Skript zu Mathematik 1

Analysis

und

Lineare Algebra

von

Dr. Ernst Lenz

Satz:
Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar in x_0 , $f^{(1)} = f^{(1)} = f^{(2)} = \cdots f^{(n-1)} = 0$ und $f^{(n)} \neq 0$.
$\Longrightarrow$ **(1)** Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$ [bzw. $f^{(n)}(x_0) < 0$], so ist x_0 ein lokales Minimum [Maximum] von f.
(2) Ist n ungerade, so ist x_0 keon lokales Extremum von f.

Zusatz
Es wurde gezeigt, das im Falle von (1) x_0 sogar ein strenges lokales Minimum [Maximum] ist.
D.h.: Es existiert $\delta > 0$, so dass $f(x_0) < f(x)$ $[f(x_0) > f(x)]$ für $|x - x_0| < \delta$.

9.8 Taylorentwicklung

Def.:
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Sei $x_0 \in I$.
(1) Ist $x \in I$, so heißt $\Sigma_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ Taylorreihe von x_0 im Punkte x. (Gleichgültig ob konvergent oder nicht!)
(2) Falls $f(x) = \Sigma_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ für alle $x \in I$, so heißt f in Taylorreihe in x_0 entwickelbar auf I.

Satz 1:
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, Seien $x, x_0 \in I$. Es sind gleichwertig:
(a) $f(x) = \Sigma_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ $\left[= \lim\limits_{n\to\infty} T_{n,x_0,f}(x)\right]$
(b) $R_{n,x_0,f}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Die Logarithmus-Reihe:
Für alle $x \in (-1, 1]$ gilt: $ln(1 + x) = \Sigma_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$.
Insbesondere gilt: $ln(2) = \Sigma_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \mp \cdots$

Satz 2:
Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ beliebig of differenzierbar und $x_0 \in (a, b)$.
Falls es Zahlen α, c gibt mit $|f^{(n)}(t)| \leq \alpha c^n$ für alle $t \in (a, b)$, dann folgt:
$f(x) = \Sigma_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ für alle $x \in (a, b)$.