BHT Berlin
Technische Informatik
Julia Loutchko

Sommersemester 2018
Mathematik II

Lösungen zum 8. Übungsblatt

1. Aufgabe.

$$a)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}=9$$

$$b)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=0$$

$$c)\ \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}=\frac{1}{2}$$

$$d)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\frac{m}{n}$$

$$e)\ \lim_{x\to \infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}=\frac{1}{2}$$

$$f)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}$$

$$g)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}=\frac{2}{5}$$

$$h)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2+7x+10}{x^2-x-6}=-\frac{3}{5}$$

$$i)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-5x+6}=3$$

$$j)\ \lim_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3})=-1$$

$$k)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}=0$$

.

2. Aufgabe.
$-2\sin(-\pi/2)=2\Rightarrow A\sin(-\pi/2)+B=-A+B=2$
$\cos(\pi/2)=0\Rightarrow A\sin(\pi/2)+B=A+B=0\Rightarrow A=-1;\ B=1$

3. Aufgabe.
a) Stetig
b) Unstetig in $x=0$.
c) Stetig
d) Unstetig in $x=1$.

4. Aufgabe.

$y(0) = 0$

5. Aufgabe.

a)

Definitionslücken:

$$x = -1; \quad x = 3$$

Nullstellen:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -5$$

Pole:

$$x_{3;4} = -1 \text{ ohne Vorzeichenwechsel;}$$

$$x_5 = 3 \text{ mit Vorzeichenwechsel}$$

Senkrechte Asymptoten:

$$x = -1; \quad x = 3$$

Asymptote im "Unendlichen" - die x-Achse:

$$y = 0$$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$y(0) = \frac{5}{3}.$$

b)

Definitionslücken:

$$x = 0; \quad x = -3$$

Nullstellen:

$$x_{1;2} = -1; \quad x_3 = 1$$

Pole:

$$x_4 = 0 \text{ mit Vorzeichenwechsel;}$$

$$x_5 = -3 \text{ mit Vorzeichenwechsel}$$

Senkrechte Asymptoten:

$$x = 0; \quad x = -3$$

Asymptote im "Unendlichen":

$$y = x - 2$$

Schnittpunkt mit der y-Achse: nicht vorhanden ($x = 0$ ist ein Berührungspunkt).

c)

Definitionslücken:

$$x = -1; \quad x = 2 \;\; x = -2$$

Erweiterte Funktion:
$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq \pm 2, \\ -\frac{8}{3}, & x = 2, \\ 0, & x = -2 \end{cases}$$
Nullstellen:
$$x_1 = 3; \quad x_2 = -2$$
Pole:
$$x_3 = -1 \text{ mit Vorzeichenwechsel;}$$
Senkrechte Asymptoten:
$$x = -1$$
Asymptote im "Unendlichen":
$$y = 2x - 4$$
Schnittpunkt mit der y-Achse:
$$y(0) = -12.$$

6. Aufgabe.
$$y = \frac{-2x^2 + 6x + 20}{x^2 - 6x}$$

7. Aufgabe.
$$y = \frac{-9(x-2)^2}{x(x+4)(x-10)}$$

8. Aufgabe. Man bestimme die Ableitungen der Funktionen direkt nach der Definition:

a)
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - (x+\Delta x)^2 - 4 - x^3 + x^2 + 4}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2x - \Delta x) = 3x^2 - 2x.$$

b)
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(-2(x+\Delta x)+3)^2 - (-2x+3)^2}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} (8x + \Delta x - 12) = 8x - 12.$$

c)
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2}{\Delta x} \sin\frac{2x+\Delta x}{2} \sin\frac{\Delta x}{2} = -\sin x$$

9. Aufgabe.

$$a)\quad 4x\sqrt{x}+\frac{2x^2+1}{2\sqrt{x}}$$

$$b)\quad -\frac{1}{x^2}-\frac{6}{x^3}-\frac{6}{x^4}$$

$$c)\quad \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}$$

$$d)\quad \frac{(x^2-1)\sin x}{2\sqrt{x}}+2x\sin x\sqrt{x}+\sqrt{x}(x^2-1)\cos x$$

$$e)\quad \frac{2e^x}{\sqrt{1-x^2}}+2e^x\arcsin x$$

$$f)\quad \frac{-12}{(3+2x)^2}$$

$$g)\quad \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$$

$$h)\quad f(x)=\frac{-2x^2+\frac{5}{3}x^{4/3}-\frac{4}{3}x^{1/3}+\frac{1}{3}x^{-2/3}-2}{(x^2-2x-1)^2}$$