = 13x + 3y$. **46.18.** *Указание*. $(3x + 10y) + (3y + 10x) = 13(x + y) \vdots 13$. Отсюда следует, что $(3y + 10x) \vdots 13$. **46.20.** *Указание*. $(\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}) \vdots 37$. **46.21.** *Указание*. $\overline{aba} = 101a + 10b = 10(a + b) + 91a$. **46.22.** *Указание*. Все делители числа n^2, кроме одного, равного n, можно разбить на пары вида $\left(d; \frac{n^2}{d}\right)$, где $d \neq \frac{n^2}{d}$. **46.23.** *Указание*. Докажите, что в записи данного числа есть три одинаковые цифры. Тогда можно зачеркнуть остальные 16 цифр. **46.24.** *Указание*. Предположим, что $x_0 \in \mathbf{Z}$ таково, что $P(x_0) = 0$. Тогда $P(x_0) - P(a) = P(x_0) - P(b) = P(x_0) - P(c) = 1$. Отсюда 3 разных числа $x_0 - a$, $x_0 - b$, $x_0 - c$ являются делителями числа 1. А это число имеет только два целых делителя. **47.6.** 0, 6, 12. **47.8.** 9. **47.10.** 1) Не существует; 2) существует, например 19. **47.17.** *Указание*. $(2n + 1)^2 = 4n(n + 1) + 1$. Покажите, что $4n(n + 1) \equiv 0 \pmod 8$. **47.22.** Все уравнения решений не имеют. *Указание*. Воспользуйтесь результатами задач 47.15, 47.16, 47.18, 47.19 соответственно. **47.23.** Все уравнения решений не имеют. *Указание*. Воспользуйтесь результатами задач 47.15, 47.16, 47.18 соответственно. **47.24.** 1) 2. *Указание*. $5^2 \equiv 1 \pmod 3$; 2) 1; 3) 0. **47.25.** 1) 4; 2) 1; 3) 1. **47.26.** Все натуральные значения n, кратные 3. *Указание*. Воспользуйтесь троичной системой счисления. **47.29.** 2, 5, 8. *Указание*. $n = 3k_1 + r_1$, $n = 6k_2 + r_2$, $n = 9k_3 + r_3$, где $r_1 \leqslant 2$, $r_2 \leqslant 5$, $r_3 \leqslant 8$. Отсюда $r_1 + r_2 + r_3 \leqslant 15$. С учётом того, что $r_1 + r_2 + r_3 = 15$, получаем: $r_1 = 2$, $r_2 = 5$, $r_3 = 8$. **47.30.** *Указание*. $4^n + 4^m \equiv 2 \pmod 3$. Далее воспользуйтесь результатами задачи 47.15. **47.31.** *Указание*. Воспользуйтесь результатами задачи 47.16. **47.32.** *Указание*. Если предположить, что все числа нечётны, то из задачи 47.17 следует, что $m^2 + n^2 + p^2 + q^2 + r^2 \equiv 5 \pmod 8$. **47.33.** 665. *Указание*. Делитель равен 9. **47.34.** 233. **47.35.** 30; 60. *Указание*. $n = 9q_1 + q_1 = 10q_1$,

$q_1 \leqslant 8$, $n = 14q_2 + q_2 = 15q_2$, $q_2 \leqslant 13$. Отсюда $n \leqslant 80$ и $n \,\vdots\, 30$. **47.36.** *Указание*. Рассмотрите числа $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{1002}$. **47.37.** *Указание*. Рассмотрите числа $1, 11, 111, \ldots, \underbrace{11\ldots1}_{n+1 \text{ единица}}$. Какие-то два из них дают при делении на n равные остатки. **48.1.** 1) 23; 2) 47. **48.2.** 1) 29; 2) 67. **48.9.** 2) Не существуют. *Указание*. $(a^3 - a) \,\vdots\, 6$. **48.12.** 3 мм. *Указание*. Длина стороны последнего квадрата равна НОД (324; 141). **48.13.** *Указание*. Среди выбранных чисел есть два последовательных. **48.14.** *Указание*. Так как НОК $(a; b) = 2^4 \cdot$ НОД $(a; b)$, то $a = 2^k \cdot$ НОД $(a; b)$, $b = 2^m \cdot$ НОД $(a; b)$. **48.16.** $x = 54$, $y = 2$ или $x = 24$, $y = 8$. *Указание*. Так как НОД $(y; (y+1)^2) = 1$, то $\dfrac{243}{(y+1)^2}$ — целое число. **48.17.** $m = 2$, $n = 6$ или $m = 6$, $n = 2$. *Указание*. Так как $mn =$ НОК $(m; n) \cdot$ НОД $(m; n)$, то НОК $(m; n)$ − НОД $(m; n)$ = $\dfrac{\text{НОК } (m; n) \text{ НОД } (m; n)}{3}$. Обозначив НОК $(m; n) = x$, НОД $(m; n) = y$, рассмотрите уравнение $3x - 3y = xy$. **48.18.** Нет. *Указание*. Указанные операции сохраняют НОД записанных на карточке чисел. **49.5.** *Указание*. Воспользуйтесь результатом задачи 49.4. **49.7.** 3. *Указание*. Воспользуйтесь тем, что числа p, $p + 26$ и $p + 28$ дают разные остатки при делении на 3. **49.8.** 3. **49.9.** *Указание*. $a^2 + 9ab + b^2 = (a - b)^2 + 11ab$. **49.11.** 3. **49.13.** $p = 3$, $q = 2$. *Указание*. Число $p^2 - 1$ кратно 8. **49.14.** $p = 3$, $q = 11$. *Указание*. Если $p \neq 3$, то $(p^2 + 2) \,\vdots\, 3$. **49.15.** 5. *Указание*. Число $2(n + 12) - (2n - 1) = 25$ кратно p. **49.16.** 7. **49.18.** *Указание*. Согласно малой теореме Ферма число $(a^{13} - a) + (b^{13} - b) + (c^{13} - c)$ кратно 13. **49.22.** *Указание*. $24^{24} - 1 = (24^6)^4 - 1 = (24^4)^6 - 1$. **49.24.** 3. *Указание*. $p^2 + 11 = (p^2 - 1) + 12$. Если $p > 3$, то $((p^2 - 1) + 12) \,\vdots\, 12$ (см. задачу 49.5), а следовательно, имеет более 6 делителей. **49.25.** *Указание*. Значение каждого из выражений $42^{47} + 1$ и $47^{42} - 1$ кратно 43. **49.26.** *Указание*. Каждое из чисел $p^q - p$ и $q^p - q$ делится нацело на pq. **50.11.** $b = -5$. **50.12.** $a = -3$, $b = -6$, $c = 8$. **50.13.** $a = 1$, $b = 1$ или $a = 3$, $b = -1$. **50.14.** *Указание*. Рассмотрите данное выражение как многочлен относительно a с параметрами b и c. Покажите, что b является корнем этого многочлена. **50.17.** Верно. *Указание*. Рассмотрим многочлен $P(x) - P(-x)$. Его степень не превосходит 99. Однако этот многочлен имеет не менее ста корней. Следовательно, он является нулевым многочленом. **51.1.** 1) −1; −3; −5; 2) −1; 2; $-\frac{1}{2}$; 3) 1; −1; $-\frac{2}{3}$; 4) 1; −2; 5) 2; −1; $\frac{1-\sqrt{33}}{4}$; $\frac{1+\sqrt{33}}{4}$; 6) −2; −3. **51.2.** 1) 1; $-\sqrt{3} - 1$; $\sqrt{3} - 1$; 2) 2; −3; 3) −1; −2; 4) 1; −1; $-\sqrt{5} - 2$; $\sqrt{5} - 2$; 5) 1; 2; $\frac{-\sqrt{17} - 5}{2}$; $\frac{\sqrt{17} - 5}{2}$; 6) 1; −2;

$-\frac{5}{3}$. **52.5.** $\frac{n}{2n+1}$. **52.6.** $\frac{n}{n+1}$. **52.9.** 1) *Указание.* $3^{2k+3} + 2^{k+3} = (3^{2k+1} + 2^{k+2}) \cdot 2 + 7 \cdot 3^{2k+1}$; 2) *Указание.* Достаточно показать, что разность $(6^{2k+2} + 19^{k+1} - 2^{k+2}) - 19(6^{2k} + 19^{k} - 2^{k+1})$ кратна 17. **52.10.** 1) *Указание.* $7^{k+2} + 8^{2k+1} = 7(7^{k+1} + 8^{2k-1}) + 57 \cdot 8^{2k-1}$.

Ответы и указания к упражнениям для повторения курса алгебры и начал анализа 10 класса

2. $A = C$. **10.** 1) $\{1\} \cup [2; +\infty)$; 2) $(-2; 0) \cup (0; +\infty)$; 4) $\{-5\} \cup [-2; +\infty)$. **11.** 1) $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$; 2) $(-\infty; -6] \cup [6; +\infty)$; 3) $\left(-\infty; -\frac{23}{12}\right]$; 4) $(-\infty; +\infty)$. **13.** Если $a < 0$, то корней нет; если $a = 0$ или $a > 1$, то 2 корня; если $a = 1$, то 3 корня; если $0 < a < 1$, то 4 корня. **16.** 2) $(-\infty; -2] \cup [-1; 1] \cup [3; +\infty)$; 4) $(-\infty; -5) \cup (-4; 0) \cup (4; 6)$; 5) $(-\infty; -1) \cup (3; 4) \cup (4; +\infty)$; 6) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \cup (3; +\infty)$; 7) $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$; 8) $(-\infty; -4] \cup \{-3\} \cup [5; +\infty)$. **17.** 1) $(-\infty; -5] \cup [4; +\infty)$; 2) $(-5; 3) \cup (3; 4)$. **18.** 2) $(-\infty; -1) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$. **19.** 1) $[3; 7] \cup \{-2\}$; 2) $(-2; 3)$. **20.** $(-3; 0] \cup (3; +\infty)$. **21.** 1) если $a = 5$, то $x < 5$ или $x > 5$; если $a < 5$, то $x < a$ или $x \geqslant 5$; если $a > 5$, то $x \leqslant 5$ или $x > a$; 2) если $a = -1$, то $x > -1$; если $a < -1$, то $a \leqslant x < -1$ или $x > -1$; если $a > -1$, то $x \geqslant a$. **29.** 1) Один корень при любом значении a; 2) если $a < 0$, то корней нет; если $a \geqslant 0$, то один корень. **31.** $-\sqrt[3]{3}$. **33.** 1) $\frac{\sqrt[4]{a}-1}{a}$; 2) $\sqrt[6]{a}$. **34.** 1) 10; 2) $\frac{25}{21}$. **35.** 1) $\frac{\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{13}{12}}}$; 2) $a^2 + ab + b^2$; 3) 3; 4) 0. **36.** 1) 4; 2) -1; 5) 5. **37.** 1) 8; 2) корней нет. **38.** 1) 16; 2) 1; 29. **39.** 1) 1; 4; 2) $-\sqrt{11}$; $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{11}$. **40.** 1) (64; 1); 2) (6; 3), (3; 1,5). **41.** 1) $\frac{7+\sqrt{13}}{6}$; 2) 2. **42.** 1) $[3; 5]$; 2) $(-\infty; -1] \cup [0; 1)$. **43.** 1) $[0; 3]$; 2) $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; 3) $(-\infty; 1)$; 4) $(-\infty; -1]$. **44.** 2) $[3; 12]$; 3) -2; 2. **45.** $\left[-1; -\frac{\sqrt{15}}{4}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{15}}{4}; 1\right]$. **46.** 3) $-2 \leqslant a \leqslant -\sqrt{2}$ или $\sqrt{2} \leqslant a \leqslant 2$. **47.** Наибольшего и наименьшего значений не существует. **48.** 2) Не является ни чётной, ни нечётной; 3) нечётная. **49.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **52.** 176π. **55.** 1) Нет. *Указание*. $\operatorname{tg} 80^\circ > \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$; 2) нет; 3) да. **56.** 1) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; 2) 1; 3) 1; 4) 4. **57.** $\frac{12}{7}$. **58.** $-2\operatorname{tg}\alpha$. **59.** $\frac{6}{7}$. **62.** 1) $-\cos\frac{\alpha}{2}$; 2) 1. **64.** 1) $\frac{56}{65}$; 2) $\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{9}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **65.** 1) $\frac{2\pi}{9}$; 2) $\frac{3\pi}{8}$. **66.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **67.** 1) $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$, $\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \frac{\pi n}{5}$,

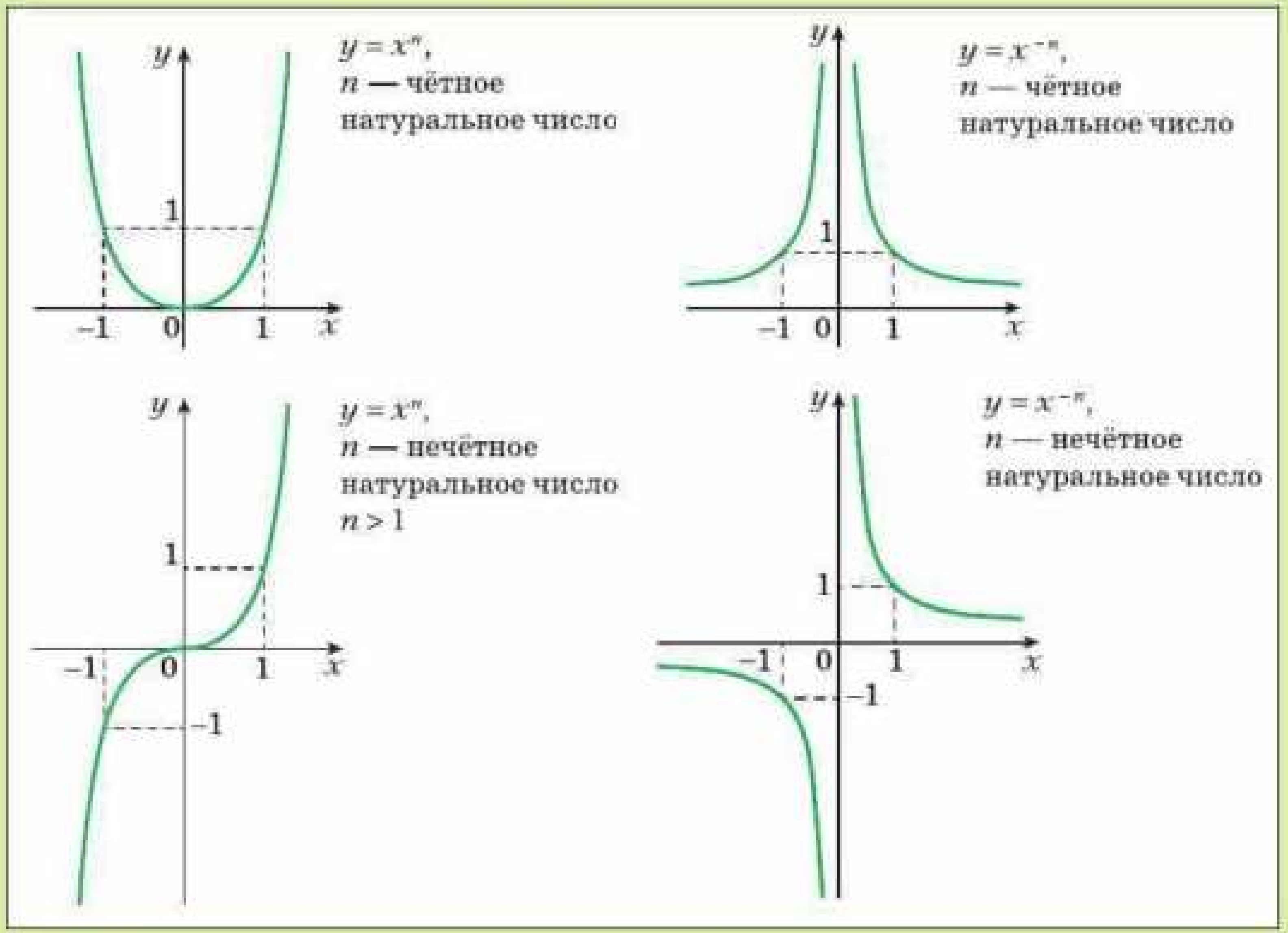
$n \in Z$; 2) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arcctg} 2+\pi n$, $n \in Z$. **68.** 1) $\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}$, $\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\frac{\pi n}{5}$, $n \in Z$; 2) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{3}{5}+\pi n$, $n \in Z$. **69.** $-\pi$. **70.** 4 корня. **71.** 1) $[-1; 2]$; 2) 3. **72.** $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, πn, $n \in Z$. **73.** 1) $a<-1$, или $a=\frac{7}{10}$, или $a>\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{7}{10}<a \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, или $\frac{1}{2}<a<\frac{7}{10}$, или $a=-1$. **74.** 1) 3; 2) $\left(\frac{1-\sqrt{10}}{2}; \frac{1+\sqrt{10}}{2}\right) \cup \left\{-\frac{13}{12}\right\}$; 3) $[1; 3] \cup \left\{-\frac{13}{12}\right\}$; 4) $\left[\frac{1-\sqrt{10}}{2}; -1\right) \cup \left[\frac{1+\sqrt{10}}{2}; 3\right)$; 5) -1; 6) $\left(-\frac{13}{12}; -1\right)$. **76.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in Z$; 2) $45^\circ+180^\circ n$, $-75^\circ+180^\circ n$, $n \in Z$. **77.** $x=\frac{-5+\sqrt{25-8k}}{2}$, $y=\frac{-5-\sqrt{25-8k}}{2}$, или $x=\frac{-5-\sqrt{25-8k}}{2}$, $y=\frac{-5+\sqrt{25-8k}}{2}$, или $x=\frac{5+\sqrt{21-8n}}{2}$, $y=\frac{5-\sqrt{21-8n}}{2}$, или $x=\frac{5-\sqrt{21-8n}}{2}$, $y=\frac{5+\sqrt{21-8n}}{2}$, $k \in Z$, $n \in Z$, $k \leqslant 3$, $n \leqslant 2$. **78.** $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $y=-3$ или $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $y=3$, $n \in Z$. **79.** 1) $\left((-1)^n \cdot \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}; (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in Z$; 2) $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n; \pi n\right)$, $\left(\pi n; -\frac{\pi}{3}+\pi n\right)$, $n \in Z$; 3) $\left(\frac{1}{6}+2n; \frac{1}{6}-2n\right)$, $n \in Z$; 4) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{6}-\pi n\right)$, $n \in Z$. **80.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in Z$, $n \neq 0$; 2) $2\pi k$, $k \in Z$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in Z$, $n \neq 0$; 3) $\frac{1}{4}+\frac{n}{2}$, $n \in Z$, $n \neq 1$. **81.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in Z$; 2) $2\pi n$, $n \in Z$. **82.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in Z$; 2) πn, $n \in Z$. **83.** $2\pi n$, $n \in Z$. **84.** $\frac{\pi k}{9}$, $k \in Z$, $k \neq 9p$, $p \in Z$. *Указание*. Воспользуйтесь формулой понижения степени. **85.** 2) $\frac{2\pi k}{3}$, $k \in Z$, $k \neq 3p$, $p \in Z$, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **86.** 1) $\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in Z$; 3) $\frac{\pi n}{5}<x<\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}$, $n \in Z$. **87.** 3) $-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}<x<-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 4) $\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{4}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **88.** 1) $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n<x \leqslant -\arccos\frac{1}{4}+2\pi n$,

$\arccos\frac{1}{4}+2\pi n \leqslant x < \frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $-\operatorname{arctg}2+\pi n < x < \operatorname{arctg}3+\pi n,$ $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n \leqslant x < \frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n < x \leqslant \pi-\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n,$ $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\operatorname{arcctg}1{,}5+\pi n < x < \pi-\operatorname{arcctg}4+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $-\frac{\pi}{3}+\pi n < x < \frac{\pi}{3}+\pi n,$ $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$. **89.** 1) $x \neq \frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $-\frac{3}{8}+2n < x < \frac{5}{8}+2n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **90.** 1) $-\frac{\pi}{3}+\pi n < x < \frac{\pi}{6}+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $-\frac{5\pi}{6}+\pi n < x < \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $x \neq \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{5\pi}{12}+\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{12}+\pi n,$ $n \in \boldsymbol{Z}$. **91.** $2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}+2\pi n,\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n \leqslant x \leqslant \pi+2\pi n,\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n \leqslant x \leqslant$ $\leqslant \frac{7\pi}{4}+2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **94.** 1) $y' = \frac{9}{x^4}-\frac{9}{x^{10}}$; 2) $y' = (x+1)^2(x-2)^3(7x-2)$. **95.** 1) $y=-2x+2$; 2) $y=-2x-\pi-1$. **96.** $y=-x-4$. **97.** Да, $x_0=1$. **98.** $y=2x-5$, $y=6x-13$. **99.** $(1; 4)$. **100.** 1) Возрастает на $[-2; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -2]$; 2) возрастает на $[2; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 2]$; 3) возрастает на $[0; 1]$ и $[2; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0]$ и $[1; 2]$; 4) убывает на $(-\infty; -3)$, $(-3; 3)$ и $(3; +\infty)$. **101.** Возрастает на промежутках вида $\left[\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$ и $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{3\pi}{4}+\pi n\right]$, убывает на промежутках вида $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **102.** $(-\infty; -3]$. **103.** 1) возрастает на $(-\infty; 0]$, убывает на $[0; +\infty)$, $x_{\max}=0$; 2) возрастает на $(0; 2]$, убывает на $(-\infty; 0)$ и $[2; +\infty)$, $x_{\max}=2$. **104.** $x_{\min} =$ $= -\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x_{\max}=\pi+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **105.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; -2.

Алфавитно-предметный указатель

Оглавление

График степенной функции



Свойства корня n-й степени

Для любого действительного a выполняются равенства

$$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a; \quad \sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$$

Если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Если $a \geqslant 0$ и $b > 0$, то $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Если $a \geqslant 0$, то $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$

Если $a \geqslant 0$, то $\sqrt[nk]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$

Если $a \geqslant 0$, то $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$

Свойства степени с рациональным показателем

Если $a > 0$ и $b > 0$, то

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \qquad a^p : a^q = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq} \qquad (ab)^p = a^p b^p$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

Таблица производных некоторых функций

Функция f	Производная f'
k (некоторое число)	0
x	1
x^{α}	$\alpha x^{\alpha - 1}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Правила дифференцирования

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$$

$$(kf)' = kf'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$$

Уравнение касательной

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

Формулы сложения

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Формулы двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

Формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \qquad \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Формулы суммы и разности синусов (косинусов)

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

Формулы преобразования произведения в сумму

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$$

Значения тригонометрических функций некоторых углов

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
0	0	1	0	—
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	—	0
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
π	0	-1	0	—
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	—	0