

## Модуль 2 «Компьютерная графика»

### Лекция 8 «Полигоны кривых и поверхностей»

к.ф.-м.н., доц. каф. ФН-11, Захаров Андрей Алексеевич,  
ауд.: 930а(УЛК)  
моб.: 8-910-461-70-04,  
email: azaharov@bmstu.ru

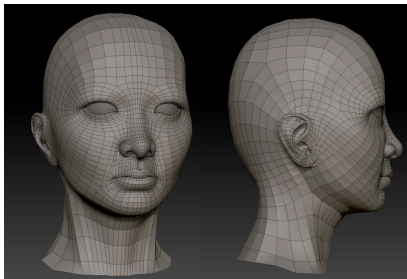


МГТУ им. Н.Э. Баумана

21 мая 2020 г.

# Визуализация геометрических объектов

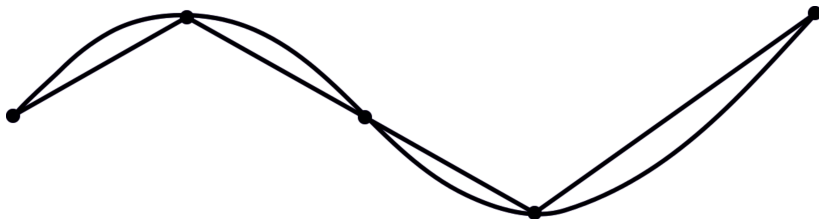
Одним из наиболее ярких применений геометрического моделирования является компьютерная графика. Исходная информация для получения изображения некоторого объекта на экране компьютера поставляется геометрической моделью этого объекта. На практике используются различные способы визуализации геометрических объектов. Наиболее простой из них — отображение линиями. Он позволяет получить общее представление об объекте, его размерах и форме. С помощью компьютера можно получить изображение моделируемого объекта, близкое к его фотографии. Геометрической модели или её частям можно придать любой цвет и освещённость. Кроме того, объект на экране можно заставить двигаться в реальном времени и тем самым получить видеofilm.



# Полигоны кривых и поверхностей

Для того, чтобы получить изображение кривой линии, мы будем использовать *полигон кривой*.

Для каждой кривой построим набор вершин, принадлежащих кривой и следующих в порядке возрастания параметра. Если соединить эти вершины отрезками, то получим ломанную линию, аппроксимирующую заданную кривую. Будем называть эту ломаную линию *полигоном* кривой. Полигоны с минимальными вычислительными затратами перемещаются, трансформируются и проецируются. Проекция на плоскость пространственной ломанной линии также является ломанной линией. Рассмотрим вычисление шага аппроксимации кривой полигоном. Шаг должен быть таким, чтобы полигон казался плавным.



## Адаптивный шаг

До сих пор мы отображали кривые используя равномерный шаг. В этом случае, в областях, где кривая близка к прямой, некоторые вершины могут быть избыточными. Наоборот, в местах, где кривизна велика, вершин может быть недостаточно для отображения гладкой кривой. Поэтому для получения более эффективного результата рендеринга используют адаптивный выбор шага.

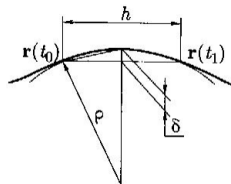
Итак, пусть задана кривая  $r(t)$  начало отсчёта которой находится в некоторой её точке  $t_0$ . Требуется найти параметр  $t_1$  следующей точки полигона, так чтобы отклонение кривой от её полигона не превышало заданную величину  $\delta$ .



## Определение шага кривой

Предположим, что в ближайшей окрестности кривая близка к своей соприкасающейся в этой точке окружности. Радиус  $\rho$  соприкасающейся окружности равен радиусу кривизны кривой и определяется по формуле

$$\rho = \frac{|\mathbf{r}'|^3}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}.$$



По теореме Пифагора квадрат половины длины хорды равен  $\rho^2 - (\rho - \delta)^2 = \delta(2\rho - \delta)$ . Длина всей хорды будет равна  $h = 2\sqrt{\delta(2\rho - \delta)}$ .

Если угол дуги достаточно мал, то можно считать, что длина хорды примерно равна длине дуги кривой, и приращение параметра  $t$  на длине дуги кривой можно принять равным

$$\Delta t \approx \frac{h}{|\mathbf{r}'|} = 2 \frac{\sqrt{\delta(2\rho - \delta)}}{|\mathbf{r}'|}. \quad (1)$$

Таким образом, параметр следующей точки полигона может быть принят равным  $t_1 = t_0 + \Delta t$ . При резком изменении направления или длины второй производной в точке  $t_1$  по сравнению с предыдущей, прогиб может оказаться значительно больше  $\delta$ . В этом случае шаг должен быть уточнен путём определения среднего радиуса кривизны кривой на рассматриваемом участке.

Формула вычисления параметрического шага между точками полигона (1) позволяет построить полигон кривой, отстоящий от самой кривой на величину, не превышающую  $\delta$ . Проекция этого полигона будет отстоять от проекции кривой также на величину, не превышающую  $\delta$ , при масштабе отображения  $1 : 1$ . Величину  $\delta$  будем называть *точностью отображения*. Для произвольного масштаба отображения  $m : 1$  проекция полигона кривой будет отстоять от проекции кривой на величину, не превышающую  $m\delta$ . Таким образом, если необходимо получить проекцию кривой в масштабе  $m : 1$  с точностью отображения  $\delta$ , надо построить полигон, точки которого находятся на параметрическом расстоянии, не превышающем

$$\Delta t \approx 2 \frac{\sqrt{\frac{\delta}{m} \left( 2\rho - \frac{\delta}{m} \right)}}{|\mathbf{r}'|}. \quad (2)$$

Шаг по параметру кривой при выполнении построений определяется углом отклонения касательной кривой и не зависит от её размеров и масштаба отображения. Шаг (2) определяется точностью отображения и зависит от размеров кривой и масштаба отображения.

## Определение шага кривой на поверхности

Шаг для полигона кривой на поверхности вычислим аналогично вычислению шага полигона кривой. Пусть точка некоторого полигона поверхности  $\mathbf{r}(t_0, \tau_0)$  определяется параметрами  $t_0$  и  $\tau_0$ . Найдем параметры  $t_1$  и  $\tau_1$  следующей точки поверхности так, чтобы пространственный отрезок из точки  $\mathbf{r}(t_0, \tau_0)$  в точку  $\mathbf{r}(t_1, \tau_1)$  отстоял от поверхности на расстоянии, не превышающем заданную величину  $\delta$ . Для этого вычислим радиус кривизны линии на поверхности, имеющей направление  $(dt, d\tau)$ . Радиус кривизны линии на поверхности определяется равенством

$$\rho = \frac{g_{11}dt^2 + 2g_{12}dtd\tau + g_{22}d\tau^2}{b_{11}dt^2 + 2b_{12}dtd\tau + b_{22}d\tau^2}, \quad (3)$$

где  $g_{11}$ ,  $g_{12}$  и  $g_{22}$  — коэффициенты первой основной квадратичной формы поверхности;  $b_{11}$ ,  $b_{12}$  и  $b_{22}$  — коэффициенты второй основной квадратичной формы поверхности. Подставим (3) в (2) и получим приращения для параметров соседней точки полигона

$$\Delta t \approx 2 \frac{\sqrt{\frac{\delta}{m} \left( 2\rho - \frac{\delta}{m} \right)}}{|\mathbf{r}_1|}; \quad \Delta \tau \approx 2 \frac{\sqrt{\frac{\delta}{m} \left( 2\rho - \frac{\delta}{m} \right)}}{|\mathbf{r}_2|},$$

где  $\mathbf{r}_1 = \partial \mathbf{r} / \partial t$ ;  $\mathbf{r}_2 = \partial \mathbf{r} / \partial \tau$ .

С помощью полигонов можно строить изображения кривых, поверхностей, тел и других более сложных моделей.

**Определение 2.** Совокупность полигонов геометрической модели называется *сеткой полигонов* или просто *сеткой*.

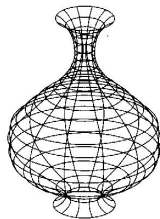
Сетка кривой состоит

из одного полигона, сетка поверхности — из полигонов её границ и нескольких полигонов её  $t$ - и  $\tau$ -линий. В частных случаях для полигонов  $t$ -линий получим  $\rho_t = g_{11}/b_{11}$ , а для полигонов  $\tau$ -линий —  $\rho_\tau = g_{22}/b_{22}$ . Шаги вдоль координатных  $t$ - и  $\tau$ -линий поверхности будем вычислять по формулам

$$\Delta t \approx 2 \frac{\sqrt{\frac{\delta}{m} \left( 2 \frac{g_{11}}{b_{11}} - \frac{\delta}{m} \right)}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right|}; \quad \Delta \tau \approx 2 \frac{\sqrt{\frac{\delta}{m} \left( 2 \frac{g_{22}}{b_{22}} - \frac{\delta}{m} \right)}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} \right|}. \quad (4)$$

Сетка тела состоит из полигонов поверхностей его граней. Отображение геометрических моделей полигонами обладает универсальностью и простотой.

Для получения параллельной или центральной проекции полигона достаточно вычислить проекции его точек и соединить их отрезками.



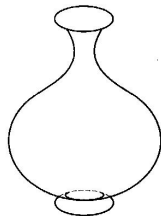


В некоторых случаях для каркасного отображения поверхности или тела граничных и координатных линий недостаточно. Каждая поверхность одной из своих сторон может быть направлена к наблюдателю и тогда эта сторона будет видимой. В противном случае сторона поверхности будет не видна из точки наблюдения. Может случиться так, что только часть стороны поверхности будет видимой. В этом случае на поверхности можно построить линию, разделяющую видимую и невидимую части поверхности.

**Определение 3.** Линии, отделяющие видимую часть поверхности или грани объекта от невидимой, называются силуэтными линиями.

Расположение силуэтных линий зависит от ориентации отображаемого объекта и положения наблюдателя.

Силуэтные линии могут проходить как по ребрам моделей, так и внутри отдельных граней. В последнем случае силуэтные линии называют линиями очерка. На примере отдельной поверхности рассмотрим построение её линий очерка.



При переходе через линию очерка нормаль поверхности меняет направление по отношению к линии взгляда. Линией взгляда будем называть линию, проходящую через точку наблюдения и точку модели. В точках линии очерка нормаль поверхности ортогональна линии взгляда. В общем случае у поверхности линий очерка может быть несколько. Каждая линия очерка является пространственной кривой. Она или замкнута, или оканчивается на краях поверхности. Для разных направлений взгляда существует своя совокупность линий очерка, поэтому при повороте поверхности линии очерка необходимо строить заново. Каждая точка линии очерка для параллельной проекции на плоскость удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}(t, \tau) = 0, \quad (5)$$

где  $\mathbf{v}$  — вектор направления линии взгляда, параллельный нормали плоскости проекции;  $\mathbf{n}(t, \tau)$  — нормаль к поверхности  $\mathbf{r}(t, \tau)$ , для которой строится линия очерка.

Точки линии очерка для центральной проекции удовлетворяют уравнению

$$(\mathbf{r}(t, \tau) - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}(t, \tau) = 0, \quad (6)$$

где  $\mathbf{n}(t, \tau)$  — нормаль поверхности  $\mathbf{r}(t, \tau)$ ;  $\mathbf{w}$  — радиус-вектор точки наблюдения.

В обобщённом виде:

$$\mathbf{v}(t, \tau) \cdot \mathbf{n}(t, \tau) = 0. \quad (7)$$

Для поверхности, описываемой радиусом-вектором  $\mathbf{r}(t, \tau)$ , нормаль  $\mathbf{n}(t, \tau)$  также является функцией параметров  $t$  и  $\tau$ . Скалярное уравнение (7) содержит два искоемых параметра  $t, \tau$ . Если задать один из параметров, то другой можно найти из уравнения (7), т. е. один из параметров является функцией другого параметра. Для равноправия параметров их можно представить в виде функций некоторого общего параметра  $u$

$$t = t(u), \quad \tau = \tau(u).$$

Результатом решения уравнения (5) или (6) является линия

$$\mathbf{c}(u) = \mathbf{r}(t(u), \tau(u)) \quad (8)$$

на поверхности  $\mathbf{r}(t, \tau)$ . Эта пространственная кривая и есть линия очерка поверхности.

Алгоритм построения линий очерка поверхности можно разбить на два этапа.

На первом этапе для нахождения линий очерка поверхности нужно сначала найти хотя бы по одной точке на каждой линии. Двигаясь по поверхности и исследуя знак скалярного произведения  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  в соседних точках, найдем пары точек поверхности, в которых  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  меняет знак. Взяв в качестве нулевого приближения средние значения параметров этих точек, одним из численных методов найдем параметры  $t$  и  $\tau$  точки линии очерка. Пусть, например, при переходе из точки  $(t_1, \tau_1)$  в близкую к ней точку  $(t_2, \tau_2)$   $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  меняет знак. Тогда, положив  $t^0 = (t_1 + t_2)/2$ ,  $\tau^{(0)} = (\tau_1 + \tau_2)/2$ , с помощью итерационного процесса метода Ньютона

$$t^{(k+1)} = t^{(k)}, \quad \tau^{(k+1)} = \tau^{(k)} - \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_2 + \mathbf{n} \cdot (\partial \mathbf{v} / \partial \tau)} \right)^{(k)}, \quad \mathbf{n}_2 = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \tau} \quad (9)$$

или итерационного процесса

$$t^{(k+1)} = t^{(k)} - \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{n} \cdot (\partial \mathbf{v} / \partial t)} \right)^{(k)}, \quad \tau^{(k+1)} = \tau^{(k)}, \quad \mathbf{n}_1 = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} \quad (10)$$

найдем параметры одной из точек линии очерка. Производные нормали  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  определяются формулами Вейнгартена. Таким способом получим набор отдельных точек линий очерка. Эти точки никак не связаны друг с другом и могут принадлежать различным линиям очерка. Важно только, чтобы от каждой линии очерка в наборе присутствовала хотя бы одна точка.

На втором этапе берем любую точку из имеющегося набора и, двигаясь от неё с некоторым шагом сначала в одну сторону, потом в другую, находим точку за точкой искомую совокупность точек линии очерка. Направление движения даёт вектор

$$\mathbf{l} = \pm \frac{\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}}{|\mathbf{r}_1|} \pm \frac{\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}}{|\mathbf{r}_2|}, \quad (11)$$

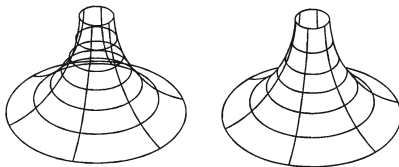
где  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  — частные производные нормали  $\mathbf{n}(t, \tau)$ ,  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  — частные производные радиус-вектора  $\mathbf{r}(t, \tau)$  поверхности по параметрам  $t$  и  $\tau$ . Знак перед слагаемым  $(\mathbf{n}_i \times \mathbf{n})/|\mathbf{r}_i|$ ,  $i = 1, 2$  совпадает со знаком скалярного произведения  $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{v}$ . Если

$$\frac{\mathbf{l} \cdot \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|} > \frac{\mathbf{l} \cdot \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|},$$

то дадим приращение параметру  $t$  в соответствии с кривизной поверхности и найдем соответствующий ему параметр  $\tau$  поверхности. В противном случае дадим приращение параметру  $\tau$  в соответствии с кривизной поверхности и найдем соответствующий ему параметр  $t$  поверхности. Движение по кривой закончим, когда дойдем до края поверхности или когда линия замкнется (новая точка окажется на расстоянии текущего шага от точки старта).

В процессе построения точек линии очерка будем проверять, не лежат ли вблизи них точки из набора, полученного вначале. Для этого будем вычислять расстояние от текущей точки кривой очерка до каждой точки из имеющегося набора. Если вычисленное расстояние до какой-либо точки набора соизмеримо с текущим шагом движения, то эту точку удалим из набора как более не нужную. Так получим совокупность отдельных точек  $(t_i, \tau_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  одной линии очерка. При этом в наборе точек, полученном вначале, не будет содержаться ни одной точки данной линии. Если в наборе остаются ещё точки, то данная поверхность имеет, по крайней мере, ещё одну линию очерка. Совокупность её точек найдем, взяв любую точку из набора и повторив второй этап построения. Построение линий закончим, когда в наборе не останется ни одной точки.

## Определение видимой части моделей



При построении изображений определение видимой части геометрических объектов сводится к задаче удаления невидимых линий. Сетки полигонов строятся для всех поверхностей тел. Часть полигонов может оказаться закрытой от взгляда наблюдателя. При удалении невидимых линий изображения приобретают более реалистический вид. Задача построения таких изображений сводится к задаче удаления невидимых линий.

С помощью силуэтных линий можно раскроить поверхность отображаемого объекта на невидимые и условно видимые области. Пусть вектор взгляда  $\mathbf{v}$  направлен от наблюдателя. Тогда невидимыми будут те области поверхности, скалярное произведение нормали поверхности  $\mathbf{n}$  и вектора взгляда которых положительно:  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} > 0$ . Области поверхности, скалярное произведение нормали поверхности и вектора взгляда которых отрицательно, будут видимы при условии, что они не закрыты другими видимыми областями поверхности, более близкими к точке наблюдения.

# Триангуляция поверхностей

При решении некоторых задач сложные криволинейные поверхности приходится заменять набором элементов простой формы. Этот прием используется при численном интегрировании в методе конечных элементов при определении соударений элементов конструкции или при расчёте прочности, а также при визуализации.

С набором треугольных элементов легче работать, чем с поверхностью общего вида. Для треугольника достаточно быстро вычисляются расстояние до заданной точки или точка пересечения с заданной прямой в пространстве. Треугольные элементы с минимальными вычислительными затратами перемещаются, трансформируются в пространстве.

Аппроксимация треугольными элементами граней выполняется для визуального восприятия геометрической модели, поэтому стороны треугольников выбираются, такими, чтобы треугольные элементы отстояли от реальной поверхности на расстояние, не превышающее некоторой заданной величины  $\delta$ , и глаз не мог заметить изломы.

Задача разбиения поверхности на треугольные элементы решается в плоскости параметров поверхности и является двумерной.

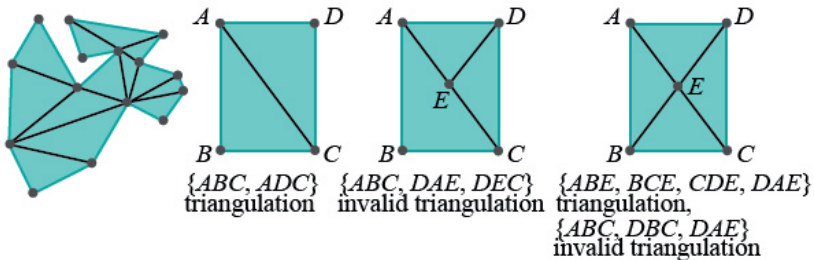


# Триангуляция плоскости

**Определение 4.** *Триангуляцией* плоскости называется построение на плоскости конечного числа треугольников, не перекрывающих друг друга и стыкующихся между собой по общим сторонам и вершинам.

Пусть на плоскости задан набор двумерных точек. Требуется разбить указанную область на треугольники, вершинами которых являются заданные точки. Треугольники не должны накладываться друг друга, а их стороны могут пересекаться только в вершинах. Стороны, соединяющие вершины треугольников, называют *ребрами*.

**Утверждение** Пусть даны  $n \geq 3$  точек и не все из них коллинеарны. Пусть, кроме того,  $i$  из них являются внутренними (лежат внутри выпуклой оболочки). Тогда при любом способе триангуляции будет получено  $n + i - 2$  треугольников.

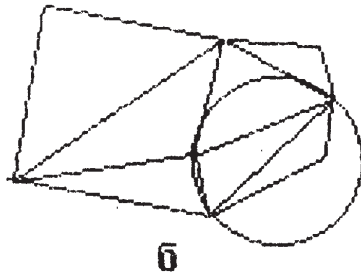
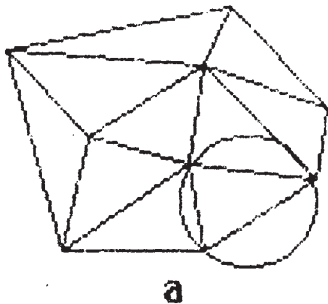


Задача триангуляции может иметь несколько решений, поэтому существуют различные типы триангуляции, обладающие характерными свойствами.

Для определения «качества» получаемой триангуляции существует немало критериев, включающих, в частности, максимизацию наименьшего угла или минимизацию полной длины ребер. Выбор указанных условий объясняется их удобством для получения оценки ошибки интерполяции. Рассмотрим два метода триангуляции, часто встречающиеся на практике: жадная триангуляция и триангуляция Делоне.

**Определение 6.** Триангуляция называется *жадной*, если она построена с помощью жадного алгоритма. «Жадными» называют алгоритмы, которые никогда не отменяют то, что было сделано ранее.

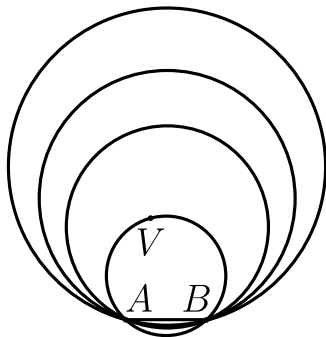
Жадный алгоритм триангуляции выполняет следующие действия: вычисляет расстояния между всеми парами заданных вершин будущей триангуляции, сортирует их по возрастанию и, начиная с минимального расстояния, по сортированным парам вершин строит ребра треугольников, проверяя их на пересечение с уже имеющимися. Если новое ребро пересекает хотя бы одно уже построенное ребро, то новое ребро отбрасывается. Если все расстояния между вершинами различные, то жадная триангуляция однозначна, в противном случае она зависит от последовательности вставки ребер одинаковой длины.



**Определение 7.** Триангуляция называется *триангуляцией Делоне*, если внутри описанной вокруг любого треугольника окружности отсутствуют вершины других треугольников.

Триангуляция Делоне (названа в честь русского математика Бориса Николаевича Делоне) строит треугольники по возможности близкие к равносторонним (не допускает построение неоправданно вытянутых треугольников) и поэтому наиболее часто применяется на практике.

Триангуляция Делоне будет уникальной, если никакие четыре вершины не лежат на одной окружности.



Найдем пару точек, расстояние между которыми меньше расстояния между любой другой парой точек, и построим между этими точками ребро  $AB$ .

Через вершины  $A$ ,  $B$  и любую, не лежащую с ними на одной прямой, вершину  $V$  можно провести окружность. Центр окружности, проходящей через точки  $A$ ,  $B$ , и  $V$ , лежит на пересечении перпендикуляров к серединам отрезков  $AB$ ,  $VB$  и  $AV$ .

Пусть вершины  $A$ ,  $B$  и  $V$  описываются двумерными радиусами-векторами  $\mathbf{a} = (x_a, y_a)$ ,  $\mathbf{b} = (x_b, y_b)$ ,  $\mathbf{v} = (x_v, y_v)$  соответственно. Построим прямую

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} y_a - y_b \\ x_b - x_a \end{pmatrix}, \quad (12)$$

перпендикулярную отрезку  $AB$ , проходящую через его середину и прямую

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_v + x_b \\ y_v + y_b \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} y_v - y_b \\ x_b - x_v \end{pmatrix}, \quad (13)$$

перпендикулярную отрезку  $VB$  и проходящую через его середину.

Пересечение прямой (12) с прямой (13) найдем, решив систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x_a + x_b) + t(y_a - y_b) = \frac{1}{2}(x_v + x_b) + w(y_v - y_b); \\ \frac{1}{2}(y_a + y_b) + t(x_b - x_a) = \frac{1}{2}(y_v + y_b) + w(x_b - x_v) \end{cases} \quad (14)$$

относительно параметров прямых  $t$  и  $w$ , определяющих положение точки пересечения на прямых. Из системы (14) параметр  $t$  равен

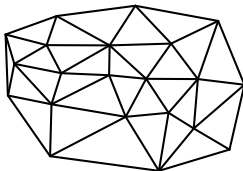
$$t = \frac{1}{2} \frac{(x_v - x_b)(x_v - x_a) + (y_v - y_b)(y_v - y_a)}{(y_v - y_b)(x_b - x_a) + (x_v - x_b)(y_b - y_a)}. \quad (15)$$

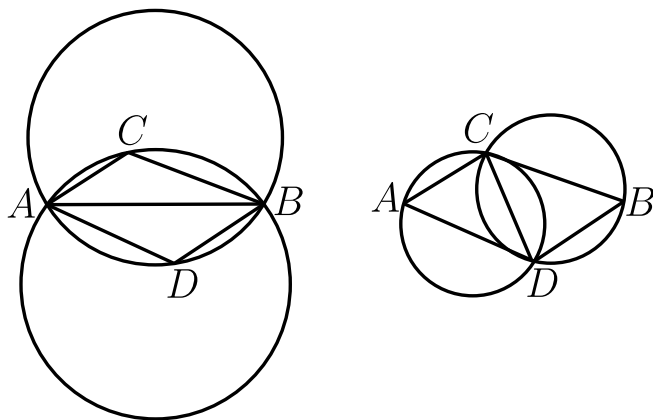
Если центр окружности лежит на середине отрезка  $AB$ , то  $t = 0$ , если слева от отрезка  $AB$ , то  $t > 0$ , если справа от отрезка  $AB$ , то  $t < 0$ .

## Триангуляция Делоне

В качестве третьей вершины треугольника Делоне выберем вершину  $V$ , соответствующая которой окружность не содержит других вершин. Для ближайшей слева к отрезку  $AB$  вершины параметр  $t$  имеет минимальное значение, а для ближайшей справа к отрезку  $AB$  вершины — максимальное.

В общем случае для ребра можно найти две ближайшие вершины: одну слева от ребра, другую справа от ребра, и, таким образом, построить два смежных треугольника Делоне. Для ребра, относительно которого все заданные точки лежат только с одной стороны, можно найти только одну ближайшую вершину. Ребро последнего типа будем называть *граничным*. Алгоритм построения триангуляции Делоне работает до тех пор, пока для каждого уже имеющегося внутреннего ребра не будут построены два смежных треугольника, а для каждого граничного ребра не будет построен один треугольник. В результате получим триангуляцию внутренней области выпуклого многоугольника, содержащего все заданные вершины.





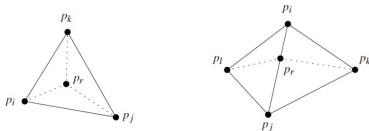
Триангуляцию Делоне можно получить из любой другой триангуляции, последовательно перестраивая смежные пары треугольников  $ABC$  и  $ADB$ , не удовлетворяющие условию Делоне, в пары треугольников  $ADC$  и  $BCD$ , удовлетворяющие условию Делоне. Эта операция называется *перебрасыванием ребра (edge flip)*.



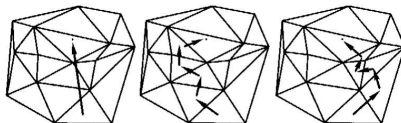
**Определение 7.** Построение триангуляции путём последовательного добавления точек в частично построенную триангуляцию называется *итеративной триангуляцией*.

В данном подходе сначала определяется положение новой вершины относительно имеющейся триангуляции, и в зависимости от результата выполняются те или иные действия. Если она совпадает с имеющейся вершиной, никаких действий не проводят. Если новая вершина попадает на некоторое ребро, то оно разбивается два ребра, и смежные с ребром треугольники также делятся на два меньших. Если новая вершина попала внутрь какого-либо треугольника, то добавим ребра, соединяющие новую вершину с вершинами этого треугольника. Если новая вершина не попадает внутрь триангуляции, то находят граничные ребра, с которыми она может образовывать новые треугольники.

Во всех случаях, когда появляются новые треугольники, проводят проверку выполнения условия Делоне для новых треугольников и соседних с ними. При нарушении этого условия проводится локальное перестроение триангуляции с помощью перебрасывания недопустимых ребер.



# Итеративная триангуляция Делоне



Наиболее трудоемкой частью выполняемых действий в итеративной триангуляции является поиск треугольника, в который попадает новая вершина. Если нет никакой закономерности между вставляемыми вершинами, то поиск начинают с произвольного треугольника. На рис. приведены три простейших способа локализации новой вершины в частично построенной триангуляции.

В первом случае строится отрезок прямой из некоторой точки начального треугольника во вставляемую вершину и поиск осуществляется вдоль этого отрезка. Во втором случае движение осуществляется от треугольника к смежному треугольнику через ребро, пересекаемое прямой, проходящей через центр текущего треугольника и вставляемой вершиной. В третьем случае движение осуществляется от треугольника к смежному треугольнику через любое ребро, относительно которого вставляемая вершина и противоположная ребру вершина текущего треугольника лежат по разные стороны.

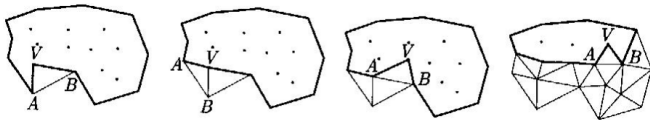
## Триангуляция Делоне ограниченной области

В практических задачах триангуляции кроме заданных вершин присутствуют дополнительные условия, которые, как правило, осложняют задачу. Такие задачи называют триангуляцией с ограничениями. Чаще всего дополнительными условиями являются некоторые кривые, которые должны тем или иным образом соотноситься с триангуляцией. В одних случаях кривые должны быть вписаны в триангуляцию, в других — триангуляция должна вписаться в заданные кривые.

Рассмотрим двумерную область параметров поверхности, ограниченной замкнутой ломанной линией, содержащей набор точек внутри этой области. Для решения подобных задач алгоритм триангуляции Делоне можно модифицировать следующим образом. Сориентируем ограничивающую область ломаную линию так, чтобы область лежала слева от неё, если смотреть навстречу нормали поверхности. На каждом участке ломанной линии построим ребро. Каждую заданную точку и вершину ломаной будем называть вершиной триангуляции. Ребра и вершины, участвующие в алгоритме триангуляции, будем называть *активными*. Вначале активными являются все ребра и вершины. Построение треугольников начнём с произвольного граничного ребра. Для каждого ребра будем искать ближайшую активную вершину, которая лежит слева от него и соответствующая окружность которой не содержит других вершин.

## Триангуляция Делоне ограниченной области

Пусть для граничного ребра  $AB$  найдена ближайшая вершина  $V$ . Для этой вершины правая часть (15) принимает наименьшее значение. Проверим не пересекают ли отрезки  $AV$  и  $BV$  активные ребра, т.е. можно ли построить треугольник  $ABV$ . Если построение возможно, то построим треугольник  $ABV$  и переведем ребро  $AB$  в разряд неактивных. Неактивными будем называть ребра и вершины, которые не участвуют в алгоритме триангуляции. Если среди граничных ребер отсутствует ребро  $BV$ , то на отрезке  $VB$  построим новое граничное ребро. Если же среди граничных ребер есть ребро  $BV$ , то переведем его и вершину  $B$  в разряд неактивных. Если среди граничных ребер отсутствует ребро  $VA$ , то на отрезке  $AV$  построим новое граничное ребро. Если же среди граничных ребер есть ребро  $VA$ , то переведем его и вершину  $A$  в разряд неактивных. В процессе триангуляции происходит изменение ломанной линии, образованной активными граничными ребрами. При этом область, подлежащая триангуляции, уменьшается.



**Рис.:** Процесс триангуляции: активные ребра показаны толстыми линиями, а неактивные ребра — тонкими

## Триангуляция Делоне ограниченной области

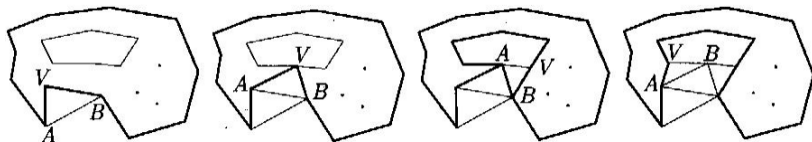


Рис.: Процесс триангуляции области с одним внутренним вырезом

Описанный алгоритм можно использовать и для областей, внутри которых есть не принадлежащие им «вырезы», описываемые ломанными линиями. В этом случае по границе вырезов также построим ребра на участках ломанных линий, сориентировав их так, чтобы область лежала слева от ребер. Эти ребра участвуют в триангуляции наравне с ребрами внешней границы. В процессе триангуляции рано или поздно произойдет слияние внешних и внутренних граничных линий, образованных активными ребрами. Триангуляцию закончим, когда будет построен последний треугольник и все вершины и ребра станут неактивными.

# Триангуляция поверхностей

Триангуляция поверхности представляет собой аппроксимацию поверхности треугольными элементами (треугольниками). Эту аппроксимацию называют *триангуляционной сеткой*. Несмотря на то, что аппроксимирующие элементы являются пространственными объектами, задача триангуляции поверхности является двумерной, так как она выполняется в плоскости параметров поверхности.

Триангуляция для визуализации имеет своей целью аппроксимацию поверхности моделируемого объекта треугольными элементами, отстоящими от неё на расстоянии, не превышающем некоторой заданной величины  $\delta$ . Все треугольные элементы должны стыковаться между собой по краям. Их вершины лежат на поверхности. С треугольными элементами легче работать, чем с породившей их поверхностью. Для треугольных пластин достаточно быстро вычисляются расстояние до заданной точки и точка пересечения с заданной прямой в пространстве.

В результате триангуляции поверхности получим массив вершин треугольников, массив нормалей поверхности в вершинах. Нормали требуются для определения поведения световых лучей, взаимодействующих с поверхностью модели. Построение триангуляции выполняется на двумерных точках  $\mathbf{p}_i = (t_i, \tau_i)$  области параметров поверхности, каждая из которых соответствует вершине треугольника, поэтому далее, говоря о вершинах, будем иметь ввиду соответствующую ей двумерную точку.

## Триангуляция поверхностей

Если область определения параметров поверхности  $\mathbf{r}(t, \tau)$  представляет собой прямоугольник  $t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$ ,  $\tau_{\min} \leq \tau \leq \tau_{\max}$ , то выполним триангуляцию поверхности следующим образом. Разобьем область определения параметров поверхности на прямоугольные ячейки линиями  $t_i = \text{const}$  и  $\tau_j = \text{const}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Параметрические расстояния  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$  между соседними линиями  $t_i = \text{const}$  в соответствии с первой формулой (4) возьмём равными

$$\Delta t_i = \min \left( 2 \frac{\sqrt{\frac{\delta}{m} \left( 2 \frac{g_{11}(t_i, \tau)}{b_{11}(t_i, \tau)} - \frac{\delta}{m} \right)}}{\sqrt{g_{11}(t_i, \tau)}} \right) \quad \text{для всех } \tau_{\min} \leq \tau \leq \tau_{\max}, \quad (16)$$

Параметрические расстояния  $\Delta \tau_j = \tau_{j+1} - \tau_j$  между соседними линиями  $\tau_j = \text{const}$  в соответствии со второй формулой (4) примем равными

$$\Delta \tau_j = \min \left( 2 \frac{\sqrt{\frac{\delta}{m} \left( 2 \frac{g_{22}(t, \tau_j)}{b_{22}(t, \tau_j)} - \frac{\delta}{m} \right)}}{\sqrt{g_{22}(t, \tau_j)}} \right) \quad \text{для всех } t_{\min} \leq t \leq t_{\max}. \quad (17)$$

# Триангуляция поверхностей

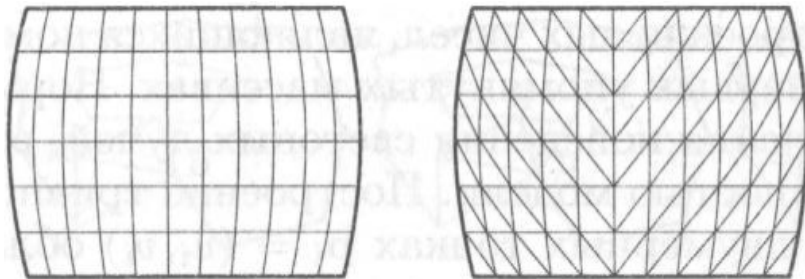


Рис.: Триангуляция поверхности вращения

Построив диагонали во всех прямоугольных ячейках, получим триангуляцию поверхности, удовлетворяющую предъявленным требованиям.

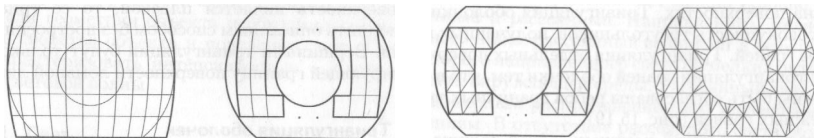


В общем случае область определения параметров поверхности  $\mathbf{r}(t, \tau)$  описывается несколькими непересекающимися замкнутыми составными кривыми. Одна из кривых описывает внешнюю границу, а остальные кривые — внутренние вырезы, которые содержатся «внутри» внешней границы. Каждая граничная кривая является пространственной кривой, но описывается двумерной кривой  $\mathbf{c}(w) = (t(w), \tau(w))$  в области определения параметров. Двумерные граничные кривые являются контурами — замкнутыми составными кривыми. Сведем задачу триангуляции поверхности со сложной границей к задаче триангуляции ограниченной области с заданными точками внутри.

# Триангуляция поверхностей

Аппроксимируем граничные кривые замкнутыми ломанными линиями, а внутри области зададим точки, которые должны стать вершинами треугольников. За положительное направление для каждого граничного контура примем направление, при движении вдоль которого область определения поверхности находится слева от контура, если смотреть навстречу нормали поверхности. Пройдем по граничным контурам поверхности с некоторым вычисляемым шагом и получим точки, которые будут вершинами ломанных линий. Шаг при переходе от одной вершины к другой будем определять из условия, чтобы прогиб в пространстве участка граничной кривой между соседними точками не превосходил бы заданную величину  $\delta$ . Параметрические расстояния  $\Delta w$  между вычисляемыми точками для кривой  $\mathbf{r}(w) = \mathbf{r}(t(w), \tau(w))$  граничных контуров поверхности вычислим по формуле (2). Каждая ломанная состоит из упорядоченного набора двумерных точек  $\mathbf{p}_i(t_i, \tau_i)$ . Участки ломанной будем использовать в качестве активных ребер триангуляции Делоне, а точки полигонов, на которых базируются ребра, будем использовать в качестве вершин триангуляции.

# Триангуляция поверхностей



Внутри области определения поверхности зададим точки, которые должны стать вершинами треугольников. Для этого построим прямоугольную сетку для области  $t_{\min} \leq t \leq t_{\max}$ ,  $\tau_{\min} \leq \tau \leq \tau_{\max}$ , где  $t_{\min}$ ,  $t_{\max}$ ,  $\tau_{\min}$ ,  $\tau_{\max}$  определяют габаритный прямоугольник внешнего граничного контура. Параметрические расстояния  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$  между соседними линиями  $u_i = \text{const}$  вычислим по формуле (16), а параметрические расстояния  $\Delta \tau_j = \tau_{j+1} - \tau_j$  между соседними линиями  $\tau_j = \text{const}$  — по формуле (17). В качестве внутренних вершин триангуляции возьмём узлы сетки, которые лежат внутри граничных ломанных. Тем самым сведем задачу триангуляции поверхности к рассмотренной ранее задаче. Для ускорения построений внутри ячеек сетки, целиком лежащих в области определения параметров поверхности, можно построить треугольники.

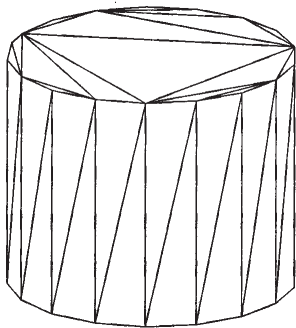
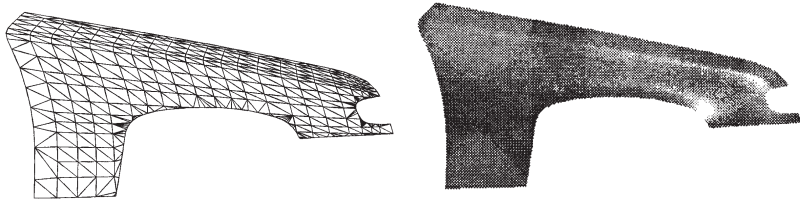


Рис.: Согласованность граничных полигонов граней тела

Триангуляция тела представляет собой совокупность треугольников, полученных путём триангуляции поверхностей его граней. Триангуляция отдельных поверхностей отличается от триангуляции граней тела тем, что в последнем случае должны быть согласованы граничные полигоны для смежных граней. Участки полигонов смежных граней, проходящие по общим ребрам, будут согласованными, если их точки совпадают в пространстве.



Построенные в результате триангуляции треугольники используются для получения тоновых изображений.

Разбиение области определения параметров поверхности на треугольники может быть использовано в интегралах при вычислении геометрических характеристик тел. При численном интегрировании параметрический шаг  $\Delta t$  для кривых следует вычислять по формуле (1), а для поверхностей параметрические шаги  $\Delta t$  и  $\Delta \tau$  следует вычислять по формулам (2) лекции 7.