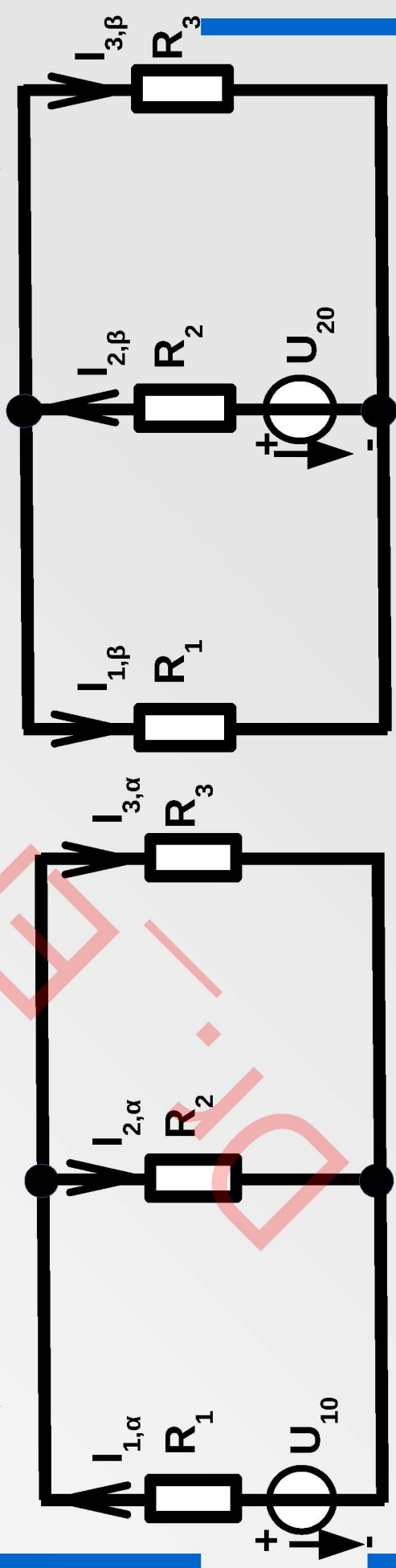
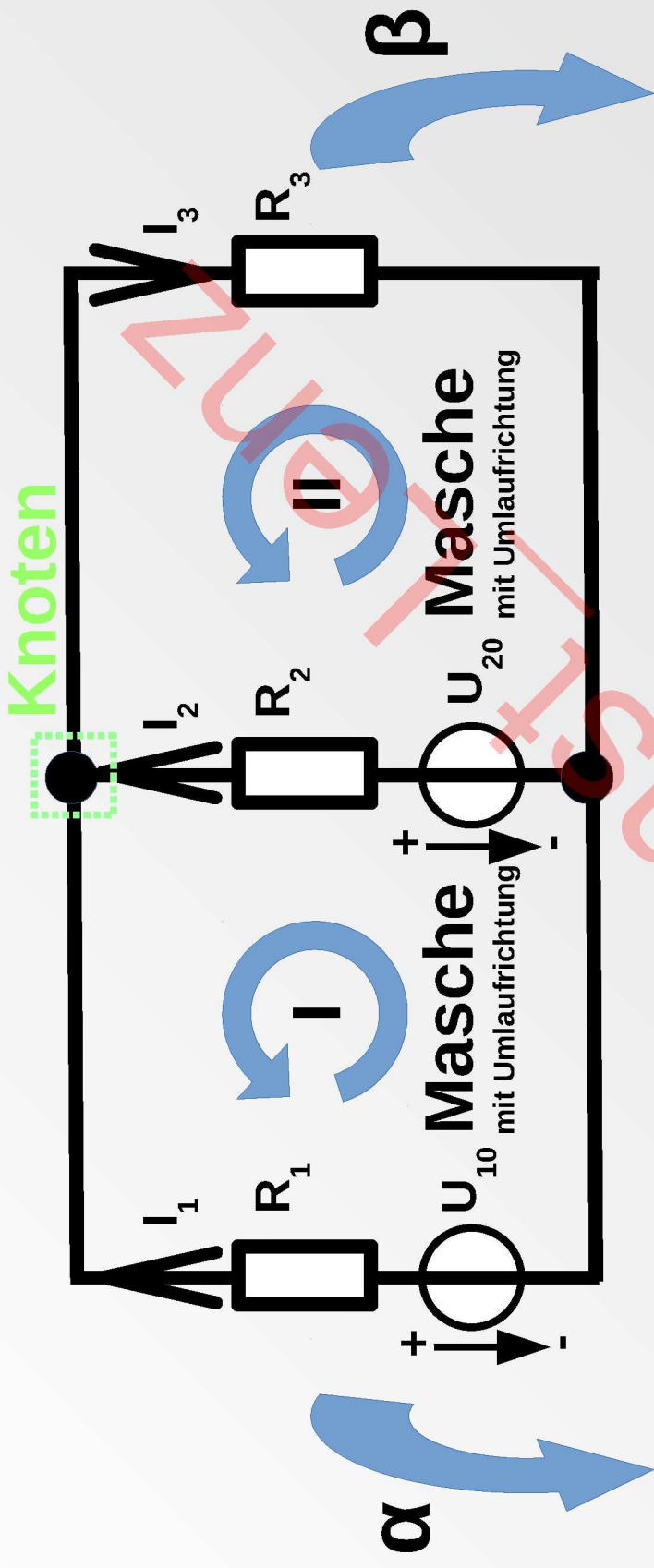


# Gleichstromnetzwerk und seine Zerlegung nach Helmholtz



# Aufstellen Maschen- und Knotengleichung

Gesucht ist  $I_3$

$$\text{MI} : -U_1 + U_{10} - U_{20} + U_2 = 0 \quad -U_1 + U_2 = U_{20} - U_{10}$$

$$\text{MII} : -U_2 + U_{20} - U_3 = 0 \quad -U_2 - U_3 = -U_{20}$$

$$\text{KN} : I_1 + I_2 - I_3 = 0 \quad I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

Umschreiben

$$-U_1 + U_2 = U_{20} - U_{10} \quad \rightarrow \quad -R_1 I_1 + R_2 I_2 = U_{20} - U_{10}$$

$$-U_2 - U_3 = -U_{20} \quad \rightarrow \quad -R_2 I_2 - R_3 I_3 = -U_{20}$$

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \quad I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

# Berechnen I

$$-R_1 I_1 + R_2 I_2 = U_{20} - U_{10} // \quad // \cdot \left( \frac{-1}{R_2} \right)$$

$$-R_2 I_2 - R_3 I_3 = -U_{20}$$

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

$$-R_1 I_1 - R_3 I_3 = -U_{10}$$

$$\left( \frac{R_1}{R_2} \right) I_1 + I_2 - I_3 = \left( \frac{-1}{R_2} \right) \cdot (U_{20} - U_{10})$$

$$// \cdot \left( \frac{-1}{R_3} \right)$$

$\equiv \text{GLI3}$

$$\left( \frac{R_1}{R_3} \right) I_1 + \left( \frac{R_1}{R_2} \right) I_2 + I_3 = \left( \frac{U_{10}}{R_3} \right) - \left( \frac{1}{R_2} \right) \cdot (U_{20} - U_{10})$$

## Berechnen II

$$\left(\frac{R_1}{R_3}\right) I_1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right) I_1 + I_1 = \left(\frac{U_{10}}{R_3}\right) - \left(\frac{1}{R_2}\right) \cdot (U_{20} - U_{10})$$

$$\rightarrow I_1 \left( \frac{R_1}{R_3} + \frac{R_1}{R_2} + 1 \right) = \frac{U_{10}}{R_3} - \frac{1}{R_2} \cdot (U_{20} - U_{10})$$

$$\rightarrow I_1 \left( \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2 R_3} \right) = \frac{1}{R_2 R_3} (U_{10} R_2 - U_{20} R_3 + U_{10} R_3)$$

$$\rightarrow I_1 = \frac{U_{10} R_2 - U_{20} R_3 + U_{10} R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

## Berechnen III

$$I_1 = \frac{U_{10} R_2 - U_{20} R_3 + U_{10} R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Mit GLI3

$$\left( \frac{R_1}{R_2} \right) I_1 + I_1 - I_3 = \left( \frac{-1}{R_2} \right) \cdot (U_{20} - U_{10})$$

$$\rightarrow I_3 = I_1 \left( \frac{R_1}{R_2} + 1 \right) \left( \frac{1}{R_2} \right) \cdot (U_{20} - U_{10})$$

Es sei gegeben:  $U_{10} = 100 \text{ V}$ ;  $U_{20} = 110 \text{ V}$

$R_1 = 10 \text{ } \Omega$ ;  $R_2 = 10 \text{ } \Omega$ ;  $R_3 = 200 \text{ } \Omega$

$$\rightarrow I_3 = 0.512195 \text{ A}$$

# Nach dem Helmholtzverfahren

Schaltbild  $\alpha$   $U_{20}$  kurzgeschlossen:

$$\frac{I_{3,\alpha}}{I_{1,\alpha}} = \frac{R_2}{R_2 + R_3} \rightarrow I_{3,\alpha} = I_{1,\alpha} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

$$I_{1,\alpha} = \frac{U_{10}}{R_{\text{ges},\alpha}} = \frac{U_{10}}{R_1 + R_2 \parallel R_3} = \frac{U_{10}}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}$$

$$= \frac{U_{10}}{\frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = U_{10} \cdot \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$I_{3,\alpha} = I_{1,\alpha} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = U_{10} \cdot \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$



# Nach dem Helmholtzverfahren

Schaltbild  $\beta$   $U_{10}$  kurzgeschlossen:

$$\begin{aligned}\frac{I_{3,\beta}}{I_{2,\beta}} &= \frac{R_1}{R_1 + R_3} \rightarrow I_{3,\beta} = I_{2,\beta} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3} \\ I_{2,\beta} &= \frac{U_{20}}{R_{\text{ges},\beta}} = U_{20} \cdot \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \\ I_{3,\beta} &= I_{2,\beta} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3} = U_{20} \cdot \frac{R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \\ I_3 &= I_{3,\alpha} + I_{3,\beta} = (U_{10} R_2 + U_{20} R_1) \cdot \frac{1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}\end{aligned}$$

Es sei gegeben:  $U_{10} = 100 \text{ V}$ ;  $U_{20} = 110 \text{ V}$   
 $R_1 = 10 \text{ } \Omega$ ;  $R_2 = 10 \text{ } \Omega$ ;  $R_3 = 200 \text{ } \Omega$

$$\rightarrow I_3 = 0.512195 \text{ A}$$

# Erstellen des linearen Gleichungssystems für MATLAB

Aus Folie 2 erhielten wir: bzw. OCTAVE

$$\begin{aligned} -U_1 + U_2 &= U_{20} - U_{10} & -R_1 I_1 + R_2 I_2 &= U_{20} - U_{10} \\ -U_2 - U_3 &= -U_{20} & \rightarrow & -R_2 I_2 - R_3 I_3 = -U_{20} \\ I_1 + I_2 - I_3 &= 0 & I_1 + I_2 - I_3 &= 0 \end{aligned}$$

Für Gleichstrom gilt:  $\underline{U} = \underline{R} \cdot \underline{I} \rightarrow \underline{U} = \underline{R} \cdot \underline{I} \rightarrow (\underline{R})^{-1} \cdot \underline{U} = \underline{I}$   
 $\underline{U}$ =Spannungsvektor,  $\underline{R}$ =Widerstandsmatrix,  $\underline{I}$ =Stromvektor

$$\begin{pmatrix} U_{20} - U_{10} \\ -U_{20} \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & -R_3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Widerstandsmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$
  
$$\underbrace{\begin{pmatrix} -R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & -R_3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Inverse Widerstandsmatrix}}^{-1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} U_{20} - U_{10} \\ -U_{20} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Spannungsvektor}} = \underbrace{\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}}_{\text{Stromvektor}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -0.24390 \text{ A} \\ 0.75610 \text{ A} \\ 0.51220 \text{ A} \end{pmatrix}}_{\text{Numerische Werte nach MATLAB bzw. OCTAVE}}$$

berechnet durch inv(Widerstandsmatrix) in MATLAB bzw. OCTAVE