BHT Berlin
Technische Informatik
Julia Loutchko

Sommersemester 2018
Mathematik II

4. Übungsblatt

1. Aufgabe. Bestimmen Sie Eigenwerte und normierte Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe. Gegeben ist die 3-reihige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie
a) sämtliche Eigenwerte,
b) Spur und Determinante,
c) die Eigenvektoren dieser Matrix.
d) Sind die Eigenvektoren der Matrix A linear unabhängig?

3. Aufgabe. Berechnen Sie jeweils die Eigenwerte der Matrix A und daraus Spur und Determinante der Matrix (mit Kontrolle):

$$a) \;\; A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} \qquad b) \;\; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Aufgabe.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Welche Eigenwerte besitzt diese Matrix? Berechnen Sie ferner $detA$ und $Sp(A)$.

5. Aufgabe. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der 3-reihigen symmetrischen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und zeigen Sie, dass die drei (zu verschiedenen Eigenwerten gehörenden) Eigenvektoren ein orthogonales System bilden, d.h. paarweise aufeinander senkrecht stehen.

6. Aufgabe. Gegeben ist ein Eigenvektor v zum Eigenwert λ einer Matrix A.

a) Ist v auch Eigenvektor von A^2? Zu welchem Eigenwert?

b) Wenn A zudem invertierbar ist, ist v auch Eigenvektor von A^{-1}? Zu welchem Eigenwert?
c) Ist λ auch einen Eigenwert von A^T?

7. Aufgabe. Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie die dazugehörenden Eigenvektoren und im Falle des Defizits von Eigenvektoren die Hauptvektoren. Geben Sie jeweils die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten an.