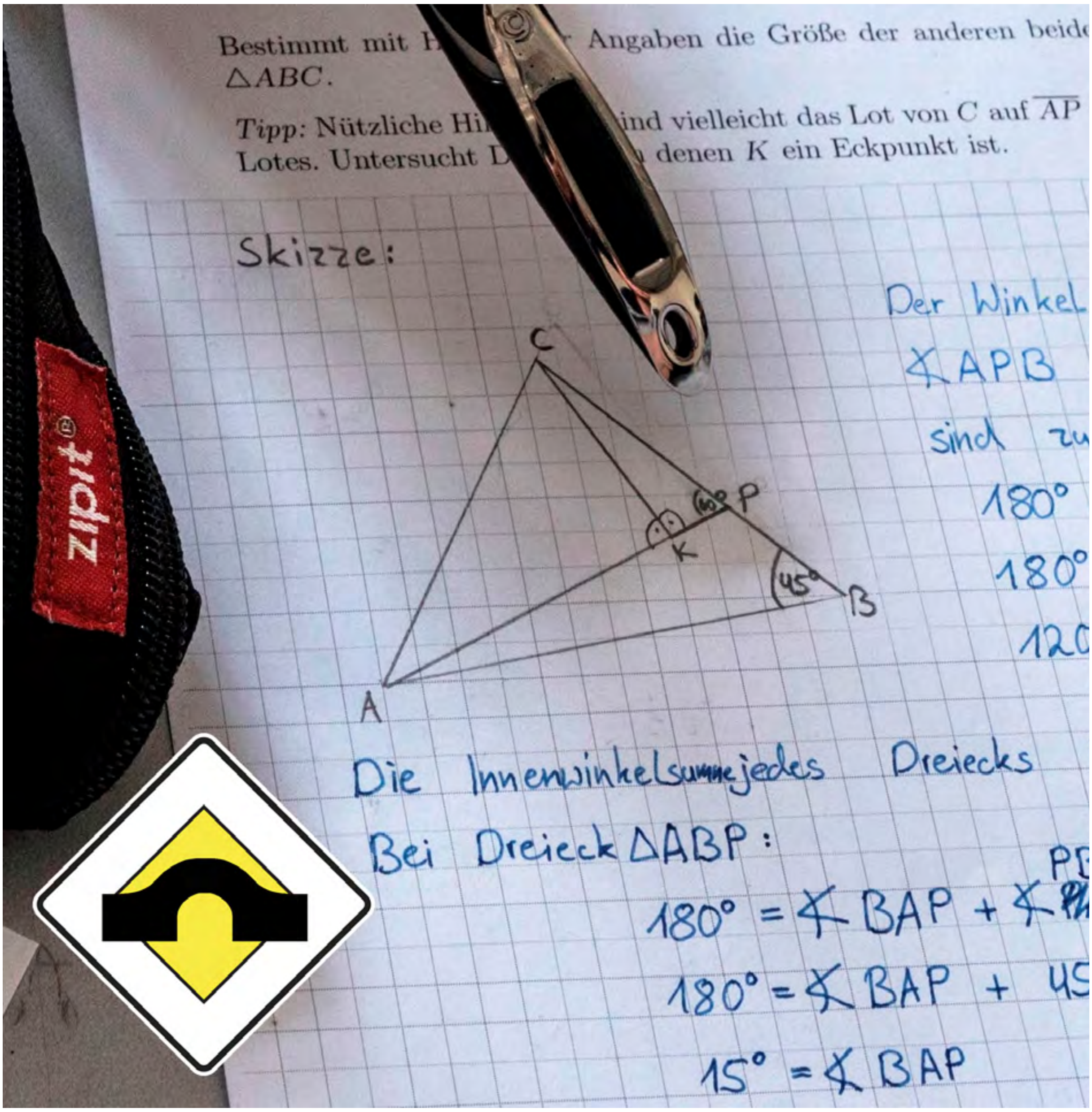
BEUTH HOCHSCHULE
FÜR TECHNIK
BERLIN
University of Applied Sciences

Brückenkurs

Mathematik

Version
27. Februar 2018

Fachbereich II: Mathematik – Physik – Chemie



© Beuth Hochschule für Technik Berlin 2017

Autoren des Textteils und der meisten Aufgaben:
Prof. Dr. Martin Oellrich
Prof. Dr. Angela Schwenk
Prof. Dr. Steffen Voigtmann

Wir sind den zahlreichen Testleser/inne/n zu großem Dank verpflichtet!
Bitte melden Sie Fehler, Unstimmigkeiten oder Verbesserungsvorschläge gern an `oellrich@beuth-hochschule.de`.
Da eventuell weitere Anpassungen erfolgen werden, ist das Layout der Seiten noch nicht perfekt.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Ziele

Dieses Aufgabenheft soll eine Handreichung sein an alle Studienanfänger der Beuth Hochschule für Technik, unabhängig von ihrem Studiengang. Es ist gedacht als Auffrischung und niedrigschwelliger (Wieder-)Einstieg in den Umgang mit Zahlen, Rechenausdrücken, elementaren Begriffen und Funktionen. Im Mittelpunkt soll stets eine an Definitionen und Regeln orientierte, systematische und nachvollziehbare Arbeitsweise stehen.

Beabsichtigt ist eine gewisse Angleichung der heterogenen Kenntnisse in elementarer Mathematik bei unseren Studienanfängern. Ausdrücklich nicht beabsichtigt ist ein Vorgriff auf spezifische Studieninhalte.

Die männlichen Formen im Text sind durchweg geschlechterinklusiv gemeint. Der „Wir“-Stil soll partizipativ wirken, nicht vereinnahmend.

1.2 Stoffauswahl

Die Themen dieses Heftes orientieren sich sowohl an den aktuellen Rahmenlehrplänen der Bundesländer (bis inkl. der 10. Klassen) als auch an den typischen Anforderungen unserer technikorientierten Studiengänge. Bei uns spielen Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik nur eine untergeordnete Rolle, deshalb wurden sie für den Brückenkurs nicht berücksichtigt.

Da Logik und Mengenlehre in den Lehrplänen nicht auftreten, sollen Mengen für die Belange des Brückenkurses in einfacher Elementaufzählung oder durch ihre definierende Bedingung angegeben werden. Wir verwenden das Wort „Menge“ selbst nicht.

Beispiel 1.1: Eine **Lösung** einer gegebenen Gleichung besteht aus der Angabe konkreter Werte für die darin enthaltenen Variablen, deren Einsetzen diese Gleichung erfüllen.
Bestimmen Sie die Lösungen von $x^2 - 2x - 3 = 0$.
Antwort: Die Lösungen sind $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$, *anstatt* Angabe der Menge $L = \{-1, 3\}$.

Beispiel 1.2: Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$.
Antwort: alle $x \neq 1$ *anstatt:* $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Wir verzichten ferner auf mathematische Notationen, die aus Schulkenntnissen nicht vorausgesetzt werden können und zur Wiederholung des Schulstoffes unnötig sind. Insbesondere verwenden wir hier keine Summen- und Produktzeichen $\sum$, $\prod$ oder Äquivalenzpfeile $\Leftrightarrow$ für Umformungen von Gleichungen. Der (sinnvolle) Symbolismus der höheren Mathematik soll dem Studienbeginn vorbehalten bleiben.

Zum Thema „reelle Funktionen"definieren wir in Abschnitt 2.7 lediglich die notwendigsten Begriffe: Definitions- und Wertebereich, Graph, Nullstelle, Umkehrfunktion. Die speziellen Funktionen in den Kapiteln werden dann in diesen abstrakten Rahmen eingeordnet.

1.3 Verwendung des Heftes

Es kann eingesetzt werden zur Begleitung der angebotenen Brückenkurse oder auch zum Selbststudium. Zu allen Abschnitten des Textes gibt es Übungsaufgaben. Diese sind zusammengefasst im letzten Kapitel. Es müssen nicht unbedingt alle Themen bzw. Aufgaben bearbeitet werden. Die Aufgabensammlung stellt lediglich eine Richtung gebende Auswahl dar.

Das Kapitel 2 *Grundbegriffe* „deckt zunächst den Tisch", indem es die grundlegenden Zahlenbereiche, ihre Rechenoperationen und -regeln angibt. Es schließt sich ein Teil zum Umgang mit Brüchen und Größen an. Zum Schluss werden die wichtigsten Begriffe im Kontext der reellen Funktionen eingeführt.

Alle folgenden Kapitel werden eingeleitet durch eine knappe Vorstellung ihres Themas. Es werden auch hier die grundlegenden Definitionen gegeben, Rechenregeln und Beispiele. Es wird empfohlen, zuerst diese Beispiele zu erarbeiten.

Lösungen zu den Aufgaben werden bewusst nicht angegeben. Es ist gerade für Studienanfänger sehr wichtig zu lernen, wie man Lösungswege findet, darstellt und bespricht. Dieser Anreiz soll nicht genommen werden. Für Dozenten gibt es als Vergleichsreferenz eine separate Ausgabe dieses Heftes, die knappe Ergebnisse aller Aufgaben enthält.

1.4 Umgang mit dem Taschenrechner

Bei aller Erleichterung, die ein Taschenrechner bringt, dürfen bestimmte Nachteile nicht übersehen werden, die besonders im Hinblick auf mathematisches Verständnis bestehen:

- Formeln werden nur noch als Rechenterme wahrgenommen, nicht mehr als Ausdruck mathematischer Struktur. In Folge davon wird den Ergebnissen blind vertraut. Es geht die Fähigkeit zur Prüfung bzw. Erkennung von Tippfehlern verloren. Evtl. ganzzahlige oder algebraisch einfache Ergebnisse wie 4, $1/6$ oder $\sqrt{2}$ werden nicht mehr als solche erkannt:

$$3.998 \qquad 0.166667 \qquad 1.4142135\,.$$

- Ein Taschenrechner scheint immer eindeutige Ergebnisse zu liefern. Evtl. Mehrdeutigkeiten in der Rechnung werden nicht mehr gesehen:

$$x^2 = 2 \qquad \text{besitzt als Lösungen} \qquad x = \sqrt{2} \quad \textit{oder} \quad x = -\sqrt{2}\,.$$

- Die Ergebnisse eines Taschenrechners mit ihren vielen Nachkommastellen erscheinen „exakt“. Unsichtbar bleiben sowohl die Störungen der Eingabezahlen (z.B. bei Messwerten) als auch die Fortschreibung von Rundungsfehlern während eines Rechengangs. Es muss bedacht werden, welche (Un)Genauigkeit realistisch zu erwarten ist. So ist der Mittelwert von Daten, die nur eine Nachkommastelle genau sind, selbst nicht genauer.
- Viele Dezimalstellen abzuschreiben macht schreibfaul. Man tendiert beim Notieren von (Zwischen)Ergebnissen zum groben Runden und bewirkt dabei erhebliche Rundungsfehler. Diese allein können eine Berechnung unbrauchbar machen.
- Seltener benutzte Funktionen wie z.B. $\arcsin x$ oder $\sqrt[y]{x}$ u.a. sind kaum noch bekannt. Das kann zu Fehlbedienungen führen:

  Die Tastenbezeichnung $\sin^{-1}$ suggeriert einen Kehrwert
  Die Eingabereihenfolge von x, y erscheint bei $\sqrt[y]{x}$ vertauscht.

  Das Gleichheitszeichen = bedeutet auf dem Rechner nur das Signal zur Berechnung. Da es ständig gedrückt werden muss, beeinflusst es aber die Wahrnehmung von Gleichheitszeichen auf dem Papier. Eine leichte Ergänzungsaufgabe wie

$$4 + 7 = x + 9 = y + 3$$

  mit den Lösungen $x = 2$ und $y = 8$ führt dann zu $x = 11$ und $y = 20$. Die letzte 3 wird ignoriert.
- Sich auf einen Taschenrechner zu verlassen macht von ihm abhängig. Dies betrifft sowohl den Verlust der theoretischen Kontrolle über eine Rechnung als auch die Bedienung eines konkreten Geräts. Wenn Sie

das Gefühl haben, ohne einen Taschenrechner keine mathematische Aufgabe lösen zu können, sollten Sie diesen Aspekt unbedingt ernst nehmen!

Es soll grundsätzlich so weit wie möglich formal gerechnet werden. Dies betrifft auch das Einsetzen konkreter Werte in eine Formel mit Variablen. Erst wenn ein vollständig vereinfachter Term, der nur aus Zahlen und Rechenoperationen besteht, noch kein fertiges Ergebnis erbracht hat, soll geprüft werden, ob ein Rechner benötigt wird. Dabei zählen exakte Ausdrücke wie

$$^3/_4 \qquad 1+\sqrt{3} \qquad 3\ln 2$$

durchaus als „fertig“.

1.5 Weitere Medien

Dieses Heft ist kein Lehrbuch. Ob ein solches eingesetzt wird und ggf. welches, bleibt den Lehrenden bzw. bei Selbststudium den Studierenden überlassen. Eine mögliche und sinnvolle Auswahl wäre etwa die folgende. Alle diese Titel sind in der Bibliothek der Beuth Hochschule entleihbar. Die Sigelnummern mit Zwischenpunkten bezeichnen einzelne Bände, die Nummern mit Buchstabenkombinationen sind sogar mehrfach vorhanden. Die nachfolgende Listenfolge ist alphabetisch geordnet und stellt keine Bewertung dar.

- J. Erven, M. Erven, J. Hörwick: **Vorkurs Mathematik. Ein kompakter Leitfaden**. Oldenbourg 2003+2010 (Sigel: NSD 1–4)
  Geht deutlich über den Umfang des Brückenkurses hinaus. Ausführliche Erklärungen, Aufgaben mit Lösungen.
- G. Glaeser: **Der mathematische Werkzeugkasten**. Spektrum 2014
  http://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-642-54599-3
  Gute Beispiel- und Aufgabensammlung, schön illustriert, deckt den Umfang des Brückenkurses gut ab und geht darüber hinaus. Vom Hochschulnetz aus online im Volltext verfügbar.
- A. Kemnitz: **Mathematik zum Studienbeginn**. Vieweg 2001–2014
  http://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-658-02081-1
  Geht erheblich über den Umfang des Brückenkurses hinaus. Vom Hochschulnetz aus online im Volltext verfügbar.
- M. Knorrenschild: **Vorkurs Mathematik**. Fachbuchverlag Leipzig 2004+2013 (Sigel: NTC 1–4)
  Geht etwas über den Brückenkurs hinaus. Gut lesbare Mischung aus

prinzipiellen Erklärungen und Übungsaufgaben. Umfasst nur elementare Algebra, Funktionen, Lösen von Gleichungen und Ungleichungen, sowie etwas Geometrie und Trigonometrie.

- L. Kusch: **Mathematik für Schule und Beruf, Teil 1 Arithmetik**. Girardet 1978 (Sigel: 1.4.32)
  Sehr ausführlich.
- L. Kusch: **Mathematik für Schule und Beruf, Teil 2 Geometrie**. Girardet 1982 (Sigel: 1.5.2)
  Sehr ausführlich.
- W. Schäfer, K. Georgi: **Vorbereitung auf das Hochschulstudium**. Teubner 1978 (Sigel: 1.1.50)
  Sehr ausführlich, nur Gleichungen.
- W. Schäfer, K. Georgi, G. Trippler: **Mathematik-Vorkurs**. Teubner 1999–2010 (Sigel: NZD 1–6, NZD 2–5, NZD 11–4)
  Geht erheblich über den Brückenkurs hinaus, ist aber eine sehr gute Begleitung für die relevanten Teile. Am Anfang eines Abschnitts wird der Stoff theoretisch wiederholt, mit ausführlichen Beispielen erklärt, am Ende Übungen mit Lösungen.
- P. Stingl: **Einstieg in die Mathematik für Fachhochschulen**. Hanser 2002 (Sigel: NSB)
  Geht etwas über den Brückenkurs hinaus. Enthält über 400 Aufgaben mit vollständigen Lösungsgängen. Gut zum Selbststudium geeignet.
- J. Wendeler: **Vorkurs der Ingenieurmathematik**. Harry Deutsch 2002 (Sigel: NBCA)
  Geht etwas über den Brückenkurs hinaus, behandelt aber elementare Umformungen (u.a. Bruchrechnung), enthält Erklärungen, ausführlich durchgerechnete Beispiele und Aufgaben mit Lösungen.
- H. Wörle: **Mathematik in Beispielen für Ingenieurschulen, Band 1: Elementarmathematik**. Oldenbourg 1968 (Sigel: 1.2.79. Mathematik veraltet nicht!)
  Eine reine Aufgabensammlung mit ausführlichen Lösungen, aber ohne Erklärungen wie man prinzipiell an Aufgaben herangeht.

Das folgende Buch ist nicht in der Bibliothek verfügbar. Es stellt aber ebenfalls eine gute Ergänzung zum Brückenkurs dar:

- G. Merziger, M. Holz, D. Wille: **Repetitorium Elementare Mathematik 1**. Binomi 2010 (ISBN: 978-3-923923-37-3)
  Über 500 durchgerechnete Beispiele und über 300 Skizzen. Geht im Umfang über den Brückenkurs hinaus.

Heute stehen im Internet zahllose Quellen zur Verfügung, um sich über Mathematik zu informieren. Da diese weniger stabil sind als Bücher, hier nur einige generelle Hinweise. Mittels einer Stichwortsuche lassen sich genaue URLs finden.

- Eine allgemeine Motivation sich mit Mathematik zu beschäftigen geben die leicht verständlichen 15-Minuten-Videos **Mathematik zum Anfassen** von Prof. Albrecht Beutelspacher:

  `http://br.de/fernsehen/ard-alpha/sendungen/mathematik-zum-anfassen`

- Der Dozent Jörn Loviscach von der FH Bielefeld hat einen gut verständlichen **Mathe-Vorkurs online** zur Verfügung gestellt:

  `https://www.youtube.com/playlist?list=PL8F6B6954AD2A809D`

  Folgende Videos daraus unterstützen den Umfang dieses Heftes:

  Nummern 001–016 021–066 082 096–097 104.

- Folgende Internet-**Seiten für Schüler** entsprechen dem Inhalt dieses Heftes am meisten:

  `http://mathenatur.de`
  `http://mathematik-wissen.de`
  `http://sofatutor.com/mathematik`

- Die Seite der Deutschen Mathematiker Vereinigung hält eine **Erste-Hilfe-Seite** für Schüler bereit:

  `http://mathematik.de`

- Die Seite `matheretter.de` bietet ein umfangreiches Kompendium praktisch aller mathematischen Schulthemen in Form von **Erklärvideos**. Das Angebot ist allerdings kostenpflichtig. In YouTube gibt es ausgewählte Videos daraus, die evtl. für einzelne Problemstellungen ausreichen:

  `http://matheretter.de`
  `http://youtube.com/user/echteinfach`

- Mathe darf auch Spaß machen! Dies zeigen die **Mathe-Songs** von Johann Beurich alias DorFuchs:

  `http://youtube.com/user/DorFuchs`

2 Grundbegriffe

2.1 Mathematische Definitionen

Die Mathematik ist durchgehend aufgebaut auf präzisen Begriffen, die neu oder mit Hilfe bekannter Begriffe definiert werden. Dazu dient zum einen eine sprachliche Beschreibung. Zum anderen werden neuen Begriffen auch neue Symbole als Bedeutungsträger zugewiesen. Diese Symbole müssen deshalb klar als *neu definiert* zu erkennen sein. Dazu dient üblicherweise ein Gleichheitszeichen mit einem Doppelpunkt.

Beispiel 2.1:

$$x^n := \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}} \qquad \textit{Potenz}\text{, siehe } 4.1$$

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \qquad \textit{Fakultät}\text{, siehe } 2.5.$$

Das neue Symbol steht dabei stets auf der Seite des Doppelpunkts. Eine solche Definition durch eine Gleichung stellt eine Rechenregel dar, so wie jede andere allgemeingültige Gleichung auch.

Dieselbe Schreibweise tritt auf bei der Zuweisung eines Wertes oder einer Formel zu einer Unbekannten. Beispiele:

Beispiel 2.2:

Wir wenden die Regel $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ an mit $x := -1$, um $-(y + z) = -y - z$ zu schreiben.

Die allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ teilen wir durch $a \neq 0$ und erhalten die sog. pq-Form $x^2 + px + q = 0$, indem wir allgemein setzen: $p := {}^b\!/\!_a$ und $q := {}^c\!/\!_a$.

2.2 Zahlenbereiche und Variablen

In der Mathematik unterscheiden wir zwischen verschiedenen Zahlenbereichen, die jeweils einen eigenen Namen besitzen:

- **natürliche Zahlen** $\mathbb{N}$.
  Mit ihnen zählen wir Objekte ab: 1, 2, 3, 4 usw.. Auf diesen Zahlen sind zunächst nur Addition und Multiplikation definiert, z.B. $3 + 4 = 7$, $3 \cdot 4 = 12$. Deren Ergebnisse sind immer wieder natürliche Zahlen. Soll die Null vorkommen dürfen, schreiben wir $\mathbb{N}_0$.

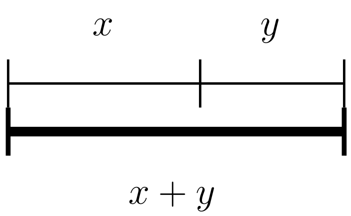
- **ganze Zahlen** $\mathbb{Z}$.
  Sie umfassen die natürlichen Zahlen und fügen ihnen ihre negativen Entsprechungen und die Null hinzu: 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3 usw.. Dadurch sind auch die Ergebnisse von Subtraktionen ganzer Zahlen immer wieder ganze Zahlen.
- **rationale Zahlen** $\mathbb{Q}$.
  Sie umfassen die ganzen Zahlen und fügen ihnen die Brüche hinzu, d.h. die Zahlenwerte aller Ausdrücke der Form p/q. Dabei sind p und $q \neq 0$ beliebige ganze Zahlen. Die Ergebnisse beliebiger Anwendungen der vier Grundrechenarten $+ \quad - \quad \cdot \quad \div$ auf rationale Zahlen sind immer wieder rationale Zahlen.
- **reelle Zahlen** $\mathbb{R}$.
  Sie umfassen alle rationalen Zahlen und dazu bekannte Zahlen wie π und Rechenausdrücke wie $\sqrt{2}$, für die es keine Brüche mit gleichem Wert gibt. Diese Zahlen geben uns die größte Allgemeinheit beim praktischen Rechnen. Eine reelle Zahl, die nicht rational ist, heißt *irrational*.

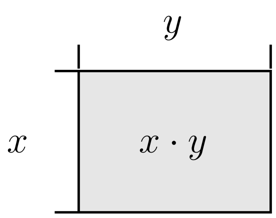
Wir können Zahlen mit unbekanntem Wert als **Variablen** schreiben. Dazu verwenden wir Buchstaben wie a, b, c, x, y, z als Platzhalter, mit denen wir genauso rechnen können wie mit konkreten Zahlen. Wir können nur die beteiligten Rechenoperationen nicht immer ausführen. Dies wird erst möglich, sobald wir Zahlenwerte in Variablen einsetzen. Der rechnerische Sinn von Variablen besteht darin, dass wir den Ablauf einer Berechnung soweit wie möglich vorbereiten können. Das Einsetzen ist dann nur noch der letzte Schritt zum Ergebnis.

2.3 Addition und Multiplikation

Addition und Multiplikation sind **Rechenoperationen**, d.h. festgelegte Vorschriften, wie aus zwei Zahlen jeweils eine dritte entsteht.

Die Addition $x + y$ kann geometrisch interpretiert werden als das Hintereinanderlegen zweier paralleler Strecken mit den Längen x und y. Das Ergebnis ist die Länge der aus diesen beiden Strecken gebildeten Gesamtstrecke. Das Produkt $x \cdot y$ bedeutet den Flächeninhalt eines Rechtecks, gebildet aus zwei zueinander rechtwinkligen Strecken der Längen x und y.





Für diese beiden Operationen gilt die bekannte Auswertungsreihenfolge **Punkt vor Strich**. *Punkt* bzw. *Strich* meinen hier die grafische Erscheinung der beiden Operatorzeichen. Diese Regel besagt im Einzelnen:

- Additionen haben untereinander keine vorbestimmte Reihenfolge. Der Ausdruck $3+4+5$ kann berechnet werden, indem wir eine beliebige der beiden Additionen zuerst berechnen. Beispiel:

$$\begin{aligned} (3+4)+5 &= 7+5 = 12 \qquad \text{oder} \\ 3+(4+5) &= 3+9 = 12\,. \end{aligned}$$

- Auch unter Multiplikationen gibt es keine feste Reihenfolge. Beispiel:

$$\begin{aligned} (3\cdot 4)\cdot 5 &= 12\cdot 5 = 60 \qquad \text{oder} \\ 3\cdot(4\cdot 5) &= 3\cdot 20 = 60\,. \end{aligned}$$

- Additionen und Multiplikationen *haben* untereinander per Konvention eine zwingende Reihenfolge. Im Ausdruck $3+4\cdot 5$ muss die Multiplikation zuerst berechnet werden: $3+20=23$. Die umgekehrte Reihenfolge führt zu einem anderen, nicht gewollten Ergebnis: $7\cdot 5=35$. Diese Vorrangfolge können wir als **Klammerung** sichtbar machen. Beispiel:

$$3+4\cdot 5 = 3+(4\cdot 5)\,.$$

  Wollen wir diese Rangfolge verändern, müssen wir selbst explizite Klammern schreiben:

$$(3+4)\cdot 5 = 7\cdot 5\,.$$

Diese Beobachtungen über die Ausführungsreihenfolge gelten für alle reellen Zahlen, egal ob wir ihre Werte kennen oder nicht. Um immer flexibel und korrekt rechnen zu können, helfen uns abstrakte **Rechenregeln**. Mit ihrer Hilfe können wir bestimmte (Teil-)Ausdrücke ersetzen durch andere, auch ohne sie auszurechnen. Die wichtigsten Grundregeln sind die **Kommutativ-**, die **Assoziativ-** und die **Distributivregel**:

$$\boxed{\begin{array}{lrclrcl} \text{(K)} & x+y &=& y+x & x\cdot y &=& y\cdot x \\ \text{(A)} & (x+y)+z &=& x+(y+z) & (x\cdot y)\cdot z &=& x\cdot(y\cdot z) \\ \text{(D)} & (x+y)\cdot z &=& x\cdot z+y\cdot z & x\cdot(y+z) &=& x\cdot y+x\cdot z \end{array}}$$

Die Assoziativregel bedeutet, dass die Reihenfolge der Berechnung vertauscht werden kann. Im Grunde ist die Klammerung also egal. Diese Regel wird daher oft gebraucht, um Klammern wegzunehmen oder passend zu setzen.

Diese Grundregeln verstehen sich allerdings nicht als Vorlage zur kreativen Erzeugung analoger Regeln mit anderen Operationen, etwa $x - y = y - x$ etc. Es gelten genau diese sechs formulierten Regeln und keine anderen, wie die Beobachtungen im nächsten Abschnitt zeigen. Wir können sie in beliebiger Reihenfolge oder auch mehrfach anwenden. Entscheidend ist es zu erkennen, welche Regel jeweils anwendbar ist. Die Assoziativregel gilt nur bei zwei gleichen Operatoren, die Distributivregel dagegen nur bei zwei verschiedenen. Beispiele:

$$1 + x + 2 \overset{(A)}{=} (1 + x) + 2 \overset{(K)}{=} (x + 1) + 2 \overset{(A)}{=} x + (1 + 2) \;=\; x + 3$$

$$\begin{aligned} (x+1)(y+1) &\overset{(D)}{=} x\,(y+1) + 1\,(y+1) \\ &\overset{(D)}{=} (xy + 1x) + (1y + 1 \cdot 1) \overset{(A)}{=} xy + x + y + 1\,. \end{aligned}$$

Im unteren Beispiel ist ebenfalls zu sehen, dass in Verbindung mit Variablen der Multiplikationspunkt als Symbol weggelassen werden kann. Per Konvention wird für ein fehlendes Operatorzeichen dieser Punkt eingesetzt.

2.4 Subtraktion und Division

Die Subtraktion spielt gegenüber der Addition die Rolle einer **Umkehrung**. Damit können wir Fragen des Typs $a + x = b$ beantworten, wobei a, b bekannte Werte sind und x gesucht. Die Lösung dieser Gleichung ist $x = b - a$.

Bei Subtraktionen ist die Klammerung nicht allgemein vertauschbar:

$$\begin{aligned} (8-2)-4 &= 6-4 &&= 2 \qquad \text{aber} \\ 8-(2-4) &= 8-(-2) &&= 10\,. \end{aligned}$$

Dies ist nur möglich, wenn wir sie umwandeln in Additionen mit negativen Zahlen:

$$\begin{aligned} 8-2-4 &= 8+(-2)+(-4) \qquad \text{und damit} \\ (8+(-2))+(-4) &= 6+(-4) = 2 \\ 8+((-2)+(-4)) &= 8+(-6) = 2\,. \end{aligned}$$

Die Subtraktion gilt wie die Addition als eine „Strichrechnung“, die gegenüber der Multiplikation nachrangig ausgeführt wird.

Für die Division gibt es drei Symbole:

$$x \div y \qquad\qquad {}^{x}\!/_{y} \qquad\qquad \frac{x}{y}\,.$$

Im Rahmen dieses Hefts verwenden wir sie wie folgt:

- Die Schreibweise $x \div y$ soll entweder die Division deutlich herausstellen oder es bei langen Operanden ermöglichen, dass sie sich in normaler Schriftgröße in die Zeile einfügen: $(x^2 - y^2) \div (x - y)$.

  Sie betont außerdem, dass es sich bei der Division um eine „Punktrechnung“ wie die Multiplikation handelt und Vorrang hat vor Addition und Subtraktion.

- Die Schreibweise ${}^x\!/_y$ steht überall dort, wo ein allein stehender Bruch aus zwei kurzen Operanden gebildet wird, etwa ${}^3\!/_5$ oder ${}^\pi\!/_2$. Hier steht nicht die Division selbst im Vordergrund, sondern der Wert des Bruchs.

- Die Schreibweise $\frac{x}{y}$ wird verwendet, um einen kleinen Bruch als Teil einer längeren Formel zu schreiben oder um die Operanden in normaler Schriftgröße zweizeilig zu setzen:

$$\tfrac{1}{2}(x+y) \qquad\qquad \frac{x^2-y^2}{(x-y)^2} = \frac{x+y}{x-y}\ .$$

Die Division fungiert als Umkehrung der Multiplikation: Sie beantwortet Fragen des Typs $a \cdot x = b$ durch den Ausdruck $x = b \div a$. Auch hier ist die Klammerung nicht allgemein vertauschbar:

$$\begin{aligned} (8 \div 2) \div 4 &= 4 \div 4 = 1 \qquad \text{aber} \\ 8 \div (2 \div 4) &= 8 \div {}^1\!/_2 = 16\ . \end{aligned}$$

Dies ist nur möglich, wenn wir sie umwandeln in Multiplikationen mit ihren Kehrwerten:

$$\begin{aligned} 8 \div 2 \div 4 &= 8 \cdot {}^1\!/_2 \cdot {}^1\!/_4 \qquad \text{und damit} \\ (8 \cdot {}^1\!/_2) \cdot {}^1\!/_4 &= 4 \cdot {}^1\!/_4 = 1 \\ 8 \cdot ({}^1\!/_2 \cdot {}^1\!/_4) &= 8 \cdot {}^1\!/_8 = 1\ . \end{aligned}$$

2.5 Bruchrechnung

Die Arbeit mit Zahlenbrüchen fällt erfahrungsgemäß vielen mathematisch Untrainierten schwer. Dabei ist sie der Schlüssel für den sicheren Umgang mit Formeln im Allgemeinen und speziell mit Wurzelfunktionen. Bruchrechnung basiert auf einigen wenigen klaren Regeln, deren Anwendung man nur zu üben braucht. Bitte nehmen Sie sich hierfür die nötige Zeit, sie zahlt sich aus!

Brüche sind Zahlen, daher folgt ihre Umformung denselben drei Regeln (K), (A), (D) (siehe 2.3). Zusätzlich verwenden wir zwei weitere einfache Regeln:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= x \cdot \frac{1}{y} && \text{für } y \neq 0 && \textit{Multiplikation mit Kehrwert} \\ \frac{x}{y} &= \frac{x \cdot z}{y \cdot z} && \text{für } y, z \neq 0 && \textit{Erweitern/Kürzen.} \end{aligned}$$

Die Kehrwert-Regel besagt, dass eine Division als Multiplikation geschrieben werden kann. So kommen danach Regeln für die Multiplikation zum Zuge. Die Erweiterungs-Regel erlaubt uns, einen beliebigen Faktor $z \neq 0$ in Zähler und Nenner eines Bruches hineinzuschreiben bzw. herauszuteilen, ohne den Bruchwert zu verändern. Daraus erhalten wir durch Kombination die bekannten Regeln für Brüche:

$$\begin{aligned} \frac{w}{x} \cdot \frac{y}{z} &= \frac{w \cdot y}{x \cdot z} && \text{für } x, z \neq 0 && \textit{Multiplikation} \\ \frac{w}{x} \div \frac{y}{z} &= \frac{w \cdot z}{x \cdot y} && \text{für } x, y, z \neq 0 && \textit{Division} \\ \frac{w}{x} + \frac{y}{x} &= \frac{w + y}{x} && \text{für } x \neq 0 && \textit{Addition (gleicher Nenner)} \\ \frac{w}{x} + \frac{y}{z} &= \frac{w \cdot z + x \cdot y}{x \cdot z} && \text{für } x, z \neq 0 && \textit{Addition (versch. Nenner).} \end{aligned}$$

Die Regeln für die Subtraktion sind ganz analog zu denen der Addition: auf beiden Seiten steht $-$ statt $+$.

Beispiel 2.3:

$$2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{3} - \frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 3} - \frac{4}{3} = \frac{6-4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2} \div \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \div \frac{1 \cdot 4 - 1 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{1}{2} \div \frac{1}{12} = \frac{1 \cdot 12}{2 \cdot 1} = 6\,.$$

Der Ausdruck $\frac{w}{x} \div \frac{y}{z}$ ist ein Doppelbruch. Bestehen einzelne oder alle Variablen darin aus Teilformeln, so kann es zur Übersicht sinnvoll sein, mehrere Bruchstriche untereinander zu schreiben. Beispiele:

$$\frac{\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x-1}} \qquad \text{oder} \qquad \frac{\;\frac{x}{x+1}\;}{\frac{1}{x+1}}\,.$$

Um die letzte auszuführende Division hervorzuheben, sollte der zugehörige Bruchstrich etwas breiter sein, siehe zweiten Doppelbruch. Das ist besonders wichtig, wenn nur zwei Bruchstriche auftreten:

$$\frac{\frac{x}{y}}{z} = \frac{x}{y} \div z = \frac{x}{y \cdot z} \qquad\qquad \frac{x}{\frac{y}{z}} = x \div \frac{y}{z} = \frac{x \cdot z}{y} .$$

In der Regel *Addition (verschiedene Nenner)* steckt die Idee, beide Brüche mit dem Nenner des jeweils anderen zu erweitern:

$$\frac{w}{x} + \frac{y}{z} = \frac{w}{x} \cdot \frac{z}{z} + \frac{y}{z} \cdot \frac{x}{x} = \frac{w \cdot z}{x \cdot z} + \frac{x \cdot y}{x \cdot z} = \frac{w \cdot z + x \cdot y}{x \cdot z} .$$

Es ist aber nicht immer notwendig, den Hauptnenner $x \cdot z$ zu bilden. Oft ist dieser viel größer als nötig, was auf dem Papier vermeidbaren Rechenaufwand verursacht. Ein Beispiel:

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{2 \cdot 6 + 9 \cdot 1}{9 \cdot 6} = \frac{12 + 9}{54} = \frac{21}{54} .$$

Der Ergebnisbruch ist noch ungekürzt, denn Zähler und Nenner enthalten beide den kürzbaren Teiler 3. Wir können ihn deshalb einfacher schreiben als $^{7}/_{18}$. Das hätten wir in diesem Fall auch vorher wissen können, denn beide Ausgangsnenner enthalten diesen gemeinsamen Teiler 3. Das Ziel ist eigentlich nur, beide Brüche durch Erweitern auf denselben Nenner zu bringen. Dabei kann diese 3 ignoriert werden, denn sie ist ja schon in beiden enthalten. Im Beispiel reicht es, den ersten Bruch mit $^{6}/_{3} = 2$ zu erweitern und den zweiten mit $^{9}/_{3} = 3$:

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{3} = \frac{2 \cdot 2}{9 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{4}{18} + \frac{3}{18} = \frac{7}{18} .$$

Alternativ können wir vor der Addition den gemeinsamen Teiler ausklammern und ihn anschließend wieder einmultiplizieren:

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{18} .$$

Da das für jeden gemeinsamen Teiler beider Nenner gilt, können wir den besten Rechenvorteil gewinnen, wenn wir den *größten gemeinsamen Teiler* finden. Das können wir für den schriftlichen Gebrauch durch Probieren erreichen. Taschenrechner, die eine explizite Bruchdarstellung unterstützen, erledigen dies gleich mit.

Es sei angemerkt, dass man von einem sog. *unechten Bruch* spricht, wenn der Betrag des Zählers größer ist als der des Nenners. In einem solchen Fall ist es rechnerisch möglich, den ganzzahligen Anteil heraus zu kürzen, sodass ein „echter“ Bruch übrig bleibt. Beispiel:

$$\frac{8}{3} = \frac{6 + 2}{3} = \frac{6}{3} + \frac{2}{3} = 2 + \frac{2}{3} .$$

Manchmal wird dann etwas nachlässig $2\frac{2}{3}$ geschrieben. Diese Schreibweise ist aber missverständlich, weil per Standard bei fehlendem Operatorzeichen der Multiplikationspunkt eingesetzt wird. Verzichten Sie auf diese vermeintliche Bequemlichkeit!

Aufgaben zur Bruchrechnung

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke ohne Benutzung des Taschenrechners.

1 ▷ a) $\dfrac{3}{2} - \dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{7}{12} + \dfrac{5}{16}$

b) $\dfrac{4}{15} - \dfrac{1}{6}$ d) $\dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{15}$

2 ▷ a) $2 + \dfrac{8}{5}$ c) $\dfrac{11}{42} - \dfrac{11}{70}$

b) $\dfrac{5}{14} - \dfrac{1}{6}$ d) $\dfrac{5}{1 - \frac{1}{3}}$

3 ▷ a) $\dfrac{2}{25} \cdot \dfrac{5^2}{6}$ b) $\dfrac{8}{45} \cdot \dfrac{30}{24}$

4 ▷ $\dfrac{2 \cdot \left(\frac{10}{11} - \frac{5}{4}\right)}{\frac{15}{18}}$

5 ▷ $\dfrac{\frac{15}{2} + \frac{5}{3}}{\frac{20}{3} - \frac{5}{4}}$

6 ▷ a) $1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}}$

b) $2 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{4 + \frac{1}{3}}}$

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke so weit wie möglich.

7 ▷ $\dfrac{1 + \dfrac{b}{a}}{1 + \dfrac{a}{b}}$

8 ▷ $\dfrac{(x+1)^3 - (x+5)(x-3)(x+1)}{(x+1)^2}$

9 ▷ $$\frac{x}{(z-x)(x-y)} + \frac{y}{(x-y)(y-z)} + \frac{z}{(y-z)(z-x)}$$

10 ▷ $\dfrac{2a - 3b}{a - b} - \dfrac{5a + 2b}{b - a} - \dfrac{3a + 3b}{a - b}$

Für natürliche Zahlen n (mit Null) wird die sog. **Fakultät** rekursiv (rückbezüglich) definiert:

$$\boxed{0! \;:=\; 1\,, \quad n! \;:=\; n \cdot (n-1)!}\,.$$

So können die Funktionswerte schrittweise berechnet werden:

$$4! \;=\; 4 \cdot 3! \;=\; 4 \cdot 3 \cdot 2! \;=\; 12 \cdot 2 \cdot 1! \;=\; 24 \cdot 1 \cdot 0! \;=\; 24 \cdot 1 \;=\; 24\,.$$

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

11 ▷ $2!, 6!, 7!$ | 12 ▷ $\dfrac{8!}{6!}$ | 13 ▷ $\dfrac{9!}{7!}$ | 14 ▷ $\dfrac{n!}{(n-2)!}$ | 15 ▷ $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$

16 ▷ Wie viele natürliche Zahlen gibt es, in denen alle 10 Dezimalziffern genau einmal so vorkommen, dass Null nicht die erste Ziffer ist? (*Hinweis:* Die Anzahl verschiedener Reihenfolgen von n Objekten ist genau $n!$.) Wie viele Tage würde es dauern, diese Zahlen alle aufzuschreiben, wenn jede davon 5 Sekunden bräuchte?

Zu zwei natürlichen Zahlen n, k mit $0 \leq k \leq n$ werden die sog. **Binomialkoeffizienten** definiert:

$$\boxed{\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}$$

lies: „n über k“.

Die Binomialkoeffizienten werden u.a. zum systematischen Zählen verwendet. So gibt es beim *Lotto 6 aus 49* genau

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13.983.816$$

Möglichkeiten, 6 Zahlen aus 49 anzukreuzen. Berechnen Sie die folgenden Binomialkoeffizienten:

17 ▷ $\binom{7}{k}$ für $k = 0, 1, \ldots, 7$

18 ▷ $\binom{n}{0}, \binom{n}{n}$

19 ▷ $\binom{n}{1}, \binom{n}{n-1}$ für $n \geq 1$

20 ▷ $\binom{n}{2}, \binom{n}{n-2}$ für $n \geq 2$

Zeigen Sie formal die folgenden Beziehungen:

21 ▷ $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für $k \leq n$

22 ▷ $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ für $k \leq n$

23 ▷ $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ für $k < n$

2.6 Rechnen mit Größen

Oft bedeuten Zahlen physikalische Größen mit genormten Einheiten. Diese sollten wir zur Deutlichkeit mit notieren, denn auch sie unterliegen bestimmten Rechenregeln:

- Zwei Größen dürfen nur dann addiert, subtrahiert oder verglichen werden, wenn sie genau dieselbe Einheit haben. Die Summe bzw. Differenz besitzt dann auch selbst diese Einheit.
- Zwei Größen dürfen immer multipliziert, dividiert oder potenziert werden. Die Einheit des Ergebnisses ist dann das Produkt bzw. der Quotient bzw. die Potenz der beteiligten Einheiten.
- Exponenten von Potenzen und Argumente von Winkelfunktionen müssen einheitslos sein.

Eine Einheit kann elementar sein oder zusammengesetzt. In jedem Fall ist sie spezifisch für eine physikalische Größe. So werden Streckenlängen angegeben in der elementaren Einheit *Meter* (m) und Zeiten in der ebenfalls elementaren Einheit *Sekunde* (s). Geschwindigkeiten haben die aus beiden zusammengesetzte Einheit *Meter pro Sekunde* (m/s). An dieser Stelle kann kein Exkurs in die Bezeichnungen der zahlreichen physikalischen Größen gegeben werden.

Als **Vorsatzzeichen** kann eine Einheit eine Größenordnung enthalten. Die folgenden Buchstaben werden den Einheitszeichen vorangestellt und stehen jeweils für eine feste Zahlenkonstante, mit der die Einheit multipliziert wird:

Abkürzung	gesprochen	Faktor	Abkürzung	gesprochen	Faktor
a	atto	10^{-18}	E	exa	10^{18}
f	femto	10^{-15}	P	peta	10^{15}
p	pico	10^{-12}	T	tera	10^{12}
n	nano	10^{-9}	G	giga	10^{9}
μ	micro	10^{-6}	M	mega	10^{6}
m	milli	10^{-3}	k	kilo	10^{3}
c	centi	10^{-2}	h	hekto	10^{2}
d	dezi	10^{-1}	da	deka	10^{1}
	verkleinernd			vergrößernd	

vgl. `http://de.wikipedia.org/wiki/Vorsätze_für_Maßeinheiten`

Für Zeiten gelten dieselben verkleinernden Faktoren (z.B. ms, μs, ns etc.). Aus historischen Gründen besitzen die größeren Einheiten hier jedoch eigene Namen, die sowohl einen Faktor als auch die Basiseinheit *Sekunde* beinhalten:

Abkürzung	von lat.	gesprochen	Faktor	
min	*minutus*	Minute	60	= 60 s
h	*hora*	Stunde	3.600	= 60 min
d	*dies*	Tag	86.400	= 24 h
a	*annum*	Jahr	31.580.928	= 365.25 d

Die Umrechnung einer Einheit in eine andere Größenordnung erfolgt durch ihren Faktor, der in die Zahlenrechnung eingeht.

Beispiel 2.4: Wollen wir Geschwindigkeiten von km/h in m/s umrechnen, so beträgt der resultierende Faktor

$$\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = \frac{1}{3.6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

Die Umrechnung erfolgt durch direktes Einsetzen dieser Beziehung:

$$90\,\mathrm{km}/\mathrm{h} \;=\; 90\cdot\frac{1}{3.6}\,\mathrm{m}/\mathrm{s} \;=\; 25\,\mathrm{m}/\mathrm{s}.$$

Beispiel 2.5: Beim Verrechnen einer Größe müssen ihre Zusatzfaktoren immer mit verrechnet werden. Eine Fläche von $1\,\mathrm{m}^2$ besitzt deshalb

$$1\,\mathrm{m}^2 \;=\; (100\,\mathrm{cm})^2 \;=\; 100^2\,\mathrm{cm}^2 \;=\; 10000\,\mathrm{cm}^2$$

und ein Volumen von $1\,\mathrm{m}^3$ enthält

$$1\,\mathrm{m}^3 \;=\; (10\,\mathrm{dm})^3 \;=\; 10^3\,\mathrm{dm}^3 \;=\; 1000\,\mathrm{dm}^3 \;=\; 1000\,\ell \qquad \text{(Liter)}.$$

Formen wir eine Formel um, in der Größen stehen, so müssen die obigen Regeln in jedem Zwischenschritt eingehalten werden. Dies können wir zu einer Probe verwenden, ob die Umformung korrekt sein kann (nicht unbedingt muss). Oder ob wir eine Formel evtl. falsch behalten haben.

Beispiel 2.6: Die Beschleunigung einer Bewegung wird mit dem Buchstaben a (von engl. *acceleration*) bezeichnet und besitzt die Einheit m/s^2. Ein Körper, der aus der Ruhe mit konstanter Beschleunigung bewegt wird, legt in der Zeitspanne T den Weg $s = \frac{1}{2}\,a\,T^2$ zurück. Falls wir in dieser (häufig gebrauchten) Formel versehentlich das Quadrat ^{2} vergessen sollten, können wir diesen Fehler durch einen schnellen Einheitenvergleich auf beiden Seiten entdecken: die Strecke links hat die Einheit m, das falsche Produkt aT rechts aber $\mathrm{m}/\mathrm{s}^2\cdot\mathrm{s} = \mathrm{m}/\mathrm{s}$.

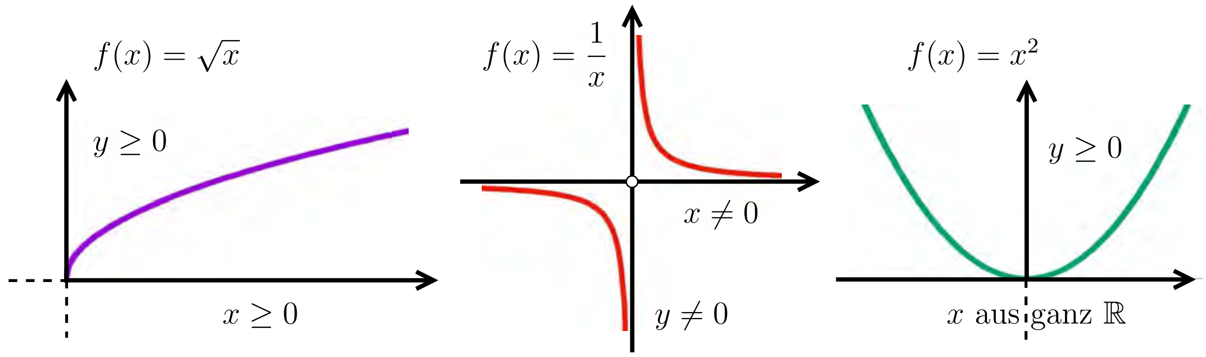
2.7 Reelle Funktionen

An dieser Stelle folgt nur eine knappe Einführung der wesentlichen allgemeinen Begriffe um reelle Funktionen. Sie werden in den einzelnen Kapiteln im Zusammenhang mit den dortigen speziellen Funktionenfamilien wieder aufgegriffen.

Eine **reelle Funktion** f beschreibt eine bestimmte Zuordnung von einer reellen Eingabezahl x zu jeweils einer reellen Ausgabezahl $f(x)$. Die allgemeine Schreibweise $f(x)$ kann aufgefasst werden als Platzhalter für eine ganze Formel, z.B. $f(x) = 2x - 1$. Für gegebenes x wird der Ausgabewert durch Einsetzen und Ausrechnen bestimmt.

Damit die Funktion f immer ausgewertet werden kann, müssen wir stets angeben, welche Zahlen x in sie eingesetzt werden dürfen. Alle diese Zahlen zusammen bilden den maximalen **Definitionsbereich** von f. Z.B. enthält der max. Definitionsbereich von $f(x) = \sqrt{x}$ alle Zahlen $x \geq 0$ und der von $f(x) = {}^1\!/_x$ alle $x \neq 0$. Ein einzelner fehlender Wert, wie hier, heißt eine **Definitionslücke**.

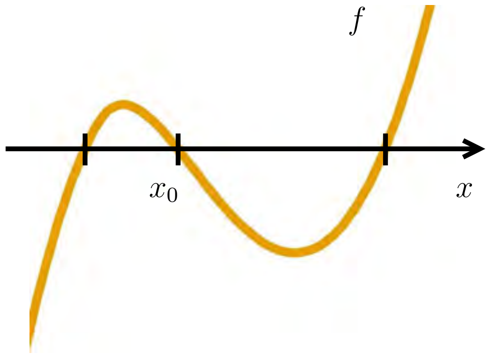
Reelle Funktionen können als **Graph** gezeichnet werden. Er entsteht, indem wir in einem x-y-Koordinatensystem alle zulässigen Werte für x durchlaufen und die Punkte $(x, f(x))$ markieren. An Hand des Graphen wird visuell deutlich, welches Verhalten die Funktion f besitzt. Alle y-Werte, die durch Einsetzen von x-Werten auftreten können, bilden zusammen den **Bildbereich** der Funktion. Bei $f(x) = x^2$ etwa sind das alle $y \geq 0$. (Mehr zu x^2 und $\sqrt{x}$ im Abschnitt 4.2.)



Davon ist zu unterscheiden der **Wertebereich** von f. Er gibt lediglich grob an, welche Art von Zahlen als Ergebnis zu erwarten ist, etwa ganze, rationale oder reelle. Er muss ggf. nicht unbedingt y-Werte nennen, die nicht als Ergebnis herauskommen können.

Wenn der Graph von f die x-Achse schneidet, heißen die betreffenden x-Werte die **Nullstellen** von f. Nullstellen berechnen wir durch Auflösen der Gleichung $f(x_0) = 0$ nach x_0. Das erfordert je nachdem, wie uns die Funktion f gegeben ist, verschiedene Techniken.

Nullstellen sind deshalb interessant, weil wir damit x-Werte für beliebige vorgegebene Funktionswerte y_0 berechnen können. Da $f(x_0) = y_0$ gleichbedeutend ist mit $f(x_0) - y_0 = 0$, ergibt sich das gesuchte x_0 als Nullstelle der neuen Funktion $g(x) := f(x) - y_0$.

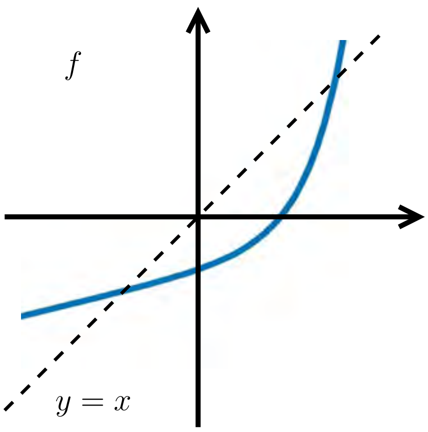


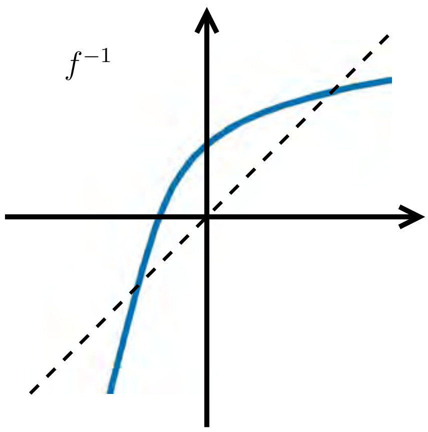
Wenn eine Funktion f jedes y im Wertebereich genau einmal annimmt, so gibt es die **Umkehrfunktion** f^{-1} (lies: „*f invers*“) zu ihr. Sie hebt die Wirkung von f allgemein wieder auf, d.h. das Einsetzen des Funktionswerts $f(x)$ in f^{-1} liefert das ursprüngliche x zurück:

$$f^{-1}(\,f(x)\,) \;=\; x\,.$$

Die Schreibweise f^{-1} mit dem hochgestellten $^{-1}$ bedeutet keinen Exponenten einer Potenz! In diesem Sinne sind auch die Beschriftungen des Taschenrechners zu verstehen: $\sin^{-1}$ ist die (eingeschränkte) Umkehrfunktion des Sinus etc. (Mehr zu Winkelfunktionen im Abschnitt 5.5.)

Umkehrfunktionen dienen dazu, Gleichungen des Typs $f(x_0) = y_0$ nicht als einzelne Nullstellenprobleme behandeln zu müssen. Stattdessen können wir sie allgemein lösen: $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Geometrisch entsteht der Funktionsgraph von f^{-1} durch Spiegelung des Graphen von f an der diagonalen Geraden mit der einfachen Formel $y = x$ (in den Bildern gestrichelt).





Um die Umkehrfunktion von f — wenn sie existiert — rechnerisch zu erhalten, müssen wir die Gleichung $f(x) = y$ nach x auflösen. Die Schwierigkeit dieser Aufgabe kann stark variieren. Für eine lineare Funktion etwa ist es leicht:

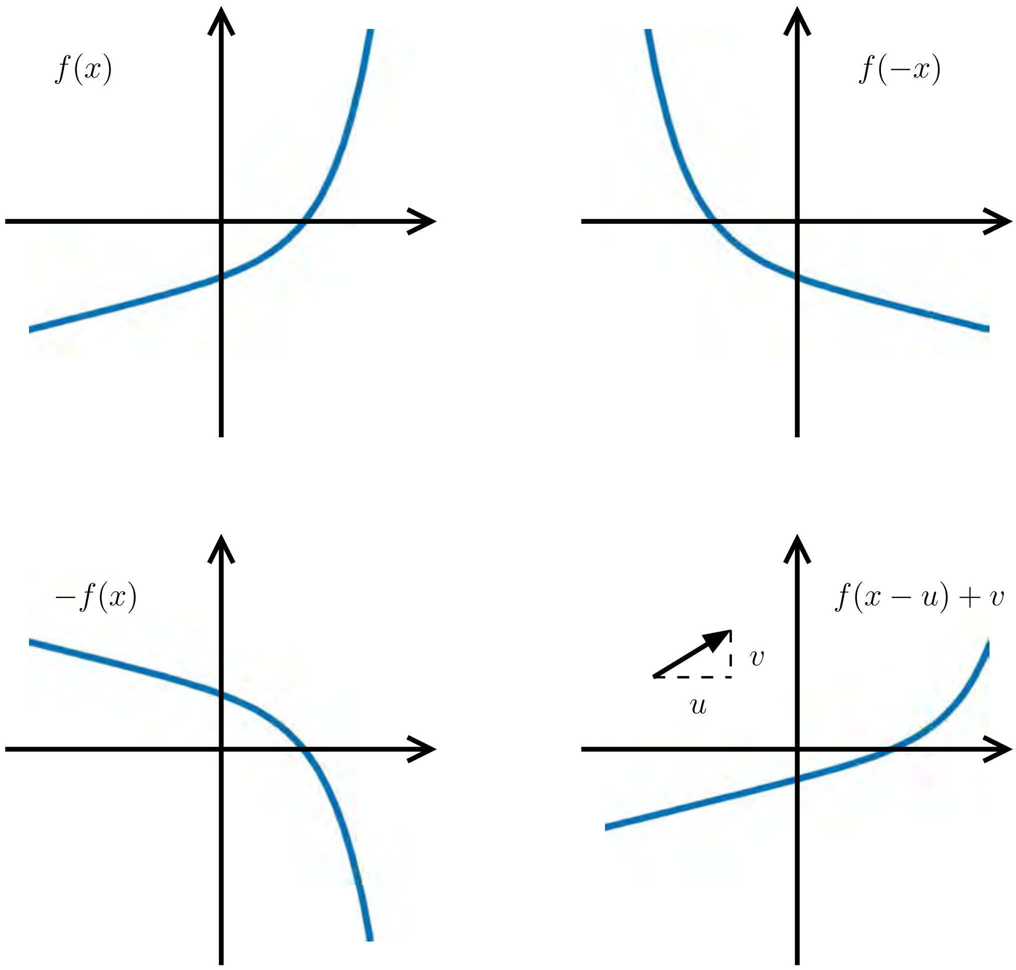
$$\begin{aligned} f(x) &= 2x-1 = y && \mid +1 \\ 2x &= y+1 && \mid \div 2 \\ x &= \tfrac{1}{2}(y+1) \;=:\; f^{-1}(y)\,. \end{aligned}$$

Obwohl f^{-1} existiert kann es aber auch unmöglich sein, eine Formel zu finden. Dies ist z.B. der Fall für die Funktion $f(x) = x + 1.6^x - 12$ (Bild oben links).

Wir wollen möglichst viele Funktionen umkehren können, deren Formeln aus elementaren Funktionen (wie Potenzen, Exponentialfunktionen oder Winkelfunktionen) zusammengesetzt sind. Dazu müssen wir die Umkehrfunktionen dieser „Baustein"-Funktionen kennen. In den Kapiteln werden zu den dort behandelten Funktionen auch deren Umkehrungen betrachtet.

Weiterhin ist es auf einfache Weise möglich, **Funktionsgraphen** im Koordinatensystem zu **verschieben** oder zu **spiegeln**. Solche Techniken ermöglichen es uns, gegebene Funktionen flexibel an evtl. Vorgaben anzupassen. Gegeben sei jeweils die Vorschrift $f(x)$.

An der x-Achse spiegeln:	$-f(x)$
an der y-Achse spiegeln:	$f(-x)$
um u nach rechts verschieben:	$f(x-u)$
um v nach oben verschieben:	$f(x)+v$



$f(x)$
$f(-x)$
$-f(x)$
$f(x-u)+v$
v
u

3 Einfache Gleichungen und Gleichungssysteme

3.1 Auflösung bei Grundrechenarten

Oft ist eine Formel gegeben oder zu erschließen, in der eine unbekannte Zahl x eingesetzt ein bekanntes Ergebnis liefert. Diese Bedingung hat die Gestalt einer **Gleichung** des Typs

$$\mathit{Formel}(x) \;=\; \mathit{Ergebnis}.$$

Wir sollen daraus alle möglichen korrekten Werte für die Zahl x bestimmen.

Beispiel 3.1: Fernfahrer Manfred fährt auf der Autobahn mit konstanter Geschwindigkeit von $80\,{}^{\mathrm{km}}\!/_{\mathrm{h}}$. Wie lange braucht er (ohne Pausen), um einen 680 km entfernten Kunden zu beliefern?
Die Physik weiß, dass zwischen Geschwindigkeit v, Zeitdauer t und Strecke s der Zusammenhang $v \cdot t = s$ gilt. Hier sind $v = 80\,{}^{\mathrm{km}}\!/_{\mathrm{h}}$ und $s = 680\,\mathrm{km}$ gegeben und t gesucht. Durch Einsetzen lautet die Gleichung also:

$$80\,{}^{\mathrm{km}}\!/_{\mathrm{h}} \cdot t \;=\; 680\,\mathrm{km}.$$

Sie ist leicht zu lösen, indem wir beide Seiten durch $80\,{}^{\mathrm{km}}\!/_{\mathrm{h}}$ teilen:

$$t \;=\; 680\,\mathrm{km} \div 80\,{}^{\mathrm{km}}\!/_{\mathrm{h}} \;=\; 8.5\,\mathrm{h}.$$

Antwort: Manfred benötigt ohne Pausen 8.5 h.

Grundsätzlich können wir Gleichungen auflösen, indem wir auf beiden Seiten dieselbe Operation anwenden[1]. Welche Operation sinnvoll ist, entscheiden wir dadurch, ob sie die Unbekannte besser zugänglich macht. Wir teilen im obigen Beispiel deswegen durch $80\,{}^{\mathrm{km}}\!/_{\mathrm{h}}$, damit aus $80\,{}^{\mathrm{km}}\!/_{\mathrm{h}}\cdot t$ ein isoliertes t wird. Entsprechende Entscheidungen brauchen wir, wenn die Unbekannte auf beiden Seiten der Gleichung steht. Dann müssen wir versuchen, ein einziges Auftreten zu erreichen. Bei der Gleichung $3x = x + 3$ subtrahieren wir auf beiden Seiten x, um $2x = 3$ zu erhalten.

Wir müssen aber aufpassen, dass wir nur *zulässige* Operationen anwenden! Wir dürfen ohne jede Einschränkung denselben Wert addieren oder subtrahieren, auch wenn die Unbekannte darin vorkommt (siehe letztes Beispiel).

[1] Das hat nichts mit den Rechenregeln (K) (A) (D) aus 2.3 zu tun. Diese gelten für einzeln stehende Ausdrücke, nicht für Gleichungen.

Bei der Multiplikation und Division müssen wir den Wert Null vermeiden. Die Multiplikation würde sonst die ganze Gleichung zu $0 = 0$ machen, woraus wir keine Unbekannte mehr bestimmen könnten.

Die Division durch Null ist gar nicht definiert. Denn wäre sie es, so müsste gemäß der Regel $x \div x = 1$ gelten: $0 \div 0 = 1$. Dies würde jedoch mit anderen allgemeinen Rechenregeln zu einem unauflösbaren Konflikt führen:

$$2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot \frac{0}{0} = \frac{2 \cdot 0}{0} = \frac{0}{0} = 1 \qquad \textit{Widerspruch!}$$

Darauf müssen wir besonders achten, wenn wir durch einen variablen Ausdruck teilen. Da er nicht Null werden darf, ergeben sich evtl. Einschränkungen für die Variablen.

Beispiel 3.2: Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $x^2 - x = 0$.

$$\begin{aligned} x^2 - x &= 0 && \mid +x && \text{immer erlaubt} \\ x^2 &= x && \mid \div x && \textit{Achtung: } x \neq 0 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Die Lösung $x = 1$ kommt korrekt heraus, aber $x = 0$ ist ebenfalls eine Lösung. Sie wird bei der Division vom Lösungsweg ausgeschlossen. Wir müssen sie deshalb durch Einsetzen extra prüfen: $0^2 - 0 = 0$.
Um Flüchtigkeitsfehler wie diesen zu vermeiden, sollten wir die riskante Division besser ersetzen durch „sicheres“ Ausklammern:

$$x^2 - x \overset{(D)}{=} x\,(x - 1)\,.$$

Die reelle Multiplikation hat die Eigenschaft, dass Null nur dann als Ergebnis herauskommen kann, wenn mindestens ein Fakter gleich Null ist. Damit können wir die Gleichung $x^2 - x = 0$ bequem zerlegen in zwei einfachere Gleichungen:

$$x = 0 \qquad \text{oder} \qquad x - 1 = 0\,.$$

Hieraus lesen wir die beiden Lösungen $x = 0$ bzw. $x = 1$ direkt ab.

Je nach der angewandten Umformungsoperation können auch weitergehende Einschränkungen an ihre Zulässigkeit bestehen. In diesem Kapitel geht es zunächst nur um die Grundrechenarten.

3.2 Prozentrechnung

Das bekannte **Prozent**-Zeichen % steht für den konstanten Faktor $1/100$. So bedeutet „3% von 250" ausgeschrieben:

$$3 \cdot \frac{1}{100} \cdot 250 \;=\; 7.5\,.$$

Die 250 heißt der **Grundwert**, die 3% der **Prozentsatz** und das Ergebnis 7.5 der **Prozentwert**.

Wenn sich als Grundwert ein Kapital k_0 durch Verzinsung mit dem Prozentsatz p% (hier auch *Zinssatz* genannt) vermehrt, so kommt der Prozentwert von $p \cdot 1/100 \cdot k_0$ hinzu:

$$k_1 \;=\; k_0 + p \cdot \frac{1}{100} \cdot k_0 \;=\; \boxed{\left(1 + \frac{p}{100}\right) k_0}\,.$$

Dies ist die bekannte **Zinsformel**. Die Indizes von k meinen die Anzahl Verzinsungen: eine (1) bzw. keine (0).

Beispiel 3.3: Der sog. *Bruttopreis* wird berechnet, indem auf den *Nettopreis* als Grundwert der Prozentsatz der Umsatzsteuer aufgeschlagen wird. Wie hoch ist der Bruttopreis für einen Artikel, der im Einkauf 500 € netto kostet?
Der Steueraufschlag von 19% entspricht rechnerisch einer Verzinsung:

$$\begin{aligned}\text{Bruttopreis} &= \left(1 + \frac{\text{Steuersatz}}{100}\right) \cdot \text{Nettopreis} \\ &= \left(1 + \frac{19}{100}\right) \cdot 500\,€ \;=\; 1.19 \cdot 500\,€ \;=\; 595\,€.\end{aligned}$$

Antwort: Der Artikel kostet brutto 595 €.

Beispiel 3.4: Ein Händler gibt im Schlussverkauf 20% Rabatt auf alle seine Waren. Wieviel kostet jetzt eine Hose, die vorher 80 € gekostet hat?
Der Rabatt von 20% entspricht rechnerisch einer Verzinsung mit negativem Zinssatz:

$$\begin{aligned}\text{Neupreis} &= \left(1 - \frac{\text{Rabattsatz}}{100}\right) \cdot \text{Altpreis} \\ &= \left(1 - \frac{20}{100}\right) \cdot 80\,€ \;=\; 64\,€.\end{aligned}$$

Antwort: Die Hose kostet jetzt nur noch 64 €.

Beispiel 3.5: Ist umgekehrt gefragt, etwa wie viel Prozent 10 von 250 beträgt, so ist damit die Gleichung $\frac{10}{250} = \frac{p}{100}$ gemeint. Wir lösen sie nach p auf und geben das Ergebnis mit dem Prozentzeichen an:

$$p = \frac{10}{250} \cdot 100 = 4\% .$$

Aufgaben zur Prozentrechnung

24 ▷ a) Wieviel ist 15% von 15?
b) 32% von 420?
c) 74% von 8650?

25 ▷ a) Wieviel % sind 55 von 250?
b) 234 von 360?
c) 1225 von 900?

26 ▷ Betrachten Sie nochmals die Beispiele 3.3, 3.4 und 3.5 (ab Seite 28). Angenommen, der Händler gibt Ihnen bei einem Nettopreis von 500 € einen Rabatt von 19%. Wie hoch ist dann der Bruttopreis?

27 ▷ Ein Warenhaus verkauft im Rahmen einer Sonderaktion alle Waren zum Nettopreis, d.h. ohne Aufschlag der Umsatzsteuer in Höhe von 19%. Wieviel Prozent Rabatt entspricht das für die Kunden, also bezogen auf die Bruttopreise?

28 ▷ Ein rechteckiges Grundstück besitzt die Maße $35\,\text{m} \cdot 50\,\text{m}$. Bei der Vermessung wurde irrtümlich $36\,\text{m} \cdot 49\,\text{m}$ festgestellt. Um wieviel Prozent der korrekten Fläche weicht die gemessene davon ab?

29 ▷ In einer Produktion bestanden 5% aller neu hergestellten Computer die Funktionsprüfung nicht. Die übrigen Geräte wurden verkauft, jedoch kamen davon 8% nach Kundenreklamationen zurück. Wieviele von 1000 neuen Computern blieben unbeanstandet?

30 ▷ In einem Geschäft sind die Waren mit dem Brutto-Preis ausgepreist, der 19% Umsatzsteuer enthält. Bei Abnahme von größeren Mengen wird ein Mengenrabatt von 5% auf den Netto-Preis gewährt. Bei Barzahlung erhält der Kunde zusätzlich auf den neuen Bruttopreis 2% Skonto. Welcher Faktor muss im Taschenrechner der Verkäufer gespeichert werden, damit bei beiden Ermäßigungen gleichzeitig der neue Endpreis mit einer einfachen Multiplikation angegeben werden kann? Muss dieser Faktor geändert werden, falls sich der Umsatzsteuersatz ändern sollte?

31 ▹ 45% eines (fiktiven) Schulabgängerjahres haben das Abitur und 9% das Fachabitur. Von diesen beiden Gruppen zusammen beginnt ein Anteil von 55% ein Studium direkt nach der Schule und 15% ein oder mehr Jahre später. Wieviel Prozent dieses gesamten Schulabgängerjahres nehmen insgesamt ein Studium auf?

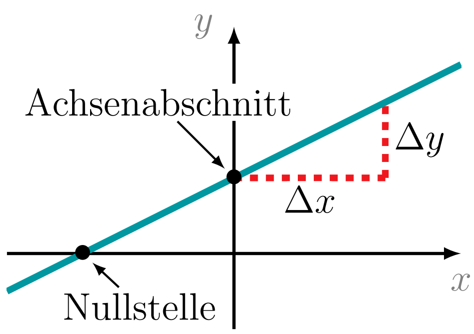
32 ▹ Essig enthält 5% Säure und Essigessenz 25% Säure. Wieviel Prozent Säure enthält eine Mischung aus 400 ml Essig und 100 ml Essigessenz?

3.3 Geraden und lineare Gleichungen

Der einfachste Typ reeller Funktionen heißt **lineare Funktion**. Ihr Graph ist eine **Gerade**. Sie wird in einem x-y-Koordinatensystem beschrieben durch die Gleichung

$$\boxed{y \;=\; mx + n}\,.$$

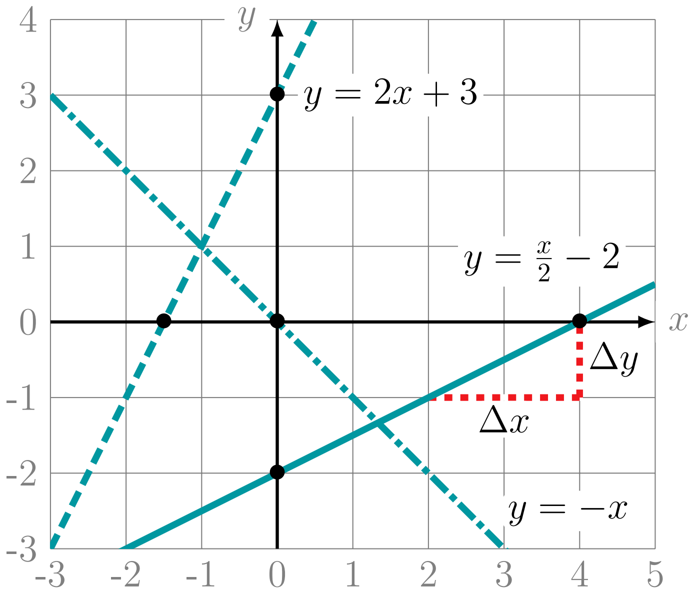
Dabei sind m und n beliebige konstante reelle Zahlen. Der maximale Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$. Setzen wir $x = 0$ ein, erhalten wir $y = n$ als den **Achsenabschnitt** der Geraden. D.h. der Schnittpunkt ihres Graphen mit der y-Achse ist $(0, n)$.



Der Wert $m = {}^{\Delta y}/_{\Delta x}$ gibt die **Steigung** der Geraden an. Das ist anschaulich die Steilheit des Graphen gegenüber der x-Achse. Die x-Achse selbst ist die spezielle Gerade mit Steigung $m = 0$ und Achsenabschnitt $n = 0$. Eine Gerade senkrecht zur x-Achse kommt allerdings nicht vor. Wir können deshalb die y-Achse selbst nicht in Form dieser Gleichung angeben.

Beispiel 3.6: Im Bild sind drei Geraden eingezeichnet. Die Nullstellen und die jeweiligen y-Achsenabschnitte wurden markiert. Zum Beispiel ist $x = 4$ die Nullstelle der Geraden $y = \frac{x}{2} - 2$. Das skizzierte Dreieck liefert die bekannte Steigung

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-(-1)}{4-2} = \frac{1}{2}.$$



Eine Gerade mit Steigung $m \neq 0$ schneidet die x-Achse in einer **Nullstelle**. Wir finden sie, indem wir $y = 0$ einsetzen und nach x auflösen.

Beispiel 3.7: Wir berechnen die Nullstellen x_0 von zwei der Geraden im obigen Bild.

$$\begin{aligned} y = 2x_0 + 3 &\overset{!}{=} 0 \quad &| -3 \\ 2x_0 &= -3 \quad &| \div 2 \\ x_0 &= -3/2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y = \tfrac{1}{2}x_0 - 2 &\overset{!}{=} 0 \quad &| +2 \\ \tfrac{1}{2}x_0 &= 2 \quad &| \cdot 2 \\ x_0 &= 4\,. \end{aligned}$$

Finden Sie die allgemeine Formel, die die Nullstelle x_0 der Geraden direkt in m und n ausdrückt?

Zwei Geraden können entweder genau einen Schnittpunkt haben, parallel sein oder identisch. Wir ersehen den jeweiligen Fall direkt aus den beiden Gleichungen:

- Sind die beiden Steigungen verschieden, gibt es einen Schnittpunkt.
- Sind sie gleich, entscheiden die beiden Achsenabschnitte: Sind auch sie gleich, sind die Geraden identisch, sonst parallel.

Es sei schon hier auf einen häufig anzutreffenden Fehler hingewiesen: Die wenigsten Funktionen f besitzen die Eigenschaft $f(x+x') = f(x)+f(x')$. Dies wird schon bei Geraden deutlich. Wenn diese Eigenschaft für eine Gerade $f(x) = mx + n$ gilt, so nur unter einer wichtigen Einschränkung, die direkt daraus folgt:

$$\begin{aligned}
f(x+x') &= f(x)+f(x') && \text{einsetzen}\\
m(x+x')+n &= (mx+n)+(mx'+n) && \text{(D), (A)}\\
mx+mx'+n &= mx+n+mx'+n && |-mx-mx'-n\\
0 &= n\,.
\end{aligned}$$

Nur spezielle Geraden der Form $y = mx$ mit Achsenabschnitt $n = 0$ besitzen diese Eigenschaft. Machen Sie sich das grafisch klar.

Aufgaben zu Gleichungen mit einer Unbekannten

Es seien $g_1(x) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ und $h_1(x) = -2x + 12$ zwei Geraden.

33 ▷ Bestimmen Sie deren Nullstellen x_g, x_h sowie den gemeinsamen Schnittpunkt S_1. Zeichen Sie die Geraden zur Probe.

34 ▷ a) Stellen Sie die Formel der Geraden g_2 auf, die durch x_h verläuft und parallel ist zu g_1.

b) Stellen Sie die Formel der Geraden h_2 auf, die durch x_g verläuft und parallel ist zu h_1.

c) Welcher Punkt S_2 ergänzt die drei Punkte $(x_h, 0)$ S_1 $(x_g, 0)$ zum Parallelogramm?

Geben Sie den Gültigkeitsbereich der Gleichung an und lösen Sie sie dann nach x auf

35 ▷ $\dfrac{35x+5}{4} = 8\,\dfrac{8x-2}{7}$

36 ▷ $\dfrac{20x+2}{6x+6} - 1 = \dfrac{6x-4}{2x+2}$

37 ▷ $\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{\frac{2}{3}+\frac{1}{x}}$

38 ▷ $\dfrac{ax+1}{ax-1} = \dfrac{a+b}{a-b}$

39 ▷ Worin besteht jeweils der Unterschied zwischen den Gleichungen?

a) $x-5 = 2+x$ und $x(x-5) = (2+x)x$

b) $x+4 = 10-x$ und $(x-1)(x+4) = (10-x)(x-1)$

c) $2x+6 = -x$ und $\dfrac{2x+6}{x+2} = -\dfrac{x}{x+2}$

40 ▷ Die Auflösung der nebenstehenden Gleichung enthält einen Fehler. Wo tritt er auf und worin besteht er?

$$\frac{x+9}{x-7} - 3 = \frac{2x-30}{23-x}$$
$$\frac{-2x+30}{x-7} = \frac{2x-30}{23-x}$$
$$\frac{2x-30}{7-x} = \frac{2x-30}{23-x}$$
$$\frac{1}{7-x} = \frac{1}{23-x}$$
$$7-x = 23-x$$
$$7 = 23$$

Lösen Sie die folgenden Formeln jeweils nach den in '[...]' angegebenen Variablen auf (ohne Gültigkeitsbetrachtungen).

41 ▷ $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ $\quad [R,\, R_1]$

42 ▷ $I = \frac{n\,U}{n\,R_i + R_a}$ $\quad [n,\, R_a]$

43 ▷ $u = \frac{v_1(m_1 - m_2) + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ $\quad [m_1, v_2]$

44 ▷ $ax + by + cz = 0$ $\quad [x,\, y,\, z]$

45 ▷ Ein Onkel ist 40 Jahre alt, sein Neffe ist 15 Jahre alt. In wie vielen Jahren ist der Onkel doppelt so alt wie der Neffe?

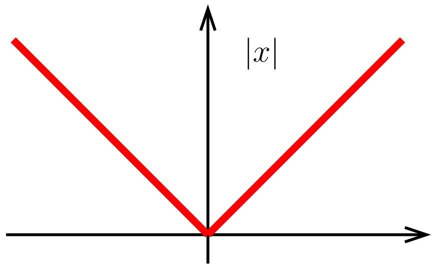
46 ▷ Durch den letzten Regen wurde ein Keller mit Wasser überflutet. Zum Leerpumpen werden gleichzeitig drei Pumpen eingesetzt. Wie lange dauert das Leerpumpen, wenn die erste Pumpe dazu allein 6 Stunden, die zweite 4 Stunden und die dritte 2 Stunden brauchen würde?

47 ▷ Kleiner und großer Zeiger einer Analoguhr stehen um 12 Uhr exakt übereinander. Zu welcher Zeit (auf Sekunden genau) ist das danach wieder so?

3.4 Rechnen mit Beträgen

Häufig spielt die absolute Größe einer Zahl eine Rolle, unabhängig von ihrem Vorzeichen. Das Vorzeichen lässt sich ignorieren mit Hilfe der **Betragsfunktion**:

$$
|\,x\,| \;:=\; \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0\,. \end{cases}
$$



Beispiel 3.8: Der **Abstand** $\operatorname{dist}(x, y)$ zwischen zwei Zahlen x, y ist ein Maß für ihre Entfernung voneinander auf der reellen Achse. Er soll die folgenden Eigenschaften besitzen:

$$
\operatorname{dist}(x, y) \;=\; \operatorname{dist}(y, x) \;\geq\; 0 \qquad \text{für alle } x, y\,.
$$

Wir erhalten diese, indem wir den Abstand definieren mit Hilfe der Betragsfunktion: $\operatorname{dist}(x, y) \;:=\; |\,x - y\,|\,.$
Entlang des Berliner Kurfürstendamms fahren mehrere Buslinien. Sie halten (in etwa) bei den Hausnummern $n_i = 17,\ 26,\ 45,\ 62,\ 70,\ 90,\ 102,\ 114,\ 123,\ 130,\ 138,\ 152,\ 167,\ 181,\ 197,\ 217,\ 225$.

© Berliner Verkehrsbetriebe

Wenn wir zum Haus mit der Nummer h gelangen wollen, fahren wir mit einem Bus zu derjenigen Haltestelle i, deren Hausnummer n_i am nächsten zu h liegt. Rechnerisch bestimmen wir i so, dass der Abstand $\operatorname{dist}(n_i, h) = |\,n_i - h\,|$ minimal ist unter allen Möglichkeiten.

Die wichtigsten Eigenschaften des Betrags lauten für alle reellen x, y:

$\|\,-x\,\| = \|\,x\,\|$		*ignoriert Vorzeichen*
$\|\,x \cdot y\,\| = \|\,x\,\| \cdot \|\,y\,\|$		*vertauschbar mit Multiplikation*
$\|\,x \div y\,\| = \|\,x\,\| \div \|\,y\,\|$		*vertauschbar mit Division.*

Die dritte Regel entstammt aus der zweiten, da wir $x \div y = x \cdot {}^1\!/_y$ schreiben können. Mit der Addition ist der Betrag aber nicht vertauschbar, da zum Beispiel gilt:

$$
|\,2 + (-1)\,| \;=\; 1 \;\neq\; 3 \;=\; |\,2\,| + |\,-1\,|\,.
$$

Anmerkung: Beträge werden auch zusammen mit der Addition gebraucht. Dies führt in die Rechnung mit Ungleichungen, die nicht Gegenstand dieses Heftes ist.

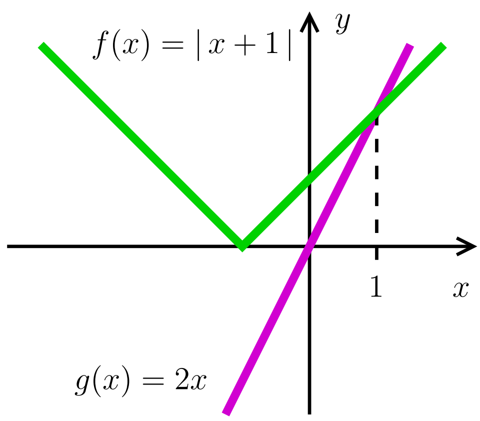
Das Auflösen einer Gleichung, in der ein Betrag vorkommt, führt im Allgemeinen zu einer Fallunterscheidung.

Beispiel 3.9: In welchen Punkten schneiden sich die Graphen der Funktionen $f(x) = |x+1|$ und $g(x) = 2x$?

Der Ansatz $|x+1| = 2x$ ergibt zunächst eine Gleichung, in der wir die Fallunterscheidung des Betrags vornehmen müssen:

$$\begin{cases} x+1 = 2x & \text{für } x+1 \geq 0 \\ -(x+1) = 2x & \text{für } x+1 < 0\,. \end{cases}$$

Diese beiden Fälle können wir anschließend getrennt behandeln:



1. Fall:

$$\begin{aligned} x+1 &= 2x && \mid -x \\ 1 &= x \end{aligned}$$

2. Fall:

$$\begin{aligned} -x-1 &= 2x && \mid +x \\ -1 &= 3x && \mid \div 3 \\ -\tfrac{1}{3} &= x\,. \end{aligned}$$

Diese beiden x-Werte sind nur dann Lösungen der Ausgangsgleichung, wenn sie die Bedingungen ihrer Fallunterscheidung erfüllen. Wir prüfen dies nach:

$$\begin{array}{llllllll} \text{1. Fall:} & x+1 = & 1+1 & = 2 & \geq & 0 & \rightarrow & \text{OK} \\ \text{2. Fall:} & x+1 = & -\frac{1}{3}+1 & = \frac{2}{3} & \not< & 0 & \rightarrow & \textit{falsch.} \end{array}$$

In der Skizze oben ist zu sehen, dass dieses rechnerische Ergebnis stimmt. Alternativ können wir eine Probe mit der Ausgangsgleichung machen:

1. Fall:

$$\begin{aligned} |x+1| &= 2x \\ |1+1| &= 2 \cdot 1 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

OK

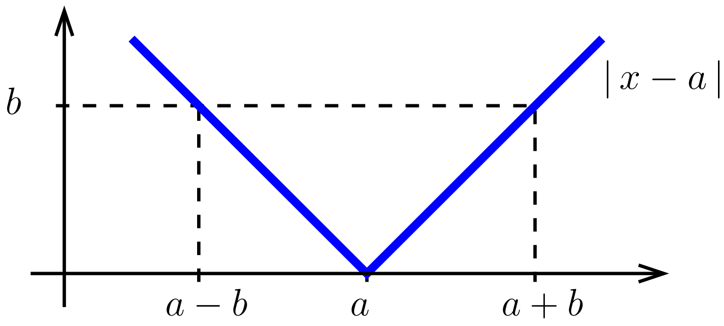
2. Fall:

$$\begin{aligned} |x+1| &= 2x \\ |-\tfrac{1}{3}+1| &= 2 \cdot (-\tfrac{1}{3}) \\ \tfrac{2}{3} &= -\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

falsch.

Die hier gezeigte formale Arbeitsweise eignet sich dazu, auch ohne Anschauung zu einem korrekten Ergebnis zu kommen.

Eine Gleichung, in der ein Betrag vorkommt, kann unterschiedlich viele Lösungen besitzen:



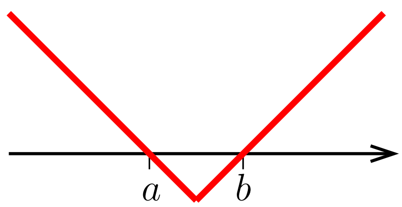
$$|x-a| = b \quad \text{wird zu:} \quad \begin{cases} \text{keine Lösung} & \text{für } b < 0 \\ x = a & \text{für } b = 0 \\ x = a-b \ \text{ oder } \ x = a+b & \text{für } b > 0\,. \end{cases}$$

Null spielt beim Betrag also eine Sonderrolle: nur für den Wert $b = 0$ existiert eine eindeutige Auflösung.

Aufgaben zum Rechnen mit Beträgen

48 ▷ Zeichnen Sie folgende Betragsfunktionen. Finden Sie rechnerisch alle ihre Nullstellen:
a) $|x+1|-5$ b) $|-x+1|-5$ c) $|-x-1|-5$ d) $|-x-1|+5$

49 ▷ Stellen Sie eine Formel auf für die rechts gezeigte verschobene Betragsfunktion mit $a = 1$ und $b = 5$.



50 ▷ Wie sieht diese Formel für allgemeine Parameter $a < b$ aus?

51 ▷ Zeichnen Sie die Betragsfunktion $f(x) = |x-1|$. Finden Sie alle Schnittpunkte folgender Geraden mit f:
a) $y = \frac{1}{2}(x+3)$ b) $y = -\frac{3}{2}x - 1$ c) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ d) $y = \frac{1}{4}x - 1$

3.5 Lineare Gleichungssysteme

In vielen Anwendungen spielen mehrere Unbekannte eine Rolle. Diese sind indirekt durch mehrere Gleichungen bestimmt, die gleichzeitig gelten. Besonders einfach sind **lineare Gleichungen**, in denen jede Variable höchstens mit einem konstanten Faktor multipliziert wird. Die beteiligten Gleichungen bilden ein sog. **lineares Gleichungssystem**.

Beispiel 3.10: Im Jahr 2014 kostete die BahnCard25 einmalig 62 € und reduzierte den regulären Fahrpreis auf drei Viertel. Im selben Jahr kostete die BahnCard50 einmalig 255 € mit Reduktion auf die Hälfte. Ab welcher Geldausgabe war die BahnCard50 preiswerter?
Der Graph der Kostenfunktion einer Karte ist eine Gerade. Die Jahresgebühr ist der Achsenabschnitt und der Reduktionsfaktor die Steigung. Durch Aufstellen der beiden Funktionsgleichungen erhalten wir direkt ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{cases} y &= 62\,€ + \frac{3}{4}x \qquad \textit{BahnCard25} \\ y &= 255\,€ + \frac{1}{2}x \qquad \textit{BahnCard50.} \end{cases}$$

In diesen beiden Gleichungen bedeutet x den unreduzierten Preis und y den mit der jeweiligen Karte reduzierten Preis.

Es gibt für die Auflösung auf Papier mehrere mögliche Wege. Die beiden gebräuchlichsten sind folgende:

- **Einsetzen**. Wir setzen das y der ersten Gleichung für das y der zweiten Gleichung ein. Dadurch wird y eliminiert und wir erhalten eine Gleichung mit nur noch der anderen Variablen x:

$$\begin{aligned} 62\,€ + \tfrac{3}{4}x &= 255\,€ + \tfrac{1}{2}x \qquad && \mid -\tfrac{1}{2}x - 62\,€ \\ \tfrac{1}{4}x &= 193\,€ && \mid \cdot 4 \\ x &= 772\,€. \end{aligned}$$

  Dieses x gibt zunächst den unreduzierten Preis an. Die tatsächliche Geldausgabe im Schnittpunkt liefert uns das Einsetzen in eine der beiden Gleichungen:

$$y = 255\,€ + \tfrac{1}{2} \cdot 772\,€ = 641\,€.$$

  Wir können durch Einsetzen in die andere Gleichung eine Probe machen:

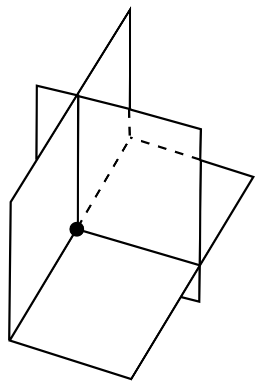
$$y = 62\,€ + \tfrac{3}{4} \cdot 772\,€ = 641\,€.$$

- **Elimination**. Wir stellen (ggf. durch Multiplikation) in beiden Gleichungen dasselbe Vielfache derselben Variablen her. Dann subtrahieren wir die Gleichungen voneinander und diese Variable verschwindet. Auf diese Weise können wir im Beispiel das y direkt berechnen:

$$\begin{array}{rrcll}
\text{I} & y & = & 62\,€ + \frac{3}{4}x & \mid \cdot 4 \\
\text{II} & y & = & 255\,€ + \frac{1}{2}x & \mid \cdot 6 \\
\hline
4\,\text{I} & 4\,y & = & 248\,€ + 3\,x & \\
6\,\text{II} & 6\,y & = & 1530\,€ + 3\,x & 6\,\text{II} - 4\,\text{I} \\
\hline
 & 2\,y & = & 1282\,€ & \mid \div 2 \\
 & y & = & 641\,€. &
\end{array}$$

Beide Verfahren brauchen etwas Übung. Zum *Einsetzen* muss eine Gleichung nach einer Variable aufgelöst werden. Zur *Elimination* braucht es dasselbe Vielfache derselben Variablen.

Lineare Gleichungen mit zwei Variablen lassen sich im x-y-Koordinatensystem als Geraden darstellen, siehe Beispiel 3.6. Ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen fragt nach deren Schnittpunkt(en).



Treten drei Variablen auf in der Form $ax+by+cz = d$, so stellen wir uns als ihre Bilder flache Ebenen in unserem Erlebnisraum vor. Zwei Ebenen können einander nicht in einem einzigen Punkt schneiden. Deshalb brauchen wir immer mindestens drei solche Gleichungen, wenn wir eine eindeutige Lösung haben wollen.

Recherisch können wir bei drei oder mehr linearen Gleichungen immer wieder zwei wie oben ineinander einsetzen oder eine Variable eliminieren. *Anmerkung:* Es gibt ein systematisches Verfahren dafür, das für den Brückenkurs noch zu fortgeschritten ist.

Aufgaben zu linearen Gleichungssystemen

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme und interpretieren Sie 52 und 53 auch graphisch.

52 ▷ $\left\{\begin{array}{rcr} 2x + y & = & 13 \\ 3x - 2y & = & 9 \end{array}\right.$

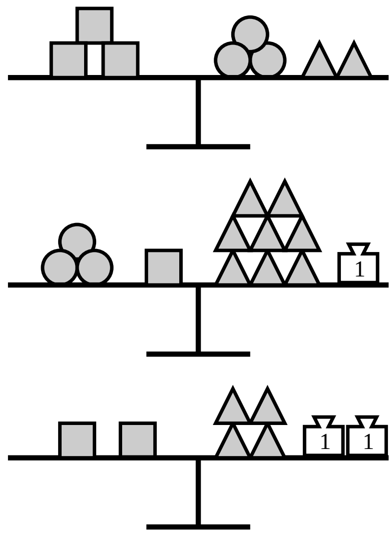
53 ▷ $\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{6-x}{5} & = & \dfrac{3y-2}{7} \\[2ex] \dfrac{2x+y}{5} & = & \dfrac{x+2y}{7} \end{array}\right.$

54 ▷ $\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & - & (3y+1) & = & 2 \\ 4(2x+1) & + & 9(3y-1) & = & 108 \end{array}\right.$

55 ▷ $\left\{\begin{array}{rcl} 5(x+y) & = & 3(-x+y) - 2 \\ -(x-y) & = & 3(2x+y) \end{array}\right.$

56 ▷ $\dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{-x+y}{-x-y} = 1$

57 ▷ Drei Arten von Gewichten werden mit einer Balkenwaage gegeneinander gewogen: Kugeln, Würfel und Pyramiden. Wie viel wiegen diese Körper jeweils in kg? Eine Figur mit Beschriftung „1“ bedeutet ein genormtes Gewicht von 1 kg.



58 ▷ Auf einer Baustelle werden die Materialien Zement und Sand benötigt. Zement wird in 50 kg-Säcken geliefert, Sand in 40 kg-Säcken. Ein LKW mit 3,5 t Höchstladegewicht wird voll beladen, um die Baustelle mit doppelt so vielen Säcken Zement wie Sand zu beliefern. Wieviele kg Zement bzw. Sand sind das?

59 ▷ Vor zwei Jahren war ein Vater dreimal so alt wie sein Sohn. In 15 Jahren wird er nur noch doppelt so alt sein. Wie alt sind zur Zeit Vater und Sohn?

60 ▷ Zwei Freunde wohnen 120 km voneinander entfernt. Sie vereinbaren ein Treffen mit Fahrrädern. Der eine Freund fährt in A um 6.00 Uhr los und schafft eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 20 $^{\text{km}}/_{\text{h}}$. Der andere Freund fährt in B um 6.30 Uhr los und erreicht mit leichtem Rückenwind eine durchschnittliche Geschwindigkeit von 22 $^{\text{km}}/_{\text{h}}$. Wann und in welcher Entfernung zu A bzw. B treffen sich die beiden Freunde?

61 ▷ Die Temperatur y in Grad Fahrenheit °F kann als lineare Funktion $y = ax + b$ der Temperatur x in Grad Celsius °C dargestellt werden. Auf Meereshöhe gefriert Wasser bei 32°F und siedet bei 212°F.

a) Geben Sie y als Funktion von x an.
b) Welche Körpertemperatur in Grad Fahrenheit besitzt ein gesunder Mensch (37° C)?
c) Bei welcher Temperatur haben beide Skalen denselben Wert?

62 ▷ Zwei Brüder (A und B) fahren täglich von zu Hause mit dem Fahrrad zur Arbeit. A fährt mit 18 $^{\text{km}}/_{\text{h}}$ und B mit 15 $^{\text{km}}/_{\text{h}}$. Sie erreichen gleichzeitig dieselbe Arbeitsstelle. Wie viele Minuten braucht A für die Fahrt, wenn B 10 Minuten früher losfährt? Wie weit ist die Arbeitsstelle entfernt?

63 ▷ Der Reservekanister eines Motorboots soll an einer Tankstelle ohne

Mischsäule gefüllt werden. Der Tank fasst 13 l Treibstoff, das Mischungsverhältnis von Öl zu Benzin soll 1:25 betragen. Wieviel Liter Öl und wieviel Liter Benzin sind zu tanken, wenn der Kanister voll werden soll?

64 ▷ Ein Übergewichtiger sitzt am Frühstückstisch. Seine sich selbst auferlegte „Ei-Milch-Müsli“ Diät gestattet ihn maximal 2100 kJ pro Mahlzeit. Nachdem er sich bereits ein Ei (600 kJ) genehmigt hat, überlegt er, wie sich die verbleibenden kJ auf Milch (150 kJ je 100 g) und Müsli (1500 kJ je 100 g) verteilen lassen.

a) Was wird er als erlaubte „Milch-Müsli-Relation“ bestimmen?
b) Mit wie viel Milch dürfen 50 g Müsli angesetzt werden?

4 Potenzen, Wurzeln, Exponentiale

4.1 Definition und Regeln der Potenzen

Die bekannte Schreibweise x^n für **Potenzen** ist eine Abkürzung für die fortgesetzte Multiplikation der reellen Zahl x mit sich selbst zu einem Produkt:

$$\boxed{x^n \;:=\; \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}}} \qquad \text{für natürliche Zahlen } n.$$

Beispiel 4.1: $3^4 \;=\; 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \;=\; 81.$

x heißt die **Basis** der Potenz und n ihr **Exponent**. Aus dieser Definition folgen die bekannten **Potenzgesetze**:

$$\begin{array}{|rcll|}
\hline
x^m \cdot x^n & = & x^{m+n} & \textit{Produkt mit gleichen Basen} \\
x^n \cdot y^n & = & (xy)^n & \textit{Produkt mit gleichen Exponenten} \\
\dfrac{x^n}{y^n} & = & \left(\dfrac{x}{y}\right)^n & \textit{Quotient mit gleichen Exponenten, } y \neq 0 \\
(x^m)^n & = & x^{m \cdot n} & \textit{Potenz der Potenz} \\
0^n & = & 0 & \textit{für alle } n \neq 0 \\
1^n & = & 1 & \textit{für alle } n\ . \\
\hline
\end{array}$$

Diese Rechenregeln sind leicht zu merken, wenn wir ihre Entstehung betrachten:

$$\begin{aligned}
x^m \cdot x^n &= \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{m \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{m+n \text{ Faktoren}} = x^{m+n} \\
x^n \cdot y^n &= \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{y \cdot \ldots \cdot y}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{(xy) \cdot \ldots \cdot (xy)}_{n \text{ Produkte}} = (xy)^n\ .
\end{aligned}$$

Wie ergeben sich die *Quotient*- und die *Potenz der Potenz*-Regel?

Wir können allgemein mit ganzzahligen (also auch negativen) Exponenten n rechnen, wenn wir drei weitere Regeln beachten:

$$\begin{array}{rcll} x^{-n} & = & \dfrac{1}{x^n} & \textit{Vorzeichenwechsel im Exponenten, } x \neq 0 \\ \dfrac{x^m}{x^n} & = & x^{m-n} & \textit{Quotient mit gleichen Basen, } x \neq 0 \\ x^0 & = & 1 & \textit{für alle } x \neq 0\,. \end{array}$$

Der Ausdruck 0^0 stellt einen Konfliktfall dar zwischen den Regeln $0^n = 0$ und $x^0 = 1$ und ist deshalb nicht ohne Weiteres definiert. Es muss immer nach Kontext entschieden und angegeben werden, welche der beiden Regeln gelten soll.

Beispiel 4.2:

- $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$
- $\dfrac{2^3}{2^5} = 2^{3-5} = 2^{-2} = \dfrac{1}{2^2}$
- $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-1} = \dfrac{1}{2/5} = \dfrac{5}{2}$
- $2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3$
- $\dfrac{2^3}{5^3} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^3 = 0.4^3$
- $(2^3)^5 = 2^{3 \cdot 5} = 2^{15}$

Beispiel 4.3: Wir vereinfachen den Ausdruck $(xy)^3(\frac{x^2}{y})^2$ so weit wie möglich:

$$(xy)^3\left(\frac{x^2}{y}\right)^2 = x^3\,y^3\,\frac{(x^2)^2}{y^2} = x^3\,y^3\,\frac{x^4}{y^2} = x^3\,x^4\,\frac{y^3}{y^2} = x^7\,y\,.$$

Die bekannte Regel **Punkt vor Strich** (siehe 2.3) besitzt eine Erweiterung für Potenzen:

Potenz vor *Punkt* vor *Strich.*

Beispiel 4.4: Achten Sie auf die Reihenfolge der Rechenoperationen, die durch die Klammerung bestimmt wird:

$$\begin{array}{rclclcl} 5+8\cdot 3^2 & = & 5+8\cdot 9 & = & 5+72 & = & 77 \\ (5+8\cdot 3)^2 & = & (5+24)^2 & = & 29^2 & = & 841 \\ 5+(8\cdot 3)^2 & = & 5+24^2 & = & 5+576 & = & 581 \\ (5+8)\cdot 3^2 & = & 13\cdot 9 & & & = & 117\,. \end{array}$$

Aufgaben zu Definition und Regeln der Potenzen

Rechnen Sie die folgenden Ausdrücke möglichst einfach aus.

65 ▷ a) $\dfrac{3^4 \cdot 2^5}{6^3}$ b) $\dfrac{2^3}{3} \cdot \left(\dfrac{15}{10^2}\right)^2$ c) $2^2 \cdot 10^3 - 15^3$

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich.

66 ▷ $(a-b)^3\,(b-a)^2$

67 ▷ $\dfrac{x^{2n-1}}{x^{2n+1}}$

68 ▷ $\dfrac{2}{3}\,ab^2c^3 \cdot \dfrac{3}{5}\,a^2b^3c \cdot \dfrac{5}{6}\,a^3bc^2$

69 ▷ $\dfrac{x^2-y^2}{(x-y)\cdot x} + \dfrac{x^2-y^2}{(x+y)\cdot x}$

70 ▷ $\dfrac{\dfrac{a^2-a}{a^2+2a} \cdot \dfrac{a^2-4}{a^2-1}}{\dfrac{a^2+2a+1}{a^2-4a+4}}$

71 ▷ $\dfrac{36x^2y-48xy^2}{4(x+y)} + \dfrac{45x^2y+60xy^2}{5(x+y)}$

72 ▷ Setzen Sie $x = \left(\dfrac{1}{y}\right)^2$ in $\dfrac{x}{y^2}$ ein.

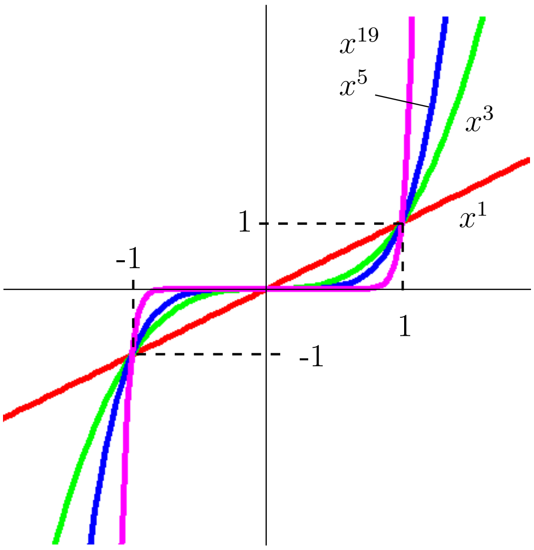
73 ▷ a) Berechnen Sie analog zu Aufgabe 17 die Zahlen $\binom{4}{k}$ für $k = 0, 1, \ldots, 4$.

b) Multiplizieren Sie das Polynom $(x+1)^4$ aus, sodass Sie eine Summe von Vielfachen der Potenzen $x^4, x^3, \ldots, 1$ erhalten.

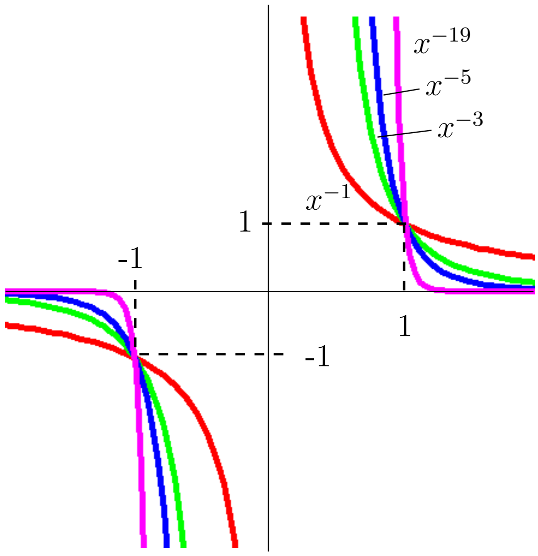
c) Wie können Sie die Summendarstellung von $(x+1)^7$ schneller erhalten als durch Ausmultiplizieren?

4.2 Potenzen als Funktionen, Wurzeln

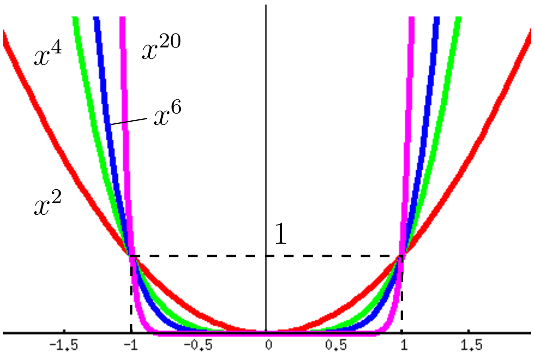
Auch die Potenzen $f(x) = x^n$ sind reelle Funktionen. Ihr maximaler Definitionsbereich hängt von n ab, wie wir aus den Rechenregeln ersehen können. Für $n > 0$ ist er ganz $\mathbb{R}$, für $n \leq 0$ müssen wir $x \neq 0$ beachten.



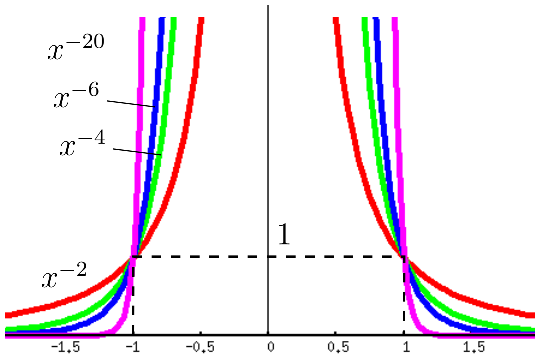
$n > 0$ ungerade



$n < 0$ ungerade



$n > 0$ gerade



$n < 0$ gerade

Bei Potenzfunktionen stellen sich mitunter Fragen des Typs $x^n = a$, wobei n, a bekannt sind und die Basis x gesucht, z.B. $x^2 = 1$ oder $x^5 = 2$. Hier wollen wir den Exponenten optisch von der linken Seite entfernen, d.h. rechnerisch soll er (wegen $x = x^1$) zu 1 gemacht werden.

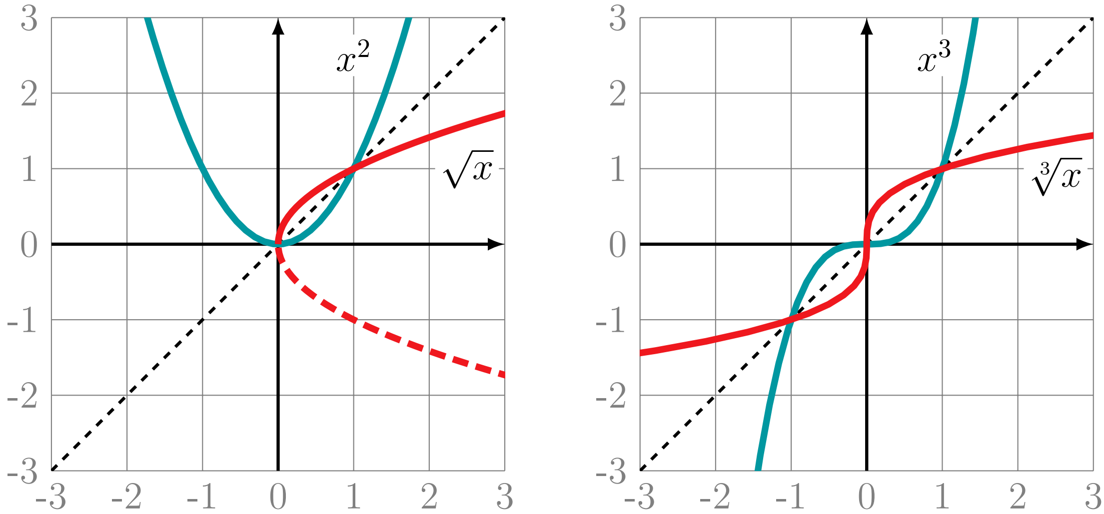
Diese Fragen werden beantwortet von der **Umkehrfunktion** (siehe 2.7) zur jeweiligen Potenzfunktion $f(x) = x^n$. Dazu müssen wir Brüche im Exponenten zulassen. Denn dann sagt uns die *Potenz der Potenz*-Regel, wie wir das erreichen können:

$$(x^n)^{\frac{1}{n}} = x^{n \cdot \frac{1}{n}} = x^1.$$

Die Potenzfunktion $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$ spielt also die Rolle der Umkehrfunktion zu f. Die Umkehrfunktionen zu Potenzfunktionen x^n werden auch n-te **Wurzeln** genannt und wie folgt geschrieben:

$$\boxed{\sqrt[n]{x} := x^{\frac{1}{n}}}\ .$$

Der Graph von $\sqrt[n]{x}$ entsteht durch Spiegelung des Graphen von x^n an der Winkelhalbierenden (gestrichelt). Hier die Beispiele x^2 und x^3:



Potenzen mit geraden Exponenten $n = 2, 4, 6, \ldots$**.**
Damit beim Spiegeln der quadratischen Parabel $y = x^2$ (linkes Bild) tatsächlich eine Funktion entsteht, muss es für jedes y genau ein x geben. Um das zu erreichen, schränken wir den Definitionsbereich ein auf $x \geq 0$ und den Wertebereich auf $y \geq 0$. Dies entspricht dem 1. Quadranten, also dem oberen rechten Viertel des Koordinatensystems. Die Umkehrfunktion der Quadratfunktion heißt die **Quadratwurzel** $\sqrt{x}$.

Analog gilt für alle geraden Wurzeln $\sqrt[n]{x}$:

- sie können nur aus Zahlen $x \geq 0$ gezogen werden
- sie liefern als Ergebnis immer Werte $\sqrt[n]{x} \geq 0$
- sie erfüllen die Gleichung $\sqrt[n]{x^n} = |\,x\,|$. (Zur Betragsfunktion siehe 3.4.)

Potenzen mit ungeraden Exponenten $n = 1, 3, 5, \ldots$**.**
Diese Funktionen sind global umkehrbar (rechtes Bild), es ist keine Einschränkung erforderlich. Für die abgebildete Funktion $y = x^3$ ist z.B. $(-1)^3 = -1$, siehe grüne Kurve. Daher folgt: $\sqrt[3]{-1} = -1$, siehe die rote Kurve dazu. Der negative Wert -1 unter der Wurzel ist hier zulässig und als Ergebnis korrekt.

Für alle ungeraden Wurzeln $\sqrt[n]{x}$ gilt:

- sie können aus allen reellen Zahlen x gezogen werden
- sie liefern als Ergebnis immer Werte mit demselben Vorzeichen wie x
- sie erfüllen die Gleichung $\sqrt[n]{x^n} = x$.

Potenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten.

Für solche Potenzen x^n gilt dasselbe wie für positive Exponenten, nur dass wir zusätzlich $x \neq 0$ beachten müssen.

Rechenregeln für Wurzeln. Wurzeln sind Potenzfunktionen wie alle anderen auch und gehorchen denselben Potenzregeln. Sie führen in der Rechnung lediglich oft zu Brüchen im Exponenten. Falls Sie sich damit noch nicht sicher fühlen sollten, üben Sie sich zunächst mehr in Bruchrechnung.

Beispiel 4.5: Wie können wir den folgenden Ausdruck soweit wie möglich vereinfachen? $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y^2} \cdot \sqrt[6]{\frac{x^3}{y}}$.

Wir schreiben die Wurzeln nach ihren Definitionen als Bruchpotenzen um und wenden die Potenzregeln an:

$$x^{\frac{1}{2}}\,(y^2)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{x^3}{y}\right)^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{2}}\,y^{\frac{2}{3}}\,x^{\frac{3}{6}}\,y^{-\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{3}{6}}\,y^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = x^1\,y^{\frac{1}{2}} = x\sqrt{y}\,.$$

Auflösen von Gleichungen mit Potenzen oder Wurzeln. Gleichungen können wir umformen, indem wir auf beiden Seiten dieselben Operationen anwenden. Für ungerade n ist das Potenzieren mit n oder $1/n$ ohne Einschränkung zulässig: Die Gleichung $a = b$ ist äquivalent zu $a^n = b^n$ und zu $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$.

Beispiel 4.6: Wir wollen aus Draht die Kanten eines Würfels mit dem Volumen von $0.5\,\mathrm{m}^3$ biegen. Welche Gesamtlänge an Draht wird dafür benötigt?

Es bezeichne s die Kantenlänge des gesuchten Würfels. Er hat das Volumen $s^3 = 0.5\,\mathrm{m}^3$. Daraus erhalten wir durch Anwendung der Umkehrfunktion *dritte Wurzel*: $s = \sqrt[3]{0.5}$ m. Der Würfel besitzt 12 Kanten dieser Länge s. Wir benötigen also

$$12\,s = 12\,\sqrt[3]{0.5}\,\mathrm{m} \approx 9.53\,\mathrm{m}\text{ Draht.}$$

Bitte setzen Sie den Taschenrechner erst im letzten Schritt ein.

Für gerade n wirken sich die genannten Einschränkungen an die Potenz- und Wurzelfunktionen auf die zulässigen Umformungen aus:

- Potenzieren mit n ist nur zulässig, wenn beide Seiten gleiches Vorzeichen besitzen. $a = b$ und $a^n = b^n$ sind nur dann äquivalent, wenn $a \cdot b \geq 0$ ist.

  Wenn wir diese Vorzeichen nicht beide kennen, können wir trotzdem potenzieren, erhalten aber evtl. mehr Lösungen als die Ausgangsgleichung besitzt. Wir müssen deshalb danach eine Probe machen, welche der erhaltenen Lösungen die Ausgangsgleichung erfüllen (siehe Beispiel 4.17).

- Potenzieren mit $1/n$ ist nur zulässig, wenn beide Seiten nichtnegativ sind. $a = b$ und $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$ sind nur dann äquivalent, wenn $a \geq 0$ und $b \geq 0$ gilt.

  Wenn wir diese Vorzeichen nicht beide kennen, können wir trotzdem so potenzieren, müssen aber die beiden Vorzeicheneinschränkungen akzeptieren. Falls $a < 0$ oder $b < 0$ vorkommen können, müssen wir diese Fälle separat behandeln.

Beispiel 4.7: Eine Bank bietet uns eine zweijährige Anlage an mit 2% Zins im ersten Jahr und 10% im zweiten Jahr. Sie verspricht uns dabei einen Durchschnittszins von 6%. Was halten wir davon?
Wenn wir das Kapital k_0 anlegen, können wir die Zinsformel (Abschnitt 3.2) zweimal anwenden und haben nach dem Modell der Bank nach zwei Jahren

$$k_2 = \left(1 + \frac{2\%}{100}\right)\left(1 + \frac{10\%}{100}\right) k_0 = 1.02 \cdot 1.10\, k_0 = 1.122\, k_0 \,.$$

Der Durchschnittszins $p > 0$ gilt in beiden Jahren gleich und muss dasselbe Ergebnis erreichen:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 k_0 &= 1.122\, k_0 && \Big|\div k_0 \\
\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 &= 1.122 && \Big|\sqrt{\cdot}\,,\ \text{(beiden Seiten sind} \geq 0) \\
\left|1 + \frac{p}{100}\right| &= \sqrt{1.122} && \Big|\ \text{Betrag auflösen: } 1 + \frac{p}{100} \geq 0 \\
1 + \frac{p}{100} &= \sqrt{1.122} && \Big| -1,\ \cdot 100 \\
p &= 100\,(\sqrt{1.122} - 1) \\
&\approx 5.92\,\% \,.
\end{aligned}$$

Antwort: Diese Bank hält ihr Versprechen nicht ganz.
Anmerkung: die Wurzel aus dem Quadrat ist zunächst gleich dem Betrag. Erst im nächsten Schritt spielt die Eigenschaft $1 + p/100 \geq 0$ eine Rolle und der Betrag wird nur in seinem ersten Fall benutzt: $|\,x\,| = x$ für $x \geq 0$.

Beispiel 4.8: Für welche reellen Zahlenpaare a, b gilt $a^2 = b^2$?
Eine vorschnelle Antwort lautet: $a = b$. Aber auf den zweiten Blick

erfüllt auch das Paar $a = -b$ die Gleichung, da $(-b)^2 = b^2$ ist.
Der korrekte Umformungsschritt lautet: $|\,a\,| = |\,b\,|$. Die Beträge erhalten die notwendigen Fallunterscheidungen, die wir dann explizit treffen können:

$$|\,a\,| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases} \qquad |\,b\,| = \begin{cases} b & \text{für } b \geq 0 \\ -b & \text{für } b < 0\,. \end{cases}$$

Wenden wir diese an, ist die Gleichung $|\,a\,| = |\,b\,|$ weiter äquivalent zu

$$\begin{cases} a = b & \text{für } a \geq 0 \text{ und } b \geq 0 \\ -a = b & \text{für } a < 0 \text{ und } b \geq 0 \\ a = -b & \text{für } a \geq 0 \text{ und } b < 0 \\ -a = -b & \text{für } a < 0 \text{ und } b < 0\,. \end{cases}$$

Die äußeren beiden Fälle sind rechnerisch äquivalent durch einfache Multiplikation mit -1 und können zusammengefasst werden. Das ist ebenso der Fall bei den inneren beiden Fällen. Als Lösungen bleiben wie erwartet stehen: $a = b$ (falls $a \cdot b \geq 0$) und $a = -b$ (falls $a \cdot b < 0$).
In Beispiel 4.11 sehen wir eine zweite Möglichkeit, um diese beiden Lösungen systematisch zu erhalten.

Beispiel 4.9: Die Gleichung $\sqrt{2x} + \sqrt{x+1} = 0$ besitzt offensichtlich keine Lösung, da zwei verschiedene nichtnegative Zahlen addiert niemals Null ergeben können. Ein falsches Vorgehen zur Lösung könnte trotzdem wie folgt aussehen — finden Sie den Fehler?

$$\begin{aligned} \sqrt{2x} + \sqrt{x+1} &= 0 && \big|\, -\sqrt{x+1} \\ \sqrt{2x} &= -\sqrt{x+1} && \big|\,(\ldots)^2 \\ 2x &= (-1)^2(x+1) \; = \; x+1 && \big|\, -x \\ x &= 1\,. \end{aligned}$$

Aufgaben zu Potenzen und Wurzeln

Schreiben Sie folgende Ausdrücke in die Wurzelschreibweise um:

74 ▷ a) $a^{1/2}$ c) $a^{3/4}$ e) $a^{1/2} + b^{1/2}$

b) $a^{3/2}$ d) $a^{-2/5}$ f) $(a+b)^{3/5}$

Formen Sie in die Schreibweise mit rationalem Exponenten um:

75 ▷ a) $\sqrt{a^7}$ b) $\sqrt[3]{a^2}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}}$ d) $\dfrac{1}{\left(\sqrt{a}\right)^3}$ e) $\sqrt{a+b^2}$ f) $\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{b^4}$

Vereinfachen Sie soweit wie möglich ohne einen Taschenrechner:

76 ▷ $\left(\frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{64}}\right)^2$

77 ▷ $\sqrt{72}-\sqrt{18}$

78 ▷ $5\sqrt{63}-2\sqrt{175}+3\sqrt{28}$

Betrachten Sie nochmals das Beispiel 4.12 (Seite 51) mit den pythagoräischen Zahlentripeln.

79 ▷ Berechnen Sie alle Tripel a,b,c für m,n mit $1\le n<m\le 4$.

80 ▷ Ergänzen Sie die folgenden Zahlenpaare durch die jeweils dritte, sodass sie gemeinsam ein pythagoräisches Zahlentripel bilden:

a) $a=24,\ b=10,\ c=?$

b) $a=21,\ b=?,\ c=29$

c) $a=?,\ b=40,\ c=41$

81 ▷ Berechnen Sie für dieselben Fälle wie in 80 die jeweiligen Zahlen m und n.

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke so weit wie möglich.

82 ▷ $\dfrac{1+x\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$

83 ▷ $\sqrt[9]{a^6\cdot\sqrt[4]{a^{12}}}+\sqrt{\sqrt[6]{b^{10}}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[4]{b^2}}$, für $a,b\ge 0$

84 ▷ $\dfrac{(ax+ay)^{n+1}\cdot b^n}{(abx+aby)^{n-1}}$ für $a,b>0$

85 ▷ $\sqrt{2v^2-v\sqrt{4v^2-(v\sqrt{2})^2}},\quad v\ge 0$

86 ▷ $\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}$

87 ▷ $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$

88 ▷ $\left(\sqrt{\dfrac{y^4}{x^3}}-\sqrt{\dfrac{x^3}{y^2}}\right)\sqrt{\dfrac{x^5}{y^6}},\quad x,y>0$

89 ▷ $\dfrac{\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}-\sqrt{\dfrac{1-y}{1+y}}}{\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}+\sqrt{\dfrac{1-y}{1+y}}}$ Für welche y-Werte ist Ihre Rechnung gültig?

90 ▷ $y+\sqrt{y^2+1}-\dfrac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}$

91 ▷ $\sqrt[3]{x^{n+3}}+2x\sqrt[3]{x^n}$

92 ▷ $\sqrt[n]{a^{n+1}b}+\sqrt[n]{ab^{n+1}}$ für $a,b,n>0$

Geben Sie den Gültigkeitsbereich der Gleichung an. Danach lösen Sie sie nach x auf.

93 ▷ $3\sqrt{2x+4}-9=0$

94 ▷ $\sqrt{2x+19}+5=0$

95 ▷ $\sqrt{2x^2-1}+x=0$

96 ▷ $\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}=3$

97 ▷ Manche Banken gewähren am Ende von Sparverträgen zusätzlich einen Bonus von 20% auf die eingezahlte Summe. Welchem Zinssatz entspricht diese Zahlung, wenn die Laufzeit 6 Jahre beträgt?

98 ▷ Vor langer Zeit konnte man Bundesschatzbriefe mit folgenden Konditionen kaufen: Die Zinsen werden erst am Ende der Laufzeit mit Zinseszins ausgezahlt. Der Zinssatz änderte sich jedes Jahr wie folgt: 4.5 %, 6 %, 6.25 %, 6.5 %, 7 %, 8.5 %, 8.5 %. Mit welchem konstanten Zinssatz wurde bei sonst gleichbleibenden Konditionen die gleiche Rendite erzielt?

4.3 Binomische Formeln und Faktorisierung

Die bekannten drei **binomischen Formeln** ergeben sich direkt aus den Rechenregeln für reelle Zahlen, vgl. 2.3:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 && \textit{1. bin. Formel}\\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 && \textit{2. bin. Formel}\\ (a+b)(a-b) &= a^2-b^2 && \textit{3. bin. Formel.}\end{aligned}$$

Beispiel 4.10: Konkrete Brüche werden per Konvention mit möglichst einfachem Nenner dargestellt. In den meisten Fällen können wir dort eine natürliche Zahl erreichen. Bei Wurzelausdrücken sagt uns maßgeblich die 3. bin. Formel, wie wir geschickt erweitern können:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\,.$$

Während wir kaum ein Gefühl für den Wert des linken Bruches haben, können wir den rechten Bruch mit einfachem Nenner gut abschätzen:

$$\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1) \approx \frac{1}{2}(1.73+1) = \frac{1}{2}\cdot 2.73 \approx 1.37\,.$$

Ihre besondere Bedeutung erlangen die binomischen Formeln durch das Lesen von rechts nach links, denn dabei wird aus einer Summe ein Produkt geformt: die Summe wird **faktorisiert**. Das zu können ist nützlich bei der Auflösung vieler Gleichungen, deren eine Seite Null ist, vgl. Beispiel 4.16 (S. 55). Eine andere Anwendung ist die *Teilbarkeit* eines ganzzahligen Ausdrucks durch eine bestimmte ganze Zahl bzw. einer Formel durch eine andere.

Beispiel 4.11: Für welche Zahlenpaare a, b gilt $a^2 = b^2$?
Wir formen die Bedingung $a^2 = b^2$ um zu $a^2 - b^2 = 0$ und faktorisieren sie mit der dritten binomischen Formel: $(a+b)(a-b) = 0$. Jeder der beiden Faktoren liefert eine neue Gleichung: $a + b = 0$ bzw. $a - b = 0$.
Antwort: Die Gleichung wird erfüllt von den beiden Zahlenpaaren mit $a = -b$ bzw. $a = b$.

Beispiel 4.12: Der bekannte **Satz des Pythagoras** (siehe auch 5.2) interpretiert drei reelle Zahlen a, b, c mit der Eigenschaft $a^2 + b^2 = c^2$ als Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks. Bereits in den natürlichen Zahlen gibt es unendlich viele Dreiergruppen, die diese Bedingung erfüllen. Sie heißen nach dieser Eigenschaft *pythagoräische Zahlentripel*. Sie entstehen auf folgende Weise. Wir wählen zwei beliebige natürliche Zahlen m, n mit $m > n$ aus und definieren

$$a := m^2 - n^2\,, \qquad b := 2mn\,, \qquad c := m^2 + n^2\,.$$

Warum stimmt das immer? Wir prüfen die Pythagoras-Bedingung nach:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 \\ &= (m^4 - 2m^2n^2 + n^4) + 4m^2n^2 \\ &= m^4 + 2m^2n^2 + n^4 \\ &= (m^2 + n^2)^2 \\ &= c^2\,. \end{aligned}$$

Beispiel 4.13: Warum ist der Wert des Ausdrucks $n^3 - n$ für jede natürliche Zahl n durch 6 ohne Rest teilbar?
Wir faktorisieren diesen Ausdruck:

$$n^3 - n = n\,(n^2 - 1) = n(n+1)(n-1)\,.$$

Es werden also immer drei benachbarte Zahlen multipliziert. Von diesen muss aber mindestens eine durch 2 teilbar sein und eine durch 3. Insgesamt enthält das Produkt beide Teiler, das ergibt zusammen den Teiler $2 \cdot 3 = 6$.

Aufgaben zu Binomischen Formeln und Faktorisierung

Berechnen Sie folgende Ausdrücke ohne Taschenrechner.
Tipp: Alle Ergebnisse sind ganzzahlig.

99 ▷ $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

100 ▷ $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2$

101 ▷ $\dfrac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}-\dfrac{\sqrt{45}-3}{4}$

102 ▷ Berechnen Sie für

$$a = 241214579 \cdot 241214580$$

und

$$b = 241214578 \cdot 241214581$$

die Differenz $a-b$.

Tipp: Schreiben Sie x für die erste der vier Zahlen.

103 ▷ Berechnen Sie den folgenden Ausdruck für $n = 0, 1, 2, 3$.

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Machen Sie bei den folgenden Ausdrücken den Nenner ganzzahlig:

104 ▷ a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}}$

105 ▷ $\dfrac{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$

106 ▷ $\dfrac{16}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

107 ▷ $\dfrac{2+3\sqrt{a}}{3+2\sqrt{a}}$ (a sei ganzzahlig)

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke so weit wie möglich.

108 ▷ $\dfrac{1}{1-\dfrac{x^2}{(x+1)^2}}\cdot\dfrac{1}{(x+1)^2}$

109 ▷ $\dfrac{x^2-y^2}{(x-y)\cdot x}+\dfrac{x^2-y^2}{(x+y)\cdot x}$

110 ▷ $\dfrac{a^2+8}{a^2-4}-\dfrac{a+1}{a-2}+\dfrac{a-1}{a+2}$

111 ▷ $\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2}}\cdot\dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}$

für $x>0$

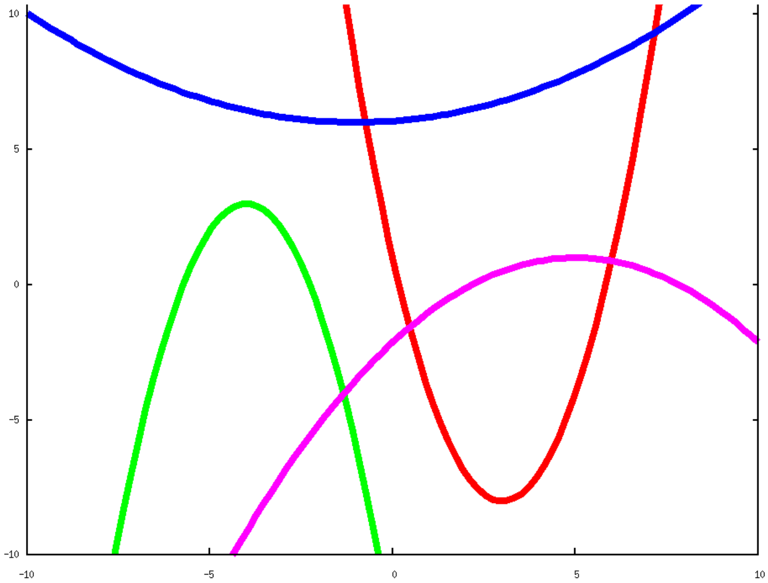
4.4 Parabeln und quadratische Gleichungen

Wir lassen in einer Geradengleichung $y = b\,x + c$ jetzt zusätzlich einen Term der Form ax^2 zu, in dem $a \neq 0$ eine beliebige reelle Zahl ist. Die resultierende **quadratische Funktion**

$$\boxed{f(x) = a\,x^2 + b\,x + c}$$

hat als Graph eine **Parabel**. Diese besitzt als markante Eigenschaft einen Extremwert, der als **Scheitelpunkt** zu erkennen ist, siehe Bild von x^2 in

Abschnitt 4.1. Eine Parabel ist immer symmetrisch zur senkrechten Geraden durch diesen Scheitel. Hier einige „typische“ Parabeln:



Um die Koordinaten des Scheitelpunkts zu berechnen, fragen wir zunächst: Wie verändert der lineare Summand bx in der Funktionsvorschrift $f(x) = x^2+bx+c$ (wo $a = 1$ ist) die optische Gestalt der zugehörigen Parabeln? Wir sehen dies durch sog. **quadratische Ergänzung**. Es ist nämlich möglich, die Summe $x^2 + bx + c$ als einen binomischen Ausdruck der Form $(x - u)^2 + v$ zu schreiben. Wie müssen wir u, v dafür wählen? Ausmultipliziert erhalten wir zunächst

$$(x-u)^2 + v \;=\; x^2 - 2u\,x + u^2 + v \;\overset{!}{=}\; x^2 + b\,x + c\,.$$

Die zweite Gleichung mit dem Ausrufezeichen soll erfüllt werden. Wir erreichen dies durch einen sog. **Koeffizientenvergleich**: Er setzt die Faktoren beider Seiten bei denselben Potenzen separat gleich. Bei x^2 stimmen die Faktoren 1 bereits überein, es bleiben x und die Konstanten:

$$\begin{aligned} -2\,u &\overset{!}{=} b \qquad \mid \div (-2) & \qquad u^2 + v &\overset{!}{=} c \qquad \mid -u^2 \\ u &= -\frac{b}{2} & v &= c - u^2 \;=\; c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 . \end{aligned}$$

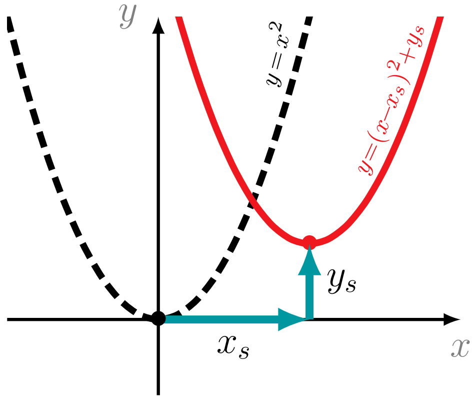
Antwort: Die Parabelform wird durch Addition des Summanden bx nicht verändert. Die Kurve wird nur nach rechts verschoben um u und nach oben um v (vgl. 2.7). Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten $(x_S, y_S) = (u, v)$.

Wir haben hier die sog. **Scheitelpunktform** der Parabel entwickelt:

$$x^2 + bx + c \;=\; \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left[c - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] .$$

Abstrakt geschrieben erkennen wir die Koordinaten des Scheitelpunkts direkt in der Formel:

$$\boxed{y \;=\; (x - x_S)^2 + y_S} \;.$$



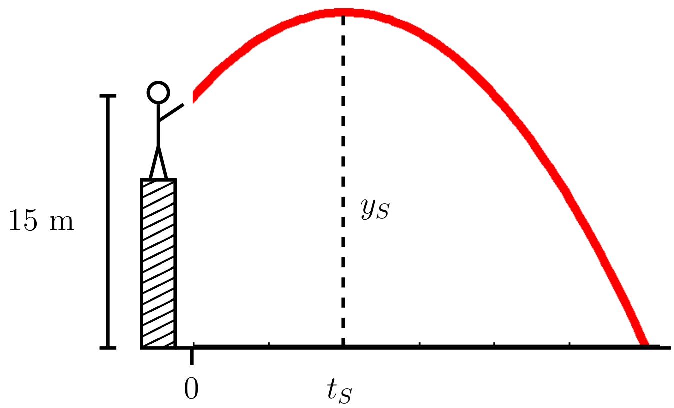
Im allgemeinen Fall $a \neq 1$ lauten diese Koordinaten wie folgt:

$$\boxed{x_S = -\frac{b}{2a}\;, \quad y_S = c - \frac{b^2}{4a}} \;.$$

Versuchen Sie, diese allgemeinen Formeln für x_S, y_S selbst herzuleiten (siehe Aufgabe 4.4 auf Seite 56).

Beispiel 4.14: Wir werfen einen Stein aus der Höhe von 15 m auf den Boden. Er folge dabei der Wurfparabel mit der Vorschrift

$$f(t) = -5\,t^2 + 10\,t + 15 \;.$$



Dabei bedeutet t die Zeit in s und $f(t)$ die Höhe in m.
Wann erreicht der Stein auf seinem Flug welche maximale Höhe?
Aus der Vorschrift $f(t)$ lesen wir ab: $a = -5$, $b = 10$, $c = 15$. Der Scheitelpunkt liegt damit bei

$$\begin{aligned} t_S &= -\frac{b}{2a} &= -\frac{10}{2\cdot(-5)} &= 1 \\ y_S &= c - \frac{b^2}{4a} &= 15 - \frac{10^2}{4\cdot(-5)} &= 20\;. \end{aligned}$$

Antwort: Der Stein erreicht seine maximale Höhe von 20 m nach 1 s.

Um die Nullstellen einer quadratischen Funktion zu bestimmen, teilen wir zunächst auf beiden Seiten der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ durch a und erhalten $x^2 + px + q = 0$, wobei wir $p := {}^b\!/\!_a$ und $q := {}^c\!/\!_a$ setzen. Für diese Form der Gleichung gilt die bekannte **pq-Formel**:

$$\boxed{x_{1,2} \;=\; -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} \;.$$

Die beiden Indizes beziehen sich auf das $\pm$-Zeichen in der Formel. x_1 bzw. x_2 sollen diese beiden Ergebniswerte bezeichnen.

Da die Wurzel nur aus nichtnegativen Zahlen gezogen werden kann, ergeben sich hier fallweise zwei, eine oder auch keine Lösung:

$$\frac{p^2}{4} - q \quad \begin{cases} > 0 & \rightarrow \text{zwei Lösungen} \\ = 0 & \rightarrow \text{eine Lösung} \\ < 0 & \rightarrow \text{keine Lösung.} \end{cases}$$

Der linke Ausdruck heißt deshalb die **Diskriminante** (lat. *Unterscheidende*) der Gleichung. Wenn es eine oder zwei Lösungen gibt, können wir mit Hilfe des **Satzes von Viëta** eine Probe machen, die schneller geht als zweimal Einsetzen. Dieser Satz besagt, dass immer gilt:

$$\boxed{x_1 + x_2 \;=\; -p \qquad \text{und} \qquad x_1 \cdot x_2 \;=\; q} \;.$$

Beispiel 4.15: Martina ist 4 Jahre jünger als ihr Bruder Chris. Vor einem Jahr war das Produkt ihrer beiden Alter gleich 117. Wie alt ist Martina heute?
Sei x Martinas heutiges Alter. Die Bedingungen führen auf die Gleichung $(x-1)(x+3) = 117$, die wir umformen können zu $x^2 + 2x - 120 = 0$. Wir lesen ab: $p = 2$ und $q = -120$. Dann berechnen wir zunächst die Diskriminante:

$$\frac{p^2}{4} - q \;=\; \frac{2^2}{4} + 120 \;=\; 121 \;>\; 0\;,$$

d.h. es gibt zwei mögliche Lösungen. Diese sind

$$x_1 \;=\; -1 + \sqrt{121} \;=\; 10 \qquad \text{und} \qquad x_2 \;=\; -1 - \sqrt{121} \;=\; -12\;.$$

Dieser negative Wert ist für ein Alter offenbar unsinnig. Eine Probe mit dem Satz von Viëta können wir trotzdem machen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 10 - 12 &&= -2 &&= -p \\ x_1 \cdot x_2 &= 10 \cdot (-12) &&= -120 &&= q\;. \end{aligned}$$

Antwort: Martina ist 10 Jahre alt.

Beispiel 4.16: Welche reellen Zahlen x erfüllen die Gleichung $x^3 = 1$?
Es gilt die folgende Beziehung:

$$x^3 - 1 \;=\; (x-1)(x^2 + x + 1) \qquad\qquad \rightarrow \;\text{nachrechnen!}$$

Für jede Zahl x mit $x^3 = 1$ ist die linke Seite dieser Gleichung Null, daher muss auch die rechte Seite gleich Null sein. Das ist sie entweder für $x = 1$ (erster Klammerfaktor ist Null) oder wenn der zweite Faktor Null ist. Wir lesen aus $x^2 + x + 1 = 0$ die Werte $p = q = 1$ ab und berechnen die Diskriminante:

$$\frac{p^2}{4} - q = \frac{1^2}{4} - 1 = -\frac{3}{4} < 0 .$$

Diese quadratische Gleichung besitzt also keine Nullstellen.
Antwort: Die einzige reelle Lösung der Gleichung $x^3 = 1$ ist $x = 1$.

Beispiel 4.17: Welche Zahlen x erfüllen die Gleichung $x + \sqrt{x} = 2$? Um durch Quadrieren die Wurzel aufzuheben, subtrahieren wir das x zunächst auf die rechte Seite:

$$\begin{aligned}
x + \sqrt{x} &= 2 && \mid -x \\
\sqrt{x} &= 2 - x && \mid (\ldots)^2 \\
x &= (2-x)^2 = 4 - 4x + x^2 && \mid -x \\
0 &= x^2 - 5x + 4 && pq\text{-Formel} \\
x_{1,2} &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{16}{4}} \\
&= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \\
\text{also } x_1 &= 1 \quad \text{oder} \quad x_2 = 4 .
\end{aligned}$$

Aber *Achtung:* Wir haben quadriert, ohne das Vorzeichen der rechten Seite zu kennen! Wir müssen deshalb eine Probe machen und die beiden Lösungen in die Ausgangsgleichung einsetzen:

$$\begin{aligned}
x_1 + \sqrt{x_1} &= 1 + \sqrt{1} = 1 + 1 = 2 && \rightarrow \text{OK} \\
x_2 + \sqrt{x_2} &= 4 + \sqrt{4} = 4 + 2 = 6 && \rightarrow \textit{falsch.}
\end{aligned}$$

Antwort: Die Gleichung $x + \sqrt{x} = 2$ besitzt die einzige reelle Lösung $x = 1$.

Aufgaben zu Parabeln und quadratischen Gleichungen

112 ▷ Welche Gleichung hat die quadratische Einheitsparabel $f(x) = x^2$, wenn ihr Scheitel in den Punkt $(3, -2)$ verschoben wird?

113 ▷ Die allgemeine quadratische Parabel hat die Form $y = ax^2 + bx + c$. Zeigen Sie, dass $x_S = \frac{-b}{2a}$ und $y_S = c - \frac{b^2}{4a}$ die Koordinaten des Scheitelpunktes sind (vgl. Beispiel 4.14, Seite 54).

Bringen Sie die folgenden Parabelvorschriften auf Scheitelpunktform und geben Sie die Scheitelpunkte an:

114 ▷ $x^2 + 5x$

115 ▷ $x^2 - 16x$

116 ▷ $x^2 + 12x + 42$

117 ▷ $3x^2 - 18x$

118 ▷ $-x^2 + 10x - 8$

119 ▷ $5x^2 - 6x + 2$

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf und überprüfen Sie jeweils Ihr Ergebnis mit Hilfe des Satzes von Viëta (siehe 4.4).

120 ▷ $5x^2 + 10x = 0$

121 ▷ $x^2 + 5x - 14 = 0$

122 ▷ $16x^2 + 120x + 221 = 0$

123 ▷ $x^2 - 4x + 13 = 0$

124 ▷ $\frac{x}{2} + \frac{23}{x} = 7$

125 ▷ $a^2 - x^2 = (a - x)(b - x)$

Skizzieren Sie die angegebenen Funktionenpaare jeweils in einem gemeinsamen Koordinatensystem. Berechnen Sie die Schnittpunkte und überprüfen Sie sie in der Skizze.

126 ▷ $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 2$
$g(x) = -2x + 2$

127 ▷ $f(x) = -x^2 + 8x - 8$
$g(x) = 2x + 1$

128 ▷ $f(x) = -2x^2 + 8$
$g(x) = (x - 2)^2$

129 ▷ $f(x) = x^2 + 2x - 2$
$g(x) = x^2 - 6x + 10$

130 ▷ Eine Strecke der Länge ℓ soll so in zwei Teile der Längen x bzw. $\ell - x$ geteilt werden, so dass sich die Länge der Gesamtstrecke zur Länge des größeren Teils x genauso verhält, wie x zur Länge des kleineren Teils $\ell - x$. Wie ist x zu wählen und welchen Wert hat dann das Verhältnis ℓ/x?

131 ▷ Ein Flugzeug fliegt von Leipzig nach Wien ($s = 660\,\mathrm{km}$) und kommt dort $t_0 = 6\,\mathrm{min}$ früher an, da es Rückenwind von $v_R = 60\,\mathrm{km/h}$ hatte. Wie groß ist die Eigengeschwindigkeit v_F des Flugzeugs?
Tipp: Setzen Sie die unbekannte Reisezeit t aus der einen in die andere Gleichung ein.

132 ▷ Ein Gastwirt erwartet 40 Personen zu einem Menü zu je 30 €. Er wird gefragt, ob er für jede zusätzliche Person einen Rabatt von 0.50 €

auf alle Personen geben würde. Bis zu maximal wie vielen Personen stimmt der Wirt diesem Vorschlag (vermutlich) zu?

133 ▷ Die Deutsche Bahn setzt für Gruppen ab 220 Personen einen Sonderzug mit 330 Plätzen ein. Der Grundpreis von 8.70 € pro Person reduziert sich um 2 Cent für jedes Gruppenmitglied, mit dem die Minimalzahl von Fahrgästen überschritten wird. (So sind bei 222 Teilnehmern nur noch 8.66 € pro Person zu bezahlen.) Bestimmen Sie die Anzahl von Fahrgästen pro Sonderzug, welche die höchsten Einnahmen für die Bahn ergibt.

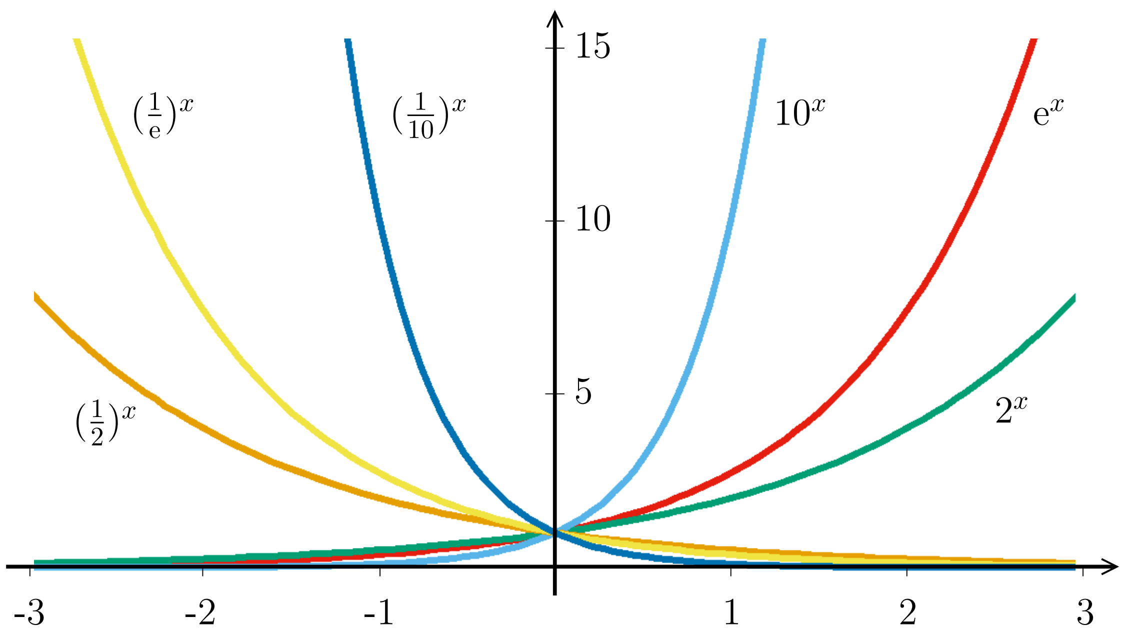
134 ▷ So wie Geraden durch zwei Punkte bestimmt sind, können wir quadratische Parabeln durch drei Punkte bestimmen (die nicht übereinander liegen). Berechnen Sie analog wie bei Geraden die Konstanten a, b, c in der Parabel $f(x) = ax^2 + bx + c$, die durch die Punkte $P(-1, 0)$, $Q(1, 2)$, $R(2, 9)$ verläuft.

4.5 Exponentialfunktion und Logarithmus

Die Potenzfunktion x^n hat einen nahen Verwandten: die **Exponentialfunktion**

$$\boxed{f(x) = a^x} \qquad \text{mit } a > 0\,.$$

Bei dieser ist die Basis a konstant und der Exponent x variabel. Auch hier umfasst der max. Definitionsbereich ganz $\mathbb{R}$. Die folgende Abbildung zeigt die Graphen einiger Exponentialfunktionen:



Beispiel 4.18: Aus Abschnitt 3.2 kennen wir die Zinsformel. Wenn die Zinsbeträge nach Erhalt angelegt bleiben, erhalten wir nach zweifacher Verzinsung:

$$k_2 = k_1\left(1+\frac{p}{100}\right) = k_0\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p}{100}\right) = k_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 .$$

Eine variable Anzahl n von Verzinsungen mit gleichem Zinssatz wird im Allgemeinen zum Exponenten. So erhalten wir die **Zinseszinsformel**. Sie ist im Wesentlichen eine Exponentialfunktion mit der Basis $a = 1 + {}^{p}/_{100}$:

$$\boxed{k_n = k_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n} .$$

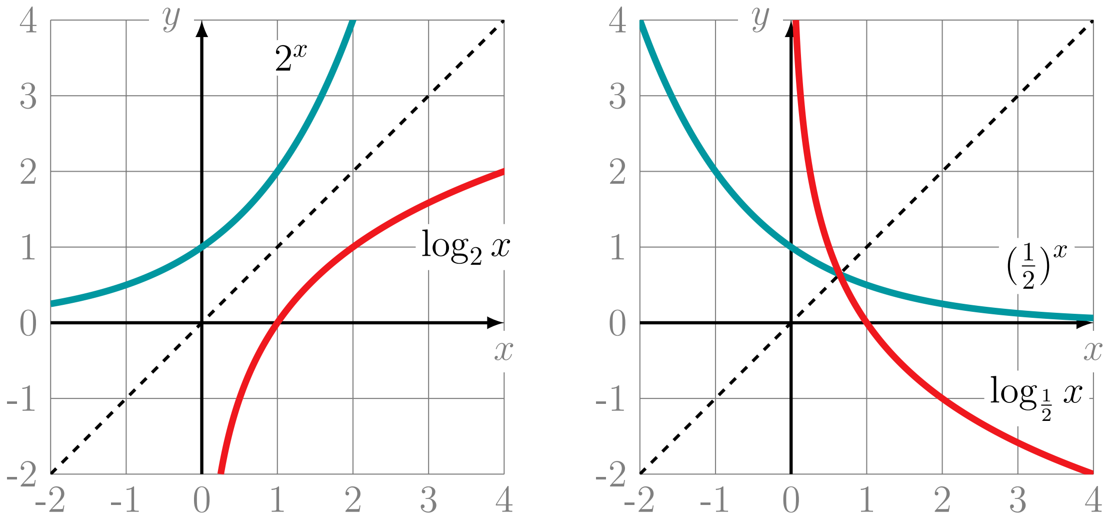
Die Rechenregeln bleiben die bekannten **Potenzgesetze**:

$$\boxed{\begin{array}{rclll}
a^x \cdot a^y &=& a^{x+y} & & \textit{Produkt mit gleichen Basen}\\
\dfrac{a^x}{a^y} &=& a^{x-y} & & \textit{Quotient mit gleichen Basen}\\
a^x \cdot b^x &=& (ab)^x & & \textit{Produkt mit gleichen Exponenten}\\
\dfrac{a^x}{b^x} &=& \left(\dfrac{a}{b}\right)^x & & \textit{Quotient mit gleichen Exponenten}\\
(a^x)^y &=& a^{x\cdot y} & & \textit{Potenz der Potenz}\\
a^{-x} &=& \dfrac{1}{a^x} &= \left(\dfrac{1}{a}\right)^x & \textit{Vorzeichenwechsel im Exponenten}\\
a^0 &=& 1 & & \textit{für alle } a>0\\
a^1 &=& a & & \textit{für alle } a>0 \,.
\end{array}}$$

Die *Vorzeichenwechsel*-Regel können wir im Bild der Exponentialfunktionen erkennen: Alle Funktionenpaare der Form a^x, $({}^1/_a)^x$ liegen symmetrisch zueinander zur y-Achse.

Bei den Potenzfunktionen (Abschnitt 4.2) sind die Umkehrfunktionen (siehe 2.7) stets selbst wieder Potenzfunktionen. Bei den Exponentialfunktionen dagegen bilden die Umkehrfunktionen eine eigene Funktionenklasse: die **Logarithmen**. Zur Frage $a^x = b$ heißt die Antwort

$$\boxed{x = \log_a b}$$



der *Logarithmus von b zur Basis a*. Logarithmen sind also gesuchte Exponenten.

Dieser entscheidende Unterschied zwischen den Exponentialfunktionen a^x und den Potenzfunktionen x^n wird an Hand der Funktionsgraphen deutlich. Da beim Umkehren der Funktionsgraph an der Winkelhalbierenden $y = x$ gespiegelt wird, umfasst der maximale Definitionsbereich aller Logarithmusfunktionen $\log_a x$ nur die positiven reellen Zahlen, d.h. $x > 0$.

Außerdem müssen wir jetzt den einen Wert $a = 1$ ausnehmen, denn die Funktion $1^x = 1$ ist konstant und kann nicht umgekehrt werden. Es gibt deshalb keine Funktion $\log_1 x$.

Für Logarithmen gelten die folgenden Rechenregeln. *Hinweis:* Es ist immer $a > 0$ und $a \neq 1$.

$$
\begin{array}{rcll}
\log_a a^x &=& x & \textit{für alle } x \quad \textit{Umkehrung} \\
a^{\log_a x} &=& x & \textit{für } x > 0 \quad \textit{Umkehrung} \\
\log_a(x \cdot y) &=& \log_a x + \log_a y & \textit{Produkt wird Summe} \\
\log_a \dfrac{x}{y} &=& \log_a x - \log_a y & \textit{Quotient wird Differenz} \\
\log_a x^b &=& b \cdot \log_a x & \textit{Exponential wird Produkt} \\
\log_b x &=& \dfrac{\log_a x}{\log_a b} & \textit{Basistransformation} \\
\log_a \dfrac{1}{x} &=& -\log_a x & \textit{Kehrwert} \\
\log_a a &=& 1 & \textit{Identität} \\
\log_a 1 &=& 0 & \textit{Nullstelle.}
\end{array}
$$

Die beiden *Umkehrungs*-Regeln drücken aus, dass der Logarithmus $\log_a x$ die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist. Beide heben sich gegenseitig auf, egal in welcher Reihenfolge.

Beispiel 4.19: Ein Stück Papier hat eine Dicke von 0.1 mm. Angenommen, wir haben ein sehr großes Blatt zur Hand, das wir immer wieder in der Mitte umfalten wollen. Wie oft müssten wir es falten (wenn das technisch ginge), sodass es so dick wird wie die ca. 7000 km lange Strecke entlang der Erdoberfläche zwischen Berlin und New York?
Bei jedem Falten verdoppelt sich die Dicke des Blattes. Nach dem ersten Mal hat es die Dicke 0.2 mm, nach dem zweiten Mal 0.4 mm usw. Nach n-maligem Falten beträgt die Dicke $2^n \cdot 0.1\,\text{mm}$. Gesucht ist dasjenige n, für das gilt:

$$
\begin{array}{rcll}
2^n \cdot 0.1\,\text{mm} &=& 7000\,\text{km} & \mid \div\, 0.1\,\text{mm} \\
2^n &=& \dfrac{7000\,\text{km}}{0.1\,\text{mm}} = \dfrac{7000 \cdot 1000\,\text{m}}{0.1 \cdot 0.001\,\text{m}} & \mid \log_2 \\
\log_2 2^n &=& \log_2 70.000.000.000 & \textit{Umkehrung} \\
n &\approx& 36.03\,.
\end{array}
$$

Antwort: Wir müssten das Blatt ca. 36-mal falten (können).

Beispiel 4.20: Die *Intensität* I einer Schallwelle ist definiert als einfallende Leistung pro Fläche. Die *Hörschwelle* I_0 zu einer bestimmten Schallfrequenz ist diejenige Intensität, die ein Ton dieser Frequenz mindestens haben muss, damit ein Mensch ihn noch hören kann. Die

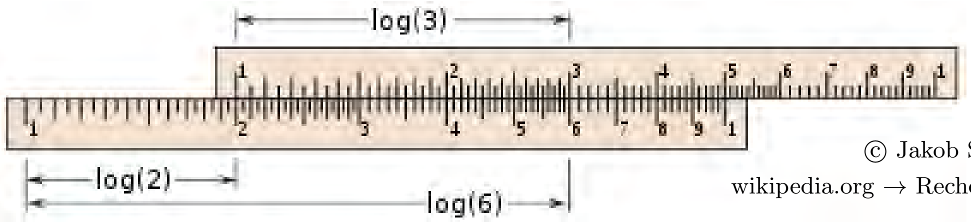
Lautstärke L dieses Tons gibt an, wie laut der Mensch ihn empfindet. Sie ist definiert als

$$L \ := \ 10 \cdot \log_{10} \frac{I}{I_0} \ .$$

Wie können wir I berechnen, wenn L und I_0 gegeben sind?
Wir lösen die obige Gleichung nach I auf:

$$\begin{array}{rcll} L &=& 10 \cdot \log_{10} \frac{I}{I_0} & \mid \div 10 \\ \frac{L}{10} &=& \log_{10} \frac{I}{I_0} & \mid 10^{(\dots)} \qquad \textit{Umkehrung} \\ 10^{\frac{L}{10}} &=& 10^{\log_{10} \frac{I}{I_0}} \ = \ \frac{I}{I_0} & \mid \cdot I_0 \\ I_0 \cdot 10^{\frac{L}{10}} &=& I \ . & \end{array}$$

Die drei *„wird“-Regeln* sind der Grund für den durchschlagenden Erfolg, den die Logarithmusfunktionen seit ihrer Entdeckung Anfang des 16. Jahrhunderts hatten. Sie besagen, dass wir eine (relativ aufwändige) Multiplikation oder Potenz ersetzen können durch eine (relativ leichte) Addition bzw. Multiplikation. Dies gewinnen wir, indem wir statt mit den Zahlen x, y mit ihren Logarithmen rechnen. Die Basis a ist dabei sogar egal.



© Jakob Scholbach
wikipedia.org → Rechenschieber

Über Jahrhunderte waren sog. **Rechenschieber** die Instrumente zur schnellen Berechnung von Multiplikationen und Divisionen. Sie bestehen aus zwei Linealen mit logarithmischen Skalen und funktionieren nach dem in Abschnitt 2.3 vorgestellten Prinzip: Die Addition wird als Hintereinanderlegen zweier Strecken realisiert. Das Bild illustriert die Berechnung $2 \cdot 3 = 6$.

Die *Quotient*-Regel zeigt, wie wir die Division analog ersetzen können: durch eine Subtraktion, d.h. das *Übereinanderlegen* zweier Strecken. Dasselbe Bild zeigt die Division $6 \div 3 = 2$ — sehen Sie es?

Beispiel 4.21: Ist 2^{200} größer oder kleiner als 3^{100}?
Wir brauchen diese riesigen Zahlen nicht auszurechnen, um sie zu vergleichen. Wir vergleichen stattdessen ihre Logarithmen, denn sie verhalten sich zueinander genauso. Das funktioniert für jede Basis $a > 1$, nehmen

wir die geläufige Basis $a = 10$. Die Exponential-Regel liefert:

$$\begin{aligned} \log_{10} 2^{200} &= 200 \cdot \log_{10} 2 \approx 200 \cdot 0.3010 \approx 60.2 \\ \log_{10} 3^{100} &= 100 \cdot \log_{10} 3 \approx 100 \cdot 0.4771 \approx 47.7\,. \end{aligned}$$

Antwort: Es ist $2^{200} > 3^{100}$.
Anmerkung: Der abgerundete Wert des Terms $1+\log_{10} x$ gibt die Anzahl Dezimalziffern von x an. Die Zahl 2^{200} besteht also ausgeschrieben aus 61 Dezimalstellen, 3^{100} aus 48 Stellen.

Die *Kehrwert*-Regel ist ein häufiger Spezialfall anderer Regeln. Wir erhalten sie, indem wir in der *Exponential*-Regel $b := -1$ einsetzen oder in der *Quotient*-Regel $x := 1$, $y := x$.

Die *Basistransformations*-Regel $\log_b x = \log_a x \div \log_a b$ führt den $\log_b x$ auf den $\log_a x$ zurück. Das ist nützlich, wenn wir $\log_b$ eines Ausdrucks berechnen wollen, aber nur einen anderen $\log_a$ ausrechnen können. Denn auf vielen Taschenrechnern gibt es nur zwei Logarithmusfunktionen:

$$\log_{10} x \qquad \text{und} \qquad \ln x\,.$$

Die zweite, $\ln x$, hat als Basis a die **Eulersche Zahl** $\mathrm{e} \approx 2.7182818\ldots$. Diese hat eine wichtige Bedeutung, die über den Brückenkurs hinaus geht. Die Exponentialfunktion e^x ist in der Abbildung auf S. 58 zu sehen. Brauchen wir einen Logarithmus zu einer anderen Basis als 10 oder e, so berechnen wir ihn mit der *Basistransformations*-Regel.

Beispiel 4.22: Eine Bakterienkultur vermehre sich gemäß der Funktion $f(x) = 1.2^x$. Dabei bedeutet x die Zeit in Stunden und $f(x)$ die Anzahl Bakterien. Nach welcher Zeit T hat sich diese Anzahl jeweils verdoppelt? Diese Frage führt auf die Bedingung

$$f(x+T) = 2\,f(x)\,.$$

Wir setzen die konkrete Formel von f ein und lösen nach T auf:

$$\begin{aligned} 1.2^{x+T} &= 2 \cdot 1.2^x && \mid \div 1.2^x \\ \frac{1.2^{x+T}}{1.2^x} &= 2 && \text{Potenzgesetz} \\ \frac{1.2^x \cdot 1.2^T}{1.2^x} &= 2 && \text{kürzen} \\ 1.2^T &= 2 && \mid \log_{1.2} \\ \log_{1.2} 1.2^T &= \log_{1.2} 2\,. \end{aligned}$$

Nach diesem Schritt kommt auf der linken Seite die erste *Umkehrungs*-Regel zum Zuge, auf der rechten Seite die *Basistransformations*-Regel mit $a := 10$:

$$T = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 1.2} \approx \frac{0.30103}{0.07918} \approx 3.80 .$$

Antwort: Die Bakterienkultur verdoppelt alle 3.8 h ihre Anzahl. (Zumindest für einige Tage, dann verlangsamt sich in der Praxis die Vermehrung.)

Aufgaben zu Exponentialfunktion und Logarithmus

Schreiben Sie als Potenz mit Basis 10 und geben Sie x an:

135 ▷ a) $10^x = 100$ d) $10^x = \frac{1}{100}$ g) $10^x = 1$

b) $10^x = 1000$ e) $10^x = \frac{1}{\sqrt{10}}$ h) $10^x = \frac{100}{\sqrt{10}}$

c) $10^x = 10$ f) $10^x = \sqrt[3]{100}$ i) $10^x = 1000 \cdot \sqrt[4]{10}$

Schreiben Sie als Potenz mit Basis e und geben Sie x an:

136 ▷ a) $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^2$ c) $\mathrm{e}^x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ e) $\mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^2}{\sqrt[3]{\mathrm{e}^5}}$ f) $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^3 \cdot \sqrt{\mathrm{e}}$

b) $\mathrm{e}^x = \sqrt{\mathrm{e}^5}$ d) $\mathrm{e}^x = 1$ g) $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}$

137 ▷ Bestimmen Sie x in der Gleichung $2^{x+1} \cdot 5^{x-1} = 40000$.

138 ▷ Bestimmen Sie x in Abhängigkeit von a: $3 \cdot \log_a(x+1) = 1$. Dann setzen Sie $a = 1000$ und machen Sie die Probe mit dem berechneten x (Einsetzen in Ausgangsgleichung).

139 ▷ Betrachten Sie ein Seil, das in den Punkten $(-1,\ 2.6)$ und $(1,\ 2.6)$ aufgehängt ist. Bestimmen Sie die Basis a der von dem Seil gebildeten Hängekurve $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$. Wieviele verschiedene Funktionen f gibt es?

140 ▷ In einem Märchen erbittet ein einfacher Mann vom König eine (verdiente) Belohnung. Er soll auf das 1. Feld eines Schachbretts 1 Reiskorn legen, auf das 2 Feld 2 Körner, auf das 3. Feld 4 Körner usw., immer das Doppelte.

a) Wieviele Körner liegen auf dem 64. Feld? Berechnen Sie die Anzahl Dezimalstellen dieser Zahl.

b) Wie hoch wäre die Schicht Reis auf Berlin, wenn diese Menge gleichmäßig darauf verteilt würde? Ein Reiskorn hat die Abmessungen $2 \cdot 2.5 \cdot 8\,\mathrm{mm}^3$, Berlin hat eine Fläche von $892\,\mathrm{km}^2$. Nehmen Sie an, dass sich die Körner lückenlos aneinander legen lassen.

Wandeln Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe der Logarithmusregeln um. Alle Variablen seien positiv. Geben Sie evtl. benötigte weitere Einschränkungen der Variablen an.

141 ▷ $\ln 12 - \ln 4$

142 ▷ $\ln \mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}$

143 ▷ $\log_{10} \sqrt{10}$

144 ▷ $\ln \frac{b}{a} - \ln \frac{a}{b}$

145 ▷ $\log_a(5p^2q^3)$

146 ▷ $\log_a \frac{\sqrt[3]{b^2}}{3c}$

147 ▷ $\ln a + \ln b - \ln(a+b)$

148 ▷ $\ln(a^2 - ab + b^2) + \ln(a+b)$

149 ▷ $\ln a - \ln b + \ln(ab) - 2\ln(a-b)$

150 ▷ $\log_a(x+1) + \log_a(2x+2) - \log_a(x^2-1)$

Geben Sie jeweils den Gültigkeitsbereich für x in den folgenden Gleichungen an. Dann lösen Sie sie nach x auf.

151 ▷ $3\log_{10} x = \log_{10} 8$

152 ▷ $3\log_a x = \log_a 8$

153 ▷ $\log_{10} x^6 = \log_{10} x^3 + 6$

154 ▷ $4 + \log_{10} \sqrt[3]{x^7} = \log_{10} \sqrt[3]{x}$

155 ▷ $\log_2(\sqrt{x}+1) + \log_2(\sqrt{x}-1) - 2\log_2(x-1) - 1 = 0$

156 ▷ $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

157 ▷ $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 10000$

158 ▷ $\log_2 x + \log_2(x+1) = 1$

159 ▷ $p = 1 + 2 \cdot 10^{-kx}$

160 ▷ $q = b \cdot 2^{-r/x}$

161 ▷ Betrachten Sie nochmals Beispiel 4.20 (Seite 61). Die Einheit der Schallintensität I ist gemäß ihrer Definition W/m^2. Die *Lautstärke* L ist physikalisch einheitslos, wird aber zur Kenntlichmachung in *phon* angegeben. Welche Intensität hat ein Ton mit 40 phon bei einer Hörschwelle von $I_0 = 10^{-10}\,\mathrm{W}/\mathrm{m}^2$?

162 ▷ Eine Großmutter legt bei der Geburt ihres Enkels ein Sparbuch mit dem jährlichen Zinssatz von 3% an und zahlt einmalig einen Betrag ein. Wie alt wird der Enkel sein, wenn sich der Betrag verdoppelt hat?

163 ▷ Archäologen datieren gefundene Artefakte mit Hilfe des radioaktiven Zerfalls von Kohlenstoff. Die Methode besteht im Kern darin zu

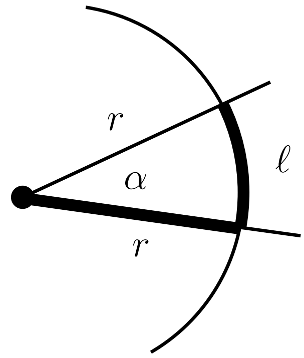
berechnen, zu welchem Zeitpunkt t_0 die folgende Formel denselben Wert hat wie ein am Fund gemessener Konzentrationswert $p \cdot C_0$. Die Größe des Referenzwerts C_0 spielt hier keine Rolle.

$$f(t) = C_0 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730\,\text{Jahre}}} .$$

Berechnen Sie das Alter eines Fundstücks, bei dem $p = {}^1\!/_{10}$ gemessen wurde.

5 Ebene Geometrie und Winkelfunktionen

5.1 Winkel und Dreiecke



Ein **Winkel** ist das Verhältnis zwischen der Länge eines Kreisbogenabschnitts und dem Kreisradius:

$$\boxed{\alpha := \frac{\ell}{r}}\,.$$

Winkel werden konventionell mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet. In der Geometrie ist als Einheit das **Gradmaß** mit dem Zeichen ° üblich. Eine volle Umdrehung entspricht dabei willkürlich 360°. Auf dem Taschenrechner muss der Modus *DEG* eingestellt sein, um im Gradmaß zu rechnen.

Wenn wir $r = 1$ annehmen, hat ein Winkel direkt den Wert der Bogenlänge. Dann wird er auch im **Bogenmaß** ohne eine Einheit angegeben. Diese Schreibweise wird am Einheitskreis vorausgesetzt, wo Winkel in Funktionen eingesetzt werden (siehe 5.5). Eine volle Umdrehung um den Kreismittelpunkt entspricht dann dem Kreisumfang von 2π. Der Taschenrechner muss dazu im Modus *RAD* stehen.

Aus dem Vergleich der beiden Vollumdrehungen folgt direkt eine Beziehung zur gegenseitige Umrechnung:

$$\boxed{\frac{\text{Bogenmaß}}{2\pi} = \frac{\text{Gradmaß}}{360°}}\,.$$

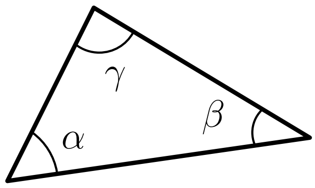
Beispiel 5.1: Der Winkel 45° entspricht im Bogenmaß $\frac{2\pi}{360°} \cdot 45° = \frac{\pi}{4}$.
Der Winkel $\frac{2\pi}{3}$ entspricht im Gradmaß $\frac{360°}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{3} = 120°$.

In Dreiecken liegen alle Winkel zwischen 0° und 180° (Gradmaß) bzw. zwischen 0 und π (Bogenmaß). Es lohnt sich, die folgenden speziellen Werte zu kennen:

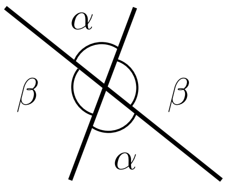
Gradmaß α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°
Bogenmaß x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π

Wichtige Beziehungen von Winkeln sind:

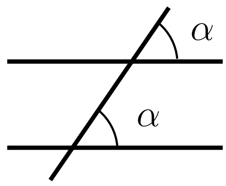
- *Winkelsumme* im Dreieck: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$
- *Scheitelwinkel* am Geradenschnittpunkt sind gleich
- *Stufenwinkel* an geschnittenen parallelen Geraden sind gleich.



Winkelsumme



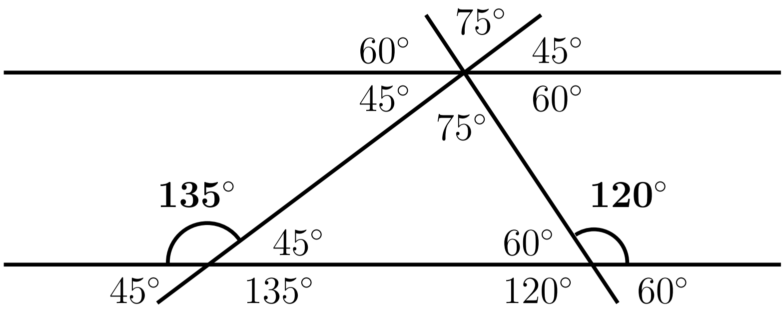
Scheitelwinkel



Stufenwinkel

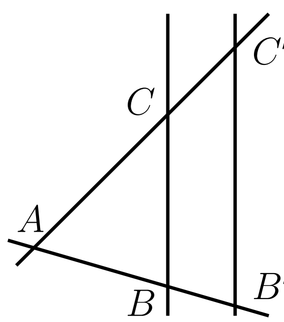
Mit diesen Beziehungen können wir in einer geometrischen Skizze aus den gegebenen Winkeln schnell weitere Winkel bestimmen.

Beispiel 5.2: Gegeben sei die folgende Skizze mit einem parallelen Geradenpaar und zwei weiteren Geraden, die sich in einem gemeinsamen Punkt treffen. Bekannt sind zunächst nur die beiden fett gedruckten Winkel auf der unteren Parallelen. Alle anderen Winkel lassen sich daraus der Reihe nach erschließen. Finden Sie eine mögliche Reihenfolge?



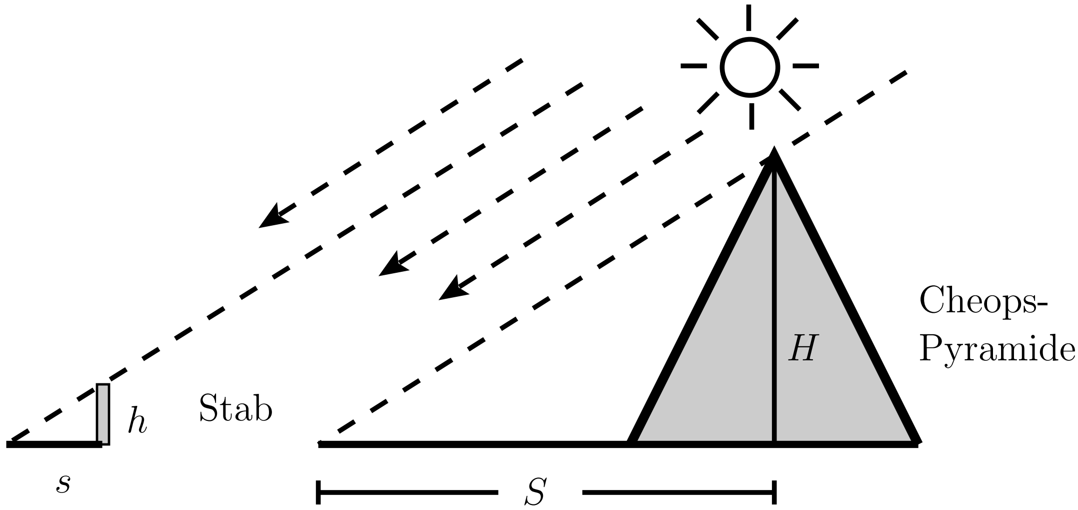
Stimmen zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ überein in zwei ihrer Winkel, heißen sie **ähnlich**. Dann stehen alle einander entsprechenden Seitenpaare im selben Verhältnis zueinander.

Angenommen, zwei parallele Geraden schneiden zwei nichtparallele. Dann stimmen die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle AB'C'$ überein im Winkel bei A sowie in den beiden Stufenwinkeln bei B und B'. Durch die Ähnlichkeit gilt der bekannte **Strahlensatz**:



$$\boxed{\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AB'}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AC'}|} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{B'C'}|}} \,.$$

Beispiel 5.3: Der Überlieferung nach hat der griechische Mathematiker *Thales* um ca. 600 v.Chr. die Höhe H der Cheops-Pyramide wie folgt berechnet. Er maß Höhe h und Schattenlänge s eines Stabes sowie die Schattenlänge S der Pyramide.



Da die Sonne paralleles Licht auf die Erde wirft, stehen nach dem Strahlensatz bei allen beleuchteten Objekten Höhe und Schattenlänge im selben Verhältnis. Hier ein mögliches Zahlenbeispiel:

$$s = 2.00\,\text{m} \qquad h = 1.63\,\text{m} \qquad S = 180\,\text{m}$$

aus dem Strahlensatz $\dfrac{h}{s} = \dfrac{H}{S}$ wird: $H = \dfrac{h}{s} \cdot S = 146.7\,\text{m}.$

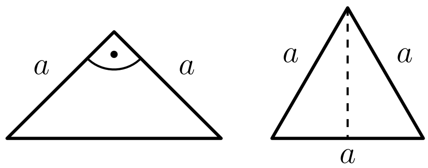
Anmerkung: Die Strecke S muss, wie in der Skizze zu sehen, durch zwei Teilstrecken bestimmt werden.

Aufgaben zu Winkeln und Dreiecken

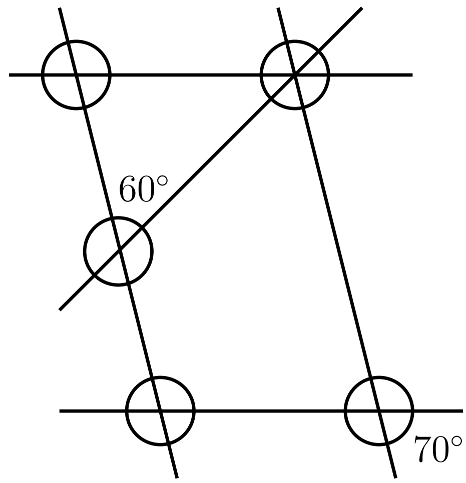
164 ▷ Geben Sie die folgenden Winkel im Gradmaß bzw. im Bogenmaß an.

a) $225°$ b) $\frac{3}{4}\pi$ c) $30'$ d) 0.02

165 ▷ Wie groß sind die Winkel in den Skizzen? Ergänzen Sie auch die fehlenden Seitenangaben.



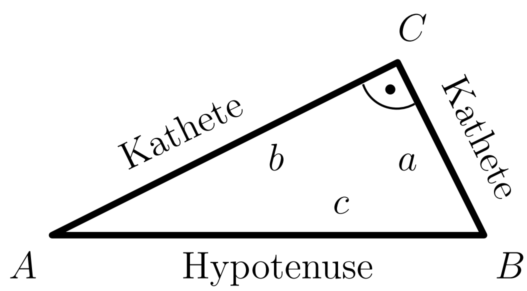
166 ▷ In der nebenstehenden Skizze wird ein Parallelogramm von einer Geraden geschnitten. Bestimmen Sie alle fehlenden Winkel.



5.2 Rechtwinklige Dreiecke

Ein Winkel der Größe 90° (bzw. $\pi/2$ im Bogenmaß) wird als **rechter Winkel** bezeichnet und in Skizzen zusätzlich mit einem Punkt markiert.

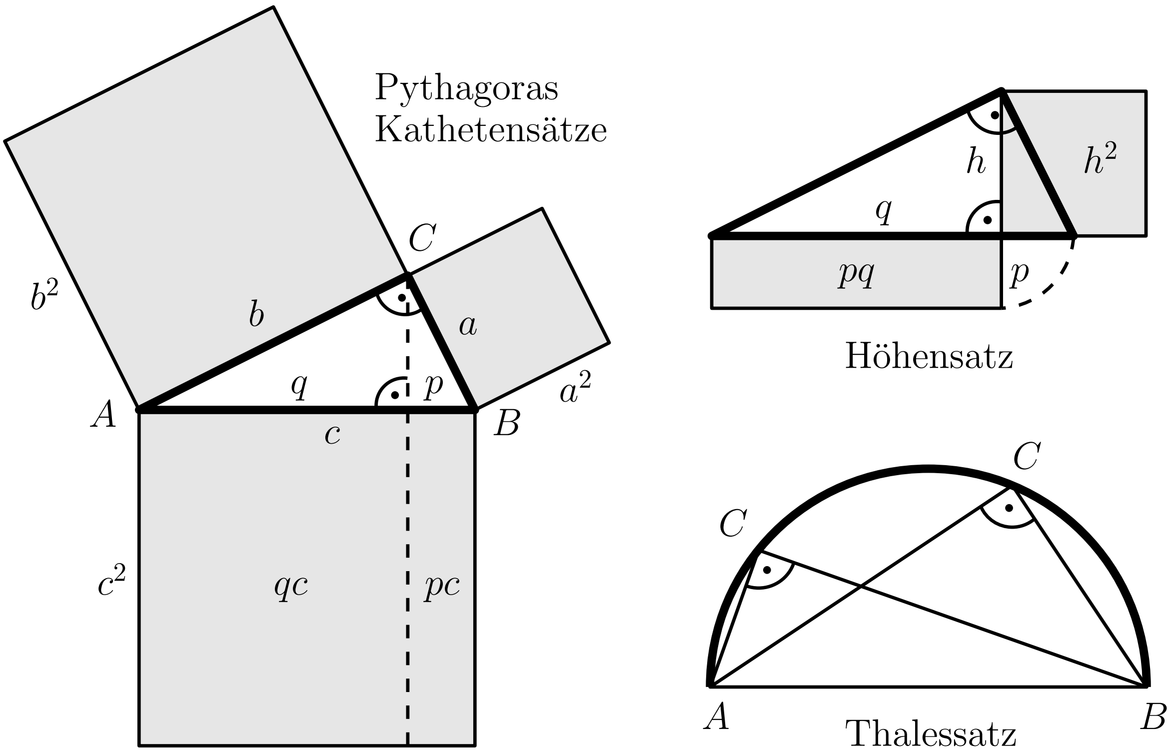
Ein Dreieck, das einen rechten Innenwinkel enthält, wird als **rechtwinkliges Dreieck** bezeichnet. Ein solches Dreieck hat eine eindeutige längste Seite, die dem rechten Winkel gegenüber liegt und **Hypotenuse** genannt wird. Die kürzeren beiden Seiten heißen die **Katheten**.



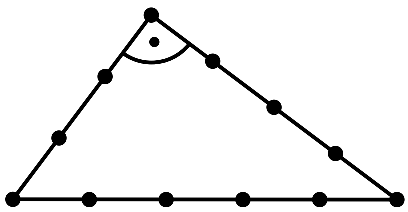
Die folgenden Sätze über rechtwinklige Dreiecke $\triangle ABC$ mit Katheten a, b und der Hypotenuse c sind sehr bekannt. h ist die Länge der Höhe von C auf die Hypotenuse, die durch sie in die Abschnitte p und q geteilt wird.

Satz des Pythagoras:	$a^2 + b^2 = c^2$
Kathetensätze:	$a^2 = p \cdot c$ und $b^2 = q \cdot c$
Höhensatz des Euklid:	$h^2 = p \cdot q$
Satz des Thales:	C liegt auf dem Halbkreis über der Strecke $\overline{AB}$. Für jeden solchen Punkt C ist $\triangle ABC$ ein rechtwinkliges Dreieck.

Die Werte der Multiplikationen lassen sich wie in Abschnitt 2.3 interpretieren als Flächen von Rechtecken. Das folgende Bild zeigt, wie:

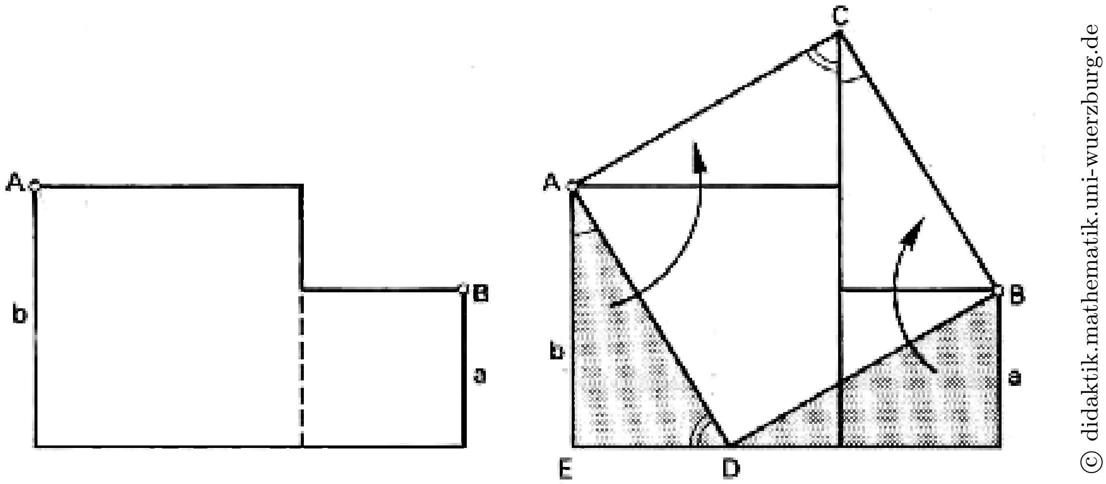


Beispiel 5.4: Der Satz des Pythagoras war sicher schon vor seinem Namensträger bekannt. Aus dem alten ägyptischen Reich (ca. 2700-2200 v.Chr.) wurden Ringseile mit 12 Knoten in gleichen Abständen gefunden.



Sie dienten unzweifelhaft dazu, von drei Leuten in den Abständen 3,4,5 Knoten gehalten zu werden. Wegen $3^2+4^2 = 5^2$ besitzt das entstehende Dreieck einen rechten Winkel, der sich bautechnisch verwenden ließ.

Die Gültigkeit dieses Satzes ergibt sich unmittelbar durch eine Flächenverlegung, wie sie in der folgenden Skizze zu sehen ist.



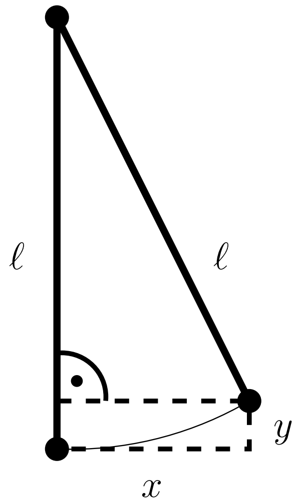
Links sind zwei Quadrate mit den Seitenlängen b bzw. a zu sehen. Auf ihrer gemeinsamen Basislinie wird von links her die Länge von a abgetragen

(Strecke $\overline{ED}$). Der Punkt D wird dann sowohl mit A als auch mit B durch eine gerade Strecke verbunden. Die beiden entstehenden grauen Dreiecke sind rechtwinklig und kongruent. Sie werden um die Punkte A bzw. B um $90°$ gedreht und bilden dann mit der Restfläche das weiße Quadrat (Bild rechts). Dessen Seitenlänge ist gleich der Länge der Dreieckshypotenuse c. (Es gibt viele weitere Beweise.)

Beispiel 5.5: Wir können mit Hilfe des Satzes von Pythagoras die Länge ℓ eines herabhängenden Seils bestimmen, ohne sie direkt zu messen (z.B. weil keine Leiter zur Hand ist). Dazu ziehen wir das untere Seilende ein Stück weit zur Seite, halten es stramm und messen (evtl. zu zweit) die Abweichung von seinem Ruhepunkt in x- und in y-Richtung. Diese beiden Messungen könnten z.B. $x = 72\,\text{cm}$ und $y = 8\,\text{cm}$ lauten.

Das Seil wird dadurch mit seiner Länge ℓ zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen $\ell - 8\,\text{cm}$ und $72\,\text{cm}$. Der Satz des Pythagoras liefert uns die folgende Gleichung, die wir weiter nach ℓ auflösen:

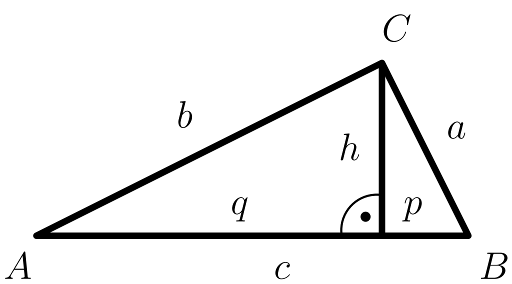
$$\begin{aligned}(\ell - 8\,\text{cm})^2 + (72\,\text{cm})^2 &= \ell^2 \\ (\ell^2 - \ell \cdot 16\,\text{cm} + 64\,\text{cm}^2) + 5184\,\text{cm}^2 &= \ell^2 \\ 5248\,\text{cm}^2 &= \ell \cdot 16\,\text{cm} \\ \ell = \frac{5248\,\text{cm}^2}{16\,\text{cm}} &= 328\,\text{cm}\,.\end{aligned}$$



In Abschnitt 5.4 sehen wir eine weitere Anwendung des pythagoräischen Satzes. Die Kathetensätze können ebenfalls auf vielfache Weise bewiesen werden. Hier sei ein Beweis vorgestellt, der sich gut als Übung im formalen Rechnen eignet.

Das rechtwinklige Dreieck $\triangle ABC$ wird durch seine Höhe h unterteilt in zwei kleinere rechtwinklige Dreiecke. Für sie gilt wieder der Satz des Pythagoras:

$$a^2 = p^2 + h^2 \quad \text{und} \quad b^2 = q^2 + h^2.$$



Subtrahieren wir beide Gleichungen voneinander, erhalten wir mit Hilfe der 3. binomischen Formel:

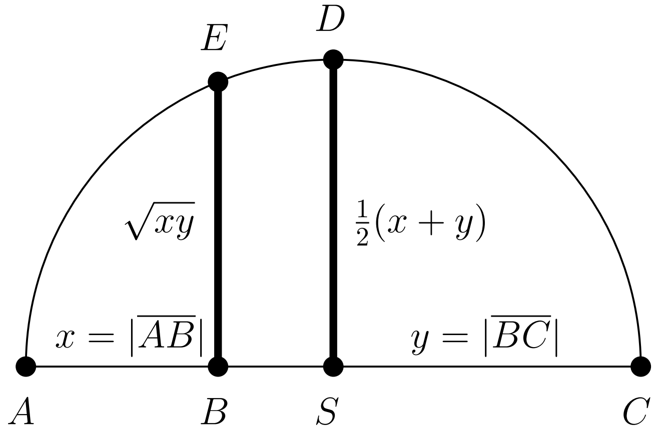
$$a^2 - b^2 \;=\; (p^2 + h^2) - (q^2 + h^2) \;=\; p^2 - q^2 \;=\; (p+q)(p-q)\,.$$

Da wieder nach Pythagoras auch $a^2 + b^2 = c^2 = (p+q)^2$ gilt, können wir diese beiden Gleichungen addieren und erhalten:

$$\begin{aligned}(a^2 - b^2) + (a^2 + b^2) &= (p+q)(p-q) + (p+q)^2 \\ &= (p+q) \cdot [\,(p-q) + (p+q)\,] \\ 2\,a^2 \qquad\qquad &= \quad c \quad \cdot \qquad 2\,p \\ a^2 &= p \cdot c\,.\end{aligned}$$

Der andere Kathetensatz $b^2 = q \cdot c$ ist dazu analog. Den Höhensatz $h^2 = p \cdot q$ beweisen Sie in einer Aufgabe selbst.

Beispiel 5.6: Der bekannte **arithmetische Mittelwert** zweier Zahlen x, y ist definiert als $\frac{1}{2}(x+y)$. Es gibt neben ihm weitere Mittelwerte, darunter den **geometrischen**: $\sqrt{xy}$.



Wir können ihr gegenseitiges Verhältnis veranschaulichen durch folgende Konstruktion. Wir tragen $x = |\overline{AB}|$ und $y = laengeBC$ nebeneinander als waagerechte Strecken ab. Dann errichten wir über der Gesamtstrecke $\overline{AC}$ die Mittelsenkrechte und schlagen um deren Schnittpunkt S einen Halbkreis mit Durchmesser laengeAC. Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechte mit dem Halbkreis sei D. Als Letztes zeichnen wir eine weitere Senkrechte auf B, die den Halbkreis in E schneidet.

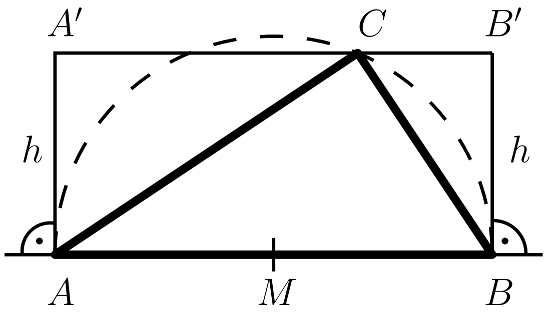
Dann gilt: $|\overline{DS}| = \frac{1}{2}(x+y)$. Der Abschnitt der Mittelsenkrechten zwischen D und S hat genau die Länge eines Kreisradius, also des halben Durchmessers.

Weiter gilt: $|\overline{BE}| = \sqrt{xy}$. Das Dreieck $\triangle ACE$ erfüllt den Satz des Thales und ist deshalb in E rechtwinklig. Die Strecke $|\overline{BE}|$ ist die Höhe dieses Dreiecks, für sie gilt nach dem Höhensatz: $laengeBE^2 = x \cdot y$.

Ein Zahlenbeispiel: $\frac{1}{2}(40 + 90) = 65,\ \sqrt{40 \cdot 90} = 60$.

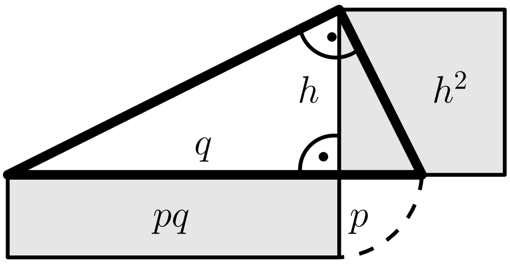
Aufgaben zu rechtwinkligen Dreiecken

167 ▷ Der Satz des Thales hilft uns, ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, von dem wir nur die Längen $|\overline{AB}|$ der Hypotenuse und der Höhe h darauf kennen. Können Sie die Schritte der Konstruktion aus der nebenstehenden Skizze ersehen?

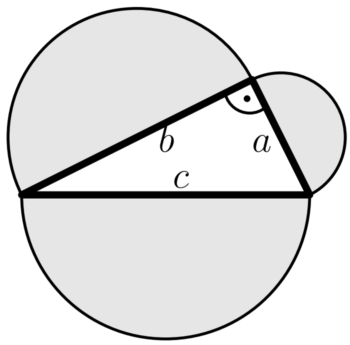


168 ▷ Greifen Sie die Idee im Beweis des *Kathetensatzes* $a^2 = p\,c$ auf und addieren Sie die beiden Gleichungen für a^2 und b^2. Zusammen mit dem Satz des Pythagoras im Dreieck $\triangle ABC$ erhalten Sie einen Beweis des *Höhensatzes*.

169 ▷ Der Höhensatz zeigt einen Weg, wie wir zeichnerisch eine Wurzel ziehen, also zu einem Rechteck ein flächengleiches Quadrat finden können. Können Sie die Schritte der Konstruktion angeben? *Tipp:* Der Thalessatz spielt auch mit.

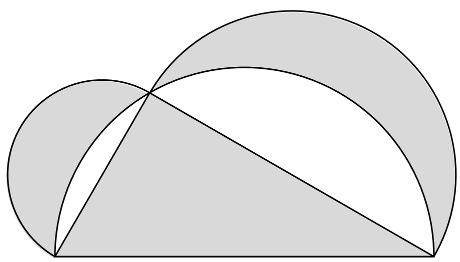


170 ▷ Der Satz des Pythagoras gilt auch für andere Figuren als Quadrate. Welchen Flächeninhalt hat ein Halbkreis mit Durchmesser d? Verwenden Sie Ihre Formel, um die nebenstehende Figur zu verstehen: Die Flächensumme der kleinen Halbkreise ist gleich dem Flächeninhalt des großen Halbkreises.

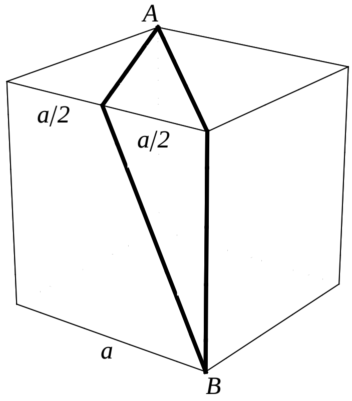


171 ▷ Wie können Sie für ein rechtwinkliges Dreieck ganz leicht aus den Seitenlängen a, b, c die Länge der Höhe h berechnen?
Tipp: Das Dreieck hat einen Flächeninhalt.

172 ▷ Zeigen Sie: Der Flächeninhalt der Möndchen des Hippokrates ist zusammen exakt so groß wie der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks.



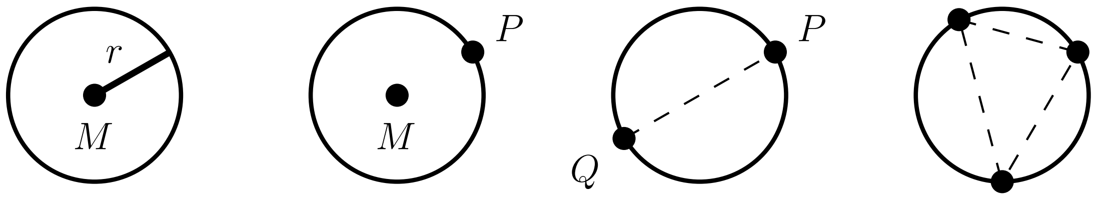
173 ▷ Berechnen Sie die Längen der beiden eingezeichneten Verbindungen zwischen A und B auf der Oberfläche des Würfels mit der Kantenlänge a. Welche ist kürzer?



5.3 Kreise

Ein **Kreis** $K(M, r)$ besteht formal aus allen Punkten, die von dem festen *Mittelpunkt* M denselben Abstand r *(Radius)* haben. Ein Kreis kann bestimmt werden durch

- Mittelpunkt M und Radius r
- Mittelpunkt M und ein Punkt P auf ihm. Dann ist $r = |\overline{MP}|$
- zwei auf einem Durchmesser gegenüberliegende Punkte P, Q. Dann ist $M = \frac{1}{2}(P + Q)$ und $r = \frac{1}{2}|\overline{PQ}|$
- drei beliebige Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Der Kreis ist dann der sog. *Umkreis* ihres Dreiecks.



Im x-y-Koordinatensystem liegen auf dem Kreis $K(M, r)$ mit Mittelpunkt $M(x_M, y_M)$ alle die Punkte (x, y), die die folgende Gleichung erfüllen:

$$\boxed{(x - x_M)^2 \;+\; (y - y_M)^2 \;=\; r^2} \; .$$

Diese Formel heißt die **kartesische Standardform**. Kommt Ihnen ihr Aussehen bekannt vor? Interpretieren Sie die entsprechenden Teilterme als Seitenlängen eines geeigneten rechtwinkligen Dreiecks!

Beispiel 5.7: Welchen Mittelpunkt und welchen Radius besitzt der Kreis mit der kartesischen Formel $x^2 + y^2 + 2(x - y) = 2$?
Um diese beiden Größen zu berechnen, müssen wir die gegebene Glei-

chung in die kartesische Standardform überführen. Das bedeutet: Wir bilden die beiden Binome $(x - x_M)^2$ und $(y - y_M)^2$ und lesen aus ihnen die Koordinaten des Mittelpunkts ab. Auf der rechten Seite steht dann der quadrierte Radius. Die Binome finden wir mit Hilfe der *quadratischen Ergänzung*, siehe 4.4:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2(x - y) &= 2 \\ (x^2 + 2x) + (y^2 - 2y) &= 2 \qquad\qquad \textit{quadr. Ergänzung} \\ (x^2 + 2x + (\tfrac{2}{2})^2) + (y^2 - 2y + (\tfrac{-2}{2})^2) &= 2 + (\tfrac{2}{2})^2 + (\tfrac{-2}{2})^2 \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 &= 4 = 2^2 \,. \end{aligned}$$

Hieraus lesen wir ab: $M(-1, 1)$ und $r = 2$.

Beispiel 5.8: Welche kartesische Standardform besitzt der Kreis, der von den beiden Punkten $P(-10, -6)$ und $Q(6, 6)$ als Durchmesser aufgespannt wird?
Wir berechnen die gesuchten Angaben direkt:

$$\begin{aligned} x_M &= \tfrac{1}{2}(x_P + x_Q) = \tfrac{1}{2}(-10 + 6) = -2 \\ y_M &= \tfrac{1}{2}(y_P + y_Q) = \tfrac{1}{2}(-6 + 6) = 0 \\ r &= \tfrac{1}{2}\sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{(-10 - 6)^2 + (-6 - 6)^2} = 10 \,. \end{aligned}$$

Diese Daten setzen wir ein in die kartesische Standardform:

$$(x + 2)^2 + (y - 0)^2 = 10^2 \,.$$

Um die evtl. Schnittpunkte eines Kreises mit einer Geraden zu finden, setzen wir die Geradenvorschrift $y = mx + n$ für y in die Kreisvorschrift ein. Wir erhalten eine quadratische Gleichung in x, die wir mit der Technik aus 4.4 lösen können.

Beispiel 5.9: In welchen Punkten schneidet die Gerade $y = -x + 12$ den Kreis aus Beispiel 5.8?
Wir setzen die rechte Seite der Geradenvorschrift für y in die Kreisformel

ein und lösen nach x auf:

$$\begin{aligned}(x+2)^2+(-x+12)^2 &= 10^2 && \text{bin. Formeln}\\ (x^2+4x+4)+(x^2-24x+144) &= 100 && \mid -100\\ 2x^2-20x+48 &= 0 && \mid \div 2\\ x^2-10x+24 &= 0 && pq\text{-Formel}\end{aligned}$$

$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{5^2-24} = 5 \pm 1 = 4\ /\ 6\,.$$

Als Letztes berechnen wir aus den x-Werten die y-Werte der Schnittpunkte, indem wir sie in die Geradengleichung einsetzen

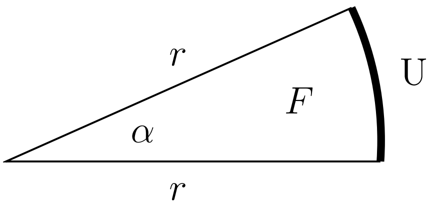
$$\begin{aligned} y_1 &= -x_1+12 = -4+12 = 8\\ y_2 &= -x_2+12 = -6+12 = 6\,.\end{aligned}$$

Antwort: Gerade und Kreis schneiden einander in den Punkten $(4,8)$ und $(6,6)$. Vollziehen Sie diese Rechnung durch eine Skizze nach und machen Sie eine Rechenprobe durch Einsetzen der Punkte in die Kreisgleichung!

Als geschlossene ebene Figur hat ein Kreis einen Umfang und einen Flächeninhalt. Diese hängen nur vom Radius r ab und der berühmten Konstanten $\pi \approx 3.141592653\ldots$:

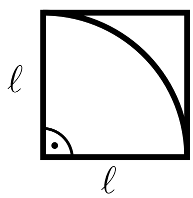
$$\boxed{\text{Umfang} = 2\pi\, r \qquad \text{Flächeninhalt} = \pi\, r^2}\,.$$

Ein Kreissektor hat einen entsprechenden Anteil daran, abhängig vom Verhältnis des Mittelpunktswinkels α (im Bogenmaß) zum Kreisumfang 2π:



$$\boxed{\begin{aligned}\text{Umfanganteil} \quad U &= \frac{\alpha}{2\pi}\cdot 2\pi\, r = \alpha\, r\\ \text{Flächenanteil} \quad F &= \frac{\alpha}{2\pi}\cdot \pi\, r^2 = \frac{\alpha}{2}\, r^2\,.\end{aligned}}$$

Beispiel 5.10: Welchen Anteil hat die Fläche eines Viertelkreises an dem ihn umfassenden Quadrat?
Das Quadrat hat den Flächeninhalt von ℓ^2, der Viertelkreis den von $\frac{\alpha}{2}\,\ell^2$ mit $\alpha = \pi/2$. Wir erhalten als Verhältnis:



$$\frac{F_K}{F_Q} = \frac{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\ell^2}{\ell^2} = \frac{\pi}{4} \approx 78.5\%\,.$$

Aufgaben zu Kreisen

Wie lauten die Gleichungen von Kreisen mit den folgenden Eigenschaften? Geben Sie diese in kartesischer Standardform an.

174 ▷ Der Kreis enthält den Punkt $P(1,-1)$ und hat als Mittelpunkt $M(-2,3)$.

175 ▷ Der Kreis hat den Durchmesser $\overline{PQ}$ mit $P(-3,3)$ und $Q(1,-5)$.

176 ▷ Der Kreis berührt die x-Achse im Punkt $P(5,0)$ und hat den Radius $r=2$.

Es sei gegeben der Kreis K mit der Gleichung $x^2+y^2-2x-8y+4=0$.

177 ▷ Bestimmen Sie Mittelpunkt M und Radius r von K.

178 ▷ In welchen Punkten schneidet K die Gerade mit der Gleichung

a) $y=x+2$? b) $y=5x-14$? c) $y=-x-2$?

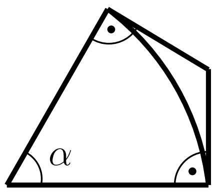
179 ▷ Gibt es einen Radius $r_0>0$, für den sowohl Umfang als auch Fläche eines Kreises $K(M,r_0)$ dieselbe Maßzahl besitzen?

180 ▷ Ein Reifrock einer Prinzessin vergrößert ihren Hüftumfang um 1 m. Wie weit steht der Reifrock von der Hüfte ab?

Ein ähnliches Problem: Um den Äquator der Erde (als Kreis idealisiert) wird ein Reifen gelegt, der 1 m zu lang ist. Wie hoch steht der Reifen über der Erdoberfläche?

181 ▷ 1 Seemeile (sm) ist definiert als die Länge eines Längenkreisabschnitts auf der Erdoberfläche, der zum Winkel von 1 Bogenminute $= {}^1\!/_{60}{}^\circ$ gehört. Der Erdradius hat die mittlere Länge von 6367 km. Wie lang ist 1 sm in Kilometern?

182 ▷ Welchen Anteil hat die Fläche eines Kreissektors mit dem Mittelpunktswinkel $\alpha = {}^\pi\!/_3$ an dem Viereck, das die Radien mit den beiden Kreistangenten einschließen?



183 ▷ Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Haben ein Quadrat und ein Kreis denselben Umfang U, so ist der Flächeninhalt des Kreises größer als der des Quadrats.

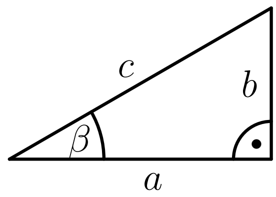
b) Das Quadrat hat unter allen Rechtecken eines vorgegebenen Umfangs U den größten Flächeninhalt.

c) Der Flächeninhalt eines Kreises ist größer als der Flächeninhalt jedes Rechteckes mit demselben Umfang.

5.4 Winkelfunktionen am Dreieck

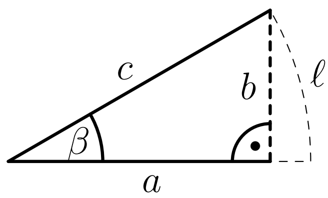
Wir betrachten ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck. Die **Winkelfunktionen Sinus**, **Cosinus** und **Tangens** rechnen das Zahlenverhältnis *Kreisbogenlänge zu Radius* um in andere Verhältnisse des Typs *gerade Streckenlänge zu Radius*. Diese Funktionen sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\sin\beta &:= \frac{|\,\text{Gegenkathete von }\beta\,|}{|\,\text{Hypotenuse}\,|} &= \frac{b}{c}\\
\cos\beta &:= \frac{|\,\text{Ankathete von }\beta\,|}{|\,\text{Hypotenuse}\,|} &= \frac{a}{c}\\
\tan\beta &:= \frac{|\,\text{Gegenkathete von }\beta\,|}{|\,\text{Ankathete von }\beta\,|} &= \frac{b}{a}\,.
\end{aligned}$$



In den Formeln bedeuten die Betragsstriche „Länge von".

Ergänzen wir den Kreisbogen, so gilt bei dem abgebildeten Dreieck nach Definition $\beta = \ell/c$, und so



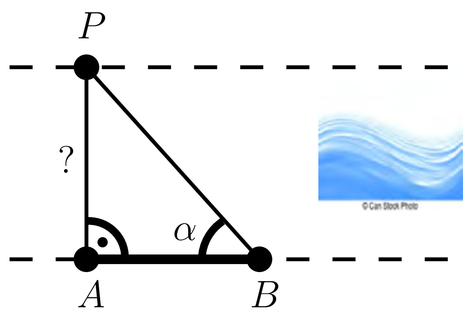
$$\sin\beta \;=\; \sin\frac{\ell}{c} \;=\; \frac{b}{c}\,.$$

Hier wird also tatsächlich ein „gekrümmtes" in ein „gerades" Streckenverhältnis umgerechnet.

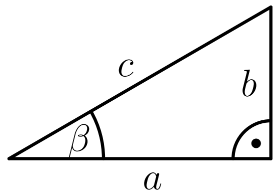
In Aufgabe 184 erstellen Sie selbst eine Tabelle mit den wichtigsten Werten der drei Winkelfunktionen.

Beispiel 5.11: Wir können vom Südufer eines geraden Flusses aus seine Breite berechnen. Dazu fixieren wir am Nordufer einen festen Punkt P. Wir suchen den ihm genau gegenüber liegenden Punkt A und wählen einen weiteren beliebigen Punkt B aus. Wir messen die Entfernung $\overline{AB} = 300\,\text{m}$ und den Winkel $\alpha = \sphericalangle ABP = 55°$. Daraus erhalten wir als Ansatz die Definitionsgleichung des Tangens:

$$\begin{aligned}
\tan\alpha &= \frac{|\overline{AP}|}{|\overline{AB}|}\\
|\overline{AP}| &= |\overline{AB}|\cdot\tan\alpha\\
&= 300\,\text{m}\cdot\tan 55°\\
&\approx 428\,\text{m}\,.
\end{aligned}$$



Der Satz des Pythagoras (Abschnitt 5.2) liefert einen interessanten Zusammenhang zwischen den Winkelfunktionen. Wegen $c^2 = a^2 + b^2$ folgt



$$\begin{aligned} 1 &= \left(\tfrac{b}{c}\right)^2 + \left(\tfrac{a}{c}\right)^2 = (\sin\beta)^2 + (\cos\beta)^2 \\ &= \sin^2\beta + \cos^2\beta\,. \end{aligned}$$

$$\boxed{\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1}$$

Oft wird, wie hier, vereinfacht $\sin^2\beta := (\sin\beta)^2$ und $\cos^2\beta := (\cos\beta)^2$ geschrieben. Außerdem ist

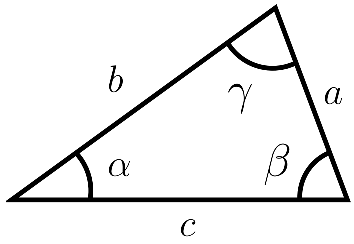
$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a} = \frac{b}{a} = \tan\beta\,.$$

$$\boxed{\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$

Prüfen Sie diese beiden wichtigen Beziehungen in der obigen Tabelle nach!

Der sog. **Sinussatz** stellt alle Seitenlängen ins Verhältnis zu ihren gegenüber liegenden Winkeln:

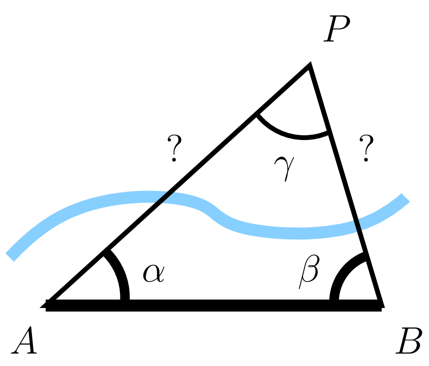
$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}\,.$$



Beispiel 5.12: Es seien im Gelände zwei Punkte A, B bekannt und ihre direkte Entfernung betrage $|\overline{AB}| = 86\,\mathrm{m}$. Der Punkt P liege von beiden durch einen Bach (hellblau) getrennt, sodass die direkten Entfernungen $|\overline{AP}|$ und $|\overline{BP}|$ berechnet werden müssen. Dazu messen wir die beiden Winkel $\alpha = \sphericalangle PAB = 46°$ und $\beta = \sphericalangle ABP = 62°$.

Wir berechnen zunächst den dritten Winkel:

$$\gamma = \sphericalangle BPA = 180° - \alpha - \beta = 72°\,.$$



Nach dem Sinussatz wissen wir, dass gilt:

$$\frac{|\overline{BP}|}{\sin\alpha} = \frac{|\overline{AP}|}{\sin\beta} = \frac{|\overline{AB}|}{\sin\gamma}\,.$$

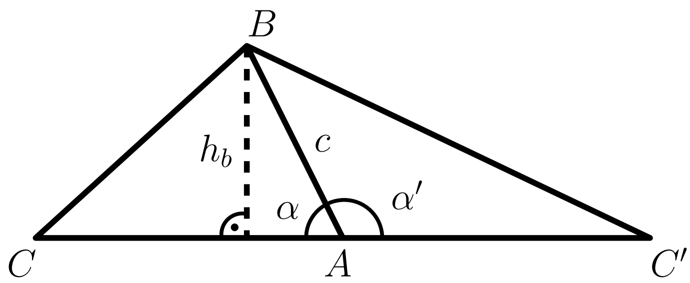
Der dritte Bruch ist vollständig bekannt und wir können nach den beiden unbekannten Streckenlängen auflösen:

$$|\overline{AP}| = \frac{|\overline{AB}|}{\sin\gamma}\sin\beta \approx \frac{86\,\text{m}}{0.9511}\cdot 0.8829 \approx 79.84\,\text{m}$$
$$|\overline{BP}| = \frac{|\overline{AB}|}{\sin\gamma}\sin\alpha \approx \frac{86\,\text{m}}{0.9511}\cdot 0.7193 \approx 65.05\,\text{m}\,.$$

Wenn von einem allgemeinen Dreieck die Rede ist, assoziieren wir damit meist eines wie in den Skizzen oben: mit drei spitzen Winkeln. Es darf aber nicht übersehen werden, dass auch stumpfe Winkel in der Geometrie eine Rolle spielen.

In der Skizze rechts ist zu erkennen, dass die beiden Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle AC'B$ dieselbe Seite c und dieselbe Höhe h_b besitzen. Demnach gilt:

$$\sin\alpha = \frac{h_b}{c} = \sin\alpha'\,.$$

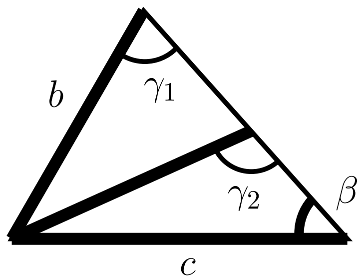


Die beiden Winkel sind aber nicht gleich, sondern stehen im Verhältnis $\alpha + \alpha' = 180°$. Diese Zweideutigkeit muss bei Berechnungen stets bedacht werden.

Beispiel 5.13: Das unten skizzierte Dreieck soll festgelegt werden durch seine Grundseite c, den Winkel β und die Länge der Seite b.

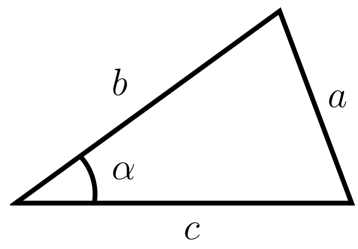
Es ist zu erkennen, dass zwei mögliche Dreiecke mit diesen Eigenschaften existieren. Der Sinussatz liefert zunächst

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$
$$\sin\gamma = c\cdot\frac{\sin\beta}{b}\,.$$



Um γ zu erhalten, müssen wir die Funktion arcsin verwenden, siehe 5.5. Diese liefert immer höchstens einen rechten Winkel, also hier den kleineren γ_1. Mit Hilfe der obigen Beobachtung wird das kleinere Dreieck bestimmt durch $\gamma_2 = 180° - \gamma_1$.

Der sog. **Cosinussatz** verallgemeinert den Satz des Pythagoras für nicht-rechtwinklige Dreiecke. So kann jede Seitenlänge durch die beiden anderen Längen und ihren jeweiligen Zwischenwinkel berechnet werden. Hier ohne Beweis die Berechnung von a:

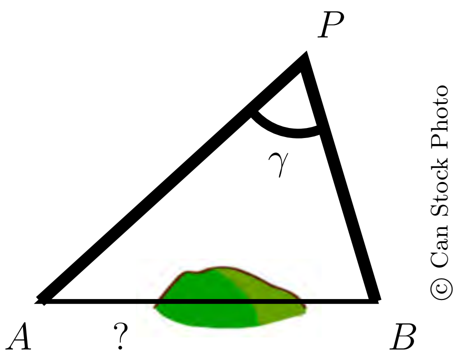


$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha}\,.$$

Natürlich können wir diese Formel auch nach α auflösen. Dazu benötigen wir die Funktion arccos, siehe 5.5.

Beispiel 5.14: Es seien im Gelände zwei Punkte A, B bekannt, die durch einen Hügel (grün) getrennt sind.

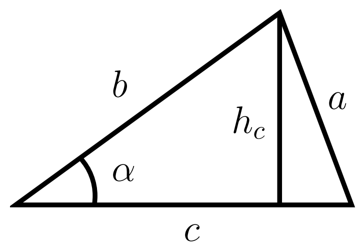
Um ihre Luftlinienentfernung voneinander zu berechnen, wählen wir einen willkürlichen Punkt P, von dem aus die Streckenlängen zu A, B messbar sind und bestimmen $|\overline{AP}| = 96\,\text{m}$ bzw. $|\overline{BP}| = 82\,\text{m}$. Weiter peilen wir A, B von P aus an und messen den Winkel $\gamma = 50°$.
Der Cosinussatz liefert die gesuchte Entfernung:



$$\begin{aligned} |\overline{AB}|^2 &= |\overline{AP}|^2 + |\overline{BP}|^2 - 2\,|\overline{AP}|\,|\overline{BP}|\,\cos\gamma \\ &= (96\,\text{m})^2 + (82\,\text{m})^2 - 2\cdot 96\,\text{m}\cdot 82\,\text{m}\cdot\cos 50° \\ &\approx 9216\,\text{m}^2 + 6724\,\text{m}^2 - 15744\,\text{m}^2\cdot 0.6248 \\ &\approx 5838\,\text{m}^2\,. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir $|\overline{AB}| \approx \sqrt{5838\,\text{m}^2} \approx 76.4\,\text{m}$.

Mit Hilfe der Winkelfunktionen werden auch allgemeine, nicht-rechtwinklige Dreiecke in all ihren Maßen berechenbar. Die Höhe h_c auf der Grundseite c hat beispielsweise die Länge $h_c = b\sin\alpha$. Der Flächeninhalt F des Dreiecks ist damit



$$\boxed{F = \tfrac{1}{2}\,c\,h_c = \tfrac{1}{2}\,c\,b\,\sin\alpha}\,.$$

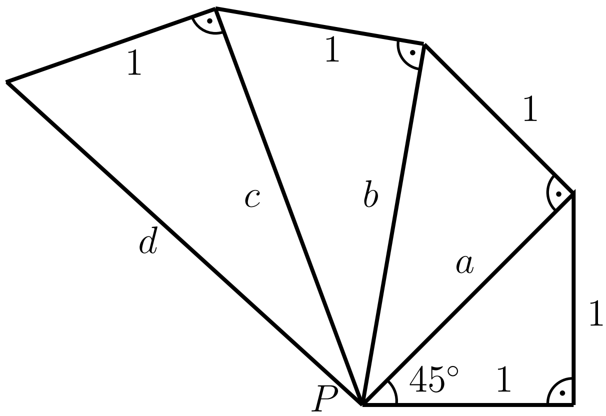
Aufgaben zu Winkelfunktionen am Dreieck

184 ▷ Füllen Sie die nebenstehende Tabelle aus. Betrachten Sie auch die „entarteten“ rechtwinkligen Dreiecke mit $\alpha = 0°$, $\alpha = 90°$ *(siehe auch Aufgabe 165)*.

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$					
$\cos\alpha$					
$\tan\alpha$					

185 ▷ In welcher Beziehung steht die Gleichung $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ zum Satz des Pythagoras?

186 ▷ Bestimmen Sie die Längen a, b, c, d der unbekannten Seiten. Wie geht diese Folge weiter?



187 ▷ Finden Sie heraus, wieviele Dreiecke diese Folge enthalten muss, damit der zentrale Gesamtwinkel im Punkt P mehr als $180°$ beträgt.

188 ▷ Ein Drachen wird an einer Schnur von 100 m Länge unter einem Winkel von $60°$ zur Horizontalen gehalten. Wie hoch steht der Drachen über dem Erdboden?

189 ▷ Ein Schiff befindet sich in Küstennähe. Der Navigator sieht mit seinem Sextanten die Spitze eines Leuchtturms auf einer Steilküste unter einem Winkel von $5°$, nach dem Hafenhandbuch liegt die Spitze des Turmes 350 m hoch. Wie weit ist das Schiff von der Küste entfernt? *Hinweis:* Vernachlässigen Sie die Augenhöhe.

190 ▷ Um das Fließen eines Gletschers nachzuweisen, werden zu beiden Seiten des Gletschers im Fels zwei Marken A und B im Abstand von 157.5 m angebracht. Die Verbindungsstrecke der beiden Marken liegt senkrecht zur Flussrichtung. Auf der Verbindungsgeraden von A und B wird eine dritte Marke C im Abstand von 53.5 m zu A auf dem Eis angebracht. Nach einiger Zeit beobachtet man, dass C vorgerückt ist, und misst für den Winkel $\sphericalangle CAB$ den einen Wert $1°\,54'$.

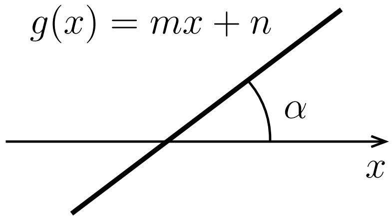
a) Um welche Strecke s ist C vorgerückt?

b) Für eine Kontrolle wird der Winkel $\beta = \sphericalangle ABC$ gemessen. Welchen Wert müsste man da erhalten?

191 ▷ Ein Bild wiegt 0.5 kg. Um es an einem Nagel aufzuhängen, wird eine Schnur an zwei Ösen im Rahmen befestigt. Welche Zugkräfte (in N)

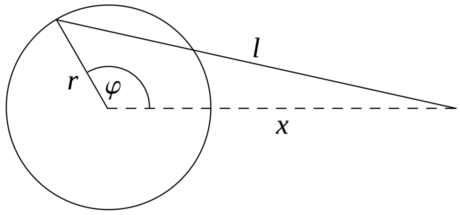
herrschen in der 101 cm langen Schnur, wenn die Ösen einen Abstand von 100 cm haben?

192 ▷ Berechnen Sie die Steigung m einer Geraden $g(x) = mx + n$ aus dem Winkel α, den g mit der x-Achse in positiver x-Richtung einschließt. Begründen Sie Ihre Formel.

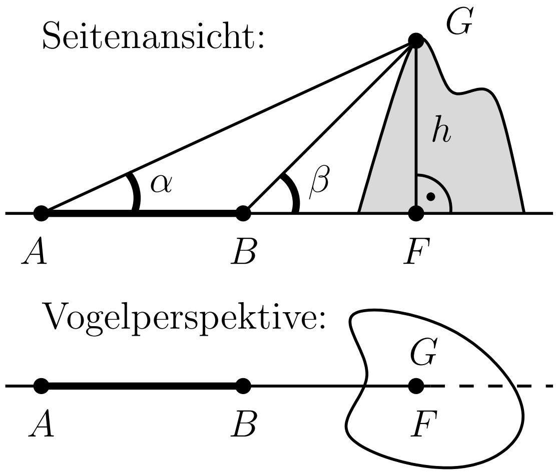


193 ▷ Machen Sie sich klar, dass der Cosinussatz für $\alpha = 90°$ tatsächlich zum Satz des Pythagoras wird. Welches Aussehen nimmt in diesem Fall der Sinussatz an?

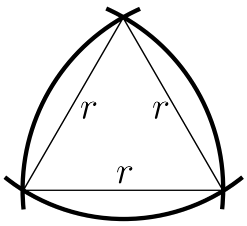
194 ▷ Geben Sie die Lage x des Kolbens eines Kurbelgetriebes in Abhängigkeit des Drehwinkels φ, der Länge der Pleuelstange l und des Kurbelradius r an.



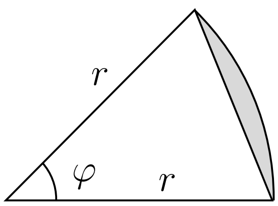
195 ▷ Ein Berggipfel G wird von zwei Standorten A und B aus angepeilt, die in gerader Linie mit ihm liegen. Die Winkel betragen $\alpha = 35°$, $\beta = 56°$ und die Standorte liegen $|\overline{AB}| = 3500\,\text{m}$ auseinander. Wie hoch ist der Gipfel G? Leiten Sie die Formelbeziehung erst allgemein her bevor Sie einsetzen.



196 ▷ Berechnen Sie den Flächeninhalt der angegebenen Figur, die aus drei überlappenden Kreissektoren mit Radius r zusammengesetzt ist. *Tipp:* Aufgabe 165.



197 ▷ Geben Sie den Flächeninhalt des schraffierten Kreissegments an für $r = 10$ und $\varphi = \pi/4$. Leiten Sie die Formelbeziehung erst allgemein her bevor Sie einsetzen.



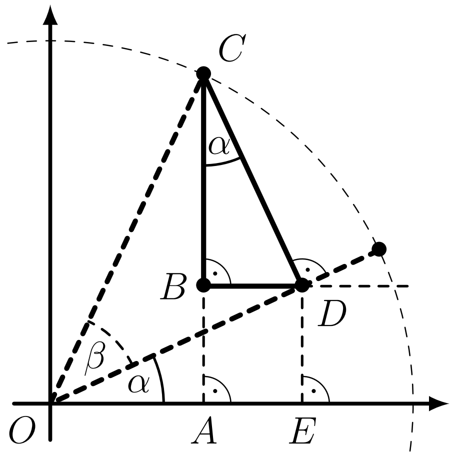
198 ▷ Warum sind die beiden mit α bezeichneten Winkel gleich? Geben Sie außerdem die folgenden Werte als Seitenlängenverhältnisse an:

a) $\sin(\alpha+\beta)$ e) $\cos\alpha\ (\triangle BDC)$

b) $\sin\alpha\ (\triangle OED)$ f) $\cos(\alpha+\beta)$

c) $\cos\beta\ (\triangle ODC)$ g) $\sin\alpha\ (\triangle BDC)$

d) $\sin\beta\ (\triangle ODC)$ h) $\cos\alpha\ (\triangle OED)$



199 ▷ Leiten Sie mit den Beziehungen aus Aufgabe 198 die Additionstheoreme sowohl für $\sin(\alpha \pm \beta)$ als auch für $\cos(\alpha \pm \beta)$ her.

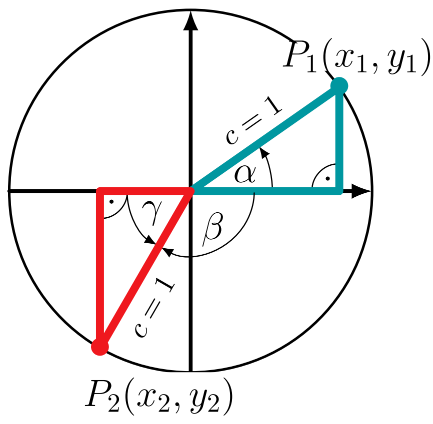
$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}}$$

200 ▷ Geben Sie die Beziehungen für $\sin(2\alpha)$, $\cos(2\alpha)$ und $\tan(2\alpha)$ an, die sich aus den Additionstheoremen (siehe Aufgabe 5.4) ergeben.

5.5 Winkelfunktionen am Einheitskreis

Zur Erinnerung: im Kontext des Einheitskreises und der Winkelfunktionen über $\mathbb{R}$ ist die Angabe von Winkeln im Bogenmaß üblich, siehe Abschnitt 5.1.

Die Winkelfunktionen wurden am Dreieck eingeführt, wo nur kleine Winkel $0 \le x \le \pi$ auftreten. Die Winkelfunktionen können aber auch für Winkel $x < 0$ oder $x > \pi$ ausgewertet werden. Dabei hilft die Beobachtung, dass bei einem rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenuse $c = 1$ ein Eckpunkt $P(x, y)$ immer auf dem Einheitskreis liegt. Im Bild ist



$$P_1(x_1, y_1) = \left(\frac{x_1}{c}, \frac{y_1}{c}\right) = (\cos\alpha,\, \sin\alpha)\ ,$$

sodass $(\cos\alpha,\, \sin\alpha)$ die Koordinaten von P_1 sind. Der Winkel $\beta < 0$ definiert den Punkt P_2 auf dem Einheitskreis. Es wird festgelegt, dass auch jetzt

$$P_2(x_2, y_2) = (\cos\beta,\, \sin\beta)$$

die Koordinaten von P_2 sind.

Beispiel 5.15: Im Bild ist zu sehen, dass $x_2 = {}^{-1}/_2$. Der Satz des Pythagoras bringt

$$1 = x_2^2 + y_2^2\,, \qquad \text{also} \qquad |\,y_2\,| = \sqrt{1-x_2^2} = \sqrt{1-\tfrac{1}{4}} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

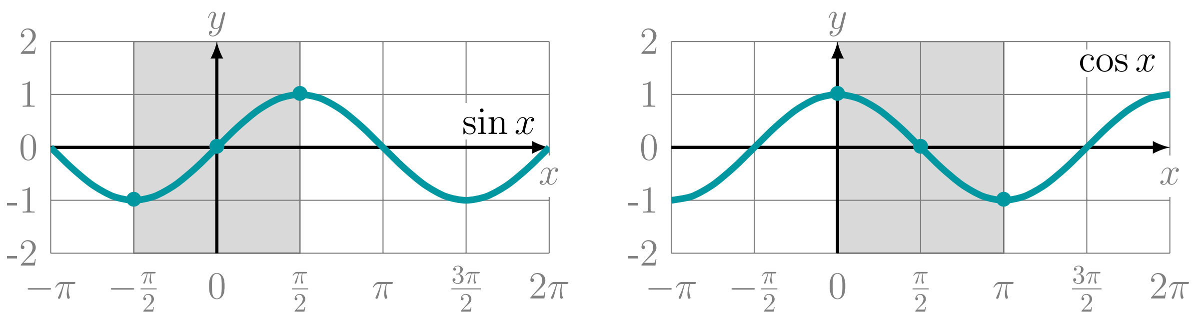
Deshalb muss $y_2 = {}^{-\sqrt{3}}/_2$ sein. Wegen $\sin\gamma = |\,y_2\,| = {}^{\sqrt{3}}/_2$ wird aus der Bogenmaß-Tabelle (S. 67) $\gamma = {}^{\pi}/_3$ (entspricht $60°$) abgelesen. Damit ist $\beta = -(\pi-\gamma) = {}^{-2\pi}/_3$ (entspricht $-120°$). Konkret ist hier

$$P_2(x_2, y_2) = \left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\cos\left(-\tfrac{2\pi}{3}\right), \sin\left(-\tfrac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Vervollständigen Sie die folgende Tabelle für negative Winkel:

Gradmaß α	$0°$	$-30°$	$-45°$	$-60°$	$-90°$	$-120°$	$-180°$
Bogenmaß x	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\pi$
$\sin x$	0					$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\cos x$	1					$-\frac{1}{2}$	-1
$\tan x$	0						0

Wenn sehr viele Funktionswerte berechnet werden, dann können wir die Graphen der Winkelfunktionen sin und cos auf ganz $\mathbb{R}$ skizzieren:



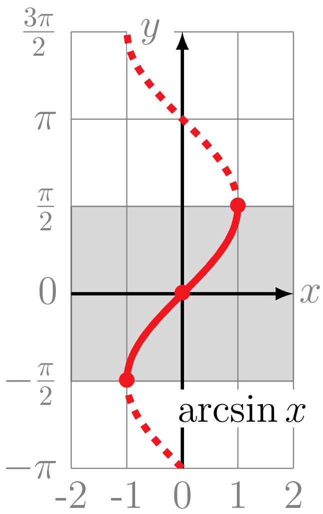
Ihre Werte liegen immer zwischen -1 und $+1$.

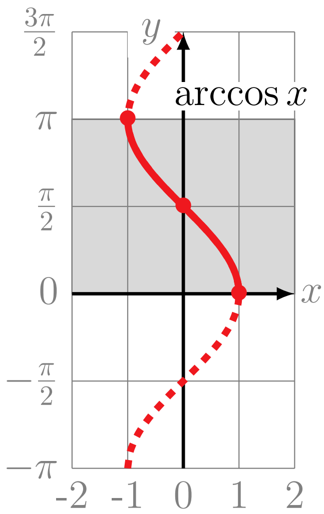
Da nach seinem Umfang von 2π der Kreis einmal umrundet ist, wiederholen sich alle Werte der Winkelfunktionen **periodisch**. Man sagt, sin und cos schwingen um die x-Achse. Für alle ganzen Zahlen k gilt:

$$\begin{aligned} \sin(\,\alpha + k\cdot 2\pi\,) &= \sin\alpha \\ \cos(\,\alpha + k\cdot 2\pi\,) &= \cos\alpha \\ \tan(\,\alpha + k\cdot \pi\,) &= \tan\alpha\,. \end{aligned}$$

Warum hat $\tan\alpha$ die Periodendauer von nur π?

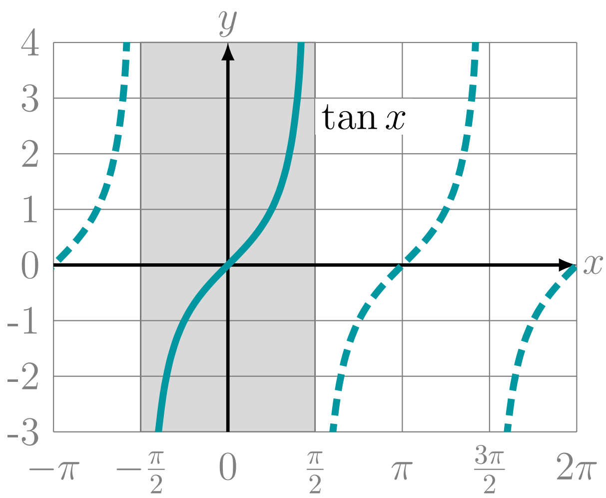
Im Abschnitt 2.7 wurden Umkehrfunktionen allgemein beschrieben. Wenn die Funktionsgraphen von sin und cos, wie dort gesagt, an der diagonalen Geraden mit der Gleichung $y = x$ gespiegelt werden, schwingen die Bilder um die y-Achse. Die Spiegelung ergibt also keine Funktion, denn jedem x-Wert muss *genau ein* y-Wert zugeordnet sein.

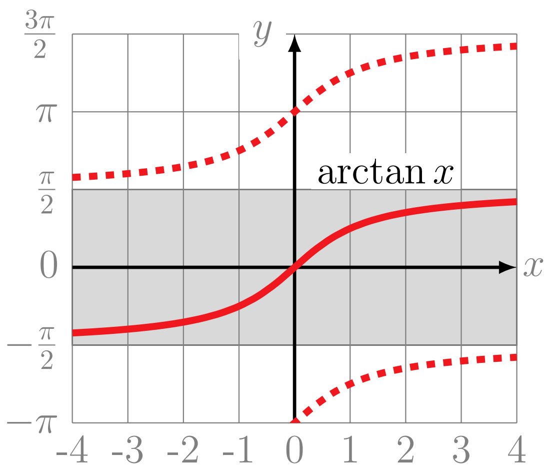




Das bedeutet, dass $\sin x$ und $\cos x$ nur in dem gezeigten grau markierten Bereich umkehrbar sind.

Die Funktion $\tan x$ nimmt in der Nähe von $\pi/2$ beliebig große und kleine Werte an und ist in $\pi/2$ selbst nicht definiert (warum?). Ihre Umkehrfunktion kann deshalb für alle reellen Zahlen ausgewertet werden. Ihre Werte liegen *echt* zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$, d.h. diese Randwerte werden nie erreicht.





Die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen heißen **Arcusfunktionen**.

Sie berechnen aus Streckenverhältnissen die zugehörigen Winkel:

$$\begin{array}{rrcccl} -1 \le x \le 1: & -\pi/2 & \le & \textbf{arcsin}\ x & \le & \pi/2 \\ -1 \le x \le 1: & 0 & \le & \textbf{arccos}\ x & \le & \pi \\ x \text{ beliebig:} & -\pi/2 & < & \textbf{arctan}\ x & < & \pi/2\,. \end{array}$$

Beispiel 5.16: Betrachten wir nochmals Beispiel 5.13. Für die Seitenlängen $b = 100\,\mathrm{m}$, $c = 150\,\mathrm{m}$ und den Winkel $\beta = 35°$ berechnen wir zunächst

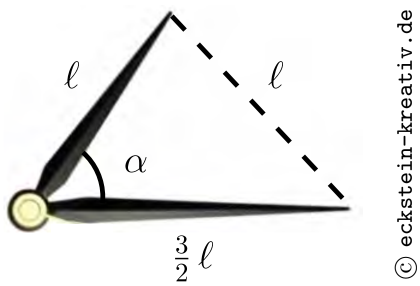
$$\sin\gamma \;=\; c\cdot\frac{\sin\beta}{b} \;=\; 150\,\mathrm{m}\cdot\frac{\sin 35°}{100\,\mathrm{m}} \;\approx\; 0.8604\,.$$

Daraus bekommen wir die beiden Lösungen

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\approx \arcsin 0.8604 \approx 59.4° \\ \gamma_2 &\approx 180° - 59.4° \approx 120.6°\,. \end{aligned}$$

Beispiel 5.17: Der große Zeiger einer Uhr ist anderthalb mal so lang wie der kleine.

In welchem Winkel müssen beide Zeiger zueinander stehen, damit der Abstand ihrer Enden so groß ist wie die Länge des kleinen Zeigers?



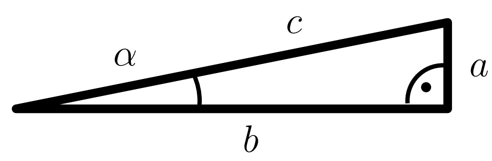
Wir nennen die Länge des kleinen Zeigers ℓ, dann ist der große Zeiger $\frac{3}{2}\ell$ lang. Wenn der Abstand der Zeigerenden ebenfalls genau ℓ beträgt, liefert der Cosinussatz (S. 82) folgenden Ansatz für den Winkel α:

$$\begin{aligned} \ell^2 &= \ell^2 + (\tfrac{3}{2}\,\ell)^2 - 2\,\ell\cdot\tfrac{3}{2}\,\ell\cdot\cos\alpha && \big|\, -\ell^2 + 3\,\ell^2\cos\alpha \\ 3\,\ell^2\cos\alpha &= \tfrac{9}{4}\,\ell^2 && \big|\, \div 3\,\ell^2 \\ \cos\alpha &= \tfrac{3}{4} && \big|\, \arccos \\ \alpha &= \arccos\tfrac{3}{4} \approx 41.41°\,. \end{aligned}$$

Beispiel 5.18: Die *Steigung einer Strecke* c im Straßenverkehr ist wie folgt definiert:

$$\text{Steigung in }\% \;:=\; 100\cdot\frac{\text{senkrechte Höhendifferenz } a \text{ über der Strecke}}{\text{ebene Länge } b \text{ der Strecke auf einer Karte}}\,.$$

Auf der Autobahn haben bekannte Stauzonen ca. 8% Steigung. Welchem Neigungswinkel α entspricht das?



Diese Definition besagt: Steigung in % $= 100 \cdot \tan\alpha$. Daraus folgt:

$$\alpha = \arctan\frac{\text{Steigung in }\%}{100} = \arctan\frac{8}{100} \approx 4.57^\circ .$$

Antwort: 8% Steigung entsprechen einem Neigungswinkel von ca. 4.6°.

Anmerkung: 100% Steigung bedeuten also keine senkrechte Wand, sondern entsprechen „nur“ einer Neigung von 45°.

Aufgaben zu Winkelfunktionen am Einheitskreis

Zeigen Sie, dass die folgenden Gleichungen immer korrekt sind.

201 ▷ $(\cos x - 1)(\cos x + 1) + \sin^2 x = 0$

202 ▷ $\sin^2 x \, \cos x + \cos^3 x = \cos x$

203 ▷ $\tan^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

204 ▷ $\dfrac{1}{\sin^2 x} - 1 = \tan^2 x$

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich.

205 ▷ $\sin x - \cos^2 x \, \sin x$

206 ▷ $\dfrac{\tan x}{1 + \tan^2 x}$

207 ▷ $\dfrac{1 - \cos^2 x}{\sin x \, \cos x}$

208 ▷ $\dfrac{\cos x}{1 + \sin x} + \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$

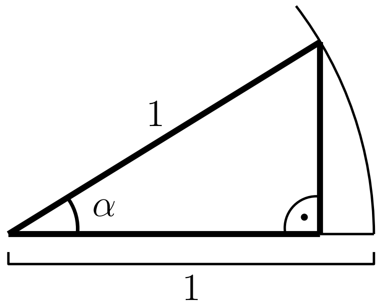
209 ▷ In einem Bergwerk gehen von einem Punkt A zwei gerade Stollen aus zu den Punkten P bzw. Q. Dabei ist $\sphericalangle PAQ = 75^\circ$, $|\overline{AP}| = 325\,\text{m}$ und $|\overline{AQ}| = 275\,\text{m}$. Es soll nun ein gerader Verbindungsstollen $\overline{PQ}$ gegraben werden. Wie lang wird dieser Stollen sein und unter welchen Winkeln muss er von P bzw. Q vorgetrieben werden?

210 ▷ Was ergibt sich für dieselbe Situation mit den Daten $\sphericalangle PAQ = 60^\circ$, $|\overline{AP}| = 480\,\text{m}$, $|\overline{AQ}| = 180\,\text{m}$?

211 ▷ Führen Sie mit Hilfe der Beziehungen am Einheitskreis die Werte von $\sin x$ und $\cos x$ für die Winkel zwischen $\pi/2$ und 2π auf die entsprechenden Werte für Winkel zwischen 0 und $\pi/2$ zurück.

212 ▷ Welche Seite des abgebildeten Dreiecks hat die Länge $\sin\alpha$? Welche die Länge $\cos\alpha$? Finden Sie heraus, wo Sie eine weitere Strecke mit der Länge $\tan\alpha$ einzeichnen können.

Tipp: Die Beziehung $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ lässt sich interpretieren als Anwendung des Strahlensatzes.



Index