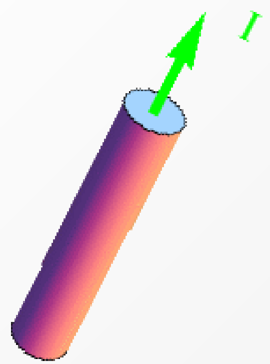
Der Magnetische Kreis und seine Analogie zum elektrischen Stromkreis

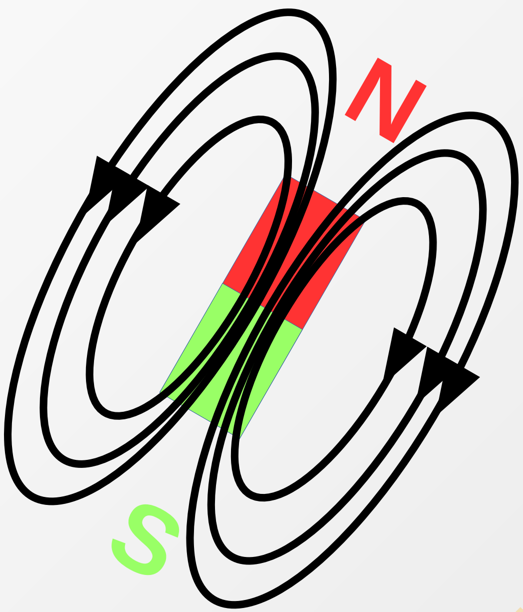
Ernst Lenz

Was den vorhergehenden Vorlesungen bekannt ist I:

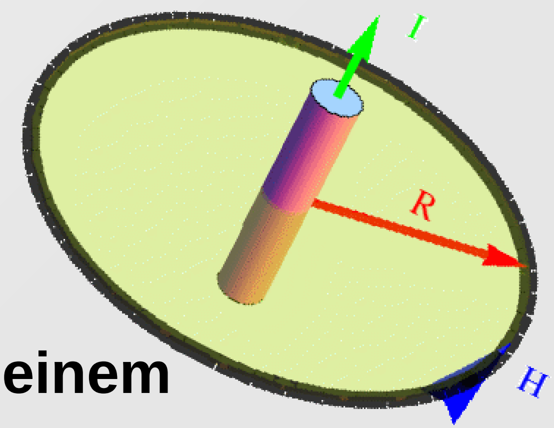


- **Ein von einem elektrischem Strom *I* durchflossener elektrischer Leiter**

  $U = R \cdot I \;\leftarrow\; \underline{j} = \sigma\,\underline{E}$



- **Magnetfeld eines Stabmagneten**



- **Magnetfeld *H̲* eines von einem elektrischen Strom *I̲* durchflossenen elektrischen Leiter**

$$H_\phi(R) = \frac{I}{2\pi R}$$

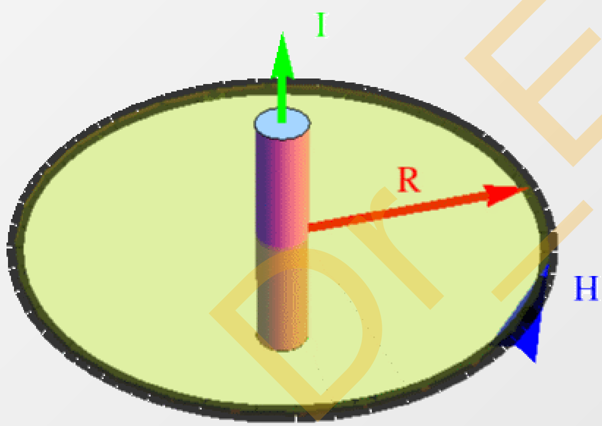
Was den vorhergehenden Vorlesungen bekannt ist II:

- **Wir hatten uns ja schon das Integral über den geschlossenen Umlauf um einen Stromduchflossenen Leiter hergeleitet.**

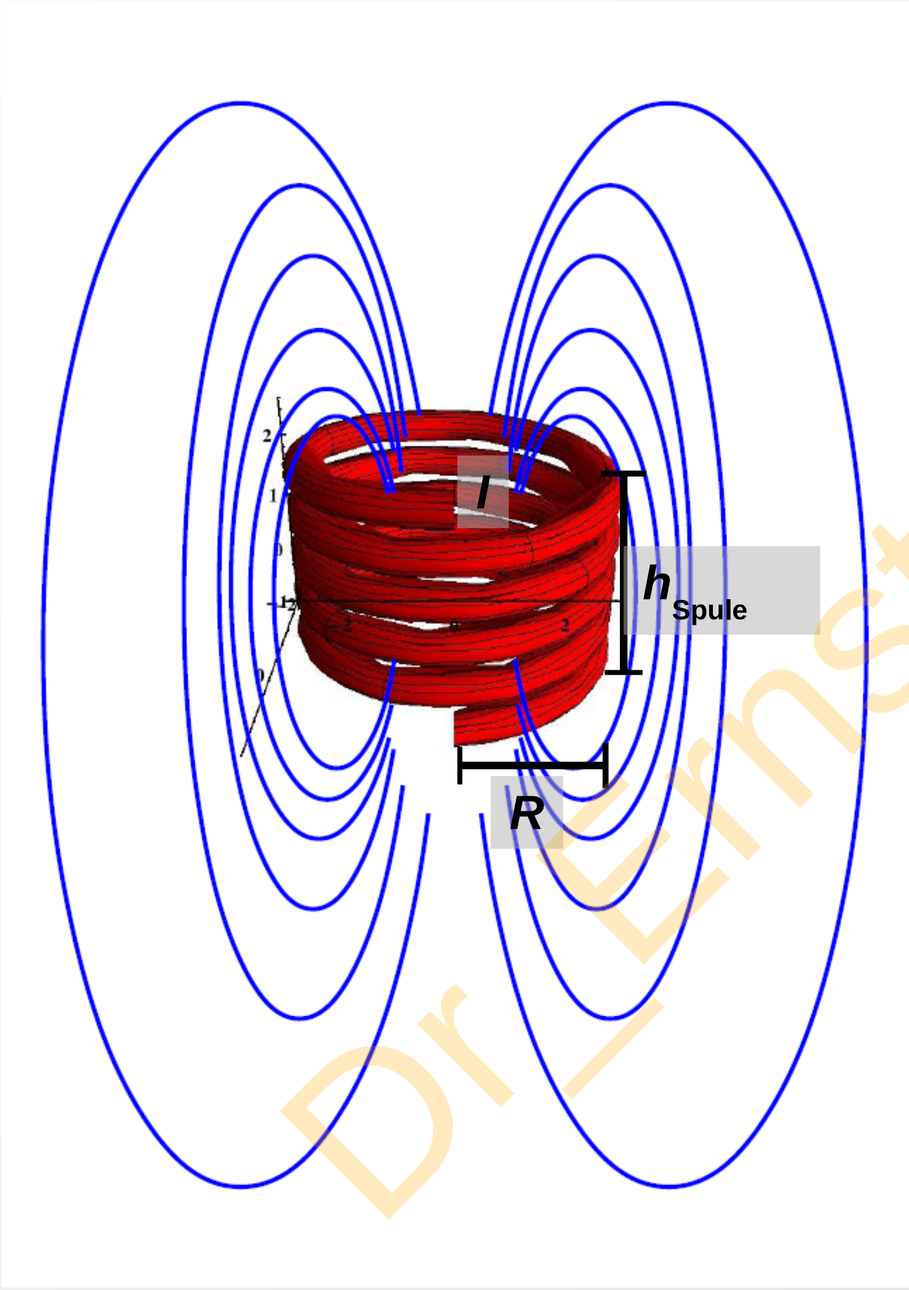
  - Die magnetische Kraft (auf Kompassnadel) war ja lediglich abhängig vom Abstand *R* vom Leiter, so erhielten wir die Aussage:

$$\oint_l \underline{B}(r)\cdot d\,\underline{s}=\mu\, I \xrightarrow[B/\mu=H]{} \oint_l \underline{H}(r)\cdot d\,\underline{s}=I$$

Ampèresches Gesetz **Durchflutung**



Was den vorhergehenden Vorlesungen bekannt ist III:



- **Eine von einem Strom *I* durchflossene Spule mit *N* Windungen erzeugt ein Magnetfeld (Spulenmitte)**

Es gelte $R \ll h_{Spule}$:

$$H_M = \frac{N \cdot I}{h_{Spule}}$$

Was den vorhergehenden Vorlesungen bekannt ist IV:

- Ein von einem elektrischem Strom *I* durchflossener Leiter erzeugt Ein Magnetfeld *H*

  → Ablenkung einer Kompassnadel (Stabmagneten)

$$\underline{H}(r) = \frac{\underline{I}}{2\pi r} \quad , \quad \text{mit} \quad [H] = \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

- Sich ergebende Proportionalitätskonstante aus dem Verhältnis der Auftretenden Kraft $\underline{F}$ und dem Produkt aus Stromstärke $\underline{I}$ und Länge $\underline{\mathscr{L}}$ des Leiters ist die magnetische Flussdichte $\underline{B}$

$$\underline{F} = I\left(\underline{\mathscr{L}} \times \underline{B}\right) \quad \overset{\rightarrow}{\approx} \quad \underline{B} = \frac{\underline{F}}{\underline{I} \cdot \underline{\mathscr{L}}} \quad , \quad \text{mit} \quad [\underline{\text{B}}] = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} = \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = \text{T}$$

- Zusammenhang zwischen magnetischer Flussdichte $\underline{B}$ Magnetischem Feld $\underline{H}$

$$\underline{H} = \frac{\underline{B}}{\mu} \quad ; \quad \mu = \text{Materialkonstante} \quad \text{und} \quad [\mu] = \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

μ = Permeabilität mit $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$
μ_0 = Permeabilität des Vakuums
μ_r = rel. Permeabilität des Materials

- Durch Integration über die von der magnetischen Flussdichte $\underline{B}$ durchsetze Fläche $\underline{A}$ ergibt sich der magnetische Fluss Φ

$$\Phi = \int_A \underline{B} \cdot d\underline{A} \overset{\underline{B}\text{, homogen}}{=} \underline{B} \cdot \int_A d\underline{A} \overset{\underline{A}\text{, nicht gekrümmt}}{=} \underline{B} \cdot \underline{A} \quad , \quad \text{mit} \quad [\Phi] = \text{V} \cdot \text{s} = \text{Wb}$$

Zeitliche Diffentiation des magnetischen Flusses Φ Motivation

- **Differentiation nach der Zeit**

$$\frac{d}{dt}\Phi = \frac{d}{dt}\left\{\int_A \underline{B}\cdot d\underline{A}\right\} \overset{\underline{B}\text{, homogen}}{=} \frac{d}{dt}\left\{\underline{B}\cdot\int_A d\underline{A}\right\} \overset{\underline{A}\text{, nicht gekrümmt}}{=} \frac{d}{dt}\left\{\underline{B}\cdot\underline{A}\right\}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\left\{\underline{B}\right\}\right)\cdot\underline{A}} + \underbrace{\underline{B}\cdot\left(\frac{d}{dt}\left\{\underline{A}\right\}\right)}$$

Zeitliche Änderung der (homogenen) magnetischen Flussdichte *B* welche die Fläche *A* (senkrecht) durchsetzt.

Zeitliche Änderung der Fläche *A* welche von der (homogenen) magnetischen Flussdichte *B* senkrecht durchsetzt wird.

- **Die Dimension der zeitlichen Differentiation des magnetischen Flusses Φ ergibt sich zur Dimension der elektrischen Spannung U (Betrag der induzierten Spannung)**

$$\left[\frac{d}{dt}\Phi\right] = \frac{1}{s}\cdot V\cdot s = V = [U]$$

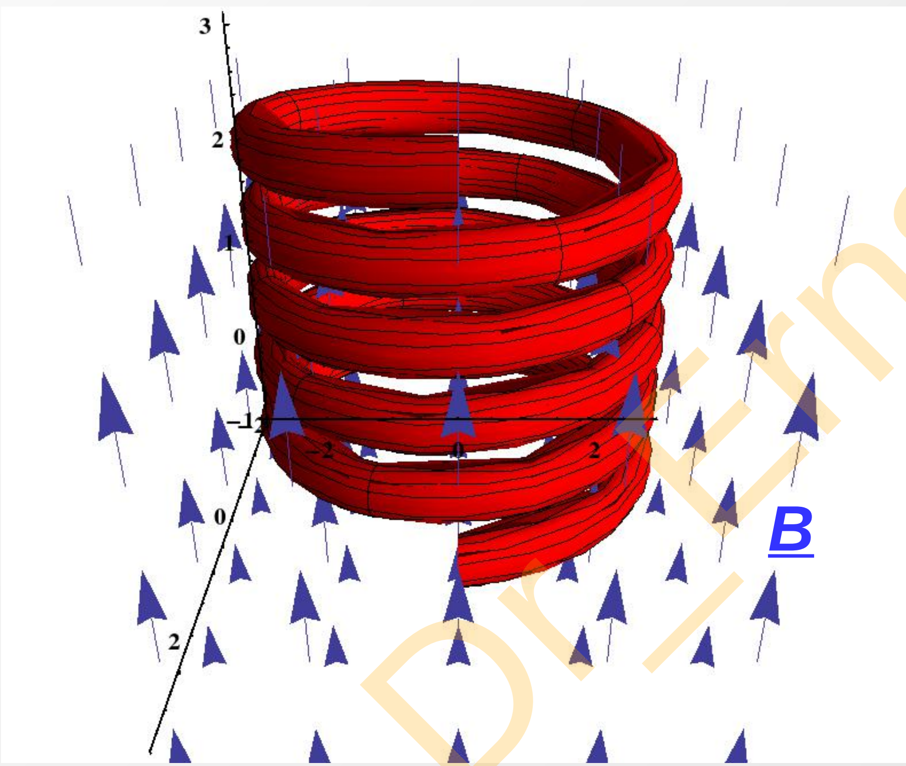
$$|U| = \left|\frac{d}{dt}\Phi\right|$$

(Räumlich feste) Spule im (zeitlich variablen) Magnetfeld

- **Ein Objekt mit N Leiterschleifen (Windungen) nennen wir natürlich eine Spule**

- **Das Vorherige gilt für jede Windung**

$$\rightarrow \ U = -N \cdot \frac{d}{dt} \Phi$$



- **Somit erhöht sich die erzeugte Spannung proportional mit der Anzahl der Windungen der Drahtschleife die Entsprechend am Vorgang (Induktion) beteiligt sind.**

$$U = -N \cdot \frac{d}{dt} \Phi = \Big| \; -N \cdot A_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \underline{B}$$

Nur zeitliche Änderung des B-Felds

A_0 Spulenquerschnittsfläche

Durch einen Kern gekoppelte Spulen (Transformator)

1: Primäre Spule mit

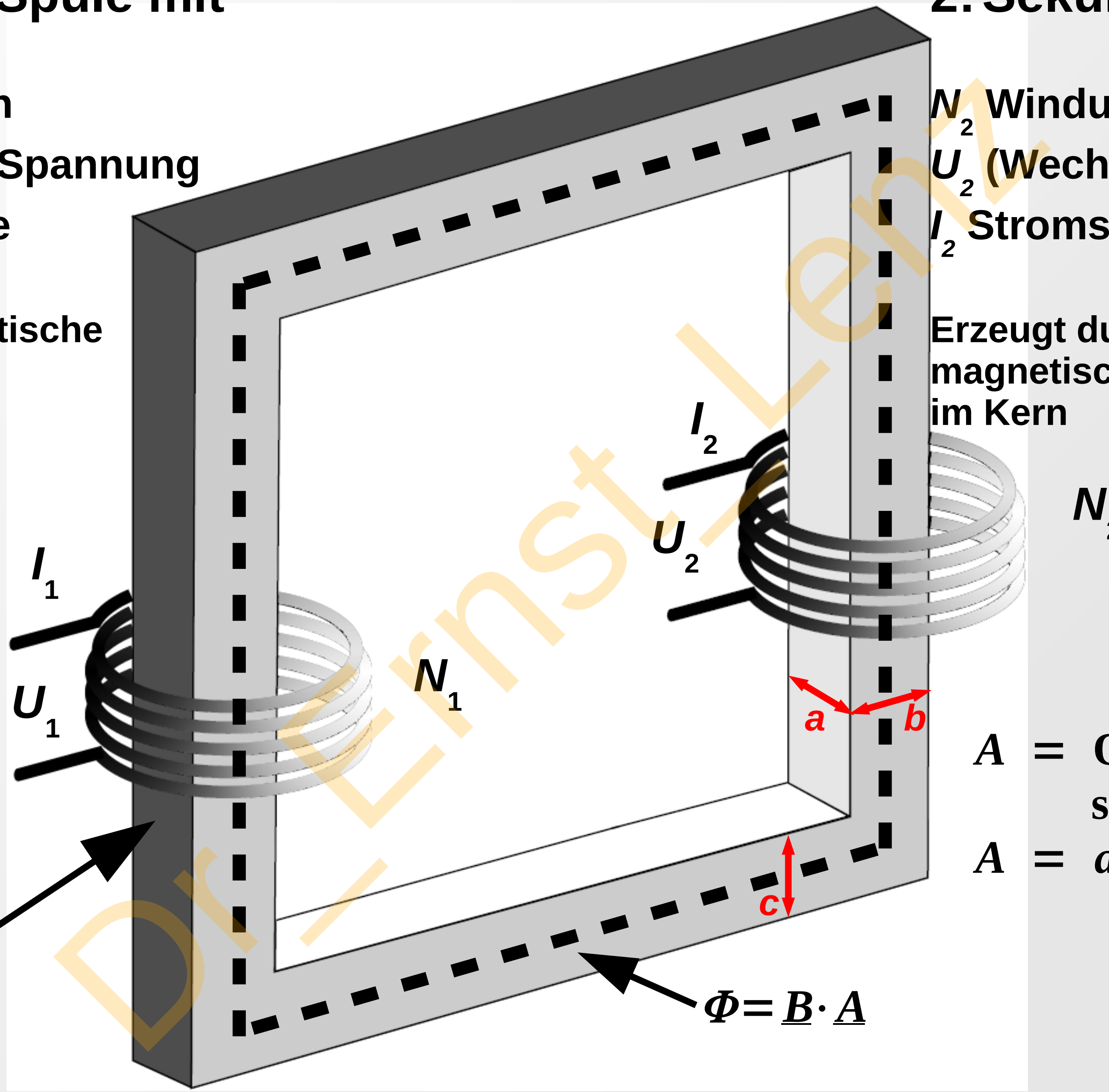
N_1 Windungen
U_1 (Wechsel-)Spannung
I_1 Stromstärke

Erzeugt magnetische Flussdichte *B* Im Kern

2: Sekundäre Spule mit

N_2 Windungen
U_2 (Wechsel-)Spannung
I_2 Stromstärke

Erzeugt durch magnetische Flussdichte *B* im Kern

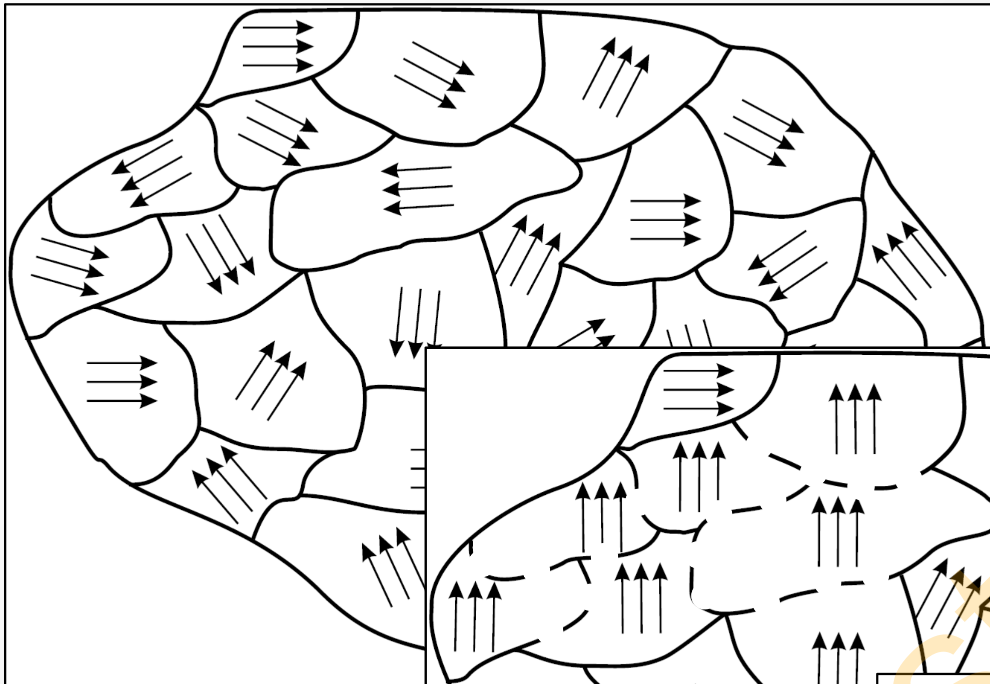


Kern

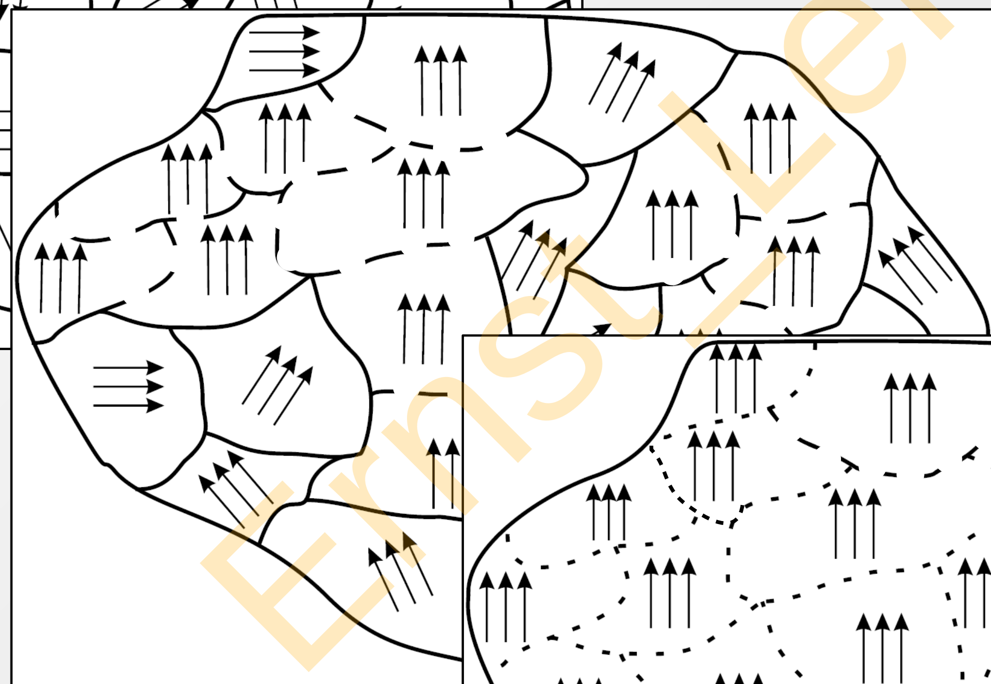
A = Querschnittsfläche sei überall gleich

$A = a \cdot b = a \cdot c$

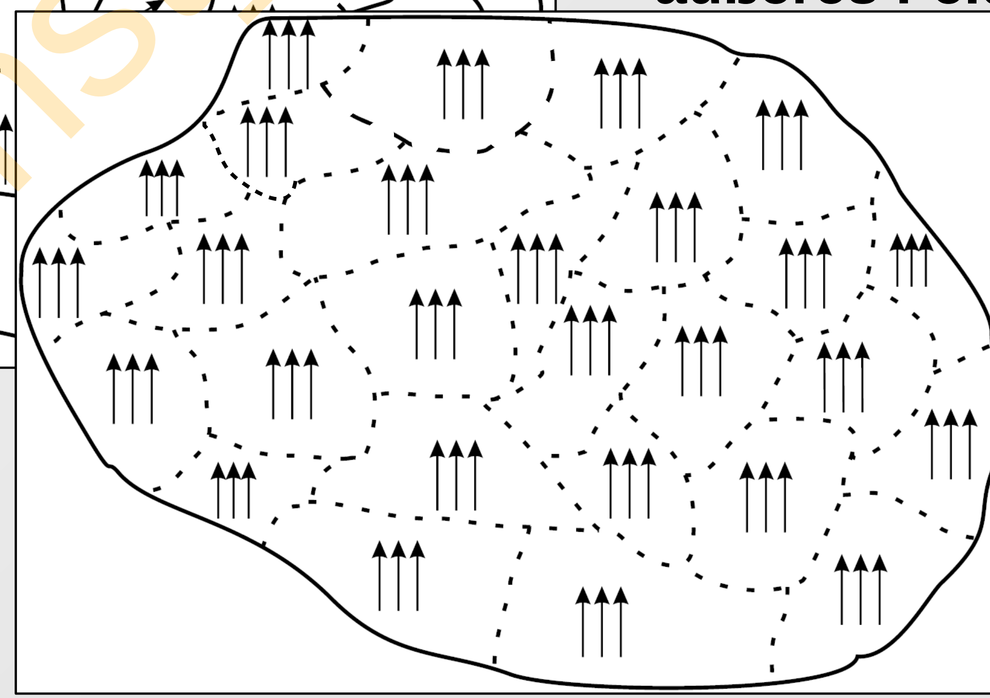
Magnetisierung



- Weißsche Bezirke eines unmagnetisierten magnetisierbaren Materials

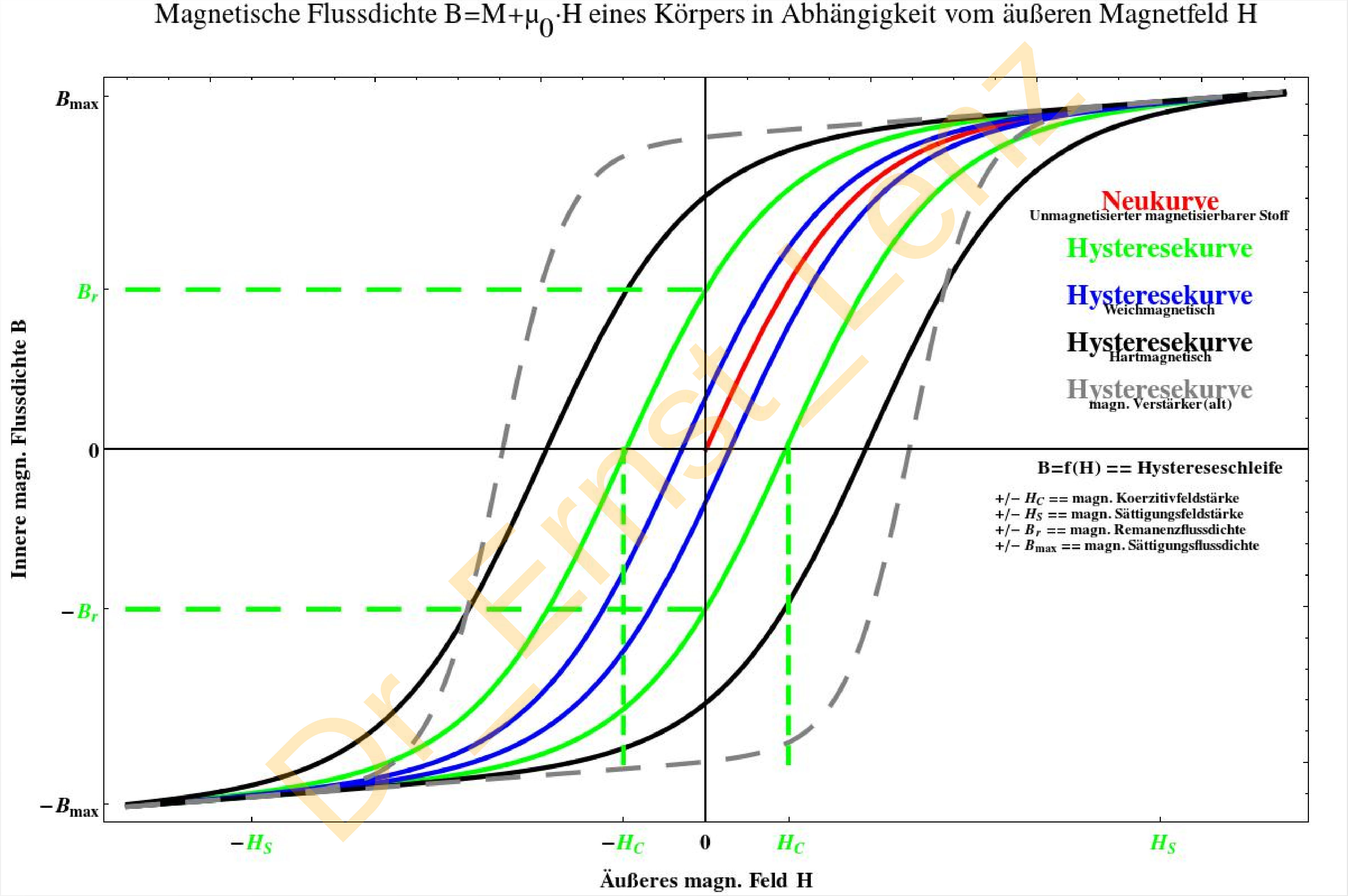


- Ausrichtung der Weißschen Bezirke bei zunehmender Magnetisierung z.B. durch ein äußeres Feld



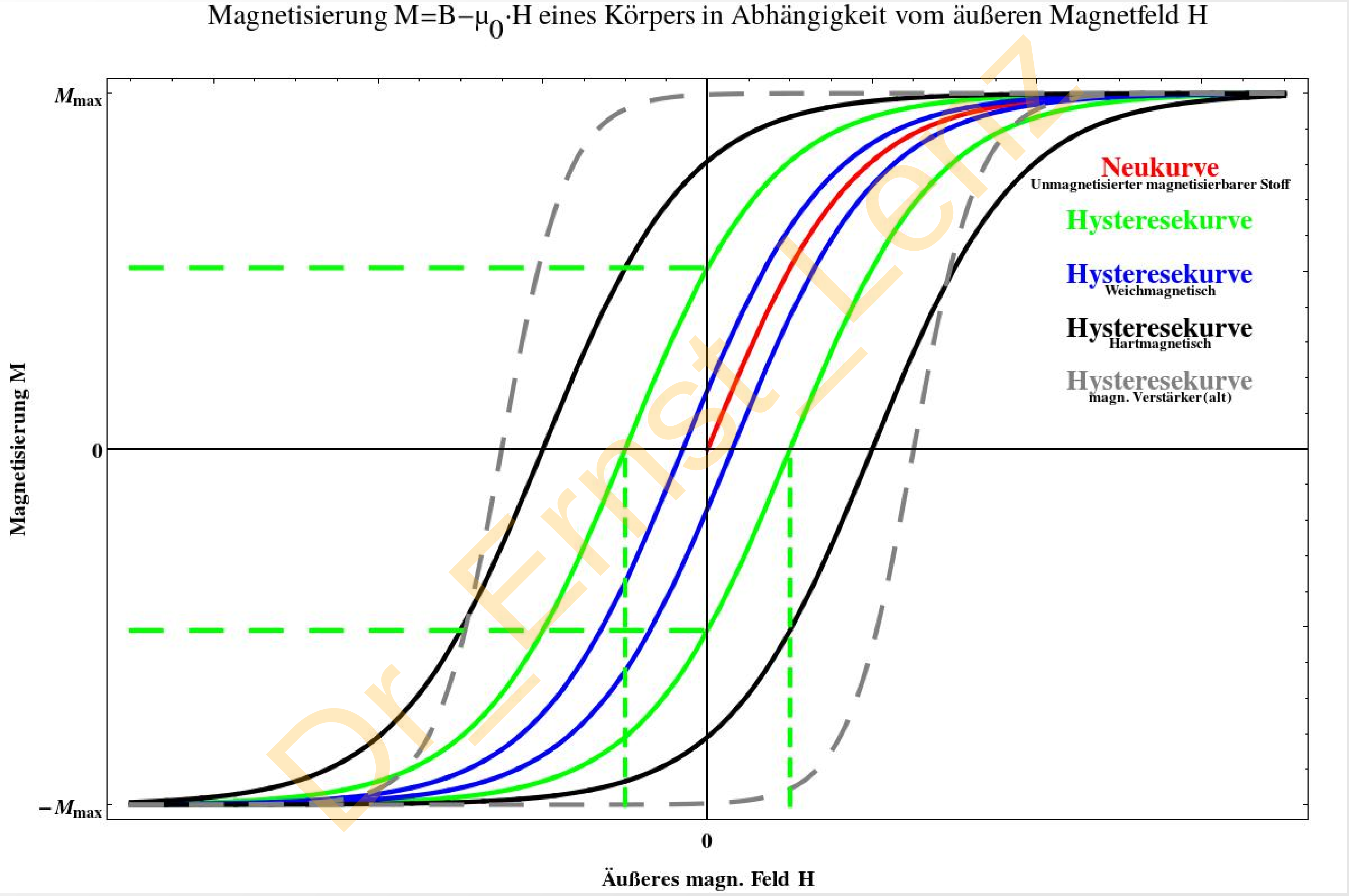
- Ausrichtung aller Weißschen Bezirke bei vollständiger Magnetisierung eines magnetisierbaren Materials

Hysterese

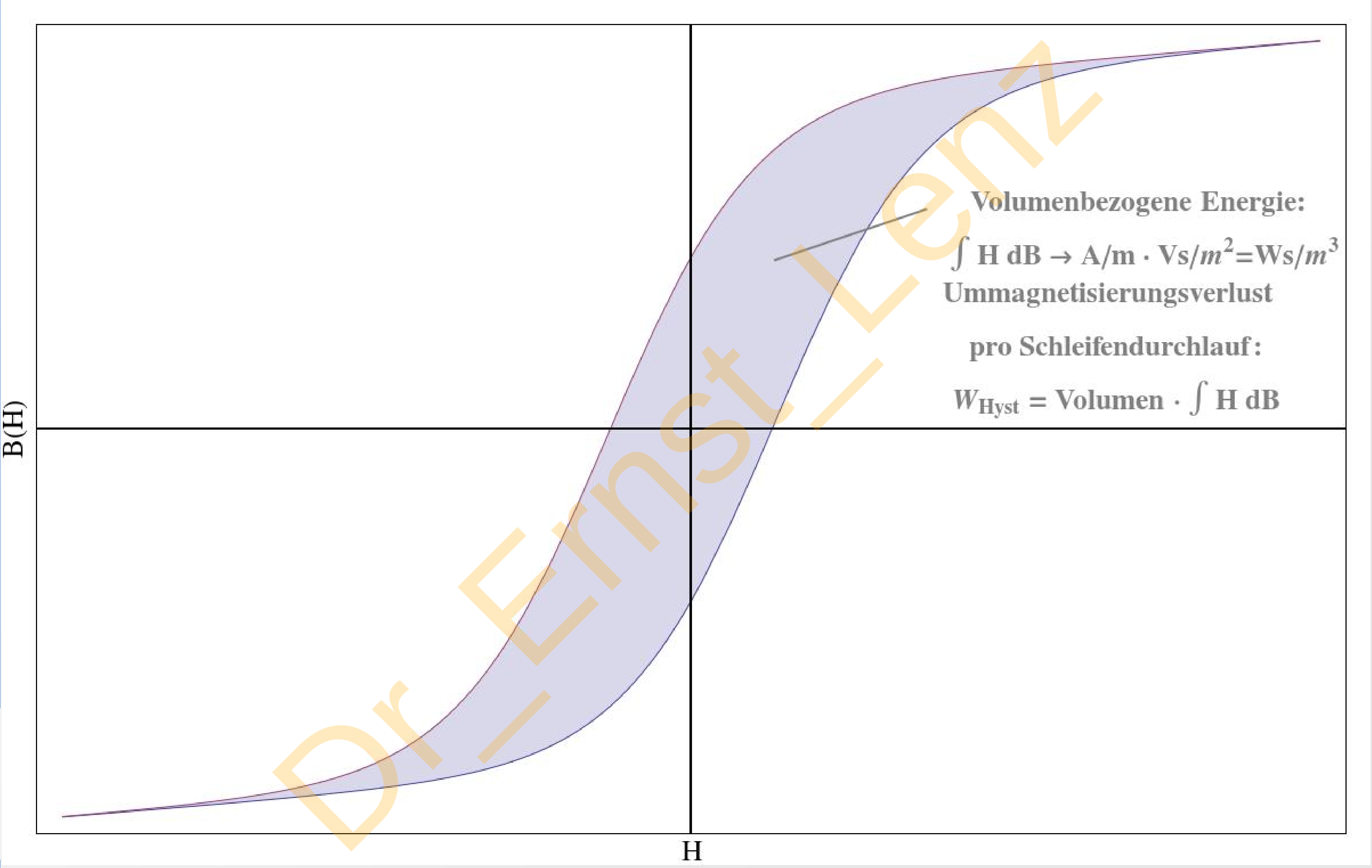


Magnetische Flussdichte B=M+μ0·H eines Körpers in Abhängigkeit vom äußeren Magnetfeld H
Bmax
Br
0
−Br
−Bmax
Innere magn. Flussdichte B
−HS
−HC
0
HC
HS
Äußeres magn. Feld H
Neukurve
Unmagnetisierter magnetisierbarer Stoff
Hysteresekurve
Hysteresekurve
Weichmagnetisch
Hysteresekurve
Hartmagnetisch
Hysteresekurve
magn. Verstärker (alt)
B=f(H) == Hystereseschleife
+/− HC == magn. Koerzitivfeldstärke
+/− HS == magn. Sättigungsfeldstärke
+/− Br == magn. Remanenzflussdichte
+/− Bmax == magn. Sättigungsflussdichte
Dr. Ernst Lenz

Magnetisierung eines Stoffes



Ummagnetisierung eines Stoffes



Einführung des magnetischen Widerstandes

- Da wir wissen:

$$\oint_l \underline{B}(r)\cdot d\,\underline{s} = \mu\, I \rightarrow \oint_l \underline{H}(r)\cdot d\,\underline{s} = \sum_\nu I_\nu = \Theta \equiv \text{Durchflutung}$$

Die Durchflutung *Θ* entspricht der Summe aller der vom geschlossenem Weg *l* umschlossenen elektrischen Ströme.

- Wir haben somit folgende Größen:

Elektrisch	Magnetisch
Die elektrische Spannung *U*	Die Durchflutung *Θ*
Den elektrischen Strom *I*	Den magnetischen Fluss *Φ*
Den elektrischen Widerstand *R*	Den magnetischen Widerstand R_m
$U = R\,I$	$\Theta = R_m\,\Phi$

Mit identischen Regeln für *R* und R_m

Stromkreis → magnetischer Kreis

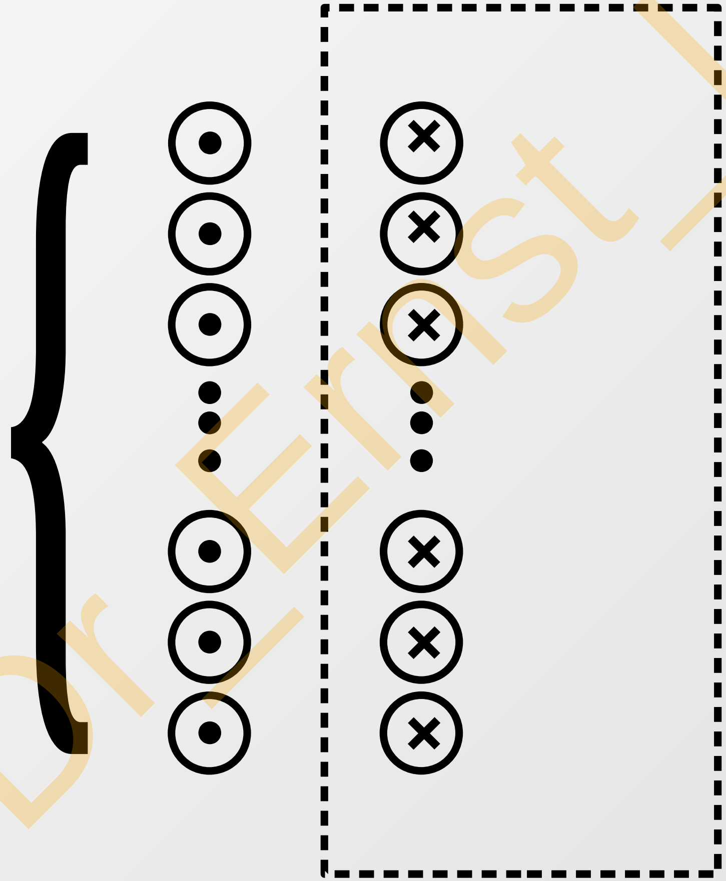
Spule (*R* << *L*) als Quelle der Durchflutung *Θ*

- **Da wir wissen:**

$$\oint_l \underline{B}(r)\cdot d\,\underline{s} = \mu\, I \rightarrow \oint_l \underline{H}(r)\cdot d\,\underline{s} = N\cdot I = \Theta \equiv \text{Durchflutung}$$

Die Durchflutung *Θ* entspricht der Summe aller der vom geschlossenem Weg *l* umschlossenen elektrischen Ströme.

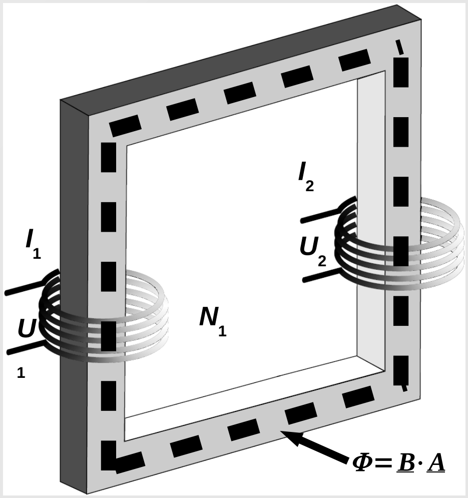
Spule mit *N* Windungen



Weg *l* um Spule mit *N* eingeschlossenen Strömen *I*

→ Durchflutung $\Theta = N\cdot I$

$$\Theta = R_m\,\Phi$$



Berechnung vom magnetischen Widerstand R_m

- Wir gehen davon aus, dass
  - *B* homogen
  - *A* konstant
  - eine mittlere Weglänge l_{eff} sinnvoll
  - das Material (vorerst) überall das gleiche sei.

- Dann ergibt sich der magnetische Widerstand eines Materials ξ zu:

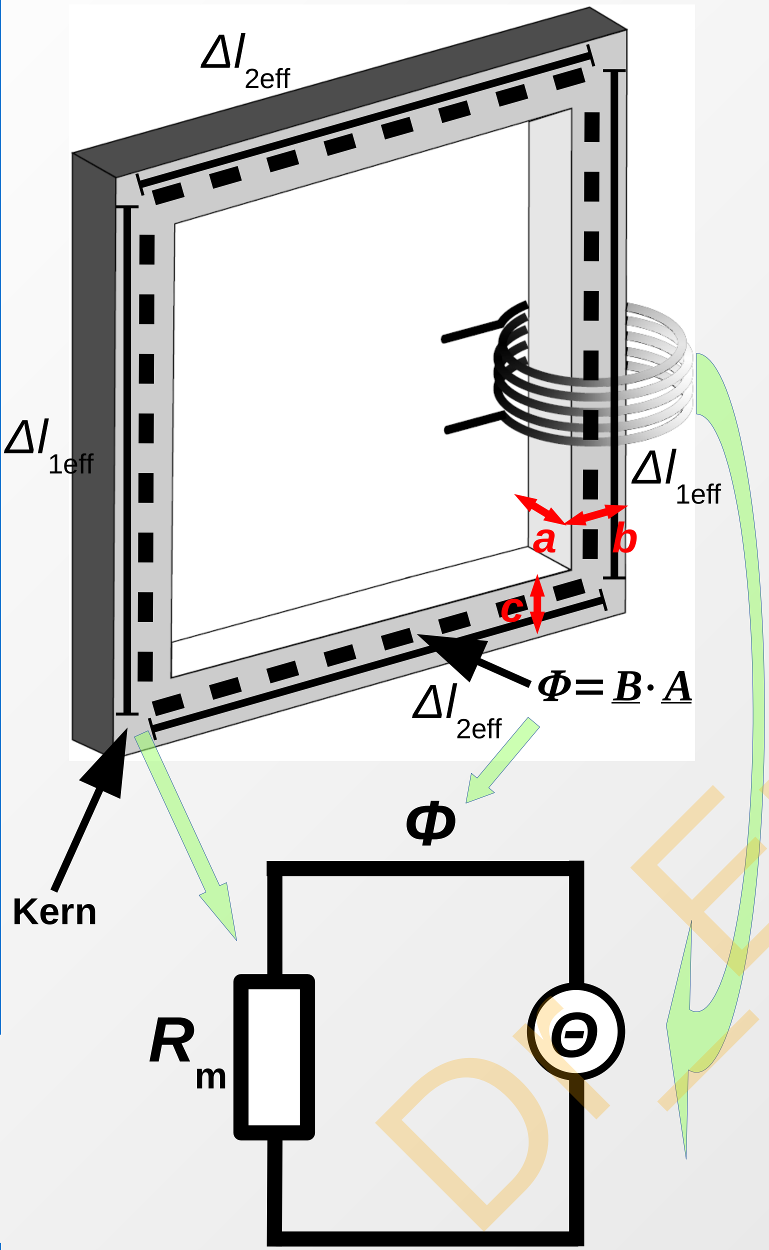
$$R_{m,\xi} = \frac{l_{eff}}{\mu \cdot A} = \frac{l_{eff}}{\mu_0 \cdot \mu_{r,\xi} \cdot A}, \qquad \mu = \text{Permeabilität}$$

$\mu_0 = \text{Vakuumpermeabilität}$
$\mu_{r,\xi} = \text{rel. Permeabilität des Stoffes } \xi$

- Zum Vergleich rufen wir uns den elektrischen Widerstand in Erinnerung:

$$R = \frac{\varrho \cdot l}{A} = \frac{l}{\sigma \cdot A}, \qquad \varrho = \text{spez. Widerstand}, \ \sigma = \text{spez. Leitwert}$$

Einfacher Magnetischer Kreis



$$U = R \cdot I \xrightarrow{\text{Magn. Kreis}} \Theta = R_m \Phi$$

$$\Theta = N \cdot I = \frac{l_{eff}}{\mu_0 \cdot \mu_{r,K} \cdot A} B \cdot A = \frac{2 \cdot \Delta l_{1eff} + 2 \cdot \Delta l_{2eff}}{\mu_0 \cdot \mu_{r,K}} \cdot B$$

$$N \cdot I = \frac{2 \cdot (\Delta l_{1eff} + \Delta l_{2eff})}{\mu_0 \cdot \mu_{r,K}} \cdot B = \underbrace{2 \cdot (\Delta l_{1eff} + \Delta l_{2eff}) \cdot H_K}$$

Das wussten wir natürlich schon vorher, da

$$\oint_l \underline{H}(r) \cdot d\,\underline{s} = \Theta$$

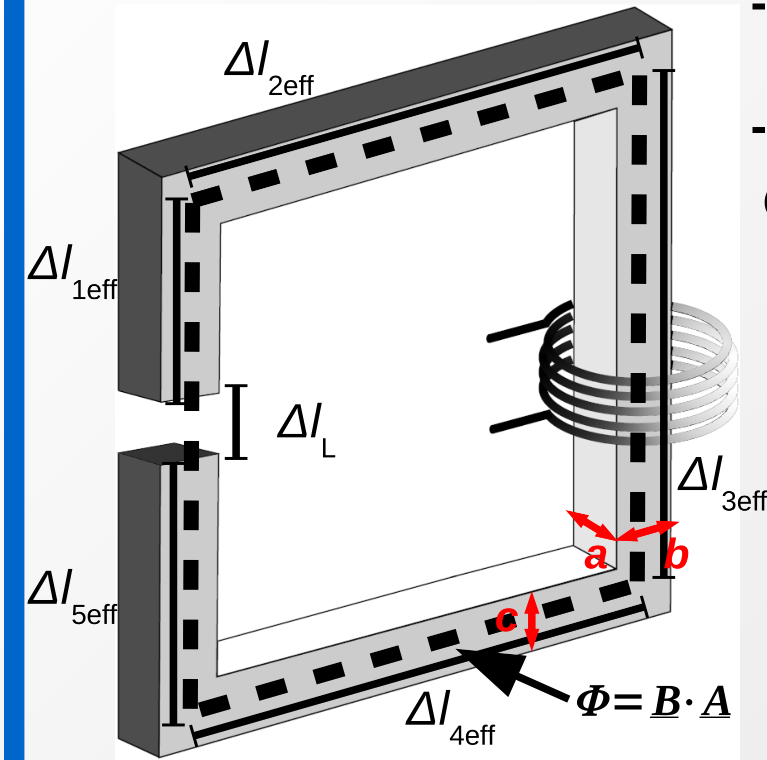
$$\Theta = N \cdot I$$

$$\Phi = \underline{B} \cdot \underline{A}$$

$$R_m = \frac{l_{eff}}{\mu_0 \cdot \mu_{r,K} \cdot A}$$

$\mu_{r,K}$ = rel. Permeabilität des Kerns

Einfacher Magnetischer Kreis mit Luftspalt



- B homogen, $B_K = B_L$ → Vernachlässigung von Streufeldern(kleiner Luftspalt)
- A konstant

$$\Theta = R_m \Phi = \oint_l H \cdot ds = \underbrace{\int_{l_{Kern}} H_K \cdot ds}_{\text{magn. Spannung Kern}} + \underbrace{\int_{l_{Luft}} H_L \cdot ds}_{\text{magn. Spannung Luft}}$$

$$= H_K \cdot \int_{l_{Kern}} ds + H_L \cdot \int_{l_{Luft}} ds$$

$$= H_K \cdot \underbrace{\left(\Delta l_{1eff} + \Delta l_{2eff} + \Delta l_{3eff} + \Delta l_{4eff} + \Delta l_{5eff}\right)}_{l_{Kern}} + H_L \cdot \Delta l_L$$

$$= \underbrace{H_K \cdot l_{Kern} + H_L \, \Delta \cdot l_L}_{\text{verallgem. Durchflutung}}$$

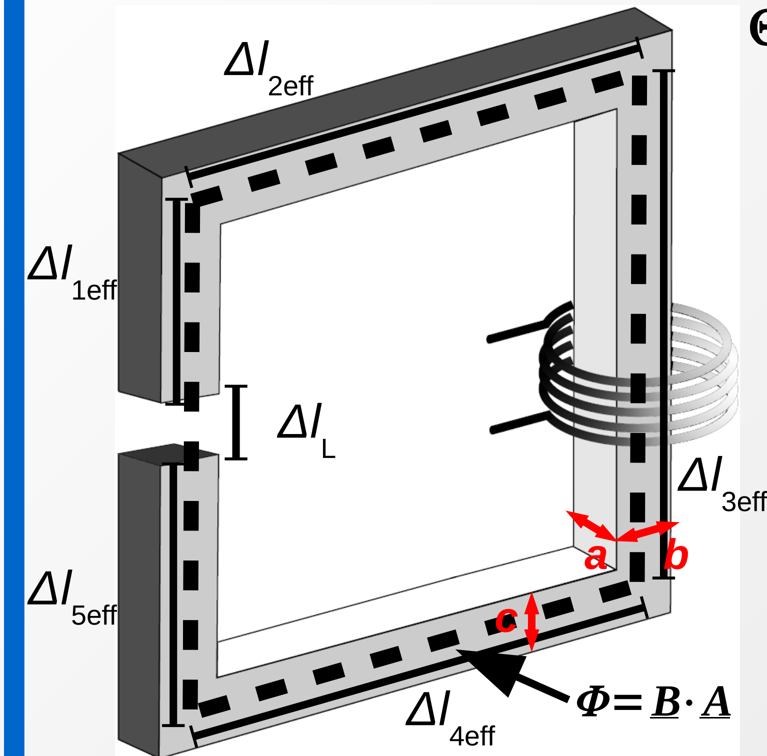
$$= \frac{B_K}{\mu_0 \mu_K} \cdot l_{Kern} + \frac{B_L}{\mu_0 \mu_L} \cdot l_{Luft} \underset{\mu_L \approx 1}{=} \frac{B_K}{\mu_0 \mu_K} \cdot l_{Kern} + \frac{B_K}{\mu_0} \cdot l_{Luft}$$

$$= \frac{B_K}{\mu_0} \cdot \left(\frac{l_{Kern}}{\mu_K} + l_L\right) = N \cdot I \rightarrow B_K = \frac{\mu_0 N \cdot I}{\left(\frac{l_{Kern}}{\mu_K} + l_L\right)}$$

- Typische Frage:
  Welchen Betrag besitzt das Magnetfeld H_L
  bzw. die magnetische Flussdichte B_L im Luftspalt?

$$H_L = \frac{B_L}{\mu_0} = \frac{B_K}{\mu_0} = \frac{N \cdot I}{\left(\frac{l_{Kern}}{\mu_K} + l_L\right)}$$

Einfacher Magnetischer Kreis mit Luftspalt



$$\Theta = R_m \Phi$$

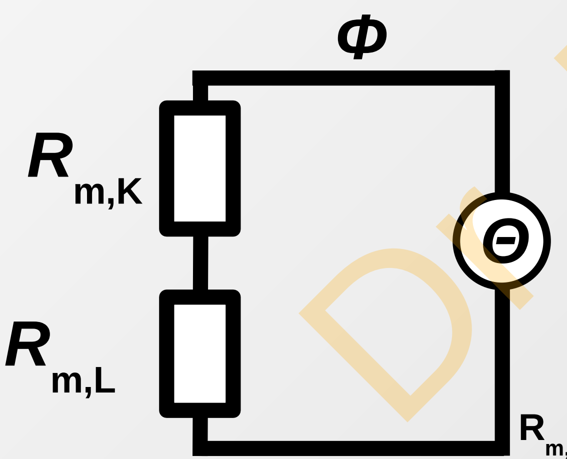
$$= \boxed{\frac{B_K}{\mu_0\mu_K}\cdot l_{Kern} + \frac{B_L}{\mu_0\mu_L}\cdot l_{Luft}} \underset{\mu_L\approx 1}{=} \frac{B_K}{\mu_0\mu_K}\cdot l_{Kern} + \frac{B_K}{\mu_0}\cdot l_{Luft}$$

$$= \frac{B_K}{\mu_0}\cdot\left(\frac{l_{Kern}}{\mu_K} + l_L\right) = N\cdot I \rightarrow B_K = \frac{\mu_0 N\cdot I}{\left(\frac{l_{Kern}}{\mu_K} + l_L\right)}$$

$$= \frac{B_K}{\mu_0\mu_K}\cdot l_{Kern} + \frac{B_L}{\mu_0\mu_L}\cdot l_{Luft} = \frac{B_K}{\mu_0\mu_K}\cdot l_{Kern}\cdot\frac{A}{A} + \frac{B_L}{\mu_0\mu_L}\cdot l_{Luft}\cdot\frac{A}{A}$$

$$= \underbrace{\frac{l_{Kern}}{\mu_0\mu_K\cdot A}}_{R_{m,k}}\cdot\underbrace{B_K\cdot A}_{\Phi} + \underbrace{\frac{l_{Luft}}{\mu_0\mu_L\cdot A}}_{R_{m,L}}\cdot\underbrace{B_K\cdot A}_{\Phi}$$

$$= \left(R_{m,k} + R_{m,L}\right)\cdot\Phi$$

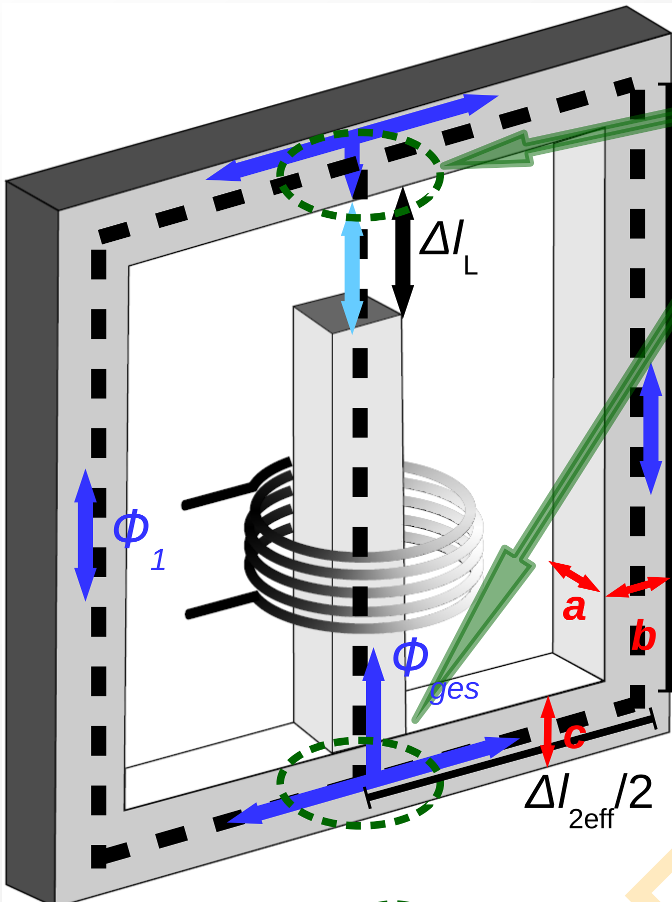


Darstellung im Ersatzschaltbild ist gerechtfertigt.

$R_{m,K}$=Magn. Widerstand Kern

$R_{m,L}$=Magn. Widerstand Luftspalt

Verzweigter Magnetischer Kreis



- Knoten: Die Summe der magnetischen Flüsse in einem Knoten ist gleich Null.

$$0=\sum_{k=1}^{N}\Phi_k$$

$$\rightarrow\ 0=\Phi_{ges}-\Phi_1-\Phi_1=\Phi_{ges}-2\cdot\Phi_1$$

$$\Theta=R_{ges}\cdot\Phi_{ges}=N\cdot I$$

$$R_{ges}=R_{m,K2}+R_{m,L}+R_{m,K1}\|R_{m,K1}=R_{m,K2}+R_{m,L}+\frac{1}{2}\cdot R_{m,K1}$$

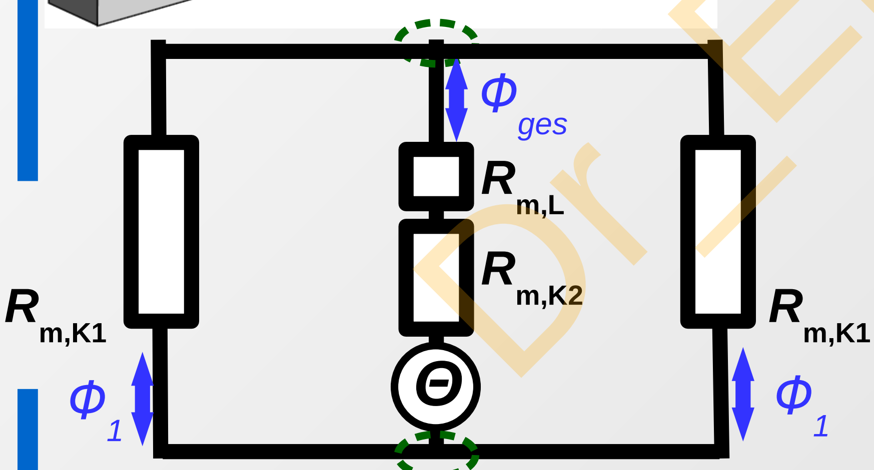
$$=\frac{1}{\mu_0\cdot\mu_K}\left[\frac{\Delta l_L\,\mu_K}{A_{ab}}+\frac{\Delta l_{1eff}-\Delta l_L}{A_{ab}}+\frac{\Delta l_{1eff}}{A_{ab}}+2\cdot\frac{\Delta l_{2eff}/2}{A_{ac}}\right]$$

Unter der Annahme, dass *b*=*c* und $\Delta l_{1eff}=\Delta l_{2eff}$

$$R_{ges}=\frac{1}{\mu_0\cdot\mu_K\cdot A}\cdot\left[\{\mu_K-1\}\cdot\Delta l_L+3\cdot\Delta l_{1eff}\right]$$

$$\Phi_{ges}=\frac{\Theta}{R_{ges}}=\frac{N\cdot I\cdot\mu_0\cdot\mu_K\cdot A}{\{\mu_K-1\}\cdot\Delta l_L+3\cdot\Delta l_{1eff}}$$

$$\Phi_1=\frac{1}{2}\cdot\Phi_{ges}=\frac{1}{2}\cdot\frac{N\cdot I\cdot\mu_0\cdot\mu_K\cdot A}{\{\mu_K-1\}\cdot\Delta l_L+3\cdot\Delta l_{1eff}}$$



Zusammenfassung

- Der Kern eines magnetischen Kreises kann Spulen miteinander Verkoppeln.

- Magnetisierung eines Materials (Kern des magnetischen Kreises)
  - Hysterese (materialabhängig)
  - Magnetisierung
  - Ummagnetisierung (Ummagnetisierung des Kerns eines magnetischen Kreises)

- Durchflutung (Verallgemeinerung des Ampèreschen Gesetzes) als Quelle für Den magnetischen Kreis

- Magnetischen Widerstand:

$$R_{m,\xi} = \frac{l_{eff}}{\mu \cdot A} = \frac{l_{eff}}{\mu_0 \cdot \mu_{r,\xi} \cdot A}, \qquad \mu = \text{Permeabilität}$$

$\mu_0 = \text{Vakuumpermeabilität}$

$\mu_{r,\xi} = \text{rel. Permeabilität des Stoffes } \xi$

  - $U = R \cdot I \rightarrow \Theta = R_m \cdot \Phi$
  - mit analogen Regeln für R_m im magnetischen wie für *R* im elektrischen Kreis