

文章编号:1671-7848(2011)06-0877-04

基于飞轮的单级倒立摆系统的建模与仿真

阮晓钢, 王昱峰

(北京工业大学 人工智能与机器人研究所, 北京 100124)



摘 要: 针对目前独轮机器人的侧向平衡控制问题, 设计了一种基于飞轮的单级倒立摆系统。简单地介绍了目前有关倒立摆系统的研究现状, 然后利用拉格朗日方法建立了基于飞轮的单级倒立摆系统的数学模型, 同时, 对所建立的数学模型(精确模型和线性化模型)在 Matlab/Simulink 中进行了仿真实验, 仿真结果证实了所建立的模型是可信的, 并用现代控制理论中的二次型最优调节器(LQR)实现对倒立摆的最优控制, 仿真结果表明该方法对基于飞轮的单级倒立摆系统的平衡控制是有效的。

关 键 词: 倒立摆系统; 拉格朗日; 最优控制

中图分类号: TP 27

文献标识码: A

Modelling and Simulation for Single Inverted Pendulum System Based on Flywheel

RUAN Xiao-gang, WANG Yu-feng

(Artificial Intelligence and Robot Institute, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: To the lateral balance control problem of single wheel robot, a single inverted pendulum system based on flywheel is designed. The research status of inverted pendulum system is introduced simply. The mathematical model of a single inverted pendulum based on a flywheel is established by using the Lagrange equation. The simulation results using Matlab/Simulink tools show that the proposed mathematical model is believable. The LQR method in modern control theory is introduced to realize the optimal control of the inverted pendulum. The simulation results show that balance control of single inverted pendulum system based on flywheel is effective.

Key words: inverted pendulum system; Lagrange equation; optimal control

1 引言

倒立摆系统是一个典型的高阶次、多变量、非线性、自然不稳定的控制系统。传统的对倒立摆平衡研究的模型集中于摆杆固定于一个运动的小车, 通过控制小车的运动从而控制摆杆的平衡^[1-3]。文献[4]提出了把双足机器人的向前迈步抽象成一个基于飞轮的倒立摆模型, 把支撑腿抽象成一个无质量的摆杆, 且此摆杆可以伸缩, 身体抽象成一个飞轮, 利用牛顿-欧拉法建立了倒立摆的数学模型, 但是作者的分析却较复杂。

线性二次调节器(LQR)问题在现代控制理论中占有非常重要的地位, 受到控制界的普遍关注。线性二次型性能指标易于分析、处理和计算, 而且通过线性二次型最优设计方法得到的倒立摆系统具有较好的鲁棒性与动态特性以及能够获得线性反馈结

构等优点, 因而在实际的倒立摆控制系统设计中得到了广泛地应用^[5]。本文利用拉格朗日方法对基于单级倒立摆的系统进行了建模, 采用基于状态空间设计法的 LQR 最优调节器, 兼顾了系统的鲁棒性和快速性, 仿真结果表明了该方法的有效性。

2 基于飞轮的单级倒立摆系统建模

1) 拉格朗日法建模 在忽略了空气阻力和各种摩擦之后, 可将基于飞轮的倒立摆系统抽象成一个圆环形的飞轮和一根匀质的细杆。飞轮依靠电机驱动形成竖直平面内的反力矩使得摆杆最终稳定在竖直向上的位置。

在运动平面上取直角坐标系 $O-XY$ 。其中, 摆杆的质量为 m_1 , 重心为 O_1 , 其位置坐标为 (x_1, y_1) , 摆杆可绕全局坐标系原点 O 进行转动, 转动惯量为 I_1 ; 飞轮的质量为 m_2 , 重心为 O_2 , 位置坐

收稿日期: 2010-03-18; 收修定稿日期: 2010-05-10

基金项目: 国家“863计划”项目(2007AA04Z226); 国家自然科学基金项目(60774077); 北京市教委和北京市自然科学基金重点项目(KZ200810005002); 北京市人才强教计划项目

作者简介: 阮晓钢(1958-), 男, 四川自贡人, 教授, 博士生导师, 主要从事控制科学与工程、计算机科学与技术、人工智能与机器人学、智能信息处理、以及生物医学工程等方面的教学与科研工作。

标为 (x_2, y_2) , 飞轮的转动角速度为 w , 飞轮绕质心 O_2 点的转动惯量为 I_2 。摆杆与竖直方向的夹角为 θ , 全局坐标系原点 O 和局部坐标系原点 O_1 的距离为 L_1 , 摆杆质心距飞轮质心的距离为 L_2 。飞轮的旋转角度为 φ 。倒立摆模型, 如图1所示。

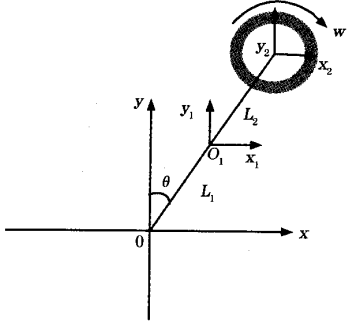


图1 基于飞轮的单级倒立摆模型

Fig. 1 Single pendulum model based on flywheel

利用拉格朗日方程推导运动学方程:

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q, \dot{q}) \quad (1)$$

式中, L 为拉格朗日算子; q 为系统的广义坐标; T 为系统的动能; V 为系统的势能。

拉格朗日方程由广义坐标 q_i 和 L 表示为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = f_i \quad (2)$$

式中, $i=1, 2, 3, \dots, n$; f_i 为系统沿广义坐标方向上的外力; D 为耗散力函数。

在本系统中, 设系统的2个广义坐标分别是 θ 和 φ 。

系统的总动能:

$$T = T_{o_1} + T_{o_2} \quad (3)$$

式中, T_{o_1} 和 T_{o_2} 分别为摆杆和飞轮的动能。

摆杆的动能:

$$T_{o_1} = (m_1 v_{o_1}^T v_{o_1} + I_1 \dot{\theta}^2) / 2 \quad (4)$$

飞轮的动能:

$$T_{o_2} = (m_2 v_{o_2}^T v_{o_2} + I_2 \dot{\theta}^2 + I_2 \dot{\varphi}^2) / 2 \quad (5)$$

系统的总动能为

$$T = (m_1 v_{o_1}^T v_{o_1} + I_1 \dot{\theta}^2) / 2 + (m_2 v_{o_2}^T v_{o_2} + I_2 \dot{\theta}^2 + I_2 \dot{\varphi}^2) / 2 \quad (6)$$

摆杆的势能:

$$V_{o_1} = m_1 g L_1 \cos \theta \quad (7)$$

飞轮的势能:

$$V_{o_2} = m_2 g (L_1 + L_2) \cos \theta \quad (8)$$

系统的总势能:

$$V = m_1 g L_1 \cos \theta + m_2 g (L_1 + L_2) \cos \theta \quad (9)$$

综合以上各式, 令 $L_1 = L_2$, 从而得到拉格朗日算子:

$$L = [m_1 L_1^2 + 4m_2 L_1^2 + I_1 + I_2] \dot{\theta}^2 / 2 + I_2 \dot{\varphi}^2 / 2 - (m_1 + 2m_2) g L_1 \cos \theta \quad (10)$$

系统的广义力矩:

$$f = [-I_2 \ddot{\varphi} \quad u - I_2 \ddot{\theta}]^T \quad (11)$$

式中, u 为飞轮的驱动力矩(即减速器输出的力矩)。

系统耗散力包括:

摆杆耗散力: $\tau_1 = -c_1 \dot{\theta}$

飞轮耗散力: $\tau_2 = -c_2 \dot{\varphi}$

式中, c_1 为摆杆绕转轴 O 转动的摩擦阻力矩系数; c_2 为飞轮绕转轴 O_2 转动的摩擦阻力矩系数。

最终得出:

$$(a + I_2) \ddot{\theta} + I_2 \ddot{\varphi} = b \sin \theta - c_1 \dot{\theta} \quad (12)$$

式中, $a = m_1 L_1^2 + 4m_2 L_1^2 + I_1$; $b = (m_1 + 2m_2) g L_1$ 。

式(12)即为基于飞轮的单级倒立摆在忽略空气阻力的条件下的精确数学模型表达式。

3 倒立摆系统线性化模型及系统性能分析

为便于分析与计算, 当 θ 较小时, 可根据泰勒级数展开做近似处理, $\sin \theta$ 的泰勒展开式为

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^9}{9!} - \dots \quad (13)$$

取泰勒级数展开式的第一项, 即 $\sin \theta \approx \theta$, 并代入式(12), 得:

$$\begin{cases} (a + I_2) \ddot{\theta} + I_2 \ddot{\varphi} = b\theta - c_1 \dot{\theta} \\ I_2 (\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) = u - c_2 \dot{\varphi} \end{cases} \quad (14)$$

上式即为线性化的基于飞轮的单级倒立摆数学模型。

选 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (\theta, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi})^T$ 为系统的状态变量, 由式(14)得系统的状态空间表达式如下:

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{b}{a} & -\frac{c_1}{a} & 0 & \frac{c_2}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{b}{a} & \frac{c_1}{a} & 0 & -\frac{(a+I_2)c_2}{aI_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{a} \\ 0 \\ \frac{a+I_2}{aI_2} \end{pmatrix} u \quad (15a)$$

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} (\theta \quad \dot{\theta} \quad \varphi \quad \dot{\varphi})^T \quad (15b)$$

$$c_1 = 9.4 \times 10^{-3} \text{ Nm/V}, c_2 = 3.0 \times 10^{-4} \text{ Nm} \cdot \text{s}$$

$$L_1 = 0.25 \text{ m}, m_1 = 1.2 \text{ kg}, m_2 = 0.46 \text{ kg}$$

$$I_1 = 2.504 \times 10^{-2} \text{ kgm}^2, I_2 = 3.423 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$$

把以上参数代入式(15), 得系统的状态方程:

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 24.158 & -0.044 & 0 & 0.0014 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -24.158 & 0.044 & 0 & -0.089 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4.651 \\ 0 \\ 296.667 \end{pmatrix} u \quad (16a)$$

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}^T \quad (16b)$$

4 模型的验证

以上推导过程中,用了很多近似条件,因此所建立的模型是否可信需要进行验证。这里采用“必要条件法”,采用 Matlab 进行仿真验证,看是否具备“正确模型”所应该具备的“必要性质”。

1) 精确模型的验证 首先对线性化之前的模型即式(12)进行验证。仅忽略了空气阻力,即使在外力作用下摆角的变化很大,该模型也应该较精确。

采用 Matlab 中的 Simulink 工具箱对其进行仿真验证,系统的模型,如图 2 所示。

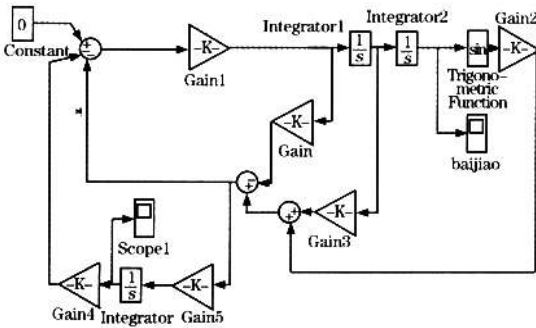


图2 在 Simulink 下编辑的倒立摆系统的精确模型
Fig.2 Exact model of pendulum system edited under Simulink

按照实际情况,当输入力矩为零且摆杆竖直向上的偏角为 0.1 rad 时,由于空气阻力,摆角应该做减幅震荡,摆杆的变化曲线应该是在 3.14 rad 附近变化,且不会超过 6.28 rad,且最终会稳定在竖直方向(即竖直垂下),即 3.14 rad。飞轮旋转角速度也会越来越小,理想情况是,最终为零。根据图 2 的仿真框图得出的摆角曲线,如图 3 所示。

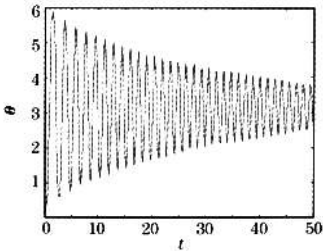


图3 输入力矩为零,竖直偏角为 0.1 rad 时摆角的变化
Fig.3 The change of pendulum angle with input angle which is zero and vertical angle is 0.1 rad

从图 3 不难看出,随着时间的变化,竖直摆杆的摆角逐渐趋于 3.14 rad,飞轮的旋转角速度逐渐趋于零。与实际情况相吻合,从而说明了此精确模型的正确性。

飞轮旋转角速度的变化曲线,如图 4 所示。

万方数据

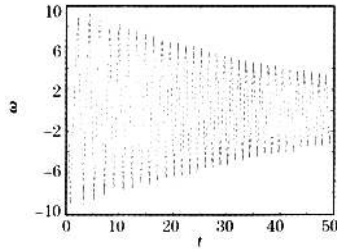


图4 输入力矩为零,竖直偏角为 0.1 rad 时飞轮旋转角速度的变化

Fig.4 The change of flywheel rotation angle with input angle which is zero and vertical angle is 0.1 rad

2) 线性化之后模型的验证 下面用精确模型和线性化之后的模型分别求系统的阶跃响应(摆角的初始值为零度(竖直向上)),如图 5,图 6 所示。

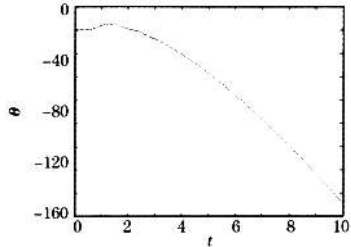


图5 精确模型的输入力矩为单位阶跃时摆杆角的响应曲线(初始摆角为零)

Fig.5 The response curve of pendulum angle of exact model when input torque is unit step (the start pendulum angle is zero)

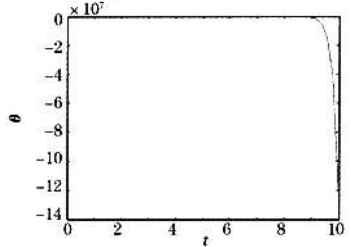


图6 线性化之后模型的输入力矩为单位阶跃时摆杆角的响应曲线(初始摆角为零)

Fig.6 The response curve of pendulum angle of after linearization model when input torque is unit step (the start pendulum angle is zero)

从图 5 和图 6 可知在初始摆角变化不大时(摆角小于 0.2 rad 时),精确模型和线性化之后模型的阶跃响应基本相同,但角度越大,后者的误差就越大。但是,两者都反映出当初始摆角为零度时,该系统是自然不稳定的。

5 状态空间器的设计与仿真

根据线性二次型最优控制理论,在状态反馈控制律下可使系统性能指标函数达到最小。系统的特征方程为 $\det \lambda I - A = 0$, 计算得系统的特征值为

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4.892\ 4, \lambda_3 = -4.937\ 8, \lambda_4 = -0.087\ 6$ 。系统有一个特征根在复频域的右半平面内,故系统为不稳定系统。系统能控性矩阵取为, $M=[B\ AB\ A^2B\ A^3B]$, $\text{rank}(M)=4$,故系统完全能控。引入全状态反馈,找出满足系统性能要求的反馈增益矩阵 K ,如图 7 所示。

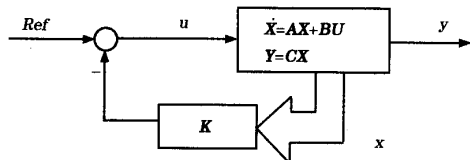


图 7 状态反馈框图
Fig. 7 State feedback block diagram

下面来选择 LQR 最优控制器的 2 个控制参数 R 和 Q 。这 2 个参数用来平衡输入量和状态量的权重。在此,取 $R=1$ 。

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

其中, $Q_{1,1}$ 代表摆杆角度的权重, $Q_{4,4}$ 代表飞轮旋转角速度的权重。

应用 Matlab 语句 $K = \text{lqr}(A, B, Q, R)$, 求得:

$$K = \begin{bmatrix} -361.457\ 7 & -77.523\ 4 & -1.000\ 0 & -0.261\ 3 \end{bmatrix}$$

取系统的初始位置 $X = [0.2\ \text{rad}, 0, 0, 0]^T$, 当使用上述一组控制参数时,倒立摆摆角 $\theta(t)$ 、飞轮旋转角速度 $\omega(t)$ 的仿真结果,如图 8,图 9 所示。

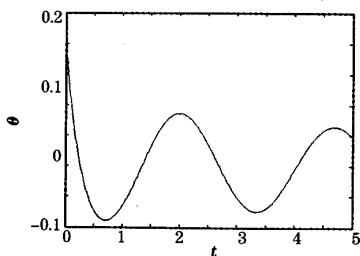


图 8 倒立摆摆角
Fig. 8 Pendulum angle

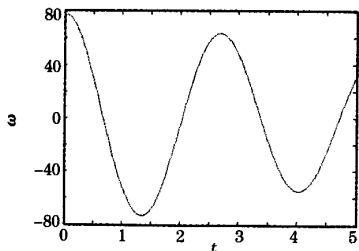


图 9 飞轮角速度
Fig. 9 Flywheel angular speed

从图中不难看出,倒立摆的摆角和飞轮角速度
万方数据

都有超调,而且都比较大,产生了振荡,显然,这样的控制系统是根本不行的。因此,需改善系统的性能,增加矩阵 Q 中的 $Q_{4,4}$ 。经过多次分析与仿真,发现当 $Q_{4,4} = 100$ 时,系统显示的各种性能比较好。此时的反馈增益 $K = \begin{bmatrix} -6\ 388.2 & -1\ 304.2 & -1 & -10.4 \end{bmatrix}$ 。仿真曲线如图 10,图 11 所示。

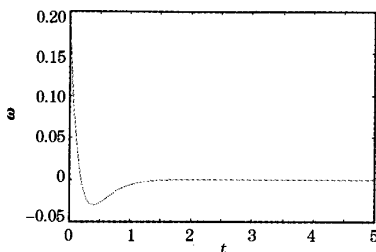


图 10 改善性能后的倒立摆摆角
Fig. 10 Pendulum angle after improve performance

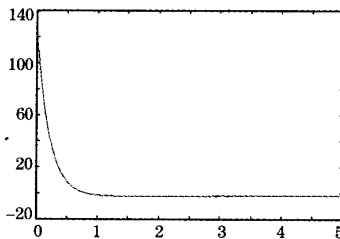


图 11 改善性能后的飞轮角速度
Fig. 11 Flywheel angular speed after improve performance

改善系统性能后,系统的稳定时间在 1.5 s,在初始位置不稳定时,通过调节飞轮驱动力矩的大小,从而改变飞轮的旋转的角速度 $\omega(t)$ 的大小,将倒立摆控制在平稳状态,系统地稳定误差为零,达到了控制目标。随着初始角度的增加,对系统机械性能的要求也越来越高。因此,大量仿真结果表明, $\theta = (-0.2\ \text{rad}, 0.2\ \text{rad})$ 时均能使倒立摆平衡。

6 结 语

本文采用拉格朗日方法对基于飞轮的倒立摆模型进行了建模,通过模型分析系统性能,该倒立摆系统为自然不稳定系统,但是系统是完全可以控制的。同时采用线性最优二次型控制方法实现了对单级倒立摆的平衡控制,在平衡点附近达到较好的控制效果。曲线相对来说比较完美,但是在实物的实验过程中,由于外界的不可控因素比较多,加之系统运行时的各种摩擦等,实际需要的输入力矩应该比仿真时的要大,而且,利用此方法控制倒立摆平衡的效果或许不是很好,但是这并不意味着仿真结果是无用的,仿真结果可以作为调试实物控制参数的一个参考值。因此,为今后基于飞轮的倒立摆物理系统的建立和系统控制方法的研究奠定了基础。

(下转第 904 页)

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.3 \end{pmatrix}, B_\omega = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$C_{11} = [1 \quad 1], C_{12} = [0.1 \quad 0], D_{12} = 0.1$$

$$D_{13} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \end{pmatrix}^T, M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_{b1} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{a1} = \begin{pmatrix} 0 & -0.2 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}, E_{a2} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$E_{b2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.1 \end{pmatrix}, E_\omega = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

用 Matlab LMI 工具箱,可以得到:允许 γ 的值为 0.410 5,并得到:

$$K = [-0.850 \ 6 \quad 0.190 \ 3]$$

$$L = [0.015 \ 9 \quad 0.088 \ 5]^T$$

系统的输入干扰信号为 $w(t) = 0.05 \sin t$,则系统的单位阶跃响应及误差,分别如图 1,图 2 所示。

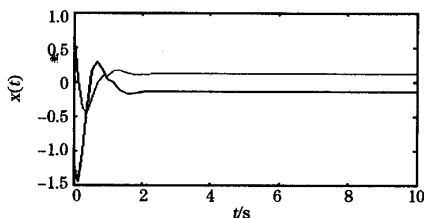


图 1 系统的单位阶跃响应

Fig. 1 Unit step response

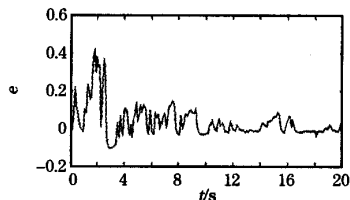


图 2 系统的误差

Fig. 2 Systematic error

5 结语

本文研究了一类线性不确定离散时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制器的设计问题,采用 Lyapunov 稳定性理

论和线性矩阵不等式方法,完成了鲁棒状态观测器的设计,并给出了观测器存在的充分条件和设计方法。仿真结果表明,所设计的控制器对所有容许的不确定性和时滞不仅使系统渐近稳定,又能保证系统满足一定的 H_∞ 性能指标,具有较好的抑制扰动的效果。

参考文献 (References):

- [1] Lee Y S, Moon W H, Kwon, Park P G. Delay dependent robust control for Uncertain Systems with a state-delay[J]. Automatic, 2004, 40 (1): 65-72.
- [2] Vladimir B Kolmanovskii, Richard J P. Stability of some linear systems With delays[J]. IEEE Trans Automatic Control, 1999, 44 (5): 984-989.
- [3] DWC H, Robust L G. stabilization for a class of discrete-time non-linear systems via output feedback The unified LMI approach[J]. Int. J. Control, 2003, 76(7): 105-115.
- [4] Yu L, Gao F R. Optimal guaranteed cost control of discrete-time uncertain systems with both state and input delays[J]. Journal of the Franklin Institute, 2001, 338(6): 101-110.
- [5] Chen W H, Guan Z H, Lu X M. Delay dependent guaranteed cost control for Uncertain discrete-time systems with both state and input delays[J]. Journal of the Franklin Institute, 2001, 341(8): 419-430.
- [6] Xu S Y, James L, Yang C W. Quadratic stability and stabilization of uncertain linear -time systems with statedelay[J]. Syst & Control Letters, 2001, 43(10): 77-84.
- [7] Xu S T, Lu J W, Zhou S S, et al. Designe of observers for a uncertain nonlinear sys -tems with time delay[J]. Journal of the Franklin Institute, 2004, 341(8): 295-308.
- [8] Chen J D. robus H_∞ output dynamic Observer-based control of uncertain time-delay systems[J]. Chaos Solitons and Fractals, 2007, 31(8): 391-403.
- [9] Song S H, Kim J K, Yim C H, et al. H_∞ control for discrete-time linear syste -ms with time-varying delays instate[J]. Automation, 1999, 35(6): 1587-1591.
- [10] 张明君,程储望,孙优贤. 不确定时滞系统基于观测器的鲁棒镇定[J]. 自动化学报, 1998, 24(6): 508-511. (Zhang Mingjun, Chen Chuwang, Sun Youxian. Robust stabilization for observer-based uncertain time-delay systems[J]. Acta Automatic Sinica, 1998, 24(6): 508-511.)
- [11] 胡中功,杨春曦,戴克中. 时滞不确定系统基于观测器的鲁棒控制器设计[J]. 武汉化工学院学报, 2004, 27(1): 64-67. (Hu Zhonggong, Yang Chunxi, Dai Kezhong. Design of robust controller for observer-based uncertain time-delay systems[J]. Journal of Wuhan Institute of Chemical Technology, 2004, 27(1): 64-67.)
- [12] 胡中功,关心平,刘弈昌,等. 时滞系统基于 LMI 的 H_∞ 鲁棒观测器设计[J]. 系统工程与电子技术, 2001, 23(9): 34-36. (Hu Zhonggong, Guan Xinping, Liu Yichang, et al. Design of H_∞ robust controller for time-delay systems based on LMI[J]. Systems Engineering and Electronics, 2001, 23(9): 34-36.)

(上接第 880 页)

参考文献 (References):

- [1] 徐国林,杨世勇. 单级倒立摆系统的仿真研究[J]. 四川大学学报, 2007, 44(6): 1013-1016. (Xu Guoling, Yang Shiyong. Simulation research of single inverted pendulum system[J]. Sichuan University Journal, 2007, 44(6): 1013-1016.)
- [2] 肖力龙,彭辉. 基于拉格朗日建模的单级倒立摆起摆与稳定控制[J]. 控制理论与应用, 2007, 26(4): 4-7. (Xiao Lilong, Peng Hui. Upswing and Stabilization control of a single inverted pendulum system based on the langrangian modeling[J]. Control Theory and Application, 2007, 26(4): 4-7.)
- [3] 罗成,胡德文,祝晓才,等. 基于 LQR 和模糊插值的五级倒立摆控制[J]. 控制与决策. 2005, 20(4): 392-397. (Luo Cheng, Hu Dewen, Zhu Xiaocai, et al. Quintuple inverted pendulum control based on LQR and fuzzy piecewise interpolation[J]. Control and

- Decision, 2005, 20(4): 392-397.)
- [4] Jerry P, John C, Drakunov S. Capture point: A step toward humanoid push recovery[C]. Proceedings of the 2006 6th IEEE-RAS international Conference on Humanoid Robots, Humanoids, 2006.
- [5] 黄丹,同少武,吴新开,等. 基于 LQR 最优调节器的倒立摆控制系统[J]. 微型计算机信息, 2004, 20(2): 37-38. (Huang Dan, Zhou Shaowu, Wu Xiaokai, et al. An inverted pendulum based on the LQR optimal regulator[J]. Microcomputer Information, 2004, 20(2): 37-38)
- [6] 陈华龙,梁慧冰,霍迎辉. 四级倒立摆系统的 Lagrange 方程建模[J]. 广东工业学报, 2004, 21(2): 59-62. (Chen Hualong, Liang Huibin, Huo Yinghui. Lagrange equation modeling of four level inverted pendulum[J]. Journal of Guangdong University of Technology, 2004, 21(2): 59-62.)
- [7] 胡寿松. 自动控制原理[M]. 北京: 科学出版社, 2007. (Hu Shousong. Automatic control theory[M]. Beijing: Science Press, 2007.)