Wintersemester 2018/2019, Mathematik 1 (Technische Informatik)
Prof. Dr. Yuri Luchko

Klausurvorbereitungsaufgaben

1. Aufgabe. Zeigen Sie mittels Wahrheitstafeln, dass die Aussagen

$$A \vee (B \wedge C) \quad \text{und } (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

identisch (gleichwertig) sind.

2. Aufgabe. Geben Sie eine auflistende Beschreibung der folgenden Lösungsmenge:

$$\left\{x: (x \geq 0) \wedge (\sqrt{x+8} - \sqrt{x+3} - \sqrt{x} = 0)\right\}.$$

3. Aufgabe. Beweisen Sie die Formel

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

für alle $n \in I\!N$ mithilfe der mathematischen Induktion.

4. Aufgabe. Bestimmen Sie die ersten 3 Summanden in der binomischen Formel für $(1 + x)^{20}$.

5. Aufgabe. Formen Sie folgende rationale Zahlen zu endlichen bzw. periodischen Dezimalbrüchen um:
a) $r_1 = \frac{7}{4}$,
b) $r_3 = -\frac{2}{3}$.

6. Aufgabe. Formen Sie folgende Dezimalbrüche zu rationalen Zahlen um:
a) $d_1 = 0, \overline{7}$
b) $d_2 = -1, 12\overline{56}$

7. Aufgabe. Lösen Sie die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen:
a) $-|x + 1| + |2 - x| = |x| - 6$,
b) $|x^2 - 6x| = -8$,
c) $-3x^2 + 5x + 2 > 0$,
d) $\frac{2x+2}{x-2} \leq 1$.

8. Aufgabe. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen (Definitionsbereiche, Wertebereiche, Nullstellen, Symmetrieeigenschaften, Monotonieverhalten) und skizzieren ihre Graphen:

$$y = -x^2 + 2x - 1, \quad y = x^{\frac{4}{3}}, \quad y = 2\cos(3x - 1),$$

$$y = -\arctan(2x), \quad y = -2^{x-1}, \quad y = \ln(-x).$$

9. Aufgabe. Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen (Funktionsvorschriften, Definitionsbereiche, Wertebereiche) der folgenden Funktionen:

$$y = \frac{x-1}{x+1}, \quad x > -1,$$

$$y = \sqrt[3]{5x-7},$$

$$y = 2\sin(2x), \quad x \in [-\pi/4, \pi/4],$$

$$y = 3\left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

10. Aufgabe. Für die Polynome $P(x) = 1+x^2-4x^5$ und $Q(x) = 1+x+x^2-x^3$ berechnen Sie $P(x) + Q(x)$, $P(x) \times Q(x)$ und $P(x)/Q(x)$.

11. Aufgabe. Bestimmen Sie die Amplitude A, die Periode T, die Phasenverschiebung ϕ der harmonischen Schwingung

$$y = \frac{1}{3}\sin(3x - \pi/4)$$

und skizzieren ihren Funktionsgraphen.

12. Aufgabe. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

$$\sin(2x-5) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \;\; 5\cos(2x) = a \; (a \in [-1,1]), \;\; \sin\left(\frac{x}{2}+3\right) = \frac{1}{5}, \;\; \tan(3x) = 15.$$

13. Aufgabe. Für die komplexen Zahlen

a) $2 - 3i$

b) $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$

berechnen Sie jeweils ihre Beträge, Argumente und konjugiert komplexe Zahlen. Wandeln Sie die komplexen Zahlen aus der Normalform in die trigonomertische und exponentielle Form um.

14. Aufgabe. Wandeln Sie die komplexen Zahlen

a) $z_1 = 3;\; z_2 = 4i$

b) $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i;\ z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
in die exponentielle Form um und berechnen dann jeweils $z_1 \cdot z_2$, z_1/z_2, z_1^5 und z_2^{10}. Die Ergebnisse wandeln Sie in die Normalform um.

15. Aufgabe. Stellen Sie die harmonischen Schwingungen

a) $y(t) = 3\sin(2t)$

b) $y(t) = 2\sin(3t + \pi)$

c) $y(t) = \cos(t + \pi/4)$

als komplexe Zeiger dar. Was sind die Amplituden und die komplexen Amplituden dieser harmonischen Schwingungen? Stellen Sie die Zeiger graphisch dar.

16. Aufgabe. Zwei harmonische Schwingungen

$$y_1(t) = 3\sin(2t + \pi/2),\ y_2(t) = 2\cos(2t - \pi/3)$$

werden überlagert. Berechnen Sie die komplexe Amplitude und dann die Amplitude der resultierenden harmonischen Schwingung.

17. Aufgabe. Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Vektorkoordinaten sowie die Beträge der folgenden Vektoren:

a) $\vec{s} = 3\vec{a} + 4(\vec{b} + 2\vec{c}) - 2(2\vec{a} - \vec{c})$

b) $\vec{s} = 3\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{a} + 5(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{c} + \vec{a})\vec{c}$

18. Aufgabe. Bestimmen Sie die Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

19 Aufgabe. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

20. Aufgabe. Prüfen Sie, ob die drei Punkte $P_1 = (3,\ 0,\ 4)$, $\quad P_2 = (1,\ 1,\ 1)$ und $P_3 = (-7,\ 5,\ -11)$ auf einer Geraden liegen.

21. Aufgabe. Zeigen Sie, dass die drei Kräfte

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -20 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

auf einer Ebene liegen. Berechnen Sie die resultierende Kraft $\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$.

22. Aufgabe. Bestimmen Sie das Volumen des von den Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

gebildeten Spats.