

## 5. Übungsblatt

**1. Aufgabe.** Welche der folgenden Matrizen sind diagonalisierbar? Geben sie gegebenenfalls eine invertierbare Matrix  $C$  an, sodass  $D = C^{-1} \cdot A \cdot C$  eine Diagonalmatrix ist.

$$a) \ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad b) \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c) \ A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**2. Aufgabe.** Gegeben ist die reelle, symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 8 \\ 8 & 10 & 8 \\ 8 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

bestimmen Sie eine orthogonale Matrix  $C$ , sodass  $D = C^{-1} \cdot A \cdot C$  eine Diagonalmatrix ist.

**3. Aufgabe.** Wieso hat jede Matrix  $A(n \times n)$  mit  $A^2 = E(n \times n)$  einen der Eigenwerte  $\pm 1$  und keine weiteren?

**4. Aufgabe.** Sei  $A(n \times n)$  - eine diagonalisierbare Matrix, sodass  $C^{-1}AC = D$  eine Diagonalmatrix ist. Wie ändert sich die Diagonalmatrix  $D$ , wenn man in der Matrix  $C$  zwei Spalten vertauscht?

**5. Aufgabe.** Wieso ist jede  $n \times n$ -Matrix mit  $n$  verschiedenen Eigenwerten diagonalisierbar?

**6. Aufgabe.** Wieso ist die Matrix  $A$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

nicht diagonalisierbar?

**7. Aufgabe.** Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ermitteln Sie  $e^A$ .

**8. Aufgabe.** Für die diagonalisierbare Matrix  $A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -3 & -5 & -6 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

ermitteln Sie die Matrix  $e^A$ .

**9. Aufgabe.** Führen Sie die nachfolgend genannten Polynomdivisionen aus:

a)  $(x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24) : (x^2 - x - 2)$

b)  $(2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 1) : (x^2 + 2x + 1)$

**10. Aufgabe.** Zerlegen Sie die folgenden ganzrationalen Funktionen (Polynomfunktionen) in Linearfaktoren:

a)  $f(x) = -2x^3 + 20x^2 - 24x - 144$

b)  $f(x) = 2x^4 + 12x^3 - 44x + 30$

c)  $f(x) = 3x^5 + 3x^4 - 36x^3 - 36x^2 + 81x + 81$

d)  $f(x) = x^5 + 4x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 37x - 30$

**11. Aufgabe.** Welche zur  $y$ -Achse spiegelsymmetrische Polynomfunktion 6. Grades besitzt bei  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 3$  und  $x_3 = 5$  jeweils (einfache) Nullstellen und schneidet die  $y$ -Achse an der Stelle  $y(0) = 450$ ?

**12. Aufgabe.** Berechnen Sie die Funktionswerte des Polynoms  $f(x)$  an der Stelle  $x_0$  unter Verwendung des Horner-Schemas:

a)  $f(x) = 4,5x^3 - 5,1x^2 + 4x - 3, \quad x_0 = -1,51$

b)  $f(x) = -9,32x^3 - 2,54x + 10,56, \quad x_0 = 3,56$

**13. Aufgabe.** Zeigen Sie: Die Polynomfunktion  $y = 3x^3 + 18x^2 + 9x - 30$  besitzt an der Stelle  $x_1 = -5$  eine Nullstelle. Bestimmen Sie unter Verwendung des Horner-Schemas die übrigen Nullstellen sowie den Funktionswert an der Stelle  $x_0 = -3,25$ . Skizzieren Sie grob den Funktionsverlauf.