

### 3. Übungsblatt

**1. Aufgabe.** Bestimmen Sie den Rang der nachfolgenden Matrizen unter ausschließlicher Verwendung von Unterdeterminanten:

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b) \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad c) \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

**2. Aufgabe.** Bestimmen Sie den Matrizenrang mittels elementarer Umformungen in den Zeilen bzw. Spalten:

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad b) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 9 & 10 \\ -1 & -2 & -7 & -8 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$c) \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 5 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 2 & -1 \\ 6 & -14 & 9 & -10 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

**3. Aufgabe.** Lösen Sie die folgenden homogenen quadratischen linearen Gleichungssysteme mit Hilfe elementarer Umformungen in den Zeilen der Koeffizientenmatrix (Gaußscher Algorithmus):

a)

$$3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0$$

$$4x_1 - 5x_2 - x_3 = 0$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$b) \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c) \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**4. Aufgabe.** Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden quadratischen linearen Gleichungssysteme durch elementare Zeilenumformungen in der erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$a) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 15 & -9 \\ -3 & -18 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 6 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$c) \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**5. Aufgabe.**

$$\begin{pmatrix} -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 - \lambda & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Für welche Werte des reellen Parameters  $\lambda$  besitzt das inhomogene lineare Gleichungssystem genau eine Lösung?

**6. Aufgabe.** Lösen Sie die folgenden inhomogenen quadratischen linearen Gleichungssysteme mit Hilfe der Cramerschen Regel:

a)

$$-x_1 + 10x_2 + 5x_3 = 3$$

$$3x_1 - 6x_2 - 2x_3 = -2$$

$$-8x_1 + 14x_2 + 4x_3 = 6$$

$$b) \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$$