BHT Berlin
Technische Informatik
Julia Loutchko

Sommersemester 2018
Mathematik II

# 8. Übungsblatt

**1. Aufgabe**. Man bestimme die Grenzwerte

$$a)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}$$

$$b)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$$

$$c)\ \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$$

$$d)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$$

$$e)\ \lim_{x\to \infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}$$

$$f)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$$

$$g)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}$$

$$h)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2+7x+10}{x^2-x-6}$$

$$i)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-5x+6}$$

$$j)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$$

$$k)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$$

.

**2. Aufgabe**. Es sei

$$f(x)=\begin{cases} -2\sin x, & x\le -\frac{\pi}{2},\\ A\sin x+B, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\\ \cos x, & x\ge \frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Die Zahlen $A$ und $B$ sind so zu wählen, dass die Funktion $f(x)$ stetig ist.

**3. Aufgabe**. Man untersuche auf der gesamten Definitionsmenge auf Stetigkeit:
a)
$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
b)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
c)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$
d)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{|x-1|}, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

**4. Aufgabe**. Wie lässt sich die Funktion
$$y = \frac{1 - \cos x}{x}$$
auf ihre hebbare Definitionslücke stetig fortsetzen?

**5. Aufgabe**.
$$a) \quad f(x) = \frac{(x-1)(x+5)}{(x+1)^2(x-3)}$$
$$b) \quad f(x) = \frac{(x+1)^2(x^2+x-2)}{x^3+5x^2+6x}$$
$$c) \quad f(x) = \frac{2x^4 - 2x^3 - 20x^2 + 8x + 48}{x^3 + x^2 - 4x - 4}$$
Diskutieren Sie den Verlauf der oben gegebenen gebrochenrationalen Funktionen: (Definitionslücken, Nullstellen, Pole, Asymptoten, Schnittpunkt mit der $y$-Achse). Gibt es hebbare Definitionslücken? Wie lautet gegebenfalls die "erweiterte" Funktion? Skizzieren Sie den Kurvenverlaf.

**6. Aufgabe**. Eine gebrochenrationale Funktion besitzt an der Stellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 5$ einfache Nullstellen und bei $x_3 = 0$ und $x_4 = 6$ Pole 1. Ordnung. Für große $x$-Werte, d.h. für $x \longrightarrow \pm\infty$ nähert sie sich asymptotisch der Geraden $y = -2$. Durch welche Gleichung lässt sich diese Funktion beschreiben? Skizzieren Sie den Kurvenverlauf.

**7. Aufgabe**. Eine gebrochenrationale Funktion besitze folgende Eigenschaften:
Doppelte Nullstelle bei $x_{1,2} = 2$;
Einfache Polstellen bei $x_3 = -4$, $x_4 = 0$, und $x_5 = 10$;
Punkt $P = (1;\ 0,2)$ liegt auf der Kurve.
a) Wie lautet die Funktionsgleichung?
b) Skizzieren Sie den Kurvenverlauf.

**8. Aufgabe**. Man bestimme die Ableitungen der Funktionen direkt nach der Definition:

$$a)\ \ f(x) = x^3 - x^2 - 4$$
$$b)\ \ f(x) = (-2x+3)^2$$
$$c)\ \ f(x) = \cos x$$

**9. Aufgabe**. Folgende Funktionen sind zu differenzieren (nach Ableitungsregeln):

$$a)\ \ f(x) = (2x^2+1)\sqrt{x}$$

$$b)\ \ f(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$

$$c)\ \ f(x) = 3x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$$

$$d)\ \ f(x) = \sqrt{x}(x^2-1)\sin x$$

$$e)\ \ f(x) = 2e^x \arcsin x$$

$$f)\ \ f(x) = \frac{3-2x}{3+2x}$$

$$g)\ \ f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$h)\ \ f(x) = \frac{2x - \sqrt[3]{x}}{x^2-2x-1}$$

**10. Aufgabe**. Beweisen Sie die Produktregel:

$$f(x) = u(x)v(x) \Longrightarrow f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

**11. Aufgabe**. Differenzieren Sie die folgenden Funktionen:

a)

$$y = e^{-2t} \cdot \cos t$$

b)

$$y = e^{x \cdot \sin x}$$

c)

$$y = (x^2-1)^2 \cdot (x+5)^3$$

d)

$$y = (2x^2 - 4x + 5) \cdot \sin(2x)$$

e)

$$y = e^{2x} \cdot \arcsin(x-1)$$

f)

$$z = (2-3t) \cdot e^{-5t}$$

g)

$$y = x \cdot \ln(x+e^x)^2$$

h)

$$y = 4^{x \cdot \ln x}$$

i)

$$y = \sin(x^2+1) \cdot \cos(4x)$$

j)

$$y = 4\cos(x-4) + \sin(2x+3)$$

k)

$$y = \ln(\frac{1}{x^2}) + \ln\frac{x+4}{x}$$

l)

$$y = x^{\cos x}$$