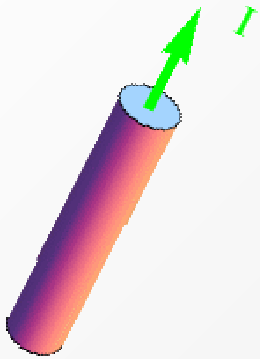
Induktionsgesetz

Ernst Lenz

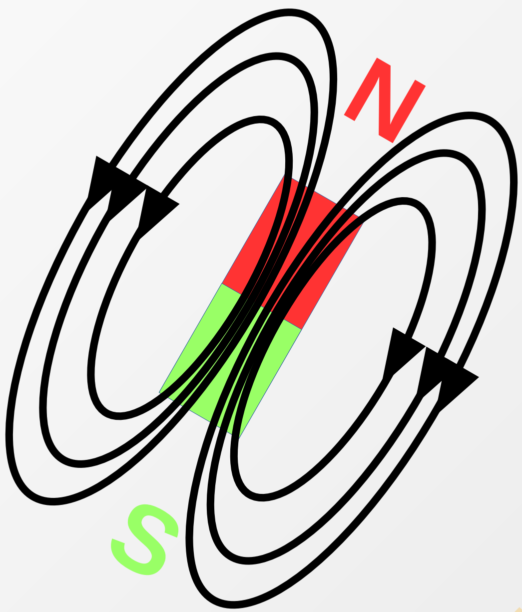
Was wissen wir aus den vorhergehenden Vorlesungen I:

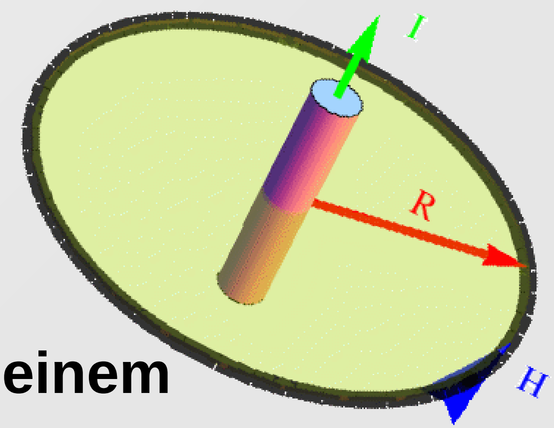


- **Ein von einem elektrischem Strom *I* durchflossener elektrischer Leiter**

$U = R \cdot I \;\leftarrow\; \underline{j} = \sigma\, \underline{E}$

- **Magnetfeld eines Stabmagneten**





- **Magnetfeld *H* eines von einem elektrischen Strom *I* durchflossenem elektrischen Leiters**

$$H_\phi(R) = \frac{I}{2\pi R}$$

Was wissen wir aus den vorhergehenden Vorlesungen II:

- Kraft $\underline{F}_{el}$ auf eine Probeladung Q_p im elektrischen Feld $\underline{E}$:

$$\underline{F}_{\mathrm{el}} = Q_{\mathrm{p}} \cdot \underline{E}$$

→ Die Richtung des elektrischen Feldes $\underline{E}$ ist parallel zur Kraftwirkung auf eine <u>positive</u> Probeladung Q_p.

- Lorenzkraft $\underline{F}_L$ auf eine Probeladung Q mit der Geschwindigkeit $\underline{V}_Q$ ($\underline{V}_Q \ll c_0$) im elektrischen Feld $\underline{E}$ und magnetischen Feld $\underline{B}$:

$$\underline{F}_{\mathrm{L}} = Q \cdot \left(\underline{E} + \underline{v}_{\mathrm{Q}} \times \underline{B} \right)$$

Was wissen wir aus den vorhergehenden Vorlesungen III:

- **Ein von einem elektrischem Strom *I* durchflossener Leiter erzeugt Ein Magnetfeld *H***

  → Ablenkung einer Kompassnadel (Stabmagneten)

$$\underline{H}(r)=\frac{\underline{I}}{2\pi r} \quad , \quad \text{mit} \quad [H]=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

- **Sich ergebende Proportionalitätskonstante aus dem Verhältnis der Auftretenden Kraft $\underline{F}$ und dem Produkt aus Stromstärke $\underline{I}$ und Länge $\underline{\mathscr{L}}$ des Leiters ist die magnetische Flussdichte $\underline{B}$**

$$\boxed{\underline{F}=I(\underline{\mathscr{L}}\times\underline{B})} \quad \begin{matrix}\rightarrow\\ \approx\end{matrix} \quad \underline{B}=\frac{\underline{F}}{\underline{I}\cdot\underline{\mathscr{L}}} \quad , \quad \text{mit} \quad [\underline{\mathrm{B}}]=\frac{\mathrm{V}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{m}^2}=\mathrm{T}$$

- **Zusammenhang zwischen magnetischer Flussdichte $\underline{B}$ Magnetischem Feld $\underline{H}$**

$$\underline{H}=\frac{\underline{B}}{\mu} \quad ; \quad \mu=konst. \quad \text{und} \quad [\mu]=\frac{\mathrm{V}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}}$$

- **Durch Integration über die von der magnetischen Flussdichte $\underline{B}$ durchsetzen Fläche $\underline{A}$ ergibt sich der magnetische Fluss Φ**

$$\Phi=\int_A \underline{B}\cdot d\underline{A} \overset{\underline{B},\,\text{homogen}}{=} \underline{B}\cdot\int_A d\underline{A} \overset{\underline{A},\,\text{nicht gekrümmt}}{=} \underline{B}\cdot\underline{A} \quad , \quad \text{mit} \quad [\Phi]=\mathrm{V}\cdot\mathrm{s}=\mathrm{Wb}$$

Zeitliche Diffentiation des magnetischen Flusses Φ

- **Differentiation nach der Zeit**

$$\frac{d}{dt}\Phi = \frac{d}{dt}\left\{\int_A \underline{B}\cdot d\underline{A}\right\} \overset{B,\,\text{homogen}}{=} \frac{d}{dt}\left\{\underline{B}\cdot\int_A d\underline{A}\right\} \overset{A,\,\text{nicht gekrümmt}}{=} \frac{d}{dt}\left\{\underline{B}\cdot\underline{A}\right\}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\left\{\underline{B}\right\}\right)\cdot\underline{A}} + \underbrace{\underline{B}\cdot\left(\frac{d}{dt}\left\{\underline{A}\right\}\right)}$$

Zeitliche Änderung der (homogenen) magnetischen Flussdichte ***B*** welche die Fläche ***A*** (senkrecht) durchsetzt.

Zeitliche Änderung der Fläche ***A*** welche vom (homogenen) magnetischen Flussdichte ***B*** senkrecht durchsetzt wird.

- **Die Dimension der zeitlichen Differentiation des magnetischen Flusses Φ ergibt sich zur Dimension der elektrischen Spannung U (Betrag der induzierten Spannung)**

$$\boxed{|U| = \left|\frac{d}{dt}\Phi\right|}$$

$$\left[\frac{d}{dt}\Phi\right] = \frac{1}{s}\cdot V\cdot s = V = [U]$$

Vorzeichen der induzierten Spannung *U*

- **In vollständiger Darstellung ergibt sich aus dem bisherigen das Induktionsgesetz für eine induzierte Spannung *U***

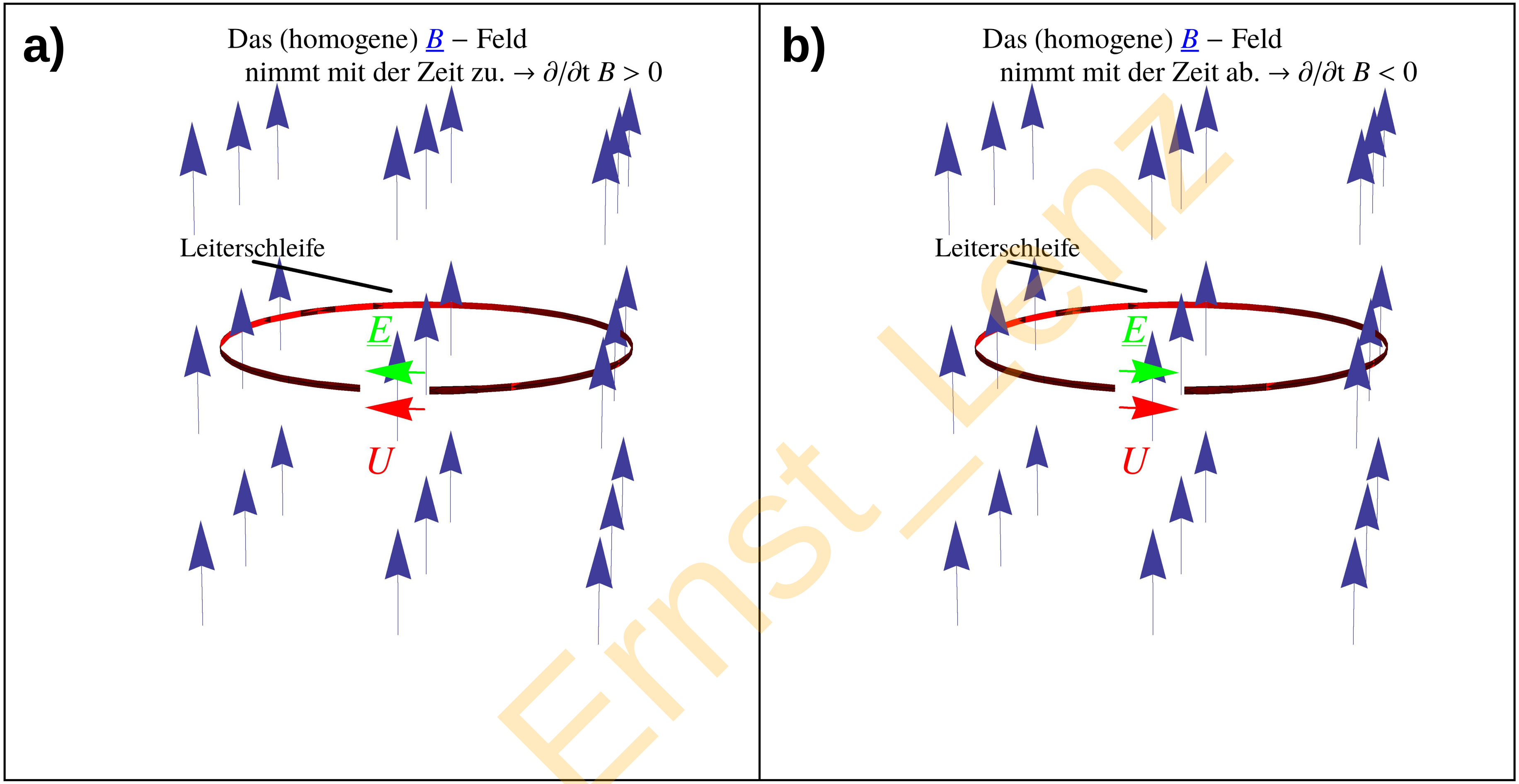
$$\boxed{U = -\frac{d}{dt}\Phi \quad \hat{=} \quad \text{Induktionsgesetz}} \qquad \left[\frac{d}{dt}\Phi\right] = \frac{1}{s}\cdot V\cdot s = V = [U]$$

- **Hierbei spiegelt das Minuszeichen die „Lenzsche-Regel“ wieder:**

> **“Das induzierte elektrische Feld ist so gerichtet, dass die Ursache seiner Entstehung abgeschwächt wird.”**

Der Effekt der induzierten Spannung *U* wirkt seiner Ursache entgegen.

Zeitlich veränderliches *B* - Feld



- **"Rechte Hand Regel"**

  - Daumen der rechten Hand in B-Feld Richtung der gekrümmten Finger der rechten Hand weisen:
  a) für zunehmendes B- Feld gegen die Richtung des Spannungsabfalls
  b) für abnehmendes B- Feld in Richtung des Spannungsabfalls

Animation – Für veränderliche effektive Fläche $\underline{A}_{eff}$

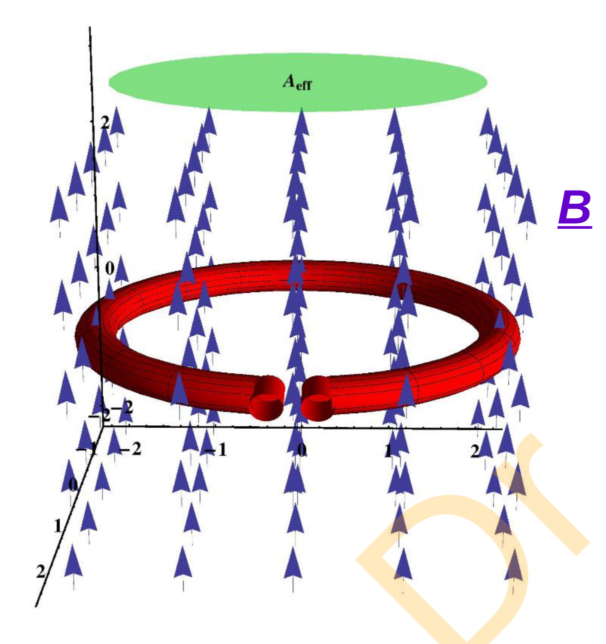
Rotierende Leiterschleife im homogenen Magnetfeld

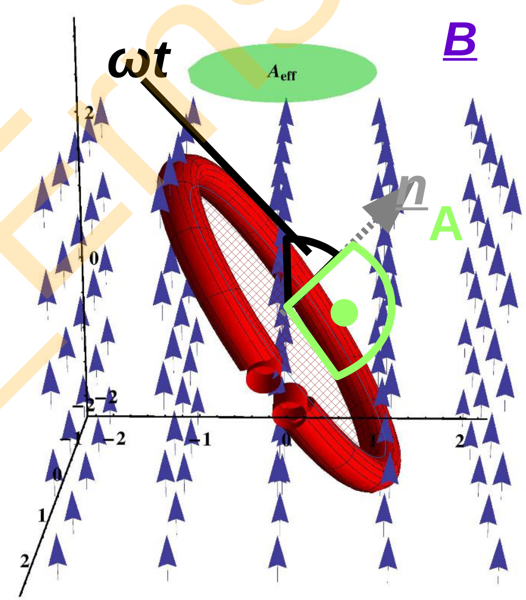
- **Nach dem Induktionsgesetz erwarten wir eine Induzierte Elektrische Spannung zwischen den jeweiligen Drahtenden:**

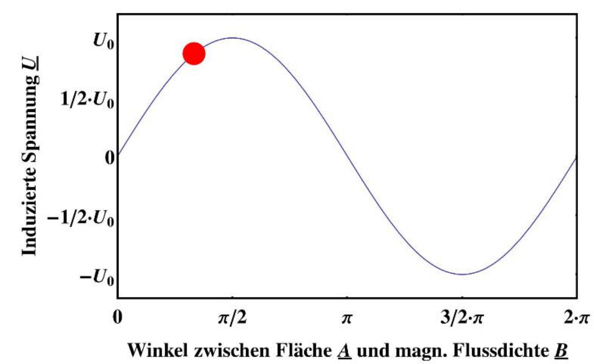
$$U = -\frac{d}{dt}\Phi = -\frac{d}{dt}\left\{\underline{B}\cdot\underline{A}\right\} = -\underline{B}_0\cdot\frac{d}{dt}\left\{\underline{A}\right\} = -\underline{B}_0\cdot\frac{d}{dt}\left\{\underline{A}_0\cdot\cos(\omega\cdot t)\right\}$$

$$\underset{\left|A_{eff}=A_0\cos(\omega\cdot t)\perp \underline{B}_0\right.}{=} -\underline{B}_0\cdot\underline{A}_0\cdot\frac{d}{dt}\left\{\cos(\omega\cdot t)\right\} = \underline{B}_0\cdot\underline{A}_0\cdot\omega\cdot\sin(\omega\cdot t)$$

$$= U_0\cdot\sin(\omega\cdot t)$$



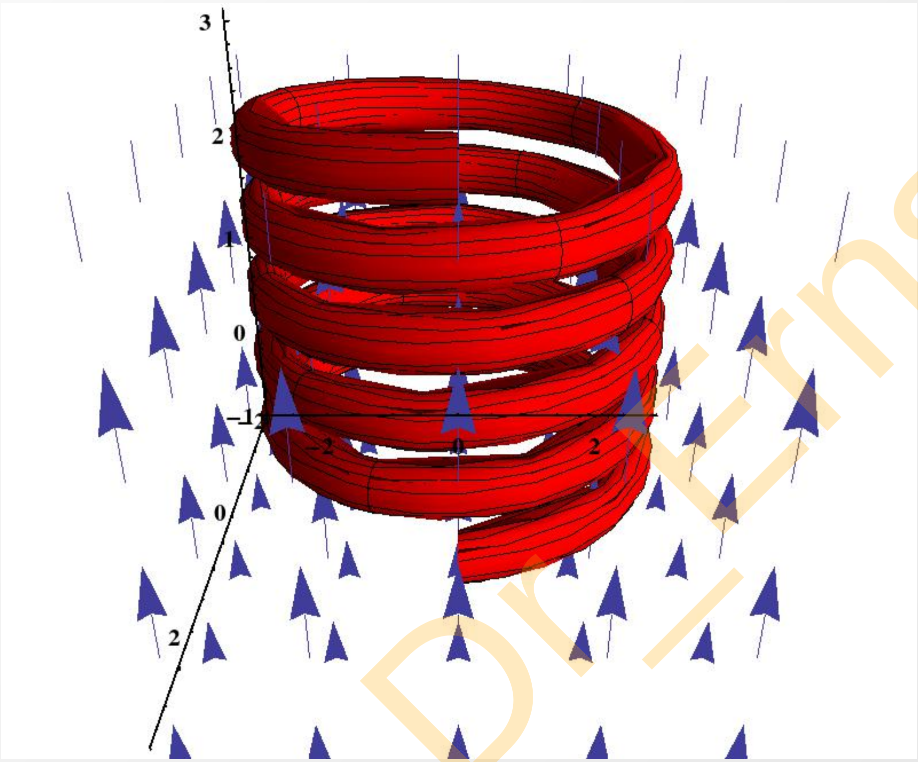




Was mit einer Leiterschleife klappt geht auch mit mehreren

- **Ein Objekt mit *N* Leiterschleifen (Windungen) nennen wir natürlich eine Spule**
- **Das Induktionsgesetz gilt für jede Windung**

$$\rightarrow U = -N \cdot \frac{d}{dt} \Phi$$

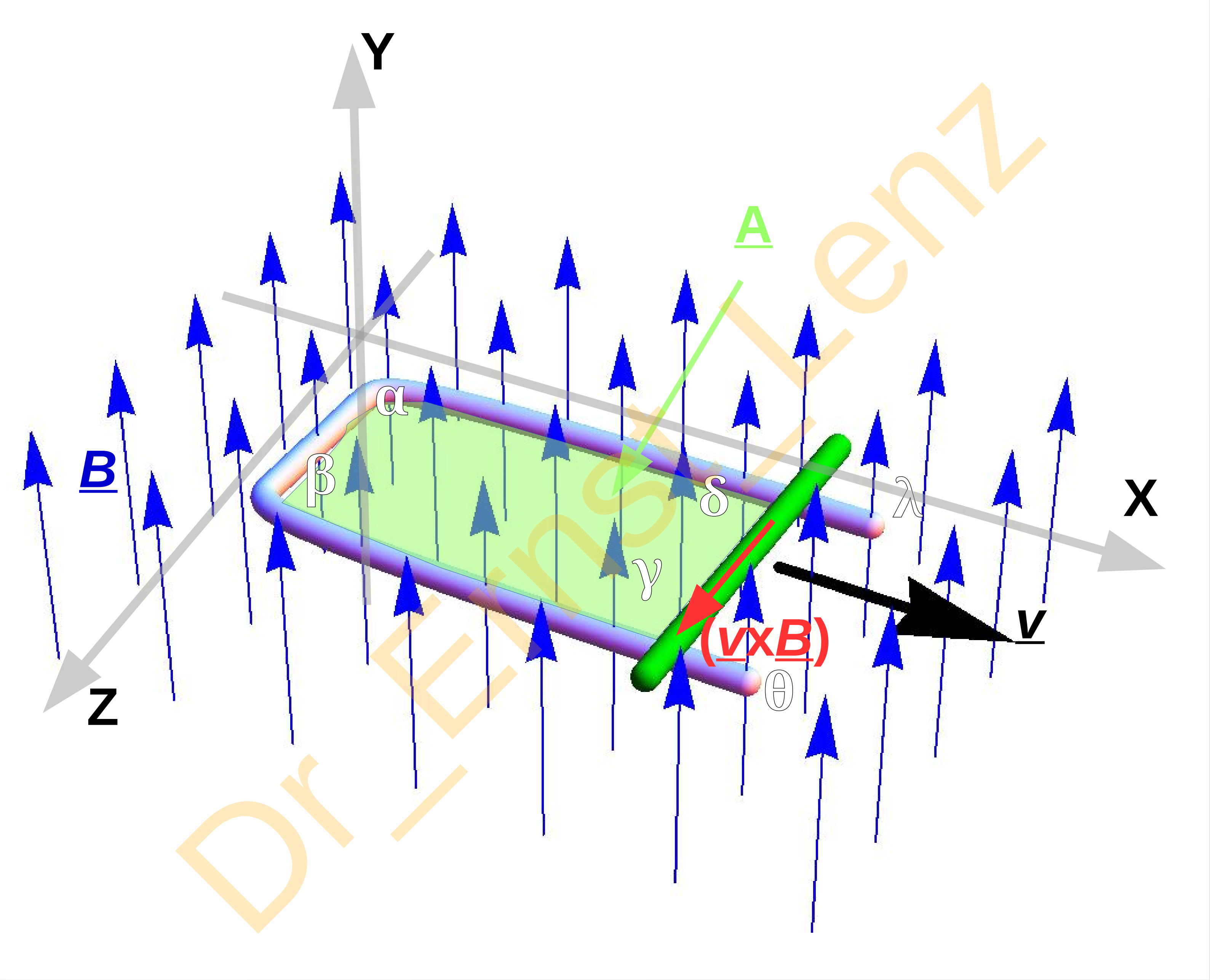


- **Somit erhöht sich die Induzierte Spannung proportional mit der Anzahl der Windungen der Drahtschleife die Entsprechend am Vorgang beteiligt sind.**

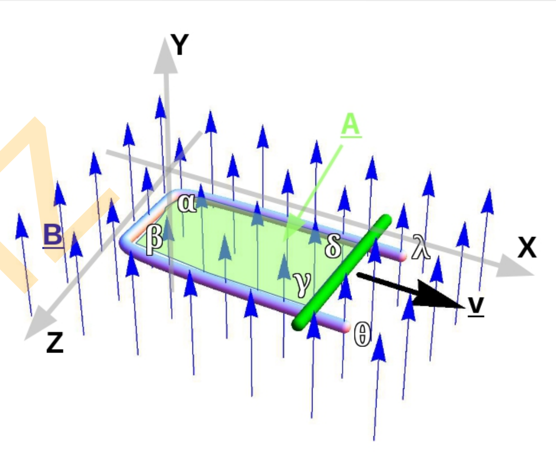
- **Erzeugung von Zündfunken im Benzinmotor durch zeitliche Variation des magnetischen Flusses Φ**

Primärspannung: 12 V
Sekundärspannung: ca. 35 kV

Statisches Magnetfeld –- bewegter Leiter mit ($\underline{v}||\underline{x}$) konst.



A) Berechnung über Induktionsgesetz und Lenzsche-Regel



- **Nach dem Induktionsgesetz gilt:**

$$U = -\frac{d}{dt}\Phi$$

$$= -\frac{d}{dt}(\underline{B}\cdot\underline{A}) = -\frac{d}{dt}(B\cdot(\Delta z\,\Delta x))$$

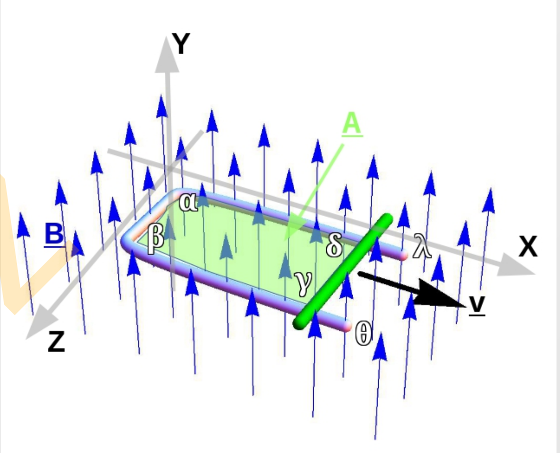
$$= -B\,\Delta z\frac{d}{dt}(x_2 - x_1) = -B\,\Delta z\,v$$

- **Nach der Lenzschen-Regel ist die Spannung derart „gerichtet", dass der durch Sie verursachte Strom dem Magnetfeld bzw. der magnetischen Flussdichte entgegenwirkt.**

- **Demnach ist das induzierte elektrische Feld parallel zu $\underline{e}_z$.**

B) Berechnung über Lorentzkraft

- **Was erhalten wir hier ?**



- Die (konstante) Geschwindigkeit $\underline{v}$ stellt sich dar als:

$$\underline{v}=|\underline{v}|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

- Die (konstante) magnetische Flussdichte $\underline{B}$ stellt sich dar als:

$$\underline{B}=|\underline{B}|\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

- Somit ergibt sich die Lorentzkaft zu:

$$\underline{F}_L=q\ \ \underline{v}\times\underline{B}=q|\underline{v}||\underline{B}|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=q|\underline{v}||\underline{B}|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Auf die Elektronen des Drahtstückes zwischen den Punkten γ und δ wirkt eine Kraft in Richtung - $\underline{e}_z$.

- Somit ergibt sich die Richtung des äquivalenten elektrischen Feldes $\underline{E}$ parallel zu $\underline{e}_z$.

Mathematische Herleitung des Induktionsgesetzes (Ausblick)

- Für die im allgemeinen abfallende Spannung U in einem geschlossenen Stromkreis der Fläche $\underline{A}$ mit der Kontur C gilt nach den Transformationsformeln ($\underline{v} \ll c_0$):

$$U = \oint_C (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \cdot d\,\underline{l} = \oint_C \underline{E} \cdot d\,\underline{l} + \oint_C (\underline{v} \times \underline{B}) \cdot d\,\underline{l}$$

$$\oint_C \underline{E} \cdot d\,\underline{l} = \int_A (\nabla \times \underline{E}) \cdot d\,\underline{f} \quad , \text{ Stookescher Satz}$$

$$= \int_A \left(-\frac{\partial}{\partial t} \underline{B} \right) \cdot d\,\underline{f} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \underline{B} \cdot d\,\underline{f} \quad , \text{ Maxwell-Gleichungen}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \Phi \quad \rightarrow \quad \text{nur zeitliche Änderung des Gesamtflusses Kontur konstant}$$

$$\oint_C (\underline{v} \times \underline{B}) \cdot d\,\underline{l} = \int \frac{(d\,\underline{u} \times \underline{B}) \cdot d\,\underline{l}}{dt}$$

$$= \int -\frac{\underline{B} \cdot (d\,\underline{u} \times d\,\underline{l})}{dt} = -\int_A \frac{\underline{B} \cdot d\,\underline{f}}{dt}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \Phi \quad \rightarrow \quad \text{nur zeitliche Änderung der Fläche } \underline{B} \text{ konstant}$$

- Somit ergibt sich letztlich:

$$\rightarrow \quad U = \oint_C \underline{E} \cdot d\,\underline{l} + \oint_C (\underline{v} \times \underline{B}) \cdot d\,\underline{l} = -\frac{d}{dt} \Phi$$