WS 2018/19, Mathematik 1 (Technische Informatik)
Prof. Dr. Yuri Luchko

10. Übungsblatt

1. Aufgabe. Berechnen Sie die kartesischen Koordinaten (x, y) von Punkten, deren Palarkoordinaten $(r,\ \phi)$ wie folgt sind:

$$(r,\ \phi) = (1,\ \pi),\ (r,\ \phi) = (\frac{1}{2},\ \frac{\pi}{2}),\ (r,\ \phi) = (\frac{5}{3},\ -\frac{2\pi}{3}).$$

2. Aufgabe. Berechnen Sie die Polarkoordinaten $(r,\ \phi)$ von Punkten, deren Koordinaten $(x,\ y)$ wie folgt sind:

$$(x,\ y) = (0,\ 1),\ (x,\ y) = (-1,\ 0),\ (x,\ y) = (\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}),\ (x,\ y) = (-\frac{2}{3},\ -\frac{3}{2}).$$

3. Aufgabe. Für die komplexen Zahlen

$$z = 2 - 3i, \quad z = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$$

berechnen Sie jeweils ihre Beträge, Argumente und konjugiert komplexe Zahlen. Wandeln Sie die komplexen Zahlen aus der Normalform in die trigonomertische Form um.

4. Aufgabe. Stellen Sie die in der Normalform gegebenen komplexen Zahlen

$$z = -3 + 4i, \quad z = -5, \quad z = -3 - 2i, \quad z = -1 + i, \quad z = -4i$$

in der trigonometrischen und in der exponentiellen Form dar. Wie lauten die konjugiert komplexen Zahlen in den drei Darstellungformen (Normalform, trigonometrische Form, exponentielle Form)?

5. Aufgabe. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke und geben Sie die Endergebnisse in der Normalform an:

$$(3 - 2i)(4 + 2i), \quad (3 - 4i)^3, \quad \frac{2i}{3 - 4i} + 2 \cdot e^{i(-30^\circ)} + 3(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)).$$

6. Aufgabe. Wandeln Sie die komplexen Zahlen

a) $z_1 = 3;\ z_2 = 4i$

b) $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
in die trigonomertische Form um und berechnen dann jeweils $z_1 \cdot z_2$, z_1/z_2, z_1^5 und z_2^{10}. Die Ergebnisse wandeln Sie in die Normalform um.

7. Aufgabe. Für die folgenden harmonischen Schwingungen bestimmen Sie jeweils die Amplitude A, die Periode T, den Phasenwinkel ϕ und skizzieren ihre Funktionengraphen:

a) $y = \frac{1}{2}\sin(2t - \pi/2)$, b) $y = 2\cos(t + \pi)$.

8. Aufgabe. Stellen Sie die folgenden Funktionen (harmonische Schwingungen)

a) $\sin(t) + \cos(t)$

b) $2\cos\left(\frac{1}{2}t\right) - 3\sin\left(\frac{1}{2}t\right)$

mithilfe der trigonometrischen Additionssätze in Form $A\sin(\omega t + \phi)$ dar.

9. Aufgabe. Stellen Sie die harmonischen Schwingungen

$$y(t) = 3\sin(2t),\ y(t) = 2\sin(3t + \pi),\ y(t) = \cos(t + \pi/4)$$

als rotierende komplexe Zeiger dar. Was sind die Amplituden und Phasenwinkel dieser harmonischen Schwingungen?

10. Aufgabe. Die gleichfrequenten harmonischen Schwingungen mit den Gleichungen

$$y_1(t) = 2\sin(\pi t + \pi/10),\ y_2(t) = 3\cos(\pi t + \pi/6)$$

werden ungestört zur Überlagerung gebracht. Stellen Sie die harmonischen Schwingungen $y_1(t)$, $y_2(t)$ sowie die resultierende Schwingung $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ als rotierende komplexe Zeiger graphisch dar. Bestimmen Sie die Schwingungsamplitude A und den Phasenwinkel φ der resultierenden harmonischen Schwingung $y(t)$.

11. Aufgabe. Drei harmonische Schwingungen

$$y_1(t) = 3\sin(2t + \pi/2),\ y_2(t) = \sin(2t),\ y_3(t) = 2\cos(2t - \pi/3)$$

werden überlagert. Berechnen Sie die komplexe Amplitude der resultierenden harmonischen Schwingung.

12. Aufgabe. Die gleichfrequenten harmonischen Schwingungen mit den Gleichungen

$$y_1(t) = 2 \cdot \cos(\omega t - \pi/3),$$
$$y_2(t) = 3 \cdot \sin(\omega t + \pi/6),$$
$$y_3(t) = \cos(\omega t + \pi/4)$$

kommen ungestört zur Überlagerung und ergeben eine resultierende Sinusschwingung $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ mit $A > 0$ und $-\pi < \varphi \leq \pi$. Stellen Sie die harmonischen Schwingungen $y_1(t),\ y_2(t),\ y_3(t)$ sowie die resultierende Schwingung $y(t)$ auf einem komplexen Zeigerdiagramm graphisch dar. Bestimmen Sie die Schwingungsamplitude A und den Phasenwinkel φ der resultierenden Schwingung $y(t)$ mit der Rechnung über komplexe Zeiger.