

Grundlagen der Elektrotechnik II

Prof. Dr. Suchaneck

SS 2006

Inhaltsverzeichnis

8.	Wechselstromtechnik	5
8.1	Sinusförmige Wechselspannung	5
8.1.1	Kennwerte, Kenngrößen	5
8.1.1.1	Augenblickswert	5
8.1.1.2	Positiver und negativer Maximalwert (Scheitelwert)	5
8.1.1.3	Arithmetischer Mittelwert (Gleichwert, Gleichanteil)	5
8.1.1.4	Gleichrichtwert, Absolutwert	6
8.1.1.5	Effektivwert	6
8.1.1.6	Scheitelfaktor, Crestfaktor	8
8.1.1.7	Formfaktor	8
8.1.1.8	Klirrfaktor, Oberschwingungsgehalt	8
8.1.1.9	Nullphasenwinkel	9
8.2	Rechnen im Wechselstromkreis	9
8.2.1	Komplexe Rechnung und symbolische Methode (komplexe Symbole)	11
8.3	Widerstand und Leitwert	12
8.3.1	Komplexer Widerstand \underline{Z}	12
8.3.2	Komplexer Leitwert \underline{Y}	13
8.4	Verlustwinkel realer Induktivitäten und Kapazitäten	14
8.4.1	Verlustfaktor	14
8.4.2	Güte	14
8.4.3	Verlustfaktoren verschiedener Kondensatoren und Ferrite	14
8.5	Ersatzschaltbilder von Kondensatoren und Induktivitäten	15
8.5.1	Ideale Wechselstromwiderstände	15
8.5.2	Reale Wechselstromwiderstände	16
8.6	Äquivalente Reihen/Parallelumwandlung	17
8.6.1	Parallel \rightarrow Reihe	17
8.6.2	Reihe \rightarrow Parallel	17
8.7	Netzwerke bei veränderlicher Frequenz	20
8.7.1	Ortskurvendarstellung	20
8.7.1.1	Ortskurven von RL- und RC-Grundsaltungen	21
8.7.2	Frequenzgang	22
8.7.2.1	Logarithmische Größenverhältnisse in Dezibel dB	22
8.7.2.2	Grafische Darstellung (Bodediagramm)	24
8.8	Schwingkreise	28
8.8.1	Reihenschaltung von R, L und C; Reihenkreis, Serienkreis, Saugkreis	28
8.8.1.1	Komplexer Widerstand	28
8.8.1.2	Resonanz	29
8.8.1.3	Bandbreite (absolut)	29
8.8.1.4	Bandbreite (relativ)	29
8.8.1.5	Resonanzgüte	29
8.8.1.6	Kennwiderstand	29
8.8.2	Parallelschaltung von R, L und C; Parallelkreis, Sperrkreis	30

8.8.2.1	Komplexer Leitwert	30
8.8.2.2	Stromresonanz	30
8.8.2.3	Bandbreite (absolut)	30
8.8.2.4	Bandbreite (relativ)	31
8.8.2.5	Resonanzgüte	31
8.8.2.6	Kennleitwert	31
9.	Leistung im Wechselstromkreis (einphasig)	35
9.1	Augenblicksleistung	35
9.2	Scheinleistung	36
9.3	Wirkleistung	36
9.4	Blindleistung	36
9.5	Komplexe Leistung	37
9.5.1	Reihenschaltung	37
9.5.2	Parallelschaltung	37
9.6	Blindleistungskompensation	38
10.	Übertrager, Transformatoren	39
10.1	Idealer Transformator	39
10.1.1	Leistungen	40
10.1.2	Widerstände	40
10.2	Technischer Transformator	41
10.2.1	Ausgangswiderstand	42
10.2.2	Eingangswiderstand	42
10.2.3	Verluste	42
10.2.4	Belasteter Transformator mit Streuung	42
10.2.5	Eisenverluste: Hystereseverluste + Wirbelstromverluste	45
10.2.6	Wicklungskapazität	45
10.2.7	Darstellung mit komplexen Größen	45
10.2.8	Messung der Transformatoreigenschaften	46
10.2.8.1	Leerlaufversuch	46
10.2.8.2	Kurzschlussversuch	47
10.2.9	Berechnung von Netztransformatoren	48
10.2.9.1	Primärwindungszahl	48
10.2.9.2	Sekundärwindungszahl	48
10.2.9.3	Wahl von max. Flussdichte und Eisenfläche	49
10.3	Niederfrequenz-Breitbandübertrager	54
10.3.1	Verhalten an der unteren Frequenzgrenze	54
10.3.2	Verhalten an der oberen Frequenzgrenze	54
10.4	Messwandler	56
10.4.1	Stromwandler	56
10.4.2	Spannungswandler	56
11.	Mehrphasensysteme	57
11.1	Drehstromsystem	57
11.1.1	Spannungen gegen N-Leiter: Sternschaltung	58
11.1.2	Spannungen verkettet: Dreieckschaltung	58

11.1.3	Ströme	59
11.1.3.1	Ströme in Sternschaltung	59
11.1.3.2	Ströme in Dreieckschaltung	62
11.1.4	Leistungen (Drehstrom)	63
11.1.4.1	Sternschaltung	63
11.1.4.2	Dreieckschaltung	64
11.1.4.3	Wirkleistungsmessung mit vereinfachter Schaltung	65
11.1.4.4	ARON-Schaltung (Zweiwattmeter-Schaltung)	66

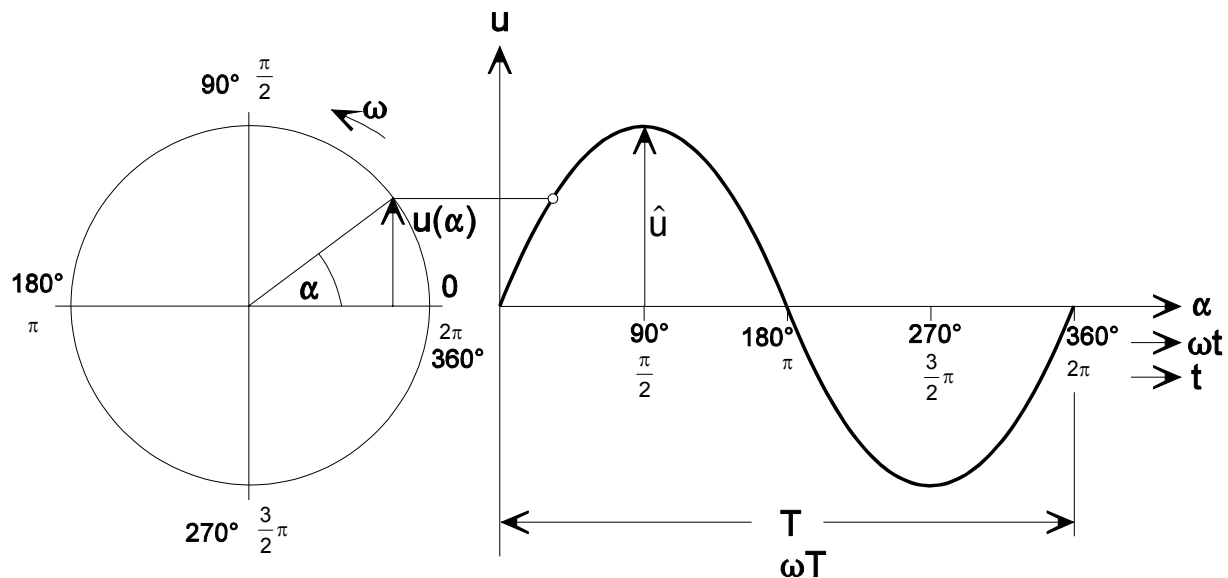
Literatur siehe Skript Grundlagen der Elektrotechnik I

8. Wechselstromtechnik

Hierzu DIN 40110 Wechselstromgrößen
DIN 5483 Teil 1+2 Zeitabhängige Größen, Formelzeichen

Begriffe:

8.1 Sinusförmige Wechselspannung



$$u(\alpha) = \hat{u} \cdot \sin \alpha \quad \omega = \frac{\alpha}{t} \quad \text{oder} \quad \omega = \frac{d\alpha}{dt} \quad \text{Winkelgeschwindigkeit}$$

$$\rightarrow \alpha = \omega t$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$\rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f \quad f = \text{Frequenz}$$

$$[f] = \frac{1}{s}, \text{ Hz, } \frac{\text{Perioden}}{s}$$

8.1.1 Kennwerte, Kenngrößen

8.1.1.1 Augenblickswert $u=u(t)$ bzw. $u=u(\omega t)$

8.1.1.2 Positiver und negativer Maximalwert, (Scheitelwert) $\hat{u}, U_M, U_{\max}, u_S$

8.1.1.3 Arithmetischer Mittelwert, (Gleichwert, Gleichanteil)

$$U_{AV} = \bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{u} \cdot \sin \omega t \, dt$$

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \frac{1}{T} \cdot \hat{u} \cdot (-) \frac{1}{\omega} \cos \omega t \Big|_0^T \\ &= -\frac{\hat{u}}{T} \cdot \frac{T}{2\pi} \left(\cos \omega \cdot \frac{2\pi}{\omega} - \cos 0 \right) = -\frac{\hat{u}}{2\pi} (1 - 1) = 0\end{aligned}$$

Der Mittelwert einer reinen Sinusgröße ist Null.

8.1.1.4 Gleichrichtwert, Absolutwert

$$|\bar{u}| = \frac{1}{T} \int_0^T |u| \, dt \quad ; \quad |\bar{i}| = \frac{1}{T} \int_0^T |i| \, dt$$

Zur Berechnung ist es sinnvoll, die obere Integrationsgrenze auf $\frac{T}{2}$ zu legen (wegen der Symmetrie möglich).

$$\begin{aligned}|\bar{u}| &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \hat{u} \cdot \sin \omega t \, dt = -\frac{\hat{u}}{\omega \cdot \frac{T}{2}} \cos \omega t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \\ &= -\frac{\hat{u}}{\frac{2\pi T}{T \cdot 2}} \left(\cos \frac{2\pi T}{T} \frac{T}{2} - \cos 0 \right) \\ &= -\frac{\hat{u}}{\pi} (-1 - 1) = 2 \frac{\hat{u}}{\pi} \\ |\bar{u}| &= 0,64 \cdot \hat{u} \quad (\text{bei Sinus!})\end{aligned}$$

8.1.1.5 Effektivwert

Entspricht einer Gleichspannung mit gleichem energiemäßigem (thermischen) Effekt.

→ gleicher Energieumsatz während der Zeit T

→ $W_{\text{Gleich}} = W_{\text{Wechsel}}$

$$W = \frac{U^2}{R} \cdot T = \frac{1}{R} \int_0^T (\hat{u} \cdot \sin \omega t)^2 \, dt$$

$$U = U_{\text{eff}} = U_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (\hat{u} \cdot \sin \omega t)^2 \, dt}$$

RMS = Root Mean Square

$$\begin{aligned}
 U_{\text{eff}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \hat{u}^2 \cdot (\sin \omega t)^2 dt} \\
 &= \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{T} \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4\omega} \sin 2\omega t \right]_0^T} \\
 &= \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{T} \left(\frac{2\pi T}{2 \cdot 2\pi} - \frac{1}{4\omega} \sin 2\omega \frac{2\pi}{\omega} \right) + \frac{1}{4\omega} \sin 0} \\
 &= \sqrt{\frac{\hat{u}^2 T}{2}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

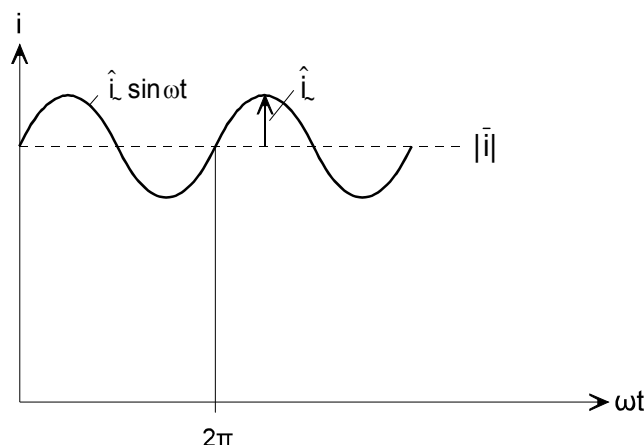
$$U_{\text{eff}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$

Gilt nur bei reinem Sinus!

Beispiel

Berechnung des Effektivwertes eines Mischstromes

→ Mischstrom = Gleichstrom + überlagerter Wechselstrom



$$i = |i| + \hat{i} \sin \omega t$$

$$\begin{aligned}
 I_{\text{eff}} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|i| + \hat{i} \sin \omega t)^2 d\omega t} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left[|i|^2 \cdot \omega t \Big|_0^{2\pi} + 2|i|\hat{i}(-\cos \omega t) \Big|_0^{2\pi} + \hat{i}^2 \cdot \frac{\omega t}{2} \Big|_0^{2\pi} \right]} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left\{ |i|^2 \cdot 2\pi + 2|i|\hat{i}[(-1) - (-1)] + \hat{i}^2 \cdot \frac{2\pi}{2} \right\}} \\
 &= \sqrt{|i|^2 + \frac{\hat{i}^2}{2}}
 \end{aligned}$$

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{|i|^2 + I_{\sim\text{eff}}^2}$$

8.1.1.6 Scheitelfaktor, Crestfaktor

$$C = \frac{\hat{u}}{U_{\text{eff}}}$$

z.B. bei Sinus:

$$C = \frac{\hat{u}}{\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} = 1,414$$

z.B. wichtig zur Beurteilung der Übersteuerung (-festigkeit) von Mess-Verstärkern, Messgeräten u.ä.

8.1.1.7 Formfaktor

$$F_u = \frac{U_{\text{eff}}}{|\bar{u}|}$$

$$F_i = \frac{I_{\text{eff}}}{|\bar{i}|}$$

bei Sinus: $F_u = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{\hat{u} \cdot 2} = 1,11$

z.B. wichtig für Messgeräte, die den Gleichrichtwert messen, aber den Effektivwert anzeigen sollen.

8.1.1.8 Klirrfaktor, Oberschwingungsgehalt

1) Gesamt-Klirrfaktor K

$$K = \frac{\text{Effektivwert Oberschwingungen}}{\text{Effektivwert Gesamt}} = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \dots +}}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots +}}$$

$$K = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^m U_n^2}}{\sqrt{\sum_{n=1}^m U_n^2}} \approx \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^m U_n^2}}{U_1}$$

bei $K < 10\%$

2) Einzel-Klirrfaktor

$$K_2 = \frac{U_2}{\sqrt{\sum_{n=1}^m U_n^2}}, \quad K_3 = \frac{U_3}{\sqrt{\sum_{n=1}^m U_n^2}}$$

K_2 groß bei unsym. Signalen

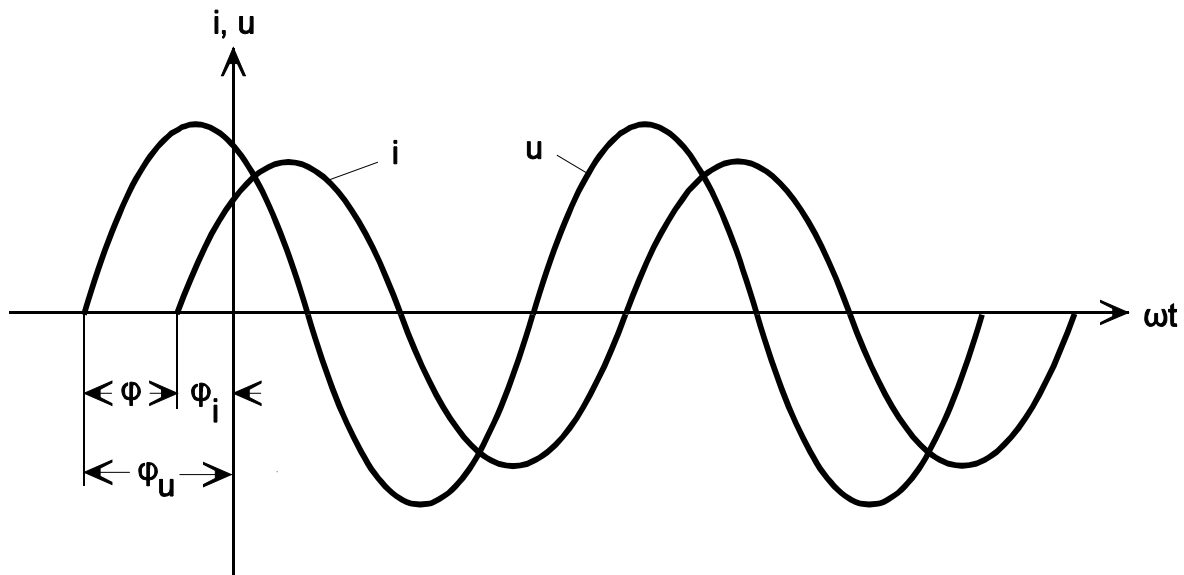
K_3 groß bei sym. Signalen

8.1.1.9 Nullphasenwinkel φ_u, φ_i

Voraussetzung: Gleiche Frequenz, gleiche Quelle

φ = Phasenwinkel zwischen 2 gleichen oder ungleichen Größen (z.B. u, i oder u, u)

Nullphasenwinkel sind die Phasenwinkel, die vom Ursprung aus gemessen werden.



$$\boxed{\varphi = \varphi_u - \varphi_i}$$

$$u = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

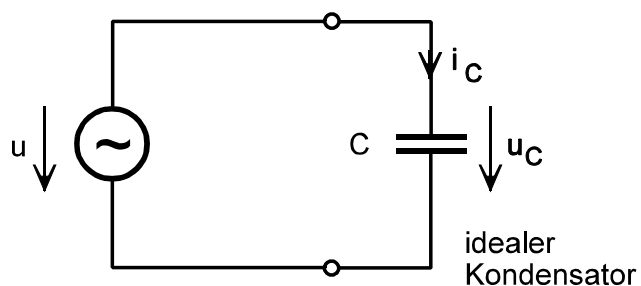
$$\varphi_i = 0 \rightarrow \varphi = \varphi_u$$

$$i = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Beispiel $\left. \begin{array}{l} \varphi_u = 100^\circ \\ \varphi_i = 45^\circ \end{array} \right\} \varphi = 55^\circ \quad i \text{ eilt nach!}$

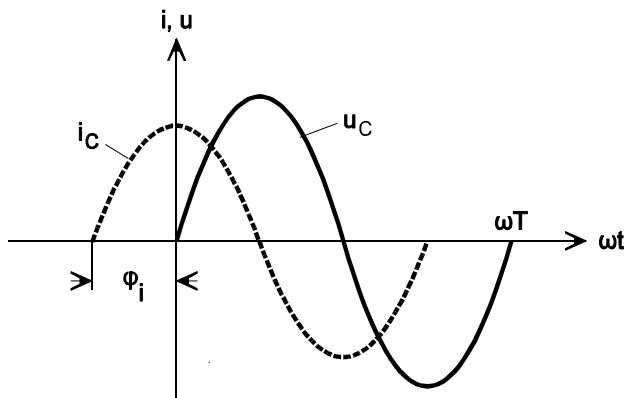
8.2 Rechnen im Wechselstromkreis

Annahme: eingeschwungener Zustand (stationärer Zustand),
Spannungen und Ströme sinusförmig



$$u = u_C = \hat{u} \cdot \sin \omega t$$

$$\begin{aligned} i_C &= C \frac{du_C}{dt} = C \cdot \hat{u} \cdot \omega \cdot \cos \omega t \\ &= C \cdot \hat{u} \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + 90^\circ) \\ &= C \cdot \hat{u} \cdot \omega \cdot j \sin \omega t \end{aligned}$$



$$\underline{Z}_C = \frac{u_C}{i_C} = \frac{\hat{u} \cdot \sin \omega t}{C \cdot \hat{u} \cdot \omega \cdot j \sin \omega t}$$

$$= \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = -jX_C$$

\

Reaktanz

$$u_C = \underline{Z}_C \cdot i_C$$

\

Impedanz

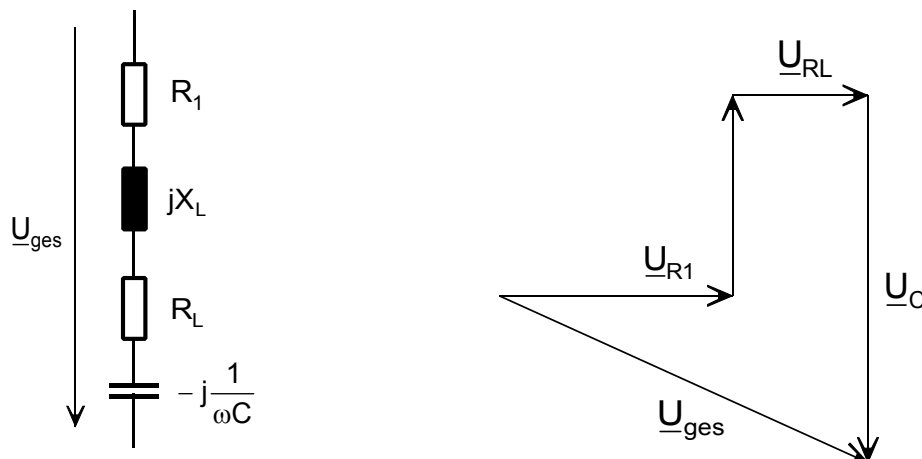
Erkenntnisse

- Strom und Spannung sind um φ_i phasenverschoben
- Phasenwinkel φ_i ist genau $90^\circ \hat{=} \frac{\pi}{2}$ (i eilt vor)
- Es ist zu erwarten, dass bei einer Induktivität L der Phasenwinkel $\varphi_u = 90^\circ \hat{=} \frac{\pi}{2}$ beträgt (Vertauschung $U \leftrightarrow I$)

Folgerung:

Bei idealen Bauelementen R, L, C treten hauptsächlich Phasenwinkel von 0° sowie $\pm 90^\circ$ auf.

- Vorteilhaft ist eine Rechen- und Darstellungsmethode, die diesen Sachverhalt berücksichtigt.



Diese Rechen- und Darstellungsmethode ist die

8.2.1 Komplexe Rechnung und symbolische Methode (komplexe Symbole)

Die komplexe Zahl wird durch Zeiger dargestellt → Symbol

Allg. math. Darstellung:

$$\underline{Z} = \text{Re} + j\text{Im} = a + jb \quad (\text{Normalform})$$

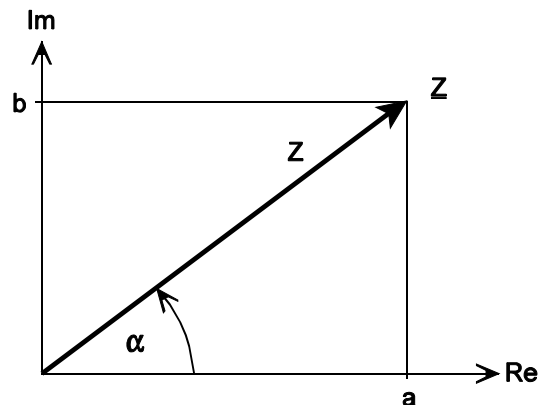
$$|\underline{Z}| = Z = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = Z \cdot \cos\alpha$$

$$b = Z \cdot \sin\alpha$$

$$\underline{Z} = Z \cdot \cos\alpha + j Z \cdot \sin\alpha$$

→ trigonometrische Form



Für $\underline{u} \rightarrow \alpha = \omega t + \varphi_u$

$$\underline{u} = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u) + j \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

Wirkanteil Blindanteil

$$= \hat{u} [\cos(\omega t + \varphi_u) + j \sin(\omega t + \varphi_u)]$$

$$\text{Re}\{\underline{u}\} = a = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$\text{Im}\{\underline{u}\} = b = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

Umformung in die Exponentialform → Euler'sche Form

$$\cos \omega t + j \sin \omega t = e^{j\omega t}$$

$$\underline{u} = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)} = \hat{u} \cdot \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{Zeit-faktor}} \cdot \underbrace{e^{j\varphi_u}}_{\text{Phasen-winkel}}$$

$$\underline{u} = \underbrace{\hat{u} \cdot e^{j\varphi_u}}_{\text{Komplexe Amplitude}} \cdot \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{Zeit-faktor}}$$

$$\underline{\hat{u}} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi_u} \quad \text{komplexe Amplitude}$$

Da für alle Schaltelemente (R, L, C) in einem Netzwerk die gleiche Netzfrequenz ω wirksam ist, genügt es in der Regel, die komplexe Amplitude $\underline{\hat{u}} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi_u}$ zu betrachten.

Gleichzeitig wird \hat{u} mit dem Faktor $\sqrt{2}$ auf den Effektivwert U umgerechnet.

Der Zeitfaktor $e^{j\omega t}$ ist für alle Größen gleich, bedeutet eine Rotation des Zeiger-Systems.

→ Bleibt der Zeitfaktor unberücksichtigt, werden die Zeiger zu ruhenden Zeigern (Effektivwert-Zeiger)

$$\underline{U} = U \cdot e^{j\varphi_u} \quad \text{oder} \quad \underline{I} = I \cdot e^{j\varphi_i}$$

8.3 Widerstand und Leitwert

8.3.1 Komplexer Widerstand \underline{Z}

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\hat{u} \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{j\omega t}}{\hat{i} \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j\omega t}} = \frac{U \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\varphi_u}}{I \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\varphi_i}} \\ = \frac{U}{I} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

$$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi_z} = Z \cdot \cos \varphi_z + jZ \cdot \sin \varphi_z = R + jX$$

\

Scheinwiderstand
Impedanz

/ \

Wirk - Blindwiderstand
Resistanz Reaktanz

Betrag Z

Phase

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\tan \varphi_z = \frac{Z \cdot \sin \varphi_z}{Z \cdot \cos \varphi_z} = \frac{X}{R}$$

Zahlenbeispiel

$U=100V$; $I=4A$; $R=20\Omega$; Gesucht: Z , X , φ , \underline{Z}

Scheinwiderstand $Z = \frac{u}{i} = \frac{U}{I} = \frac{100V}{4A} = 25\Omega$

Blindwiderstand $X = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{25^2 - 20^2}\Omega = \sqrt{225}\Omega = 15\Omega$

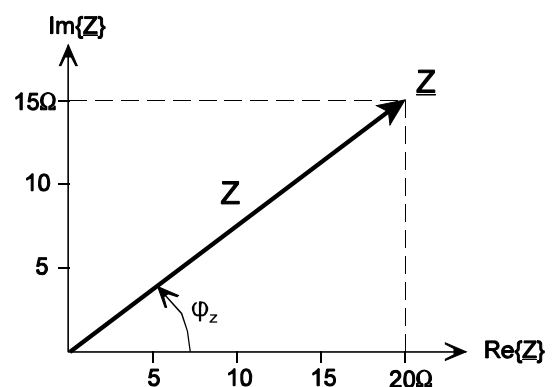
Phase $\tan \varphi_z = \frac{X}{R} = \frac{15}{20} = 0,75 \rightarrow \varphi_z = \arctan 0,75$

$$\varphi_z = 36,87^\circ \hat{=} 0,6435\text{rad}$$

$$\underline{Z} = 25\Omega \cdot e^{j0,6435} = 25\Omega / 36,87^\circ$$

$$\underline{Z} = R + jX = (20 + j15)\Omega$$

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{20^2 + 15^2}\Omega = \sqrt{625}\Omega = 25\Omega$$



8.3.2 Komplexer Leitwert \underline{Y} → Inversion von \underline{Z}

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{i}{\underline{u}} = \frac{I}{U} \cdot e^{j(\varphi_i - \varphi_u)}$$

$$\underline{Y} = Y \cdot e^{j\varphi_Y} = \underbrace{Y \cdot \cos \varphi_Y}_{\underline{G}} + \underbrace{jY \cdot \sin \varphi_Y}_{\underline{jB}}$$

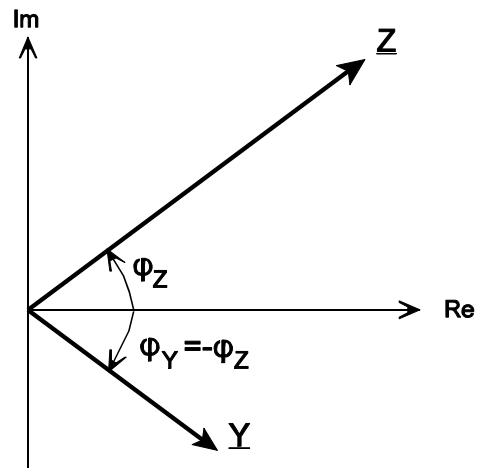
$$\underline{Y} = \underline{G} + \underline{jB}$$

Scheinleitwert
AdmittanzWirkleitwert
KonduktanzBlindleitwert
Suszeptanz

Rechnerisch:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z \cdot e^{j\varphi_Z}}$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{Z} \cdot e^{-j\varphi_Z}$$

Beispiele:1.) $\underline{Z} = 20\Omega + j15\Omega$ Gesucht: $\underline{Y} = ?$

$$\underline{Z} = 25\Omega \cdot e^{j36,87^\circ}$$

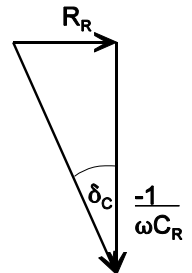
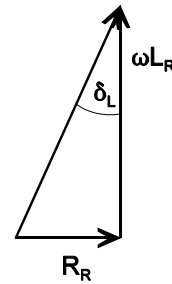
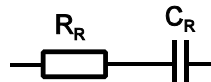
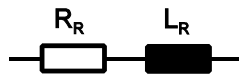
$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{25} \text{ S} \cdot e^{-j36,87^\circ} = 0,04 \text{ S} \cdot e^{-j36,87^\circ}$$

2.) Wie groß ist $\underline{Z} = (400\Omega + j300\Omega) \parallel (1000\Omega - j250\Omega)$? (Parallelschaltung)

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}} = \frac{1}{\frac{1}{500\Omega \cdot e^{j36,87^\circ}} + \frac{1}{1030,8\Omega \cdot e^{-j14,04^\circ}}} \\ &= \frac{1}{(1,6 - j1,2)\text{mS} + (0,94 + j0,24)\text{mS}} = \frac{1}{(2,54 - j0,96)\text{mS}} \\ &= 367,9\Omega \cdot e^{j20,79^\circ} = (343,95 + j130,57)\Omega \end{aligned}$$

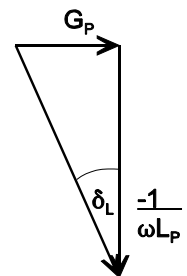
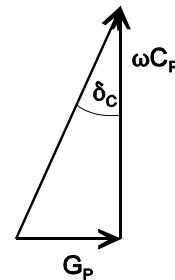
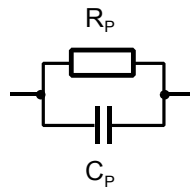
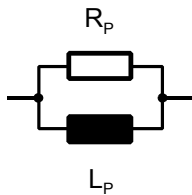
8.4 Verlustwinkel realer Induktivitäten und Kapazitäten

Reihenschaltung: $\tan \delta_L = \frac{R_R}{\omega L_R}$; $\tan \delta_C = \omega R_R C_R$



Parallelschaltung:

$$\tan \delta_L = \omega G_P L_P = \frac{\omega L_P}{R_P} ; \quad \tan \delta_C = \frac{G_P}{\omega C_P} = \frac{1}{\omega R_P C_P}$$

8.4.1 Verlustfaktor

$$d = \tan \delta = \tan(90^\circ - \varphi) = \frac{1}{\tan \varphi}$$

8.4.2 Güte

$$Q = \frac{1}{\tan \delta} = \frac{1}{d} \approx \frac{1}{\delta}$$

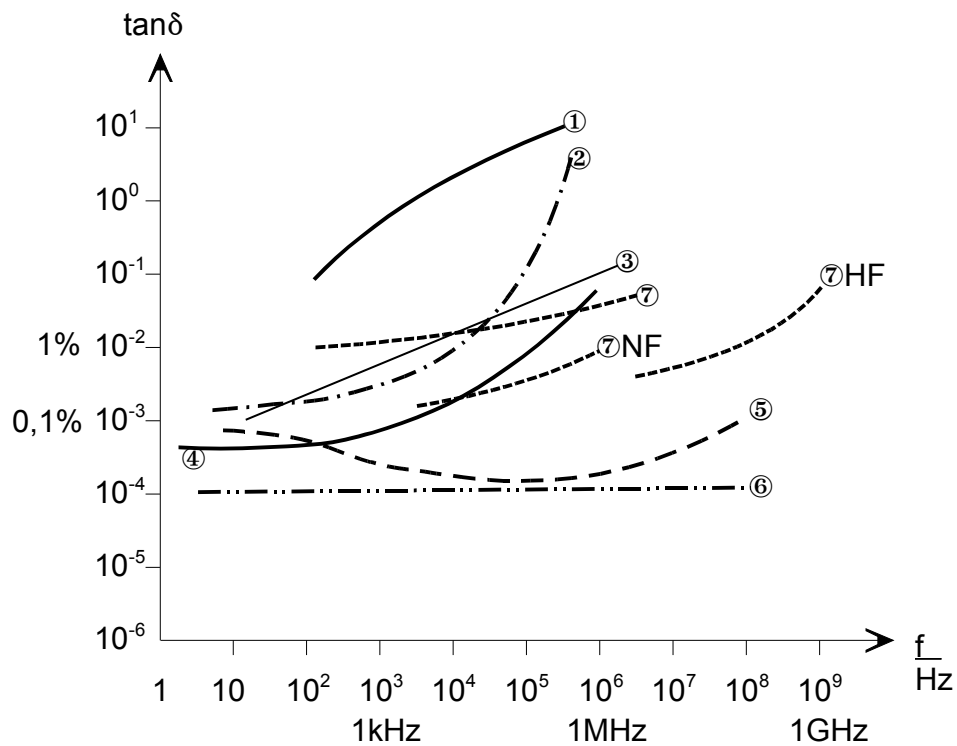
$$Q_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_C}}$$

Kondensator: $d_C = \tan \delta_C = \frac{\text{Re}}{\text{Im}} = \frac{1}{\omega C_P R_P} = \omega C_R R_R$

Induktivität: $d_L = \tan \delta_L = \frac{R_R}{\omega L_R}$

8.4.3 Verlustfaktoren verschiedener Kondensatoren und Ferrite

- ① AL-Elektrolyt-Kondensator ($\vartheta=25^\circ\text{C}$)
- ② Tantal-Elektrolyt-Kondensator ($\vartheta=25^\circ\text{C}$)
- ③ MKT-Kunststoffolie
- ④ MKC-Kunststoffolie
- ⑤ Keramik-Kondensator (NDK)
- ⑥ KS-Folienkondensator (Styroflex)
- ⑦ Ferrit allgemein
- ⑦ NF Ferrit Niederfrequenz
- ⑦ HF Ferrit Hochfrequenz



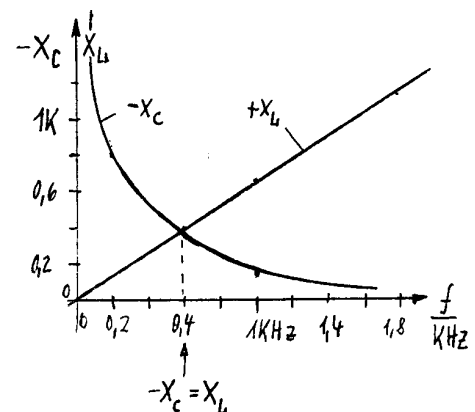
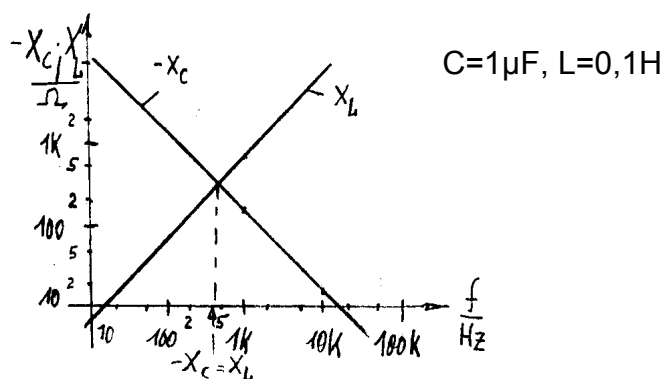
8.5 Ersatzschaltbilder von Kondensatoren und Induktivitäten

8.5.1 Ideale Wechselstromwiderstände (nicht bzw. nur annähernd herstellbar)

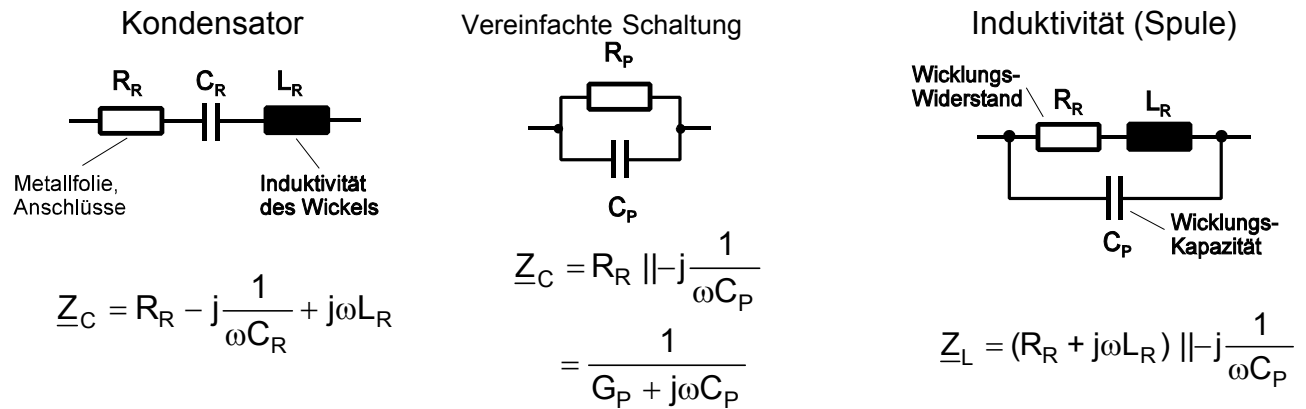
kapazitiv: $\underline{Z}_C = jX_C = -j\frac{1}{\omega C}$ induktiv: $\underline{Z}_L = jX_L = j\omega L$

Logarithmische Darstellung

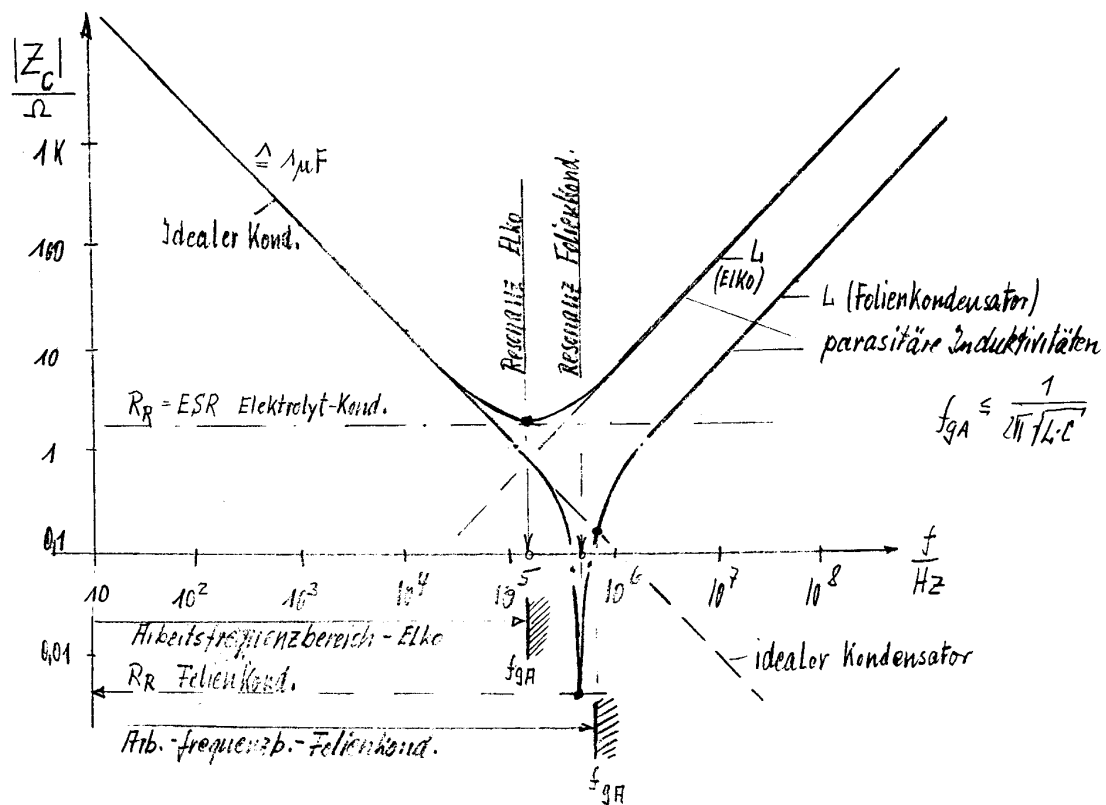
Lineare Darstellung

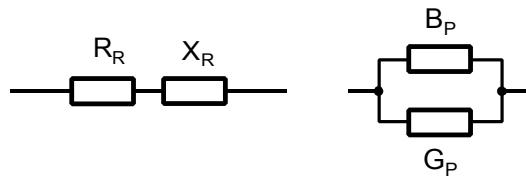


8.5.2 Reale Wechselstromwiderstände



Beispiel:
Kondensator



8.6 Äquivalente Reihen/Parallelumwandlung**Gültig nur bei $\omega = \text{konstant!}$** 

Definitionen: $\underline{Z}_R = R_R + jX_R$; $\underline{Y}_P = G_P + jB_P$; $\underline{Z}_R = \frac{1}{\underline{Y}_P}$; $\underline{Y}_P = \frac{1}{\underline{Z}_R}$

Induktivität

Kapazität

$$jX_R = j\omega \cdot L_R \quad ; \quad jX_R = -j \frac{1}{\omega \cdot C_R} \quad \text{Reihe}$$

$$jB_P = -j \frac{1}{\omega \cdot L_P} \quad ; \quad jB_P = j\omega \cdot C_P \quad \text{Parallel}$$

8.6.1 Parallel \rightarrow Reihe

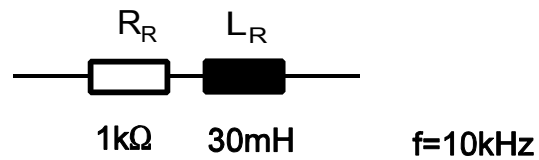
$$\begin{aligned} \underline{Z}_P = R_P \quad || \quad jX_P \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ G_P = \frac{1}{R_P} \quad jB_P = \frac{1}{jX_P} \\ \rightarrow \underline{Y}_P = G_P + jB_P \\ \\ \rightarrow \underline{Z}_R = \frac{1}{\underline{Y}_P} = R_R + jX_R \end{aligned}$$

8.6.2 Reihe \rightarrow Parallel

$$\begin{aligned} \underline{Z}_R = R_R + jX_R \rightarrow \underline{Y}_P = \frac{1}{\underline{Z}_R} \\ \underline{Y}_P = G_P + jB_P \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ R_P = \frac{1}{G_P} \quad ; \quad jX_P = \frac{1}{jB_P} \\ \\ \rightarrow \underline{Z}_P = R_P \quad || \quad jX_P \end{aligned}$$

1. Beispiel

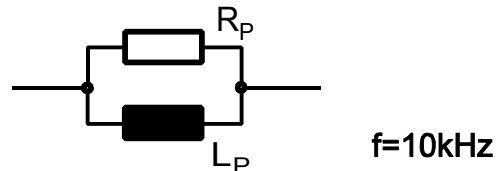
Gegeben:



$$\underline{Z}_R = R_R + j\omega L_R$$

$$= (1 + j1,9)k\Omega$$

$$j\omega L_R = j2\pi \cdot f \cdot 30mH = j1,9k\Omega$$

Gesucht: \underline{Z}_P und \underline{Y}_P Lösung

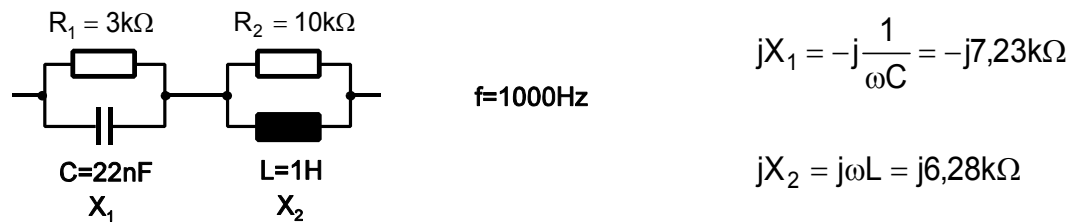
$$\underline{Y}_R = \frac{1}{\underline{Z}_R} = \frac{1}{(1 + j1,9)k\Omega} = 0,217S - j0,412S$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ R_P = \frac{1}{0,217} \Omega & ; & jX_P = \frac{1}{-j0,412} \Omega \\ = 4,61k\Omega & & = j2,43k\Omega \end{array}$$

$$\rightarrow \underline{Z}_P = R_P \parallel jX_P = 4,61k\Omega \parallel j2,43k\Omega$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \underline{Y}_P = G_P + jB_P = \frac{1}{4,61k\Omega} - j\frac{1}{2,43k\Omega} & = & 0,22mS - j0,41mS \end{array}$$

2. Beispiel



Gesucht: Reihenersatzschaltung $\underline{Z}_{\text{gesR}}$ und Parallelersatzschaltung $\underline{Z}_{\text{gesP}}$

Rechnerische Lösung:

$$\underline{Z}_{1P} = 3k\Omega \parallel -j7,23k\Omega$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$G_P = \frac{1}{R_P} \qquad jB_P = \frac{1}{jX_P}$$

$$\underline{Y}_{1P} = G_P + jB_P = 0,33\text{mS} + j0,14\text{mS}$$

$$\rightarrow \underline{Z}_{1R} = \frac{1}{\underline{Y}_{1P}} = R_R + jX_R = 2,56k\Omega - j1,06k\Omega$$

$$\underline{Z}_{2P} = 10k\Omega \parallel j6,28k\Omega$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$G_P = \frac{1}{R_P} \qquad jB_P = \frac{1}{jX_P}$$

$$\underline{Y}_{2P} = G_P + jB_P = 0,1\text{mS} - j0,16\text{mS}$$

$$\rightarrow \underline{Z}_{2R} = \frac{1}{\underline{Y}_{2P}} = R_R + jX_R = 2,83k\Omega + j4,5k\Omega$$

$$\underline{Z}_{\text{gesR}} = \underline{Z}_{1R} + \underline{Z}_{2R}$$

$$= 2,56k\Omega - j1,06k\Omega + 2,83k\Omega + j4,5k\Omega = 5,39k\Omega + j3,44k\Omega$$

$$jX_{\text{gesR}} = j3,44k\Omega$$

$$\rightarrow \text{Induktivität } L_R = \frac{X_{\text{gesR}}}{\omega} = \frac{3,44k\Omega}{2\pi \cdot 1000 \frac{1}{s}} = 547,5\text{mH}$$



$$\underline{Z}_{\text{gesR}} = R_R + jX_R \rightarrow \underline{Y}_P = \frac{1}{\underline{Z}_R} = 0,13\text{mS} - j0,08\text{mS}$$

$$\underline{Y}_{\text{gesP}} = G_P + jB_P$$

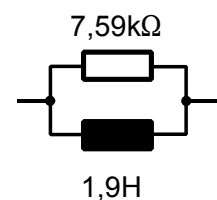
$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$R_P = \frac{1}{G_P} \quad ; \quad jX_P = \frac{1}{jB_P}$$

$$\rightarrow \underline{Z}_{\text{gesP}} = R_P \parallel jX_P = 7,59k\Omega \parallel j11,88k\Omega$$

$$jX_{\text{gesP}} = j11,88k\Omega$$

$$\rightarrow \text{Induktivität } L_P = \frac{X_{\text{gesP}}}{\omega} = \frac{11,88k\Omega}{2\pi \cdot 1000 \frac{1}{s}} = 1,9\text{H}$$



8.7 Netzwerke bei veränderlicher Frequenz (und anderen veränderlichen Netzwerkgrößen)

In Netzwerken mit Induktivitäten L und/oder Kondensatoren C hat die Frequenz einen wesentlichen Einfluss auf die Wirkung des Netzwerkes.

Beispiel: $I = \omega \cdot C \cdot U$ sowie $U = \omega \cdot L \cdot I$

Die frequenzabhängigen Eigenschaften werden vorteilhaft grafisch dargestellt.

Grafische Darstellungen

8.7.1 Ortskurvendarstellung

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem wird die Netzwerkfunktion nach Realteil und Imaginärteil in Abhängigkeit von der Variablen eingetragen.

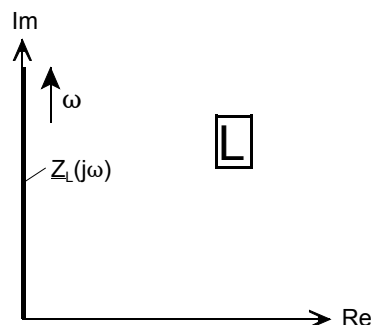
Variable: Frequenz ω (f) oder ein anderer Netzwerkparameter z. B. veränderlicher Widerstand

Im weiteren wird nur die Frequenz als Variable verwendet.

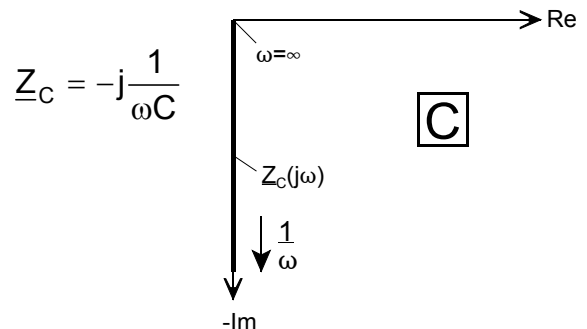
Sehr einfache Ortskurven erhält man für die Grundzweipole L und C .

Beispiel:

$$\underline{Z}_L = j\omega L$$

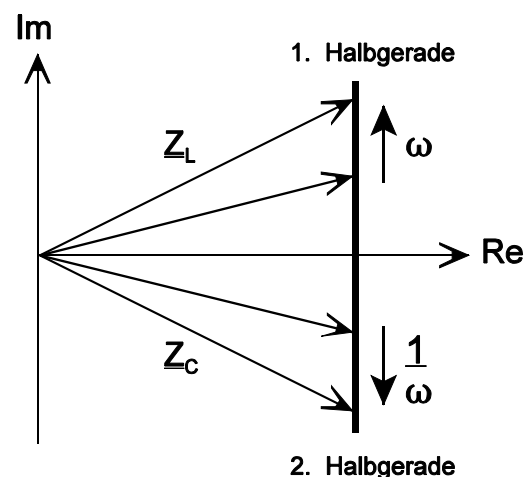


$$\underline{Z}_C = -j \frac{1}{\omega C}$$



Zusammensetzung $R + L$ bzw. $R + C$

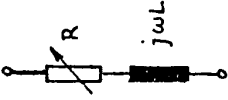
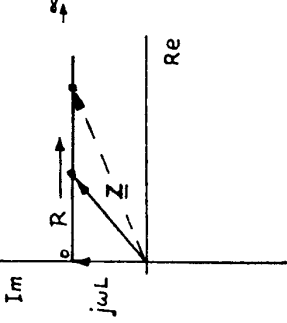
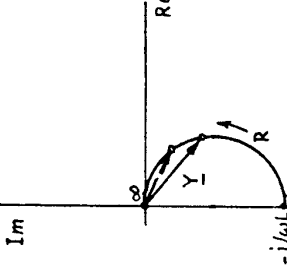
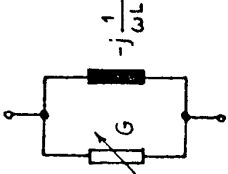
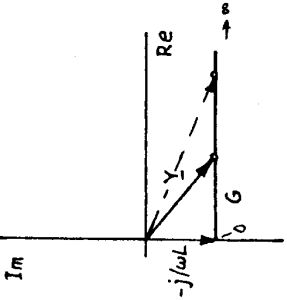
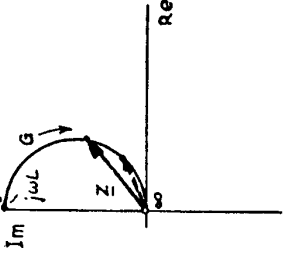
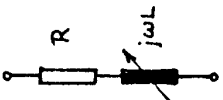
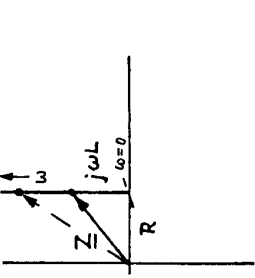
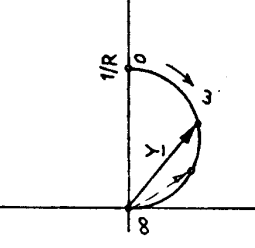
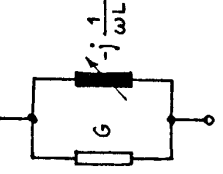
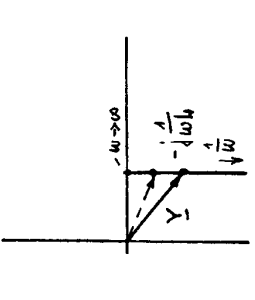
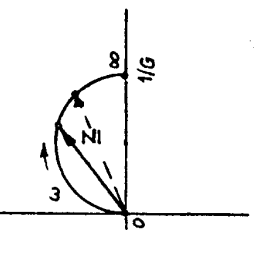
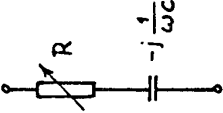
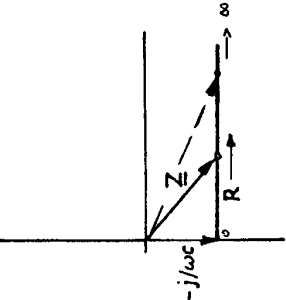
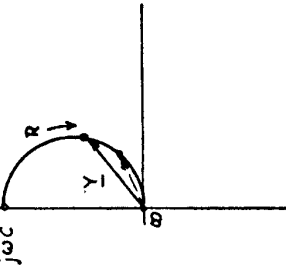
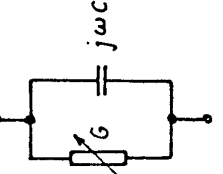
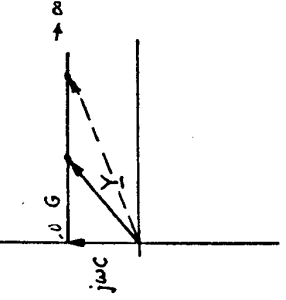
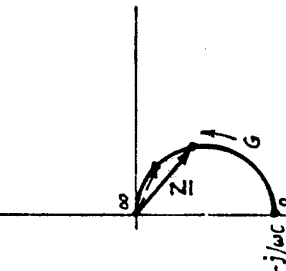
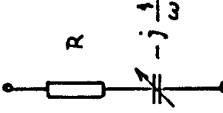
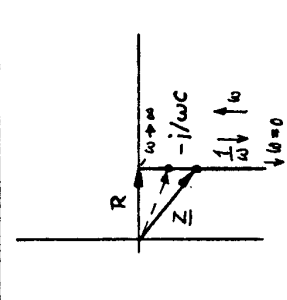
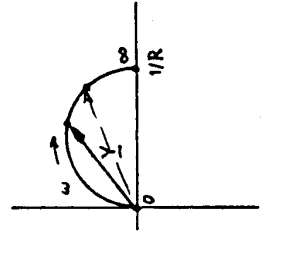
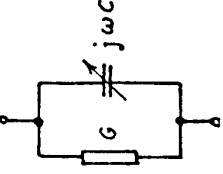
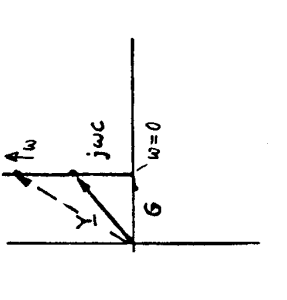
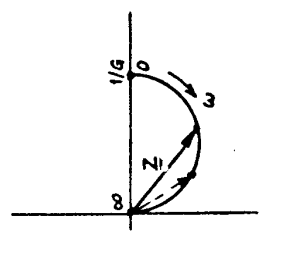
$$\underline{Z}_L = R + j\omega L ; \quad \underline{Z}_C = R - j \frac{1}{\omega C}$$



Zusammenfassung

Ortskurven komplexer Reihenwiderstände und Parallelleitwerte sind Geraden.

8.7.1.1 Ortskurven von RL- und RC-Grundsaltungen (Wechselstromwiderstand und -leitwert)

R-Schaltung	$\underline{Z} = R + jX$	Inversion $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$	P-Schaltung	$\underline{Y} = G + jB$	Inversion $\underline{Z} = 1/\underline{Y}$
					
					
					
					

8.7.2 Frequenzgang

Der Frequenzgang ist eine Netzwerkfunktion, die das Netzwerk in Abhängigkeit von einer **Sinusgröße** beschreibt.

Die Frequenzabhängigkeit der Amplitude wird durch den **Amplitudengang** beschrieben, die Frequenzabhängigkeit des Nullphasenwinkel durch den **Phasengang**.

Bekannte Anwendungen: Frequenzgang von Hoch- und Tiefpass (Filter), Verstärker, Operationsverstärkerschaltungen u.a.

Genauer: Es wird der Frequenzgang des Übertragungsfaktors dargestellt.

Übliche Bezeichnungen: A, G, T, F, H etc.

$$\underline{A} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \quad \begin{array}{l} \underline{U}_2 = \text{Ausgangsgröße} \\ \underline{U}_1 = \text{Eingangsgröße} \end{array}$$

Die Größenverhältnisse des Betrages der Amplitude werden in der Regel logarithmisch angegeben.

Vorteil: Große Zahlenbereiche können grafisch anschaulich dargestellt werden.
Logarithmische Verhältnisse führen häufig zu Geraden;
einfache Multiplikationen werden durch Addition dargestellt.

Größenverhältnisse sind dimensionslos.

Nach DIN 5493/(40148) (Pegelrechnung)

Unterscheidung: Energiegrößen: P (Ursprung)
 Feldgrößen U, I

8.7.2.1 Logarithmische Größenverhältnisse in Dezibel dB

Beispiel: zwei Wirkleistungen

$$a_p = 10 \cdot \lg \frac{P_2}{P_1} \quad \text{dB}$$

/ \

Gewichtsfaktor nicht mit Einheit verwechseln!

dezi, da Ursprung Bel

Logarithmus zur Basis 10

Beispiel:

$$P_2 = 100\text{W}; \quad P_1 = 25\text{mW}$$

$$a_p = 10 \cdot \lg \frac{100\text{W}}{25 \cdot 10^{-3}\text{W}} \text{dB} = 36\text{dB}$$

Zur Angabe des Größenverhältnisses von Feldgrößen wie U, I muss auf Energiegrößen umgerechnet werden.

$$P = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}$$

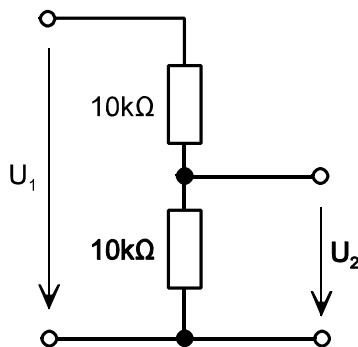
$$a_i = 10 \cdot \lg \frac{I_2^2 \cdot R}{I_1^2 \cdot R} \text{ dB} = 20 \cdot \lg \frac{I_2}{I_1} \text{ dB}$$

$$a_u = 10 \cdot \lg \frac{U_2^2 \cdot R}{U_1^2 \cdot R} \text{ dB} = 20 \cdot \lg \frac{U_2}{U_1} \text{ dB}$$

wichtig: $\frac{U_2}{U_1} > 1$: a positiv (Verstärkung)

$\frac{U_2}{U_1} < 1$: a negativ (Dämpfung)

Beispiel: Widerstandsteiler



$$a_u = \frac{U_2}{U_1} = \frac{10\text{k}\Omega}{10\text{k}\Omega + 10\text{k}\Omega} = \frac{1}{2}$$

$$a_u = 20 \cdot \lg \frac{U_2}{U_1} \text{ dB} = 20 \cdot \lg 0,5 \text{ dB} = -6,02 \text{ dB}$$

Betrag (Amplitudengang) und **Phase** (Phasengang) von $\underline{A}(j\omega)$

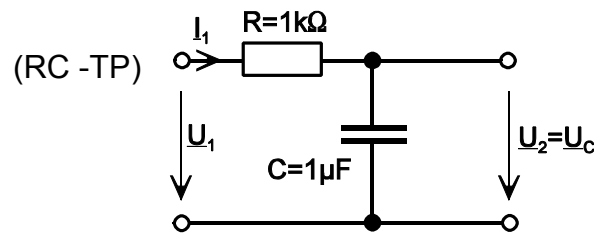
1. Betrag $|\underline{A}(j\omega)| = A(\omega) = \left| \frac{U_2}{U_1} \right|$

2. Phase $\varphi_A = \arctan \frac{\text{Im}\{\underline{A}\}}{\text{Re}\{\underline{A}\}}$

\underline{U}_1 Bezugsgröße

Beispiel:

Tiefpass TP



Übertragungsfunktion
$$\underline{A} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{I}_1 \cdot (-j \frac{1}{\omega C})}{\underline{I}_1 \cdot (R - j \frac{1}{\omega C})} = \frac{1}{\frac{R}{\frac{1}{j\omega C}} + 1} = \frac{1}{j\omega RC + 1} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}$$

Normalform

Betrag
$$A = |\underline{A}| = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{\omega}{\omega_g})^2 + 1}}$$

Grenzfrequenz ω_g

Bedingung

$$\rightarrow |\operatorname{Re}\{\underline{Z}\}| = |\operatorname{Im}\{\underline{Z}\}|$$

$$1 = \omega_g \cdot RC \rightarrow \omega_g = \frac{1}{RC} = 1000 \frac{1}{s}$$

$$\rightarrow f_g = \frac{1}{2\pi RC} = 159,2 \text{ Hz}$$

Phase
$$\varphi_A = \arctan \frac{\operatorname{Im}\{\underline{A}\}}{\operatorname{Re}\{\underline{A}\}} = \arctan \frac{-\omega RC}{1}$$

8.7.2.2 Grafische Darstellung (Bodediagramm)

→ Allg. Anwendung in der Übertragungs- und Regelungstechnik u.a.

Die Amplituden- und Phasenverläufe werden meist nicht exakt, sondern mit den **3 Zeichenhilfen** gezeichnet.

- a. Annäherung an die Asymptote für $\omega \rightarrow 0$
- b. Funktionswert für die Grenzfrequenz ω_g
- c. Annäherung an die Asymptote für $\omega \rightarrow \infty$

Beispieldarstellung des vorherigen RC-Tiefpasses.

1. Amplitudengang (Darstellung doppeltlogarithmisch auf einfachlog. Papier)

$$a) \quad \omega = 0 \dots 0,1 \omega_g \quad A = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 + 1}} \approx 1 \quad \hat{=} \quad 0 \text{ dB}$$

$$b) \quad \omega = \omega_g \quad A = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707 \quad \hat{=} \quad -3,01 \text{ dB}$$

$$c) \quad \omega = 10 \omega_g \dots \infty \quad A \approx \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}} = \frac{\omega_g}{\omega} \sim \frac{1}{\omega}$$

Neigung der Asymptoten bei gleicher Skalenteilung der A-Achse und ω -Achse

$$\frac{d(\lg A)}{d(\lg \omega)} = \frac{d(\lg \omega_g - \lg \omega)}{d(\lg \omega)} = 0 - 1 = -1 = \tan \alpha$$

$$\rightarrow \alpha = -45^\circ$$

$$-45^\circ \text{ hei\ss}t \quad \frac{-20 \text{ dB}}{\text{Dekade}(\omega)} = \frac{-6 \text{ dB}}{\text{Oktave}(\omega)}$$

Dekade: Frequenzverhältnis 10:1
Oktave: " 2:1

(Doppelte Frequenz, halbe Spannung)

2. Phasengang

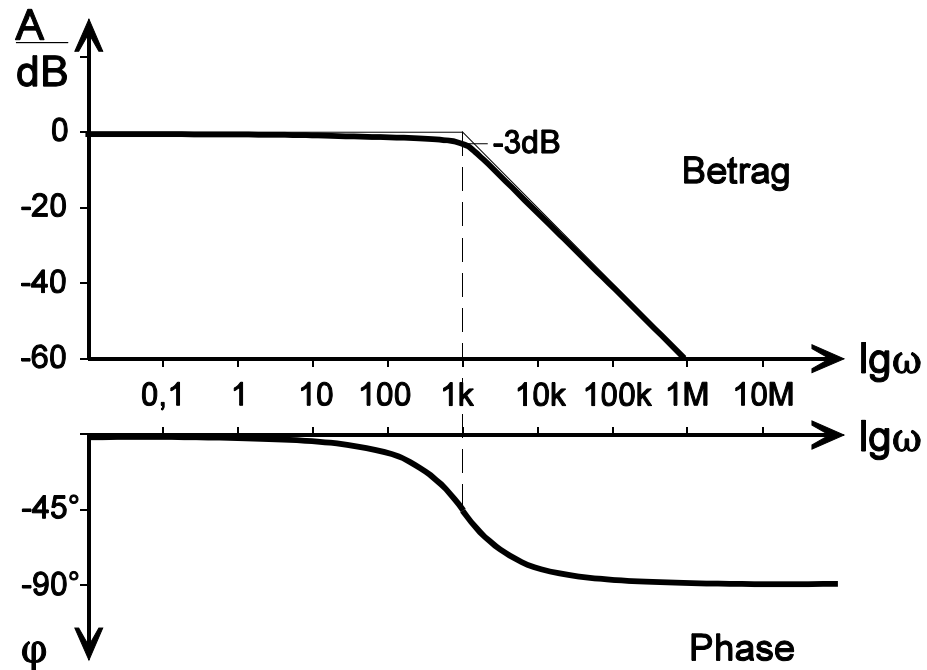
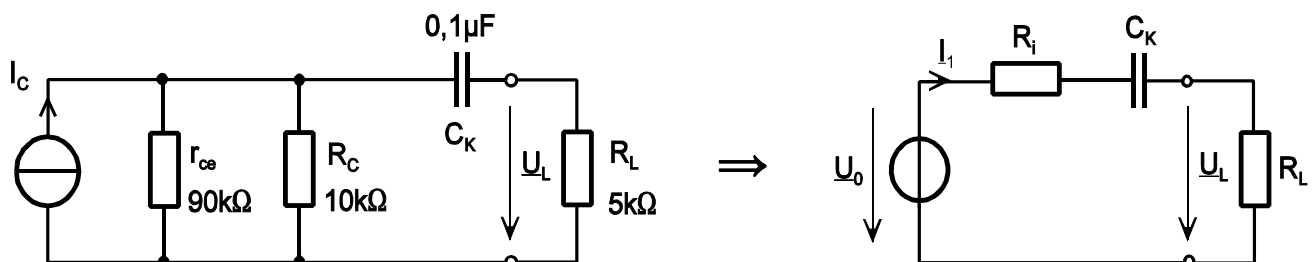
$$\varphi_A = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_g}\right)$$

$$a) \quad \omega \rightarrow 0 \quad \varphi \approx \arctan 0 = 0^\circ$$

$$b) \quad \omega = \omega_g \quad \varphi = \arctan(-1) = -45^\circ$$

$$c) \quad \omega \rightarrow \infty \quad \varphi \approx \arctan(-\infty) = -90^\circ$$

Darstellung einfachlogarithmisch auf einfachlog. Papier,
Frequenzachse identisch mit der Amplitudengangdarstellung.

DarstellungBeispiel:**Hochpass** HP (erweiterter HP mit Grunddämpfung)

$$\underline{A} = \frac{\underline{U}_L}{\underline{U}_0} = \frac{I_1 \cdot R_L}{I_1 \cdot (R_i + R_L - j \frac{1}{\omega C_K})} = \frac{1}{\frac{R_i + R_L}{R_L} - j \frac{1}{\omega R_L C_K}}$$

$$\omega_g \rightarrow |\text{Re}| = |\text{Im}|$$

$$\frac{R_i + R_L}{R_L} = \frac{1}{\omega_g R_L C_K} \rightarrow \omega_g = \frac{1}{(R_i + R_L) C_K} = \frac{1}{14 \text{ k}\Omega \cdot 0.1 \mu\text{F}}$$

$$= 714,3 \frac{1}{\text{s}} \Rightarrow f_g = 113,7 \text{ Hz}$$

Betrag

$$A = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R_i + R_L}{R_L}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega R_L C_K}\right)^2}}$$

3 Zeichenhilfen

$$a) \quad A(\omega \ll \omega_g) \approx \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega R_L C_K}\right)^2}} = \omega R_L C_K \sim \omega \quad \hat{=} +20 \frac{\text{dB}}{\text{Dek.}}$$

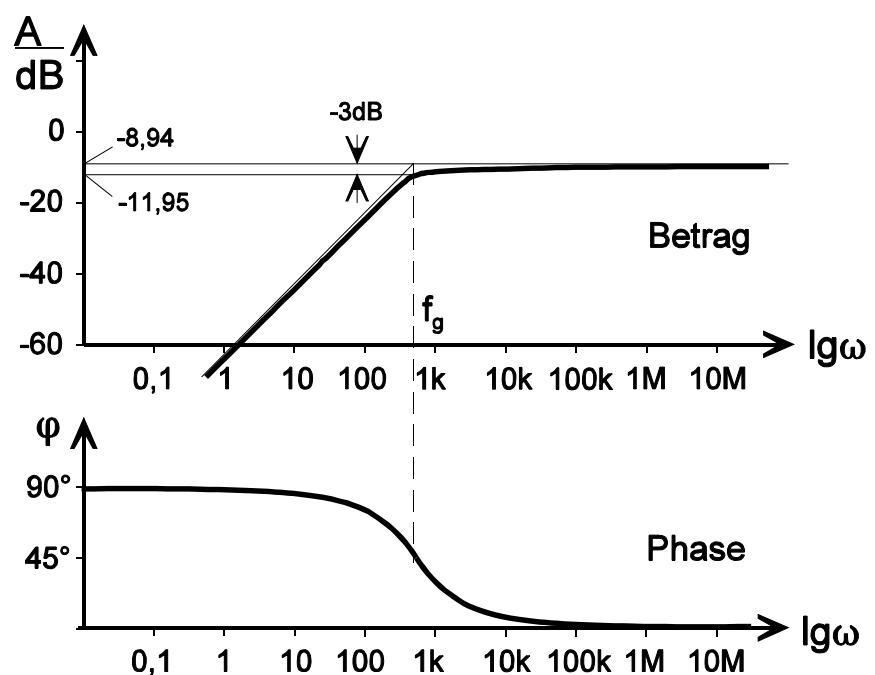
$$b) \quad A(\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R_i + R_L}{R_L}\right)^2 + \left(\frac{(R_i + R_L)C_K}{R_L}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \left(\frac{R_i + R_L}{R_L}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \left(\frac{R_i + R_L}{R_L}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{R_L}{R_i + R_L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{5\text{k}\Omega}{9\text{k}\Omega + 5\text{k}\Omega} = 0,253 \quad \hat{=} -11,953\text{dB}$$

$$c) \quad A(\omega \gg \omega_g) \approx \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R_i + R_L}{R_L}\right)^2}} = \frac{R_L}{R_i + R_L} = \frac{5\text{k}\Omega}{9\text{k}\Omega + 5\text{k}\Omega} = 0,357 \quad \hat{=} -8,94\text{dB}$$

$$\text{Phasengang} \quad \varphi = \arctan \frac{\text{Im}\{A\}}{\text{Re}\{A\}} = \arctan \frac{\frac{1}{\omega R_L C_K}}{\frac{R_i + R_L}{R_L}} = \arctan \frac{1}{\omega (R_i + R_L) C_K}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\omega \rightarrow 0) &= \arctan \infty = +90^\circ \\ \varphi(\omega_g) &= 45^\circ \\ \varphi(\infty) &= 0^\circ \end{aligned}$$



8.8 Schwingkreise

Schwingkreise entstehen durch Reihen- bzw. Parallelschaltung von R, L und C.

- diskrete Zusammenschaltung der Zweipole
- unbeabsichtigte (parasitäre) Schwingkreise infolge Leitungsinduktivitäten, Schalt-, Wicklungs- und Elektrodenkapazitäten

Normalfall: beabsichtigte Schwingkreise sollen eine geringe Dämpfung haben, dagegen unbeabsichtigte eine hohe Dämpfung (siehe Kenngrößen).

Anwendung der Schwingkreise:

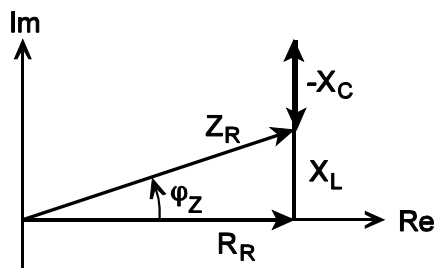
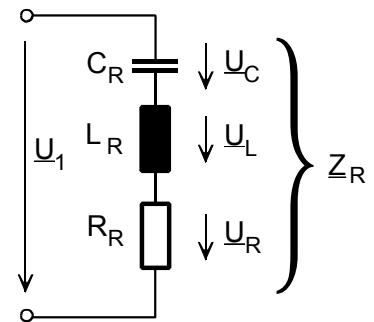
- komplexe Widerstände, komplexe Spannungsteiler
- selektive Verstärker und Oszillatoren

8.8.1 Reihenschaltung von R, L und C; Reihenkreis, Serienkreis, Saugkreis

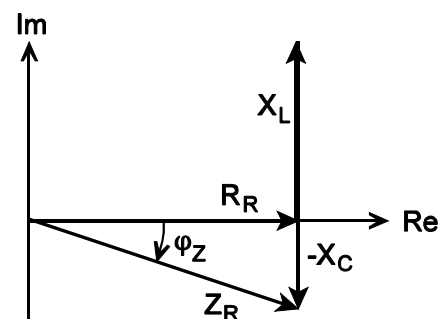
8.8.1.1 Komplexer Widerstand

$$Z_R = R_R + j\omega L_R - j\frac{1}{\omega C_R}$$

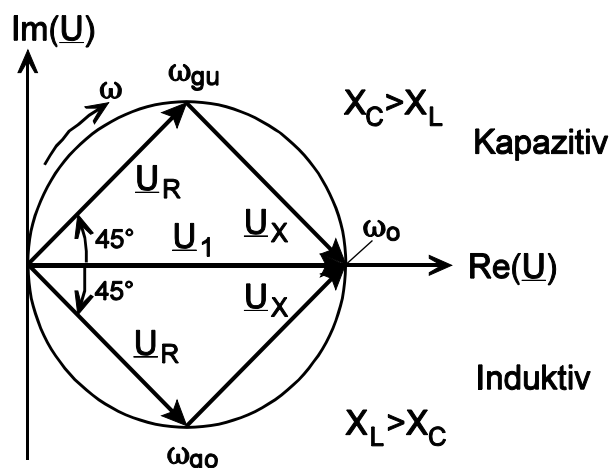
$$Z_R = R_R + j(\omega L_R - \frac{1}{\omega C_R})$$



Induktive Wirkung



Kapazitive Wirkung



8.8.1.2 Resonanz (Spannungsresonanz)

$$\underline{U}_L + \underline{U}_C = 0 \quad \Rightarrow \quad ||| \rightarrow \text{Maximum} \quad \text{bei } \omega_0 = \text{Resonanzfrequenz}$$

$$\text{Bedingung: } \text{Im}(\underline{I})=0 \rightarrow \omega_0 L_R - \frac{1}{\omega_0 C_R} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_R C_R}}}$$

$$\text{Strom bei Resonanz} \quad I_0 = \frac{U_1}{R_R} \quad (\text{Maximum})$$

8.8.1.3 Bandbreite (absolut)

$$\Delta\omega_g = \omega_{go} - \omega_{gu} = \frac{R_R}{2L_R} - \left(-\frac{R_R}{2L_R}\right) = \frac{R_R}{L_R} = \omega_0^2 R_R C_R$$

8.8.1.4 Bandbreite (relativ) bezogen auf ω_0

$$b_r = \frac{\Delta\omega_g}{\omega_0} = \frac{R_R}{\omega_0 L_R} = \omega_0 R_R C_R = d \quad \text{Dämpfung, Verlustfaktor}$$

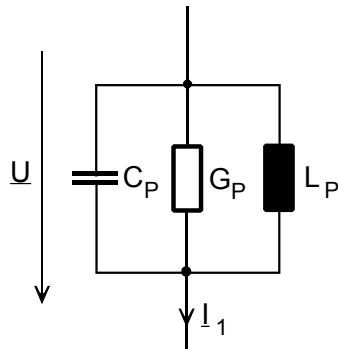
8.8.1.5 Resonanzgüte

$$Q_{RS} = \frac{1}{b_r} = \frac{1}{d} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_g} = \frac{\omega_0 L_R}{R_R} = \frac{1}{\omega_0 R_R C_R}$$

8.8.1.6 Kennwiderstand

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_R}{C_R}}$$

8.8.2 Parallelschaltung von R, L und C; Parallelkreis, Sperrkreis



"Duale" Beziehung zwischen Reihen und Parallelschaltung.

Vertauschung:

$R \rightarrow G, X \rightarrow B; \sum U \rightarrow \sum I$ und umgekehrt

Somit gelten auch alle grafischen Darstellungen der Reihenschaltung für die entsprechenden Größen der Parallelschaltung.

Anwendung der Parallelschaltung als "Sperrkreis" in der NF- und HF-Technik sowie als selektiver Arbeitswiderstand in Resonanzverstärkern, Oszillatoren etc.

Kenngrößen

8.8.2.1 Komplexer Leitwert

$$\underline{Y}_P = G_P + j\omega C_P - j\frac{1}{\omega L_P}$$

8.8.2.2 Stromresonanz

$$I_C + I_L = 0 \quad \rightarrow \quad |\underline{U}| \rightarrow \text{Maximum} \quad \text{bei } \omega_0 = \text{Resonanzfrequenz}$$

$$\text{Bedingung: } \text{Im}(\underline{U}) = 0 \rightarrow \omega_0 C_P - \frac{1}{\omega_0 L_P} = 0$$

$$\rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_P C_P}}$$

$$\text{Spannung bei Resonanz } \underline{U}_0 = \frac{I_1}{G_P} = I_1 \cdot R_P \quad (\text{Maximum})$$

8.8.2.3 Bandbreite (absolut)

$$\Delta\omega_g = \omega_{go} - \omega_{gu} = \frac{1}{R_P C_P} = \frac{G_P}{C_P} = \omega_0^2 G_P L_P$$

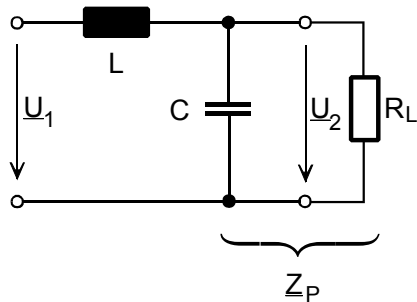
8.8.2.4 Bandbreite (relativ) Dämpfung, Verlustfaktor

$$b_r = \frac{\Delta\omega_g}{\omega_o} = \frac{1}{\omega_o R_P C_P} = \omega_o G_P L_P = d$$

8.8.2.5 Resonanzgüte

$$Q_{PS} = \frac{1}{b_r} = \frac{1}{d} = \omega_o R_P C_P = R_P Y_o$$

8.8.2.6 Kennleitwert $Y_o = \sqrt{\frac{C_P}{L_P}}$

Beispiel: Tiefpass 2.Ordnung

Gesucht: $\underline{G}=f(\omega)=f(\Omega)$, Amplitudenverlauf, Resonanzüberhöhung, $U_{2\max}$

Übertragungsfaktor $\underline{G} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_P}{j\omega L + Z_P}$; $Z_P = \frac{1}{\frac{1}{R_L} + j\omega C} = \frac{R_L}{1 + j\omega R_L C}$

$$\underline{G} = \frac{\frac{R_L}{1 + j\omega R_L C}}{j\omega L + \frac{R_L}{1 + j\omega R_L C}} \cdot \frac{1 + j\omega R_L C}{R_L} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega \frac{L}{R_L}}$$

$$\underline{G} = \frac{1}{1 - \Omega^2 + j \frac{\Omega}{\Omega_g}}$$

$$|\underline{G}| = G = \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_g}\right)^2}}$$

mit $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$; $\Omega_g = \frac{\omega_g}{\omega_0}$ sowie $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_g} = \frac{\Omega}{\Omega_g}$; $\omega_g = \underbrace{\frac{R_L}{L}}_{\text{wenn } C \rightarrow 0}$

$$\vartheta = \frac{1}{2R_L} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{\omega_g} = \frac{1}{2\Omega_g}$$

ϑ = Dämpfungsgrad
 $d = 2\vartheta$ = Dämpfung

Resonanzstelle nur, wenn $d < 1$

Fallunterscheidung

1. Unbelastet, d.h. $R_L \rightarrow \infty$ Folge: $\omega_g \rightarrow \infty$ wegen $\omega_g = \frac{R_L}{L}$
 $\Rightarrow \Omega_g \rightarrow \infty$; $\frac{\Omega}{\Omega_g} \rightarrow 0$

$$|\underline{G}|_1 = \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2}} = \frac{1}{1 - \Omega^2}$$

$|G|_1 \rightarrow \infty$ Maximum, wenn $\Omega=1$ (Resonanz), Resonanzüberhöhung ∞ , da $d=0$.

Amplitudenverlauf

$$a) \quad \Omega \rightarrow 0 \Rightarrow |G|_1 = 1 \rightarrow 0\text{dB}$$

$$a) \quad \Omega = 1 \Rightarrow |G|_1 \rightarrow \infty$$

$$b) \quad \Omega \gg 1 \Rightarrow |G|_1 = \frac{1}{-\Omega^2} \rightarrow -40\text{dB/dek}$$

2. Große Belastung, große Dämpfung, C unwirksam

$$\Omega_g \rightarrow 0, \text{ daher } (1 - \Omega^2)^2 < \left(\frac{\Omega}{\Omega_g}\right)^2 \text{ und } \omega_g \ll \omega_0$$

$$|G|_2 = \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_g}\right)^2}}$$

$$a) \quad \Omega \rightarrow 0 \Rightarrow |G|_2 = 1 \rightarrow 0\text{dB}$$

$$b) \quad \Omega = 1 \Rightarrow |G|_2 = \Omega_g \ll 1$$

$$c) \quad \Omega \gg 1 \Rightarrow |G|_2 = \frac{\Omega_g}{\Omega} \rightarrow -20\text{dB/dek (einfacher Tiefpass)}$$

3. Optimale Dimensionierung

$$\Omega_g = 1, \text{ d.h. } \omega_g = \omega_0 \quad \vartheta = \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{\omega_g} = \frac{1}{2}; \quad d=1$$

$$|G|_3 = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\Omega^2 + \Omega^4 + \Omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{\underbrace{1 - \Omega^2 + \Omega^4}_A}} \quad G_3 \text{ maximal, wenn } A = \min!$$

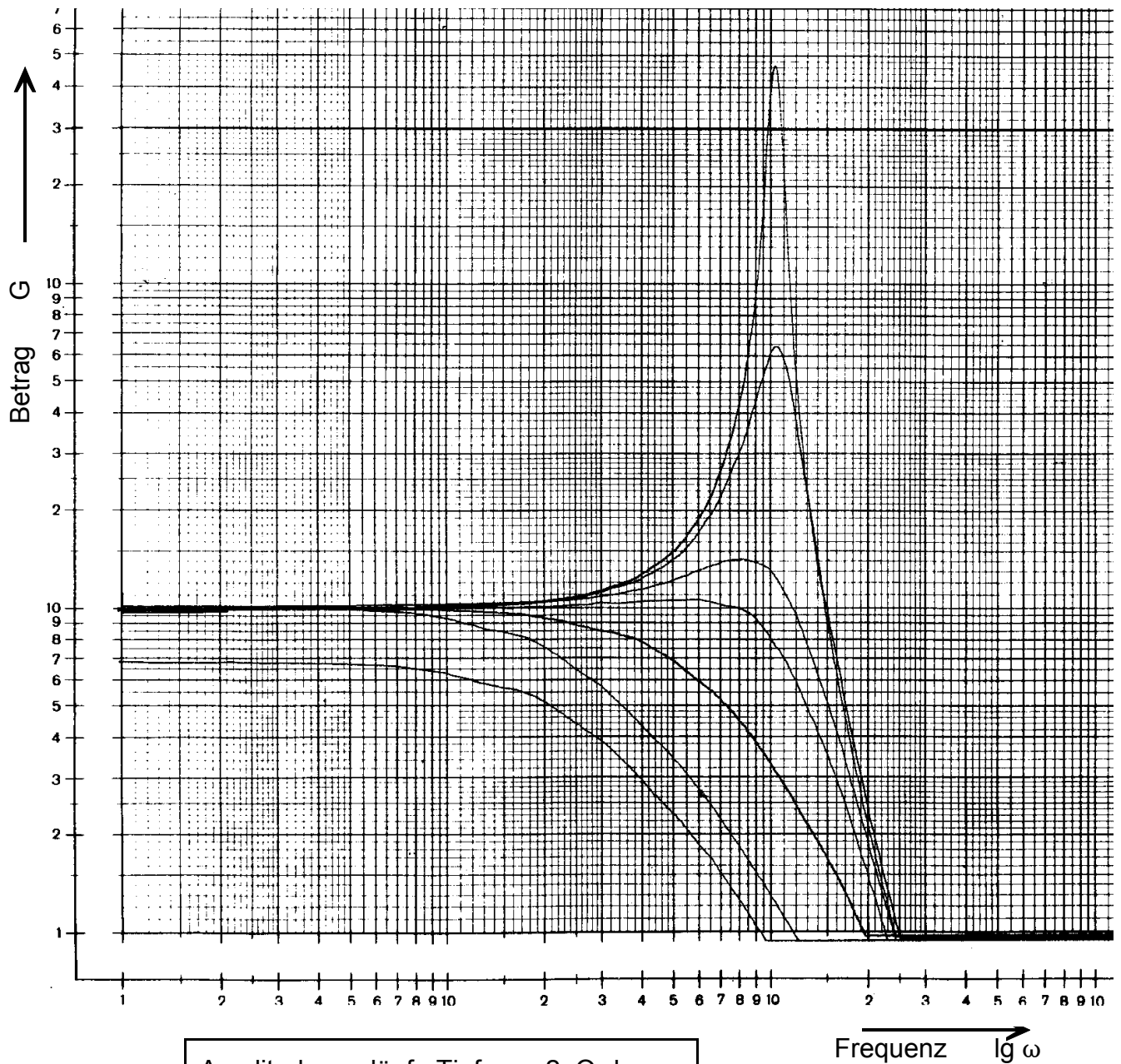
$$\rightarrow \frac{dA}{d\Omega} = 0 - 2\Omega + 4\Omega^3 = 0 \rightarrow 4\Omega^3 = 2\Omega$$

$$\Rightarrow \Omega_{\max} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Resonanzüberhöhung

$$G_{3\max} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,15 \rightarrow 15\%$$

- a) $\Omega \rightarrow 0 \Rightarrow |\underline{G}|_3 = 1 \rightarrow 0\text{dB}$
- b) $\Omega = 1 \Rightarrow |\underline{G}|_3 = 1 \rightarrow 0\text{dB}$
- c) $\Omega \gg 1 \Rightarrow |\underline{G}|_3 \approx \frac{1}{\Omega^2} \rightarrow -40\text{dB/dek} \quad (\text{Neigung wie Fall 1})$



Amplitudenverläufe Tiefpass 2. Ordnung
mit unterschiedlichen Dämpfungen

9. **Leistung im Wechselstromkreis (einphasig)**

Spannungen und Ströme sinusförmig

9.1 Augenblicksleistung

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i) \quad \varphi = \varphi_u - \varphi_i \quad (\text{DIN 40110})$$

$$p(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) \cdot \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$= U\sqrt{2} \cdot I\sqrt{2} \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\text{mit } \sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} (\cos[\alpha-\beta] - \cos[\alpha+\beta])$$

$$p(t) = U \cdot I \cdot 2 \frac{1}{2} (\cos[(\omega t + \varphi_u) - (\omega t + \varphi_i)] - \cos[\omega t + \varphi_u + \omega t + \varphi_i])$$

$$p(t) = U \cdot I \cdot \underbrace{(\cos[\varphi_u - \varphi_i])}_{\substack{\text{Mittelwert} \\ \text{(Gleichanteil)} \\ \text{(Wirkleistung)}}} - \underbrace{\cos[2\omega t + \varphi_u + \varphi_i]}_{\substack{\text{Pulsierender Teil} \\ \text{(Wechselanteil)} \\ \text{(Blindleistung)}}$$

Erkenntnis:

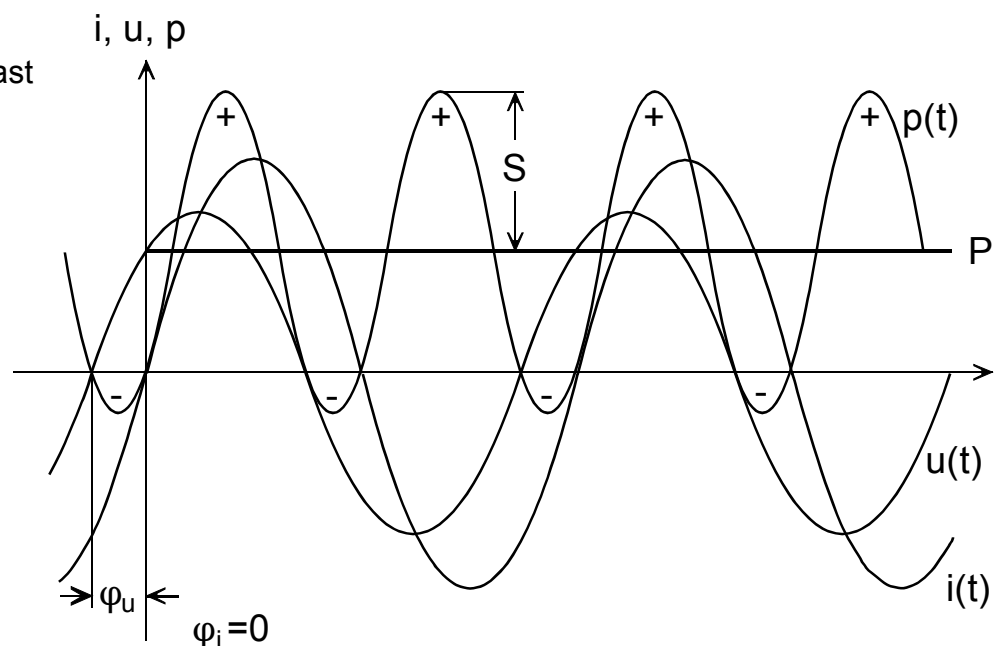
1. pulsierender Anteil mit doppelter Netzfrequenz (2ω) überlagert den Mittelwert
Mittelwert: mittlere, gerichtete Wirkleistung P .

2. Augenblicksleistung $p(t)$ kann das Vorzeichen periodisch wechseln
zwei Leistungsflussrichtungen

Wirkleistung: Generator \longrightarrow Verbraucher
Blindleistung: Generator \longleftrightarrow Verbraucher

Beispiel:

induktiv-ohmsche Last



9.2 Scheinleistung

Amplitude des Wechselanteils heißt Scheinleistung S

$$\boxed{S = U \cdot I} \quad p_{\sim}(t) = \underbrace{U \cdot I}_{S \text{ (Amplitude)}} \cdot \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) \quad [S] = \text{VA}$$

Die Scheinleistung ist stets positiv (Produkt der Effektivwerte).

9.3 Wirkleistung

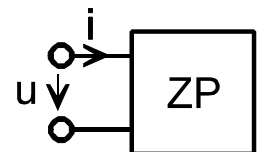
Die Wirkleistung ist der arithmetische Mittelwert der Augenblicksleistung $p(t)$.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} U \cdot I \cdot \cos \varphi \int_0^T dt - 0 = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

$$\boxed{P = \underbrace{U}_{S} \cdot \underbrace{I \cdot \cos \varphi}_{\text{Wirkfaktor (Leistungsfaktor } \cos \varphi)}} \\ \backslash \text{Scheinleistung}$$

Die Wirkleistung kann ein positives oder negatives Vorzeichen haben (abh. von φ).

pos. Vorzeichen: passiver Zweipol, nimmt elektrische Energie auf
neg. Vorzeichen: aktiver Zweipol, gibt elektrische Energie ab



ZP	P	φ	$\cos \varphi$	
passiv	≥ 0	$-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$	≥ 0	Verbraucher
aktiv	< 0	$-180^\circ \leq \varphi < -90^\circ$ $90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$	< 0	Generator

9.4 Blindleistung

1. ohmscher Widerstand R $\rightarrow \varphi=0 \rightarrow \cos \varphi=1$

$$\boxed{P = U I = \frac{U^2}{R} = I^2 R}$$

2. induktiver Widerstand L $\rightarrow \varphi_u = \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos \frac{\pi}{2} = 0$

$$\boxed{P = 0}$$

$$p(t) = U I (0 - \cos[2\omega t + \frac{\pi}{2}]) = U I \sin 2\omega t \cdot \sin \frac{\pi}{2} = U I \sin 2\omega t$$

$p(t)$ = Pendelleistung (Blindleistungsschwingung), keine Wirkleistung, da $P=0$

übliche Bezeichnung: Blindleistung Q

$$Q = U I \sin \varphi$$

$$[Q] = \text{var}$$

Die Blindleistung erhöht den Scheinstrom zwischen Generator und Verbraucher und damit die ohmschen Verluste in Leitungen, Transformatoren, Schaltern etc.

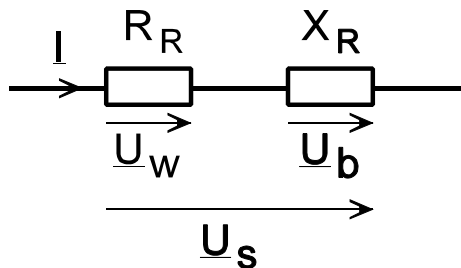
3. kapazitiver Widerstand $C \rightarrow \varphi_u = -\frac{\pi}{2} \rightarrow \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$

$$\boxed{P=0}$$

wie induktiver Widerstand

9.5 Komplexe Leistung

9.5.1 Reihenschaltung



$$\underline{Z}_R = R_R + jX_R$$

\underline{I} = reell

$$\underline{Z}_R \cdot I^2 = R_R \cdot I^2 + jX_R \cdot I^2$$

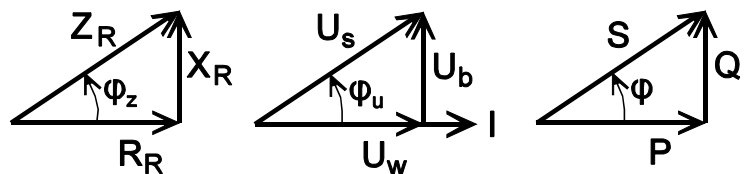
$$\underline{U}_s \cdot I = \underbrace{\underline{U}_w \cdot I}_{P} + \underbrace{j \underline{U}_b \cdot I}_{Q}$$

$$\underline{S} = \underline{P} + j\underline{Q}$$

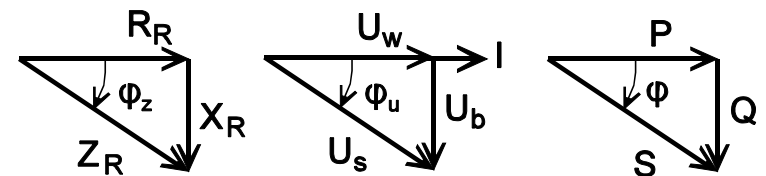
$$\underline{S} = P + jQ$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

induktiv-ohmsch



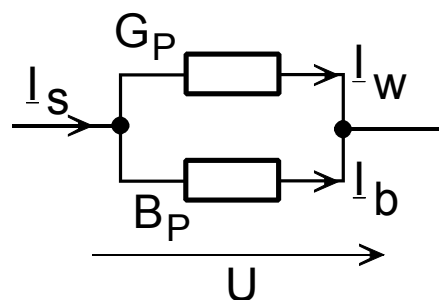
kapazitiv-ohmsch



9.5.2 Parallelschaltung

$$\underline{Y}_P = G_P + jB_P$$

\underline{U} = reell $\rightarrow \varphi_u = 0; \quad \varphi = -\varphi_i = -\varphi_y$



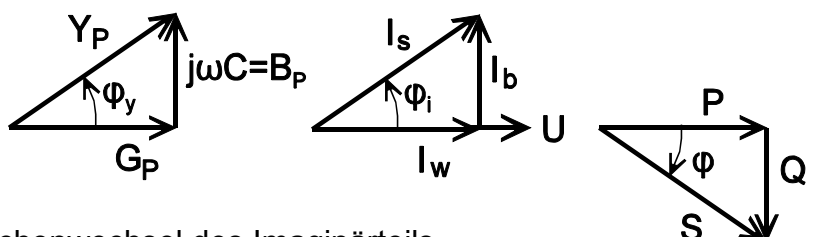
$$\underline{Y}_P \cdot U = \underbrace{G_P \cdot U}_{I_w} + \underbrace{jB_P \cdot U}_{j I_b}$$

$$\underline{I}_s = \underline{I}_w + j \underline{I}_b$$

$$\underline{I}_s \cdot U = \underbrace{\underline{I}_w \cdot U}_{P} + \underbrace{j \underline{I}_b \cdot U}_{jQ}$$

$$\underline{S} = \underline{P} + j\underline{Q}$$

kapazitiv-ohmsch

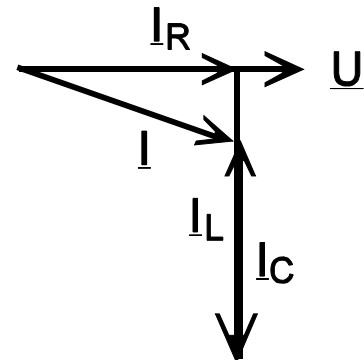
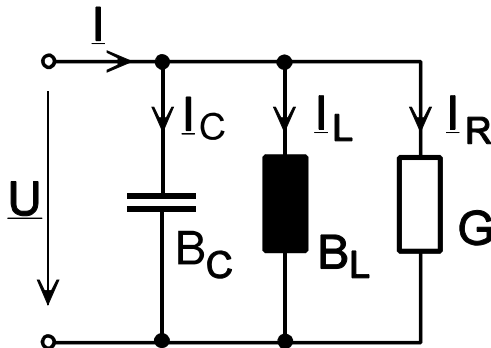


induktiv-ohmsch: wegen $-\varphi \rightarrow$ Vorzeichenwechsel des Imaginärteils

9.6 Blindleistungskompensation (Parallelkompensation, Reihenkompensation)

Es entstehen zusätzliche Verluste durch die Blindleistung (Pendelenergie), Schalterbelastungen, Leitungsverluste.

Diese Verluste lassen sich vermeiden, wenn dem Verbraucher $\underline{Y} = G + jB$ ein Zweipol $-jB$ parallel (oder in Reihe) geschaltet wird.



Blindstromkompensation

In der Regel wird nicht voll kompensiert:

- technisch schwierig
- Aufwand steigt unverhältnismäßig
- Kostengründe

Der Leistungsfaktor wird meist auf etwa $\cos\varphi=0,95$ kompensiert.

Weiter Definitionen:

$$\lambda = \cos \varphi = \frac{P}{S} \quad \text{Wirkfaktor, Leistungsfaktor, Powerfaktor}$$

$$\sin \varphi = \frac{Q}{S} \quad \text{Blindfaktor}$$

$$d = \underbrace{\tan(90^\circ - \varphi)}_{\text{Verlustwinkel } \delta} = \cot \varphi = \frac{1}{\tan \varphi} = \frac{1}{\frac{Q}{P}} = \frac{P}{Q}$$

Zusammenfassung: Spannung, Ströme, Leistungen

	Spannung	Strom	Leistung
Schein-	$U_s = \frac{S}{I}$	$I_s = \frac{S}{U}$	$S = U_s \cdot I_s$
Wirk-	$U_w = \frac{P}{I} = U_s \cdot \cos \varphi$	$I_w = \frac{P}{U} = I_s \cdot \cos(-\varphi)$	$P = S \cdot \cos \varphi$
Blind-	$U_b = \frac{Q}{I} = U_s \cdot \sin \varphi$	$I_b = \frac{Q}{U} = I_s \cdot \sin(-\varphi)$	$Q = S \cdot \sin \varphi$
	Reihenschaltung	Parallelschaltung	beide

10. Übertrager, Transformatoren

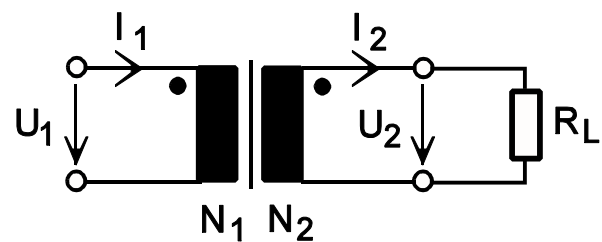
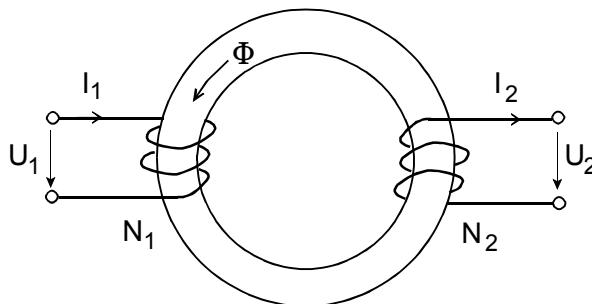
10.1 Idealer Transformator

Der ideale Transformator hat einen geschlossenen Kern (Ringkern), auf den zwei Wicklungen (primär und sekundär) gewickelt sind.

Das Kernmaterial hat eine sehr hohe Permeabilität, das Magnetfeld ist konzentriert nur im Kern.

Die Spulen haben einen sehr geringen (vernachlässigbaren) ohm'schen Widerstand. Der gesamte magnetische Fluss durchsetzt beide Spulen (kein Streufluss).

Schaltbild



Punkte: Gleicher Wicklungsanfang

sinusförmige Spannung u_1

$$u_1 = N_1 \cdot \frac{d\Phi_1(t)}{dt}$$

N_1 = Primär-Windungszahl

Verbraucher-Pfeilsystem, magnetischer Fluss ist sinusförmig

für die Sekundärspule gilt

$$u_2 = N_2 \cdot \frac{d\Phi_2(t)}{dt}$$

N_2 = Sekundär-Windungszahl

Entsprechend der Voraussetzung sind beide Flüsse gleich: $\Phi_1(t) = \Phi_2(t) = \Phi(t)$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1 \frac{d\Phi_1(t)}{dt}}{N_2 \frac{d\Phi_2(t)}{dt}} \rightarrow \frac{u_1}{u_2} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = \ddot{u} \quad (1) \quad \ddot{u} = \text{Übersetzungsverhältnis}$$

Primär- und Sekundärspannung sind in Phase, die Beträge sind proportional den Windungszahlen.

10.1.1 Leistungen: $P_1 = P_2 \rightarrow U_1 \cdot I_1 = U_2 \cdot I_2 \quad (2)$
 $S_1 = S_2$

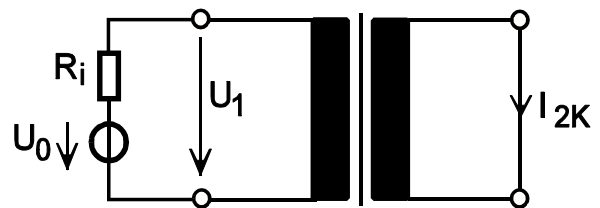
Damit ergibt sich für das Stromverhältnis: $\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} = \ddot{u} \quad (3)$

10.1.2 Widerstände:

mit (2) und (3)

$$R_{\text{ein}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2 \cdot I_2}{I_1 \cdot I_1} = \frac{U_2 \cdot I_2}{I_1^2} = \frac{U_2 \cdot I_2}{I_2^2} \ddot{u}^2$$

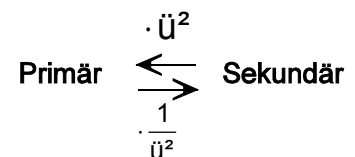
$$= \frac{U_2}{I_2} \ddot{u}^2 = R_L \cdot \ddot{u}^2 \quad (4)$$



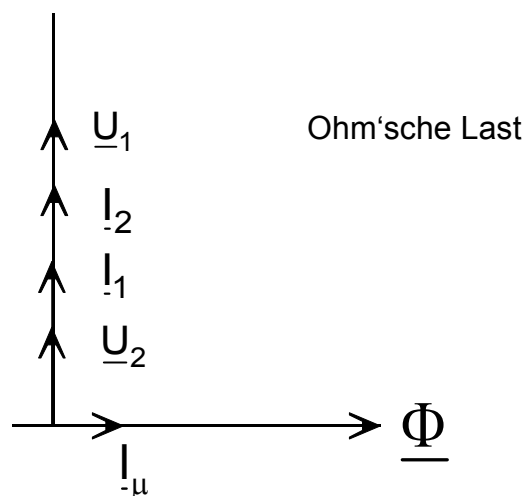
$$R_{\text{aus}} = \frac{\Delta U_2}{\Delta I_2} = \frac{U_{2L} - 0}{I_{2K} - 0} = \frac{U_{2L}}{I_{2K}}$$

mit (3)

$$= \frac{U_0 \cdot \frac{1}{\ddot{u}}}{I_{1K} \cdot \ddot{u}} = \frac{U_0 \cdot \frac{1}{\ddot{u}}}{\frac{U_0}{R_i} \cdot \ddot{u}} = R_i \cdot \frac{1}{\ddot{u}^2} \quad (5)$$



In der Primärwicklung fließt der Magnetisierungsstrom I_μ , der um so kleiner ist, je idealer der Transformator ist (sehr große Permeabilität).



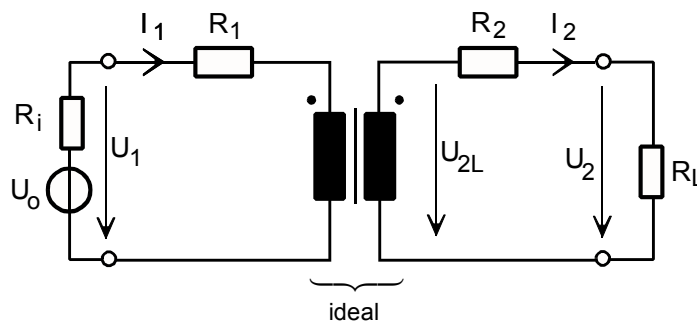
10.2 Technischer Transformator

Unerwünschte Nebenwirkungen

- Ohm'scher Wicklungswiderstand (Kupferwiderstand)
- Streuinduktivität, Streuung d.h. Φ_1 ist nicht gleich Φ_2
- Eisenverluste: Hystereseverluste + Wirbelstromverluste
- Wicklungskapazität

Berücksichtigung der Kupferverluste (Wicklungswiderstände)

→ zusätzlicher Wirkwiderstand, Leistungsverlust, Phasenverschiebung, Spannungsabfall



$$P_1 = U_1 \cdot I_1 \neq P_2 = U_2 \cdot I_2 \quad \ddot{u} = \frac{U_{1L}}{U_{2L}}$$

$$U_2 = U_{2L} - I_2 \cdot R_2 = \frac{U_1 - I_1 \cdot R_1}{\ddot{u}} - I_2 \cdot R_2$$

mit (3)

$$= \frac{U_1}{\ddot{u}} - \frac{I_2}{\ddot{u}^2} \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 \quad \text{mit } I_2 = \frac{U_2}{R_L} \quad \rightarrow U_2 \left(1 + \frac{1}{\ddot{u}^2} \cdot \frac{R_1}{R_L} + \frac{R_2}{R_L} \right) = \frac{U_1}{\ddot{u}}$$

$$U_2 = \frac{U_1}{\ddot{u}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{R_L} \left(\frac{R_1}{\ddot{u}^2} + R_2 \right)} \quad (6)$$

mit $R_i \neq 0$

$$U_2 = \frac{U_0}{\ddot{u}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{R_L} \left(\frac{R_i + R_1}{\ddot{u}^2} + R_2 \right)} \quad (6a)$$

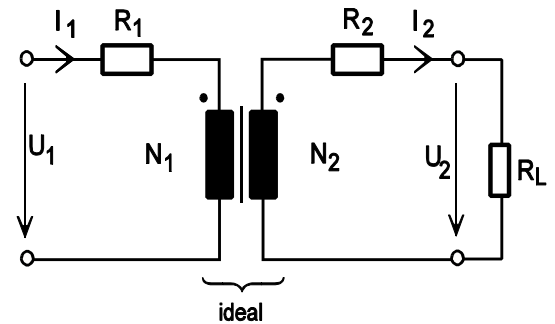
10.2.1 Ausgangswiderstand

$$R_{\text{aus}} = \left(\frac{R_1}{\ddot{u}^2} + R_2 \right) \quad (7)$$

10.2.2 Eingangswiderstand

$$R_{\text{ein}} = \frac{U_1}{I_1}$$

$$\begin{aligned} R_{\text{ein}} &= R_1 + (R_2 + R_L) \ddot{u}^2 \\ &= R_1 + R'_{\text{sek}} \end{aligned} \quad (7a)$$

10.2.3 Verluste

$$\begin{aligned} P_V &= P_1 - P_2 = U_1 \cdot I_1 - U_2 \cdot I_2 = U_1 I_1 - I_2 R_L I_2 \\ &= U_1 I_1 - I_1^2 \cdot R_L \ddot{u}^2 \end{aligned}$$

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1 + R'_{\text{sek}}}$$

$$P_V = U_1^2 \cdot \frac{1}{R_1 + R'_{\text{sek}}} - U_1^2 \cdot \ddot{u}^2 \frac{R_L}{(R_1 + R'_{\text{sek}})^2}$$

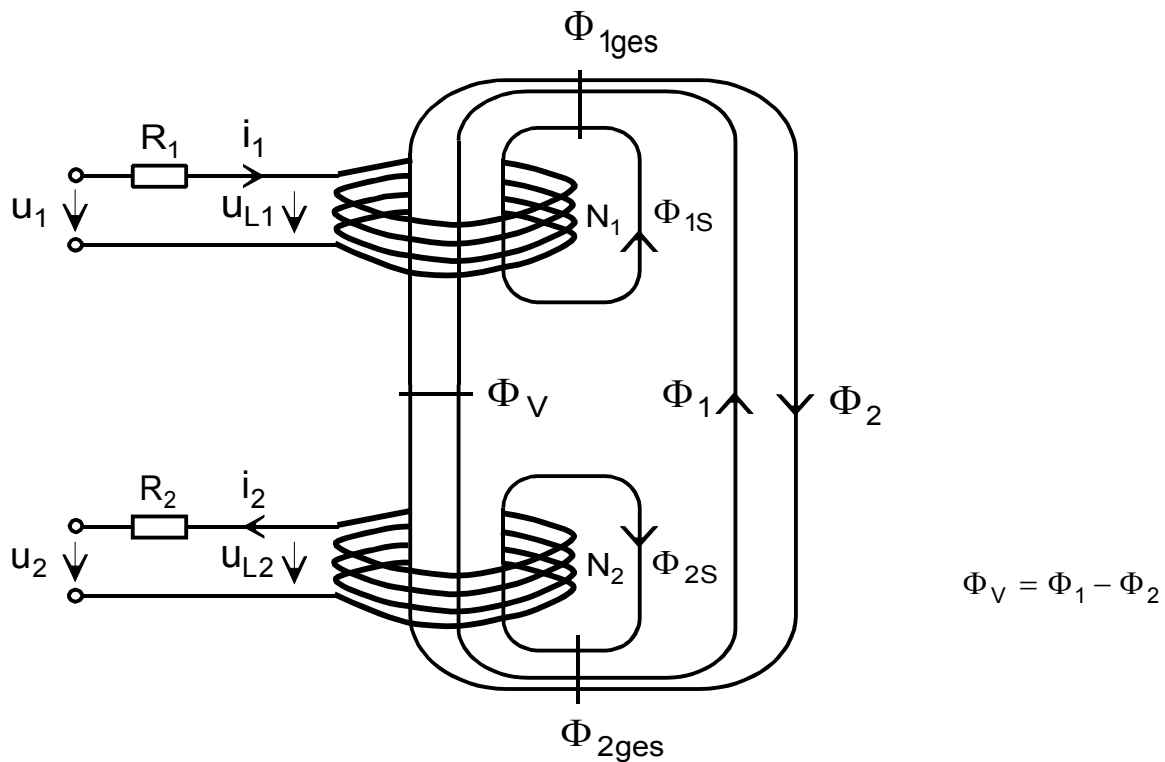
$$P_V = U_1^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{R_1 + R'_{\text{sek}}}}_{P_1} \underbrace{\left(1 - \ddot{u}^2 \frac{R_L}{R_1 + R'_{\text{sek}}}\right)}_{1 - \eta}$$

$$P_V = P_1(1 - \eta) \quad \eta = \frac{P_2}{P_1}$$

$$\eta = \ddot{u}^2 \frac{R_L}{R_1 + R'_{\text{sek}}}$$

10.2.4 Belasteter Transformator mit Streuung

→ Zusätzlicher Blindwiderstand, Phasenverschiebung, Spannungsabfall



ideal: $\Theta = i_1 \cdot N_1 - i_2 \cdot N_2 = 0$

mit Kopplungsfaktor $k \leq 1$

$$\Theta_{1\text{ges}} = \Theta_1 + k \cdot \Theta_2 = i_1 N_1 - i_2 N_2 \cdot k$$

mit $\Theta = \Phi \cdot R_m$

$$\Phi_{1\text{ges}} \cdot R_m = i_1 N_1 - i_2 N_2 \cdot k$$

$$u_{L1} = N_1 \cdot \frac{d\Phi_{1\text{ges}}}{dt} = N_1 \cdot \frac{1}{R_m} \left(\frac{d\Theta_1}{dt} + k \cdot \frac{d\Theta_2}{dt} \right) \quad (9)$$

$$= N_1 \cdot \frac{1}{R_m} \frac{N_1 di_1}{dt} + N_1 \cdot \frac{1}{R_m} k \frac{N_2 (-di_2)}{dt}$$

$$u_{L1} = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} - \underbrace{k \frac{N_1 N_2}{R_m}}_M \frac{di_2}{dt} \quad (9a)$$

|
prim.
Haupt-
induktivität

|
Kopplungs- oder
gegenseitige Induktivität

$$M = k \sqrt{L_1 \cdot L_2} \quad (10)$$

$$\sigma = 1 - k^2 \leq 1 \quad \text{Streufaktor} \quad (11)$$

Maschenregel

primär

$$u_1 = i_1 R_1 + u_{L1}$$

$$\boxed{u_1 = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}} \quad (12)$$

sekundär

$$u_2 = -i_2 R_2 + u_{L2}$$

mit $u_{L2} = -L_2 \frac{di_2}{dt} + k \frac{N_2 N_1}{R_m} \frac{di_1}{dt}$

$$\boxed{u_2 = -i_2 R_2 - L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}} \quad (13)$$

Für die folgenden Ableitungen ist die Umrechnung der Sekundärgrößen auf Primärgrößen Voraussetzung (Größen durch ' Strich gekennzeichnet). Dadurch kann der ideale Transformator durch die Gegeninduktivität M ersetzt werden, das Windungsverhältnis entfällt.

$$\begin{aligned} u_1 &= i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M' \frac{di_2'}{dt} \\ &= i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M' \frac{di_1}{dt} - M' \frac{di_2'}{dt} + M' \frac{di_1}{dt} \end{aligned}$$

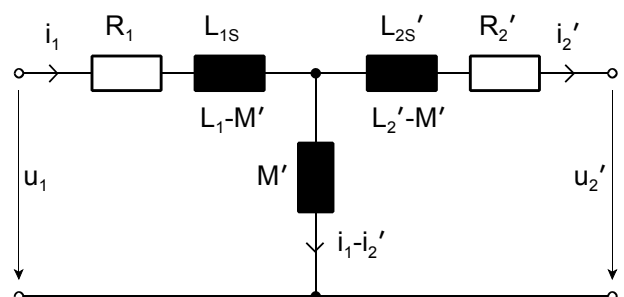
$$= i_1 R_1 + \underbrace{(L_1 - M')}_{L_{1S}} \frac{di_1}{dt} + M' \frac{d}{dt} (i_1 - i_2')$$

\ Streuinduktivität primär

$$u_2' = -i_2' R_2' - L_2' \frac{di_2'}{dt} + M' \frac{di_2'}{dt} + M' \frac{di_1}{dt} - M' \frac{di_2'}{dt}$$

$$= -i_2' R_2' - \underbrace{(L_2' - M')}_{L_{2S}} \frac{di_2'}{dt} + M' \frac{d}{dt} (i_1 - i_2')$$

\ Streuinduktivität sekundär



Umrechnungen: $\frac{N_1 N_1}{R_m} = L_1; \quad \frac{N_2 N_2}{R_m} = L_2 = \frac{N_1 N_1}{\ddot{u}^2 \cdot R_m}; \quad L_2 \cdot \ddot{u}^2 = L_2'$

$$\frac{k \cdot N_1 N_2}{R_m} = M = \frac{k \cdot N_1 N_1'}{\ddot{u} \cdot R_m}; \quad \frac{k \cdot N_1 N_2'}{R_m} = \ddot{u} \cdot M = M'; \quad M = \frac{M'}{\ddot{u}}$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \ddot{u} \rightarrow N_2 = \frac{N_1}{\ddot{u}}$$

$$R'_2 = R_2 \cdot \ddot{u}^2$$

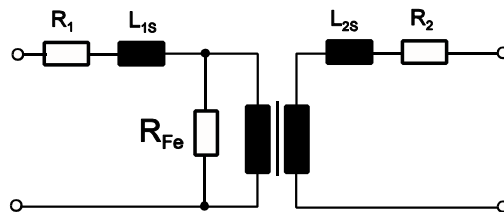
$$L'_2 = L_2 \cdot \ddot{u}^2, \quad L'_{2S} = L_{2S} \cdot \ddot{u}^2$$

$$N'_2 = N_2 \cdot \ddot{u}, \quad N_1 = \ddot{u} \cdot N_2$$

$$U'_2 = U_2 \cdot \ddot{u}, \quad I_2 = I'_2 \cdot \ddot{u}$$

10.2.5 Eisenverluste: Hystereseverluste + Wirbelstromverluste

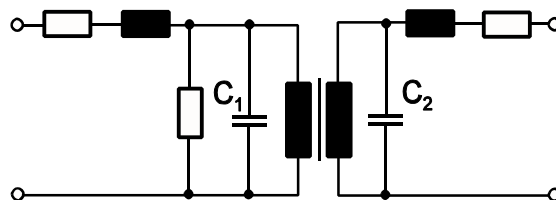
- zusätzlicher Wirkwiderstand parallel zur Wicklung (Leistungsverlust)
zusätzliche Phasenverschiebung



R_{Fe} = Summe aller Eisenverluste

10.2.6 Wicklungskapazität

- nur bei hohen Frequenzen
bei 50 Hertz meist vernachlässigbar
zusätzlicher Blindwiderstand (Phasenverschiebung)
Einfluss auf Frequenzgang



C_1 primär

C_2 sekundär

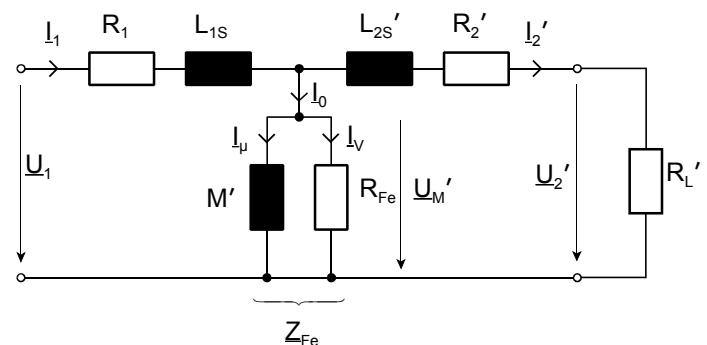
10.2.7 Darstellung mit komplexen Größen

$$\underline{U}_1 = I_1 \cdot R_1 + j\omega L_{1S} \cdot I_1 + \underline{Z}_{Fe} (I_1 - I_2')$$

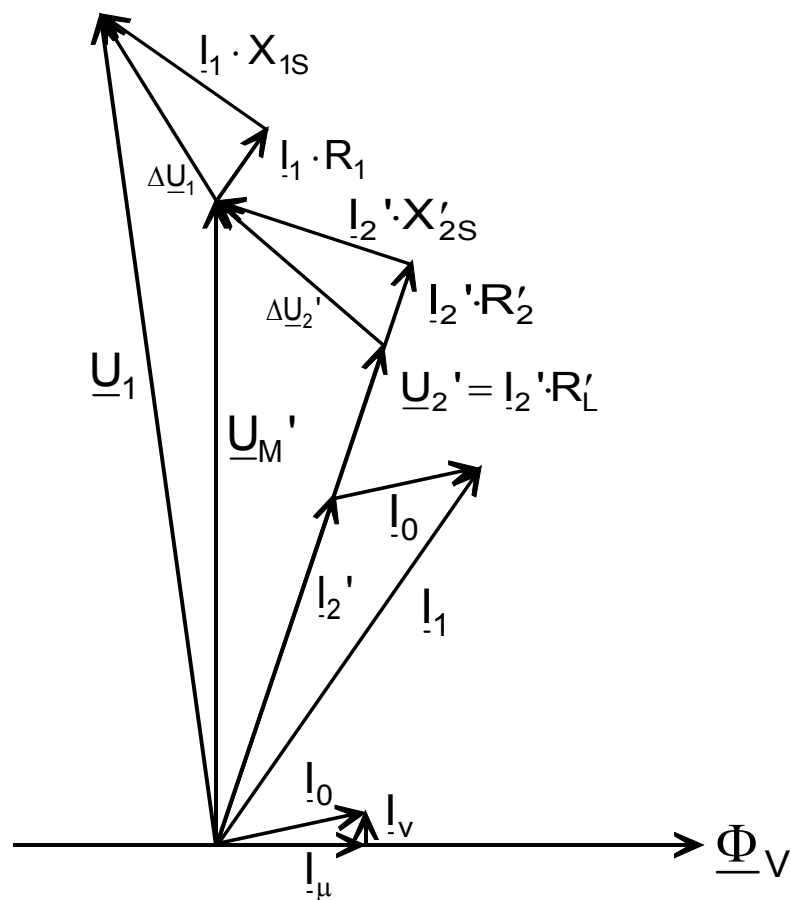
$$\underline{U}_2' = -I_2' \cdot R_2' - j\omega L_{2S}' \cdot I_2' + \underline{Z}_{Fe} (I_1 - I_2')$$

$$\underline{U}_1 = I_1 \cdot R_1 + jX_{1S} \cdot I_1 + \underline{U}_M'$$

$$\underline{U}_2' = -I_2' \cdot R_2' - jX_{2S}' \cdot I_2' + \underline{U}_M'$$



Es ergibt sich folgendes Zeigerdiagramm unter Berücksichtigung der Kupferverluste, Streuung und Eisenverluste:



10.2.8 Messung der Transformatoreigenschaften (Leistungstransformatoren, $f=50\text{Hz}$)

10.2.8.1 Leerlaufversuch

Ausgangsstrom (sekundär) $I_2 = 0$

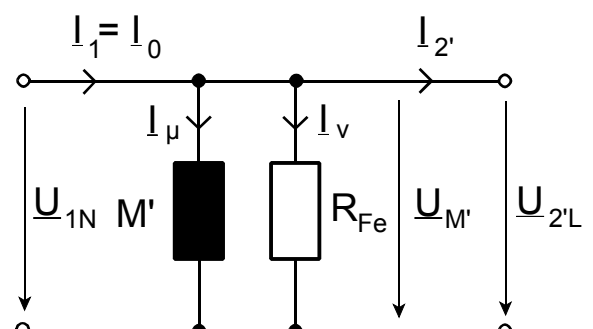
Primärstrom = Leerlaufstrom $I_0 \approx 1\ldots 5\%$ von I_N (primärer Nennstrom)

Streuung und Kupferverluste können vernachlässigt werden, der Leerlaufstrom deckt den Magnetisierungsbedarf.

$$\Rightarrow \underline{U}_1 \approx \underline{U}_M' \approx \underline{U}_2'$$

Es werden gemessen bei U_{1N} : U_{2N} , I_0 , P_0

$P_0 \approx$ Eisenverluste im Nennbetrieb



$$P_0 = \frac{U_{1N}^2}{R_{Fe}} \rightarrow R_{Fe} = \frac{U_{1N}^2}{P_0}$$

$$\cos \varphi_0 = \frac{P_0}{S_0} = \frac{P_0}{I_0 \cdot U_{1N}} \rightarrow I_\mu = I_0 \cdot \sin \varphi_0 \quad I_v = I_0 \cdot \cos \varphi_0$$

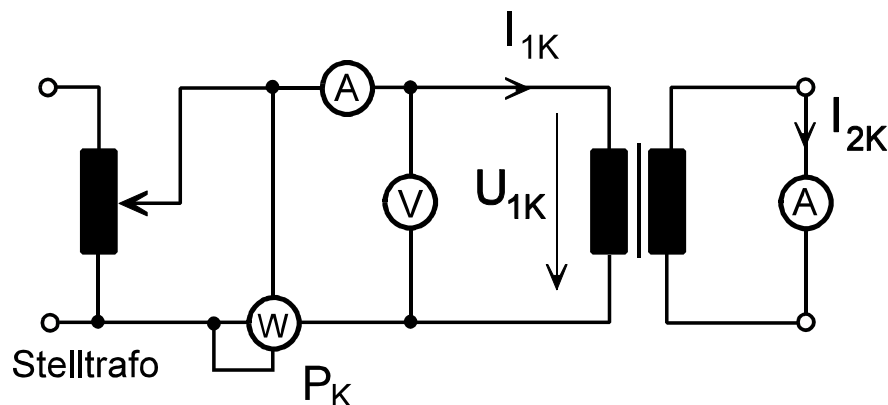
$$\rightarrow M' = \frac{U_{1N}}{\omega \cdot I_0 \cdot \sin \varphi_0}$$

$$\ddot{u} = \frac{U_{1N}}{U_{2L}}$$

$$M = \frac{M'}{\ddot{u}}$$

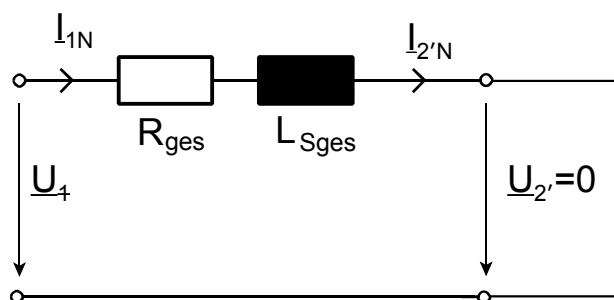
10.2.8.2 Kurzschlussversuch

Hierbei wird der Transformator am Ausgang (sekundärseitig) kurzgeschlossen.



Mit dem Stelltransformator wird die Primärspannung U_1 von 0 auf die Kurzschlussspannung U_{1K} erhöht, bis der Sekundärnennstrom $I_{2N} = I_{2K}$ erreicht ist.

Wichtig: Keinesfalls den Transformator an die Nennspannung U_{1N} anschließen!



Es wird gemessen:

$$I_{1K}, U_{1K}, P_K, I_{2K}$$

$$P_K \approx I_1^2 \cdot R_{ges} = I_1^2 (R_1 + R_2')$$

$$R_{ges} = \frac{P_K}{I_{1K}^2} = R_1 + R_2'$$

$$Z_K = \frac{U_{1K}}{I_{1K}} \quad ; \quad X_{Sges} = \omega(L_{1S} + \ddot{u}^2 L_{2S})$$

$$X_{Sges} = \sqrt{Z_K^2 - R_{ges}^2} \rightarrow L_{1S} \text{ und } L_{2S}'$$

$$\underline{Z}_K = R_{\text{ges}} + jX_{\text{Sges}}$$

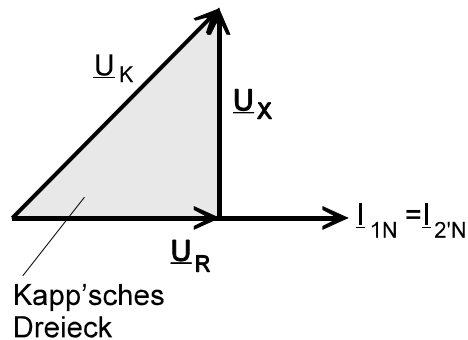
$$\cos \varphi_K = \frac{U_R}{U_{1K}} = \frac{R_{\text{ges}}}{Z_K}$$

$$\text{Eingangsimpedanz } \underline{Z}_{\text{ein}} = \underline{Z}_K$$

$$\text{Ausgangsimpedanz } \underline{Z}_{\text{aus}} \approx \underline{Z}_K \frac{1}{\ddot{u}^2}$$

Relative Nennkurzschlussspannung

$$u_K = \frac{U_{1K}}{U_{1N}} \cdot 100\%$$



10.2.9 Berechnung von Netztransformatoren

Kleintransformatoren (VDE 0550, DIN 41300...309)

10.2.9.1 Primärwindungszahl

$$u_{1L} = N_1 \cdot \frac{d(\hat{\Phi} \sin \omega t)}{dt} = N_1 \cdot \omega \cdot \hat{\Phi} \cdot \cos \omega t$$

mit $\hat{\Phi} = \hat{B} \cdot A_{\text{Fe}}$

$$\begin{aligned} U_{1\text{eff}} &= \hat{u}_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot N_1 \cdot \omega \cdot \hat{B} \cdot A_{\text{Fe}} \\ &= 4,44 \cdot f \cdot \hat{B} \cdot A_{\text{Fe}} \cdot N_1 \end{aligned}$$

$$U_{1\text{eff}} = 4,44 \cdot f \cdot \hat{B} \cdot A_{\text{Fe}} \cdot N_1$$

$$\rightarrow N_1 = \frac{U_1}{4,44 \cdot f \cdot \hat{B} \cdot A_{\text{Fe}}}$$

übliche Angabe in Wdg./Volt

10.2.9.2 Sekundärwindungszahl

$$N_2 = N_1 \cdot \frac{U_2}{U_1} \cdot \Delta u$$

Δu = Spannungsfaktor (Spannungsabfall)

10.2.9.3 Wahl von max. Flussdichte und Eisenfläche (\hat{B} und A_{Fe})

Die Wahl ist abhängig von

- a) Material Fe-Sorten $\hat{B} < 1,2T(2T)$
 größere \hat{B} und ω
 → Kernerwärmung infolge von Magnetisierungsverlusten

Ferrit-Sorten $B < 0,3T$

$$\hat{\Phi} = \hat{B} \cdot A_{Fe} \text{ ausreichend groß dimensionieren}$$

- b) Wickelraum bestimmt die Kerngröße
 Wicklungsauslegung so, dass $P_{Cu1} \approx P_{Cu2}$
 Die Innenwicklung hat einen größeren thermischen Widerstand R_{th} .
 → Stromdichte evtl. innen kleiner als außen wählen.
 Kerngröße beeinflusst die Eisenweglänge $\ell_{Fe} \sim R_m \sim \frac{1}{\Phi}$

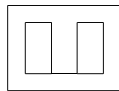
Wenn ℓ_{Fe} größer \Rightarrow N größer wg. $\Theta = I \cdot N$

$$\Phi = \frac{\Theta}{R_m}$$

c) Bleche

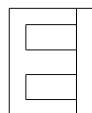
1.) Kernbleche

M-Schnitt



früher wirtschaftlich gewesen, Schichtung teuer, heute für Sonderfertigung mit MD-Blechen, Streuung nicht zu vernachlässigen

EI-Schnitt



billig für Massenproduktion, einfache Montage, große Streuung, geeignet für kleine Baugrößen

2.) Bandkerne

Schnittbandkerne, Ringbandkerne



SM, SE-Schnitt



SU, SG-Schnitt

→ geringe Streuung, einfache Montage (Ausnahme Ringkern)
 beste Leistungsübertragung, teurer als Kernbleche

3.) Ferrit-Kerne:

M EI U Topf Ring
 geringe Streuung

Beispiel: für hohe Frequenzen geeignet, \hat{B} klein ($<0,3T$).
Berechnung von Netztransformatoren DIN 41300

Gesucht: Netztransformator M- oder EI-Schnitt

Daten: Eingangsspannung 230V, $f=50\text{Hz}$, Ausgang: 24V, 3A

Wahl der Leistung $P_2 = P_N = U_2 \cdot I_2 = 24V \cdot 3A = 72VA$

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Aus Tabelle} \rightarrow & \text{M85a} \quad \text{Blech V230-50A} \\
 U_{2L} = 1,111 \cdot 24V = 26,66V & I_{1N} = \frac{P_2}{U_1 \cdot \eta} = \frac{72VA}{230V \cdot 0,83} = 377mA & \\
 | & & | \\
 \Delta u \text{ aus Tabelle} & & \eta_w \text{ aus Tabelle}
 \end{array}$$

$$P_1 = U_1 \cdot I_1 = 86,75VA$$

Übersetzungsverhältnis $\ddot{u} = \frac{U_1}{U_{2L}} = \frac{230V}{26,66V} = 8,63$

Windungszahlen

$$N_1 = \frac{U_{1L} \cdot \sqrt{2}}{\omega \cdot \hat{B}_{\max} \cdot A_{Fe}} = \frac{230V \cdot \sqrt{2}}{2\pi 50 \frac{1}{s} \cdot 1,37T \cdot 8,6 \cdot 10^{-4} m^2} = 878,8Wdg.$$

gewählt: $N_1 = 879Wdg.$

$$N_2 = \frac{N_1}{\ddot{u}} = \frac{879}{8,63} = 101,8Wdg. \rightarrow 102Wdg.$$

Drahtdurchmesser

Stromdichte $S_N = 3,47 \frac{A}{mm^2}$ (Tabelle)

$$A_1 = \frac{I_1}{S_N} = \frac{0,377A \cdot mm^2}{3,47A} = 0,114mm^2 \quad \text{aus Tabelle} \rightarrow d_1 = 0,38mm$$

$$A_2 = \frac{I_2}{S_N} = \frac{3A \cdot mm^2}{3,47A} = 0,865mm^2 \quad \text{aus Tabelle} \rightarrow d_2 = 1,1mm \quad (A = 0,95mm^2)$$

Wickelraum

$$A_{\text{Cu1}} = 879 \cdot 0,113 \text{mm}^2 = 99,3 \text{mm}^2$$

$$A_{\text{Cu2}} = 102 \cdot 0,95 \text{mm}^2 = 88,2 \text{mm}^2$$

$$A_{\text{Cuges}} = 187,5 \text{mm}^2$$

$$\approx 1,9 \text{cm}^2$$

Tabelle: $A_{\text{CuN}} = 2,1 \text{cm}^2 \Rightarrow$ ausreichend

Trotzdem folgendes Problem: A_{Cu} schwankt um den Faktor 1...3, abhängig vom Drahtquerschnitt, Zwischenisolation, Wickeltechnik (lose, fest)

Verluste, Wirkungsgrad

Aus Tabelle: $P_{\text{VFe}} = 6,9 \text{W}$
 $P_{\text{VCu}} = 10,4 \text{W}$

$$\eta = \frac{P_2}{P_2 + P_{\text{Vges}}} = \frac{24 \text{V} \cdot 3 \text{A}}{24 \text{V} \cdot 3 \text{A} + 17,3 \text{W}} = 0,81 \approx \text{Tabelle}$$

Daten von Transformatoren: M-Schnitte, EI-Schnitte

Mechanische Daten

Typ und Größe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	M-, EI-, SM-, SE-Kerne							M-, EI-Kerne				SM-, SE-Kerne			
	Höhe	Breite	Kupferquerschnitt	Masse des Kupfers	Windungslängen			Zungenbreite	Pakethöhe	Eisenquerschnitt	Eisenweglänge	Masse des Eisenkerns für $\eta = 0,94$ $D_{Fe} = 7,65 \text{ g/cm}^3$	Eisenquerschnitt	Eisenweglänge	Masse des Eisenkerns
	h_a cm	b_a cm	A_{CuN} cm ²	m_{CuN} kg	l_k cm	l_m cm	l_g cm	f cm	h_p cm	A_{Fe} cm ²	l_{Fe} cm	m_{Fe} kg	$A_{Fe}^{(1)}$ cm ²	l_{Fe} cm	$m_{Fe}^{(1)}$ kg
M42/SM42	0,67	2,61	0,4	0,031	6,6	8,7	10,7	1,2	1,46	1,6	10,2	0,125	1,44	9,8	0,108
M55/SM55	0,81	3,31	0,85	0,085	8,8	11,3	13,9	1,7	2,06	3,2	13,1	0,32	2,92	12,4	0,276
M65/SM65	1,01	3,86	1,35	0,166	10,6	13,8	16,9	2	2,67	4,9	15,5	0,58	4,48	14,8	0,5
M74/SM74	1,16	4,46	1,95	0,277	12,4	16	19,7	2,3	3,24	6,9	17,6	0,93	6,3	16,5	0,79
M85/SM85	a	1,09	4,85	2,1	0,318	13,6	17	20,4	2,9	3,19	8,6	1,29	8	18,3	1,12
	b	1,09	4,85	2,1	0,366	16,2	19,6	23	2,9	4,49	12	1,81	11,3	18,3	1,59
M102/SM102	a	1,3	6,05	3,3	0,58	15,6	19,7	23,8	3,4	3,49	11	2	10,4	22,2	1,77
	b	1,3	6,05	3,3	0,68	19,1	23,2	27,3	3,4	5,24	16,5	3	15,6	22,2	2,64
EI92	a	2,02	4,66	3,7	0,55	10,5	16,8	23,2	2,3	2,29	4,8	0,72	—	—	—
	b	2,02	4,66	3,7	0,61	12,3	18,6	25	2,3	3,19	6,8	1	—	—	—
EI106	a	2,06	5,15	4,5	0,82	14	20,5	26,9	2,9	3,19	8,5	1,42	—	—	—
	b	2,06	5,15	4,5	0,92	16,6	23,1	29,5	2,9	4,49	12	2	—	—	—
EI130/SE130	a	2,59	6,45	7,6	1,64	16,1	24,2	32,4	3,5	3,61	11,7	2,4	11,3	25,9	2,24
	b	2,59	6,45	7,6	1,77	18,1	26,2	34,4	3,5	4,61	15	3,1	14,4	25,9	2,86
EI150/SE150	a	2,98	7,01	9,8	2,45	18,7	28,1	37,4	4	4,01	14,8	3,1	14,4	29,7	3,26
	b	2,98	7,01	9,8	2,63	20,7	30,1	39,4	4	5,01	18,5	4,4	18	29,7	4,08
	c	2,98	7,01	9,8	2,8	22,7	32,1	41,4	4	6,01	22,2	5,3	21,6	29,7	4,91
EI170/SE170	a	3,37	8,51	14	4,21	23,2	33,8	44,4	4,5	5,45	22,7	6,3	21,8	34,7	5,8
	b	3,37	8,51	14	4,46	25,2	35,8	46,4	4,5	6,45	26,9	7,4	25,8	34,7	6,8
	c	3,37	8,51	14	4,71	27,2	37,8	48,4	4,5	7,45	31	8,6	29,8	34,7	7,9
EI195/SE195	a	3,57	11,51	20,5	6,7	25,6	36,8	48	5,5	5,55	28,2	9,6	27,6	42,9	9,1
	b	3,57	11,51	20,5	7,2	28,2	39,4	51	5,5	6,85	34,7	11,8	34	42,9	11,2
	c	3,57	11,51	20,5	7,7	31,2	42,4	54	5,5	8,35	42,3	14,4	41,6	42,9	13,7
EI231/SE231	a	4,23	12,97	29	10,9	29	42,3	56	6,5	6,25	37,4	14,8	36,4	49,9	13,9
	b	4,23	12,97	29	11,7	32,2	45,5	59	6,5	7,85	47	18,6	45,8	49,9	17,3
	c	4,23	12,97	29	12,7	36	49,3	63	6,5	9,75	58,4	23,2	57	49,9	21,8

¹⁾ Da in genormte M- und EI-Spulenkörper jeweils 2 Schnittbandkerne Typ SM oder SE eingebaut werden, sind die Eisenquerschnitte und die Masse der Eisenkerne gegenüber DIN 41 309 Teil 2 verdoppelt.

Elektrische Daten für Transformatoren mit M- und EI-Kernen (EI abfallarm) aus Sorte des Kernbleches V 230 — 50 A nach DIN 41 302 Teil 2 ($\eta = 0,94$)

Typ und Größe	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
	Sekundärleistung $\cos \varphi = 1$	magn. Induktion	Stromdichte	Blindleistung	Eisenverluste	Kupferverluste	Stromfaktor	Spannungsfaktor	Wirkungsgrad	Scheinwirkungsgrad	Leistungsfaktor	Wärme-widerstände	
	P_N	\hat{B}_N	S_N	P_b	P_{Fe}	P_{CuW}	Δ_i	Δ_u	η_w	η_s	$\cos \varphi$	für Kupferverluste	für Eisenverluste
	W	T	$\frac{A}{mm^2}$	V · A	W	W	—	—	—	—	—	R_{thCu} K/W	R_{thFe} K/W
M 42	3,94	1,37	6,7	4,31	0,68	3,81	1,365	1,76	0,467	0,416	0,89	22,6	10,8
M 55	15,8	1,38	4,97	11,6	1,78	5,7	1,267	1,301	0,68	0,61	0,89	14,1	6,4
M 65	34,1	1,39	4,1	21,5	3,25	7,6	1,228	1,188	0,76	0,69	0,9	10,2	4,45
M 74	62	1,39	3,51	34,5	5,2	9,3	1,198	1,13	0,81	0,74	0,91	7,9	3,35
M 85	a	82	1,37	3,47	43,2	6,9	1,189	1,111	0,83	0,76	0,92	6,8	2,8
	b	108	1,33	3,31	51	9,1	1,17	1,09	0,84	0,78	0,93	6,1	2,5
M 102	a	143	1,37	2,94	67	10,8	1,163	1,084	0,85	0,79	0,93	5	2,02
	b	198	1,31	2,76	79	14,6	1,139	1,065	0,87	0,82	0,94	4,45	1,75
EI 92	a	72	1,49	2,9	42	4,81	1,193	1,152	0,81	0,73	0,9	6,3	2,6
	b	99	1,47	2,78	54	6,5	1,178	1,113	0,84	0,76	0,91	5,9	2,41
EI 106	a	143	1,46	2,61	73	9	1,168	1,094	0,85	0,78	0,92	4,83	1,92
	b	190	1,43	2,48	88	12	1,15	1,073	0,87	0,81	0,93	4,45	1,75
EI 130	a	279	1,47	2,13	127	15,4	1,142	1,065	0,89	0,82	0,93	3,45	1,32
	b	340	1,43	2,05	140	18,8	1,127	1,054	0,9	0,84	0,94	3,25	1,24
EI 150	a	421	1,46	1,96	181	22,3	1,131	1,055	0,9	0,84	0,93	2,65	0,98
	b	499	1,43	1,88	193	26,4	1,117	1,0465	0,91	0,86	0,94	2,54	0,93
	c	570	1,39	1,83	201	30	1,106	1,0412	0,91	0,87	0,95	2,42	0,88
EI 170	a	770	1,42	1,65	266	37,2	1,1	1,0376	0,92	0,88	0,95	1,98	0,71
	b	880	1,39	1,61	270	41,3	1,089	1,0335	0,92	0,89	0,96	1,91	0,68
	c	970	1,35	1,58	269	45,1	1,081	1,031	0,93	0,9	0,97	1,83	0,65
EI 195	a	1240	1,4	1,47	368	55	1,083	1,0297	0,93	0,9	0,96	1,51	0,52
	b	1440	1,34	1,42	356	61	1,07	1,0262	0,93	0,91	0,97	1,45	0,495
	c	1650	1,28	1,39	341	67	1,06	1,0237	0,94	0,92	0,98	1,37	0,468
EI 231	a	1920	1,33	1,25	433	75	1,062	1,023	0,94	0,92	0,98	1,22	0,408
	b	2240	1,26	1,22	400	83	1,051	1,0204	0,95	0,93	0,99	1,16	0,386
	c	2590	1,19	1,19	372	89	1,044	1,0185	0,95	0,94	0,991	1,1	0,364

Draht-Tabelle

d mm	q mm ²	Kupfer		Aluminium		Kon- stantan	Man- ganin	Ströme in mA für folgende Stromdichten in A/mm ²				
		g/km	m/Ω	g/km	m/Ω	m/Ω	m/Ω	1	1,5	2	2,5	3
0,03	0,000707	6,29	0,0403	1,91	0,0239	0,00141	0,00168	0,7	1,1	1,4	1,8	2,1
0,04	0,00126	11,2	0,0720	3,41	0,0427	0,00252	0,00300	1,2	1,9	2,5	3,1	3,8
0,05	0,00196	17,5	0,112	5,30	0,0664	0,00392	0,00467	2	3	4	5	6
0,06	0,00283	25,2	0,162	7,65	0,0960	0,00665	0,00575	3	4,5	6	7,5	9
0,07	0,00385	34,4	0,220	10,4	0,131	0,00769	0,00917	4	6	8	10	12
0,08	0,00503	44,9	0,288	13,6	0,171	0,0100	0,0120	5	7,5	10	13	15
0,09	0,00636	56,8	0,364	17,2	0,216	0,0127	0,0152	6,4	9,6	13	16	19
0,10	0,00785	69,9	0,448	21,2	0,266	0,0156	0,0187	8	12	16	20	24
0,11	0,00950	84,7	0,544	25,7	0,322	0,0190	0,0226	9,5	14	19	24	28
0,12	0,0113	101	0,646	30,4	0,383	0,0224	0,0269	11	17	22	28	33
0,13	0,0133	119	0,758	36,0	0,451	0,0266	0,0317	13	20	27	33	40
0,14	0,0154	137	0,878	41,6	0,522	0,0308	0,0367	15	23	30	38	45
0,15	0,0177	158	1,01	47,9	0,600	0,0353	0,0422	18	27	36	45	54
0,16	0,0201	179	1,15	54,4	0,681	0,0402	0,0479	20	30	40	50	60
0,17	0,0227	202	1,30	61,4	0,770	0,0458	0,0542	23	34	45	57	68
0,18	0,0254	226	1,45	68,7	0,861	0,0507	0,0605	25	38	50	63	75
0,19	0,0284	253	1,63	76,7	0,962	0,0567	0,0677	28	43	57	71	85
0,20	0,0314	280	1,80	84,8	1,06	0,0628	0,0748	31	47	62	78	93
0,21	0,0346	308	1,98	93,6	1,17	0,0691	0,0825	35	52	69	87	104
0,22	0,0380	339	2,18	103	1,29	0,0759	0,0906	38	57	76	95	114
0,23	0,0415	370	2,38	112	1,41	0,0829	0,0989	41	62	82	100	125
0,24	0,0452	403	2,58	122	1,53	0,0902	0,108	45	67	90	113	135
0,25	0,0491	438	2,80	133	1,66	0,0980	0,117	49	74	100	123	147
0,26	0,0531	474	3,04	144	1,80	0,106	0,127	53	80	106	133	159

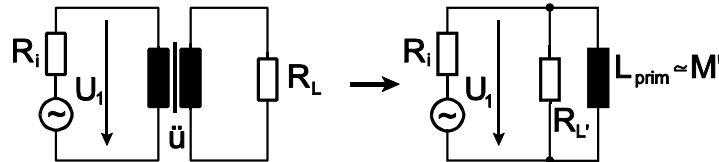
d mm	q mm ²	Kupfer		Aluminium		Kon- stantan	Man- ganin	Ströme in mA bzw. A für folgende Stromdichten in A/mm ²				
		g/km	m/Ω	g/km	m/Ω	m/Ω	m/Ω	1	1,5	2	2,5	3
0,27	0,0573	511	3,28	155	1,94	0,114	0,136	57	86	116	143	172
0,28	0,0616	550	3,52	167	2,09	0,123	0,147	62	93	123	154	185
0,29	0,0661	590	3,79	179	2,24	0,132	0,158	66	99	132	165	198
0,30	0,0707	629	4,03	191	2,39	0,141	0,168	71	106	142	177	212
0,32	0,0804	716	4,60	217	2,72	0,160	0,191	80	120	161	201	241
0,34	0,0908	810	5,20	244	3,08	0,181	0,216	91	136	182	227	272
0,35	0,0962	857	5,49	259	3,26	0,192	0,229	96	144	192	240	288
0,36	0,102	910	5,80	276	3,46	0,204	0,243	102	153	204	255	306
0,38	0,113	1 010	6,47	306	3,83	0,226	0,269	113	170	226	282	339
0,40	0,126	1 120	7,20	341	4,27	0,252	0,300	126	189	252	315	378
0,45	0,159	1 420	9,09	430	5,38	0,317	0,379	159	238	318	397	477
0,50	0,196	1 750	11,2	530	6,64	0,392	0,467	196	294	392	490	588
0,55	0,238	2 120	13,6	641	8,04	0,474	0,563	238	357	475	595	715
0,60	0,283	2 520	16,2	765	9,60	0,565	0,675	283	425	566	707	850
0,70	0,385	3 440	22,0	1 040	13,1	0,769	0,917	385	578	770	963	1,16 A
0,80	0,503	4 490	28,8	1 360	17,1	1,00	1,20	503	755	1,01 A	1,26 A	1,51
0,90	0,636	5 680	36,4	1 720	21,6	1,27	1,52	636	955	1,27	1,59	1,91
1,00	0,785	6 990	44,8	2 120	26,8	1,56	1,87	785	1,18 A	1,57	1,96	2,36
1,5	1,77	15 800	101	4 790	60,0	3,53	4,22	1,77 A	2,65	3,54	4,42	5,30
2,0	3,14	28 000	180	8 480	106	6,28	7,48	3,14	4,70	6,27	7,85	9,40
2,5	4,91	44 000	280	13 200	166	9,82	11,7	4,91	7,37	9,82	12,3	14,7
3,0	7,07	63 200	405	19 100	239	14,1	16,8	7,07	10,6	14,1	17,6	21,2
3,5	9,62	86 000	551	26 000	325	19,2	22,9	9,62	14,4	19,2	24,0	28,8
4,0	12,6	112 000	720	34 000	425	25,2	30,0	12,6	18,9	25,2	31,6	37,8

10.3 Niederfrequenz-Breitbandübertrager

Anwendung: Eingangs-, Ausgangs-, Trenn- und Symmetrierübertrager zur Anpassung von Spannung, Strom, Leistung, Widerstand.

10.3.1 Verhalten an der unteren Frequenzgrenze f_{gu}

Auslegung auf die Primärinduktivität, d.h. Windungszahl N_1 .

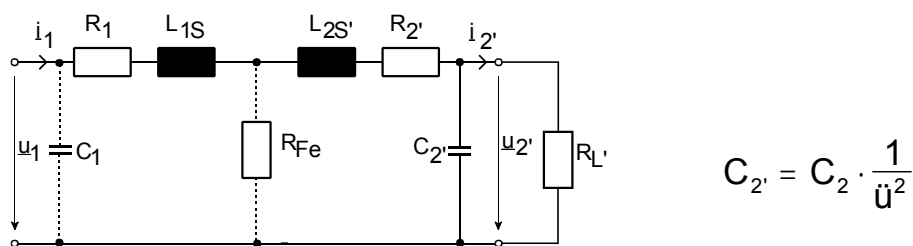


$$L_{\text{prim}} = \frac{R_i \parallel R_L}{2\pi f_{gu}} \quad N_1 = \sqrt{L_{\text{prim}} \cdot R_m} = \sqrt{\frac{L_{\text{prim}}}{A_L}}$$

10.3.2 Verhalten an der oberen Frequenzgrenze f_{go}

Einfluss von parasitären Wicklungs- und Schaltkapazitäten, sowie Streuinduktivitäten.

Gegeninduktivität wegen $X_{M'} \gg R_{L'}$ vernachlässigt.

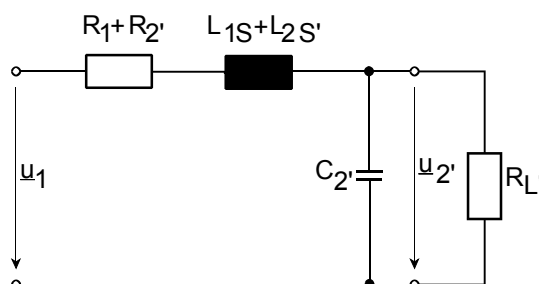


C_1 vergrößert i_1 , verringert Z_{ein} .

C_2 bildet mit L_{Sges} und R_{cuges} einen Tiefpass 2.Ordnung.

→ Probleme bezüglich f_{go} und der Resonanzüberhöhung

R_{fe} -Verluste erzeugen Wärme, verringern den Wirkungsgrad.



Obere Grenzfrequenz f_{go} bzw. Resonanzfrequenz

- a) $R_L' \rightarrow \infty \Rightarrow$ Dämpfung $\vartheta \rightarrow 0$
starke Resonanzüberhöhung

$$f_{go} \approx f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_{Sges} \cdot C_2'}} \quad C_2' \text{ bestimmt wesentlich } f_{go}$$

- b) $R_L' \ll \frac{1}{\omega_g \cdot C_2'} \rightarrow \vartheta > 1$

$$f_{go} \approx \frac{R_1 + R_2' + R_L'}{2\pi \cdot L_{Sges}} \quad L_{Sges} \text{ bestimmt } f_{go} \rightarrow \text{streuarm ausführen}$$

bei $\vartheta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ entsteht eine Resonanzüberhöhung $G_{max} = \frac{U_2}{U_1} \approx \frac{1}{2\vartheta} = R_L' \sqrt{\frac{C_2'}{L_{Sges}}}$

$$\vartheta = \frac{1}{2R_L'} \sqrt{\frac{L_{Sges}}{C_2'}} \quad \text{Voraussetzung } (R_1 + R_2') \ll R_L'$$

Beispiel

$$R_L = 100k\Omega; \quad \ddot{u} = 0,2; \quad C_2 = 200pF; \quad L_{Sges} = 50mH$$

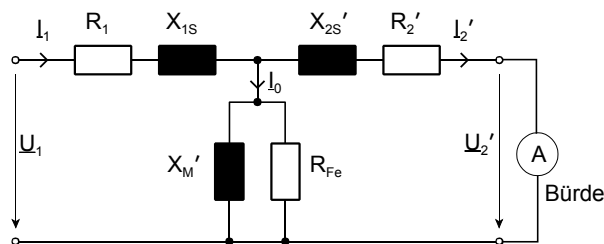
$$\vartheta = \frac{1}{2R_L'} \sqrt{\frac{L_{Sges}}{C_2'}} = \frac{1}{2 \cdot 0,2^2 \cdot 100k\Omega} \sqrt{\frac{50mH}{200pF \cdot \frac{1}{0,2^2}}} = 0,395$$

$$G_{max} = \frac{1}{2\vartheta} = 1,265 \rightarrow 26,5\% \text{ Überhöhung}$$

\rightarrow nicht für Messzwecke geeignet, besser $\vartheta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$f_{go} \approx \frac{R_L \cdot \ddot{u}^2}{2\pi \cdot L_{Sges}} = \frac{100k\Omega \cdot 0,2^2}{2\pi \cdot 50mH} = 12,7kHz$$

Hochfrequenzübertrager siehe Vorlesung HF-Technik.

10.4 **Messwandler** VDE 0414, DIN 42600/60110.4.1 Stromwandler**Bürde:**

→ sekundärseitige Belastung, Messinstrument oder Widerstand.

Übersetzungsverhältnis

$$K_N = \frac{I_{1N}}{I_{2N}} \approx \frac{1}{\ddot{u}} \quad \text{Nennleistung } P_N = I_{2N}^2 \cdot R_L$$

Wegen Messfehler → Forderung: $I_1 = I_2'$, also $I_0 \ll I_2'$, oder R_L' sehr klein ($\rightarrow 0$) und I_μ sehr klein (μ_r groß)

$$\text{Stromfehler } F_{ri} = \frac{I_2 \cdot K_N - I_1}{I_1} \cdot 100\%$$

Forderung: 0,1 ... 3% Fehler

Für geringe Streuung (kleine Fehlwinkel) → Ringkerne.

Wichtig:**Stromwandler nie offen oder hochohmig am Ausgang betreiben.**→ Spannung U_2 steigt an, Durchschlaggefahr.

Stromwandler verhalten sich wie Stromquellen.

10.4.2 Spannungswandler

Übersetzungsverhältnis

$$K_N = \frac{U_{1N}}{U_{2N}} \approx \ddot{u} = \frac{N_1}{N_2}; \quad P_N \frac{U_{2N}^2}{R_L}$$

$\underline{U}_2' = \underline{U}_1$, also Längsspannungsabfälle (\underline{U}_k) müssen klein sein, d.h. $I_2 \rightarrow 0$ (hochohmiger R_L , Leerlauf).

 R_1 und R_2 klein, sowie geringe Streuung (Ringkern).

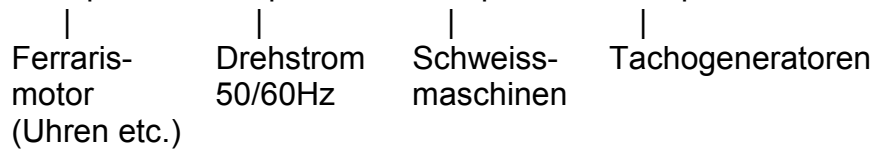
$$\text{Spannungsfehler } F_{ru} = \frac{U_2 \cdot K_N - U_1}{U_1} \cdot 100\%$$

Wichtig:**Spannungswandler immer hochohmig belasten.**

Großer Kurzschlussstrom, Verhalten wie Spannungsquelle.

11. Mehrphasensysteme

Beispiele: Zweiphasen, Dreiphasen, Sechssphasen, Zwölfphasen



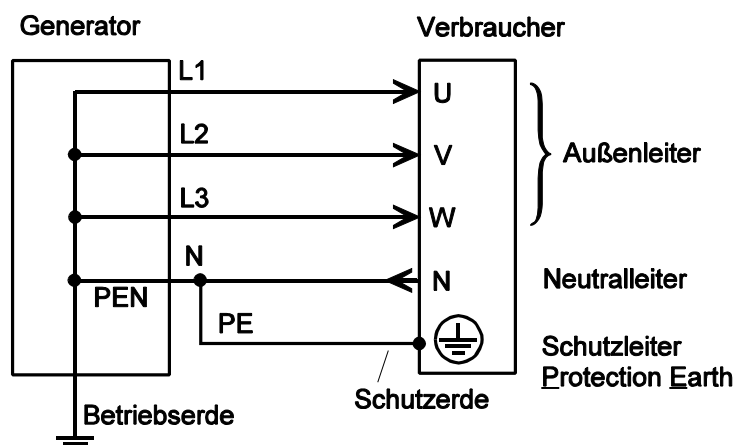
Normen: DIN 40108, 401102, 40705, 42400,
VDE 0570, 0100, 49290

11.1 Drehstromsystem

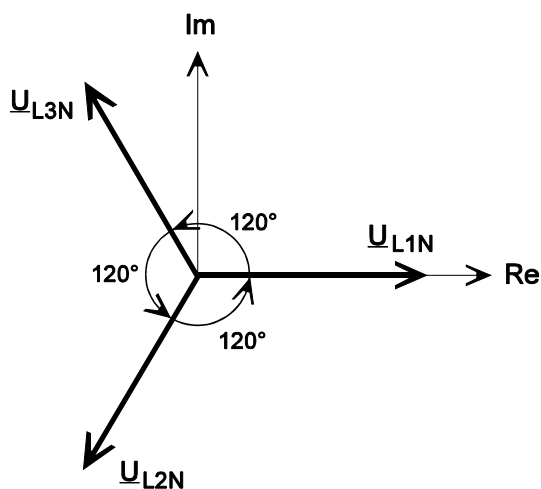
Name von Dolivo-Dobrowolsky (AEG-Gründer)

"Dreh" wegen einfacher Drehfelderzeugung in elektrischen Maschinen.
z.B. Drehstrommotoren (besser: Drehfeldmotoren, Drehfeldmaschinen)

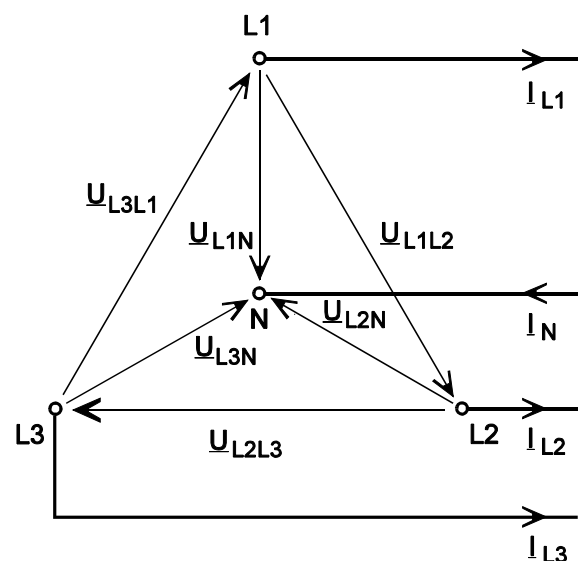
Strom dreht sich nicht, sondern das aus dem Strom erzeugte Feld bzw. das Feld, welches Spannungen im Generator induziert.



nach DIN 42400



Zeigerdiagramm (ruhende Zeiger)



Klemmenzählpfeile

Es gilt Kirchhoff: $\Sigma U=0$, $\Sigma I=0$

$$\begin{array}{ll} \text{System ohne N-Leiter} & I_{L1} + I_{L2} + I_{L3} = 0 \\ \text{mit N-Leiter} & I_{L1} + I_{L2} + I_{L3} - I_N = 0 \end{array}$$

11.1.1 Spannungen gegen N-Leiter: Sternschaltung

ruhende Zeiger

$$\begin{aligned} \underline{U}_{L1N} &= \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot \sin(\omega t - 0^\circ) = U_{L1N} \cdot e^{j(\omega t - 0^\circ)} = U_{L1N} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j0^\circ} & \rightarrow \underline{U}_{L1N} &= U_{L1N} \cdot e^{-j0^\circ} \\ \underline{U}_{L2N} &= \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot \sin(\omega t - 120^\circ) = U_{L2N} \cdot e^{j(\omega t - 120^\circ)} = U_{L2N} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j120^\circ} & \rightarrow \underline{U}_{L2N} &= U_{L2N} \cdot e^{-j120^\circ} \\ \underline{U}_{L3N} &= \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot \sin(\omega t - 240^\circ) = U_{L3N} \cdot e^{j(\omega t - 240^\circ)} = U_{L3N} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{-j240^\circ} & \rightarrow \underline{U}_{L3N} &= U_{L3N} \cdot e^{-j240^\circ} \end{aligned}$$

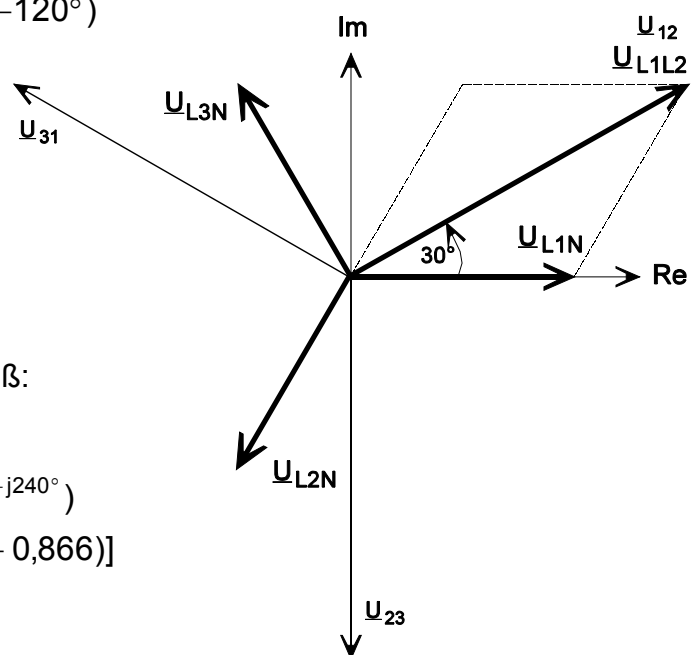
$$U_{L1N} = U_{L2N} = U_{L3N}$$

11.1.2 Spannungen verkettet: Dreieckschaltung

(Außenleiter gegeneinander) z. B. L1 gegen L2

$$\begin{aligned} \underline{U}_{L1L2} &= \underline{U}_{L1N} - \underline{U}_{L2N} = U_{L1N}(1 - e^{-j120^\circ}) \\ &= U_{L1N}[1 - \cos(-120^\circ) - j\sin(-120^\circ)] \\ &= U_{L1N} \cdot (1,5 + j0,866) \\ &= U_{L1N} \cdot \sqrt{3} \cdot e^{j30^\circ} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \underline{U}_{L1N} = \frac{\underline{U}_{L1L2}}{\sqrt{3}} \cdot e^{-j30^\circ}$$



weitere verkettete Spannungen sinngemäß:
(Index _L weggelassen)

$$\begin{aligned} \underline{U}_{L2L3} &= \underline{U}_{23} = \underline{U}_{2N} - \underline{U}_{3N} = U_{1N}(e^{-j120^\circ} - e^{-j240^\circ}) \\ &= U_{1N} \cdot [-0,5 + 0,5 + j(-0,866 - 0,866)] \\ &= U_{1N} \cdot (0 - j\sqrt{3}) \\ &= U_{1N} \cdot \sqrt{3} \cdot e^{-j90^\circ} \end{aligned}$$

$\sqrt{3} = \text{Verkettungsfaktor}$

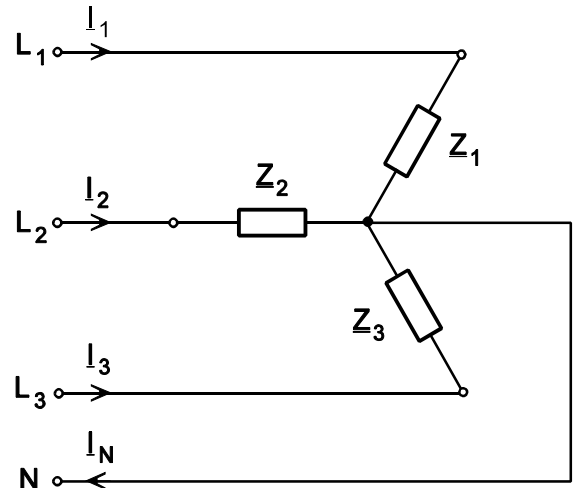
$$\text{z.B. } U_{23} = U_{1N} \cdot \sqrt{3} = 230\text{V} \cdot \sqrt{3} = 398,37\text{V}$$

Übungsaufgabe: \underline{U}_{31} bestimmen $\rightarrow \underline{U}_{31} = U_{1N} \cdot \sqrt{3} \cdot e^{j150^\circ}$ bzw. e^{-j210°

11.1.3 Ströme $\Sigma I = 0$ 11.1.3.1 Ströme in Sternschaltunga) mit Neutraleiter N

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_N = 0$$

$$I_1 = \frac{U_{1N}}{Z_1}; \quad I_2 = \frac{U_{2N}}{Z_2}; \quad I_3 = \frac{U_{3N}}{Z_3}; \quad I_N = I_1 + I_2 + I_3$$



Beispiel: Gesucht: I_N

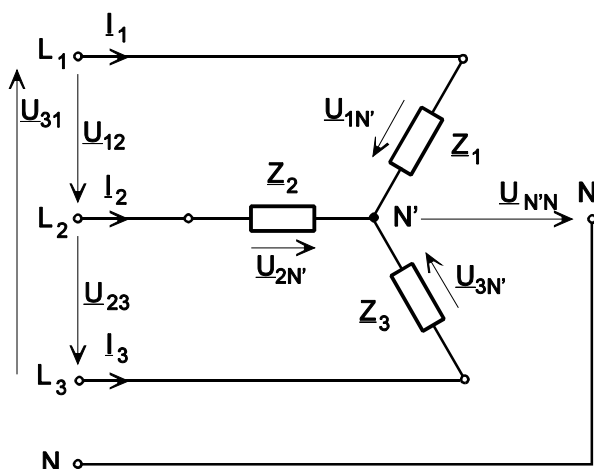
Gegeben:

$$\begin{aligned} Z_1 &= 100\Omega \\ Z_2 &= 100\Omega \cdot e^{j60^\circ} \\ Z_3 &= 100\Omega \cdot e^{-j60^\circ} \\ U_{1N} &= 230V \end{aligned}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} I_N &= \frac{230V \cdot e^{j0^\circ}}{100\Omega} + \frac{230V \cdot e^{-j120^\circ}}{100\Omega \cdot e^{j60^\circ}} + \frac{230V \cdot e^{-j240^\circ}}{100\Omega \cdot e^{-j60^\circ}} \\ &= 2,3A \cdot e^{j0^\circ} + 2,3A \cdot e^{-j180^\circ} + 2,3A \cdot e^{-j180^\circ} \\ &= 2,3A[1 + (-1 - 1 + j0)] = 2,3A(-1 + j0) \\ &= -2,3A \cdot e^{j0^\circ} = 2,3A \cdot e^{j180^\circ} \quad (\text{gegenphasig zu } U_{1N}) \end{aligned}$$

b) ohne Neutraleiter N → führt bei unsymmetrischer Last zur Sternpunktverlagerung N'



$$U_{1N'} + U_{N'N} = U_{1N}$$

Gesucht:

- 1) Größe der Ströme $I_1 \dots I_3$
- 2) Sternpunktverlagerungsspannung $U_{N'N}$

zu 1) Überlagerungsprinzip + Stromteilerregel

1. Schritt $\underline{U}_{23} = 0$, \underline{U}_{12} wirkt

$$\underline{I}_{1/1} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_1 + (\underline{Z}_2 // \underline{Z}_3)}$$

2. Schritt $\underline{U}_{12} = 0$, \underline{U}_{23} wirkt

$$\underline{I}_{1/2} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_3 + (\underline{Z}_1 // \underline{Z}_2)} \cdot \frac{\underline{Z}_1 // \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}$$

Umformung $Z \rightarrow Y$

$$\underline{I}_{1/1} = \frac{\underline{U}_{12}}{\frac{1}{\underline{Y}_1} + \frac{1}{\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}} \cdot \frac{(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)\underline{Y}_1}{(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)\underline{Y}_1}$$

$$= \underline{U}_{12} \frac{(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

$$\underline{I}_{1/2} = \frac{\underline{U}_{23}}{\frac{1}{\underline{Y}_3} + \frac{1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}} \cdot \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}$$

$$= \frac{\underline{U}_{23} \cdot \underline{Y}_1}{\frac{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}{\underline{Y}_3} + 1} \cdot \frac{\underline{Y}_3}{\underline{Y}_3} = \underline{U}_{23} \frac{\underline{Y}_1 \cdot \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

Addition + Umformung

$$\underline{I}_1 = \frac{(\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23})\underline{Y}_1\underline{Y}_3 + \underline{U}_{12}\underline{Y}_1\underline{Y}_2}{\sum \underline{Y}}$$

mit zyklischer Vertauschung

$$\underline{I}_2 = \frac{(\underline{U}_{23} + \underline{U}_{31})\underline{Y}_2\underline{Y}_1 + \underline{U}_{23}\underline{Y}_2\underline{Y}_3}{\sum \underline{Y}}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{(\underline{U}_{31} + \underline{U}_{12})\underline{Y}_3\underline{Y}_2 + \underline{U}_{31}\underline{Y}_3\underline{Y}_1}{\sum \underline{Y}}$$

Sternpunktverlagerung $\underline{U}_{N'N} = ?$

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 = (\underline{U}_{1N} - \underline{U}_{N'N})\underline{Y}_1 + (\underline{U}_{2N} - \underline{U}_{N'N})\underline{Y}_2 + (\underline{U}_{3N} - \underline{U}_{N'N})\underline{Y}_3$$

$$= \underline{U}_{1N}\underline{Y}_1 + \underline{U}_{2N}\underline{Y}_2 + \underline{U}_{3N}\underline{Y}_3 - \underline{U}_{N'N}(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)$$

$$\rightarrow \underline{U}_{N'N} = \frac{\underline{U}_{1N}\underline{Y}_1 + \underline{U}_{2N}\underline{Y}_2 + \underline{U}_{3N}\underline{Y}_3}{\sum \underline{Y}}$$

Beispiel: Sternpunktverlagerung (Sternschaltung)

Gegeben:

$$\underline{Z}_1 = 100\Omega$$

$$\underline{Z}_2 = 100\Omega \cdot e^{j60^\circ}$$

$$\underline{Z}_3 = 100\Omega \cdot e^{-j60^\circ}$$

$$\underline{U}_{1N} = 230V$$

Gesucht: I_1 , $\underline{U}_{N'N}$

$$\underline{U}_{12} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{1N} \cdot e^{j30^\circ} = 398,4V \cdot e^{j30^\circ}$$

$$\underline{U}_{23} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{1N} \cdot e^{-j90^\circ} = 398,4V \cdot e^{-j90^\circ}$$

$$\underline{Y}_1 = 10mS \cdot e^{j0^\circ}$$

$$\underline{Y}_2 = 10mS \cdot e^{-j60^\circ}$$

$$\underline{Y}_3 = 10mS \cdot e^{j60^\circ}$$

$$I_1 = \frac{(\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23})\underline{Y}_1\underline{Y}_3 + \underline{U}_{12}\underline{Y}_1\underline{Y}_2}{\sum \underline{Y}}$$

$$I_1 = \frac{(398,4V \cdot e^{j30^\circ} + 398,4V \cdot e^{-j90^\circ})10mS \cdot e^{j0^\circ} \cdot 10mS \cdot e^{j60^\circ} + 398,4V \cdot e^{j30^\circ} \cdot 10mS \cdot e^{j0^\circ} \cdot 10mS \cdot e^{-j60^\circ}}{10mS \cdot e^{j0^\circ} + 10mS \cdot e^{-j60^\circ} + 10mS \cdot e^{j60^\circ}}$$

$$= \frac{(345V + j199,19V + 0 - j398,4V)(10mS)^2 \cdot e^{j60^\circ} + 398,4V(10mS)^2 \cdot e^{-j30^\circ}}{20mS}$$

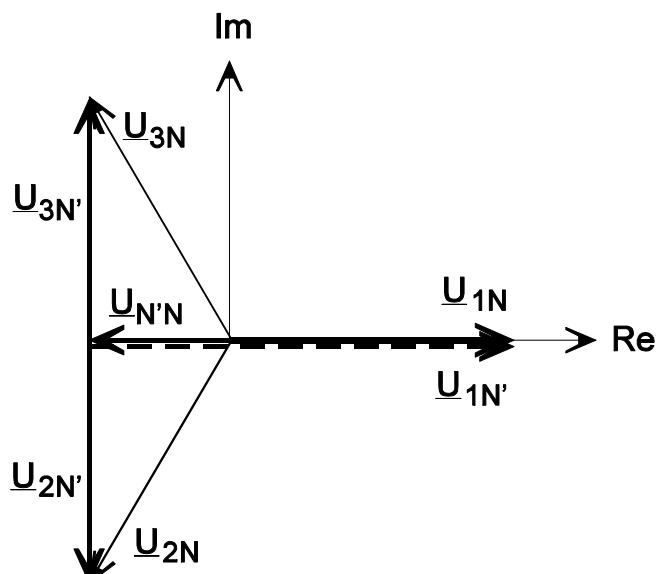
$$= \frac{398,4V(10mS)^2(e^{j30^\circ} + e^{-j30^\circ})}{20mS}$$

$$= \frac{398,4V \cdot 10mS \cdot 10mS \cdot \sqrt{3}}{20mS} = 690V \cdot 5mS = 3,45A$$

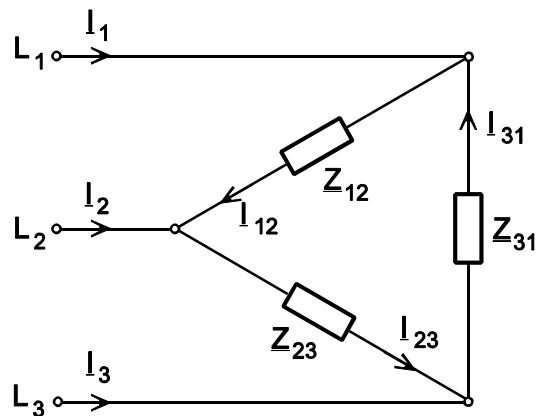
$$\underline{U}_{1N'} = I_1 \cdot \underline{Z}_1 = 3,45A \cdot 100\Omega = 345V > 230V !$$

$$\underline{U}_{N'N} = \underline{U}_{1N} - \underline{U}_{1N'} = 230V - 345V = -115V = 115V \cdot e^{j180^\circ}$$

→ Spannungsüberlastung von Sternlasten an L_1 möglich.



11.1.3.2 Ströme in Dreieckschaltung



Die verketteten Spannungen sind eingepreßt!

$$I_{12} = \frac{U_{12}}{Z_{12}}; \quad I_{23} = \frac{U_{23}}{Z_{23}}; \quad I_{31} = \frac{U_{31}}{Z_{31}}$$

$$I_1 = I_{12} - I_{31}; \quad I_2 = I_{23} - I_{12}; \quad I_3 = I_{31} - I_{23}$$

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Beispiel: Symmetrische Last $Z_{12} = Z_{23} = Z_{31} = 120\Omega \cdot e^{j40^\circ}$; $U_{1N} = 230V$

Gesucht: alle Ströme

$$I_{12} = \frac{230V \cdot \sqrt{3} \cdot e^{j30^\circ}}{120\Omega \cdot e^{j40^\circ}} = 3,32A \cdot e^{-j10^\circ} = 3,269A - j0,576A$$

$$I_{23} = \frac{230V \cdot \sqrt{3} \cdot e^{-j90^\circ}}{120\Omega \cdot e^{j40^\circ}} = 3,32A \cdot e^{-j130^\circ} = -2,134A - j2,543A$$

$$I_{31} = \frac{230V \cdot \sqrt{3} \cdot e^{j150^\circ}}{120\Omega \cdot e^{j40^\circ}} = 3,32A \cdot e^{j110^\circ} = -1,135A + j3,12A$$

$$I_1 = I_{12} - I_{31} = (3,269A - j0,576A) - (-1,135A + j3,12A) = 4,404A - j3,696A$$

$$I_2 = I_{23} - I_{12} = (-2,134A - j2,543A) - (3,269A - j0,576A) = -5,403A - j1,967A$$

$$I_3 = I_{31} - I_{23} = (-1,135A + j3,12A) - (-2,134A - j2,543A) = 0,999A + j5,663A$$

$$0 + j0$$

Begriffe: Strang, Strangstrom, Strangspannung, Leiterstrom, Leiterspannung

Sternschaltung (Symmetrisch)

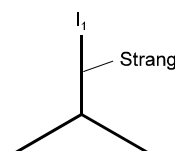
Strang = Verbraucher

Leiterstrom = Strangstrom = I_1

Leiterspannung = Strangspannung $\cdot \sqrt{3}$

$$U_{12} = U_1 \cdot \sqrt{3}$$

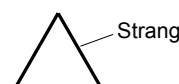
z.B. $398V = 230V \cdot \sqrt{3}$



Dreieckschaltung (Symmetrisch)

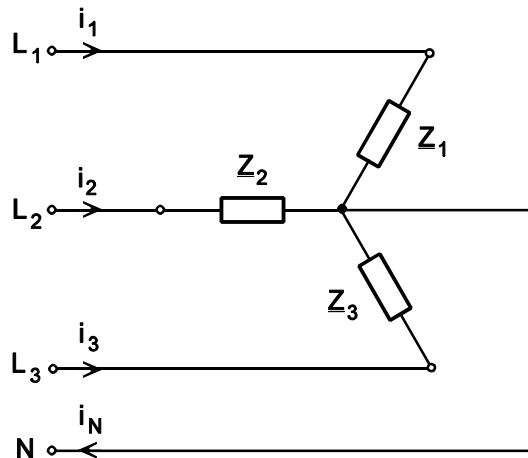
Leiterspannung = Strangspannung U_{12}

Leiterstrom = Strangstrom $\cdot \sqrt{3}$



11.1.4 Leistungen (Drehstrom) (DIN 40110)11.1.4.1 Sternschaltung

Es gilt $p(t) = i_1 \cdot u_{1N} + i_2 \cdot u_{2N} + i_3 \cdot u_{3N}$ Augenblicksleistung



Was beim Einphasensystem gilt, ist auch hier für jede einzelne Phase gültig.

Wirkleistung

$$P = \sum \frac{1}{T} \int p(t) dt = I_1 \cdot U_{1N} \cdot \cos \varphi_1 + I_2 \cdot U_{2N} \cdot \cos \varphi_2 + I_3 \cdot U_{3N} \cdot \cos \varphi_3$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

Blindleistung

$$Q = I_1 \cdot U_{1N} \cdot \sin \varphi_1 + I_2 \cdot U_{2N} \cdot \sin \varphi_2 + I_3 \cdot U_{3N} \cdot \sin \varphi_3$$

Scheinleistung

$$S = I_1 \cdot U_{1N} + I_2 \cdot U_{2N} + I_3 \cdot U_{3N}$$

Für die Sternschaltung mit sym. Last gilt:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_Y$$

$$U_{1N} = U_{2N} = U_{3N} = U_Y$$

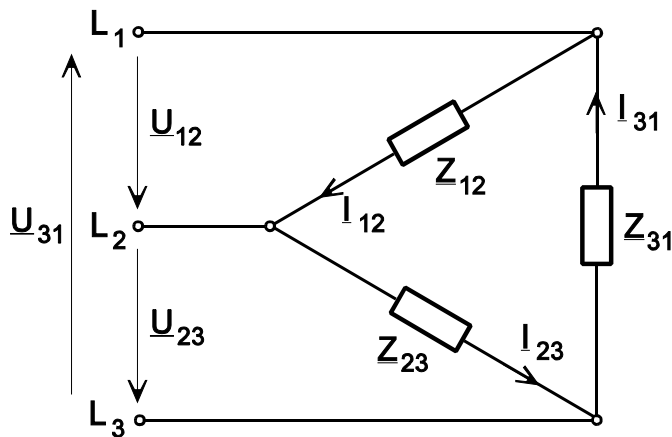
Strangstrom
Strangspannung

$$P = 3 \cdot I_1 \cdot U_{1N} \cdot \cos \varphi = 3 \cdot I_1 \cdot \frac{U_{12}}{\sqrt{3}} \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot I_1 \cdot U_{12} \cdot \cos \varphi$$

$$Q = 3 \cdot I_1 \cdot U_{1N} \cdot \sin \varphi = 3 \cdot I_1 \cdot \frac{U_{12}}{\sqrt{3}} \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot I_1 \cdot U_{12} \cdot \sin \varphi$$

$$S = 3 \cdot I_1 \cdot U_{1N} = 3 \cdot I_1 \cdot \frac{U_{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot I_1 \cdot U_{12}$$

11.1.4.2 Dreieckschaltung



Symmetrische Last:

$$I_{12} = I_{23} = I_{31} = I_{\Delta} \quad \text{Strangstrom}$$

$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = U_{\Delta} \quad \text{Strangspannung}$$

Unsym. Last:

$$S = I_{12} \cdot U_{12} + I_{23} \cdot U_{23} + I_{31} \cdot U_{31}$$

$$P = I_{12} \cdot U_{12} \cdot \cos \varphi_{12} + I_{23} \cdot U_{23} \cdot \cos \varphi_{23} + I_{31} \cdot U_{31} \cdot \cos \varphi_{31}$$

$$Q = I_{12} \cdot U_{12} \cdot \sin \varphi_{12} + I_{23} \cdot U_{23} \cdot \sin \varphi_{23} + I_{31} \cdot U_{31} \cdot \sin \varphi_{31}$$

Sym. Last:

$$S = 3 \cdot I_{\Delta} \cdot U_{\Delta}$$

$$P = 3 \cdot I_{\Delta} \cdot U_{\Delta} \cdot \cos \varphi$$

$$Q = 3 \cdot I_{\Delta} \cdot U_{\Delta} \cdot \sin \varphi$$

Umrechnung, wenn $S = \text{konstant}$ (symmetrisch)

$$3 \cdot I_{\Delta} \cdot U_{\Delta} = 3 \cdot I_Y \cdot U_Y = 3 \cdot I_{\Delta} \cdot U_Y \cdot \sqrt{3}$$

$$\rightarrow U_{\Delta} = U_Y \cdot \sqrt{3} ; \quad I_Y = I_{\Delta} \cdot \sqrt{3}$$

Beispiel:

Leistungsberechnung in Sternschaltung (wie vor mit N)

$$\underline{U}_{1N} = 230V ; \quad \underline{Z}_1 = 100\Omega ; \quad \underline{Z}_2 = 100\Omega \cdot e^{-j60^\circ} ; \quad \underline{Z}_3 = 100\Omega \cdot e^{j60^\circ}$$

Es muss jede Strangleistung berechnet werden.

$$P = P_{\text{ges}} = P_1 + P_2 + P_3 = I_1 \cdot U_{1N} \cdot \cos \varphi_1 + I_2 \cdot U_{2N} \cdot \cos \varphi_2 + I_3 \cdot U_{3N} \cdot \cos \varphi_3$$

$$\begin{array}{ccc} | & | & | \\ \frac{230V}{100\Omega} e^{j0} & \frac{230V}{100\Omega} e^{-j60^\circ} & \frac{230V}{100\Omega} e^{j60^\circ} \end{array}$$

$$= \frac{(230V)^2}{100\Omega} \cdot 1 + \frac{(230V)^2}{100\Omega} \cdot 0,5 + \frac{(230V)^2}{100\Omega} \cdot 0,5 = 1058W$$

$$Q = Q_{\text{ges}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = I_1 \cdot U_{1N} \cdot \sin \varphi_1 + I_2 \cdot U_{2N} \cdot \sin \varphi_2 + I_3 \cdot U_{3N} \cdot \sin \varphi_3$$

$$= \frac{(230V)^2}{100\Omega} (0 + (-0,866) + 0,866) = 0 \text{ var}$$

→ Phase 2 und 3 kompensieren sich.

$$S = S_{\text{ges}} = S_1 + S_2 + S_3 = 3 \cdot I_1 \cdot U_{1N} = 3 \cdot \frac{(230V)^2}{100\Omega} = 1587 \text{ VA}$$

Wichtig: Innerhalb jedes Stranges gilt $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$, aber nicht im Gesamtsystem.

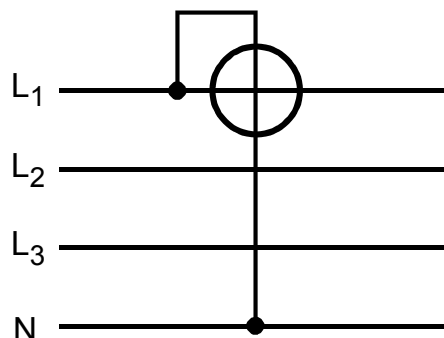
Falls der N-Leiter nicht vorhanden ist und unsymmetrische Last vorliegt:

→ Strangströme I_1, I_2, I_3 berechnen, dann $U_{N'N}$ berechnen und daraus die Strangspannungen berechnen.

11.1.4.3 Wirkleistungsmessung mit vereinfachter Schaltung

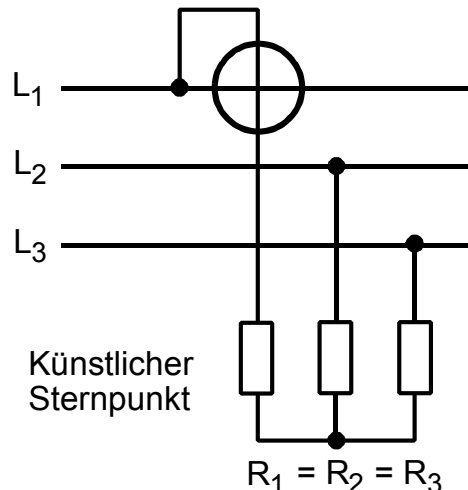
Symmetrische Last

mit N-Leiter



$$P_{\text{ges}} = 3 \cdot P_1$$

ohne N-Leiter



$$P_{\text{ges}} = 3 \cdot P_1$$

Unsymmetrische Last im 3-Leitersystem:

11.1.4.4 ARON-Schaltung (Zweiwattmeter-Schaltung)

→ Einsparung eines Wattmeters

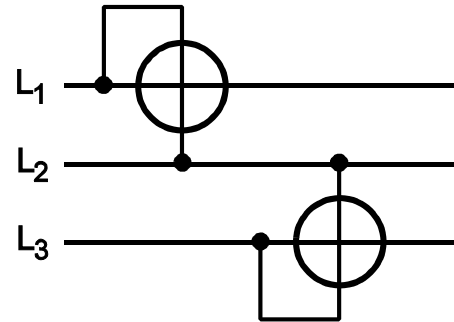
$$p_{\text{ges}} = u_{1N} \cdot i_1 + u_{2N} \cdot i_2 + u_{3N} \cdot i_3$$

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0 \quad ; \quad i_2 = -i_1 - i_3$$

$$p_{\text{ges}} = u_{1N} \cdot i_1 - u_{2N} \cdot i_1 - u_{2N} \cdot i_3 + u_{3N} \cdot i_3$$

$$= i_1 \underbrace{(u_{1N} - u_{2N})}_{u_{12}} + i_3 \underbrace{(u_{3N} - u_{2N})}_{u_{32}}$$

$$P_{\text{ges}} = \frac{1}{T} \int_0^T p_{\text{ges}} dt = I_1 \cdot U_{12} \cdot \cos \varphi_{12} + I_3 \cdot U_{32} \cdot \cos \varphi_{32}$$



Beispiel

Symmetrische Last; $P=50\text{kW}$ im Δ ; $\cos \varphi_{\Delta}=0,75$; $U_{1N}=230\text{V}$

Gesucht: a) Q im Δ ; S im Δ ; I_{12} , I_1

b) \underline{Z}_{Δ} ; P , Q , S in Y-Schaltung ($\underline{Z}_{\Delta}=\underline{Z}_Y$)

a) $Q = P \cdot \tan \varphi = 50\text{kW} \cdot \tan(\arccos 0,75) = 44,1 \text{ kvar}$

$$S = \frac{P}{\cos \varphi} = \frac{50\text{kW}}{0,75} = 66,7\text{kVA}$$

$$I_{\Delta} = I_{12} = \frac{S}{3 \cdot U_{\Delta}} = \frac{66,7\text{kVA}}{3 \cdot \sqrt{3} \cdot 230\text{V}} = 55,8\text{A}$$

$$I_1 = \frac{S}{3 \cdot U_{1N}} = \frac{66,7\text{kVA}}{3 \cdot 230\text{V}} = 96,7\text{A} \quad (= I_{\Delta} \cdot \sqrt{3})$$

b) $\underline{Z}_{\Delta} = \frac{\sqrt{3} \cdot 230\text{V}}{55,8\text{A}} \cdot \cos \varphi + j \frac{\sqrt{3} \cdot 230\text{V}}{55,8\text{A}} \cdot \sin \varphi$

$$= 7,1\Omega \cdot 0,75 + j7,1\Omega \cdot 0,661 = (5,4 + j4,7)\Omega = 7,1\Omega e^{j41,4^\circ}$$

$$S_Y = \frac{(230\text{V})^2}{7,1\Omega} \cdot 3 = 22,2\text{kVA}$$

$$P_Y = S_Y \cdot \cos \varphi = 16,7\text{kW}$$

$$Q_Y = S_Y \cdot \sin \varphi = 14,7\text{kvar}$$

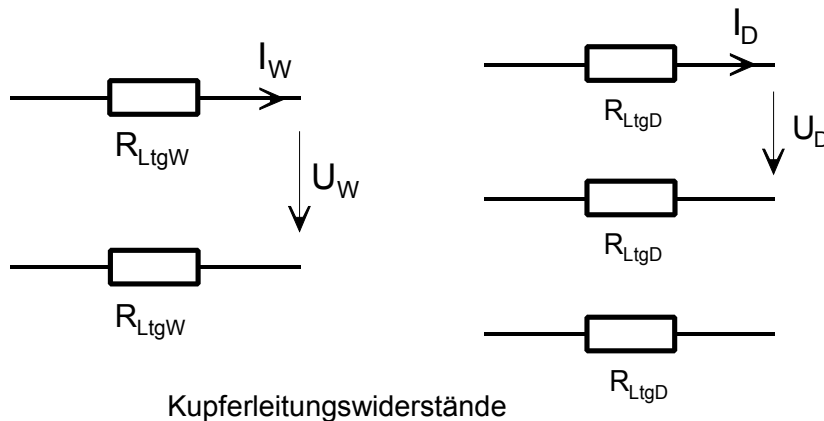
Gegenüberstellung: Einphasennetz - Dreiphasennetz

Vergleich der notwendigen Kupferleiter (Masse)

Annahme: Gleiche Länge, gleiche Wirkleistung, gleiche Spannung, Ohm'sche Last

$$U = U_W = U_D; \quad P = P_W = P_D \quad \text{Index}_W = \text{Wechselstrom, Index}_D = \text{Drehstrom}$$

$$P = U \cdot I_W = \sqrt{3} \cdot U \cdot I_D \Rightarrow I_W = \sqrt{3} \cdot I_D$$



Auf beiden Leitungssystemen sollen die Leitungsverluste gleich sein

$$2 \cdot R_{LtgW} \cdot I_W^2 = 3 \cdot R_{LtgD} \cdot I_D^2$$

$$\text{mit } R_{LtgW} = \rho \cdot \frac{\ell}{A_W} \quad \text{und} \quad R_{LtgD} = \rho \cdot \frac{\ell}{A_D}$$

$$\text{sowie } I_W^2 = 3 \cdot I_D^2 \quad \text{ergibt sich}$$

$$\frac{2}{A_W} = \frac{1}{A_D} \rightarrow A_W = 2 \cdot A_D$$

Das Einphasenwechselstromsystem hat 2 Leiter $\rightarrow 2 \cdot A_W = 4 \cdot A_D$,das Dreiphasenwechselstromsystem hat 3 Leiter $\rightarrow 3 \cdot A_D$;bei gleicher Länge gilt $m \sim A$, das bedeutet für die Kupfermasse der Leiter:

$$m_W \sim 4A_D, \text{ sowie } m_D \sim 3A_D.$$

$$\text{Das Verhältnis ergibt: } \frac{m_D}{m_W} = \frac{3}{4} \rightarrow m_D = \frac{3}{4} m_W$$

Fazit: Das Drehstromleitungssystem benötigt nur 75% des Kupfermaterials, wie es für das Einphasenleitungssystem notwendig ist.

Beispiele:

- a) Ein Drehstrommotor hat einen $\cos \varphi_M = 0,7$. (Sternschaltung)
 Am 400V-Drehstromnetz fließt der Nennstrom $I=7,7A$ (Leiterstrom)
 Durch 3 Kondensatoren soll der Leistungsfaktor auf $\cos \varphi_K = 0,95$ verbessert werden.

Berechne die Kondensatoren in Stern- und Dreieckschaltung. Welche Schaltung ist zweckmäßiger?

$$\begin{aligned}\underline{S}_M &= \sqrt{3} \cdot U \cdot I \cdot \underline{\varphi}_M = \sqrt{3} \cdot 398,4 \cdot 7,7A \cdot \underline{45,6^\circ} = 5,31kVA \cdot \underline{45,6^\circ} \\ P_M &= S \cdot \cos \varphi_M = 3,72kW \\ Q_M &= S \cdot \sin \varphi_M = 3,79kvar\end{aligned}$$

Der kompensierte Motor sollte eine Blindleistung

$$Q_K = P_M \cdot \tan \varphi_K = 3,72kW \cdot 0,329 = 1,22kvar \text{ aufnehmen.}$$

Die Kompensationskondensatoren müssen eine Blindleistung

$$Q_C = Q_K - Q_M = 1,22kvar - 3,79kvar = -2,57kvar \text{ erzeugen.}$$

Ein Kondensator in Sternschaltung hat einen Strom $I_{CY} = \frac{-Q_C}{3} \cdot \frac{1}{230V} = 3,73A$

Damit berechnet sich die Kapazität

$$C_Y = \frac{I}{U \cdot \omega} = \frac{3,73A}{230V \cdot 2\pi \cdot 50 \frac{1}{s}} = 51,6\mu F \rightarrow \text{gewählt 3 mal } 56\mu F \text{ im Stern}$$

In der Dreieckschaltung hat ein Kondensator

$$I_{CA} = \frac{-Q_C}{3} \cdot \frac{1}{230V \cdot \sqrt{3}} = 2,15A \rightarrow C_\Delta = \frac{2,15A}{230V \cdot \sqrt{3} \cdot 2\pi \cdot 50 \frac{1}{s}} = 17,2\mu F$$

(3 mal 18μF im Dreieck)

Fazit: Wegen $C_Y = 3C_\Delta$ und $U_\Delta = \sqrt{3} U_Y$ ist im allg. die Δ -Schaltung günstiger.

- b) An L_1 eines 400V-Vierleiternetzes ist ein ohmscher Widerstand $R=23\Omega$ angeschlossen.
 An L_2 ist ein Einphasenmotor mit $I=10A$ und einem Leistungsfaktor $\cos \varphi=0,5$ angeschlossen.

Wie groß ist I_N ?

$$\underline{U}_1 = 230V \cdot \underline{0^\circ} \rightarrow I_1 = \frac{\underline{U}_1}{R} = \frac{230V}{23\Omega} = 10A \cdot \underline{0^\circ}$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} \quad / \varphi = \frac{230\text{V}}{10\text{A}} \quad / 60^\circ = 23\Omega \quad / 60^\circ \quad \text{Motorwiderstand}$$

Der Einphasenmotor nimmt durch \underline{Z}_2 induktive Blindleistung auf und damit den Strom

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{230\text{V} \quad / -120^\circ}{23\Omega \quad / 60^\circ} = 10\text{A} \quad / -180^\circ = -10\text{A} \quad / 0^\circ$$

Der resultierende Neutralleiterstrom $\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 10\text{A} - 10\text{A} = 0$

Änderung: Der Widerstand $R=23\Omega$ wird an L_3 statt an L_1 angeschlossen. Was ändert sich?

$$\underline{U}_3 = 230\text{V} \quad / 120^\circ; \quad \underline{I}_3 = 10\text{A} \quad / 120^\circ = -5\text{A} + j8,66\text{A}$$

$$\underline{I}_2 = -10\text{A}$$

$$\rightarrow \underline{I}_N = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = -10\text{A} - 5\text{A} + j8,66\text{A} = -15\text{A} + j8,66\text{A} = 17,3\text{A} \quad / 150^\circ$$

c) An einem 400V-Vierleiternetz (50Hz) sind angeschlossen:

An L_1 ein ohmscher Widerstand $R=17,5\Omega$,
an L_3 ist ein Einphasenmotor mit $I=9\text{A}$ und einem Leistungsfaktor $\cos\varphi=0,7$.

Frage: Wie groß müsste ein Widerstand \underline{Z}_2 sein, der an L_2 angeschlossen wird, damit kein Strom \underline{I}_N im Neutralleiter entsteht. ($\underline{I}_N = 0$)

$$\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{I}_2 = -\underline{I}_1 - \underline{I}_3$$

$$\underline{I}_1 = \frac{230\text{V} \quad / 0^\circ}{17,5\Omega} = 13,14\text{A} \quad / 0^\circ$$

$$\underline{I}_3 = 9\text{A} \quad / 74,4^\circ = 2,42\text{A} + j8,67\text{A}$$

$$\underline{I}_2 = -13,14\text{A} - 2,42\text{A} - j8,67\text{A} = -15,56\text{A} - j8,67\text{A} = 17,8\text{A} \quad / -150,9^\circ$$

$$\rightarrow \underline{Z}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \frac{230\text{V} \quad / -120^\circ}{17,8\text{A} \quad / -150,9^\circ} = 12,9\Omega \quad / 30,9^\circ = 11,1\Omega + j6,6\Omega \quad \rightarrow \text{Induktivität}$$

$$X_L = \omega L \quad \rightarrow \quad L_2 = \frac{6,6\Omega}{2\pi \cdot 50 \frac{1}{\text{s}}} = 21\text{mH}$$