一阶倒立摆动力学方程推导

1. 一阶倒立摆控制系统及其工作原理

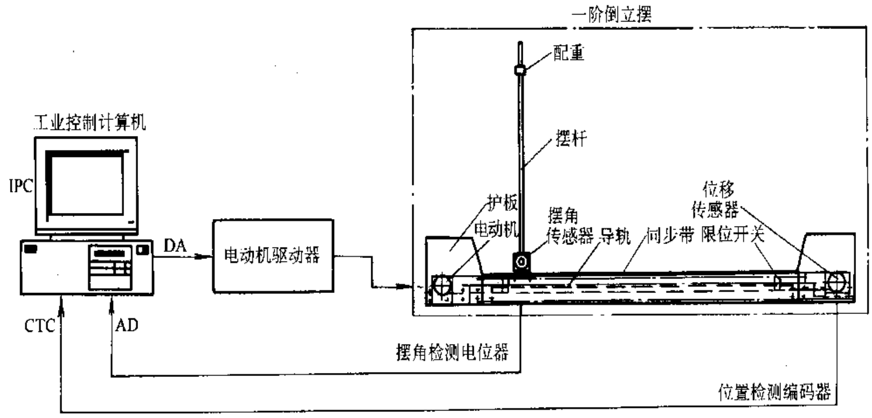


图 1 一阶倒立摆控制系统模型

由轴角编码器测得小车的位置和摆杆相对垂直方向的角度，作为系统的**两个输出量**被反馈至控制计算机。计算机根据一定的控制算法，计算出控制量，并转化为相应的电压信号提供给驱动电路，以驱动直流力矩电机的运动，从而通过牵引机构带动小车的移动来控制摆杆和保持平衡。

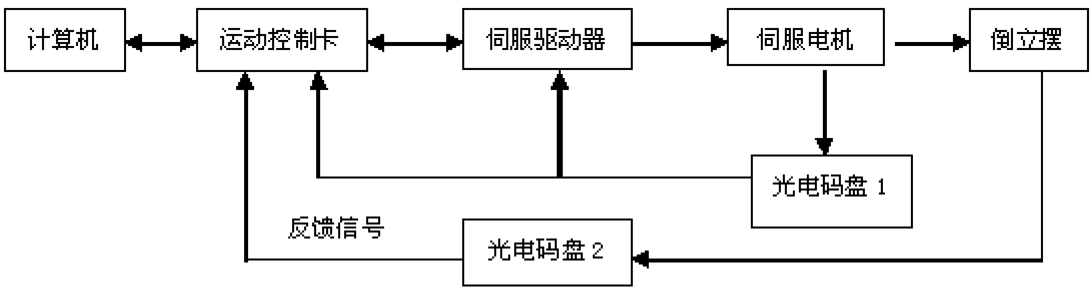


图 2 一阶倒立摆控制系统示意图

2. 一阶倒立摆控制系统建模

2.1 牛顿-欧拉法

1）第一种推导

在忽略了空气流动阻力，以及各种摩擦之后，可将倒立摆系统抽象成小车和匀质杆组成的系统，如下图所示，

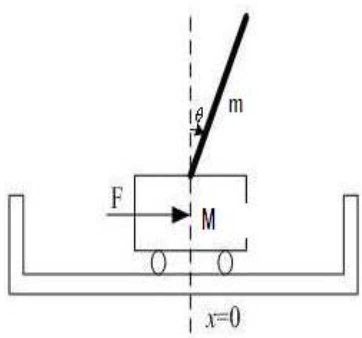
M：小车质量　　　　　x：小车位置

m：为摆杆质量　　　　J：为摆杆惯量

F：加在小车上的力

l ：摆杆转动轴心到杆质心的长度

θ：摆杆与垂直向上方向的夹角



根据牛顿运动定律以及刚体运动规律，可知：

（1） **摆杆**绕其重心的转动方程为（以重心为转动中心）

$$J\ddot{\theta} = F_y l\sin\theta - F_x l\cos\theta ....(1)$$

（2） **摆杆**重心的运动方程为（直线运动）

$$F_x = m\frac{d^2}{d^2t}(x + l\sin\theta)..........(2)$$

$$F_y = mg - m\frac{d^2}{d^2t}(l\cos\theta).........(3)$$

得

（3）**小车**水平方向上的运动为

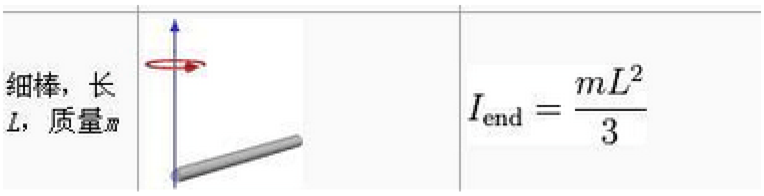
$$F - F_x = M\frac{d^2x}{d^2t}..........(4)$$

联立上述 4 个方程，可以得出

一阶倒立摆数学模型：

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{\left(J+ml^2\right)F + ml\left(J+ml^2\right)\sin\theta.\dot{\theta}^2 - m^2l^2g\sin\theta\cos\theta}{\left(J+ml^2\right)\left(M+m\right) - m^2l^2\cos^2\theta} \\ \ddot{\theta} = \dfrac{ml\cos\theta.F + m^2l^2\sin\theta\cos\theta.\dot{\theta}^2 - \left(M+m\right)m\lg\sin\theta}{m^2l^2\cos^2\theta - \left(M+m\right)\left(J+ml^2\right)} \end{cases}$$

式 中 J 为 摆 杆 的 转 动 惯 量 ： $J = \dfrac{ml^2}{3}$



细棒，长 L，质量 m		$I_{\mathrm{end}} = \dfrac{mL^2}{3}$

若只考虑θ在其工作点附近θ$_0$=0 附近（$-10^\circ \le \theta \le 10^\circ$）的细微变化，则可以近似认为：

$$\begin{cases} \dot{\theta}^2 \approx 0 \\ \sin\theta \approx \theta \\ \cos\theta \approx 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{(J+ml^2)F - m^2l^2g\theta}{J(M+m) + Mml^2} \\ \ddot{\theta} = \dfrac{(M+m)m\lg\theta - mlF}{J(M+m) + Mml^2} \end{cases}$$

若取小车质量 M=2kg,摆杆质量 m=1kg,摆杆长度 2 l =1m,重力加速度取 g= $10m/s^2$,则可以得

一阶倒立摆简化模型：

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0.44F - 3.33\theta \\ \ddot{\theta} = -0.4F + 12\theta \end{cases} \xrightarrow{\text{拉氏变换}} \begin{cases} \dfrac{\theta(s)}{F(s)} = \dfrac{-0.4}{s^2 - 12} \\ \dfrac{x(s)}{\theta(s)} = \dfrac{-1.1s^2 + 10}{s^2} \end{cases}$$

（3） 简单的二阶动力学方程如何化为传递函数

$$y'' + Jy' = ku \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

x 为 n 维状态向量； y 为 m 维输出向量； u 为 r 维输入向量； A 为 $n \times n$ 维系统矩阵，由系统参数决定； B 为 $n \times r$ 维输入矩阵； C 为 $m \times n$ 维输出矩阵； D 为 $m \times r$ 维矩阵，直接联系输入量、输出量的前向传递（前馈）系数，又称前馈系数

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -Jx_2 + ku \end{cases}$$

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$， u 为标量； $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -J \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}$， $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$， $D = 0$

另一种变形

$$y'' + Jy' + ay = ku$$

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = ax_1 - Jx_2 + ku \end{cases}$$

（4） 高阶动力学方程如何化为传递函数（**套用公式**）

传递函数中没有零点时的实现

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_0 u(t)$$

相应的系统传递函数为

$$W(s) = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \\ \vdots \\ x_{n-1} = y^{n-2} \\ x_n = y^{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_0x_1 - a_1x_2 - \cdots - a_{n-2}x_{n-1} - a_{n-1}x_n + u \end{aligned}$$

输出方程为

$$y = b_0x_1$$

表示成矩阵形式

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b} u$$

$$y = \underbrace{(b_0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0)}_{c}\, x$$

例题：

$$\dddot{y} + 5\ddot{y} + 8\dot{y} + 6y = 3u$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-8&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix}u$$

$$-a_0 \quad -a_1 \quad -a_2 \qquad \beta_0$$

$$y=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

传递函数中没有零点时的实现

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1\dot{y}+a_0y=b_mu^{(m)}+b_{m-1}u^{(m-1)}+\cdots+b_1\dot{u}+b_0u$$

$$G(s)=\frac{b_0s^n+b_1s^{n-1}+\cdots+b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}\\ \dot{x}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}u$$

$$\boldsymbol{y}=((b_0-a_0b_n),\ (b_1-a_1b_n),\ \cdots,\ (b_{n-1}-a_{n-1}b_n))\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{pmatrix}+b_nu$$

例题：

$$\dddot{y}+4\ddot{y}+2\dot{y}+y=\ddot{u}+\dot{u}+3u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Matlab 命令：

2) 第二种推导

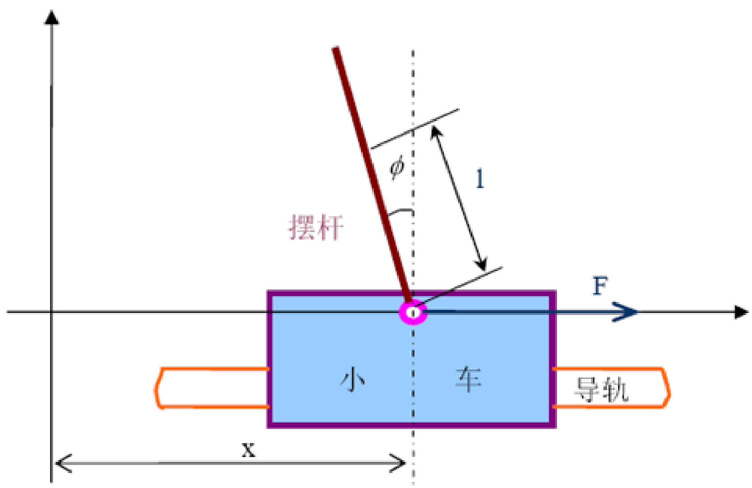


图 2 一阶倒立摆模型

M 小车质量，m 摆杆质量，b 小车摩擦系数，l 摆杆转动轴心到杆质心的长度，I 摆杆惯量，F 加在小车上的力，x 小车位置，φ 摆杆与垂直向上方向的夹角，θ **摆杆与垂直向下方向的夹角（考虑到摆杆初始位置为竖直向下）**

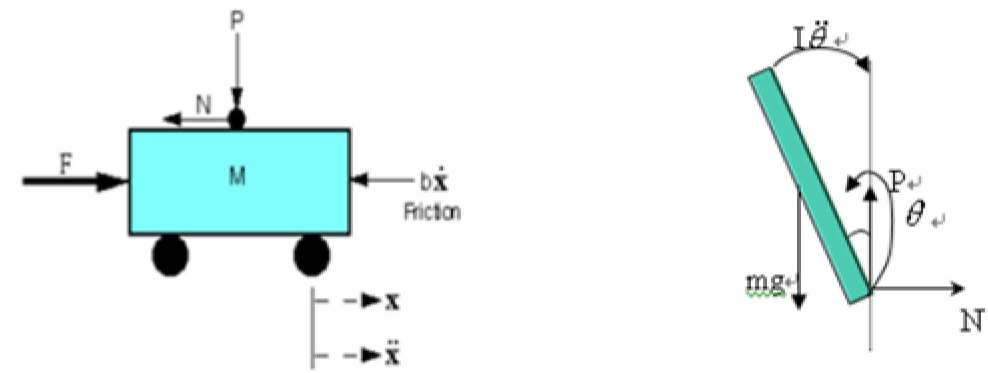


图 3 受力分析

图 3 是系统中小车和摆杆的受力分析图。其中，N 和 P 为小车与摆杆相互作用力的水平和垂直方向的分量。注意：在实际倒立摆系统中检测和执行装置的正负方向已经完全确定，因而矢量方向定义如图所示，图示方向为矢量正方向。
分析小车水平方向所受的合力，可以得到以下方程：

$$M\ddot{x} = F - b\dot{x} - N \tag{3-1}$$

由摆杆水平方向的受力进行分析可以得到下面等式：

$$N = m\frac{d^2}{dt^2}(x + l\sin\theta) \tag{3-2}$$

即：

$$N = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta \tag{3-3}$$

把这个等式代入式(3-1)中，就得到系统的**第一个运动方程**：

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F \tag{3-4}$$

为了推出系统的第二个运动方程，我们对**摆杆垂直方向上**的合力进行分析，
可以得到下面方程：

$$P - mg = m\frac{d^2}{dt^2}(l\cos\theta) \tag{3-5}$$

$$P - mg = -ml\ddot{\theta}\sin\theta - ml\dot{\theta}^2\cos\theta \tag{3-6}$$

力矩平衡方程如下：

$$-Pl\sin\theta - Nl\cos\theta = I\ddot{\theta} \tag{3-7}$$

注意：此方程中力矩的方向，由于$\theta = \pi + \phi, \cos\phi = -\cos\theta, \sin\phi = -\sin\theta$，故等式前面有负号。
合并这两个方程，约去P 和N，得到第二个运动方程：

$$(I+ml^2)\ddot{\theta}+mgl\sin\theta=-ml\ddot{x}\cos\theta \tag{3-8}$$

设 $\theta=\phi+\pi$ （ ϕ是摆杆与垂直向上方向之间的夹角），假设ϕ与1（单位是弧度）相比很小，即ϕ<<1，则可以进行近似处理：

$$\cos\theta=-1\text{，}\sin\theta=-\phi\text{，}(\frac{d\theta}{dt})^2=0$$

用u 来代表被控对象的输入力F，线性化后两个运动方程如下：

$$\begin{cases}(I+ml^2)\ddot{\phi}-mgl\phi=ml\ddot{x}\\(M+m)\ddot{x}+b\dot{x}-ml\ddot{\phi}=u\end{cases} \tag{3-9}$$

对式(3-9)进行拉普拉斯变换，得到

$$\begin{cases}(I+ml^2)\Phi(s)s^2-mgl\Phi(s)=mlX(s)s^2\\(M+m)X(s)s^2+bX(s)s-ml\Phi(s)s^2=U(s)\end{cases} \tag{3-10}$$

注意：推导传递函数时假设初始条件为0。

由于输出为角度ϕ，求解方程组的第一个方程，可以得到：

$$X(s)=[\frac{(I+ml^2)}{ml}-\frac{g}{s^2}]\Phi(s)$$

或 角度与位移之间的传递函数

$$\frac{\Phi(s)}{X(s)}=\frac{mls^2}{(I+ml^2)s^2-mgl}$$

如果令 $v=\dot{x}$ 则有：

$$\frac{\Phi(s)}{V(s)}=\frac{mls}{(I+ml^2)s^2-mgl}$$

把上式代入方程组的第二个方程，得到：

$$(M+m)\left[\frac{(I+ml^2)}{ml}-\frac{g}{s}\right]\Phi(s)s^2+b\left[\frac{(I+ml^2)}{ml}+\frac{g}{s^2}\right]\Phi(s)s-ml\Phi(s)s^2=U(s)$$

整理后得到**角度与力之间的**传递函数：

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)}=\frac{\frac{ml}{q}s^2}{s^4+\frac{b(I+ml^2)}{q}s^3-\frac{(M+m)mgl}{q}s^2-\frac{bmgl}{q}s}$$

其中

$$q=[(M+m)(I+ml^2)-(ml)^2]$$

设系统状态空间方程为：

$$\dot{X}=AX+Bu$$
$$y=CX+Du$$

方程组(3-9)对$\ddot{x}$，$\ddot{\phi}$ 解代数方程，得到解如下：

$$\begin{cases}\dot{x}=\dot{x}\\ \ddot{x}=\dfrac{-(I+ml^2)b}{I(M+m)+Mml^2}\dot{x}+\dfrac{m^2gl^2}{I(M+m)+Mml^2}\phi+\dfrac{(I+ml^2)}{I(M+m)+Mml^2}u\\ \dot{\phi}=\dot{\phi}\\ \ddot{\phi}=\dfrac{-mlb}{I(M+m)+Mml^2}\dot{x}+\dfrac{mgl(M+m)}{I(M+m)+Mml^2}\phi+\dfrac{ml}{I(M+m)+Mml^2}u\end{cases}$$

整理后得到系统状态空间方程：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \ddot{x}\\ \dot{\phi}\\ \ddot{\phi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{-(I+ml^2)b}{I(M+m)+Mml^2} & \dfrac{m^2gl^2}{I(M+m)+Mml^2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \dfrac{-mlb}{I(M+m)+Mml^2} & \dfrac{mgl(M+m)}{I(M+m)+Mml^2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\\ \phi\\ \dot{\phi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{I+ml^2}{I(M+m)+Mml^2}\\ 0\\ \dfrac{ml}{I(M+m)+Mml^2}\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}x\\ \phi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\\ \phi\\ \dot{\phi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}u$$

由(3-9)的第一个方程为：（**只用了第一个方程式为了建立水平加速度与转角之间的关系**）

$$\left(I+ml^2\right)\ddot{\phi}-mgl\phi=ml\ddot{x}$$

对于质量均匀分布的摆杆有：

$$I=\frac{1}{3}ml^2$$

于是可以得到：

$$\left(\frac{1}{3}ml^2+ml^2\right)\ddot{\phi}-mgl\phi=ml\ddot{x}$$

化简得到：

$$\ddot{\phi}=\frac{3g}{4l}\phi+\frac{3}{4l}\ddot{x}$$

设 $X=\{x,\dot{x},\phi,\dot{\phi}\}$，$u'=\ddot{x}$ 则有：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\\ddot{x}\\\dot{\phi}\\\ddot{\phi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&\frac{3g}{4l}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\\dot{x}\\\phi\\\dot{\phi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\frac{3}{4l}\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}x\\\phi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\\dot{x}\\\phi\\\dot{\phi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}u'$$

另外，也可以利用MATLAB 中tf2ss 命令对(3-13)式进行转化，求得上述状态方程。**在固高科技所有提供的控制器设计和程序中，采用的都是以小车的加速度作为系统的输入，**如果用户需要采用力矩控制的方法，可以参考以上把外界作用力作为输入的各式。

2.2 拉格朗日法

拉格朗日方程的表达式：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=Q_i \quad (i=1,2,3,\cdots N)$$

系统总动能

$$T=T(q_1,q_2,q_3,\cdots q_n,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\dot{q}_3,\cdots \dot{q}_N)$$

系统总势能

$$U=U(q_1,q_2,q_3,\cdots q_N,t)$$

保守系统的拉氏方程

令 $L=T-V$，称为拉氏函数，可得：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0\left(j=1,2,\ldots..k\right)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=F_{Qj}\left(j=1,2,\ldots\ldots k\right)$$ ------------- **拉格朗日第二类方程**

方程的性质，关于 q_j 的二阶微分方程组，可求解运动及主动力，不能求约束力。

对于仅受有势力和线性阻尼力作用的系统，其拉格朗日方程为：

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i})-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}=0$$

如果系统上还作用了除有势力和阻尼力以外的非保守力，如结构受到的外激励力（对应的广义非保守力可通过非保守力的虚功求得，仍记为Q_i），则系统的拉格朗日方程为：

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i})-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}=Q_i$$

用拉格朗日方程推导运动学方程：

推导一阶倒立摆动力学方程

拉格朗日方程为： $$L(q,q)=T(q,q)-V(q,q)$$

其中 L 为拉格朗日算子，q 为系统的广义坐标，T 为系统的动能，V 为系统的势能。

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=f_i$$

其中 i=1,2,3………n， f_i 为系统在第 i 个广义坐标上的外力，在二级倒立摆系统中，系统的广义坐标有三个，分别为 x,θ_1,θ_2。

先计算系统的动能：

$$T=T_M+T_m$$

其中 T_M， T_m 分别为小车的动能，摆杆的动能。

小车的动能：

$$T_M=\frac{1}{2}Mx^2$$

$T_m=T'_m+\ T'_n$ 其中分别为摆杆的平动动能和转动动能。

对于系统，设以下变量：

xpend　　摆杆质心横坐标

ypend　　摆杆质心纵坐标

又有：

$$\begin{cases} xpend = x - l\sin\theta \\ \ \ ypend = l\cos\theta \end{cases}$$

则有：

$$T_{m1}{}' = \frac{1}{2}m_1\left(\left(\frac{d(xpend1)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d(ypend1)}{dt}\right)^2\right)$$

$$T_{m1}{}'' = \frac{1}{2}J_{p1}\theta^2 = \frac{1}{6}m_1 l_1^2\theta_1^2$$

系统的势能为：

$$V = V_{m1} + V_{m2} + V_{m3} = m_1 ypend1 + m_2 ypend2 + m_3 ymass$$

由于系统在θ_1，θ_2广义坐标下没有外力作用，所以有：

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\theta_1} - \dfrac{\partial L}{\partial\theta_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\theta_2} - \dfrac{\partial L}{\partial\theta_2} = 0 \end{cases}$$

对于二级倒立摆系统，系统状态变量为：

$\{x, \theta_1, \theta_2, \dot{x}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2\}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-(I+ml^2)b}{I(M+m)+Mml^2} & \dfrac{m^2gl^2}{I(M+m)+Mml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{-mlb}{I(M+m)+Mml^2} & \dfrac{mgl(M+m)}{I(M+m)+Mml^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{I+ml^2}{I(M+m)+Mml^2} \\ 0 \\ \dfrac{ml}{I(M+m)+Mml^2} \end{bmatrix} u$$