

# **Grundlagen der Elektrotechnik I**

Prof. Dr. Suchaneck

WS 2005/6

Inhaltsverzeichnis	Seite
1. Allgemeines	<u>7</u>
1.1 SI-Einheitensystem	<u>7</u>
1.2 Schreibweise von Größen (DIN 1313)	<u>8</u>
1.3 Gleichungsarten	<u>9</u>
1.4 Grafische Darstellungen, Diagramme	<u>9</u>
2. Grundbegriffe der Elektrizität	<u>10</u>
2.1 Das Wesen der Elektrizität	<u>10</u>
2.2 Elektrischer Strom	<u>12</u>
2.3 Die elektrische Spannung	<u>14</u>
2.4 Elektrischer Widerstand, Leitwert, Ohm'sches Gesetz	<u>16</u>
2.5 Temperaturabhängigkeit des Widerstandes von Leitern	<u>17</u>
2.6 Stark temperaturabhängige Widerstände	<u>20</u>
2.7 Nichtlineare Widerstände	<u>22</u>
3. Berechnung von Gleichstromkreisen	<u>24</u>
3.1 Vorzeichen- und Richtungsregeln	<u>24</u>
3.2 Einfache nichtverzweigte Stromkreise	<u>25</u>
3.3 Der verzweigte elektrische Stromkreis	<u>32</u>
3.4 Umrechnung Sternschaltung Dreieckschaltung	<u>44</u>
3.5 Lineare Maschennetze	<u>46</u>
3.5.1 Lösung mit allen Gleichungen	<u>47</u>
3.5.2 Das Überlagerungsverfahren	<u>51</u>
3.5.3 Netzwerkberechnung mit Zweipolen	<u>53</u>
4. Energie und Leistung; Energieumformung	<u>56</u>
4.1 Energieumformung mech. Energie $\leftrightarrow$ elektrische Energie	<u>56</u>
4.2 Energieumformung elektr. Energie $\Rightarrow$ thermische Energie	<u>57</u>
4.2.1 Wärmeaufnahme eines Körpers	<u>57</u>
4.2.2 Wärmeleitung eines Körpers	<u>57</u>
4.2.3 Wärmeübergang (Konvektion)	<u>58</u>
5. Das elektrische Strömungsfeld	<u>61</u>
5.1 Feldbilder	<u>61</u>
5.2 Stromdichte	<u>62</u>
5.3 Widerstandsberechnung	<u>63</u>
5.4 Elektrische Feldstärke und Spannung	<u>65</u>
5.5 Geschichtete Materialien	<u>66</u>
6. Das elektrische Feld in Nichtleitern	<u>67</u>
6.1 Nichtleiter im elektrostatischen Feld	<u>67</u>
6.2 Elektrische Verschiebungsdichte	<u>68</u>
6.3 Elektrische Kapazität	<u>68</u>
6.4 Berechnung der Kapazität aus der Geometrie und	<u>69</u>
6.4.1 Plattenkondensator	<u>69</u>
6.4.2 Schichtkondensator	<u>69</u>
6.4.3 Rohrkondensator	<u>70</u>
6.4.4 Wickelkondensator	<u>70</u>

6.4.5	Drehkondensator	70
6.5	Betriebsfeldstärke	70
6.6	Grundsaltungen von Kondensatoren	71
6.7	Geschichtetes Dielektrikum	71
6.8	Kraftwirkung im elektrostatischen Feld	72
6.9	Elektrodynamische Vorgänge	73
6.9.1	Energieinhalt eines geladenen Kondensators	73
6.9.2	Zeitliche Änderung der Ladung $Q$ und Verschiebestrom $I_v$	73
7.	Das statische elektromagnetische Feld	77
7.1	Grundbegriffe	77
7.2	Größen des magnetischen Feldes	77
7.2.1	Die magnetische Flussdichte	77
7.2.2	Der magnetische Fluss	78
7.2.3	Das Durchflutungsgesetz	78
7.2.4	Durchflutung	79
7.2.5	Magnetische Feldstärke	79
7.3	Magnetisches Feld	79
7.3.1	Magnetisches Feld eines zylindrischen Leiters	79
7.3.2	Magnetisches Feld eines Rohrleiters	80
7.3.3	Magnetisches Feld eines Koaxialleiters	82
7.3.4	Magnetisches Feld einer Zweidrahtleitung	84
7.3.5	Erweitertes Durchflutungsgesetz	84
7.3.6	Magnetisches Feld in einfachen magnetischen Kreisen	85
7.3.7	Einfluss von Material und Geometrie	85
7.4	Der magnetische Kreis	86
7.4.1	Ringkernspule mit Eisenkern	86
7.4.2	Das Rechnen mit magnetischen Widerständen	88
7.4.3	Magnetische Materialeigenschaften	89
7.4.4	Magnetisierungskennlinien	90
7.4.5	Verluste durch Ummagnetisieren	91
7.4.6	$\mu_{Fe}$ und $\mu_{rFe}$ -Bestimmung aus Kennlinien	91
7.4.7	Grafisches Verfahren zur AP- und $\mu$ -Bestimmung	92
7.5	Induktivität	94
7.5.1	Selbstinduktivität	94
7.5.2	Spulen-Induktivität	94
7.5.3	L-Bestimmung	95
7.6	Kräfte im Magnetfeld	97
7.6.1	Kraftwirkung auf bewegte Ladungen	98
7.6.2	Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld	98
7.6.3	Kraft zwischen 2 parallelen stromdurchflossenen Leitern	99
7.6.4	Kraft auf frei bewegte Ladung	99
7.6.5	Hall-Generator	100
7.7	Energie im Magnetkreis	101

7.8	Magnetische Induktion . . . . .	<u>101</u>
7.8.1	Selbstinduktionsspannung . . . . .	<u>101</u>
7.8.2	Auf- und Entmagnetisierung von idealen Induktivitäten . . . . .	<u>102</u>
7.8.3	Auf- und Entmagnetisierung von realen Induktivitäten . . . . .	<u>104</u>
7.8.4	Abschalten von aufmagnetisierten Induktivitäten mit Gegenspannung . . . . .	<u>107</u>
7.8.5	Bewegung eines Leiters (Leiterschleife) im Magnetfeld . . . . .	<u>108</u>
7.8.6	Rotation einer Leiterschleife im homogenen Magnetfeld . . . . .	<u>109</u>

**Literatur**

1. Grafe/Loose/Kühn  
'Grundlagen der E-Technik' Band 1+2  
Verlag Technik Berlin, Hüthig Verlag
2. Moeller/Frohne/Löcherer/Müller  
'Grundlagen der E-Technik'  
'Beispiele zu Grundlagen der E-Technik'  
Teubner Verlag
3. A. Haug  
'Grundzüge der E-Technik'  
Hanser Verlag
4. Lunze/Wagner  
'Einführung in die E-Technik' Arbeitsbuch  
Hüthig Verlag
5. Lunze  
'Einführung in die E-Technik' Lehrbuch  
Hüthig Verlag
6. G. Hagmann  
'Grundlagen der E-Technik' Studienbuch  
Aula Verlag Wiesbaden
7. G. Hagmann  
'Aufgabensammlung zu den Grundlagen der E-Technik'  
Akademische Verlagsgesellschaft Wiesbaden
8. H. Classnitzer  
'Einführung in die E-Technik'  
Verlag Berliner Union
9. Zastrow  
'Grundlagen der E-Technik'  
Vieweg Verlag
10. H. Lindner  
'Elektroaufgaben' Band I + II  
Fachbuchverlag Leipzig-Köln
11. Führer/Heidemann/Nerreter  
'Grundgebiete der Elektrotechnik' Band 1+2  
Hanser Verlag
12. Kruschwitz/Müllenborn  
'Aufgabensammlung E-Technik'  
Vieweg Verlag

13. Wolfschlag/Siemens AG  
'Einheiten, Größen und Formelzeichen in der Elektroindustrie'  
Hanser Verlag
14. Fricke/Vaske  
'Grundlagen der E-Technik' Teil 1  
Teubner Verlag
15. Benz/Heinks/Starke  
'Tabellenbuch Elektronik Nachrichtentechnik'  
Kohl + Noltemeyer Verlag    Frankfurter Fachverlag
16. Friedrich  
'Tabellenbuch Elektrotechnik Elektronik'  
Dümmler Verlag Bonn
17. Lindner/Brauer/Lehmann  
'Taschenbuch der Elektrotechnik und Elektronik'  
Fachbuchverlag Leipzig-Köln
18. Kories/Schmidt-Walter  
'Taschenbuch der Elektrotechnik'  
Verlag Harri Deutsch

## 1. Allgemeines

### 1.1 SI-Einheitensystem

#### Unterscheidung

- Physikalische Größen (U, I, s, t ...)
- abgeleitete Größen (P, W, Q, R,  $\eta$  ...)
- bezogene, spezifische Größen ( $\rho$ ,  $\kappa$ ,  $\mu$ ,  $\varepsilon$  ...)

☞ spezifische Größen sind u.a. Materialkonstanten, Koeffizienten (Beiwerte), Proportionalitätsfaktoren.

#### Historische Entwicklung von Größen und Einheitensystemen:

- |    |  |                               |
|----|--|-------------------------------|
| 1. | metrisches System (1799 Frankreich)<br>M K S    Weg/Masse/Zeit   | M K S                         |
| 2. | absolutes System (1832 Gauß/Weber)<br>cm, g, s   | c g s                         |
| 3. | giorgisches System (1921)<br>M K S A            m, kg, sec, el. Strom  | M K S A                       |
| 4. | Technisches Maßsystem bis 1969   | M (Weg), kp (Kraft), S (Zeit) |
| 5. | Internationales Einheitensystem ab 1960 (11. Generalkonferenz)<br>SI-Einheiten (Système International de Unites) | SI                            |

Das SI-Einheitensystem gilt seit 1969 als Bundesgesetz. Übergangsfrist endete 1977. Alle Staaten, die das metrische (dekadische) System verwenden, haben das SI-System als Grundlage der nationalen Normen.

Das Si-System ist kohärent.

☞ Die Basisgrößen und Einheiten sind durch Gleichungen verknüpft, die nur den Zahlenfaktor 1 haben.

#### Basisgrößen

Länge	Meter	m	Wellenlänge einer Atomstrahlung
Masse	Kilogramm	kg	kg-Prototyp
Zeit	Sekunde	s	Periodendauer einer Atomstrahlung
el. Stromstärke	Ampere	A	Kraft zwischen zwei Leitern
Temperatur	Kelvin	K	273,16te Teil des Tripelpunktes von H <sub>2</sub> O
Lichtstärke	Candela	cd	Lichtstärke eines schwarzen Strahlers
Stoffmenge	Mol	mol	Anzahl von Atom- oder Molekülteilen

#### Nationale Festlegungen in DIN-Normen (Auszug)

- DIN 1301 Einheiten, Einheitennamen, Einheitenzeichen
- DIN 1304 Allgemeine Formelreihen
- DIN 1305 Masse, Kraft, Gewicht, Last; Begriffe
- DIN 1306 Dichte; Begriffe
- DIN 1313 Schreibweise phys. Gleichungen in Naturwissenschaft und Technik
- DIN 1314 Druck; Begriffe, Einheiten

- |           |  |
|-----------|--|
| DIN 1315  | Winkel; Begriffe, Einheiten  |
| DIN 1320  | Akustik; Grundbegriffe   |
| DIN 1323  | Elek. Spannung, Potential, Zweipolquelle, elektromot. Kraft; Begriffe                    |
| DIN 1324  | Elektrisches Feld; Begriffe  |
| DIN 1325  | Magnetisches Feld; Begriffe  |
| DIN 1338  | Formelschreibweise und Formelsatz  |
| DIN 1339  | Einheiten magnetischer Größen  |
| DIN 1341  | Wärmeübertragung; Grundbegriffe, Einheiten, Kenngrößen                                   |
| DIN 1344  | Elektrische Nachrichtentechnik; Formelzeichen  |
| DIN 1355  | Zeit, Kalender, Wochennumerierung, Tagesdatum, Uhrzeit                                   |
| DIN 1357  | Einheiten elektrischer Größen  |
| DIN 4890  | Inch-Millimeter, Grundlagen für die Umrechnung   |
| DIN 4892  | Inch-Millimeter, Umrechnungstabellen   |
| DIN 4893  | Millimeter-Zoll, Umrechnungstabellen   |
| DIN 5031  | Strahlungsphysik im optischen Bereich und Lichttechnik                                   |
| DIN 5483  | Zeitabhängige Größen; Benennungen der Zeitabhängigkeit                                   |
| DIN 5490  | Gebrauch der Wörter bezogen, spezifisch, relativ, normiert und reduziert                 |
| DIN 6814  | Begriffe der radiologischen Technik; Allgemeines   |
| DIN 25404 | Kerntechnik; Formelzeichen   |
| DIN 40110 | Wechselstromgrößen   |
| DIN 40121 | Elektromaschinenbau; Formelzeichen   |
| DIN 66035 | Kalorie - Joule; Joule - Kalorie; Umrechnungstabellen                                    |
| DIN 66036 | Pferdestärke - Kilowatt, Kilowatt - Pferdestärke; Umrechnungstabellen                    |
| DIN 66037 | Kilopond je cm <sup>2</sup> Bar, Bar - Kilopond je cm <sup>2</sup> ; Umrechnungstabellen |
| DIN 66039 | Kilokalorie - Wattstunde, Wattstunde-Kilokalorie; Umrechnungstabellen                    |

### Abgeleitete Einheiten

Beispiel: Farad     $1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$      $1 \text{ C} = 1 \text{ A s}$   
                                 $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$      $1 \text{ J} = 1 \text{ N m}$      $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/s}^2$

Einheiten außerhalb de SI: u.a. Liter, Minute, Stunde, Tonne

Nicht mehr zugelassene Einheiten: u.a. Pond, atm, at, Torr, PS

## 1.2 Schreibweise von Größen (DIN 1313)

Es gilt:

$$\begin{array}{lcl} G & = & \{G\} \cdot [G] \\ \text{Größe} & = & \text{Zahlenwert} \cdot \text{Einheit} \end{array}$$

Beispiele:

1. el. Stromstärke von 1,86 Ampere:  $I = 1,86 \text{ A}$

2. Kraft von 68,5 Newton:  $F = 68,5 \text{ N}$

(Die kursive Darstellung der Größen kann zur Verdeutlichung angewendet werden.)



### 1.3 Gleichungsarten

#### 1.) Größengleichungen

Sie beschreiben die physikalischen Zusammenhänge, gelten unabhängig von Einheiten.

Beispiel:

$$\begin{array}{rclcl} F & = & m & \cdot & a \\ \text{Kraft} & = & \text{Masse} & \cdot & \text{Beschleunigung} \end{array}$$

☞ jede Größe wird mit Zahlenwert und Einheit eingesetzt.

#### 2.) Einheitengleichung

Sie beschreiben die Umrechnung der Einheiten.

Beispiel:

$$\begin{array}{rclcl} 1 \text{ N} & = & 1 \text{ kg} & \cdot & 1 \text{ m/s}^2 \\ [F] & = & [m] & \cdot & [a] \end{array}$$

#### 3.) Zuggeschnittene Größengleichung

Die einzusetzenden Größen werden durch die zugehörigen oder verlangten Einheiten dividiert.

Beispiel:

$$\frac{F}{\text{N}} = \frac{m}{\text{kg}} \cdot \frac{a}{\text{m/s}^2}$$

#### 4.) Zahlenwertgleichungen

Sie gelten nur für bestimmte Einheiten, die angegeben werden müssen. Ohne zusätzliche Angaben sind Zahlenwertgleichungen unbrauchbar.

Beispiel:

$$\text{Blindwiderstand } x_C = \frac{159}{f \cdot C} \quad \begin{array}{l} x_C \text{ in } \Omega \\ f \text{ in kHz} \\ C \text{ in } \mu\text{F} \end{array}$$

#### 5.) Dezimale Vielfache und Teile von Einheiten (Vorsätze und Vorsatzzeichen)

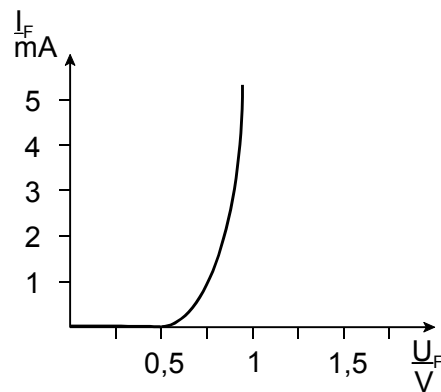
10 <sup>1</sup>	Deka	da	10 <sup>-1</sup>	Dezi	d
10 <sup>2</sup>	Hekto	h	10 <sup>-2</sup>	Zenti	c
10 <sup>3</sup>	Kilo	k	10 <sup>-3</sup>	Milli	m
10 <sup>6</sup>	Mega	M	10 <sup>-6</sup>	Mikro	μ
10 <sup>9</sup>	Giga	G	10 <sup>-9</sup>	Nano	n
10 <sup>12</sup>	Tera	T	10 <sup>-12</sup>	Piko	p

☞ In der Praxis sollen möglichst 3er-Potenzabstufungen verwendet werden (sog. "wissenschaftliche" Schreibweise).

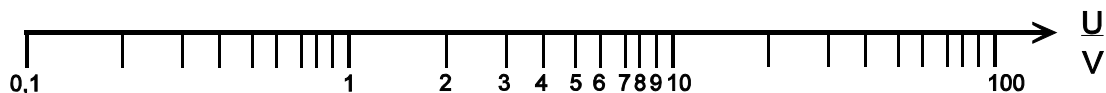
### 1.4 Grafische Darstellungen, Diagramme

Sie sind besonders wichtig für nichtlineare Funktionen (Kennlinien) nach DIN 461

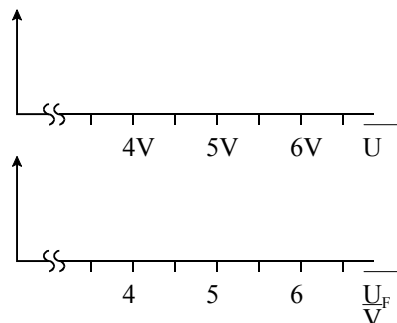
Beispiel: Diodenkennlinie



Die Skalenteilung ist linear (mit Null-Punkt) oder logarithmisch (ohne Null-Punkt).



Weitere Möglichkeiten:



Die Einheiten werden als Bruch (z.B.  $\frac{U}{V}$ ) oder am Zahlenwert (z.B. 3V) geschrieben.

Bildbeschriftung z.B. *Durchlasskennlinie Diode 1N4148* möglich.

**Wichtig:** Unvollständige Diagramme sind bedeutungslos.

## 2. Grundbegriffe der Elektrizität

### 2.1 Das Wesen der Elektrizität

Elektrische Erscheinungen sind schon seit der Frühgeschichte der Menschheit bekannt.

- Unsichtbares Vorhandensein von el. Ladungen → Kräfte  
(z.B. Anziehen von Haaren)
- Sichtbarer Ausgleich von el. Ladungen → Blitz  
bzw. stille Entladung → Elmsfeuer, Nordlicht

Experimentell können Ladungen erzeugt werden, z.B. durch Reiben von Hartgummi, Bernstein usw.

☞ Beobachtung von anziehenden und abstoßenden Kräften

Schlussfolgerung: Es müssen positive und negative Ladungen existieren.

Beispiele: klebendes Papierblatt, aufstehende Haare, Staub auf Plexiglas etc.

Spontaner Ladungsausgleich ist durch seine Nebenwirkungen wahrnehmbar: Licht (Blitz), Ausdehnung (Donner), Funken (Knistern). Dagegen bleibt der Ladungsausgleich im el. Stromkreis ohne Hilfsmittel verborgen.

Das Wesen der Elektrizität liegt im Vorhandensein, dem Aufbau und dem Ausgleich von Ladungen.

Was ist eine Ladung?

Die Atomphysik hat frühzeitig Vorstellungsmodelle entwickelt, welche die Ladung und ihren Transport (elektrische Strömung) erklären helfen.

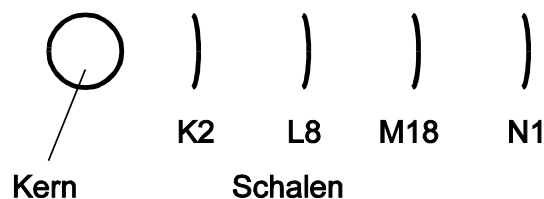
## Die Ladung

Größe  $Q = N \cdot e$       $N$  = Teilchenzahl  
                                   $e$  = Elementarladung

Die Ladung  $Q$  besteht aus zählbaren Elementarladungen, deren Träger Bestandteile der Atome oder Moleküle sind (Beweglich oder als Raumladung).

Bestandteile der Atome:     Das **Bohr'sche Atommodell** (1913)

Beispiel: Cu-Atom



Der Kern besteht aus:     29 Protonen → pos. Ladungen  $\triangleq$  Ordnungszahl  
                                  34 Neutronen → ohne el. Ladung

Die Schalen haben 29 Elektronen → neg. Ladungen

☞ Es sind gleichviele pos. und neg. Ladungen vorhanden, d.h. nach außen ist das Cu-Atom elektrisch neutral.

## Eigenschaften der Atombestandteile

Elementarteilchen	Masse in g	Ladung in As
Proton	$1,67 \cdot 10^{-24}$	$+1,6 \cdot 10^{-19}$ +e
Elektron	$9,1 \cdot 10^{-28}$	$-1,6 \cdot 10^{-19}$ -e
Neutron	$1,67 \cdot 10^{-24}$	0

☞ Die Masse des Elektrons ist sehr klein (0,5 Promille des Protons beziehungsweise Neutrons), dadurch leicht zu beschleunigen (Anwendung: Braun'sche Röhre, Fernschröhre).

Die äußeren Schalen bestimmen das chemische und physikalische (elektrische) Verhalten der Atome.

Äußere Schale ☞ Valenzelektronen, Wertigkeitselektronen (mögliche freie Elektronen)

Elemente, die elektrisch interessant sind:

Ordn.- zahl	Element	Symbol	Schalen						Bemerkung
			K	L	M	N	O	P	
13	Aluminium	Al	2	8	3				p-Dot./Metall
14	Silizium	Si	2	8	4				Halbleiter
15	Phosphor	P	2	8	5				n-Dot.
29	Kupfer	Cu	2	8	18	1			Metall

31	Gallium	Ga	2	8	18	3			p-Dot.
32	Germanium	Ge	2	8	18	4			Halbleiter
33	Arsen	As	2	8	18	5			n-Dot.
47	Silber	Ag	2	8	18	18	1		Metall
79	Gold	Au	2	8	18	32	18	1	Metall

Erkenntnisse:

**Metalle** sind gute elektrische Leiter. (sog. Kupfergruppe: Silber, Gold, Kupfer), erkennbar auch durch 18-1 Anordnung → die 18er Schale bildet mit Nachbaratom Kristallgitter.

Ca.  $10^{23}$  Elektronen/cm<sup>3</sup> (ein Elektron je Atom) sind **Leitungselektronen**

→ Ladungsträger mit der Ladung  $e$  (freie Elektronen).

**Nichtleiter** können kaum freie Ladungsträger zur Verfügung stellen z.B. Edelgase, Kunststoffe, Glas, reines Wasser. Die Elektronen haben feste Bindungen, vollständige Schalen. Nichtleiter können leitfähig werden, wenn hohe Energien von außen zugeführt werden, z.B.

Wärme → Atom-, Molekülschwingungen

Strahlung → Elektronenanregung

Feldstärke → Feldkräfte reißen Bindungen auf

**Halbleiter** besitzen im reinsten Zustand fast keine freien Ladungsträger (Eigenleitung)

→ erhöhte Leitfähigkeit durch Einlagern von Fremdatomen (Dotierung)

höherwertig n-Material

niederwertig p-Material (Störstellenleitung)

z.B. Silizium, Germanium, Selen

**Ionen**

Elektronen des neutralen Atom fehlen → positiv geladenes Ion (Kation)

zusätzliche Elektronen am neutralen Atom angelagert → negativ geladenes Ion (Anion)

**2.2 Elektrischer Strom**

Die Größe (Stärke) der elektrischen Strömung ist als elektrische Stromstärke  $I$  (oder  $i$ ) definiert.

$$I = \frac{Q}{t}$$

$[I] = A$  (Ampere)

Der Strom  $I$  ist die Ladungsmenge  $Q$ , die pro Zeiteinheit den Leiterquerschnitt durchströmt.

Vorausgesetzt: Strom zeitlich konstant und gleichmäßig über den Querschnitt verteilt

☞ Gleichstrom.

Sonst muss der Skineneffekt beachtet werden (Stromverdrängung).

**Stromdichte  $S$** 

$$S = \frac{I}{A}$$

$$[S] = \frac{A}{\text{mm}^2}$$

$A$  = Leiterquerschnitt

übliche Werte für Kupfer  $1 \dots 10 \frac{A}{\text{mm}^2}$ , je nach Wärmeableitung (VDE 0100).

Beispiel:

Wieviele Elektronen bewegen sich in 1 Sekunde durch den Querschnitt eines Leiters, wenn 1 A fließt?

Lösung:

$$Q = I \cdot t = 1 \text{ As}$$

$$Q = N \cdot e$$

N = Anzahl der Elektronen

$$N = \frac{Q}{e} = \frac{1 \text{ As}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}}$$

$$= 6,24 \cdot 10^{18} \text{ Elektronen}$$

Strömungsgeschwindigkeit der Elektronen

Die Strömungs- (Drift) Geschwindigkeit der Elektronen ist gering ( $\approx 1 \text{ mm/s}$ ).

Der Energieimpuls setzt sich aber mit nahezu Lichtgeschwindigkeit ( $\approx 300 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ ) fort.

$1 \text{ cm}^3$  Cu enthält  $0,84 \cdot 10^{23}$  freie Elektronen mit je  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$ .

Dichte  $n_e = 0,84 \cdot 10^{23} \text{ Elek./cm}^3$  (Cu)

Es gilt:

$$I = \frac{Q}{t},$$

$$Q = A \cdot s \cdot n_e \cdot e,$$

$$N = A \cdot s \cdot n_e$$

$$I = \frac{A \cdot s \cdot n_e \cdot e}{t}$$

A = Querschnitt

s = Weg

S = Stromdichte

$v_e$  = mittlere Strömungsgeschwindigkeit

t = Zeit

$$\boxed{v_e = \frac{S}{n_e \cdot e}}$$

Beispiel:

Durch einen Cu-Draht mit  $1 \text{ mm} \varnothing$  fließt ein Gleichstrom von 10A.

- Wieviele Elektronen fließen je s durch den Querschnitt?
- Wie schnell bewegen sich die Ladungen?
- Wie groß ist die Stromdichte?

a)  $Q = N \cdot e = I \cdot t$

$$\rightarrow \frac{N}{t} = \frac{I}{e} = \frac{10 \text{ A}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}} = 6,24 \cdot 10^{19} \frac{\text{Elek.}}{\text{s}}$$

b)  $v_e = \frac{I}{n_e \cdot e \cdot A} = \frac{10 \text{ A}}{0,84 \cdot 10^{23} \frac{\text{Elek.}}{\text{cm}^3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 7,85 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2} = 0,095 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$

c)  $S = \frac{I}{A} = \frac{10 \text{ A}}{0,785 \text{ mm}^2} = 12,73 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$

Elektronenbeweglichkeit  $\mu$

$\mu$  ist ein Maß dafür, wie schnell sich die beweglichen Ladungsträger im Gitterverband bewegen können.

$\mu$  ist eine Materialkonstante.

$$\boxed{\mu = \frac{v_e}{E}}$$

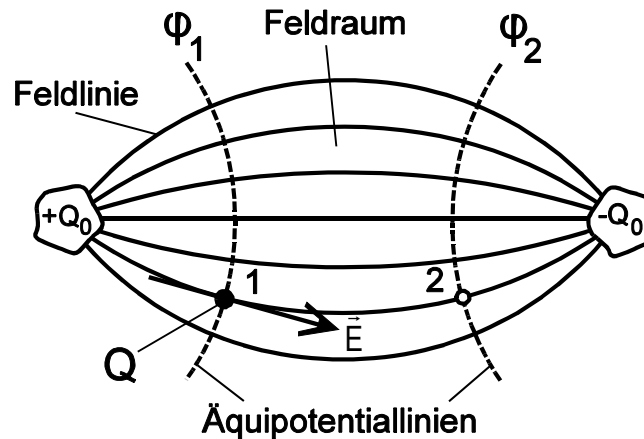
## 2.3 Die elektrische Spannung

Zwischen zwei räumlich getrennten Ladungen  $+Q_0$  und  $-Q_0$  bildet sich ein elektrisches Kraftfeld aus.

☞ Ruhende Ladungen: elektrostatisches Feld.

Zwischen den beiden Ladungen und auch auf zwischen Ihnen befindliche Ladungsträger wirken Kräfte. Ähnlich dem Magnetfeld.

Die Hauptkraftrichtung an einem Ort ist durch die Feldstärkelinien (Feldlinien) gegeben.



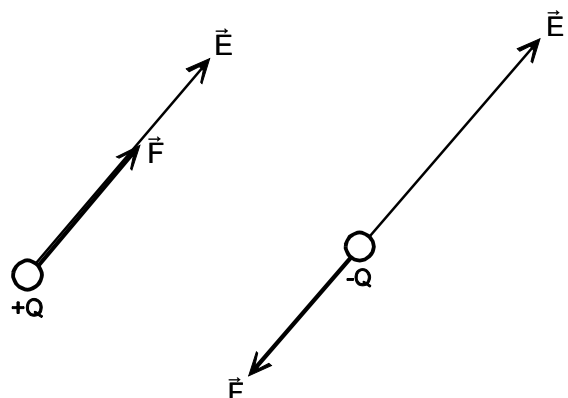
Kraft auf die Ladung  $Q$  in Richtung  $E$ :

Ist  $Q$  positiv:  $\vec{E}$  und  $\vec{F}$  gleiche Richtung  
 $Q$  negativ:  $\vec{E}$  und  $\vec{F}$  entgegengesetzte Richtung.

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$$

El. Feldstärke  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$ ,  $[E] = \frac{V}{m}$

$[F] = \frac{V \cdot C}{m} = N$ ,  $[Q] = C$  (Coulomb)



Wird die Ladung  $Q$  im elektrischen Feld vom Punkt 1 zum Punkt 2 bewegt, ist die mechanische Arbeit  $W$  zu leisten.

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \text{oder}$$

$$W_{12} = \sum_{i=1}^n F_i \cdot s_i$$

( $s_i$  = kleinste Wegstrecken in Richtung  $\vec{F}$ )

Wenn  $\vec{F}$  und  $d\vec{s}$  in gleicher Richtung:  $\rightarrow$  Energie wird freigesetzt

$\vec{F}$  und  $d\vec{s}$  entgegengesetzt:  $\rightarrow$  Energie muss aufgewendet werden

$$W_{12} = W_1 - W_2$$

$W_1$  = potentielle Energie vor der Bewegung

$W_2$  = potentielle Energie nach der Bewegung

Das Potential  $\phi$  ist

$$\phi_1 = \frac{W_1}{Q} \quad \text{bzw.} \quad \phi_2 = \frac{W_2}{Q} \quad (\text{Energie bezogen auf die Ladung})$$

Das elektrische Potential  $\phi$  definiert die örtliche Verteilung des Niveaus der pot. Energie im el. Feld

$$U_{12} = \frac{W_{12}}{Q} = \phi_1 - \phi_2$$

Der Potentialunterschied  $\phi_1 - \phi_2$  heißt elektrische Spannung  $U_{12}$ .

Der Index gibt den Bezugspunkt an:  $U_{12} = \phi_1 - \phi_2 = -U_{21}$

Definition nach DIN 5489:

Die Spannung  $U_{12}$  entlang einem Weg von Pkt.1 nach Pkt.2 wird positiv gerechnet, wenn das Potential im Pkt.1 größer als im Pkt.2 ist.

Einheiten [Energie]= Joule (J), 1J = 1Ws

$$\text{Spannung} = \frac{\text{Energie}}{\text{Ladung}} \quad [U] = 1V = \frac{1Ws}{1C} = \frac{1Ws}{1As} = \frac{1W}{1A}$$

Beispiel:

Vorhandene Ladung  $Q = -1As$

im Punkt 1:  $W_1 = 1J$

$$\text{Potential} \quad \phi_1 = \frac{W_1}{Q} = \frac{1J}{-1As} = -1 \frac{V \cdot A \cdot s}{As} = -1V$$

im Punkt 2:  $W_2 = 2J$

$$\rightarrow \phi_2 = -2V$$

$$W_{12} = W_1 - W_2 = 1J - 2J = -1J$$

$$U_{12} = \phi_1 - \phi_2 = \frac{W_{12}}{Q} = \frac{-1J}{-1As} = 1V$$

$$\text{Stromdichte} \quad S = \frac{I}{A}$$

$$I = n_e \cdot e \cdot v_e \cdot A$$

mit  $v_e = \mu \cdot E$

$$I = n_e \cdot e \cdot \mu \cdot E \cdot A$$

$$S = n_e \cdot e \cdot \mu \cdot E$$

$$\kappa = n_e \cdot e \cdot \mu$$

$\mu$  = Elektronenbeweglichkeit  
 $\kappa$  = spezifische Leitfähigkeit  
 (Proportionalitätsfaktor)

$S = \kappa \cdot E$

Die Stromdichte  $S$  ist der Feldstärke  $E$  proportional.  
Die Stromstärke  $I$  ist der Spannung  $U$  proportional.

Wo tritt eine Feldstärke bzw. Spannung auf, d.h. Kraftwirkung eines el. Feldes?

- 1.) Ladungserzeugung durch Kräfte bzw. Energiezufuhr  
wie Magnetfelder, Strahlung, chemische Wirkung, mechanische Reibung  
Spannungserzeugung einer sog. EMK (Elektromotorische Kraft, Urspannung  $U_0$ )

Beispiele:

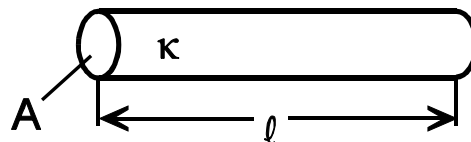
Wärme:	Seebeck-Effekt
Magnetfeld:	Dynamo
Strahlung:	Solarzelle
Chemische Wirkung:	Primär-Element
Mechanische Reibung:	Band-Generator
Mechanische Spannung:	Piezo-Effekt

- 2.) Durch gebremsten (Stau) Ladungsträgerfluss in Leitern (Widerstände etc.)

## 2.4 Elektrischer Widerstand, Leitwert, Ohm'sches Gesetz

Wird an einen gleichförmigen Leiter eine Spannung angelegt, so werden infolge der Feldstärke die freien Ladungsträger bewegt (Strom I).

- Die Stromstärke I steigt mit der Feldstärke E, der spezifischen Leitfähigkeit  $\kappa$  und dem Leiterquerschnitt A.



Kehrwert des spezifischen Leitfähigkeit  $\kappa$  ist der spezifische Widerstand  $\rho$ .

$$I = \kappa \cdot A \cdot \frac{1}{l} \cdot U \quad \kappa \cdot A \cdot \frac{1}{l} = G = \text{Proportionalitätsfaktor} = \underline{\text{Leitwert}}$$

$$\boxed{I = G \cdot U}$$

Der Kehrwert von G ist der elektrische Widerstand R.

$$R = \frac{1}{G}$$

$$\boxed{I = \frac{1}{R} U}$$

Ohm'sches Gesetz

$$U = R \cdot I$$

Einheiten  $[G] = \frac{A}{V} = S \quad (\text{Siemens})$

$[R] = \frac{V}{A} = \Omega \quad (\text{Ohm})$

$$[\kappa] = S \cdot \frac{m}{mm^2}$$

$$[\rho] = \frac{V}{A} mm = \frac{\Omega \cdot mm^2}{m}$$

Ohm'scher Widerstand von Leitern

$$\boxed{R = \rho \cdot \frac{l}{A}}$$

Einheit  $\Omega$



Voraussetzung:  $A$  über  $\ell$  konstant,  
Gleichstrom (Skinneffekt bei Wechselstrom!)

$\kappa$  und  $\rho$  sind temperaturabhängige Materialkonstanten.

$\kappa$  und  $\rho$  für verschiedene Leitermaterialien bei Raumtemperatur:

Material	$\rho_{20} / \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$	$\kappa_{20} / \text{S} \cdot \frac{\text{m}}{\text{mm}^2}$
Aluminium	0,029	34,48
Kupfer	0,0178	56,18
Silber	0,016	62,5
Gold	0,022	45,45
Konstantan	0,5	2
Kohle	$\approx 100$	$\approx 0,01$
Wolfram	0,055	18,18

Beispiel: Widerstand von Leitern

Widerstand von Leitungen aus Cu und Al.

Welchen Widerstand haben 1m-lange Leitungsabschnitte mit Querschnitten  $A=0,75, 1,5, 2,5, 4 \text{ mm}^2$  bei  $\vartheta=20^\circ\text{C}$  ?

☞ auf 1m bezogen: Widerstandsbelag  $R'$  
$$R' = \frac{R}{\ell} = \rho_{20} \cdot \frac{1}{A}$$

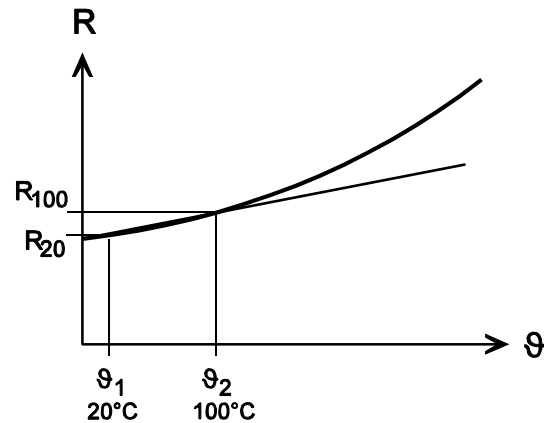
		A/mm <sup>2</sup>				
		0,75	1,5	2,5	4	
Belag Cu	$R'$	0,024	0,012	0,0071	0,0045	$\Omega/\text{m}$
Belag Al	$R'$	0,039	0,019	0,012	0,0073	$\Omega/\text{m}$
100m Cu	$R$	2,4	1,2	0,71	0,45	$\Omega$
100m Al	$R$	3,9	1,9	1,2	0,73	$\Omega$

## 2.5 Temperaturabhängigkeit des Widerstandes von Leitern

Der Widerstand von Leitermaterialien ändert sich mit der Temperatur z.B. nimmt er zu bei Metallen.

Die Widerstandsänderung ist nichtlinear und die wahre Kennlinie kann durch ein Polynom angenähert werden.

$$R_{\vartheta_2} = R_{\vartheta_1} (1 + \alpha_1 [\vartheta_2 - \vartheta_1] + \beta_1 [\vartheta_2 - \vartheta_1]^2 + \gamma [\vartheta_2 - \vartheta_1]^3 \dots)$$



Bis  $\vartheta_2 = 100^\circ\text{C}$  wird im allg. nur mit  $\alpha_1$  gerechnet.

$\alpha_1$  und  $\beta_1$  gelten nur bezogen auf  $\vartheta_1$  (z.B.  $20^\circ\text{C}$ )

- $\alpha_1$  ( $\alpha_{20}$ ) linearer Temperaturkoeffizient TK      Einheit:  $\frac{1}{\text{K}}$
- $\beta_1$  quadratischer TK      Einheit:  $\frac{1}{\text{K}^2}$

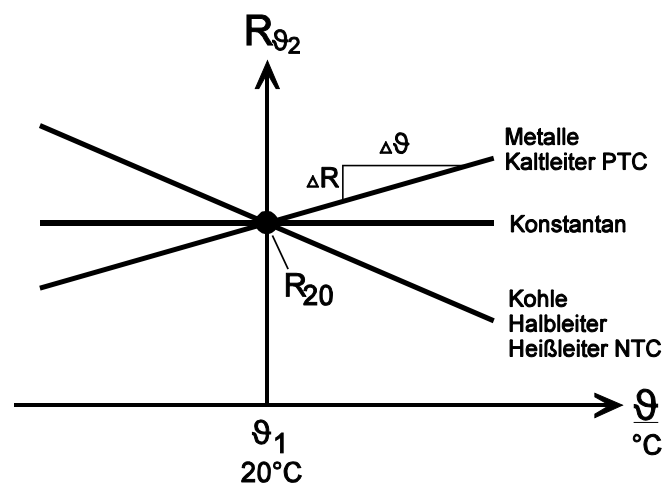
Also gilt vereinfacht bis  $\vartheta_2 = 100^\circ\text{C}$ :

$$R_{\vartheta_2} \approx R_{20} (1 + \alpha_{20} [\vartheta_2 - \vartheta_1])$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\Delta\vartheta}$

$$R_{\vartheta_2} \approx R_{20} + \underbrace{\alpha_{20} R_{20} \Delta\vartheta}_{\Delta R}$$

$$R_{\vartheta_2} \approx R_{20} + \alpha_{20} R_{20} \Delta\vartheta \quad \rightarrow \quad \boxed{\alpha_{20} = \frac{\Delta R}{\Delta\vartheta \cdot R_{20}}} \text{ TK}$$



Beispiele:

- 1) Temperaturstabile Widerstände (Messwiderstände) haben folgende Angabe des Temperaturkoeffizienten:

$$TK=50 \text{ ppm (z.B.)} \quad \text{heißt: } \alpha=50 \cdot 10^{-6} \frac{1}{K}$$

- 2) Temperaturmesswiderstand PT100  
Platinwiderstand mit  $R=100\Omega$  bei der Temperatur  $\vartheta=0^\circ\text{C}$ .

$$\begin{aligned} \text{Koeffizienten:} \quad \alpha &= 3,908 \cdot 10^{-3} \frac{1}{K} \\ \beta &= -0,5802 \cdot 10^{-6} \frac{1}{K^2} \end{aligned} \quad \text{Nach DIN 43760}$$

Wie groß ist der Widerstand bei  $\vartheta_2=100^\circ\text{C}$ ?

$$\begin{aligned} R_{100} &= 100\Omega \left[ 1 + 3,908 \cdot 10^{-3} \frac{1}{K} 100K - 0,5802 \cdot 10^{-6} \frac{1}{K^2} (100K)^2 \right] \\ R_{100} &= 138,5\Omega \end{aligned}$$

Beispiele für TK von Leitern/ Widerstandsmaterialien

Material	$\alpha_{20}$ in $1/K$	Temperaturbereich
Al	$3,77 \cdot 10^{-3}$	$-40^\circ\text{C} \dots 100^\circ\text{C}$
Cu	$3,93 \cdot 10^{-3}$	"
Fe	$6,6 \cdot 10^{-3}$	"
Kohle (Widerstand)	$-1000 \cdot 10^{-6}$	"
Metallfilm "	$\pm 50 \cdot 10^{-6}$	"
Konstantan	$-3 \cdot 10^{-6}$	"
Wolfram	$4,1 \cdot 10^{-3}$	$-40^\circ\text{C} \dots 2200^\circ\text{C}$
Platin	$3,908 \cdot 10^{-3} \quad (\alpha_0)$	$-40^\circ\text{C} \dots 100^\circ\text{C}$

Berechnung temperaturabhängiger Widerstände

Anwendung: Ermittlung (indirekte Messung) der mittleren Wicklungstemperatur von elektrischen Maschinen.

$R_k$  Widerstand kalt (vor Erwärmung)  $\vartheta_k$

$R_w$  Widerstand warm  $\vartheta_w = \vartheta_2$

dann gilt:  $R_{\vartheta_2} = R_{20} [1 + \alpha_{20} (\vartheta_2 - 20^\circ\text{C})]$

$$\frac{R_w}{R_k} = \frac{R_{20}[1 + \alpha_{20}(\vartheta_w - 20^\circ\text{C})]}{R_{20}[1 + \alpha_{20}(\vartheta_k - 20^\circ\text{C})]} = \frac{1/\alpha_{20} - 20^\circ\text{C} + \vartheta_w}{1/\alpha_{20} - 20^\circ\text{C} + \vartheta_k} = \frac{\vartheta_M + \vartheta_w}{\vartheta_M + \vartheta_k}$$

Materialkennttemperatur  $\vartheta_M = \frac{1}{\alpha_{20}} - 20^\circ\text{C}$

$\vartheta_M = 235^\circ\text{C}$  Kupfer

$\vartheta_M = 245^\circ\text{C}$  Aluminium

## 2.6 Stark temperaturabhängige Widerstände

### 1) Heißleiter, NTC-Widerstände

Der Widerstand nimmt bei Erwärmung nichtlinear ab.



Erwärmung infolge Fremderwärmung  
oder Eigenerwärmung

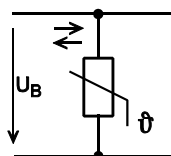
Fremderwärmung: für Messzwecke, Kompensation

- Messheißleiter: Erfassung der Umgebungstemperatur oder eines anderen Mediums, dabei muss die Eigenerwärmung vernachlässigbar sein.
- Kompensationsheißleiter: Kompensation des positiven TK von Metall(film)-widerständen

Eigenerwärmung: bei anliegender Spannung

- Anlassheißleiter (Heizfäden, Motoren, Relais etc.)
- Regelheißleiter (Spannungsstabilisierung)

**wichtig:** NTC darf nicht an einer konstanten Spannung, sondern nur über einen Vorwiderstand betrieben werden, sonst Selbstzerstörungsgefahr!

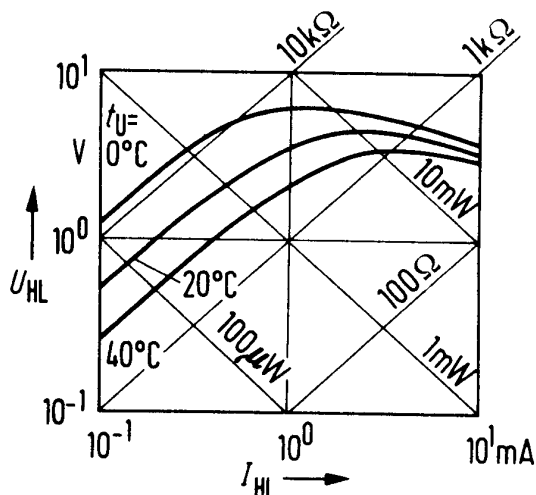


Selbstzerstörung!

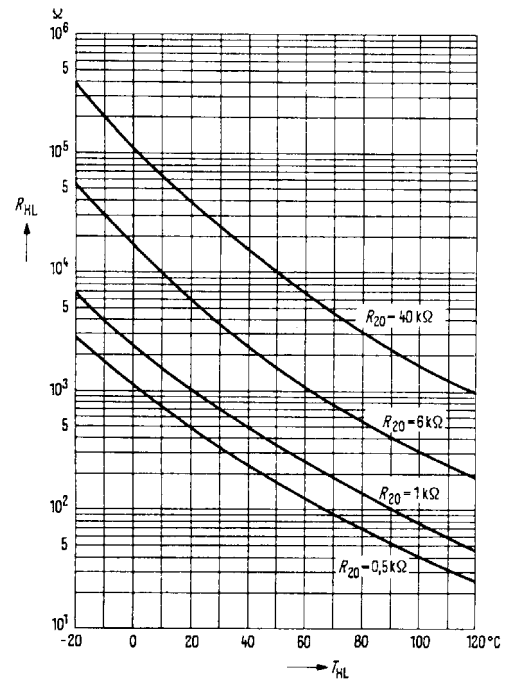
- zunehmende Verlustleistung führt zur Widerstandsabnahme: dadurch weitere Zunahme der Verlustleistung

Herstellung: gesinterte Metalloxide (Magnesium, Titan u.a.)

- polykristalline Struktur mit Halbleitereigenschaft, keine Sperrschichten, Eigenleitung
- billig, robust, polaritätsunabhängig, Anwendung z.B. in Kfz.

Kennlinien:

Stationäre Stromspannungskennlinie



Abhängigkeit des Heißeiterwiderstandes von der Temperatur

Temperaturverhalten von Heißeitern

Der Widerstandswert von Heißeitern ändert sich ungefähr exponentiell mit der Temperatur. Mathematisch lässt sich der Widerstandswert als Funktion der Heißeitertemperatur näherungsweise berechnen:

$$R_{T_1} = R_{T_0} \cdot e^{B \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0} \right)}$$

$R_{T_1}$  = Widerstandswert für gegebene Temperatur

$R_{T_0}$  = Widerstands-nennwert bei Bezugstemperatur

$e = 2,718...$

$B$  = Materialkonstante 2000...6000K  
(Mischungsverhalten der Oxide)

$T_1$  = gegebene Temperatur in K

$T_0$  = Bezugstemperatur in K

Der TK  $\alpha_{NTC}$  ändert sich stark, daher nur für einen kleinen Temperaturbereich  $\Delta T$  sinnvoll.

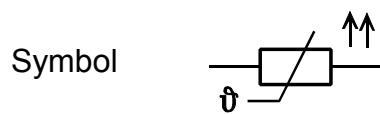
$$\alpha_{NTC} = \frac{-B}{T^2}$$

für  $B=4000K$  und  $T_0=27^\circ C = 300K$ :

$$\alpha_{NTC} = \frac{-4000K}{300^2 K^2} = -4,4 \cdot 10^{-2} \frac{1}{K} \hat{=} -4,4\% / K$$

## 2) Kaltleiter, PTC-Widerstände

Der Widerstand nimmt mit der Erwärmung zu.



In bestimmten Temperaturbereichen steigt der Widerstandswert sprunghaft an.

Die mathematische Beschreibung des Widerstandsverlaufs ist kompliziert und nur in kleinen Bereich hinreichend genau möglich.

Technologie: gesinterte Oxide (Titanat-Keramik)

Wirkung: Halbleitung und Ferroelektrizität bei

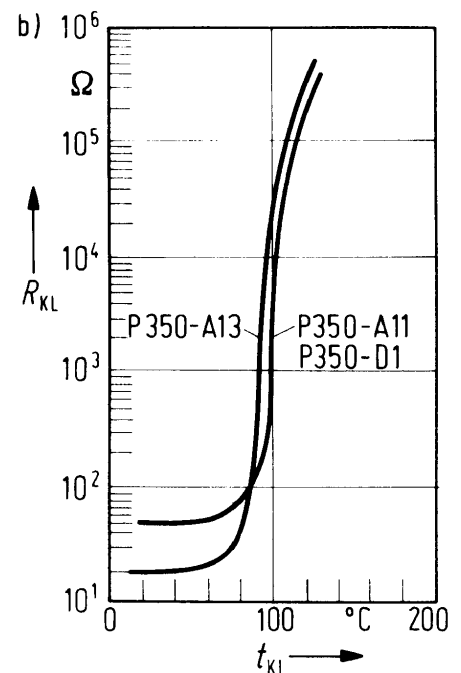
Curietemperatur bilden sich Sperrschichten aus: hochohmiger (Halbleitung)

Wechselstromverhalten:  $R$  ist frequenzabhängig

Anwendungen: Steuer-, Regel- und Überwachungsaufgaben, unerwünscht bei Glühlampen,

ca. 3...10facher Überstrom beim Einschalten wegen großem Temperaturbereich.

Bei technischen PTC-Widerständen sehr starke Widerstandsänderung.



Widerstandsverlauf von PTC-Widerständen

### 1.) Messtechnik

- Strömungswächter als Sensoren.  $P_v$  wird abgeleitet, dadurch  $\vartheta$  kleiner als  $\vartheta_{\text{Sprung}}$ .  
Anwendung: Niveau-Überwachung in Tanks

### 2.) Strombegrenzung

- Überlastschutz von elektrischen Maschinen, Isolierstoffe werden geschützt  
PTC wird in die Cu-Wicklungen eingewickelt.
- Regelung, Begrenzung der Kühlwassertemperatur von Motoren (PKW)  
Ersatz: Thermostat → Lüfter-Motor wird eingeschaltet.
- Stabilisierung kleiner Ströme
- Entmagnetisierung von Lochmasken der Farbbildröhre hoher Anlaufstrom, danach kleiner Reststrom
- selbstregelnde Heizelemente

## 2.7 Nichtlineare Widerstände

Widerstände mit linearem Verlauf der Strom/Spannung-Kennlinie heißen: lineare Ohm'sche Widerstände.

- Der Widerstand  $R$  wie auch der spezifische Widerstand sind unabhängig von Strom und Spannung.

Voraussetzung: Konstante Temperatur.

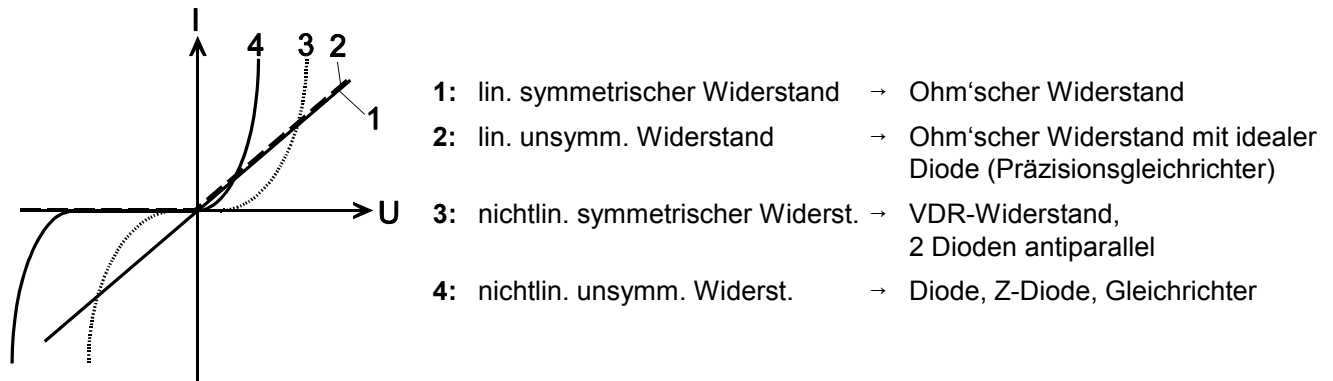
Ein Widerstand mit  $TK = 0$  bleibt auch bei Erwärmung linear.

Bei Widerständen mit  $TK \neq 0$  ergibt sich ein nichtlinearer Zusammenhang.

- **indirekte** Nichtlinearität.

**Echte** nichtlineare Widerstände sind auch ohne Temperaturänderung nichtlinear. In bestimmten Grenzen von  $I$  und  $U$  folgt die Kennlinie  $U, I$  dieser Widerstände in der Regel einem einfachen Exponentialgesetz.

$$I = K \cdot U^\alpha \quad (1) \quad \text{oder} \quad U = C \cdot I^\beta \quad (2) \quad [K]=S; \quad [C]=\Omega$$



linear:  $\frac{U}{I} = R = \text{Proportionalitätskonstante}$

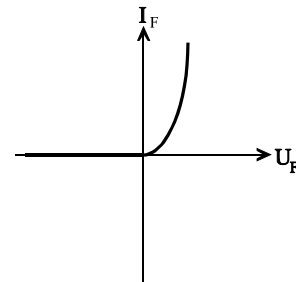
nichtlinear:  $R = f(U, I) \rightarrow \text{keine Konstante}$

Nichtlineare Widerstände spezieller Art:

### Dioden in Durchlassrichtung



unsymmetrische Kennlinie



Die mathematische Beschreibung ist bei Dioden anders als bei anderen nichtlinearen Widerständen:

$$I_F = I_S \left( e^{\frac{U_F}{m \cdot U_T}} - 1 \right)$$

→ e-Funktion

$I_S$  = Sättigungsstrom  
 $U_T$  = Temperaturspannung  
 $m$  = Korrekturwert 1...2

Eine andere Darstellung der e-Funktion ist mit einer Reihenentwicklung möglich:

$$I_F = I_S \left( \frac{U_F}{m \cdot U_T} + \frac{1}{2} \left[ \frac{U_F}{m \cdot U_T} \right]^2 + \frac{1}{6} \left[ \frac{U_F}{m \cdot U_T} \right]^3 + \dots \right)$$

linearer  
Teil

quadrat.  
Teil

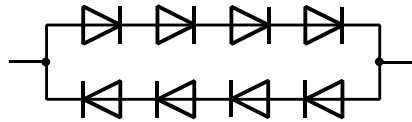
Anteil klein,  
vernachlässigbar

→ Es entsteht ein zusammengesetzter Widerstand aus linearen und nichtlinearen Anteilen.

### VDR-Widerstände (Varistoren)

Voltage Dependent Resistance

Ersatzschaltbild:



symmetrische Kennlinie

Näherung: Durchlassspannung  $U = n \cdot U_F$ , da polykristalline StrukturMaterial: Silizium-Karbid SiC  
Zinkoxid ZnO (SIOV, Handelsname)Die typischen VDR-Widerstände haben folgende Werte:  $C \approx 15 \dots 10^4$   
 $\beta \approx 0,03 \dots 0,35$ Anwendung: - Überspannungsbegrenzer (Telefon, Blitzschutz, Messtechnik)  
- Kontaktschutz (Funkenlöschung bei induktiven Lasten)  
- Fernsehschaltungstechnik (Wechselspannungsstabilisierung)

### 3. Berechnung von Gleichstromkreisen

#### 3.1 Vorzeichen- und Richtungsregeln

(nach DIN 5489)

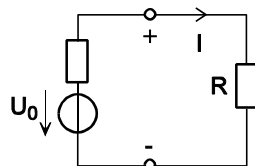
Willkürliche, teils historische Festlegungen (Konventionen).

Erleichterung der Berechnung von Stromkreisen

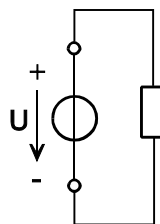
a) konventionelles positives System.

1) Der Zahlenwert des Stromes wird positiv gerechnet.

☞ positive Ladungsträger bewegen sich beim Ladungsausgleich in Richtung des Strompfeiles (von + nach -).



2) Der Zahlenwert der Spannung (Potentialunterschied) zwischen zwei Punkten (Klemmen) eines Stromkreises wird positiv gerechnet, wenn die Pfeilrichtung zum Punkt mit niedrigem Potential zeigt (-).



3) Bezugssystem

Bei komplizierten Netzwerken mit vielen Grundbestandteilen (R's, Quellen) kann keine verbindliche Richtungsangabe gemacht werden.

1) Festlegung eines vorläufigen Bezugssystems. (Danach kann bei negativen Zahlen-ergebnissen die Pfeilrichtung geändert werden).

#### wichtig

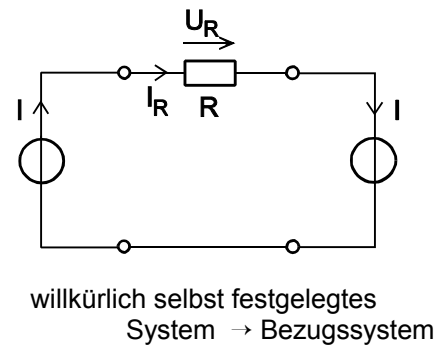
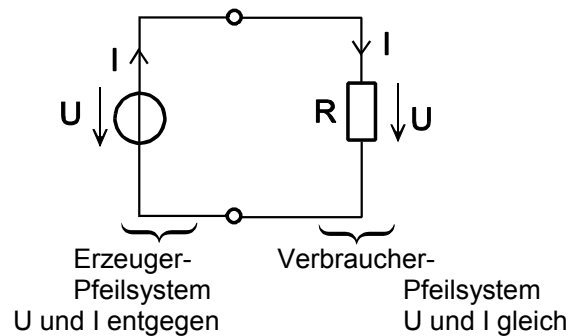
An Verbrauchern (passive Zweipole) haben Strom und Spannung immer die gleiche Pfeilrichtung.

#### Verbraucher-Pfeilsystem



Daraus resultiert:

Bei einer Quelle, die Leistung abgibt sind Strom und Spannung entgegen gesetzt gerichtet.



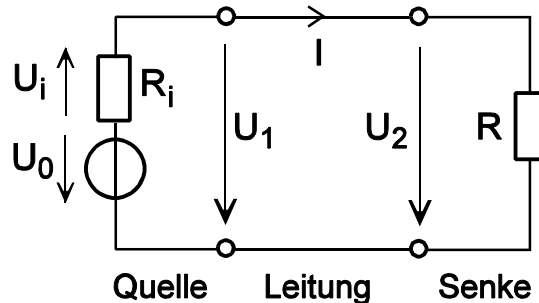
Doppelpfeile haben keine Aussage (vermeiden).

### 3.2 Einfache nichtverzweigte Stromkreise

Bestandteile eines einfachen Stromkreises sind:

1. Elektrische Quelle: erzeugt getrennte Ladungen
2. Ladungsträger-Leitung: verlustarmer Ladungstransportweg
3. Elektrische Senke: Umformer in andere Energieformen (Verbraucher, Last)

Andere Aufteilung: aktiver Zweipol-Vierpol-passiver Zweipol



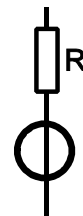
#### Quellen

Spannungsquelle:

Schaltbild



ideale  
Spannungsquelle  $R_i = 0$



reale  
Spannungsquelle  $R_i > 0$

ideal:  $U_1 = \text{konstant}$ , unabhängig von  $I \Rightarrow R_i \rightarrow 0$   
schwer realisierbar (mit Regler abschnittsweise möglich)

real:  $U \approx \text{konstant}$  ("eingeprägte" Spannung)  $\Rightarrow R_i \ll$   
Konstantspannungsquelle

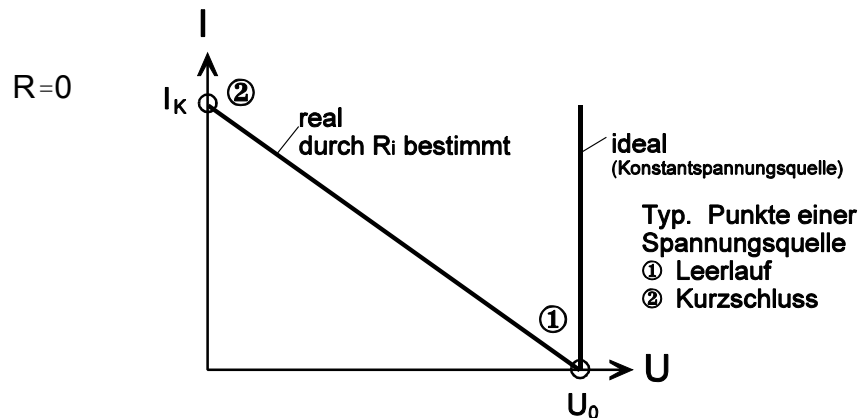
$$I = \frac{U_0}{R_i + R} \Rightarrow U_1 = 0 \quad I = I_K = \frac{U_0}{R_i} \quad \text{Kurzschlussstrom}$$

$$U_1 = U_2 \quad (\text{ideale Leitung}) \quad U_0 = U_i + U_1, \quad U_1 = U_0 - U_i = U_0 - I \cdot R_i$$

$$\Rightarrow U_1 = U_0 - \frac{U_0 \cdot R_i}{R_i + R} = U_0 \left( \frac{R}{R_i + R} \right)$$

Leerlauf  $R = \infty, \quad U_1 = U_0, \quad I = 0$

Kurzschluss



Beispiel:

An einer Batterie wird im Leerlauf eine Klemmenspannung von 62 V gemessen.

Der Innenwiderstand beträgt  $0,2\Omega$

Welcher Strom fließt bei einem Lastwiderstand von  $6\Omega$ ?

Leerlauf  $U_0 = U_i, \quad I = \frac{U_0}{R_i + R} = \frac{62V}{0,2\Omega + 6\Omega} = 10A$

Beispiel:

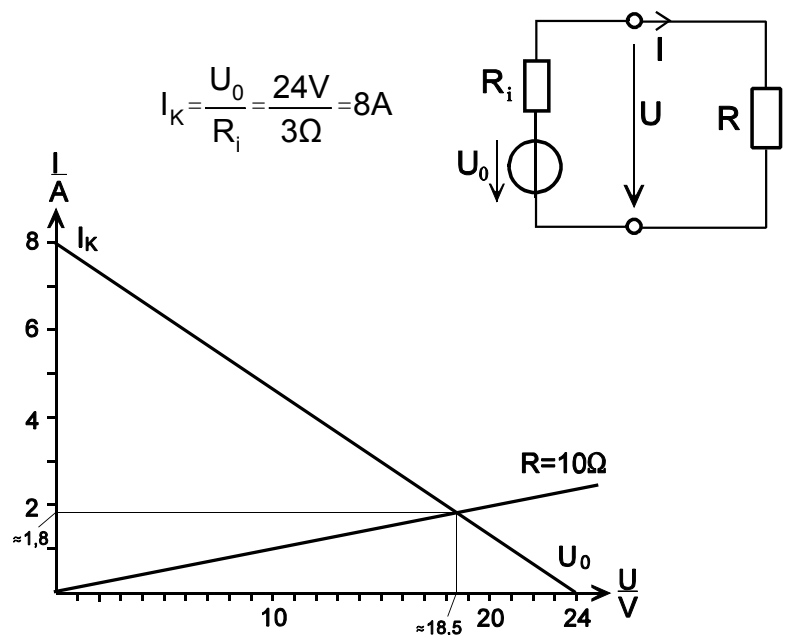
Eine Spannungsquelle mit einer Quellenspannung  $U_0 = 24V$  hat einen Innenwiderstand von  $R=3\Omega$ . Es wird ein Lastwiderstand  $R=10\Omega$  angeschlossen. Bestimme rechnerisch und grafisch die Klemmenspannung und die Stromstärke.

Grafisch:  $I=1,8A$   
 $U=18,5V$

Rechnerisch:

$$I = \frac{U_0}{R_i + R} = \frac{24V}{3\Omega + 10\Omega} = 1,85A$$

$$U = U_0 \frac{R}{R_i + R} = 24V \frac{10\Omega}{3\Omega + 10\Omega} = 18,5V$$



Ermittlung des Innenwiderstandes  $R_i$  einer Spannungsquelle

- 1) Aus Leerlaufspannung  $U_l$  und Kurzschlussstrom  $I_K$

$$R_i = \frac{U_l}{I_K} = \frac{U_0}{I_K} \quad (\text{☞ nicht immer möglich!})$$

- 2) Belastung der Quelle nacheinander mit zwei unterschiedlichen Widerständen  $R_1$  und  $R_2$

Es gilt:  $U_0 = I_1 \cdot R_i + I_1 \cdot R_1$

$$U_0 = I_2 \cdot R_i + I_2 \cdot R_2$$

Gleichsetzen ergibt:

$$I_1 \cdot R_i + I_1 \cdot R_1 = I_2 \cdot R_i + I_2 \cdot R_2$$

$$I_1 \cdot R_i - I_2 \cdot R_i = I_2 \cdot R_2 - I_1 \cdot R_1$$

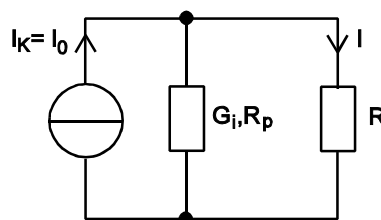
$$R_i (I_1 - I_2) = U_2 - U_1$$

$$R_i = \frac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2}$$

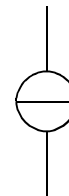
$$R_i = \frac{\Delta U}{\Delta I}$$

Stromquelle

$I = \text{konstant}$



Schaltbild

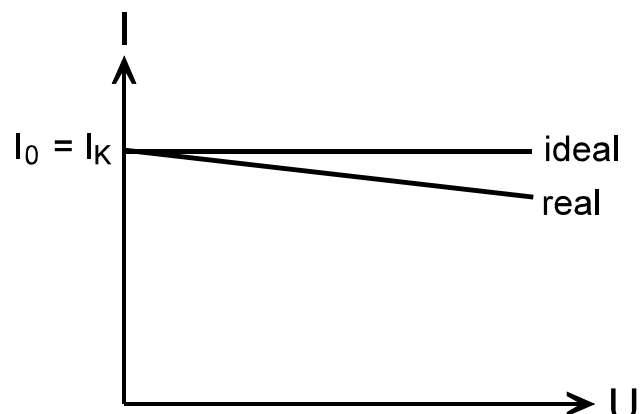


Idealfall  $G_i \rightarrow 0$  ( $R_p \rightarrow \infty$ )

Real:

$I \approx \text{konstant}$  ("eingepprägter Strom")

Konstantstromquelle  $\Rightarrow G_i$  klein



Eigenschaft der Leitung

(Hin + Rückleitung)

- 1) Verlustlose Leitung → Supraleiter
- 2) Verlustarme Leitung  $R_{Ltg} \ll R_i$ 
  - bei großen Leistungen nur mit Hochspannung möglich
  - $l$  so kurz wie möglich,
  - $\rho$  so klein wie möglich (Kupfer, Aluminium),
  - $A$  so groß wie möglich.

Eigenschaften der Senke

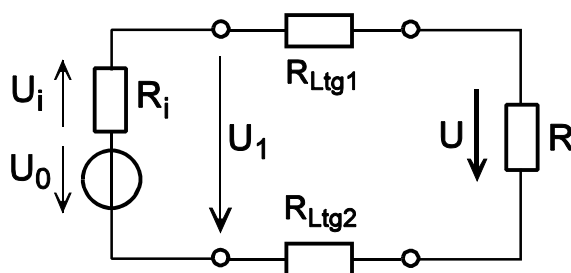
- 1) Ohm'scher Verbraucher (linear, nichtlinearer)
 
$$W_{el.} \rightarrow W_{ther.}$$
- 2) Energieumformer
 
$$W_{el.} \rightarrow W_{mech.} + W_{ther.} \quad (\text{E-Motoren, Magnete etc.})$$
- 3) Aufladung von Quellen (Akkumulator)  
Elektrolyse (chemische Wirkung)

Reihenschaltung linearer Widerstände

(Serie, Hintereinander)

Ein realer einfacher Stromkreis besteht bereits aus der Reihenschaltung von Innen-, Leitungs- und Außenwiderstand und einer Spannungsquelle.

- Reihenschaltung von  $n$  Widerständen  
Die Leitungswiderstände  $R_{Ltg}$  sind in Regel sehr klein.

Ersatzschaltbild mit  
diskreten Elementen

allgemeines Schaltbild

Energie geht nicht verloren: (Energieerhaltungssatz)

- Die vom Generator (Quelle) aufgebraachte Energie  $W = U \cdot I \cdot t$  muss in den Verbraucherwiderständen in Wärme umgesetzten Energie gleich sein.

$$W = U_0 \cdot I \cdot t = U_1 \cdot I \cdot t + U_2 \cdot I \cdot t + U_3 \cdot I \cdot t + \dots + U_N \cdot I \cdot t$$

$$U_0 = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_N = \sum_{e=1}^n U_e$$

oder

$$\sum_{e=0}^n U_e = 0$$

$$\oint E \, ds = 0$$

Umlaufintegral

## 2) 2. Kirchhoff'sches Gesetz (Physiker 1824-87)

Mit dem Ohm'schen Gesetz für lineare Widerstände

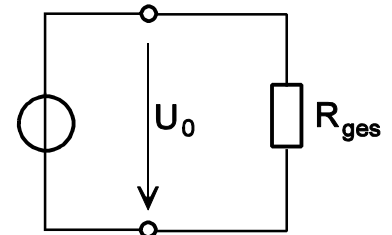
$$U_n = I \cdot R_n$$

wird

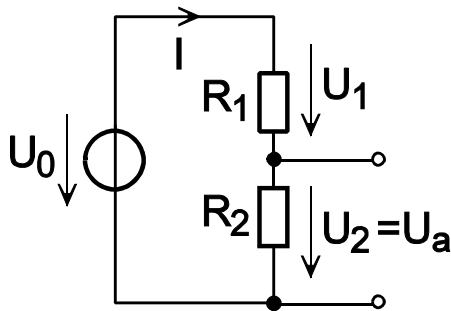
$$U_0 = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + I \cdot R_3 + \dots + I \cdot R_n$$

$$U_0 = I \cdot \underbrace{(R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n)}_{R_{\text{ges}}} = I \cdot R_{\text{ges}}$$

$$R_{\text{ges}} = \sum_{1}^n R_n = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$$



Der Gesamtwiderstand ist gleich der Summe der Teilwiderstände

Spannungsteiler-Regel (unbelasteter Spannungsteiler)

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I \cdot R_1}{I \cdot R_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

oder z.B. bei 4 R's

$$\frac{U_4}{U_0} = \frac{U_4}{\sum_{1}^4 U_n} = \frac{I \cdot R_4}{I \cdot \sum_{1}^4 R_n} = \frac{R_4}{\sum_{1}^4 R_n}$$

Erkenntnis:**Die Spannungsabfälle (Potentialunterschiede) verhalten sich wie die Widerstandswerte.**

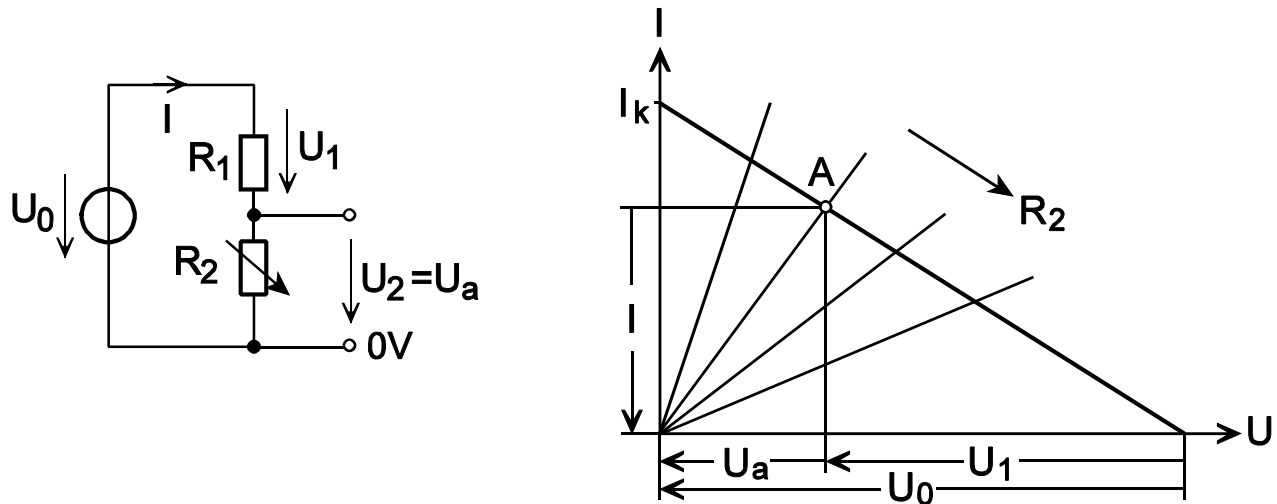
$$\frac{U_2}{\sum_{1}^2 U_n} = \frac{R_2}{\sum_{1}^2 R_n} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \Rightarrow \quad U_2 = U_a = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0$$

$$U_a = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_0$$

Rechenbeispiel

$$U_0 = 12V \quad R_1 = 10k\Omega \quad R_2 = 2k\Omega \quad U_a = ?$$

$$U_a = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_0 = \frac{2k\Omega}{10k\Omega + 2k\Omega} \cdot 12V = 2V$$

Grafische Darstellung eines Spannungsteilers mit  $R_2$  variabel

Für eine Spannungs- bzw. Stromquelle mit Last gibt es 3 wichtige Betriebsarten

1.) Spannungsanpassung  $U_L \approx U_0$  wenn  $R_L \gg R_i$

2.) Stromanpassung  $I_L \approx I_0$  wenn  $R_L \ll R_i$

3.) Leistungsanpassung  $P_L = \text{Maximum}$

Leistungsanpassung

$$P = U \cdot I \quad R_2 = R_L$$

$$P_L = U_L \cdot I_L = (U_0 - I_L \cdot R_i) I_L$$

$$\text{mit } I_L = \frac{U_0}{R_i + R_L} \quad \Rightarrow \quad P_L = \frac{U_0^2 \left(1 - \frac{R_i}{R_i + R_L}\right)}{R_i + R_L} = U_0^2 \frac{R_L}{(R_i + R_L)^2}$$

$$P_L = \text{max?}$$

Bestimmung durch Differenzieren:

$$P_L = U_0^2 \frac{R_L}{(R_i + R_L)^2} = U_0^2 \frac{R_L}{R_i^2 + 2R_i R_L + R_L^2}$$

Maximum von  $P_L$  kann berechnet werden, wenn die 1. Ableitung Null gesetzt wird:

$$\frac{dP_L}{dR_L} = \frac{U_0^2 (R_i^2 + 2R_i R_L + R_L^2) - (0 + 2R_i + 2R_L) \cdot U_0^2 R_L}{N^2} = 0$$

Ableitung von  $P_L$  mit Hilfe der Quotientenregel.

$$\frac{d\left(\frac{Z}{N}\right)}{dR_L} = \frac{Z' \cdot N - N' \cdot Z}{N^2} \quad N = R_i^2 + 2R_i R_L + R_L^2 \quad Z = U_0^2 \cdot R_L$$

$$\frac{dP_L}{dR_L} = 0 \quad \rightarrow R_{\text{Loptimal}}$$

Es genügt wenn der Zähler gleich Null gesetzt wird

$$U_0^2(R_i^2 + 2R_iR_L + R_L^2) - (2R_i + 2R_L) \cdot U_0^2R_L = 0$$

$$(R_i^2 + 2R_iR_L + R_L^2) - 2R_iR_L - 2R_L^2 = 0$$

$$R_i^2 - R_L^2 = 0$$

$$R_i = R_L$$

$$P_{Lmax} = U_0^2 \frac{R_L}{(R_i + R_L)^2} = \frac{U_0^2}{4 \cdot R_i}$$

Verhältnisse bei Leistungsanpassung:  $R_i = R_L$

$$P_{ges} = U_0 \cdot I_L \quad \text{mit} \quad I_L = I = \frac{U_0}{R_i + R_L}$$

$$\Rightarrow P_{ges} = \frac{U_0^2}{R_i + R_L} = \frac{U_0^2}{2R_i} \quad (\text{mit } R_i = R_L)$$

$$P_i = U_i \cdot I_L = P_{ges} - P_L = \frac{U_0^2}{2R_i} - \frac{U_0^2}{4R_i} = \frac{U_0^2}{4R_i}$$

Es gilt also:  $P_{Lmax} = P_{imax}$

Spannung  $U_L$  und Strom  $I_L$   
bei  $R_i = R_L$

$$P_{ges} = U_0 \cdot I_L \rightarrow I_L = \frac{P_{ges}}{U_0} = \frac{U_0^2}{2R_i \cdot U_0} = \frac{U_0}{2R_i} = \frac{1}{2} I_K$$

$$U_L = \frac{P_L}{I_L} = \frac{U_0^2}{4R_i} \cdot \frac{2R_i}{U_0} = \frac{U_0}{2}$$

Also: Am Ausgang halbe Leerlaufspannung und halber Kurzschlussstrom bei Leistungsanpassung

Leistung und Wirkungsgrad bei der Leistungsanpassung ( $R_i = R_L$ )

$$\frac{P_{Lmax}}{P_{ges}} = \frac{U_0^2}{4R_i} \cdot \frac{2R_i}{U_0^2} = \frac{1}{2} \hat{=} 50\%$$

$$\eta = \frac{P_L}{P_{ges}} \cdot 100\% = \frac{1}{2} \cdot 100\% = 50\%$$

Bei  $R_i = R_L$  wird die max. Leistung übertragen bei einem Wirkungsgrad von 50%.

Diese Leistungsanpassung ist wichtig in der Nachrichtentechnik.

Beispiel: Verstärkeranpassung an Lautsprecher

Dagegen ist in der Energietechnik der maximale Übertragungswirkungsgrad interessant.

Dabei liegt Spannungsanpassung vor, dabei gilt:  $R_L \gg R_i$

$$\eta = \frac{R_L}{R_i + R_L}$$

üblich:  $\eta > 95\%$

## Beispiele zum 2. Kirchhoff'schen Satz

### Berechnung mit dem Maschensatz

- Vorgehen:
- 1) Alle Spannungspfeile eintragen (Stromrichtung gegebenenfalls beliebig festlegen, aber einhalten).
  - 2) Willkürlich einen Umlaufsinn festlegen und an einer beliebigen Stelle mit dem Maschenumlauf beginnen.

### Zahlenbeispiel:

$$U_{01} = 6V$$

$$U_{02} = 9V$$

$$R_1 = 4 \Omega$$

$$R_2 = 12 \Omega$$

$$R_3 = 50 \Omega$$

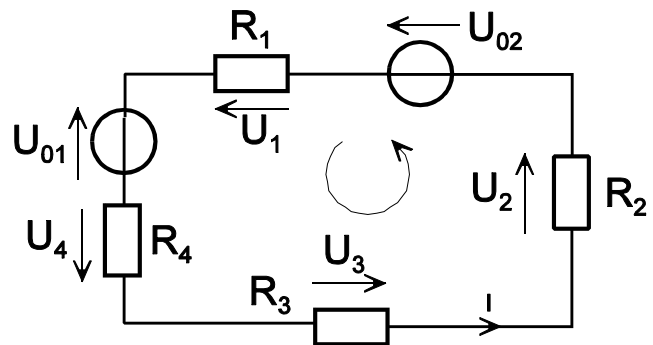
$$R_4 = 20 \Omega$$

$$U_1 - U_{01} + U_4 + U_3 + U_2 + U_{02} = 0$$

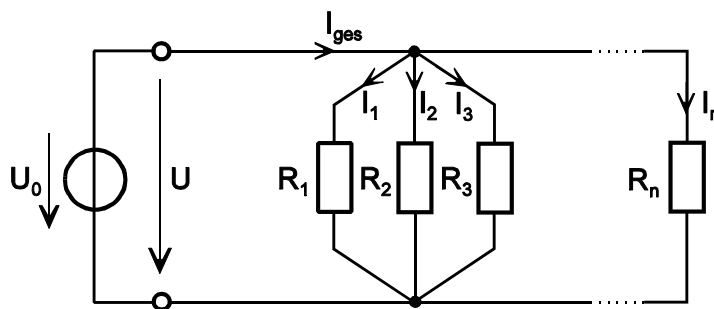
$$\begin{aligned} U_{01} - U_{02} &= U_1 + U_2 + U_3 + U_4 \\ &= I \cdot R_{\text{ges}} \end{aligned}$$

$$\rightarrow I = \frac{U_{01} - U_{02}}{R_{\text{ges}}}$$

$$= \frac{6V - 9V}{4\Omega + 12\Omega + 50\Omega + 20\Omega} = \frac{-3V}{86\Omega} = -0,0349A = -34,9mA$$



### 3.3 Der verzweigte elektrische Stromkreis



Arbeit  $W = U \cdot I_{\text{ges}} \cdot t = U \cdot I_1 \cdot t + U \cdot I_2 \cdot t + U \cdot I_3 \cdot t + \dots + U \cdot I_n \cdot t$

$$\rightarrow I_{\text{ges}} = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n$$

Knotenregel, 1. Kirchhoff'sches Gesetz

$$\rightarrow \sum I = 0$$

Mit dem Ohm'schen Gesetz:

$$\frac{U}{R_{\text{ges}}} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} + \dots + \frac{U}{R_n} = U \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} \right)$$



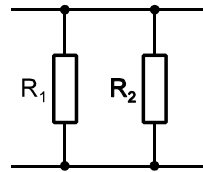
$$\rightarrow \boxed{\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}}$$

oder  $\boxed{G_{\text{ges}} = G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n}$  Gesamtleitwert =  $\Sigma$ Einzelleitwerte

Allg. Aussage:  $R_{\text{ges}}$  ist immer kleiner als der kleinste Einzelwiderstand

Parallelschaltung von 2 Widerständen:  
Praxisformel

$$R_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$



Beispiele

1. Parallelschaltung von 4 Widerständen

$$500\Omega \parallel 1,3\text{k}\Omega \parallel 22\text{k}\Omega \parallel 100\text{k}\Omega$$

Gesucht:  $R_{\text{ges}}$

$$R_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{500\Omega} + \frac{1}{1,3\text{k}\Omega} + \frac{1}{22\text{k}\Omega} + \frac{1}{100\text{k}\Omega}} = 354,02\Omega$$

2.  $R_1 = 500\text{k}\Omega$   
 $R_{\text{ges}} = 200\text{k}\Omega$   
 $R_2 = ?$

$$R_{\text{ges}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_{\text{ges}}(R_1 + R_2) = R_1 \cdot R_2$$

$$R_{\text{ges}}R_1 + R_{\text{ges}}R_2 = R_1 \cdot R_2$$

$$R_{\text{ges}}R_2 - R_1R_2 = -R_{\text{ges}}R_1$$

$$R_2(R_{\text{ges}} - R_1) = -R_{\text{ges}}R_1$$

$$R_2 = \frac{R_{\text{ges}} \cdot R_1}{R_1 - R_{\text{ges}}}$$

$$R_2 = \frac{200\text{k}\Omega \cdot 500\text{k}\Omega}{500\text{k}\Omega - 200\text{k}\Omega} = 333,3\text{k}\Omega$$

Stromteiler-Regel

(analog zum Spannungsteiler)

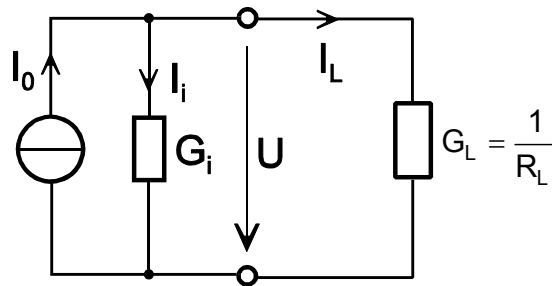
Annahme:  $U = \text{konstant}$

$$U = I_1 \cdot R_1 = I_2 \cdot R_2 = \dots = I_{\text{ges}} \cdot R_{\text{ges}}$$

$$\boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{G_1}{G_2}}$$

$$\boxed{\frac{I_1}{I_{\text{ges}}} = \frac{R_{\text{ges}}}{R_1} = \frac{G_1}{G_{\text{ges}}}}$$

Ströme verhalten sich umgekehrt proportional zu den Widerständen und direkt proportional zu den Leitwerten.

Die Ersatzstromquelle

Ersatzstromquelle = Konstantstromquelle +  $G_i$  → eingepprägter Strom

$$\sum I = 0$$

$$I_0 = I_i = I_L = 0$$

$$I_L = I_0 - I_i = I_0 - U \cdot G_i$$

$$U = I_0 \cdot R_{\text{ges}} = I_0 \frac{1}{G_{\text{ges}}} = I_0 \frac{1}{G_i + G_L}$$

$$\rightarrow I_L = I_0 \left(1 - \frac{G_i}{G_i + G_L}\right) = I_0 \frac{G_L}{G_i + G_L}$$

$$U = U_L = I_L \frac{1}{G_L} = I_0 \frac{1}{G_i + G_L}$$

Umrechnung

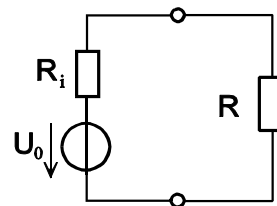
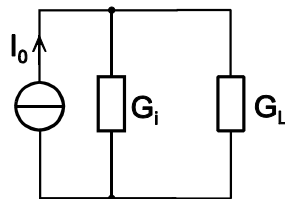
Ersatzstromquelle

↔

Ersatzspannungsquelle

$$G_i = \frac{1}{R_i} ; \quad I_0 = \frac{U_0}{R_i}$$

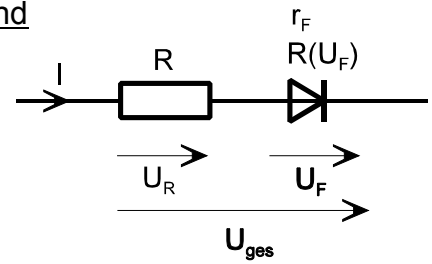
$$R_i = \frac{1}{G_i} ; \quad U_0 = I_0 \frac{1}{G_i}$$

Zusammenstellung

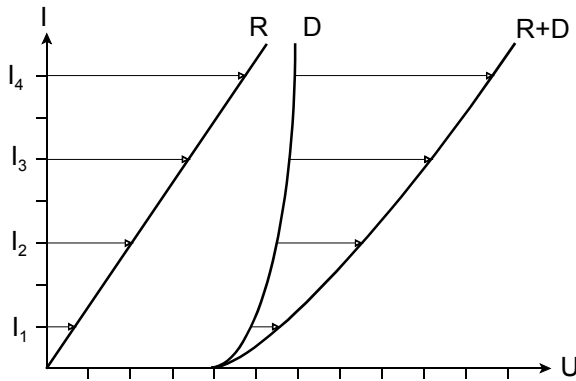
	Ersatzstromquelle	Ersatzspannungsquelle
Leerlauf $G_L = 0$	$I_{L\ell} = 0, \quad U_{L\ell} = \frac{I_0}{G_i}$	$I_{L\ell} = 0, \quad U_{L\ell} = U_0$
Kurzschluss $G_L \rightarrow \infty$	$I_{LK} = I_0, \quad U_{LK} = 0$	$I_{LK} = \frac{U_0}{R_i}, \quad U_{LK} = 0$
Leistungs- anpassung $G_L = G_i$	$P_L = P_i = \frac{I_0^2}{4G_i}$	$R_L = R_i, \quad P_L = P_i = \frac{U_0^2}{4R_i}$
Spannungs- anpassung	-----	$R_L \gg R_i \Rightarrow U_L \approx U_0$
Strom- anpassung	$G_L \gg G_i \Rightarrow I_L \approx I_0$	-----

### Reihenschaltung von linearem und nichtlinearem Widerstand

Beispiel: Widerstand und Diode in Durchlassrichtung  
Gesucht: Gesamtwiderstand



Lösung: Rechnerisch oder Grafisch



Die rechnerische Lösung ist schwierig, da die exakte Diodenkennlinie nur mit großen Aufwand zu ermitteln ist. Üblich ist die empirisch ermittelte, typische Kennlinie, die grafisch in Datenblättern angegeben wird.

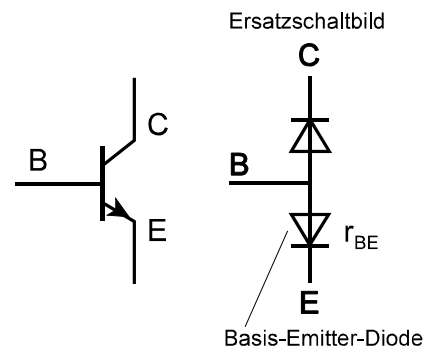
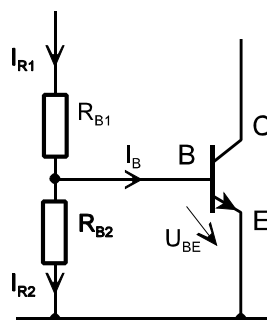
→ Daher ist die grafische Lösung zweckmäßig.

#### Lösungsprinzip:

Addition der Teilspannungen bei konstantem Strom: → ergibt jeweils einen Punkt auf der resultierenden Gesamtkennlinie (R+D).

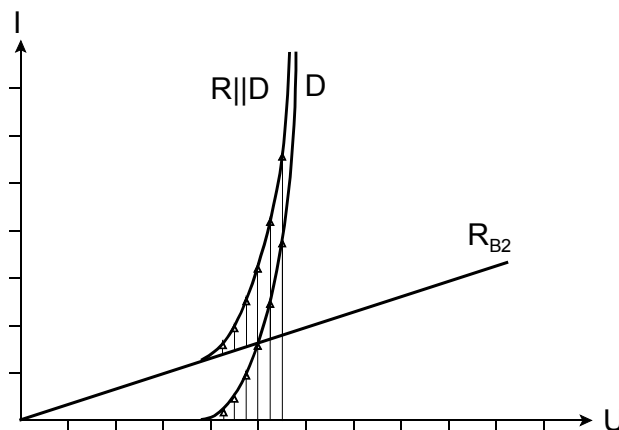
### Parallelschaltung von linearem und nichtlinearem Widerstand

Beispiel: Transistoreingang (Basis) mit parallelem Basis-Teilerwiderstand



Gesucht:  $R_{ges} = R_{B2} || r_{BE}$

→ Lösung wieder grafisch, da zweckmäßiger



#### Lösungsprinzip:

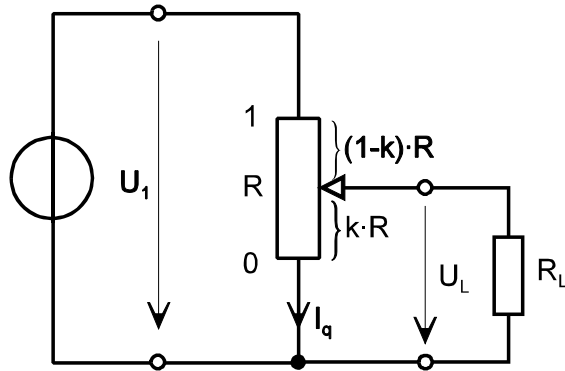
Die Teilströme bei jeweils konstanter Spannung werden addiert:

→ Summe ergibt einen Punkt auf der neuen, gemeinsamen Widerstandskennlinie ( $R||D$ ).

Gemischte Stromkreise

(Anwendung von Maschen- und Knotenregel)

In einem gemischten Stromkreis kommen Reihen- und Parallelschaltungen von aktiven und passiven Zweipolen vor.

Der belastete Spannungsteiler (Potentiometer)

$$\text{def. } \frac{U_{L\ell}}{U_1} = k = 0 \dots 1 \rightarrow U_{L\ell} = k \cdot U_1$$

$$\text{Gesucht: } U_L = f(U_1, R_L, R)$$

Berechnung mit Parallelschaltung und Spannungsteilerregel

## 1. Parallelschaltung

Reihe

$$R_p = \frac{R_L \cdot k \cdot R}{R_L + k \cdot R}$$

$$R_R = (1 - k) \cdot R$$

## 2. Spannungsteilerregel

$$\frac{U_L}{U_1} = \frac{R_p}{R_p + R_R} = \frac{R_L \cdot k \cdot R}{(R_L + k \cdot R) \cdot \left[ \frac{R_L \cdot k \cdot R}{R_L + k \cdot R} + (1 - k) \cdot R \right]}$$

$$\frac{U_L}{U_1} = \frac{R_L \cdot k \cdot R \cdot (R_L + k \cdot R)}{(R_L + k \cdot R) \cdot [R_L \cdot k \cdot R + (R_L + k \cdot R)(1 - k) \cdot R]}$$

$$= \frac{R_L \cdot k \cdot R}{R_L \cdot k \cdot R + (R \cdot R_L + k \cdot R^2)(1 - k)}$$

$$= \frac{R_L \cdot k \cdot R}{R_L \cdot k \cdot R \cdot \left[ 1 + \left( \frac{1}{k} + \frac{R}{R_L} \right) (1 - k) \right]}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{k} - \frac{k}{k} + \frac{R}{R_L} (1 - k)} = \frac{1}{\frac{1}{k} + \frac{R}{R_L} (1 - k)}$$

$$U_L = \frac{1}{\frac{1}{k} + \frac{R}{R_L} (1 - k)} \cdot U_1$$

## Grafische Darstellung des Ergebnisses

Wertetabelle

$$\frac{U_L}{U_1} = f(k)$$

Parameter  $\frac{R}{R_L}$ 

k \ $\frac{U_L}{U_1}$	$\frac{R}{R_L}$				
	0	0,1	1	10	$\infty$
0	0	0	0	0	0
0,2	0,2	0,2	0,17	0,08	0
0,4	0,4	0,39	0,32	0,12	0
0,8	0,8	0,79	0,7	0,31	0
1	1	1	1	1	0

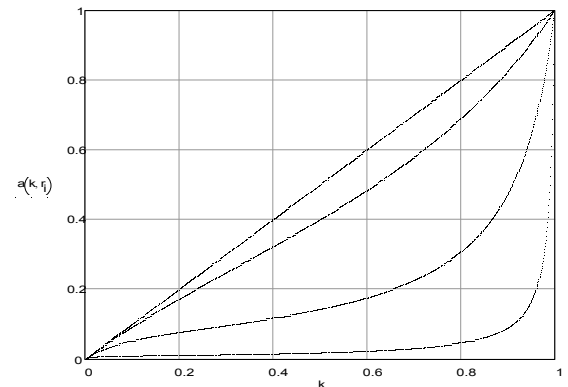
 $\uparrow$   
 $R_L = \infty$   
 Leerlauf

 $\uparrow$   
 $R_L = 0$   
 Kurzschluss

 $k := 0.00010.001 \ 1 \quad i := 1..4 \quad r_i :=$ 

$$a(k, r) := \frac{1}{\left[ \frac{1}{k} + r \cdot (1 - k) \right]}$$

0
1
10
100



(mit Mathcad)

Potentiometer: Einstellbare Spannungsteiler

- weites Anwendungsgebiet in Mess-, Regel- und Steuertechnik
- feinstufige Einstellung der Ausgangsspannung  $U_L$

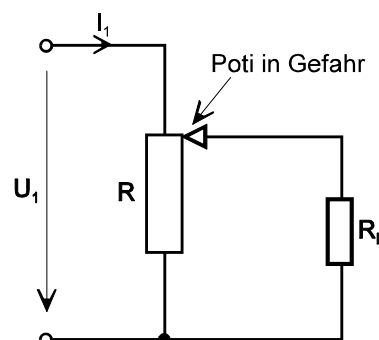
Vorteile: Einfaches Prinzip, kostengünstig

Nachteile: Bei Belastung Verluste im Potentiometer verbunden mit nichtlinearem Verhalten

Praktische Auslegung:  $R \ll R_L$  für akzeptable LinearitätÜblich wird der Querstrom  $I_q = 5 \dots 10 I_L$  gewählt, damit ergibt sich für R:

$$R = \frac{U_1}{5 \dots 10 \cdot I_L}$$

Wichtig: Bei  $\frac{R}{R_L} \approx 1$  ist das Potentiometer durch Überlastung am Schleiferanfang bzw. Schleiferende gefährdet.

BeispielEin Drahtpotentiometer von  $R=5k\Omega$  ist für  $P_{\max}=5W$  ausgelegt.Bei welchem min. Lastwiderstand  $R_L$  am Abgriff ist das Poti gefährdet?  $U_1=100V$ 

Lösung:

$$I_{\max} \text{ des Potis bestimmen } P = I^2 \cdot R \rightarrow I = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{5W}{5k\Omega}} = 31,6mA$$

→ 31,6mA dürfen an allen Stellen des Widerstandsdrahtes des Potis fließen.

$$U_1 = I_1 \left[ (1-k)R + (R \cdot k \parallel R_L) \right]$$

→ Größte Gefahr am Widerstandsanzug: Zur Vereinfachung wird  $k=1$  gesetzt.

$$U_1 = I_1 (R \parallel R_L) = I_1 \frac{R \cdot R_L}{R + R_L}$$

$$\rightarrow R_L = \frac{U_1 \cdot R}{I_1 \left( R - \frac{U_1}{I_1} \right)} = \frac{U_1 \cdot R}{I_1 \cdot R - U_1} = \frac{100V \cdot 5k\Omega}{31,6mA \cdot 5k\Omega - 100V} = 8,62k\Omega$$

Beispiel

Spannungsteiler für  $U_1=12V$ ,  $U_L=5V$ ,  $R_L=150\Omega$

Der Querstrom soll  $I_q=2I_L$  und  $I_q=8I_L$  betragen.

Gesucht:  $R_1$  und  $R_2$  für beide Fälle und die Lastspannungsänderung  $\Delta U_L$ , wenn  $R_L$  auf  $100\Omega$  abfällt.

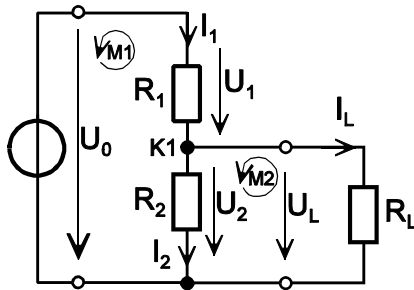
$8I_L$	$2I_L$
$I_L = \frac{U_L}{R_L} = \frac{5V}{150\Omega} = 33mA$	33mA
$I_q = 8 \cdot I_L = 8 \cdot 33mA = 264mA$	66mA
$R_2 = \frac{U_L}{I_q} = \frac{5V}{264mA} = 18,9\Omega$	75,76 $\Omega$
$R_1 = \frac{U_1 - U_L}{I_q + I_L} = \frac{12V - 5V}{264mA + 33mA} = 23,6\Omega$	70,71 $\Omega$

Lastspannungsänderung für  $R_L=100\Omega$ :

$8I_L$	$2I_L$
$R_P' = \frac{R_2 \cdot R_L}{R_2 + R_L} = \frac{18,9\Omega \cdot 100\Omega}{18,9\Omega + 100\Omega} = 15,9\Omega$	43,1 $\Omega$
$U_L' = U_1 \frac{R_P'}{R_1 + R_P'} = 12V \frac{15,9\Omega}{23,6\Omega + 15,9\Omega} = 4,83V$	4,57V
$\Delta U_L = U_L' - U_L = 4,83V - 5V = -0,17V$	-0,43V

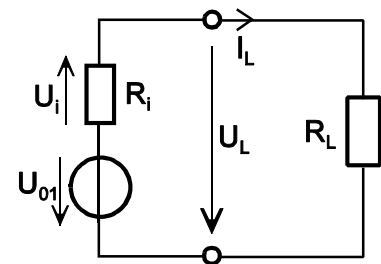
Berechnung einer Ersatzspannungsquelle

Anwendung von Kirchhoff I und II →  $\Sigma I=0$ ,  $\Sigma U=0$

Innenwiderstand eines Spannungsteilers

Eingangsspannung + Teiler

=

Grundstromkreis mit  
Ersatzspannungsquelle

$$U_L = U_{01} - I_L \cdot R_i$$

Beispiel:Gegeben:  $U_0, R_1, R_2, R_L$ Gesucht:  $U_L = f(I_L, U_0)$ 

Ansatz mit Kirchhoff

$$M_1: U_0 - U_1 - U_L = 0$$

$$M_2: U_2 - U_L = 0 \quad \rightarrow U_L = U_2$$

$$K_1: I_1 - I_2 - I_L = 0 \quad \rightarrow I_1 = I_2 + I_L$$

Ohmsches Gesetz:  $U_1 = I_1 \cdot R_1$ 

$$I_1 = I_2 + I_L = \frac{U_L}{R_2} + I_L \quad \text{einsetzen in } M_1 \text{ ergibt:} \quad U_0 - \left( \frac{U_L}{R_2} + I_L \right) R_1 - U_L = 0$$

$$-U_L = -U_0 + \frac{U_L}{R_2} R_1 + I_L R_1$$

$$U_L \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) = U_0 - I_L R_1$$

$$U_L = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} - I_L \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$U_L = U_{01} - I_L \cdot R_i$$

Koeffizientenvergleich

Ergebnis:  $R_i = R_1 \parallel R_2$  $U_{01}$  = Ausgangsspannung des unbelasteten Teilers ( $I_L = 0$ )

$$\text{Probe: } R_i = \frac{U_{01}}{I_k} = \frac{U_{Lk}}{I_{Lk}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0 \cdot \frac{R_1}{U_0} = \frac{R_2 \cdot R_1}{R_1 + R_2} = R_1 \parallel R_2$$

$$U_{01} = U_{L\ell} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0$$

Beispiel:

Bestimmung der Funktion  $\frac{R_i}{R} = f(k)$  des unbelasteten Potentiometers mit grafischer Darstellung.

$$R_i = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_1 = (1-k)R$$

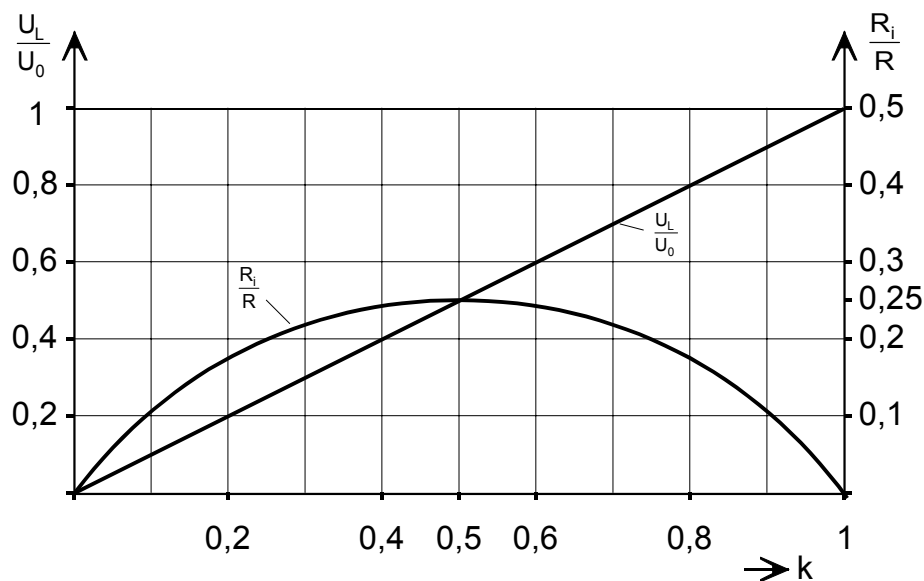
$$R_2 = k \cdot R$$

$$R_i = \frac{(1-k)R \cdot k \cdot R}{(1-k)R + k \cdot R}$$

$$R_i = \frac{(1-k)R \cdot k \cdot R}{k \cdot R \left( \frac{1-k}{k} + 1 \right)} = \frac{(1-k)R}{\frac{1-k+k}{k}} = (1-k)R \cdot k \quad \rightarrow \quad \frac{R_i}{R} = (1-k)k = k - k^2$$

## Wertetabelle

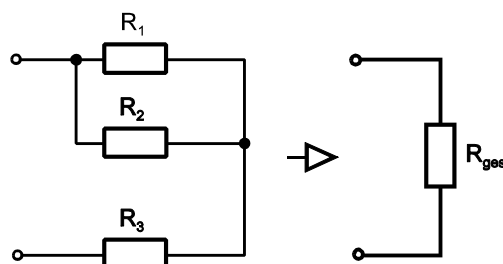
k	0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	1
$\frac{R_i}{R}$	0	0,16	0,24	0,25	0,24	0,16	0

Berechnung gemischter Widerstandsschaltungen

→ Kombination von Reihen- und Parallelschaltungen

Beispiele

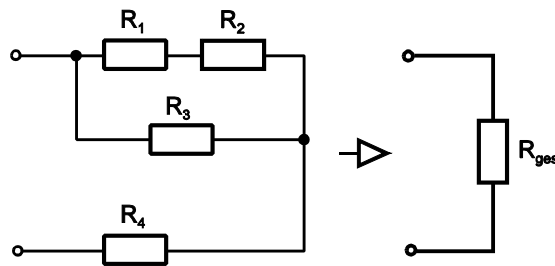
1.



$$R_{\text{ges}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3$$



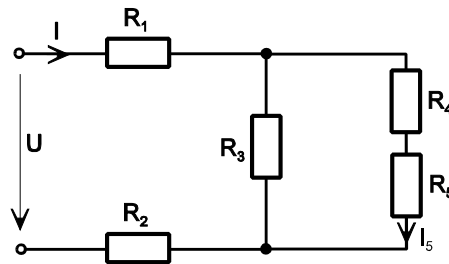
2.



$$R_{\text{ges}} = \frac{(R_1 + R_2) \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_4$$

Zahlenbeispiel

3.



$$U = 220\text{V}$$

$$R_1 = 1200\Omega$$

$$R_2 = 700\Omega$$

$$R_3 = 100\Omega$$

$$R_4 = 300\Omega$$

$$R_5 = 150\Omega$$

Gesucht  $I_5$ 

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 + \frac{(R_4 + R_5) \cdot R_3}{R_3 + R_4 + R_5}$$

$$= 1200\Omega + 700\Omega + \frac{(300\Omega + 150\Omega)100\Omega}{100\Omega + 300\Omega + 150\Omega}$$

$$= 1982\Omega$$

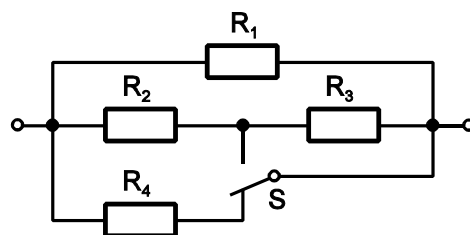
$$I = \frac{U}{R_{\text{ges}}} = 111\text{mA}$$

$$\frac{I_5}{I} = \frac{R_3 \parallel (R_4 + R_5)}{R_4 + R_5} = \frac{R_3 (R_4 + R_5)}{(R_3 + R_4 + R_5)(R_4 + R_5)}$$

$$I_5 = I \cdot \frac{R_3}{(R_3 + R_4 + R_5)} = 111\text{mA} \cdot \frac{100\Omega}{100\Omega + 300\Omega + 150\Omega}$$

$$I_5 = 20,2\text{mA}$$

4.



$$R_1 = 10\Omega$$

$$R_2 = 20\Omega$$

$$R_3 = 15\Omega$$

Welchen Wert muss  $R_4$  haben, wenn der Gesamtwiderstand in beiden Schalterstellungen gleichbleiben soll?

Ansatz:  $R_{\text{ges1}} = R_1 \parallel R_2$

$$R_{\text{ges2}} = R_1 \parallel (R_2 + R_3) \parallel R_4$$

math. einfacher ist:

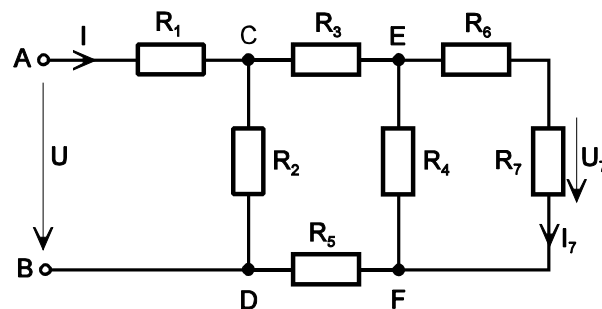
$$\frac{1}{R_{\text{ges1}}} = \frac{1}{R_{\text{ges2}}}$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3} + \frac{1}{R_4}$$

$$\frac{1}{R_4} = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2 + R_3}$$

$$R_4 = \frac{1}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2 + R_3}} = \frac{1}{\frac{1}{20\Omega} - \frac{1}{20\Omega + 15\Omega}} = 46,67\Omega$$

### 5. Kettenschaltung



$$R_1 = 30\Omega, R_2 = 70\Omega, R_3 = 20\Omega, R_4 = 160\Omega, R_5 = 40\Omega, R_6 = 80\Omega, R_7 = 120\Omega$$

$$U = 24V$$

Wieviel % von U beträgt  $U_7$  ?

Wieviel % von I beträgt  $I_7$  ?

### Berechnung

$$R_{\text{EF}} \rightarrow R_{\text{CD}} \rightarrow R_{\text{AB}} = R_{\text{ges}} = 77,61\Omega$$

$$\frac{U_2}{U} = \frac{R_{\text{CD}}}{R_{\text{ges}}} \rightarrow U_2 = 14,72V \quad \text{Spannungsverhältnisse}$$

$$\frac{U_4}{U_2} = \frac{R_{\text{EF}}}{R_3 + R_{\text{EF}} + R_5} \rightarrow U_4 = 8,79V$$

$$\frac{U_7}{U_4} = \frac{R_7}{R_6 + R_7} \rightarrow U_7 = 5,27V$$

$$\frac{U_7}{U} = \frac{5,27V}{24V} = 0,22 \rightarrow \underline{\underline{22\%}}$$

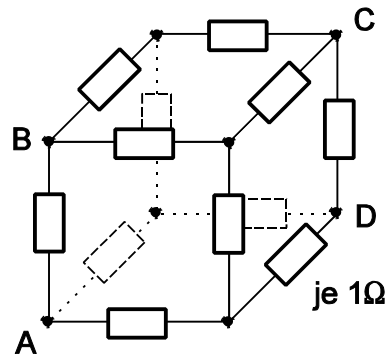
$$I_7 = \frac{U_7}{R_7} = \frac{5,27V}{120\Omega} = 43,9\text{mA}$$

$$I = \frac{U}{R_{\text{ges}}} = \frac{24V}{77,61\Omega} = 309,2\text{mA}$$

$$\frac{I_7}{I} = \frac{43,7\text{mA}}{309,2\text{mA}} = 0,142 \rightarrow \underline{\underline{14,2\%}}$$

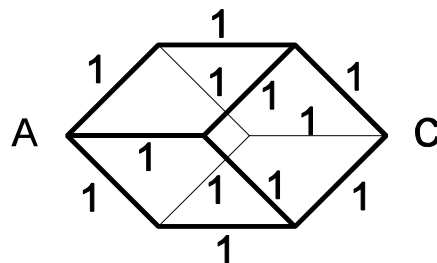
Beispiel: Widerstandswürfel

Jede Kante eines Würfels habe den Widerstand  $1\Omega$ . Wie groß ist der Widerstand zwischen den gegenüberliegenden Eckpunkten A und C?

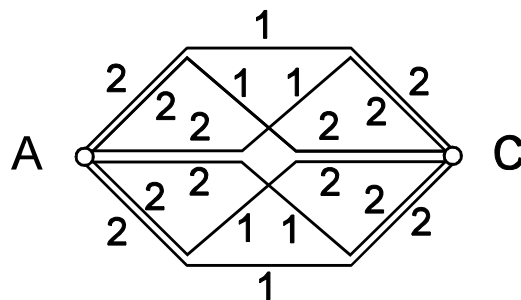


Lösung:

Vorstellung: Würfel zwischen A und C auseinandergezogen



Die in A und C zusammenlaufenden Widerstände je  $1\Omega$  in 2 parallele Widerstände je  $2\Omega$  aufspalten: dadurch entstehen 6 parallele Zweige je  $5\Omega$ .



Rechnung:

Jeder Parallelzweig:

$$R'_{AC} = 2\Omega + 1\Omega + 2\Omega = 5\Omega$$

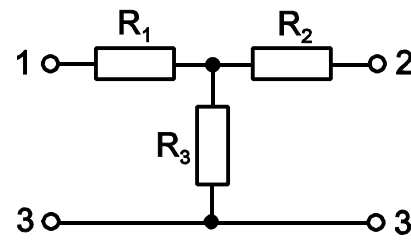
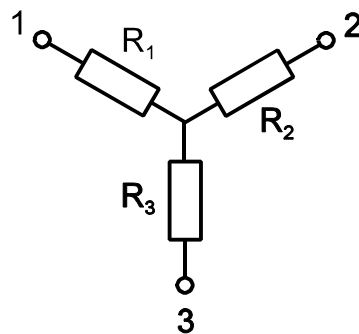
Widerstand zwischen A und C:

$$R_{AC} = \frac{1}{6\left(\frac{1}{5\Omega}\right)} = \frac{1}{\frac{6}{5}\Omega} = \frac{5}{6}\Omega$$

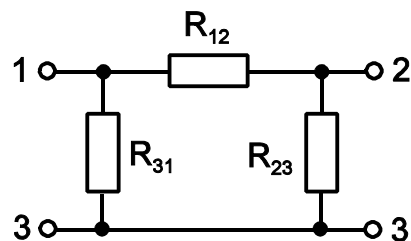
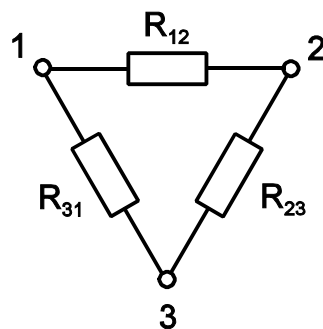
Eine Lösung ist auch mit der Stern-Dreieckumformung möglich.

Stern- und Dreiecksschaltungen

- allg. • Anwendung in der Drehstromtechnik  
• Schaltungsvereinfachung

Stern

T-Schaltung (Vierpol)

Dreieck

π-Schaltung (Vierpol)

**3.4 Umrechnung Sternschaltung ⇔ Dreieckschaltung**

Annahme zur Ermittlung der Umrechnungsformeln: Der Widerstand zwischen je 2 Punkten muss bei beiden Schaltungen gleich sein.

Punkt	Y	Δ
1 - 2	$R_1 + R_2 = R_{12} \parallel (R_{31} + R_{23}) = \frac{R_{12}(R_{31} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = R_{E12}$	
2 - 3	$R_2 + R_3 = R_{23} \parallel (R_{12} + R_{31}) = \frac{R_{23}(R_{12} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = R_{E23}$	
3 - 1	$R_3 + R_1 = R_{31} \parallel (R_{23} + R_{12}) = \frac{R_{31}(R_{23} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = R_{E31}$	

Umrechnung     $\Delta \rightarrow Y$ 

Wenn  $R_{12}$ ,  $R_{23}$  und  $R_{31}$  gegeben sind, können  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_3$  berechnet werden.

$$R_1 = R_{E12} - R_2 \quad R_2 = R_{E23} - R_3 \quad R_3 = R_{E31} - R_1$$

$$\Rightarrow R_1 = R_{E12} - R_{E23} + R_{E31} - R_1$$

$$2R_1 = R_{E12} - R_{E23} + R_{E31}$$

$$R_1 = \frac{1}{2}(R_{E12} - R_{E23} + R_{E31})$$

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31} + R_{12}R_{23} - R_{23}R_{31} - R_{23}R_{12} + R_{31}R_{12} + R_{31}R_{23}}{2(R_{12} + R_{23} + R_{31})} = \frac{2R_{12}R_{31}}{2(R_{12} + R_{23} + R_{31})}$$

$$\boxed{R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}} \quad (1)$$

Durch zyklisches Vertauschen der Indizes:

$$\boxed{R_2 = \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}} \quad (2)$$

$$\boxed{R_3 = \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}} \quad (3)$$

Umrechnung  $Y \rightarrow \Delta$

Dabei sind  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_3$  gegeben und  $R_{12}$ ,  $R_{23}$  und  $R_{31}$  können berechnet werden.

Ansatz: Verhältnisbildung mit (1), (2) und (3)

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_{31}}{R_{23}} \quad \frac{R_2}{R_3} = \frac{R_{12}}{R_{31}} \quad \frac{R_3}{R_1} = \frac{R_{23}}{R_{12}}$$

(1) geteilt durch  $R_{31}$

$$R_1 = \frac{R_{12}}{\frac{R_{12}}{R_{31}} + \frac{R_{23}}{R_{31}} + 1} = \frac{R_{12}}{\frac{R_2}{R_3} + \frac{R_2}{R_1} + 1}$$

nach  $R_{12}$  auflösen ergibt

$$\boxed{R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}}$$

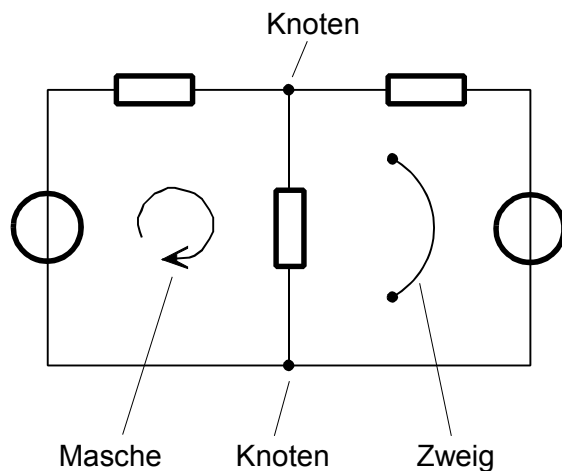
mit zyklischer Vertauschung

$$\boxed{R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}} \quad \boxed{R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 \cdot R_1}{R_2}}$$

### 3.5 Lineare Maschennetze

#### Netzwerke

Ein allg. Netzwerk ist aus Zweigen, Knoten und Maschen aufgebaut.

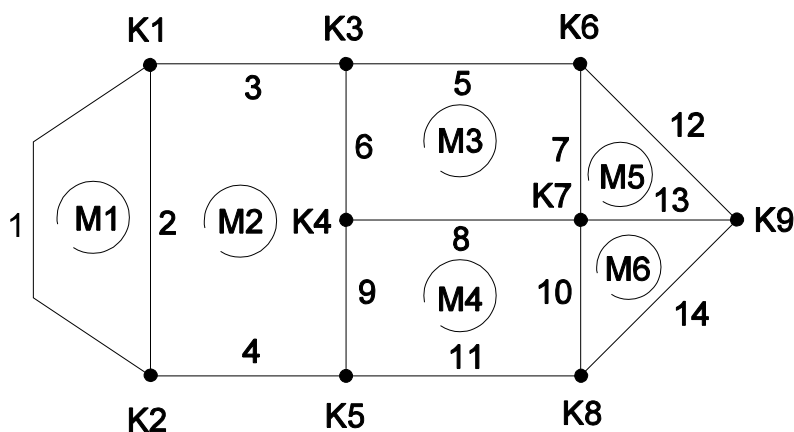


Zweig: Kette von Zweipolen innerhalb eines Netzwerkes, von gleichem Strom durchflossen

Knoten: Verbindungspunkt mehrerer Zweige

Masche: insich geschlossene Kette von Zweigen

Muster eines allgemeinen Netzwerkes



z=14    Zweige, d.h. 14 unbekannte Ströme  
m=6    Maschen  
k=9    Knoten

$$z = m + (k - 1)$$

Beispiel:

$$z = 6 + (9 - 1) = 14 \text{ Gleichungen}$$

9 Knoten, aber 8 unabhängige Gleichungen, da der 9. Strom aus den anderen Strömen bestimmbar ist.

mit Maschenregel aufstellen    mit Knotenregel aufstellen

→ Lineares Gleichungssystem mit z Unbekannten und z Gleichungen

Aufstellung der zur Lösung erforderlichen Gleichungen① Kennzeichnung der Ströme und Spannungen

Quellen: Spannungen von  $+$   $\rightarrow$   $-$  (vorläufiges Bezugssystem)  
Ströme entgegengesetzt

Widerstände: Spannungen und Ströme gleichgerichtete Pfeil

② Maschengleichungen

m Gleichungen nach Kirchhoff,  $\sum U=0$

Maschen mit Umlaufsinn bezeichnen,  
Gleichungen aufschreiben

③ Knotengleichungen

(k-1) Gleichungen  $\sum I=0$

Knoten bezeichnen

Gleichungen aufschreiben: hineinfließende Ströme positiv, herausfließende negativ  
eine Knotengleichung weglassen (streichen)

→ insgesamt ergeben sich im Beispiel  $z=m+k-1=6+9-1=14$  Gleichungen

Lösung des Gleichungssystems

1. direkte Anwendung der Kirchhoff'schen Sätze  
→ alle Gleichungen verwenden (geeignet für Rechenprogramme)
2. Maschenstromverfahren (wird hier nicht weiter behandelt)  
Stromquellen werden in Spannungsquellen umgerechnet,  
die (k-1) Knotengleichungen werden eingespart,  
es wird nur mit Maschen gerechnet. Gearbeitet wird mit Widerständen und Strömen
3. Knotenpotentialverfahren (wird hier nicht weiter behandelt)  
Spannungsquellen werden in Stromquellen umgerechnet,  
m Gleichungen werden eingespart,  
nur die (k-1) Knotengleichungen werden gebraucht.  
Gearbeitet wird mit Leitwerten und Spannungen.

**3.5.1 Lösung mit allen Gleichungen**

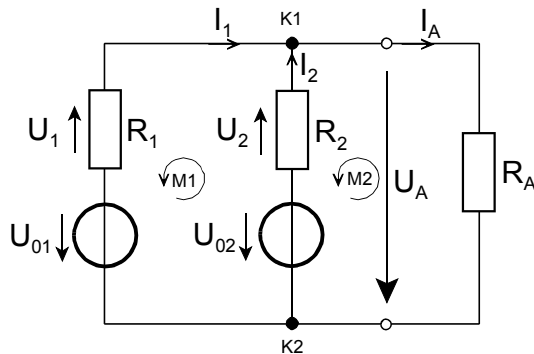
Zur Lösung (Reduktion) des Gleichungssystems mit allen Gleichungen bieten sich im wesentlichen folgende Methoden an:

- a) Eliminieren durch zweckmäßiges Einsetzen bis unbekannte durch bekannte Größen ausgedrückt sind. (Methode des „scharfen Hinsehens“)
- b) Gauß'scher Algorithmus (Additionsmethode)
- c) Matrizenlösung mit Cramer'scher Regel

Beispiel

Einfaches Netzwerk mit Quellen und Lastwiderständen

Lösung mit dem Gauß'schen Algorithmus



m=2 Maschengleichungen

k=2 Knoten

→ k-1=1 Knotengleichungen

Gegeben:  $U_{01}, U_{02}, R_1, R_2, R_A$ Gesucht:  $I_1, U_A, I_A$ 

Aufstellung der Gleichungen

M1	$I_2 \cdot R_2$	$-I_1 \cdot R_1$	$I_A \cdot 0$	=	$U_{02} - U_{01}$
M2	$-I_2 \cdot R_2$	0	$-I_A \cdot R_A$	=	$-U_{02}$
K1	$I_2$	$I_1$	$-I_A$	=	0

Die Anwendung des Gauß'schen Algorithmus bedeutet: Gleichungen reduzieren

$$\begin{array}{rclcl}
 a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & = & c_1 \\
 a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & = & c_2 \\
 a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & = & c_3
 \end{array}$$

Prinzip:Multiplikation der 1. Gleichung mit  $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$  und Addition zur 2. Gleichung.Multiplikation der 1. Gleichung mit  $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$  und Addition zur 3. Gleichung.Multiplikation der 2. Gleichung\* mit  $-\frac{a_{32}}{a_{22}}$  und Addition zur 3. Gleichung\*.

\* bedeutet modifiziert

Zuerst  $I_1$  berechnen → Spalten vertauschen

M1	$I_2 \cdot R_2$	0	$-I_1 \cdot R_1$	=	$U_{02} - U_{01}$
M2	$-I_2 \cdot R_2$	$-I_A \cdot R_A$	0	=	$-U_{02}$
K1	$I_2$	$-I_A$	$I_1$	=	0

muss 0 werden



$I_2$  in M1 und K1 eliminieren

M1 mit  $-\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{-R_2}{R_2} = 1$  multiplizieren und zu M2 addieren, d.h. M1 und M2 addieren.

M1	$I_2 \cdot R_2$	0	$-I_1 \cdot R_1$	=	$U_{02} - U_{01}$
M2	$-I_2 \cdot R_2$	$-I_A \cdot R_A$	0	=	$-U_{02}$
M2*	0	$-I_A \cdot R_A$	$-I_1 \cdot R_1$	=	$-U_{01}$

M1 mit  $-\frac{a_{31}}{a_{11}} = -\frac{1}{R_2}$  multiplizieren und zu K1 addieren.

M1	$I_2 \cdot R_2$	0	$-I_1 \cdot R_1$	=	$U_{02} - U_{01}$
M1*	$-I_2$	0	$I_1 \frac{R_1}{R_2}$	=	$-\frac{U_{02} - U_{01}}{R_2}$
K1	$I_2$	$-I_A$	$I_1$	=	0
K1*	0	$-I_A$	$I_1 \frac{R_1}{R_2} + I_1$	=	$-\frac{U_{02} - U_{01}}{R_2}$

insgesamt:

M1	$I_2 \cdot R_2$	$I_A \cdot 0$	$-I_1 \cdot R_1$	=	$U_{02} - U_{01}$
M2*	0	$-I_A \cdot R_A$	$-I_1 \cdot R_1$	=	$-U_{01}$
K1*	0	$-I_A$	$I_1 \frac{R_1}{R_2} + I_1$	=	$-\frac{U_{02} - U_{01}}{R_2}$

$I_A$  in K1\* eliminieren

M2\* mit  $-\frac{a_{32}}{a_{22}} = -\frac{1}{R_A}$  multiplizieren und zu K1\* addieren.

M2*	0	$-I_A$	$I_1 \frac{R_1}{R_A}$	=	$\frac{U_{01}}{R_A}$
K1*	0	$-I_A$	$I_1 \frac{R_1}{R_2} + I_1$	=	$-\frac{U_{02} - U_{01}}{R_2}$
K1**	0	0	$I_1 \frac{R_1}{R_A} + I_1 \frac{R_1}{R_2} + I_1$	=	$\frac{U_{01}}{R_A} - \frac{U_{02} - U_{01}}{R_2}$

$$I_1 \left( \frac{R_1}{R_A} + \frac{R_1}{R_2} + \frac{U_{01}}{R_A} \right) = \frac{U_{01}}{R_A} - \frac{U_{02} - U_{01}}{R_2}$$

$$I_1 \frac{R_1 R_2 + R_1 R_A + R_A R_2}{R_A R_2} = \frac{U_{01} R_2 - (U_{02} - U_{01}) R_A}{R_A R_2}$$

$$I_1 = \frac{U_{01} R_2 - (U_{02} - U_{01}) R_A}{R_1 R_2 + R_A (R_1 + R_2)}$$

Zahlenbeispiel

$$U_{01}=100\text{V}, U_{02}=110\text{V}$$

$$R_1=10\Omega, R_2=10\Omega, R_A=200\Omega$$

$$I_1 = \frac{100\text{V} \cdot 10\Omega - (110\text{V} - 100\text{V})200\Omega}{10\Omega \cdot 10\Omega + 200\Omega(10\Omega \cdot 10\Omega)} = -244\text{mA}$$

mit M1:  $I_2 \cdot R_2 - I_1 \cdot R_1 = U_{02} - U_{01}$

$$\begin{aligned} \rightarrow I_2 R_2 &= U_{02} - U_{01} + I_1 R_1 \\ &= 110\text{V} - 100\text{V} + (-244\text{mA}) \cdot 10\Omega \\ &= 10\text{V} - 2,44\text{V} \\ &= 7,56\text{V} \end{aligned}$$

mit M2:  $-I_2 \cdot R_2 - U_A = -U_{02}$

$$\begin{aligned} \rightarrow U_A &= U_{02} - I_2 R_2 \\ &= 110\text{V} - 7,56\text{V} \\ &= 102,44\text{V} \\ I_A &= \frac{U_A}{R_A} = 0,512\text{A} \end{aligned}$$

Lösung mit Determinanten, Cramer'sche Regel

Berechnung von Determinanten, Prinzip:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ausgangsmatrix (vorheriges Beispiel)

$$\begin{array}{ccc|c} I_2 & I_1 & I_A & \\ \hline R_2 & -R_1 & 0 & = U_{02} - U_{01} \\ -R_2 & 0 & -R_A & = -U_{02} \\ 1 & 1 & -1 & = 0 \end{array}$$

Zur Berechnung eines unbekannten Stromes wird in der Ausgangsmatrix die Spalte des unbekannten Stromes durch die Spalte mit den bekannten Größen ersetzt. Diese Matrix mit der ausgetauschten Spalte wird dann durch die Ausgangsmatrix dividiert.

$$I_1 = \frac{\begin{array}{ccc} R_2 & U_{02}-U_{01} & 0 \\ -R_2 & -U_{02} & -R_A \\ 1 & 0 & -1 \end{array}}{\begin{array}{ccc} R_2 & -R_1 & 0 \\ -R_2 & 0 & -R_A \\ 1 & 1 & -1 \end{array}} = \frac{R_2(-U_{02}(-1)-0) + (U_{02}-U_{01})((-R_A)1 - (-1)(-R_2) + 0)}{R_2(0 - 1(-R_A) + (-R_1)((-R_A)1 - (-1)(-R_2) + 0)}$$

$$I_1 = \frac{10\Omega \cdot 110V + 10V(-200\Omega - 10\Omega)}{10\Omega \cdot 200\Omega + (-10\Omega)(-200\Omega - 10\Omega)} = \frac{1100V\Omega - 2100V\Omega}{2000\Omega^2 + 2100\Omega^2} = \frac{-1000V\Omega}{4100\Omega^2} = -0,244A$$

$$I_A = \frac{\begin{array}{ccc} R_2 & -R_1 & U_{02}-U_{01} \\ -R_2 & 0 & -U_{02} \\ 1 & 1 & 0 \end{array}}{\begin{array}{ccc} R_2 & -R_1 & 0 \\ -R_2 & 0 & -R_A \\ 1 & 1 & -1 \end{array}} = \frac{R_2(0 + U_{02}) + (-R_1)((-U_{02}) - 0)(U_{02} - U_{01})(-R_2 - 0)}{R_2(0 - 1(-R_A) + (-R_1)((-R_A)1 - (-1)(-R_2) + 0)}$$

$$I_A = \frac{10\Omega \cdot 110V + 10\Omega \cdot 110V + 10V(-10\Omega)}{4100\Omega^2} = \frac{2100V\Omega}{4100\Omega^2} = 0,512A$$

$$U_A = R_A \cdot I_A = 200\Omega \cdot 0,512A = 102,4V$$

### 3.5.2 Das Überlagerungsverfahren

Überlagerungssatz von Helmholtz (1853)

- In einem linearen System kann die Gesamtwirkung aller Ursachen an einer Stelle durch Addition (Zusammenzählen) der Wirkungen der Einzelursachen bestimmt werden. (Anwendung auf vielen Gebieten der Physik)

#### Anwendung bei der Berechnung elektrischer Netzwerke mit linearen Komponenten

Die Ströme in den Zweigen und die Spannungen zwischen den Knotenpunkten eines linearen elektrischen Netzwerkes mit mehreren voneinander unabhängigen Quellen für Spannung und Strom sind gleich der Summe der Teilströme und -spannungen die von den Einzelquellen verursacht werden.

Voraussetzungen:

- Lineare Widerstände → Proportionalität zwischen U und I, nichtlineare Widerstände können abschnittsweise linearisiert werden
- unabhängige aktive Zweipole

Mathematische Beziehungen

$$I_x = \sum_{i=1}^n I_{xU0i} + \sum_{i=1}^m I_{xI0i}$$

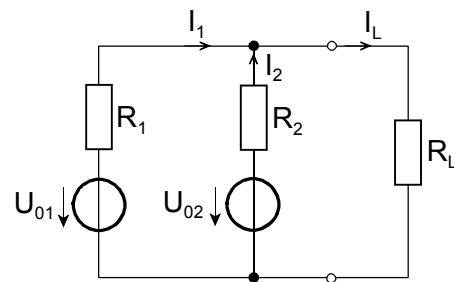
Verfahrensweise

1. alle Spannungsquellen bis auf eine überbrücken, die Innenwiderstände bleiben bestehen.
2. alle m Stromquellen durch Unterbrechung abschalten
- 3.1 Teilstrom  $I_{xU01}$  mit  $U_{01}$  berechnen, evtl. mit Stern/Dreieckumformung etc.
- 3.2 wie bis 3.1 aber mit  $U_{02}$  bis  $U_{0n}$
4. Alle n Spannungsquellen überbrücken,
5. Alle Stromquellen (m-1) mit bis auf eine ( $I_{k1}$ ) durch Unterbrechung abschalten
- 6.1 Teilstrom  $I_{xIk1}$  mit  $I_{k1}$  berechnen, evtl. mit Hilfsverfahren
- 6.2 wie bis 6.1 aber mit  $I_{k2}$  bis  $I_{km}$
7. Alle Teilströme zum Gesamtstrom  $I_x$  addieren.

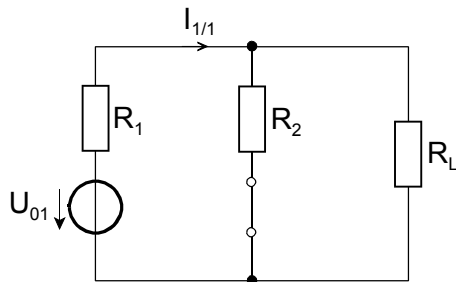
Beispiel zum Überlagerungsprinzip

2 Spannungsquellen speisen 1 Verbraucher

Gesucht:  $I_1$

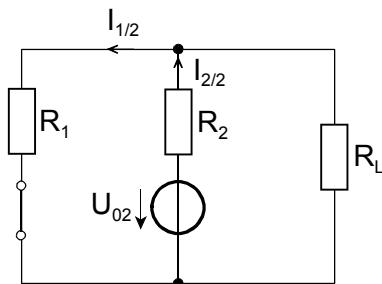


1. Schritt:  $U_{02}=0$



$$I_{1/1} = \frac{U_{01}}{R_{\text{ges}1}} = \frac{U_{01}}{R_1 + R_2 \parallel R_L}$$

2. Schritt:  $U_{01}=0$



$$I_{2/2} = \frac{U_{02}}{R_2 + R_1 \parallel R_L}$$

Stromteilerregel

$$\frac{-I_{1/2}}{I_{2/2}} = \frac{R_1 \parallel R_L}{R_1}$$

$$\rightarrow I_{1/2} = -\frac{R_1 \parallel R_L}{R_1} \cdot \frac{U_{02}}{R_2 + R_1 \parallel R_L}$$

3. Schritt: Addition der Teilströme

$$I_1 = I_{1/1} + I_{1/2}$$

### 3.5.3 Netzwerkberechnung mit Zweipolen

Verfahren zur Vereinfachung von Stromkreisen und zur Erleichterung der Berechnung durch Reduzierung auf die Schnittstellengrößen  $I_A$  und  $U_A$  (Grundstromkreis).

Als bekannt vorausgesetzt:

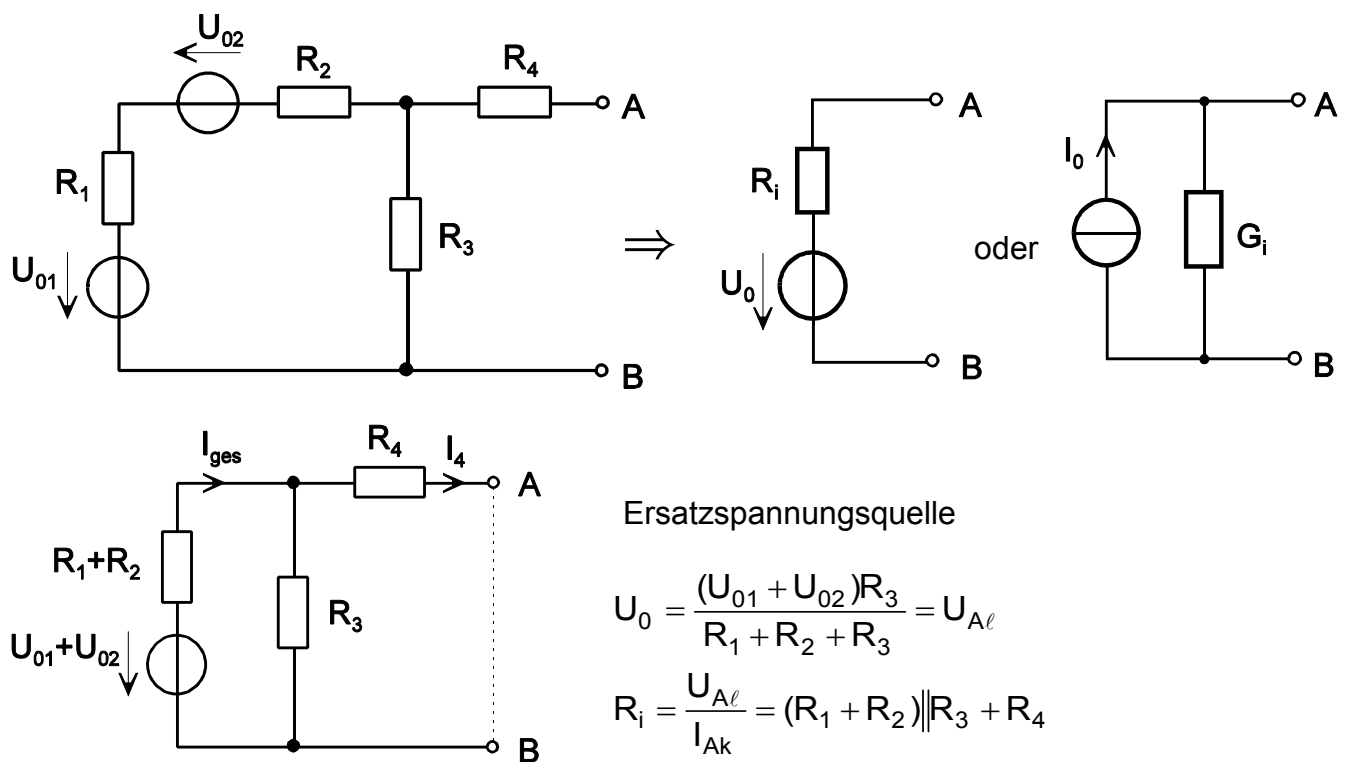
- das Verhalten von Grundstromkreisen mit Quelle, Innenwiderstand, Lastwiderstand, Strom, Leistung, Widerstandsverhältnisse, Anpassung.

#### Zweipolberechnung

passiver Zweipol: Netzwerk ohne Quellen aus passiven Schaltungselementen

aktiver Zweipol: Netzwerk aus passiven und aktiven Schaltungselementen  
→ Widerstände und Quellen

Beispiel: aktiver Zweipol



Ersatzstromquelle

$$\frac{I_4}{I_{ges}} = \frac{R_3 \parallel R_4}{R_4}$$

$$I_{ges} = \frac{U_{01} + U_{02}}{R_1 + R_2 + R_3 \parallel R_4}$$

$$\Rightarrow I_0 = I_4 = \frac{(U_{01} + U_{02}) \cdot R_3 \parallel R_4}{R_4 (R_1 + R_2 + R_3 \parallel R_4)}$$

$$I_0 = I_{Ak} = I_4$$

$$G_i = \frac{1}{R_i} = \frac{1}{(R_1 + R_2) \parallel R_3 + R_4}$$

Verfahren zur Stromkreisvereinfachung

1. Festlegung einer Trennstelle (Klemmen) zwischen aktivem und passivem Zweipol an der Stelle der gesuchten Größe  $I_L$  und  $U_L$ .
2. Vereinfachung der an den Klemmen angeschlossenen Zweipole (aktiv sowie passiv) zum Grundstromkreis.
3. Berechnung der gesuchten Größen z. B. mit den Formeln für die Grundstromkreise.

Mit Ersatzspannungsquelle

$$U_L = U_0 - I_L \cdot R_i \quad (1)$$

$$= U_0 \cdot \frac{R_L}{R_L + R_i} \quad (2)$$

$$I_L = \frac{U_0 - U_L}{R_i} \quad (3)$$

$$= \frac{U_0}{R_i + R_L} \quad (4)$$

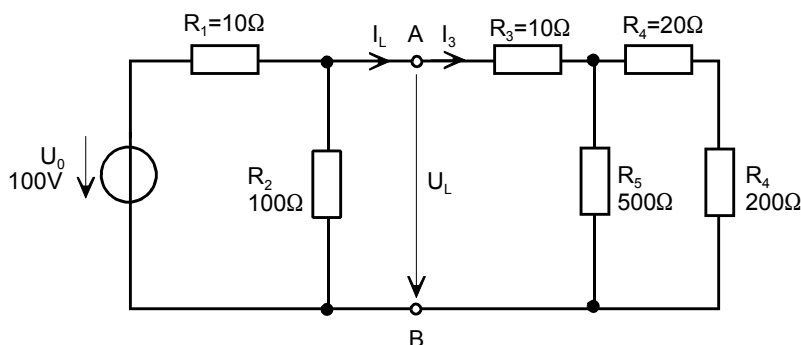
## mit Ersatzstromquelle

$$I_L = I_0 - U_L \cdot G_i \quad (5)$$

$$= I_0 \cdot \frac{G_L}{G_L + G_i} \quad (6)$$

$$U_L = \frac{I_0 - I_L}{G_i} \quad (7)$$

$$= \frac{I_0}{G_i + G_L} \quad (8)$$

1. Beispiel:Gesucht:  $I_L = I_3$ 

## 1.1 Berechnung mit Ersatzspannungsquelle

## 1. Schritt Vereinfachung rechte Seite

$$R_L = R_3 + R_5 \parallel (R_4 + R_6) = 10\Omega + 500\Omega \parallel 220\Omega = 162,7\Omega$$

## 2. Schritt Vereinfachung linke Seite

$$U_{01} = U_{L\ell} = U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 90,9V$$

$$R_i = \frac{U_{L\ell}}{I_{Lk}} = \frac{U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}}{\frac{U_0}{R_1}} = \frac{R_2 \cdot R_1}{R_1 + R_2} = R_1 \parallel R_2 = 9,09\Omega$$

mit (4)

$$I_L = I_3 = \frac{U_{01}}{R_i + R_L} = \frac{90,9V}{9,09\Omega + 162,7\Omega} = 528,9mA$$

## 1.2 Rechnung mit Ersatzstromquelle

1. Schritt  $G_L = \frac{1}{R_L} = 6,143mS$

2. Schritt (linke Seite)

$$I_0 = I_{L\ell} = \frac{U_0}{R_1} = \frac{100V}{10\Omega} = 10A$$

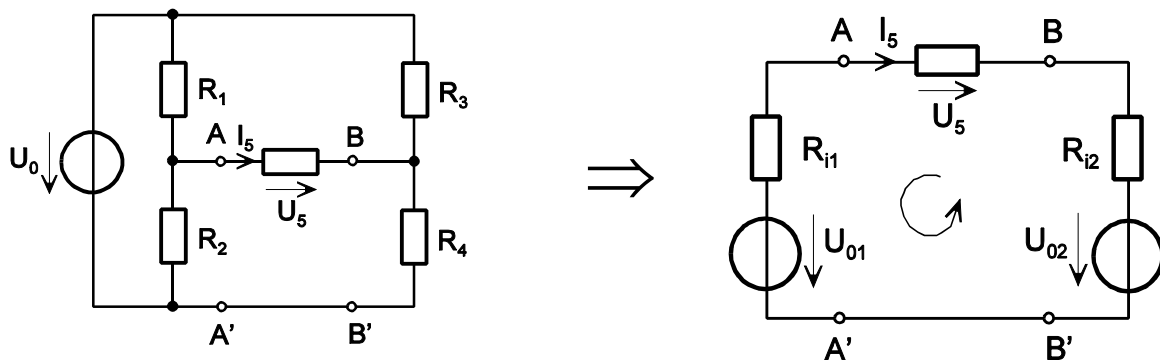
$$G_i = \frac{I_{Lk}}{U_{L\ell}} = \frac{1}{R_i} = \frac{\frac{U_0}{R_1}}{U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} = 0,011S$$

3. Schritt mit (6)

$$I_3 = I_L = I_0 \cdot \frac{G_L}{G_L + G_i} = 10A \cdot \frac{6,1mS}{6,1mS + 0,11S} = 528,9mA$$

## 2. Beispiel:

Brückenschaltung

Zerlegung in 2 Quellen und 1 passiver Zweipol, gesucht  $U_5$ 

$$U_{01} = U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = U_0 \cdot k_1$$

$$U_{02} = U_0 \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} = U_0 \cdot k_2$$

$$R_{i1} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = R_1 \cdot k_1$$

$$R_{i2} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = R_3 \cdot k_2$$

Masche:

$$U_{01} - I_5 R_{i1} - I_5 R_5 - I_5 R_{i2} - U_{02} = 0; \quad I_5 = \frac{U_5}{R_5}$$

$$U_{01} - U_5 \left( \frac{R_{i1}}{R_5} + 1 + \frac{R_{i2}}{R_5} \right) - U_{02} = 0$$

$$U_5 = \frac{U_{01} - U_{02}}{\frac{1}{R_5} (R_{i1} + R_{i2} + R_5)} \rightarrow I_5 = \frac{U_{01} - U_{02}}{(R_{i1} + R_{i2} + R_5)}$$

#### 4. Energie und Leistung; Energieumformung (Zusammenfassung)

$$1) \quad \text{Elektrische Energie} \quad \Delta W_{12} = (\underbrace{\varphi_1 - \varphi_2}_U) \underbrace{N \cdot q}_{Q=I \cdot \Delta t} = \underbrace{U \cdot I}_* \cdot \Delta t = \int_{t_1}^{t_2} u(t) \cdot i(t) dt \quad (1)$$

$$2) \quad \text{Elektrische Leistung} \quad P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \underbrace{U \cdot I}_* ; \quad p(t) = u(t) \cdot i(t) \quad (2)$$

\* Gleichspannung, Gleichstrom

$$3) \quad \text{Energieumformung; Wirkungsgrad (in \% \rightarrow \text{multiplizieren mit 100\%})}$$

$$\eta = \frac{P_N}{P_{\text{ges}}} = \frac{P_N}{P_N + P_V} \quad (3)$$

$P_N$  = Nutzleistung  
 $P_{\text{ges}}$  = Gesamtleistung  
 $P_V$  = Verlustleistung

$$P_V = (1 - \eta) \cdot P_{\text{ges}} \quad (4)$$

##### 4.1 Energieumformung mech. Energie $\leftrightarrow$ elektrische Energie

$$\text{Gewinnung elektr. Energie} \quad \Delta W_{\text{el}} = \eta \cdot \Delta W_{\text{mech}} \quad (5)$$

$$\text{Abgabe mech. Energie} \quad \Delta W_{\text{mech}} = \eta \cdot \Delta W_{\text{el}} \quad (6)$$

$$\text{Geradlinige Bewegung} \quad \Delta W_{\text{mech}} = F \cdot \Delta s \quad (7); \quad P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = F \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = F \cdot v \quad (8)$$

$$\text{Drehbewegung} \quad \Delta W_{\text{mech}} = F \cdot \Delta s = M \cdot \Delta \varphi \quad (9); \quad P = M \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = M \cdot \omega = M \frac{\pi \cdot n}{30} \quad (10)$$

$$\text{Geradlinige Beschleunigung} \quad \Delta W_{\text{mech}} = F \cdot \Delta s = m \cdot a \cdot \Delta s = m \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \Delta s = m \cdot v \cdot \Delta v \quad (11)$$

$$= \int_{v_1}^{v_2} m \cdot v \cdot dv = \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2) \quad (11a)$$

$$P = m \cdot a \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = m \cdot a \cdot v \quad (12)$$

$$\text{mit (7) und (11)} \quad F = \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow \Delta v = \frac{F \cdot \Delta t}{m}$$

$$\text{Drehbeschleunigung} \quad \Delta W = F \cdot \Delta s = m \cdot a \cdot \Delta s = m \cdot r \underbrace{\frac{\Delta \omega}{\Delta t}}_a \cdot \underbrace{r \Delta \varphi}_{\Delta s} = \underbrace{mr^2}_J \cdot \omega \Delta \omega \quad (13)$$

$$= \int_{\omega_1}^{\omega_2} J \cdot \omega d\omega = \frac{1}{2} J (\omega_2^2 - \omega_1^2) \quad (13a)$$

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = J \cdot \omega \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = J \cdot \omega \cdot a \quad (14)$$

$$\text{mit (9) und (13)} \quad M = m \cdot r^2 \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \rightarrow \Delta \omega = \frac{M \cdot \Delta t}{J}; \quad \Delta n = \frac{M \cdot \Delta t \cdot 30}{J \cdot \pi}$$



Umrechnung  $\omega$  auf  $n$  ;  $[n]=\text{min}^{-1}$   $\omega = \frac{n \cdot 2\pi}{60} = 0,105n$

$$\Delta W = \frac{1}{2} J \cdot 0,105^2 (n_2^2 - n_1^2) = 5,48 \cdot 10^{-3} \cdot J (n_2^2 - n_1^2) \quad (15)$$

$[\Delta W] = \text{Ws}$   
 $[\Delta t] = \text{s}$

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = 5,48 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{J}{\Delta t} (n_2^2 - n_1^2) \quad (16)$$

$[n] = \text{min}^{-1}$   
 $[J] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$

Energie freier Elektronen

Energie  $\Delta W = F \cdot \Delta s = q \cdot E \cdot \Delta s = q \cdot U = -1,6 \cdot 10^{-19} \cdot U$

Geschwindigkeit ( $v \ll c$ )  $\frac{m_0 \cdot v^2}{2} = e \cdot U \rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m_0}} = 0,594\sqrt{U}$  ;  $[v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Einheiten: Energie  $1\text{J} = 1\text{Ws} = 1\text{Nm} = 1\text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$

Leistung  $1\text{W} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 1\text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^3}$

## 4.2 Energieumformung elektr. Energie $\Rightarrow$ thermische Energie (Wärme)

### 4.2.1 Wärmeaufnahme eines Körpers (Temperaturerhöhung)

$$\Delta W_{\text{th}} = c \cdot m \cdot \Delta \vartheta = c \cdot m \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1) ; c \cdot m = C_{\text{th}}$$

$$P_{\text{th}} = \frac{\Delta W_{\text{th}}}{\Delta t} = c \cdot m \cdot \frac{\Delta \vartheta}{\Delta t} \rightarrow P_{\text{th}} \cdot \Delta t = c \cdot m \cdot \Delta \vartheta$$

$C$  = Wärmekapazität

$c$  = spezifische Wärmekap.

$$\text{mit } \int p(t)dt = c \cdot m \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1) \rightarrow \vartheta_2 = \frac{1}{c \cdot m} \int p(t)dt + \vartheta_1$$

### 4.2.2 Wärmeleitung eines Körpers

Wärmefluss von  $x_2(\vartheta_2)$  nach  $x_1(\vartheta_1)$ ;  $\Delta x$ =Dicke

$$P_{\text{th}} \cdot \Delta x = \lambda \cdot A \cdot \Delta \vartheta$$

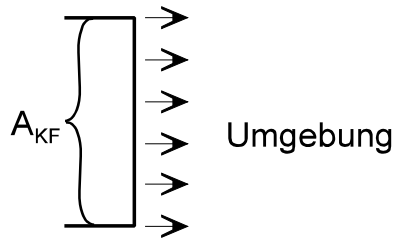
$\lambda$  = Wärmeleitzahl;  $[\lambda] = \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$

$$R_{\text{th}} = \frac{\Delta \vartheta}{P_{\text{th}}} = \frac{\Delta x}{\lambda \cdot A}$$

$A$  = durchströmte Fläche

$$\lambda_{\text{cu}} = 372 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$$

### 4.2.3 Wärmeübergang (Konvektion) von festen auf flüssige oder gasförmige Medien



$$P_{th} = P_K = \alpha \cdot A_{KF} \cdot \Delta\vartheta$$

$$\Delta\vartheta = \vartheta_{KF} - \vartheta_U$$

$$R_{th} = \frac{\Delta\vartheta}{P_{th}} = \frac{1}{\alpha \cdot A_{KF}}$$

$\alpha$  – Werte

Metall / Luft  $\alpha_{ML} = 10 \frac{W}{K \cdot m^2}$

Metall / Wasser  $\alpha_{ML} = 350 \frac{W}{K \cdot m^2}$

$\alpha$  = Wärmeübergangskoeffizient

KF = Konvektionsfläche

U = Umgebung

#### Vergleich

thermisch

elektrisch

Energie  $\Delta W_{th} = Q_{th} = P_{th} \cdot \Delta t = C_{th} \cdot \Delta\vartheta$   
(Wärmemenge)

Ladung  $Q = I \cdot \Delta t = C \cdot U$

Wärmestrom  $P_{th} = \frac{Q_{th}}{\Delta t}$

Strom  $I = \frac{Q}{\Delta t}$

Temperaturintervall  $\Delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1$

Spannung  $U = \varphi_2 - \varphi_1$

Wärmekapazität  $C_{th} = c \cdot m = \frac{\Delta W_{th}}{\Delta\vartheta} = \frac{Q_{th}}{\Delta\vartheta}$

Kapazität  $C = \frac{Q}{U}$

Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$   
(Wärmeleitzahl)

spez. Leitwert  $\kappa$

#### Beispiele zum Kapitel 4

1. Zur Spannungsversorgung eines elektrischen Gerätes werden 5 Batterien je 1,5V (Reihenschaltung) eingesetzt. Die Stromaufnahme beträgt  $I=50mA$ . Wieviel kostet 1kWh aus diesen Batterien, wenn die Lebensdauer 80 Stunden und der Kaufpreis 0,55 EUR je Batterie beträgt?

$$W = U \cdot I \cdot t = 5 \cdot 1,5V \cdot 0,05A \cdot 80h = 30Wh = 0,03kWh$$

$$\text{Kosten} = \frac{1kWh}{0,03kWh} \cdot 5 \cdot 0,55EUR = 91,70EUR$$

2. Die Leistungsaufnahme eines Elektrowärmeegerätes soll verdreifacht werden. Um wieviel muss die Spannung gesteigert werden? R bleibt konstant.

$$P_2 = 3 \cdot P_1$$

$$\frac{U_2^2}{R} = 3 \cdot \frac{U_1^2}{R}$$

$$U_2^2 = 3 \cdot U_1^2$$

$$U_2 = \sqrt{3 \cdot U_1^2} = \sqrt{3} \cdot U_1$$

3. Zwei Glühlampen mit den Leistungen  $P_1=40\text{W}$  und  $P_2=60\text{W}$  an jeweils  $U_L=40\text{V}$  werden in Reihe an  $U=80\text{V}$  geschaltet. Wie groß muss der parallel zur Lampe 1 geschaltete Widerstand  $R$  sein, damit an beiden Lampen  $40\text{V}$  liegt?

$$U_1 = U_2 = \frac{U}{2} = 40\text{V}$$

$$R_1 = \frac{U^2}{P_1}, \quad R_2 = \frac{U^2}{P_2}$$

$$R_2 = R \parallel R_1$$

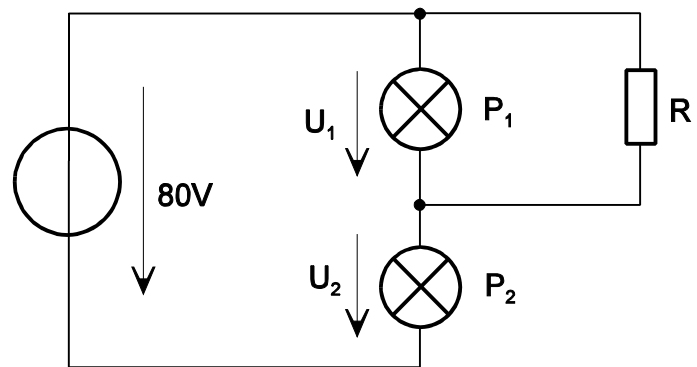
$$R_2 = \frac{R \cdot R_1}{R + R_1}$$

$$\rightarrow R \cdot R_1 = R_2 \cdot R + R_2 \cdot R_1$$

$$\rightarrow R(R_1 - R_2) = R_2 \cdot R_1$$

$$R = \frac{R_2 \cdot R_1}{R_1 - R_2} = \frac{U^2 U^2}{P_1 P_2 U^2 \left( \frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_2} \right)}$$

$$R = \frac{40^2 \text{V}^2}{40\text{W} 60\text{W} \left( \frac{1}{40\text{W}} - \frac{1}{60\text{W}} \right)} = 80\Omega$$



4. Ein elektrischer Motor mit einer Leistungsaufnahme  $P_1=25\text{kW}$  ist mit einer Förderpumpe gekoppelt, die aus einem  $300\text{m}$  tiefen Schacht Wasser heraufpumpen soll. Zu berechnen ist die pro Minute geförderte Wassermenge.

Wirkungsgrad Motor:  $\eta_M = 0,82$

Wirkungsgrad Pumpe:  $\eta_P = 0,7$

Abgegebene Leistung:

$$P_2 = \eta_M \cdot \eta_P \cdot P_1 = 0,82 \cdot 0,7 \cdot 25\text{kW} = 14,35\text{kW} = 14350 \frac{\text{Nm}}{\text{s}}$$

Einheiten:

$$1\text{Nm} = 1\text{Ws}$$

$$1\text{W} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{s}}$$

$$P = \frac{F \cdot h}{t}$$

$$F = m \cdot g$$

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$1\text{N} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

$$1\text{kg} = 1 \text{ Liter}$$

$$P_2 = \frac{m \cdot g \cdot h}{t} = F \frac{\Delta h}{\Delta t}$$

$$\rightarrow m = \frac{P_2 \cdot t}{g \cdot h} = \frac{14350 \frac{\text{Nm}}{\text{s}} \cdot 60\text{s}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 300\text{m}}$$

$$m = 292,56 \frac{\text{Ns}^2}{\text{m}} = 292,56 \frac{\frac{\text{kgm}}{\text{s}^2} \text{s}^2}{\text{m}} = 292,56\text{kg}$$

$$\rightarrow V = 292,56 \text{ Liter pro Minute}$$

5. Ein Strom  $I=80\text{A}$  fließt für  $t=1,5\text{s}$  durch ein  $\ell=60\text{m}$  langen Alu-Draht mit  $A=1,5\text{mm}^2$  (Masse  $m=0,243\text{kg}$ ).

Wie groß ist die Temperaturerhöhung im Leiter? (Wärmeverlust vernachlässigbar)

$$c_{\text{Al}} = 896 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$$

$$\Delta W_{\text{th}} = c \cdot m \cdot \Delta \vartheta$$

$$P \cdot t = c \cdot m \cdot \Delta \vartheta$$

$$I^2 \cdot R \cdot t = c \cdot m \cdot \Delta \vartheta$$

$$I^2 \cdot \frac{\rho \cdot \ell}{A} \cdot t = c \cdot m \cdot \Delta \vartheta$$

$$\rightarrow \Delta \vartheta = \frac{I^2 \cdot \rho \cdot \ell \cdot t}{c \cdot m \cdot A} = \frac{(80\text{A})^2 \cdot 0,0278 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}} \cdot 60\text{m} \cdot 1,5\text{s}}{0,243\text{kg} \cdot 896 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 1,5\text{mm}^2} = 49\text{K}$$

6. Ein Wasserheizgerät mit  $P=21\text{kW}$  erwärmt 80 Liter Wasser von  $\vartheta_1=20^\circ\text{C}$  auf  $\vartheta_2=60^\circ\text{C}$ . Welche Zeit wird benötigt, wenn der Wirkungsgrad mit  $\eta=0,8$  angenommen wird?

$$c_{\text{W}} = 4187 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$$

$$c \cdot m \cdot \Delta \vartheta = P \cdot t \cdot \eta$$

$$\rightarrow P = \frac{c \cdot m \cdot \Delta \vartheta}{t \cdot \eta} = \frac{c \cdot m \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)}{t \cdot \eta}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow t &= \frac{c \cdot m \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)}{P \cdot \eta} = \frac{4187 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 80\text{kg} \cdot (60^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C})}{21 \cdot 10^3 \text{W} \cdot 0,8} \\ &= 797,5\text{s} = 13,3\text{min} \end{aligned}$$

## 5. Das elektrische Strömungsfeld

→ elektrisches Feld in Leitern (siehe DIN 1324)

Bekannt:

1. Was ist elektrischer Strom
2. Warum fließt elektrischer Strom
3. elektrischer Stromkreis

Bisherige Betrachtung: Strom im linearen Leiter  
(linear bedeutet: Durchmesser konstant, homogenes Material)

Nun sollen die Verhältnisse im beliebig geformten Leiter untersucht werden.

Zur Beschreibung ist die Einführung des Feld-Begriffes zweckmäßig.

→ Ein Feld ist ein Zustand des Raumes; jedem Raumpunkt einer physikalischen Größe (Feldgröße) kann ein Wert zugeordnet werden.

Unterscheidung:

Vektorfeld:	Feldgröße ist ein Vektor	z.B. el. Feld
Skalarfeld:	Feldgröße ist ein Skalar	z.B. Temperaturfeld

Ursachen des el. Strömungsfeldes:

Auf el. Ladungen  $Q = N \cdot q = N \cdot e$  werden Kräfte  $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$  im el. Feld ausgeübt.

Haupttrichtung dieser Kräfte → Kraft-Feldlinien.

Orte gleichen Potentials → Äquipotentiallinien.

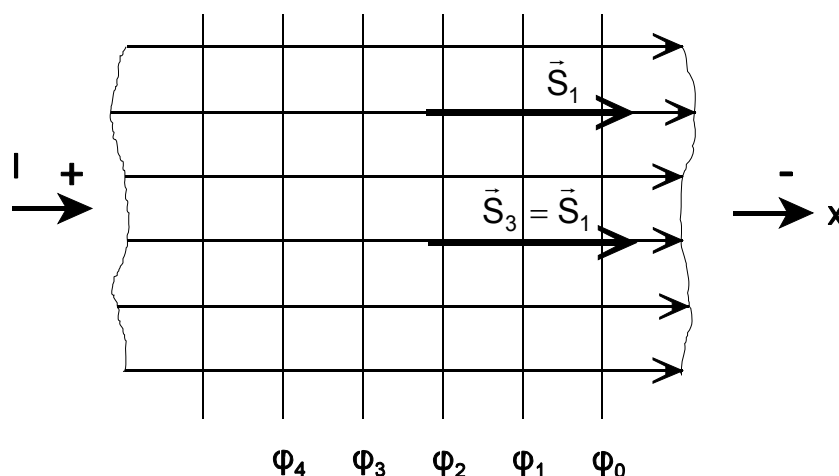
Die Äquipotentiallinien schneiden die Feldlinien rechtwinklig (orthogonal).

## Homogene und inhomogene Felder

### 5.1 Feldbilder

Beispiele

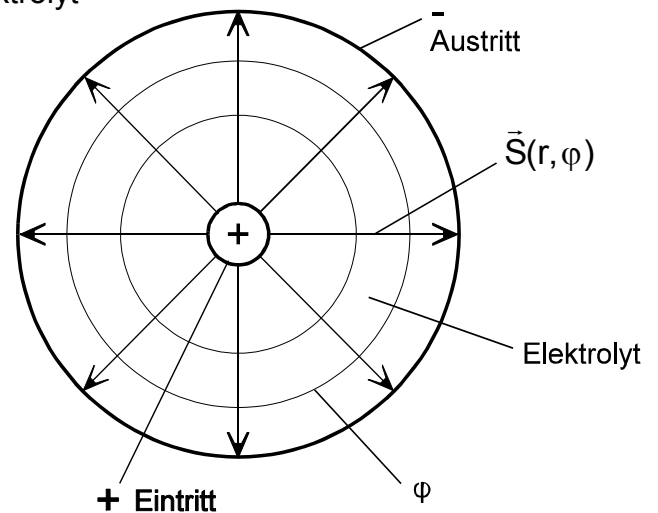
1.) homogen  $\vec{S}(x) \sim \vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$



Homogenes Feld: Feldvektor hat an jeder Stelle den gleichen Betrag und gleiche Richtung.

- 2.) inhomogen  
Beispiel: zylindrischer Behälter mit Elektrolyt

Inhomogenes Feld:  
Feldvektor ist nach Betrag und Richtung ortsabhängig.



## 5.2 Stromdichte

Stromdichte bei homogener Stromverteilung:  $S = \frac{I}{A}$  Einheit  $\frac{A}{mm^2}$

Stromdichte bei inhomogener Stromverteilung:  $S = \frac{\Delta I}{\Delta A} \xrightarrow{\Delta A \rightarrow 0} \frac{dI(A)}{dA} = \frac{dI(x,y)}{dxdy}$

$$S = f(A) \quad \text{und} \quad A = f(x,y)$$

Zusammenhang zwischen der el. Feldstärke  $\vec{E}$  und der Stromdichte  $\vec{S}$

$$S \, dA = \frac{dU}{R}$$

$$\int S \, dA = \int \frac{E \, d\ell}{R}$$

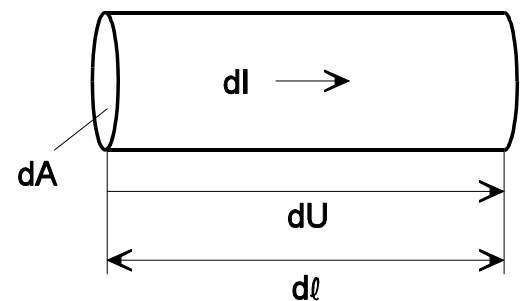
$$S \cdot A = \frac{E \cdot \ell}{R}$$

$$\text{mit } R = \frac{\ell}{\kappa \cdot A} \quad ; \quad \kappa = \text{spez. Leitfähigkeit}$$

$$S \cdot A = \frac{E \cdot \ell}{\frac{\ell}{\kappa \cdot A}} = E \cdot \kappa \cdot A$$

$$\rightarrow S = \kappa \cdot E$$

$$\text{allg.} \quad \boxed{\vec{S} = \kappa \cdot \vec{E}}$$



Das Flächenintegral des Feldvektors heißt Fluss (hier: Strom I).

$$I \approx \sum_{k=1}^n (\vec{S} \cdot \Delta \vec{A})_k \quad \text{exakt}$$

$$\boxed{I = \int_A \vec{S} \, d\vec{A}}$$

### 5.3 Widerstandsberechnung

#### Beispiele:

- 1) Ein Widerstandsdraht mit der Länge  $\ell=1\text{m}$  hat ein  $R=2\Omega$  und  $\kappa = 2 \frac{\text{m}}{\Omega\text{mm}^2}$ .

Es fließt ein Strom  $I=4\text{A}$ .

- a) Wie groß ist die Stromdichte im Leiter?  
b) Wie groß ist die Feldstärke im Leiter?

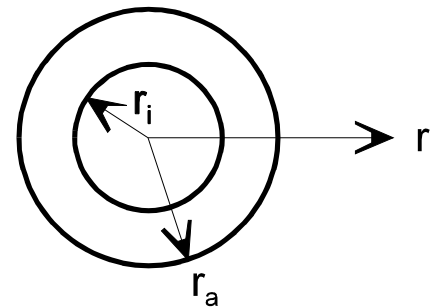
$$a) \quad A = \frac{\ell}{\kappa \cdot R} = \frac{1 \cdot \text{m} \cdot \Omega \cdot \text{mm}^2}{2 \cdot \text{m} \cdot 2\Omega} = \frac{1}{4} \text{mm}^2$$

$$S = \frac{I}{A} = \frac{4\text{A}}{\frac{1}{4} \text{mm}^2} = 16 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$$

$$b) \quad E = \frac{S}{\kappa} = \frac{16 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}}{2 \frac{\text{m}}{\Omega\text{mm}^2}} = 8 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

- 2) Ein galvanisiertes Kunststoffrohr mit  
 $r_i=20\text{mm}$ ;  $r_a=30\text{mm}$ ;  $\ell=50\text{cm}$   
hat eine spez. Leitfähigkeit  $\kappa = 10^{-14} \frac{\text{m}}{\Omega\text{mm}^2}$ .

Wie groß ist der Widerstand zwischen Innen- und Außenfläche?  
(Stirnflächen ohne Metall)

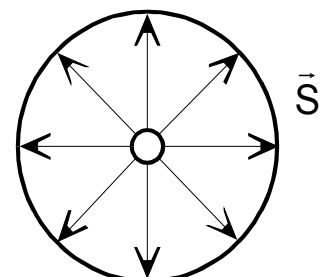


$$dR = \frac{dr}{\kappa \cdot A} \quad A = 2\pi \cdot r \cdot \ell$$

$$= \frac{dr}{\kappa \cdot 2\pi \cdot r \cdot \ell}$$

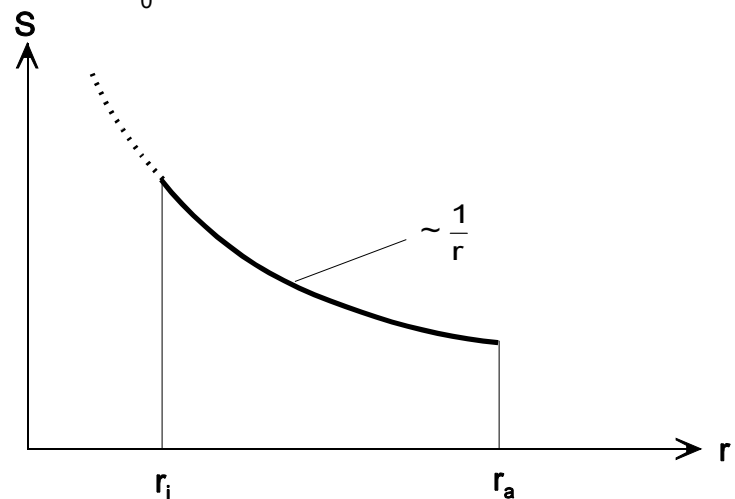
$$\begin{aligned} \rightarrow R &= \int_{r_i}^{r_a} dR = \int_{r_i}^{r_a} \frac{dr}{\kappa \cdot 2\pi \cdot r \cdot \ell} = \frac{1}{\kappa \cdot 2\pi \cdot \ell} \int_{r_i}^{r_a} \frac{dr}{r} \\ &= \frac{1}{\kappa \cdot 2\pi \cdot \ell} [\ln]_{r_i}^{r_a} = \frac{1}{\kappa \cdot 2\pi \cdot \ell} (\ln r_a - \ln r_i) = \frac{1}{\kappa \cdot 2\pi \cdot \ell} \ln \frac{r_a}{r_i} \\ &= \frac{1}{10^{-14} \frac{\text{m}}{\Omega \cdot \text{mm}^2} \cdot 2\pi \cdot 0,5\text{m}} \ln \frac{30\text{mm}}{20\text{mm}} = 12,91 \text{ M}\Omega \end{aligned}$$

- 3) Gegeben ist ein zylindrischer metallischer Becher, gefüllt mit Elektrolyt. Mittig ist eine Elektrode aus Metall angeordnet. Zu bestimmen ist die Stromdichte in Abhängigkeit vom Radius  $r$  bei einer bestimmten Stromstärke  $I$ .



$$I = \int_{A_r} \vec{S} dA_r = \int_{A_r} S(h \cdot r \cdot d\varphi) = S \cdot h \cdot r \int_0^{2\pi} d\varphi = S \cdot h \cdot r \cdot 2\pi$$

$$\rightarrow S = \frac{I}{h \cdot r \cdot 2\pi}$$



Das Elektrolyt hat eine max. Stromdichte  $S_{zul}$   $\rightarrow r_i = r_{imin}$  ist dadurch festgelegt.

- 4) Ein Kurzschlussstrom von  $I=500A$  tritt von einem halbkugelförmigen Erder in das Erdreich ein. Zu berechnen ist der Potentialverlauf als Funktion des Abstandsradius  $r$  vom Eintrittspunkt aus. Spez. Widerstand des Erdreichs:  $\rho=50\Omega m$

$$\vec{S} \cdot d\vec{A} = S \cdot dA \quad \text{da senkrecht auf } d\vec{A}$$

$$I = \int_A \vec{S} \cdot d\vec{A} = S \int_A dA = S \cdot 2\pi r^2 \quad \text{Halbkugel}$$

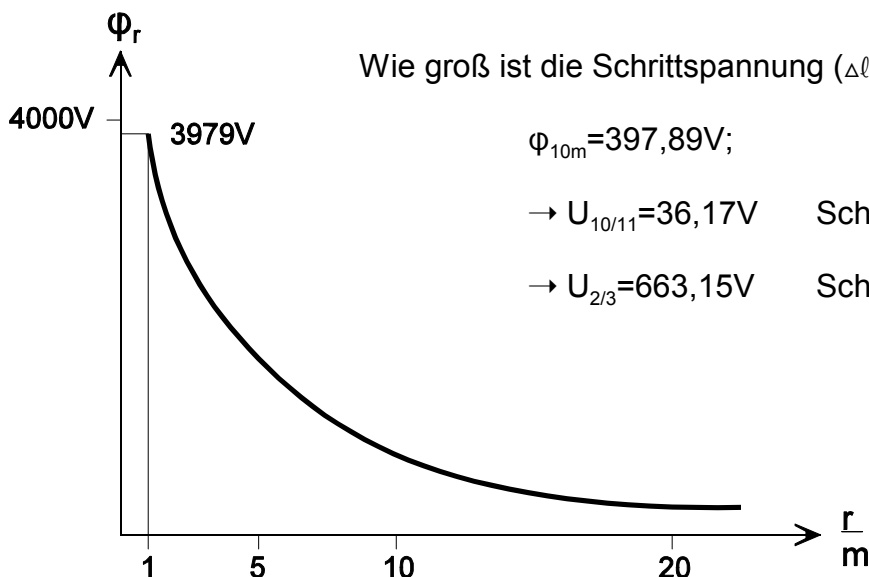
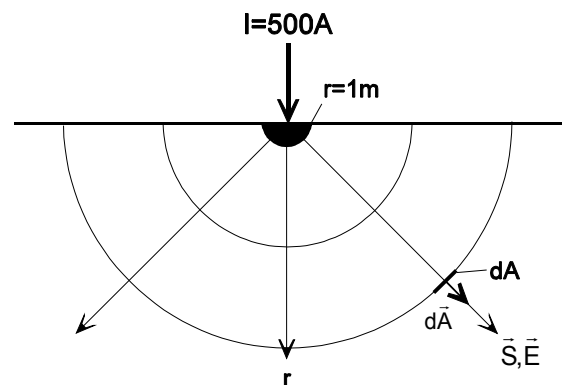
$$\rightarrow S = \frac{I}{2\pi r^2} = \frac{500A}{2\pi r^2} = 79,58 \frac{A}{r^2}$$

$$\text{Am Erder bei } r = 1m: S = 79,58 \frac{A}{m^2}$$

$$E = \rho \cdot S = \frac{\rho \cdot I}{2\pi r^2} = 50\Omega \cdot m \cdot 79,58 \frac{A}{r^2} = 3978,87V \frac{m}{r^2}$$

$$\varphi_0 = \varphi_{r\infty} = 0$$

$$\varphi_r = \underbrace{\varphi_{r\infty}}_0 - \int_{\infty}^r \vec{E} d\vec{s} = I \frac{\rho}{2\pi} \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = I \frac{\rho}{2\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right) = 3978,87V \frac{m}{r}$$



Wie groß ist die Schrittspannung ( $\Delta \ell = 1m$ ) im Abstand  $r=10m$  und  $2m$ ?

$$\varphi_{10m} = 397,89V;$$

$$\varphi_{11m} = 361,72V$$

$$\rightarrow U_{10/11} = 36,17V$$

Schrittspannung bei  $r=10m$

$$\rightarrow U_{2/3} = 663,15V$$

Schrittspannung bei  $r=2m$



## 5.4 Elektrische Feldstärke und Spannung

Aufgrund  $\vec{S} = \kappa \cdot \vec{E}$  gilt:

Jede Feldlinie des Vektors  $\vec{S}$  ist gleichzeitig auch eine Feldlinie des Vektors  $\vec{E}$ .

Im linearen (homogenen) Leiter gilt:  $E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\ell_{12}}$

allg. (homogen)  $E = \underbrace{|\vec{E}| = \left| \frac{d\varphi}{d\ell} \right|}_{\text{örtliches Potentialgefälle}}$

→ Die el. Feldstärke ist ein Vektor in Richtung des Stromdichtevektors mit dem Betrag des örtlichen Potentialgefälles.

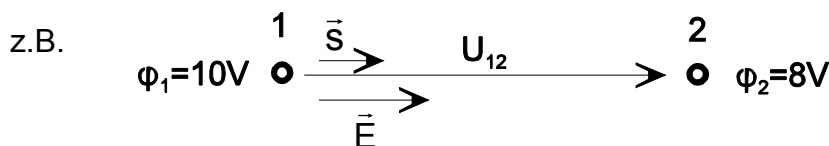
Spannung im homogenen Feld:  $U_{12} = \vec{E} \cdot \vec{\ell}_{12}$

Spannung im inhomogenen Feld:  $|\vec{E}|$  ändert sich von Punkt zu Punkt, daher muss der Weg in differentielle Wegelemente  $d\vec{s}$  zerlegt werden.

$$d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

-Zeichen:  $\vec{E}$  zeigt in Richtung des Potentialgefälles und  $d\varphi$  ist als Potentialzunahme definiert.

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{ds}$$



Die Gesamtspannung erhält man durch Integration

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_2^1 d\varphi = -\int_1^2 d\varphi = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} = -U_{21} = -(\varphi_2 - \varphi_1).$$

für das Beispiel:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = 10V - 8V = -(8V - 10V) = 2V$$

allg. gilt:

Die el. Spannung zwischen zwei Punkten eines Weges ist gleich dem Linienintegral der el. Feldstärke längs des Weges.

$$U_{12} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Der Wert des Linienintegrals ist wegunabhängig.

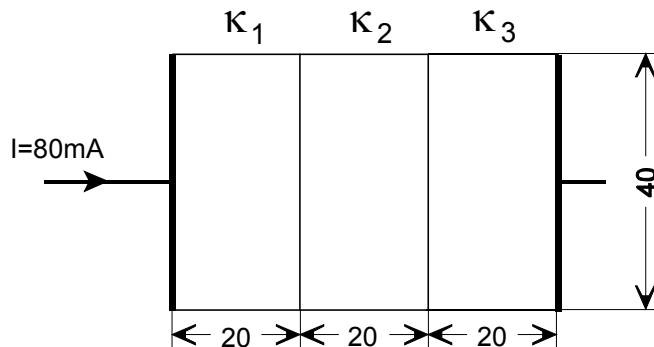
Für einen geschlossenen Weg (Umlauf)  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$  erhält man stets den Wert 0 für das Linienintegral.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Umlaufintegral, siehe Kirchhoff:  $\sum U = 0$

## 5.5 Geschichtete Materialien

Die leitenden Schichten haben unterschiedliche Leitfähigkeiten  $\kappa$ . Dadurch ergibt sich eine jeweils verschiedene elektrische Feldstärke mit unterschiedlichem Potentialverlauf.



1mm dick  $\rightarrow A=40\text{mm}^2$

$$\kappa_1 = 1 \frac{\text{S}}{\text{cm}}$$

$$\kappa_2 = 2 \frac{\text{S}}{\text{cm}}$$

$$\kappa_3 = 4 \frac{\text{S}}{\text{cm}}$$

Gesucht: Potential- und Feldverlauf

$$\Delta\phi_1 = I \cdot \Delta R_1 = \frac{I \cdot \Delta\ell_1}{\kappa \cdot A}$$

$$\Delta\phi_1 = \frac{80\text{mA} \cdot 20\text{mm}}{1 \frac{\text{S}}{10\text{mm}} \cdot 40\text{mm}^2} = 400\text{mV}$$

nach gleicher Rechnung:

$$\Delta\phi_2 = 200\text{mV}$$

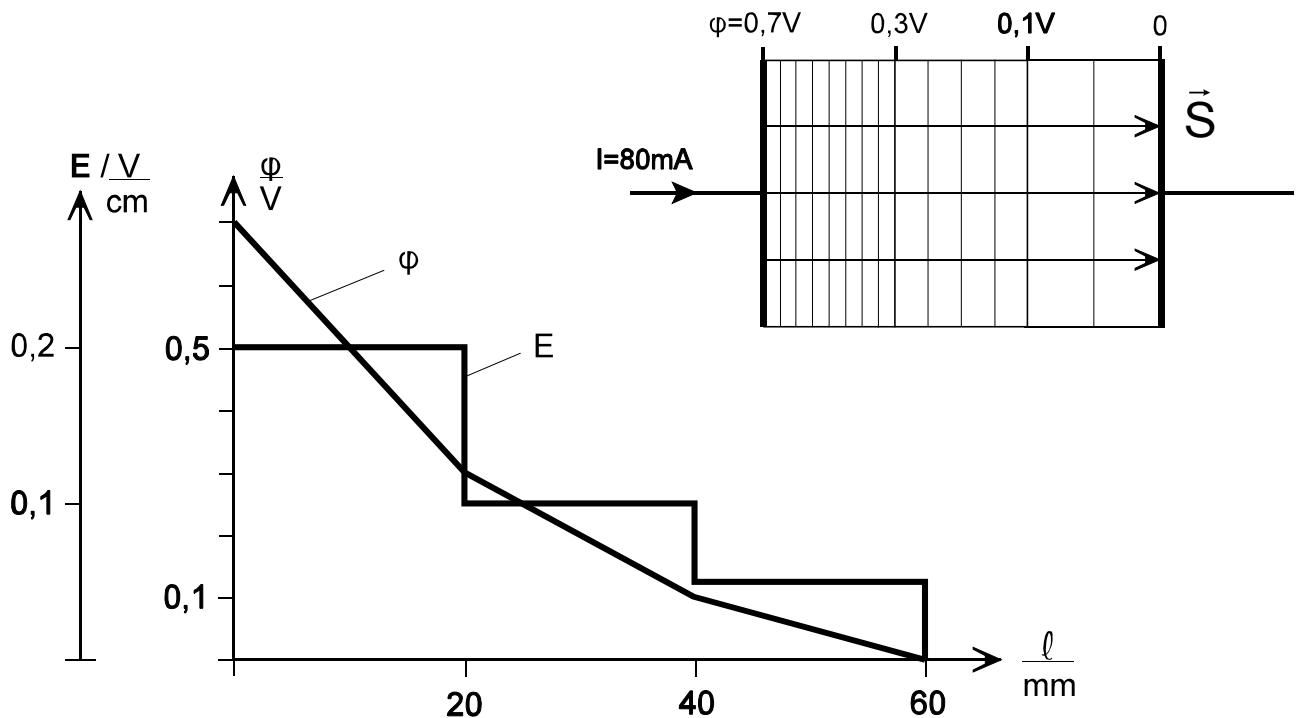
$$\Delta\phi_3 = 100\text{mV}$$

$$E = \frac{S}{\kappa} ; \quad S = \frac{I}{A} = \frac{80\text{mA}}{40\text{mm}^2} = 2 \frac{\text{mA}}{\text{mm}^2}$$

$$\rightarrow E_1 = \frac{2\text{mA} \cdot 10\text{mm}}{\text{mm}^2 \cdot 1\text{S}} = 20 \frac{\text{mV}}{\text{mm}} = 200 \frac{\text{mV}}{\text{cm}}$$

Nach gleicher Rechnung:

$$E_2 = 100 \frac{\text{mV}}{\text{cm}} ; \quad E_3 = 50 \frac{\text{mV}}{\text{cm}}$$



## 6. Das elektrische Feld in Nichtleitern

### Elektrostatistisches Feld

- Eigenschaften
1. Ladungen ruhen  $\rightarrow I=0$
  2. Feld (-kräfte) wie im Strömungsfeld vorhanden

Es gilt  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$

Ähnlichkeit mit dem Strömungsfeld in Leitern, dort ist ein Material mit spez. Leitfähigkeit  $\kappa$  und eine Stromdichte vorhanden.

Beim elektrostatischen Feld geht die Stromdichte zu Null, verschwindet. Das Material zwischen den ortsfesten Ladungen ist nichtleitend (Isolator), das sogenannte Dielektrikum.

Im elektrischen Strömungsfeld ist der Stromdichtevektor  $\vec{S}$  immer in Richtung des Feldstärkevektors  $\vec{E}$ .

Beim Verschwinden der Stromdichte bleibt aber das elektrische Feld mit den Feldlinien von  $\vec{E}$  unverändert, ebenso die Äquipotentialflächen.

Vergleich

#### Strömungsfeld

Stromdichte  $\vec{S} = \frac{\vec{I}}{\vec{A}}$

$$\vec{E} = \frac{\vec{S}}{\kappa}$$

#### elektrostatistisches Feld

Verschiebungsdichte  $\vec{D} = \frac{Q}{\vec{A}}$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon}$$

### 6.1 Nichtleiter im elektrostatischen Feld

Wie im vorherigen Vergleich angedeutet hat der Nichtleiter mit der Materialkonstanten  $\epsilon$  einen Einfluss auf das elektrostatische Feld.

Mit folgendem Experiment kann der Einfluss gezeigt werden:

Ein Plattenkondensator mit Vakuum als Dielektrikum wird auf  $U_0$  aufgeladen. Anschließend wird der Feldraum mit einem Isolierstoff ausgefüllt.

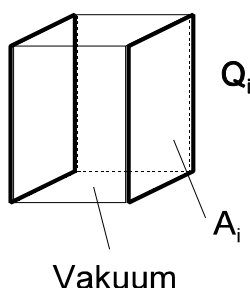
Feststellung: Die Spannung an den Platten wird geringer  $U_C < U_0$ . Nach Entfernung des Isolierstoffes steigt die Spannung wieder auf den alten Wert an.

Der Faktor  $\frac{U_0}{U_C} = \epsilon_r \geq 1$  heißt Permittivitätszahl oder relative Dielektrizitätskonstante.

Genauer Zusammenhang zwischen  $\vec{E}$  und  $Q_i$  im Vakuum:

$$Q_i = \epsilon_0 \cdot E \cdot A_i \quad Q_i = \text{kleine Prüfladung}$$

$A_i$  = Fläche der Prüfladung



$\epsilon_0$  = Proportionalitätsfaktor, elektrische Feldkonstante

$$\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{V} \cdot \text{m}}$$

## 6.2 Elektrische Verschiebungsdichte

Die ladungstrennende Wirkung des el. Feldes wird durch den Verschiebungsdichte-Vektor  $\vec{D}$  beschrieben.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \quad [D] = [\varepsilon_0] \cdot [E] = \frac{\text{As} \cdot \text{V}}{\text{Vm} \cdot \text{m}} = \frac{\text{As}}{\text{m}^2} \quad (\text{für Vakuum})$$

Der Vektor  $\vec{D}$  hat im Feld die gleiche Richtung wie  $\vec{E}$ .

$$D = \frac{Q_i}{A_i}$$

Die Verschiebungsdichte ist im gesamten Feldraum vorhanden.

## 6.3 Elektrische Kapazität

Durch einen Versuch ist feststellbar, dass die Ladung  $Q$  eines Plattenkondensators linear mit der angelegten Spannung ansteigt.  $Q \sim U$

Genauer:  $Q = C \cdot U$

$C$  ist ein Proportionalitätsfaktor und heißt Kapazität.

$$\boxed{C = \frac{Q}{U}} \quad [C] = \frac{[Q]}{[U]} = 1 \frac{\text{As}}{\text{V}} = 1 \text{ Farad} = 1 \text{ F}$$

→ Jede beliebige Anordnung von 2 Leitern, getrennt durch ein Dielektrikum hat eine Kapazität. Technische Realisierung in Kondensatoren.

Möglicher Kapazitätsbereich:  $10^{-12} \dots \approx 1 \text{ F}$ . Neuere Entwicklungen von sog. "Super-Caps" basieren auf speziellen chemischen Verfahren und ermöglichen Kapazitäten von einigen 1000F, allerdings mit rel. kleinen Betriebsspannungen.

Die Kapazität eines Kondensators ist abhängig von der Geometrie und der Permittivität des Dielektrikums. Ein entsprechender Zusammenhang gilt auch für die Feldstärke.

Die relative Dielektrizitätszahl (Permittivitätszahl) eines Dielektrikums ergibt sich mit:

$$\varepsilon_r = \frac{E_0}{E}$$

Für Vakuum und annähernd für Luft ist  $\varepsilon_r = 1$ .

Weitere Materialien (Auswahl):

	$\varepsilon_r$
Papier (ölgetränkt)	4,3
Papier trocken	2
Keramik	6...4000
Polyäthylen	2,3

Wichtig: Die el. Verschiebungsdichte  $\vec{D}$  bleibt konstant.

$$\vec{D} = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}$$

Permittivität  $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$

#### 6.4 Berechnung der Kapazität aus der Geometrie und $\epsilon$

$$U = \int E ds \quad ; \quad E = \frac{D}{\epsilon} \quad ; \quad D = \frac{Q}{A}$$

Ansatz:  $C = \frac{Q}{U}$  ,

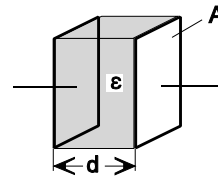
Für lineare, homogene Anordnungen:  
(Block- Kreiswickel-  
Röhrenkondensatoren etc.)

$$C = \frac{Q}{\int \frac{Q}{A \cdot \epsilon} ds}$$

##### 6.4.1 Plattenkondensator

$$U = \int \underbrace{\frac{Q}{A \cdot \epsilon}}_{\text{Konstant}} ds \quad s = d \text{ Dicke}$$

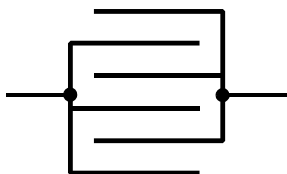
$$U = \frac{Q}{A \cdot \epsilon} d$$



$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q \cdot A \cdot \epsilon}{Q \cdot d} = \frac{\epsilon \cdot A}{d} = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot A}{d}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot A}{d}$$

##### 6.4.2 Schichtkondensator



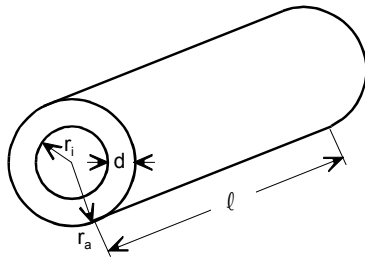
Schichtung einzelner Plattenkondensatoren

Gesamtfäche  $A_{\text{ges}} = n \cdot A$

$$C = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot A}{d} \cdot n$$

$n$ =Anzahl der Plattenpaare (Schichten)

### 6.4.3 Rohrcondensator



$$U = \int \frac{Q}{A \cdot \epsilon} ds \quad ; \quad ds = dr \quad ; \quad A = 2\pi r l$$

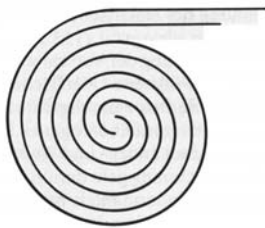
$$U = \frac{Q}{2\pi l \cdot \epsilon} \int \frac{1}{r} dr$$

$$U = \frac{Q}{2\pi l \cdot \epsilon} [\ln r]_{r_i}^{r_a} = \frac{Q}{2\pi l \cdot \epsilon} (\ln r_a - \ln r_i) = \frac{Q}{2\pi l \cdot \epsilon} \ln \frac{r_a}{r_i}$$

$$\text{mit } C = \frac{Q}{U}$$

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r 2\pi l \frac{1}{\ln \frac{r_a}{r_i}}$$

### 6.4.4 Wickelcondensator



Im Prinzip ist der Wickelcondensator ein n-facher Rohrcondensator. Die exakte Kapazitätsberechnung wäre nur bei einem idealen Wickel sinnvoll. Praktisch wird gerechnet:

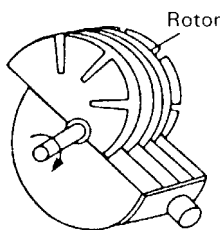
$$C \approx 2 \cdot \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \cdot A_{\text{Wickel}}}{d}$$

$A_{\text{Wickel}}$  = Fläche des Bandes,

Faktor 2 für die doppelte Nutzung der Fläche.

### 6.4.5 Drehcondensator

Drehcondensatoren werden in verschiedenen Ausführungen als kapazitätsveränderliche Condensatoren hergestellt.



Üblich sind folgende Arten:

- 1) Frequenzgerade

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \rightarrow C = \frac{1}{(2\pi)^2 L} \cdot \frac{1}{f_0^2} + C_{\text{Anf}}$$

$$A(\alpha) \sim \frac{1}{f_0^2} \sim \frac{1}{\alpha^2} \quad \text{Wird durch Plattenform erreicht}$$

- 2) Kapazitätsgerade

$$C = K \cdot \alpha + C_{\text{Anf}}$$

Mit Plattenhalbkreisform

$K$  = Kapazität bezogen auf Winkel  $\alpha$

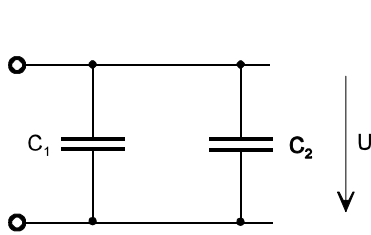
### 6.5 Betriebsfeldstärke

$$E_N = \frac{E_{\text{zul}}}{S} \quad ; \quad S \approx 2...5 \text{ (Sicherheit)}, \quad E_{\text{zul}} = 15...180 \frac{\text{kV}}{\text{mm}}$$

$$\text{Nennfeldstärke} \quad E_N = \frac{U_N}{d_N} \rightarrow d_N = \frac{U_N}{E_N} \quad \text{Dicke des Dielektrikums}$$

## 6.6 Grundsaltungen von Kondensatoren

### a) Parallelschaltung



$$C_1 = \frac{Q_1}{U} \quad ; \quad C_2 = \frac{Q_2}{U} \quad ; \quad C_{\text{ges}} = \frac{Q_{\text{ges}}}{U}$$

$$Q_{\text{ges}} = Q_1 + Q_2 = U \cdot C_1 + U \cdot C_2$$

$$C_{\text{ges}} = \frac{U(C_1 + C_2)}{U} = C_1 + C_2 \dots + C_n$$

Weiter gilt:

$$\frac{I_1 \cdot \Delta t}{C_1} = \frac{I_2 \cdot \Delta t}{C_2} \rightarrow \text{Kapazitive Stromteilung}$$

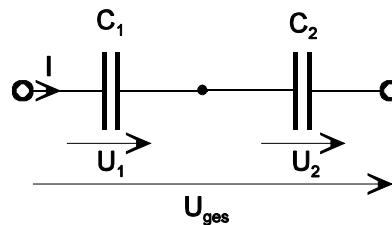
$$\frac{I_1}{C_1} = \frac{I_2}{C_2}$$

### b) Reihenschaltung

1. Ladungsmenge ist gleich:

$$i_1 = i_2 = i$$

$$Q_1 = Q_2 = Q = \text{konstant}$$



2.  $U_1 + U_2 = U_{\text{ges}}$

$$\rightarrow Q = C_1 U_1 = C_2 U_2$$

$$\Rightarrow U_{\text{ges}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \rightarrow C_{\text{ges}} = \frac{Q}{U_{\text{ges}}} = \frac{Q}{Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)}$$

$$C_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}}$$

Kapazitive  
Spannungsteilung

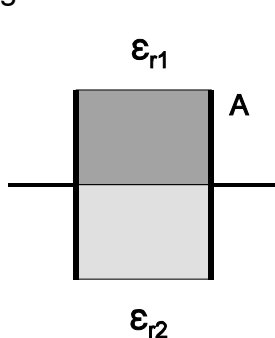
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{C_2}{C_1}$$

bei 2 Kondensatoren:

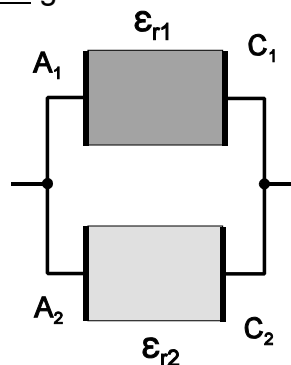
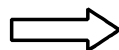
$$C_{\text{ges}} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

## 6.7 Geschichtetes Dielektrikum

a) Wird das Dielektrikum quer zur Fläche A aus zwei Materialien geschichtet, so ergeben sich rechnerisch zwei Kondensatoren mit der sich jeweils durch die Teilung ergebenden Fläche  $A_1$  und  $A_2$ , die parallel geschaltet sind.



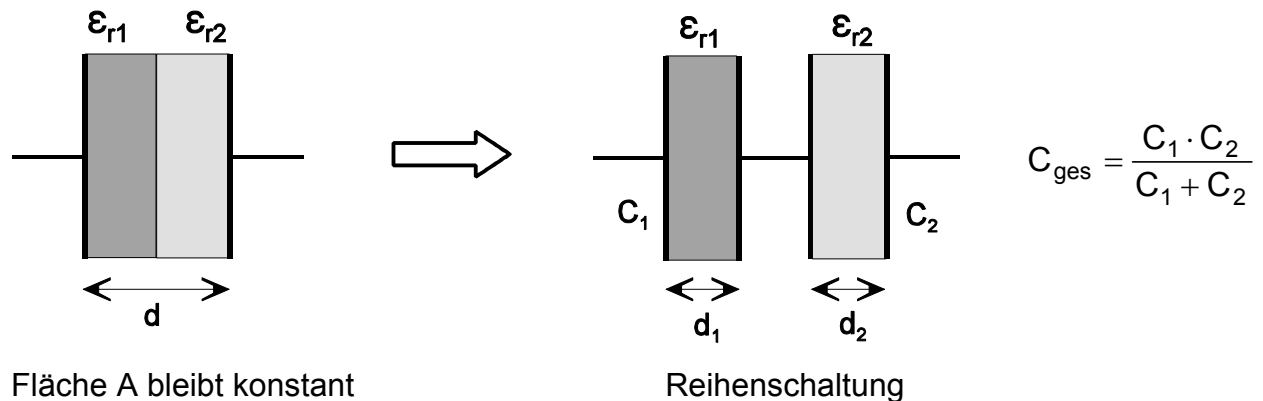
Dicke d bleibt konstant



Parallelschaltung

$$C_{\text{ges}} = C_1 + C_2$$

- b) Wird das Dielektrikum parallel zur Fläche A aus zwei Materialien geschichtet, so ergeben sich rechnerisch zwei Kondensatoren mit der sich jeweils durch die Teilung ergebenden Dicken  $d_1$  und  $d_2$ , die in Reihe geschaltet sind.



## 6.8 Kraftwirkung im elektrostatischen Feld

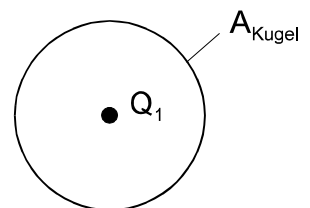
### 1. 2 Punktladungen

Für Ladungsträger im el. Feld gilt:  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \rightarrow \vec{F} = q \cdot \vec{E} = Q \cdot \vec{E}$

(positive Ladung:  $\vec{F}$  in Richtung  $\vec{E}$ )

Die Punktladung  $Q_1$  hat die Verschiebungsdichte  $D = \frac{Q}{A_{\text{Kugel}}}$   
Die Äquipotentialflächen sind Kugeloberflächen.

$$A_{\text{Kugel}} = 4\pi r^2 \quad \text{also mit} \quad D_1 = \frac{Q_1}{4\pi r^2} \quad \text{und} \quad E_1 = \frac{D_1}{\epsilon} = \frac{Q_1}{\epsilon \cdot 4\pi r^2}$$



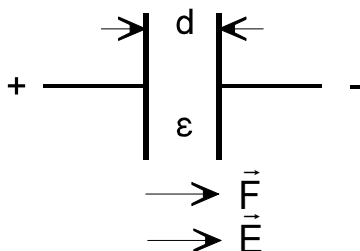
ergibt die Kraft auf eine zweite Punktladung  $Q_2$  im Abstand  $r$  von  $Q_1$ :

$$\vec{F} = Q_2 \cdot \vec{E}_1 = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{\epsilon \cdot 4\pi r^2} \quad \text{Coulomb'sches Gesetz}$$

### 2. 2 geladene Platten mit Fläche A

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot Q \quad \text{bzw.} \quad dF = E \cdot dQ \\ \rightarrow dQ = C \cdot dU$$

$$dF = E \cdot C \cdot dU = \frac{U}{d} \cdot C \cdot dU$$



$$F = \int dF = \frac{C}{d} \int_0^U U \cdot dU = \frac{C}{d} \cdot \frac{1}{2} U^2 = \frac{C \cdot U^2}{2d} = \frac{C \cdot E^2 d}{2}$$

$$\text{mit } C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} \rightarrow$$

$$F = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{2} E^2$$



## 6.9 Elektrodynamische Vorgänge

### 6.9.1 Energieinhalt eines geladenen Kondensators

Allg. gilt:  $\Delta W_C = U \cdot I \cdot \Delta t$  mit  $C = \frac{Q}{U} \rightarrow U = \frac{Q}{C} = \frac{I \cdot t}{C}$

$$\Delta W_C = \frac{I^2 \cdot t}{C} \Delta t$$

$$\text{oder } W_C = \int_0^t \frac{i(t)^2 \cdot t}{C} dt = \frac{1}{C} \int_0^t i(t)^2 t dt$$

Für  $i(t)=I=\text{const.}$  :

$$W_C = \frac{I^2}{C} \left[ \frac{1}{2} t^2 \right]_0^t = \frac{I^2 \cdot t^2}{2C}$$

mit  $U = \frac{I \cdot t}{C}$  wird  $I = \frac{U \cdot C}{t}$

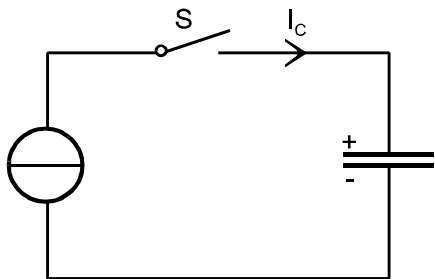
$$\rightarrow W_C = \frac{U^2 C^2 t^2}{2C \cdot t^2} = \frac{C \cdot U^2}{2}$$

Für den Plattenkondensator mit  $C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$  ;  $E = \frac{U}{d}$  gilt:

$$W_C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{E^2 A \cdot d}{2} = \frac{\epsilon}{2} E^2 V$$

(V=Volumen)

### 6.9.2 Zeitliche Änderung der Ladung Q und Verschiebestrom $I_V$



Beim Schließen des Schalters wird dem einen Kondensatorbelag positive Ladung zugeführt, dem anderen Ladung entzogen.

Physikalisch: neg. Belag reichert Elektronen an.

Der Ladestrom  $I_C$  im äußeren Kreis findet seine Fortsetzung im Inneren des Kondensators durch einen scheinbaren Ladungsverschiebestrom  $I_V$ .

$$Q = I_C \cdot t \rightarrow \Delta Q = I_C \cdot \Delta t \rightarrow I_C = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \text{ bzw. } i_C(t) = \frac{dQ}{dt}$$

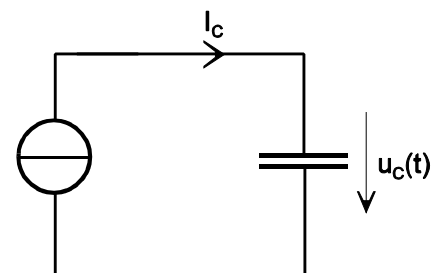
$$\text{mit } \Delta Q = \Delta U_C \cdot C \rightarrow dQ = du_C \cdot C$$

$$\rightarrow i_C(t) = C \frac{du_C}{dt}$$

#### a) Zeitliche Darstellung von $u_C(t)$ bei konstantem $I_C$

$$\text{mit } i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} \text{ für } t=t_0 \dots t_1$$

$$\rightarrow u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t_1} i_C dt + K$$



Ist  $i_C$  konstant:

$$\rightarrow u_C(t) = \frac{I_C \cdot \Delta t}{C} + U_{Ct_0} \quad \text{d.h. es entsteht ein zeitlich linearer Spannungsanstieg.}$$

In der Regel wird angesetzt:  $U_{Ct_0} = 0$

Beispiel:  $C = 30 \mu\text{F}$

$$\Delta t_{01} = t_1 - t_0 = 3\text{s}$$

$$\Delta t_{23} = 2\text{s}$$

$$\Delta t_{45} = 5\text{s}$$

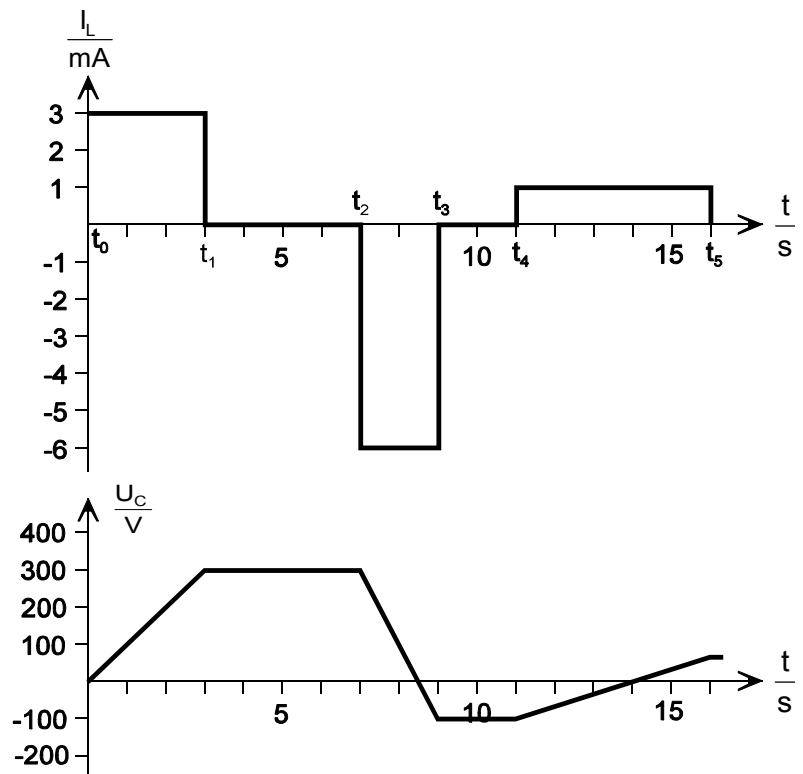
$$\begin{aligned} \Delta U_{C01} &= \frac{I_L}{C} \Delta t_{10} \\ &= \frac{3 \cdot 10^{-3} \text{ A} \cdot 3\text{s}}{30 \cdot 10^{-6} \text{ F}} = 300\text{V} \end{aligned}$$

$$\Delta U_{C12} = 0\text{V}$$

$$\Delta U_{C23} = \frac{-6 \cdot 10^{-3} \text{ A} \cdot 2\text{s}}{30 \cdot 10^{-6} \text{ F}} = -400\text{V}$$

$$\Delta U_{C34} = 0\text{V}$$

$$\Delta U_{C45} = \frac{1 \cdot 10^{-3} \text{ A} \cdot 5\text{s}}{30 \cdot 10^{-6} \text{ F}} = 167\text{V}$$

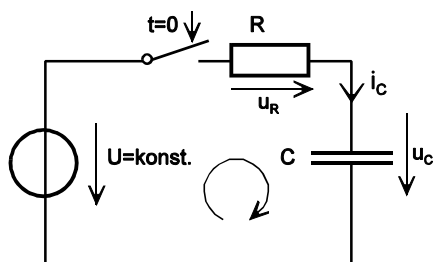


## b) Auf- und Entladung mit zeitlich veränderlichem Strom

→ Ladung eines Kondensators über einen Widerstand an konstanter Spannung, Entladung über einen Widerstand.

Ansatz:  $i_C(t) = C \frac{du_C}{dt}$

### Aufladung an konstanter Spannung U



Masche:

$$U = u_R + u_C = R \cdot i_C + u_C(t)$$

$$U = R \cdot C \frac{du_C}{dt} + u_C(t)$$

$$\rightarrow -R \cdot C \frac{du_C}{dt} = u_C(t) - U \quad \text{DGL 1. Ordnung}$$

Lösung der DGL durch Trennung der Variablen

$$\int \frac{du_C}{u_C(t) - U} = -\frac{1}{RC} \int dt$$

$$\rightarrow \ln(u_C(t) - U) = -\frac{t}{RC} + C$$

$$\rightarrow u_C(t) - U = \underbrace{e^C}_K \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Bedingung:  $\left. \begin{array}{l} t=0 \\ u_C=0 \end{array} \right\} \rightarrow K = -U$

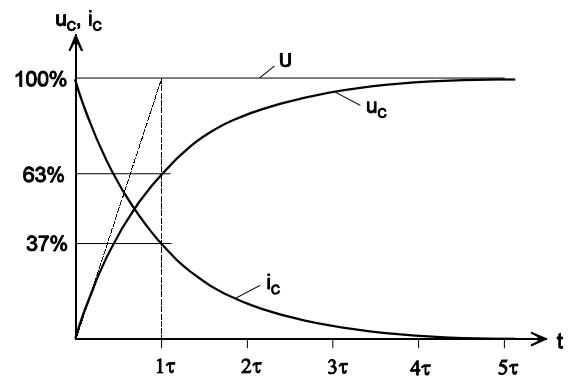
$RC = \tau$  Zeitkonstante

$$u_C(t) = U - U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = C \cdot \frac{d}{dt}(U - U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$= C(-U \cdot (-) \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$i_C(t) = C \cdot \frac{1}{RC} \cdot U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow i_C(t) = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Entladung

Masche:

$$u_C(t) + i_C(t) \cdot R = 0$$

$$\rightarrow u_C(t) = -R \cdot C \frac{du_C}{dt}$$

Variablen trennen

$$\int \frac{du_C}{u_C(t)} = -\frac{1}{RC} \int dt$$

$$\ln u_C = -\frac{1}{RC} t + C$$

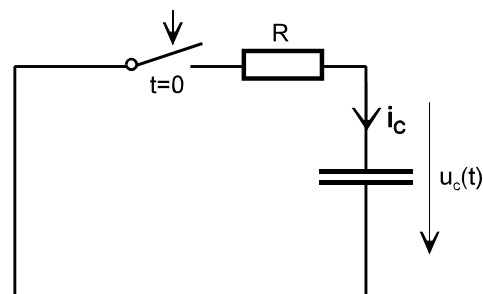
$$\rightarrow u_C(t) = \underbrace{e^C}_K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

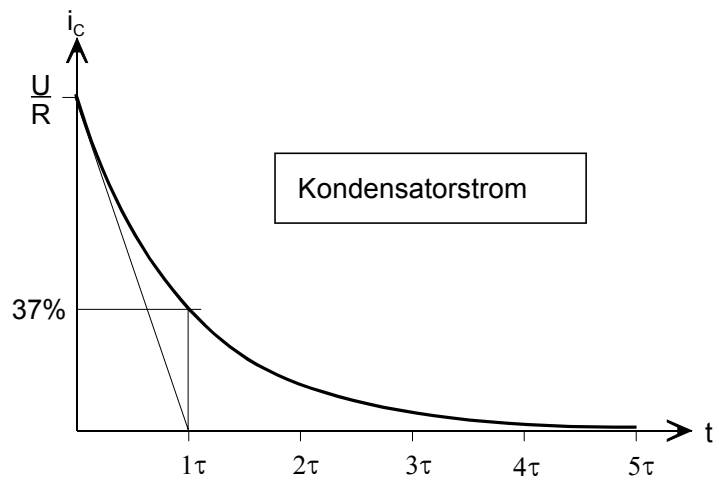
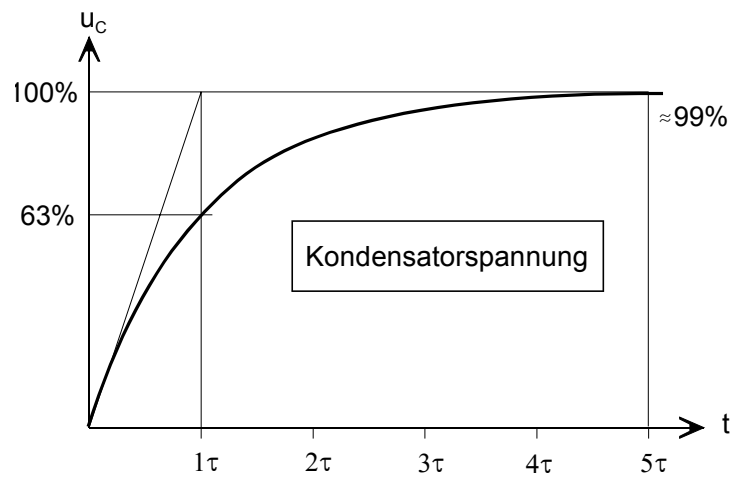
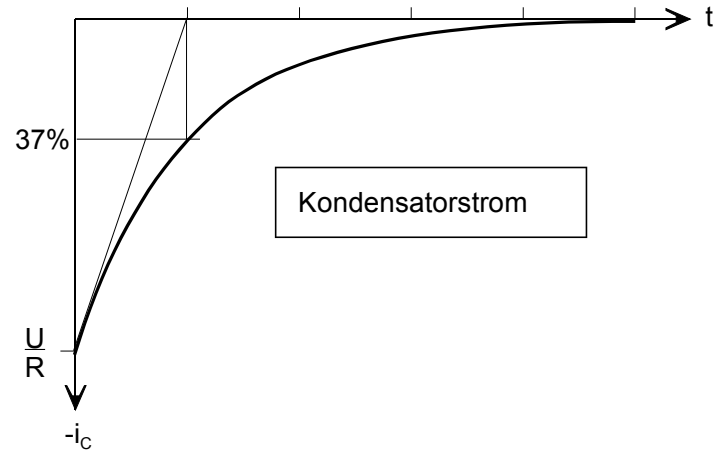
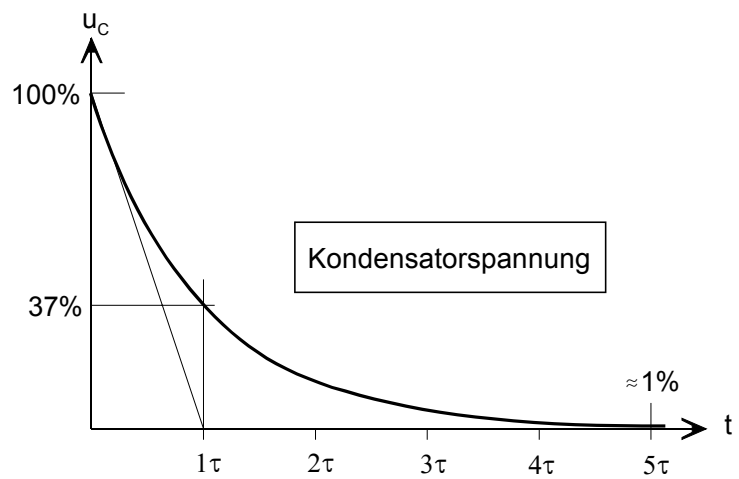
$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{C}{\tau} \cdot U_{C0} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Bedingung für  $t=0$ :  $U_C(0) = U_{C0} = U$

$$\rightarrow u_C(t) = U_{C0} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\rightarrow i_C(t) = -\frac{U_{C0}}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$



Zeitverläufe:**Aufladung****Entladung**

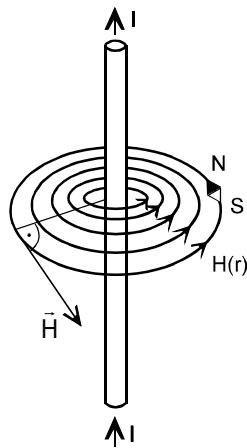
## 7. Das statische elektromagnetische Feld

### 7.1 Grundbegriffe

#### Magnetismus:

- Kraftwirkung eines Magneten der Eisenteile anziehen kann.  
 Natürliche Magnete: Magnetit ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ )  
 Der Bahnverlauf und die Rotation der Elektronen erzeugen den Magnetismus.  
 Magnetismus entsteht durch die Bewegung von Ladungen.

Neben dem natürlichen Magnetismus existiert der Elektromagnetismus (Oersted 1820)  
 Ein durch einen Leiter fließender Strom  $I$  erzeugt im Leiter und außerhalb ein magnetisches Kraftfeld mit der Feldstärke  $\vec{H}$ , das magnetisches Feld heißt.  
 Wie im elektrischen Feld sind die Hauptkrafttrichtungen in Richtung der Feldlinien.  
 Nachweis z.B. mit der Magnetonadel.



Der Nordpol zeigt in Feldrichtung (Rechtsschraubenregel)

magnetische Feldstärke  $\vec{H}$

### 7.2 Größen des magnetischen Feldes

#### 7.2.1 Die magnetische Flussdichte

Feststellung durch Experiment:

Ein stromdurchflossener Leiter übt Kraft  $F$  auf einen Magneten aus.

$$\begin{aligned} F &\sim I \\ F &\sim \ell \end{aligned} \quad \ell = \text{Länge des Leiters}$$

Daraus lässt sich die Magnetfeldgröße  $B$ , die magnetische Flussdichte, definieren.

homogen  $\boxed{B = \frac{F}{I \cdot \ell}} \quad [B] = 1 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 1 \text{ T} \quad (\text{Tesla})$

allgemein Vektor  $\vec{B}$

- Die magnetische Flussdichte  $B$  ist auch für die Induktionswirkung des Magnetfeldes wichtig: daher der alte Name magnetische Induktion.

Nach DIN 1325 wegen Verwechslungsmöglichkeit des Begriffes nicht mehr verwenden.

## 7.2.2 Der magnetische Fluss

Das Flächenintegral der Flussdichte  $\vec{B}$  heißt magnetischer Fluss  $\Phi$

$$\boxed{\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}} \quad [\Phi] = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \text{m}^2 = 1 \text{Vs} = 1 \text{Wb} \quad (\text{Weber})$$

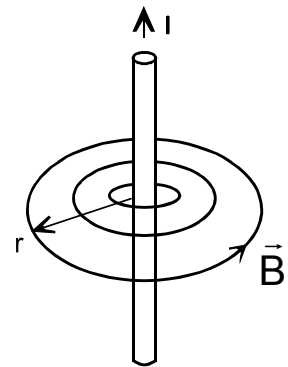
homogenes Feld:  $\Phi = B \cdot A$  (Magnetfeld senkrecht zu  $A$ )

## 7.2.3 Das Durchflutungsgesetz

Einfache symmetrische Anordnung:

$$B = K \cdot \frac{I}{r} \quad K = \text{Konstante}$$

→ Strom  $I$  erzeugt Flussdichte  $B$  !



Da das Feld eine Kreisform hat, ergibt das Integral um den Leiter:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \cdot 2\pi r \quad \text{mit } B = K \cdot \frac{I}{r} \rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = K \cdot 2\pi \cdot I$$

Auch für beliebige nichtkreisförmige Umläufe bleibt

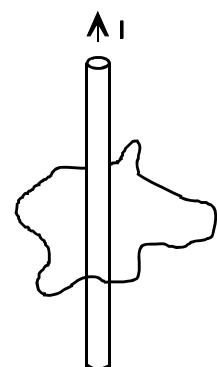
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \underbrace{K \cdot 2\pi}_{\mu} \cdot I$$

Die Konstante  $K \cdot 2\pi$  heißt Permeabilität  $\mu$ .

Für Vakuum und annähernd Luft ist

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{A} \cdot \text{m}} = 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

$\mu_0$  = magnetische Feldkonstante



Bei anderen Materialien muss zusätzlich die relative Permeabilitätskonstante  $\mu_r$  (auch Permeabilitätszahl genannt) berücksichtigt werden.

$$\boxed{\mu = \mu_r \cdot \mu_0}$$

Bei beliebiger Leiteranordnung gilt der Zusammenhang zwischen  $\vec{B}$  und  $I$  :

$$\oint \vec{B} \, d\vec{s} = \mu \cdot I$$

### 7.2.4 Durchflutung

Die Summe aller Ströme, die eine Fläche durchsetzen, heißt Durchflutung  $\Theta$  .

$$\Theta = \sum_{k=1}^n I_k \quad [\Theta] = A$$

Damit ergibt sich

$$\oint \vec{B} \, d\vec{s} = \mu \cdot \Theta \quad \rightarrow \quad \oint \frac{\vec{B}}{\mu} \, d\vec{s} = \Theta$$

Zu beachten ist, dass  $\mu$  meist ortsabhängig ist.

### 7.2.5 Magnetische Feldstärke

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \quad [H] = \frac{Vs \cdot A \cdot m}{m^2 \cdot Vs} = \frac{A}{m}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}}$$

Damit kann das Durchflutungsgesetz beschrieben werden

$$\boxed{\begin{aligned} \oint \vec{H} \, d\vec{s} &= \Theta \\ \oint \vec{H} \, d\vec{s} &= I = \int_A \vec{S} \, d\vec{A} \end{aligned}}$$

magnetische Umlaufspannung

Analog zur elektrischen Spannung:  $U_{12} = \int_1^2 \vec{E} \, d\vec{s}$

Linienintegral  $\oint \vec{E} \, d\vec{s} = 0$

## 7.3 Magnetisches Feld

### 7.3.1 Magnetisches Feld eines zylindrischen Leiters

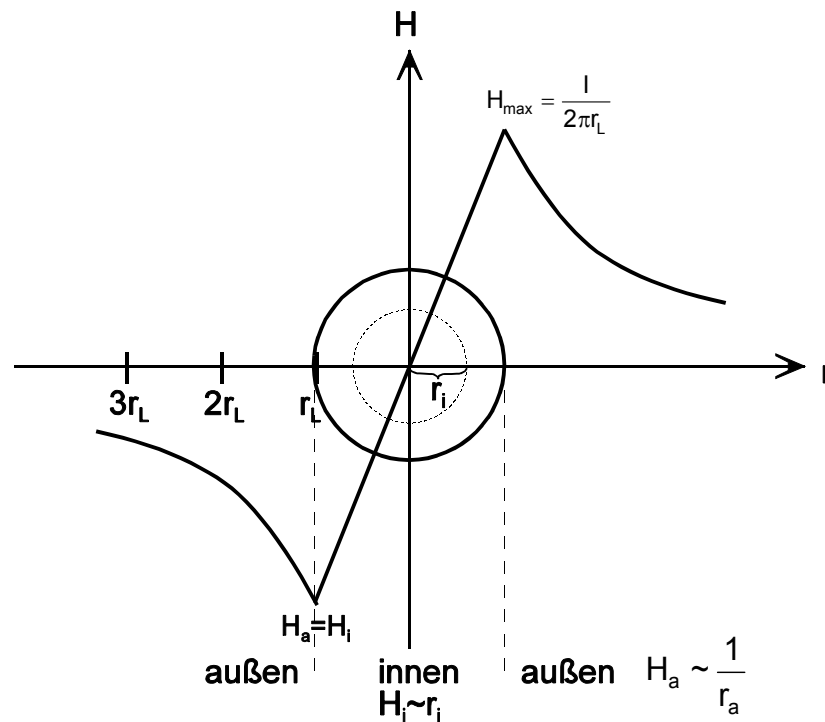
- 1) Außerhalb des Leiters ( $r_a \geq r_L$ ) ist der gesamte Strom  $I$  wirksam.

$$\boxed{H_a = \frac{I}{2\pi r_a}} \quad \sim \frac{1}{r_a} \quad \rightarrow \text{Hyperbel}$$

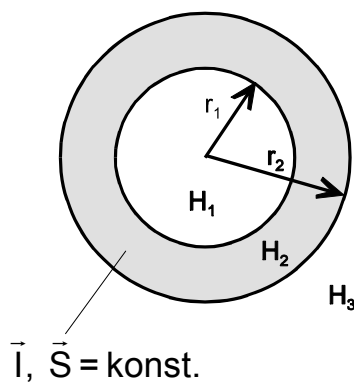
2) Innerhalb des Leiters ( $r_i \leq r_L$ ) ist nur der umschlossene effektive Restquerschnitt mit

$$\frac{I_{r_i}}{I_{\text{ges}}} = \frac{A_i}{A_{\text{ges}}} = \frac{\pi \cdot r_i^2}{\pi \cdot r_L^2} \rightarrow I_{r_i} = I_{\text{ges}} \left( \frac{r_i}{r_L} \right)^2 \quad \text{wirksam (Teilstrom).}$$

$$H_i = \frac{I_{r_i}}{\underbrace{\oint ds}_{\text{Umfang}}} = \frac{I_{r_i}}{2\pi \cdot r_i} = \frac{I_{\text{ges}} \cdot r_i^2}{2\pi \cdot r_i \cdot r_L^2} = \frac{I \cdot r_i}{2\pi \cdot r_L^2} \quad H_i \sim r_i$$



### 7.3.2 Magnetisches Feld eines Rohrleiters



a) Innenraum

$$r < r_1 \rightarrow H_1(r) = 0 \quad (\text{Im Innenraum fließt kein Strom!})$$

a) Außenraum

$$r_2 < r < \infty \rightarrow H_3(r) = \frac{I}{2\pi r} \quad (\text{Wie zyl. Leiter})$$



c) Rohrwand

$$r_1 < r < r_2 \rightarrow H_2(r) = \frac{\int_A S dA}{\oint ds} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{r_1}^r S \cdot r dr d\alpha}{2\pi r}$$

$$= \frac{S(r^2 - r_1^2)\pi}{2\pi r}$$

$$\text{mit } S = \frac{I}{\int_A dA} = \frac{I}{(r_2^2 - r_1^2)\pi} = \text{konst.}$$

$$H_2(r) = \frac{I}{(r_2^2 - r_1^2)\pi} \cdot \frac{(r^2 - r_1^2)}{2r} \rightarrow \boxed{H_2(r) = \frac{I (r^2 - r_1^2)}{2\pi r (r_2^2 - r_1^2)}}$$

Zahlenbeispiel:

$$I = 500 \text{ A} \quad r_1 = 5 \text{ mm} \quad r_2 = 10 \text{ mm}$$

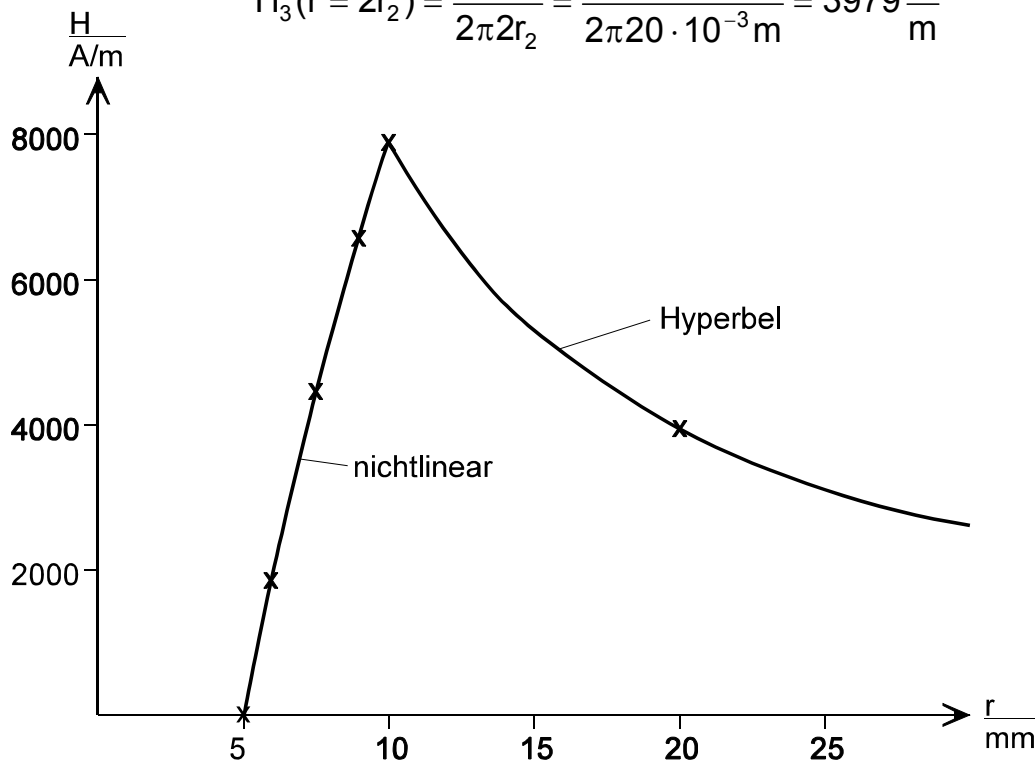
$$S = \frac{500 \text{ A}}{(10^2 - 5^2) \text{ mm}^2 \pi} = 2,12 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$$

$$H_2(r_2) = H_3(r_2) = \frac{I}{2\pi r_2} = \frac{500 \text{ A}}{2\pi 10 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 7958 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

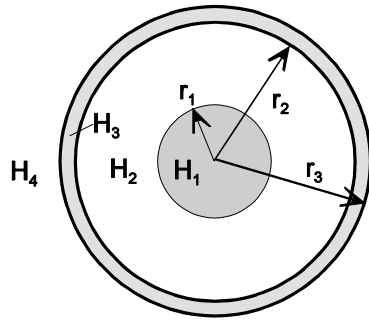
$$H_2(6 \text{ mm}) = \frac{500 \text{ A} (6^2 - 5^2) \text{ mm}^2}{2\pi 6 \cdot 10^{-3} \text{ m} (10^2 - 5^2) \text{ mm}^2} = 1945 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$H_2(7,5 \text{ mm}) = 4421 \frac{\text{A}}{\text{m}}; \quad H_2(9 \text{ mm}) = 6602 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$H_3(r = 2r_2) = \frac{I}{2\pi 2r_2} = \frac{500 \text{ A}}{2\pi 20 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 3979 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$



### 7.3.3 Magnetisches Feld eines Koaxialleiters (Koaxialkabel)



Hin- und Rückleiter coaxial angeordnet

Innen  $I < 0$  Hinleiter  
 Außen  $I > 0$  Rückleiter

Diese Zuordnung ist willkürlich festgelegt, auch in umgekehrter Richtung möglich.

Zahlenwerte als Beispiel:  $r_1=1\text{mm}$ ;  $r_2=3\text{mm}$ ;  $r_3=3,5\text{mm}$ ;  $I=2\text{A}$ ;  $S_1, S_2=\text{konstant}$  (Gleichstrom)

- 1) Feld im Innenleiter  $H_1$  ( $0 \leq r \leq r_1$ )

$$H_1(r) = \frac{-I \cdot r}{2\pi \cdot r_1^2} \quad H_1(r_1) = \frac{-I}{2\pi \cdot r_1} = \frac{-2\text{A}}{2\pi \cdot 10^{-3}\text{m}} = -318 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$H_1(0) = 0$$

→ linearer Verlauf

- 2) Feld im Zwischenraum (Dielektrikum)  $H_2$  ( $r_1 \leq r \leq r_2$ )

$$H_2(r) = \frac{-I}{2\pi \cdot r} \quad H_2(r_1) = H_1(r_1) = \frac{-I}{2\pi \cdot r_1} = -318 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$H_2(r_2) = \frac{-2\text{A}}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^{-3}\text{m}} = -106 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

→ Hyperbel-Verlauf

- 3) Feld im Außenleiter  $H_3$  ( $r_2 \leq r \leq r_3$ )

Dieses Feld setzt sich aus dem Feld des Innenleiters und des Außenleiters zusammen und wird durch Überlagerung berechnet.

$$H_3(r) = \frac{-I}{2\pi r} + \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \int_{r_2}^r S_2 \cdot r \, dr \, d\alpha = \underbrace{\frac{-I}{2\pi r}}_{\text{Innenleiter}} + \underbrace{\frac{S_2 \cdot 2\pi}{2\pi r} \left( \frac{r^2 - r_2^2}{2} \right)}_{\text{Außenleiter}}$$

$$\text{mit } S = \frac{I}{A_{r_3} - A_{r_2}} = \frac{I}{(r_3^2 - r_2^2)\pi}$$

$$\rightarrow H_3(r) = \frac{-I}{2\pi r} + \frac{I (r^2 - r_2^2)}{2\pi r (r_3^2 - r_2^2)}$$

$$H_3(r_2) = \frac{-I}{2\pi r_2} + \frac{\overbrace{I(r_2^2 - r_2^2)}^0}{2\pi r(r_3^2 - r_2^2)} = H_2(r_2) = -106 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$H_3\left(\underbrace{\frac{r_3 + r_2}{2}}_{\text{Mitte}}\right) = \frac{-2A}{2\pi \cdot 3,25 \cdot 10^{-3} \text{m}} + \frac{2A(3,25^2 - 3^2) \cdot 10^{-6} \text{m}^2}{2\pi \cdot 3,25 \cdot 10^{-3} \text{m}(3,25^2 - 3^2) \cdot 10^{-6} \text{m}^2}$$

$$= -97,9 \frac{\text{A}}{\text{m}} + 47,1 \frac{\text{A}}{\text{m}} = 50,9 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$H_3(r_3) = \frac{-2A}{2\pi \cdot 3,5 \cdot 10^{-3} \text{m}} + \frac{2A(3,5^2 - 3^2) \cdot 10^{-6} \text{m}^2}{2\pi \cdot 3,5 \cdot 10^{-3} \text{m}(3,5^2 - 3^2) \cdot 10^{-6} \text{m}^2} = 0$$

→ nichtlinearer Feldverlauf

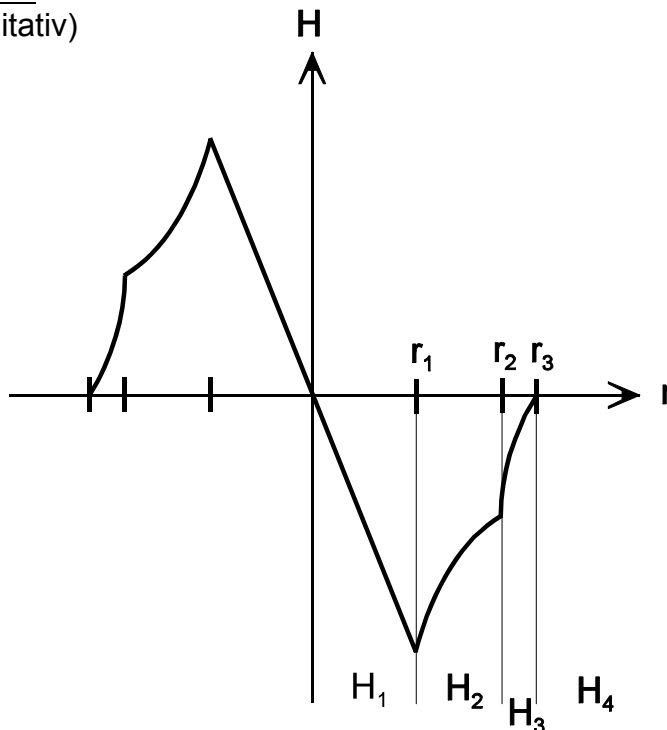
4) Feld im Außenraum  $H_4$  ( $r_3 < r$ )

$$H_4(r) = 0$$

da die Summe der  
umschlossenen Ströme 0 ist.

$$\sum I = 0$$

Feldbild  
(Qualitativ)



Wichtige Erkenntnis:

Im Außenraum kompensiert  
sich Feld des Innen- und Au-  
ßenleiters, d.h.  
der Außenraum ist feldfrei.

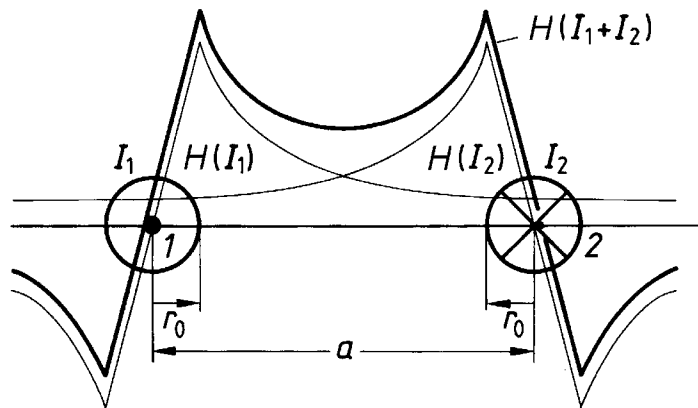
→ Dies gilt nur für ein ideales  
koaxiales Kabel. In der Praxis  
ist durch Kabel-Unsymmetrien  
die Feldkompensation unvoll-  
ständig.

### 7.3.4 Magnetisches Feld einer Zweidrahtleitung

Parallelführung von Hin- und Rückleiter

(Ohne Berechnung, nur qualitativ.)

Aus Moeller/Frohne/Löchener/Müller: 'Grundlagen der Elektrotechnik'



#### Erkenntnis:

Das Feld im Außenraum ist nicht Null. Gegenüber dem Einzelleiterfeld ist das Gesamtfeld außen geschwächt.

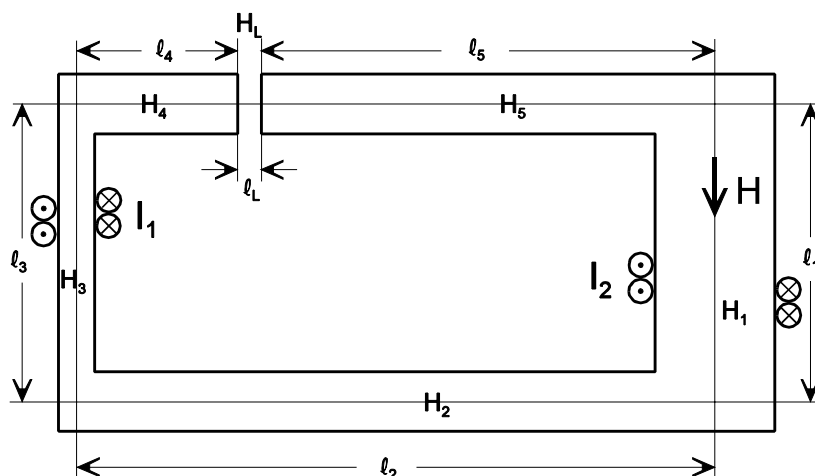
### 7.3.5 Erweitertes Durchflutungsgesetz

Überlagerung mehrerer Durchflutungen

Die gesamte Durchflutung  $\Theta$  (Magnetische Spannung) ergibt sich aus der Summe der Einzeldurchflutungen.

$$\begin{aligned}\Theta &= N_1 \cdot I_1 + N_2 \cdot I_2 + \dots + N_n \cdot I_n \\ &= \oint H \, ds = H_1 \cdot \Delta s_1 + H_2 \cdot \Delta s_2 + \dots\end{aligned}$$

Beispiel: magnetische Kern mit unterschiedlichen Querschnitten und Längen.



Zur Vereinfachung werden die Inhomogenitäten in den Ecken vernachlässigt, es wird von der Mitte des Querschnittes aus gerechnet.

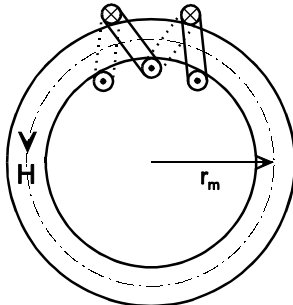
Es gilt näherungsweise:

$$H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + H_3 \cdot l_3 + H_4 \cdot l_4 + H_L \cdot l_L + H_5 \cdot l_5 = \Theta = N_1 \cdot I_1 + N_2 \cdot (-I_2)$$

### 7.3.6 Magnetisches Feld in einfachen magnetischen Kreisen

#### 1. Ringkernspule mit ferromagnetischem Kern

Durch die optimale Konzentration des magn. Feldes im ferromagnetischen Ringkern ist die Anordnung sehr streuarm, d.h. der Feldanteil außerhalb des Kernes ist sehr gering.



$r_m$  = mittlerer Feldlinienradius

$\ell_e = 2\pi r_m$  effektive Länge allg.  $\ell_e = \oint ds$

$\ell_e$  wird meist in Datenblättern angegeben bzw. durch Messung ermittelt

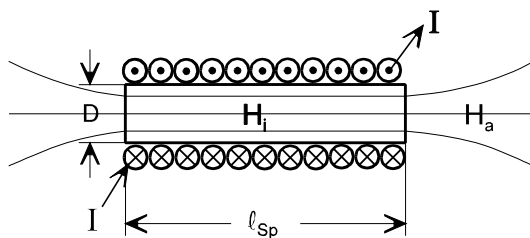
Beispiel:  $I=1A$ ;  $N=100$ Wdg.;  $r_m=5cm$

$$\Theta = N \cdot I = 100 \cdot 1A = 100A = \oint H ds = H_m \cdot 2\pi r_m$$

$$\rightarrow H_m = \frac{\Theta}{2\pi r_m} = \frac{100A}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2}m} = 318,3 \frac{A}{m}$$

#### 2. Zylinderspule mit und ohne magn. Kern

Exakte Feldberechnung schwierig, da der äußere Feldanteil  $H_a$  inhomogen ist. Da  $H_a$  relativ klein ist, wird er bei praktischen Berechnungen vernachlässigt.



$$\Theta = N \cdot I = \ell_{sp} \cdot H_i + \underbrace{\int H_a ds}_{\approx 0}$$

$$\rightarrow H_{sp} \approx H_i \approx \frac{\Theta}{\ell_{sp}} = \frac{N \cdot I}{\ell_{sp}}$$

$\frac{\ell_{sp}}{D}$  möglichst groß, damit  $H_a$  vernachlässigbar ist.

### 7.3.7 Einfluss von Material und Geometrie

Analogie elektrisches und magnetisches Feld (Vertauschung von  $U \leftrightarrow I$ )

Wie im elektrischen Feld das Dielektrikum hat im magnetischen Feld das Kernmaterial einen entscheidenden Einfluss auf die Feld-Größen.

Elektrisches Feld

Verschiebungs-Flussdichte

$$D = \frac{Q}{A} = \varepsilon \cdot E = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot E$$

$$[D] = \frac{As}{m^2}$$

$$\text{el. Feldkonstante } \varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$$

$$\text{Dielektrizitätszahl } \varepsilon_r = 1 \dots 10000$$

$$\psi = \text{elektrischer Fluß} = \text{Ladung } Q$$

$$Q = D \cdot A$$

Magnetisches Feld

Magnetische Flussdichte

$$B = \frac{\Phi}{A} = \mu \cdot H = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H$$

$$[B] = \frac{Vs}{m^2}$$

$$\text{magn. Feldkonstante } \mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am}$$

$$\text{Permeabilitätszahl } \mu_r = 0,9 \dots 100000$$

$$\text{magnetischer Fluß } \Phi = B \times A$$

$$\text{homogen } \Phi = B \cdot A$$

$$\text{inhomogen } \Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

**7.4 Der magnetische Kreis**

Analogie zum elektrischen Stromkreis

elektrisch

$$U = I (R_1 + R_2)$$

$$R = \frac{\ell}{\kappa \cdot A}$$

$$R_{\text{ges}} = \frac{U}{I}$$

$$G_{\text{ges}} = \frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{I}{U}$$

magnetisch

$$\Theta = \Phi (R_{m1} + R_{m2})$$

$$R_m = \frac{\ell}{\mu \cdot A}$$

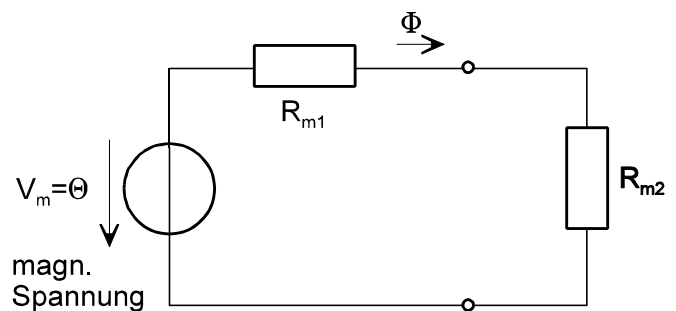
$$R_{\text{mges}} = \frac{\Theta}{\Phi}$$

$$\Lambda = \frac{1}{R_{\text{mges}}} = \frac{\Phi}{\Theta}$$

$$\Lambda = \text{Permeanz}$$

$$\text{magn. Leitwert}$$

Magnetisches Ersatzschaltbild



$R_m$  = Reluktanz  
magn. Widerstand

$$U \hat{=} \Theta, V_m$$

$$I \hat{=} \Phi$$

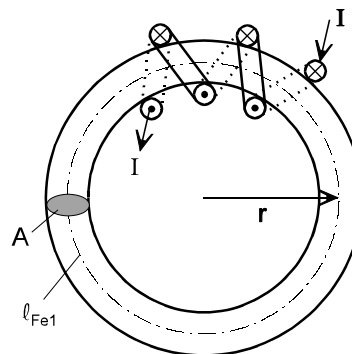
$$R \hat{=} R_m$$

Beispiele:**7.4.1 Ringkernspule mit Eisenkern**1.) Ohne Luftspalt Index<sub>1</sub>

$$\mu_r = \mu_{rFe} = 500 \text{ (Eisen)}$$

$$r = 35\text{mm}; A = 1,2\text{cm}^2$$

$$I = 100\text{mA}; N = 100\text{Wdg.}$$



$$\Theta = I \cdot N = H_{\text{Fe1}} \cdot \ell_{\text{Fe1}} \rightarrow H_{\text{Fe1}} = \frac{I \cdot N}{\ell_{\text{Fe1}}} = \frac{0,1\text{A} \cdot 100}{2\pi r} = \frac{10\text{A}}{2\pi \cdot 3,5 \cdot 10^{-3}\text{m}} = 45,5 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$B_{\text{Fe1}} = \mu_0 \cdot \mu_{\text{rFe}} \cdot H_{\text{Fe1}} = 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 500 \cdot 45,5 \frac{\text{A}}{\text{m}} = 28,6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 28,6 \cdot 10^{-3} \text{T}$$

$$\Phi_{\text{Fe1}} = B_{\text{Fe1}} \cdot A_{\text{Fe}} = 28,6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \cdot 1,2 \cdot 10^{-4} \text{m}^2 = 3,4 \cdot 10^{-6} \text{Vs}$$

$$R_{\text{mFe1}} = \frac{\Theta}{\Phi_{\text{Fe1}}} = \frac{10\text{A}}{3,4 \cdot 10^{-6} \text{Vs}} = 2,9 \cdot 10^{-6} \frac{\text{A}}{\text{Vs}} \quad ; \quad \Lambda = \frac{1}{R_{\text{mFe1}}} = 0,34 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$$

andere Rechnung:

$$R_{\text{mFe1}} = \frac{\ell_{\text{Fe1}}}{\mu \cdot A_{\text{Fe}}} = \frac{2\pi \cdot 35 \cdot 10^{-3} \text{m}}{\mu_0 \cdot 500 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4} \text{m}^2} \approx 2,9 \cdot 10^{-6} \frac{\text{A}}{\text{Vs}}$$

## 2.) Mit Luftspalt Index<sub>2</sub>

$$\Theta = I \cdot N = H_{\text{Fe2}} \cdot \ell_{\text{Fe2}} + H_{\text{L}} \cdot \ell_{\text{L}}$$

$$\text{mit } H_{\text{Fe2}} = \frac{B_{\text{Fe2}}}{\mu_{\text{Fe}}} \quad \text{und} \quad H_{\text{L}} = \frac{B_{\text{L}}}{\mu_{\text{L}}}$$

$$\text{sowie } \ell_{\text{Fe2}} = \ell_{\text{Fe1}} - \ell_{\text{L}} = 2\pi \cdot 35 \cdot 10^{-3} \text{m} - 0,5 \cdot 10^{-3} \text{m} = 0,219 \text{m}$$

und der Annahme

$$\Phi_{\text{Fe}} \equiv \Phi_{\text{L}} \equiv \Phi_2 \quad \text{d.h. das Streufeld ist vernachlässigbar,} \quad A_{\text{Fe}} \approx A_{\text{L}}$$

$$\Theta = \Phi_2 (R_{\text{mFe2}} + R_{\text{mL}})$$

$$R_{\text{mFe2}} = \frac{\ell_{\text{Fe2}}}{\mu \cdot A_{\text{Fe}}} = \frac{0,219 \text{m}}{\mu_0 \cdot 500 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4} \text{m}^2} = 2,91 \cdot 10^{-6} \frac{\text{A}}{\text{Vs}}$$

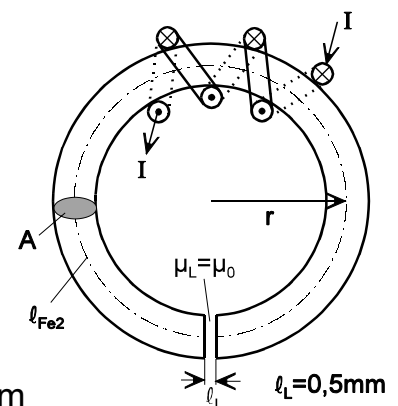
$$R_{\text{L}} = \frac{\ell_{\text{L}}}{\mu_0 \cdot A_{\text{L}}} = \frac{0,5 \cdot 10^{-3} \text{m}}{\mu_0 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4} \text{m}^2} = 3,31 \cdot 10^{-6} \frac{\text{A}}{\text{Vs}}$$

$$\rightarrow \Phi_2 = \frac{\Theta}{R_{\text{mFe2}} + R_{\text{mL}}} = \frac{10\text{A}}{(2,91 + 3,31) \cdot 10^{-6} \frac{\text{A}}{\text{Vs}}} = 1,61 \cdot 10^{-6} \text{Vs}$$

$$B_2 = \frac{\Phi_2}{A_{\text{Fe,L}}} = \frac{1,61 \cdot 10^{-6} \text{Vs}}{1,2 \cdot 10^{-4} \text{m}^2} = 13,4 \text{mT}$$

$$H_{\text{Fe2}} = \frac{B_2}{\mu_0 \cdot \mu_{\text{rFe}}} = \frac{13,4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}}{1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 500} = 21,4 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

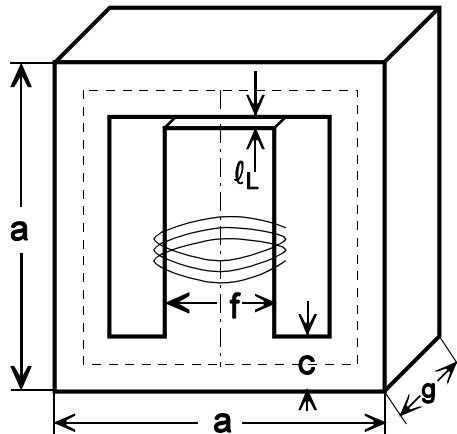
$$H_{\text{L}} = \frac{B_2}{\mu_0} = \frac{13,4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}}{1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}} = 10,7 \cdot 10^3 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$



Bilanz	Luftspalt		Tendenz
	ohne	mit	
$\Theta$	10A	10A	konstant
$\Phi$	$3,4 \cdot 10^{-6} \text{Vs}$	$1,6 \cdot 10^{-6} \text{Vs}$	kleiner
$B$	$28,6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$	$13,4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$	kleiner
$R_{\text{mges}}$	$2,9 \cdot 10^{-6} \frac{\text{A}}{\text{Vs}}$	$6,2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{A}}{\text{Vs}}$	größer

### 7.4.2 Das Rechnen mit magnetischen Widerständen

Beispiel: "M"-Kern (M65)



$$\begin{aligned} a &= 65\text{mm} & \mu_{r\text{Fe}} &= 500 \\ c &= 10\text{mm} & N &= 400\text{Wdg.} \\ f &= 20\text{mm} & I &= 1\text{A} \\ g &= 20\text{mm} \\ l_L &= 0,5\text{mm} \end{aligned}$$

Gesucht: alle  $R_m$ ,  $\Phi$ ,  $B$ ,  $H$

Streuung vernachlässigt

$$A_{1,2} = c \cdot g = 10\text{mm} \cdot 20\text{mm} = 2 \cdot 10^{-4}\text{m}^2; \quad A_L = A_3 = g \cdot f = 4 \cdot 10^{-4}\text{m}^2$$

$$l_{1,2} = a - 2 \frac{c}{2} + 2 \frac{a - 2 \frac{c}{2}}{2} = a - c + a - c = 110\text{mm}; \quad l_3 = a - \frac{2c}{2} - l_L = 54,5\text{mm}$$

$$R_{m1,2} = \frac{l_{1,2}}{\mu_{\text{Fe}} \cdot A_{\text{Fe}}} = \frac{110 \cdot 10^{-3}\text{m} \cdot \text{A} \cdot \text{m}}{1,257 \cdot 10^{-6}\text{Vs} \cdot 500 \cdot 2 \cdot 10^{-4}\text{m}^2} = 8,75 \cdot 10^5 \frac{\text{A}}{\text{Vs}}$$

$$R_{m3} = \frac{54,5 \cdot 10^{-3}\text{m} \cdot \text{A} \cdot \text{m}}{1,257 \cdot 10^{-6}\text{Vs} \cdot 500 \cdot 4 \cdot 10^{-4}\text{m}^2} = 2,17 \cdot 10^5 \frac{\text{A}}{\text{Vs}}$$

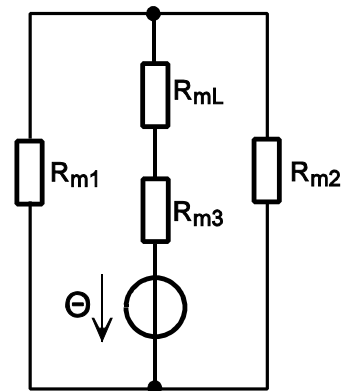
$$R_{mL} = \frac{0,5 \cdot 10^{-3}\text{m} \cdot \text{A} \cdot \text{m}}{1,257 \cdot 10^{-6}\text{Vs} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 10^{-4}\text{m}^2} = 9,94 \cdot 10^5 \frac{\text{A}}{\text{Vs}}$$

$$R_{m\text{ges}} = \frac{R_{m1,2}}{2} + R_{m3} + R_{mL} = 16,49 \cdot 10^5 \frac{\text{A}}{\text{Vs}}$$

$$\Phi_{L,3} = \frac{\Theta}{R_{m\text{ges}}} = \frac{1\text{A} \cdot 400}{16,49 \cdot 10^5 \frac{\text{A}}{\text{Vs}}} = 242,6 \cdot 10^{-6}\text{Vs}$$

$$B_{L,3} = \frac{\Phi_{L,3}}{A_{L,3}} = \frac{242,6 \cdot 10^{-6}\text{Vs}}{4 \cdot 10^{-4}\text{m}^2} = 606,4 \cdot 10^{-3}\text{T}; \quad B_{1,2} = \frac{\Phi_{L,3}}{2A_{1,2}} = B_{L,3}$$

$$H_L = \frac{B_{L,3}}{\mu_0} = \frac{606,4 \cdot 10^{-3}\text{T}}{1,257 \cdot 10^{-6}\frac{\text{Vs}}{\text{Am}}} = 482,4 \cdot 10^3 \frac{\text{A}}{\text{m}}; \quad H_{1,2,3} = \frac{B_{1,2,3}}{\mu_0 \cdot \mu_r} = \frac{606,4 \cdot 10^{-3}\text{T}}{1,257 \cdot 10^{-6}\frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 500} = 965 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$



magn. Ersatzbild



### 7.4.3 Magnetische Materialeigenschaften

Allg.  $B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H \rightarrow$  Stoffe mit  $\mu_r > 1$  verstärken die Flussdichte und mit  $\mu_r < 1$  schwächen.

Die im magnetischen Kreis eingebrachten Stoffe werden unterschieden:

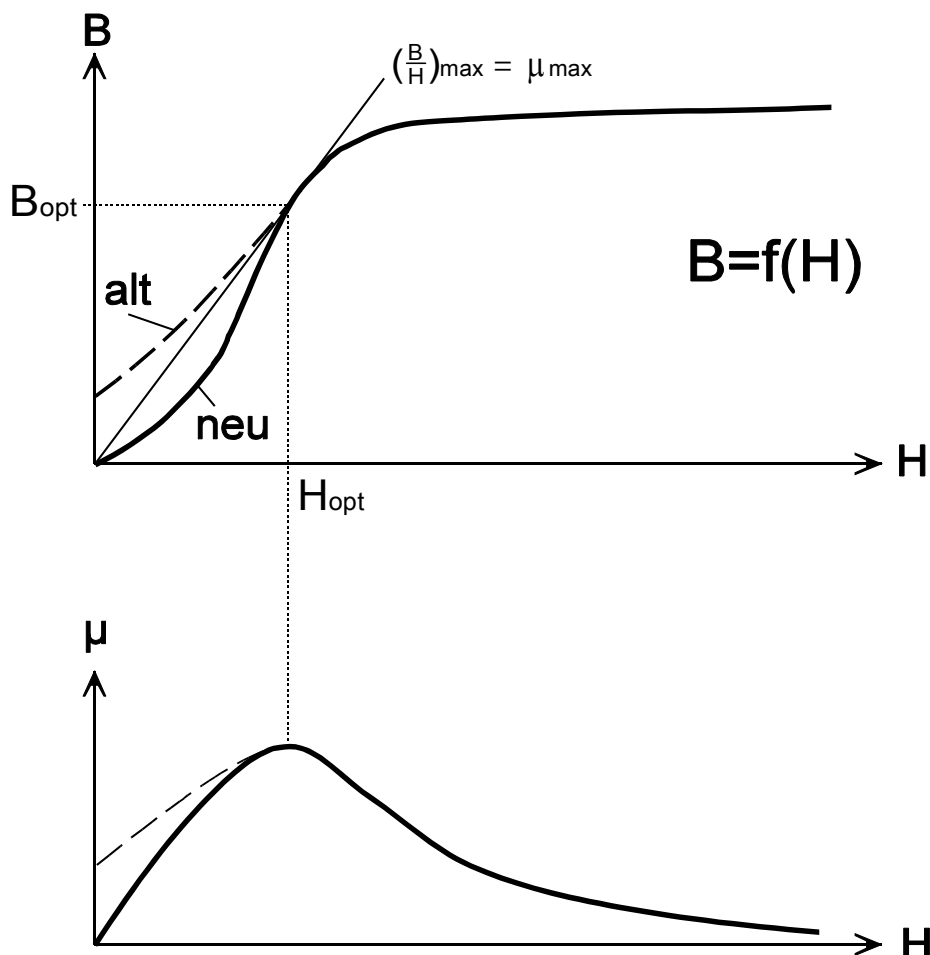
- $\mu_r < 1$  - Diamagnetisch, Flussdichte  $B$  wird geschwächt (Blei, Kupfer u.a.)
- $\mu_r > 1$  - Paramagnetisch, schwache Erhöhung von  $B$  (Platin, Wolfram, Aluminium u.a.)
- $\mu_r \gg 1$  - Ferromagnetisch, starke bis sehr starke Erhöhung von  $B$  (nicht linear) (Eisen, Nickel, Kobalt, Legierungen u.a.)

Kristallstruktur wichtig  $\rightarrow$  z.B. Chromnickelstahl ist unmagnetisch

Temperatureinfluss: Bei der Curietemperatur (Fe  $\sim 770^\circ\text{C}$ ) geht schlagartig der Ferromagnetismus in den Paramagnetismus über. Anwendung z.B. Lötspitzen-temperaturregelung.

Schlageinwirkung entmagnetisiert teilweise einen Dauermagneten.

Für magnetische Kreise werden fast immer ferromagnetische Kernmaterialien verwendet. Die Permeabilität  $\mu$  bzw.  $\mu_r$  eines ferromagnetischen Stoffes ist nicht konstant, sondern eine Funktion der Feldstärke  $H$ , d.h.  $\mu = \frac{B}{H}$  ist nicht konstant.

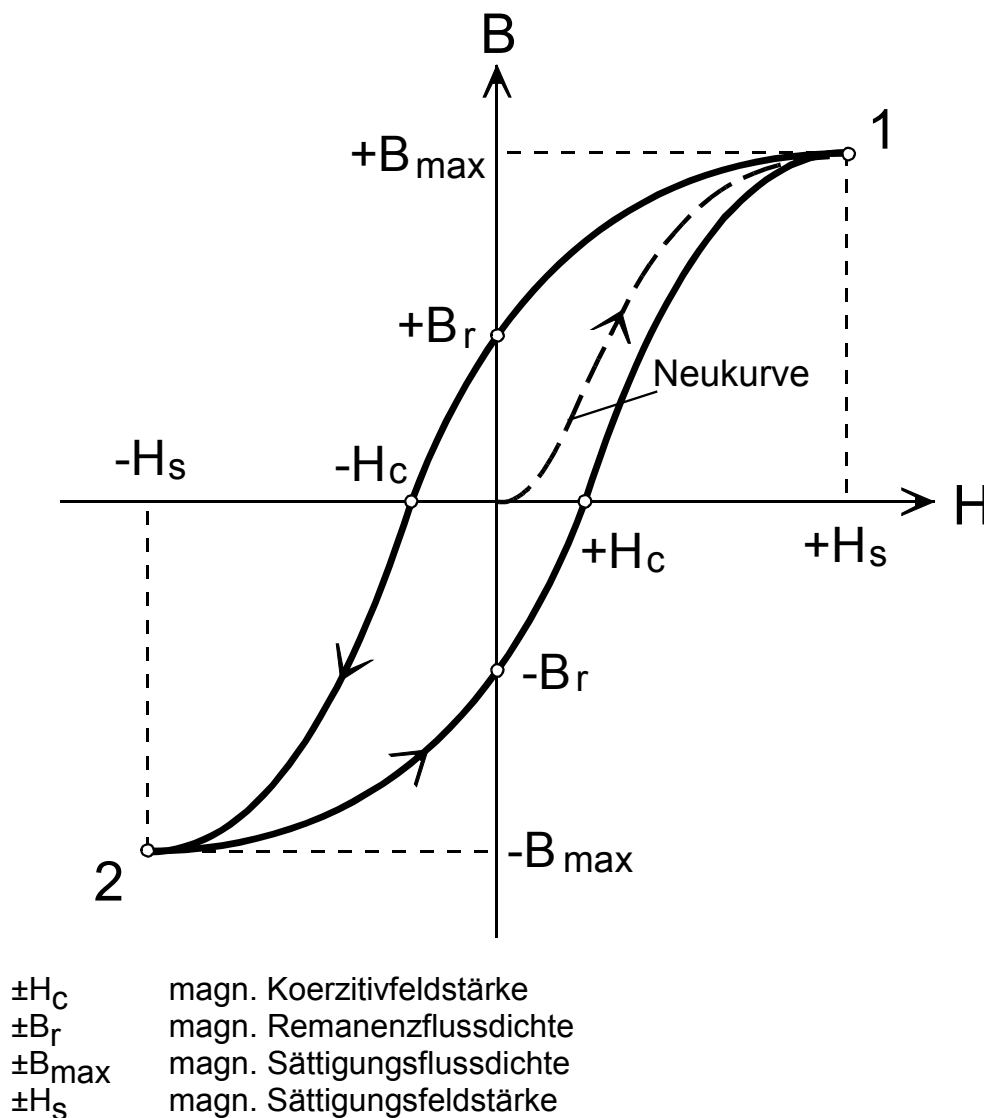


Die Permeabilität  $\mu$  hängt ab von:

1. Eisensorte, Legierung: Weicheisen, Dynamoblech etc.
2. Feldstärke  $\mu=f(H)$
3. Magnetische Vorgeschichte: Remanenz, Koerzitivkraft
4. Temperatur unterhalb der Curietemperatur (z.B. bei Ferrit)

#### 7.4.4 Magnetisierungskennlinien

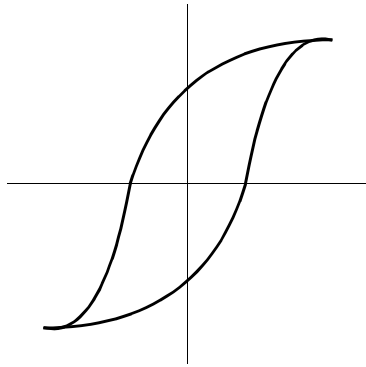
Die vollständige Kurve  $B=f(H)$  heißt Hystereseschleife



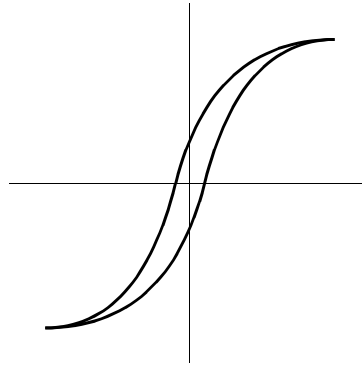
Je nach Verwendungszweck wird eine zweckmäßige Hysteresekurve durch Werkstoffwahl verwendet.

Zum Beispiel: weichmagnetisch mit einer schlanken Hysteresekurve für Wechselstrommagnete (-maschinen), hartmagnetisch mit einer breiten Hysteresekurve für Permanentmagnete (Lautsprecher u.a.)

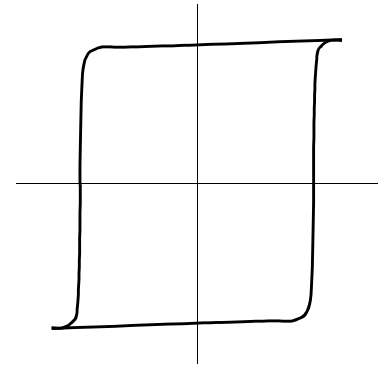
## Hartmagnetisch



## Weichmagnetisch



## Rechteck-Kurve

Anwendung

Dauermagnete  
Permanentpole  
für elektrische  
Maschinen

Transformatoren  
el. Maschinen  
Elektromagnete  
Relais

magn. Verstärker  
Speicherkerne für  
Digitalrechner (alt)

Wichtige Eigenschaften

hohe remanente  
Flussdichte  $B_r$   
hohe Koerzitiv-  
feldstärke  $H_C$

Remanenz- und  
Koerzitivfeldstärke  
klein wg. Verluste  
beim Ummagneti-  
sieren, Remanenz  
→ "Kleben"

Remanenz gleich  
Sättigungsflussdichte  
gutes Schaltverhalten  
hohe Spannungsaus-  
beute beim Um-  
schalten

**7.4.5 Verluste durch Ummagnetisieren**

Das Produkt (Fläche)  $\int H dB$  hat die Einheit  $\frac{A}{m} \cdot \frac{Vs}{m^2} = \frac{Ws}{m^3}$

Volumenbezogene  
Energie (Arbeit)

Ummagnetisierungsverlust je Schleifendurchlauf:

$$W_{\text{Hyst}} = \underbrace{V_{\text{Kern}}}_{\text{Volumen}} \cdot \oint H dB$$

→ Angabe in Datenblättern

**7.4.6  $\mu_{Fe}$  und  $\mu_{rFe}$  -Bestimmung aus Kennlinien**

Def.  $\mu_{Fe} = \frac{B_{Fe/A}}{H_{Fe/A}}$

A=Arbeitspunkt

$$\mu_{rFe} = \frac{B_{Fe/A}}{H_{Fe/A} \cdot \mu_0}$$

Beispiele:

- 1.) Gesucht  $\mu_{Fe}$  und  $\mu_{rFe}$  für Dynamoblech bei  $H_{Fe/A}=50\text{A/m}$

Aus Kennlinie:  $B_{Fe/A}=0,12\text{T}$  (Arbeitsblatt Dynamoblech)

$$\rightarrow \mu_{Fe} = \frac{B_{Fe/A}}{H_{Fe/A}} = \frac{0,12 \text{ Vs} \cdot \text{m}}{50 \text{ m}^2 \cdot \text{A}} = 2,4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Vs}}{\text{m} \cdot \text{A}}$$

$$\mu_{rFe} = \frac{\mu_{Fe}}{\mu_o} = \frac{2,4 \cdot 10^{-3} \text{ Vs} \cdot \text{m} \cdot \text{A}}{1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Vs} \cdot \text{m} \cdot \text{A}} = 1909,3$$

- 2.) Gesucht optimaler Arbeitspunkt AP für Permalloy C,  $\mu_{rFemax}$

Lösung durch Parallelverschiebung der Hilfslinien von  $\mu_{rFe}$  als Tangente an die Magnetisierungskennlinie (Arbeitsblatt Kennlinien).

$$\rightarrow B_{Fe/A} = 0,42 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}; \quad H_{Fe/A} = 4,4 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$\mu_{rFemax} = \frac{0,42}{4,4 \cdot 1,257 \cdot 10^{-6}} \frac{\text{Vs} \cdot \text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{A}}{\text{Vs} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{A}} = 75938$$

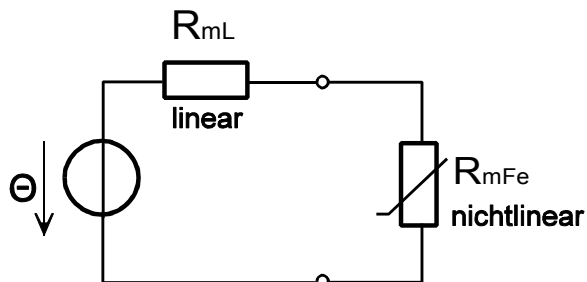
- 3.) Gesucht  $\mu_{rAnf}$  für Mu-Metall

$$\rightarrow \mu_{rAnf} = \frac{0,01}{0,24 \cdot \mu_o} = 33148$$

#### 7.4.7 Grafisches Verfahren zur AP- und $\mu$ -Bestimmung

Eisenkreis mit Luftspalt

- Luftspalt erhöht die Sättigungsfeldstärke, z.B. bei der Vormagnetisierung durch Gleichstrom (Netzteil-Glättungsdrossel).  
Luftspalt linearisiert Übertragerkennlinie (z.B. Übertrager für Sinusspannungen)



Es gilt

$$\begin{aligned} \Theta &= \Phi(R_{mL} + R_{mFe}) \\ &= H_L \cdot \ell_L + H_{Fe} \cdot \ell_{Fe} \end{aligned}$$

Problem:  $R_{Fe}$  und  $R_{mL}$  ist als Funktion  $B=f(H)$  als Grafik gegeben.

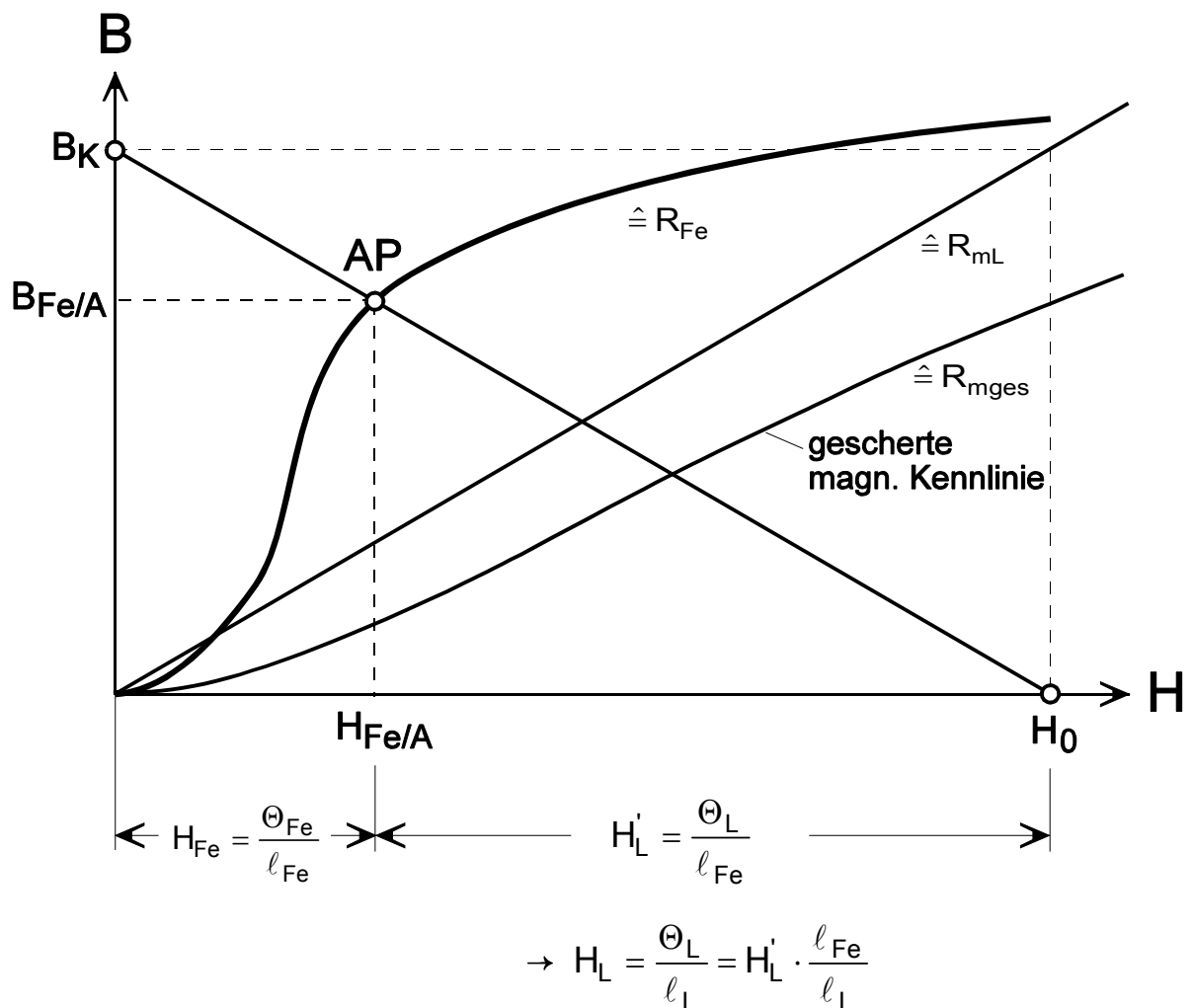
1.) Ermittlung der Luftspaltgeraden

Bedingung:  $A_{Fe} = A_L$ ;  $\Phi_{Fe} = \Phi_L$  also:  $B_{Fe} = B_L$  und  $H_L = \frac{B_L}{\mu_o} = \frac{B_{Fe}}{\mu_o}$

1. Leerlauf:  $B_{Fe} = 0 \rightarrow H_{Fe0} = \frac{\Theta}{\ell_{Fe}} \quad (H_0)$

2. Kurzschluss:  $H_{Fe} = 0 \rightarrow B_{FeK} = \frac{\Theta \cdot \mu_o}{\ell_L} \quad (B_K)$

2.)  $H_{Fe0}$  und  $B_{FeK}$  ergeben die Luftspaltgerade und der Schnittpunkt der Luftspaltgeraden mit der Magnetisierungskurve ist der Arbeitspunkt AP



Konstruktion der Scherung: (vgl. el. Stromkreis: Kennlinie von Diode mit Vorwiderstand konstruieren)

- Luftspaltgerade spiegeln, d.h. als linearer Widerstand einzeichnen, 2 Geraden-Punkte (0/0) und ( $B_K/H_0$ ).
- Feldstärken punktweise addieren, es ergeben sich jeweils Punkte der neuen Kennlinie, der gescherten Kennlinie.

## 7.5 Induktivität

### 7.5.1 Selbstinduktivität

(Vergleiche: Elektrische Kapazität)

Die Selbstinduktivität oder kurz Induktivität eines Leiters ist allg. das Verhältnis aus magn. Fluss und erregendem Strom, d.h. Fluss bezogen auf den Strom.

Die Selbstinduktivität ist abhängig von Geometrie und Materialeigenschaften.

Analogie zum elektrischen Feld:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{A \cdot D}{E \cdot d} = \frac{A \cdot D}{\frac{D}{\varepsilon} \cdot d} = \varepsilon \cdot \frac{A}{d}$$

Vertauschung

$$U \rightarrow I; \quad Q \rightarrow \Phi; \quad D \rightarrow B; \quad E \rightarrow H; \quad \varepsilon \rightarrow \mu \quad \text{ergibt:} \quad L = \frac{\Phi}{I}$$

### 7.5.2 Spulen-Induktivität

Gesamtspulenfluss  $\Psi = N \cdot \Phi$

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N \cdot \Phi}{I} \quad \text{mit} \quad \Phi = \frac{\Theta}{R_{\text{mges}}} = \frac{N \cdot I}{R_{\text{mges}}}$$

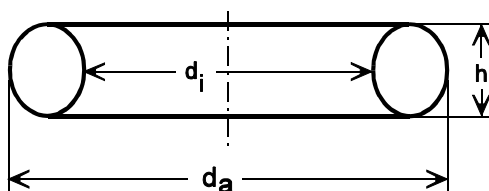
$$L = \frac{N \cdot N \cdot I}{I \cdot R_{\text{mges}}} = N^2 \cdot \frac{1}{R_{\text{mges}}} = N^2 \cdot A_L$$

$$L = N^2 \frac{\mu_0 \mu_r \cdot A}{\ell}$$

$$[L] = \frac{Vs}{A} = H \quad \text{Henry}$$

$$\text{magn. Leitwert} \quad \Lambda = \frac{1}{R_m} = A_L$$

Beispiel: Ringkernspule  
Ringkern N30 (Werte aus Datenbuch)



$$d_a = 34\text{mm}$$

$$d_i = 20\text{mm}$$

$$h = 12,5\text{mm}$$

$$\ell_e = 82\text{mm}$$

$$A_e = 83\text{mm}^2$$

$$A_L = 5000\text{nH}$$

$$H_{\text{max}} = 50 \frac{A}{m}$$

$$N = 20\text{Wdg.}$$

Gesucht:  $L, \mu_e, I_{\text{max}}, B_{\text{max}}$

Index  $_e$  = effektive Werte

$$A_L = \frac{1}{R_{\text{mges}}} = \frac{\mu_o \cdot \mu_{\text{re}} \cdot A_e}{\ell_e}$$

$$\rightarrow \mu_{\text{re}} = \frac{A_L \cdot \ell_e}{A_e \cdot \mu_o}$$

$$= \frac{5000 \cdot 10^{-9} \frac{\text{Vs}}{\text{A}} \cdot 82 \cdot 10^{-3} \text{m}}{83 \cdot 10^{-6} \text{m}^2 \cdot 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{A} \cdot \text{m}}} = 3930$$

$$I_{\text{max}} = \frac{H_{\text{max}} \cdot \ell_e}{N} = \frac{50 \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot 82 \cdot 10^{-3} \text{m}}{20} = 0,2 \text{A}$$

$$B_{\text{max}} = \mu_o \cdot \mu_{\text{re}} \cdot H_{\text{max}} = 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{A} \cdot \text{m}} \cdot 3930 \cdot 50 \frac{\text{A}}{\text{m}} = 247 \text{mT}$$

$$L = N^2 \cdot A_L = 20^2 \cdot 5000 \text{nH} = 2 \text{mH}$$

## 2. Beispiel: Zylindrische Luftspule

$$N = 30 \text{Wdg.}, A = 28,3 \cdot 10^{-6} \text{m}^2, \ell_{\text{Sp}} = 1,5 \text{cm} \quad \text{Gesucht: } L$$

$$L = \frac{N^2}{R_m} = \frac{N^2 \cdot \mu_o \cdot A}{\ell_{\text{Sp}}} = \frac{30^2 \cdot 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{A} \cdot \text{m}} \cdot 28,3 \cdot 10^{-6} \text{m}^2}{0,015 \text{m}} \\ = 2,13 \mu\text{H}$$

### 7.5.3 L-Bestimmung

a) mit  $A_L$  -Wert aus Datenbuch

$$L = N^2 \cdot A_L ; \quad A_L = \frac{\mu_o \cdot A_e}{\ell_e} = \frac{1}{R_{\text{me}}} \quad \text{eff. Werte der Gesamtanordnung} \\ \text{z.B. mit Luftspalt}$$

b) aus Kennlinien (bei nichtlinearem Zusammenhang)

Mit  $\Theta, \ell_{\text{Fe}}, \ell_L \rightarrow H_o \text{ und } B_K \text{ (Luftspaltgerade)}$   
 $\rightarrow \text{Arbeitspunkt } B_{\text{FeA}}, H_{\text{FeA}}$

$$\text{damit } \mu_{\text{rFe}} = \frac{B_{\text{FeA}}}{\mu_o \cdot H_{\text{FeA}}} \quad \text{weiter mit } \mu_{\text{rFe}}, \mu_o, \ell_L, \ell_{\text{Fe}}, A$$

die magn. Widerstände  $R_{\text{mFe}}$  und  $R_{\text{mL}}$  berechnen und

$$\text{abschließend mit } N \rightarrow L = \frac{N^2}{R_{\text{mges}}}$$

Beispiel: Bestimmung von  $A_L$ -Wert und L im Arbeitspunkt

$$\ell_{Fe} = 0,25m; \quad A = 5 \cdot 10^{-4}m^2; \quad \ell_L = 10^{-4}m; \quad N = 1000Wdg.$$

$$I = 100mA \quad (50mA, 25mA, 12,5mA)$$

$$\Theta = N \cdot I = 1000 \cdot 100 \cdot 10^{-3}A = 100A \quad (50A, 25A, 12,5A)$$

$$H_0 = \frac{\Theta}{\ell} = \frac{100A}{0,25m} = 400 \frac{A}{m} \quad (200 \frac{A}{m}, 100 \frac{A}{m}, 50 \frac{A}{m})$$

$$\text{bei } H_0 = 400 \frac{A}{m} \rightarrow B_K = \frac{\Theta \cdot \mu_o}{\ell_L} = \frac{100A \cdot 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{A \cdot m}}{10^{-4}m} = 1,26T$$

Mit  $H_0$  und  $B_K$  die Luftspaltgerade einzeichnen  $\rightarrow$  Schnittpunkt ergibt Arbeitspunkt

$$\text{Abgelesen: } B_{FeA} = 0,72T; \quad H_{FeA} = 170 \frac{A}{m}$$

$$\mu_{rFe} = \frac{B_{Fe/A}}{\mu_o \cdot H_{Fe/A}} = \frac{0,72T}{1,257 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{A \cdot m} \cdot 170 \frac{A}{m}} = 3370$$

$$R_{mFe} = \frac{\ell_{Fe}}{\mu_o \cdot \mu_{rFe} \cdot A} = \frac{0,25m}{1,257 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{A \cdot m} \cdot 3370 \cdot 5 \cdot 10^{-4}m^2} = 118,1 \cdot 10^3 \frac{A}{Vs}$$

$$R_{mL} = \frac{\ell_L}{\mu_o \cdot A} = \frac{10^{-4}m}{1,257 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{A \cdot m} \cdot 5 \cdot 10^{-4}m^2} = 159,2 \cdot 10^3 \frac{A}{Vs}$$

$$R_{mges} = R_{mFe} + R_{mL} = 277,3 \cdot 10^3 \frac{A}{Vs}$$

$$A_L = \frac{1}{R_{mges}} = 3606nH$$

$$L = N^2 \cdot A_L = 1000^2 \cdot 3606nH = 3,6H$$

Wichtig: Bei anderen Strömen andere  $\mu_{rFe}$ , L, etc.

Ergebnistabelle:

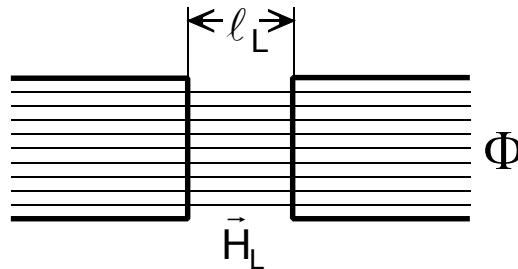
$\Theta$	$B_{FeA}$	$H_{FeA}$	$\mu_{rFe}$	$R_{mFe}$	$R_{mL}$	$A_L$	L
A	T	A/m		A/Vs	A/Vs	nH	H
100	0,72	170	3370	$118,1 \cdot 10^3$	$159,2 \cdot 10^3$	3606	3,6
50	0,34	88,5	3056	$130,2 \cdot 10^3$	"	3460	3,46
25	0,14	53	2101	$189,3 \cdot 10^3$	"	2870	2,87
12,5	0,05	35	1136	$350,2 \cdot 10^3$	"	1960	1,96



## 7.6 Kräfte im Magnetfeld

Magnetischer Eisenkreis mit Luftspalt → Elektromagnete, Schaltgeräte etc.

Kraft im Luftspalt



Analogie  
el. Feld

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot Q \Rightarrow dF = EdQ = E \cdot CdU_C = \frac{U_C}{d} \cdot CdU_C$$

$$\Rightarrow F = \frac{C}{d} \int_0^{U_C} U_C \cdot dU_C = \frac{C}{d} \cdot \frac{1}{2} U_C^2$$

magn. Feld

$$\vec{F} = \vec{H} \cdot \Phi \Rightarrow dF = Hd\Phi = H \cdot LdI = \frac{L}{\ell} \cdot LdI$$

$$\Rightarrow F = \frac{L}{\ell} \int_0^I I \cdot dI = \frac{L}{\ell} \cdot \frac{1}{2} I^2$$

Umrechnung auf Feldgrößen

$$F = \frac{L}{\ell} \cdot \frac{I^2}{2} = \frac{\Phi_L}{I} \cdot I \cdot \frac{H_L}{2} = \frac{\Phi_L \cdot H_L}{2} = \frac{B \cdot A \cdot B}{2 \cdot \mu_0} = \frac{B_L^2 \cdot A}{2 \cdot \mu_0} = \frac{\Phi_L^2}{2 \cdot \mu_0 \cdot A}$$

Anwendung: Relais für Gleich- und Wechselstrom, Dreheisenmesswerk, wg.  $\Phi^2$  (bzw.  $I^2$ ) entfällt die Vorzeichenabhängigkeit.

Beispiel: Flachrelais

$$A_{Fe} = 1 \text{ cm}^2$$

$$A_L = 5 \text{ cm}^2$$

$$\ell_L = 0,3 \text{ mm}$$

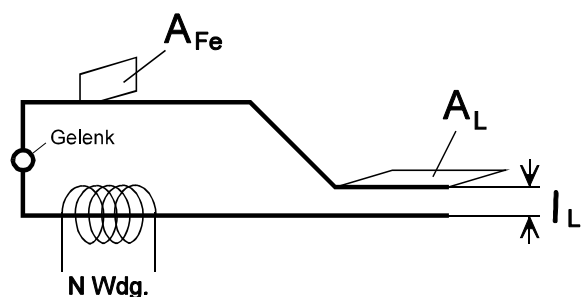
$$\ell_{Fe} = 0,2 \text{ m}$$

$$\mu_{rFe} = 2000$$

$$N = 1000 \text{ Wdg.}$$

$$I = 0,24 \text{ A}$$

keine Streuung



Gesucht: Anziehungskraft F

$$\Theta = I \cdot N = 240 \text{ A}$$

$$R_{\text{mFe}} = 79,5 \cdot 10^4 \frac{\text{A}}{\text{Vs}}; \quad R_{\text{mL}} = 47,7 \cdot 10^4 \frac{\text{A}}{\text{Vs}} \quad \rightarrow \quad R_{\text{mges}} = 127,2 \cdot 10^4 \frac{\text{A}}{\text{Vs}}$$

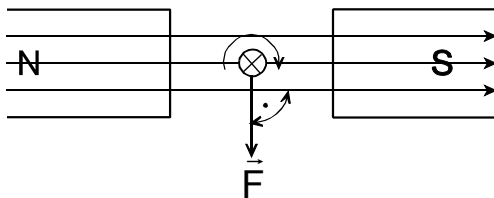
$$\Phi = \frac{\Theta}{R_{\text{mges}}} = \frac{240 \text{ A}}{127,2 \cdot 10^4 \frac{\text{A}}{\text{Vs}}} = 1,89 \cdot 10^{-4} \text{ Vs}; \quad B_L = \frac{\Phi}{A_L} = 0,38 \text{ T}$$

$$H_L = \frac{B_L}{\mu_0} = 0,3 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad \rightarrow \quad F_L = \frac{\Phi \cdot H_L}{2} = 28,4 \frac{\text{Ws}}{\text{m}} = 28,4 \text{ N}$$

### 7.6.1 Kraftwirkung auf bewegte Ladungen (el. Strom)

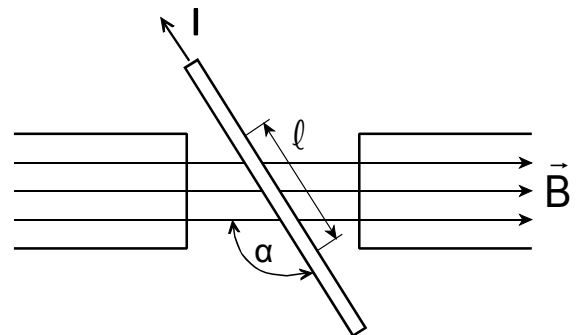
→ Kraft auf el. Leiter und Elektronen: z.B. E-Motor, Stromschienen, Bildröhre (TV, Monitor)

### 7.6.2 Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld



Kraft immer senkrecht zu den Feldlinien

$$F = I \cdot \ell \cdot B \cdot \sin \alpha$$



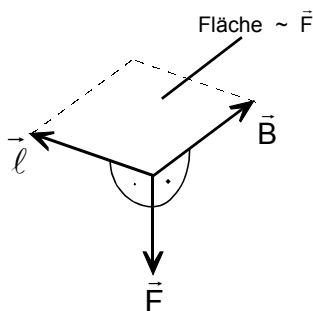
F ist richtungsabhängig, Polarität von I und B bestimmen Richtung von F.

Technische Stromrichtung beachten.

Eindeutige Angabe der Krafrichtung mit vektorieller Angabe.

def.  $\vec{\ell}$  = Länge  $\ell$  in Richtung von Strom I

$$\vec{F} = I (\vec{\ell} \times \vec{B}) \quad \text{Kreuzprodukt, Vektorprodukt}$$

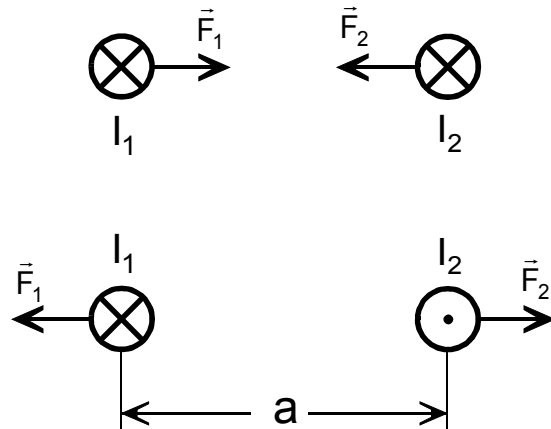


$$|\vec{F}| = F = I \cdot \ell \cdot B \cdot \sin \alpha$$

d.h. bei  $90^\circ$ :  $F_{\text{max}}$

Wichtige Anwendungen: Drehspulmesswerk, Elektromotor u.a.

### 7.6.3 Kraft zwischen 2 parallelen stromdurchflossenen Leitern



$I_2$  erzeugt das Feld für den Leiter mit dem Strom  $I_1$  mit dem Abstand  $a$ .

$$B_2 = \mu_0 \cdot H_2 = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi a}$$

$$F_1 = I_1 \cdot \ell \cdot B_2 \cdot \sin \alpha = I_1 \cdot \ell \cdot I_2 \cdot \frac{\mu_0}{2\pi a}$$

mit  $I_1 = I_2 = I$

$$F_1 = I^2 \cdot \frac{\ell}{2\pi a} \cdot \mu_0$$

Anwendungen:

☞ Def. des Ampere:  $\ell=1\text{m}$ ;  $a=1\text{m}$ ;  $I=1\text{A}$   $\rightarrow$   $F=2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$

☞ Kraftberechnung bei Stromschienen im Kurzschlussfall

Beispiel: Kurzschlussstrom  $I_K=50 \cdot 10^3 \text{ A}$ ; Abstand der Schienen  $a=0,25\text{m}$   
 Schienenlänge  $1\text{m}$   
 Wie groß ist die Kraft im Kurzschlussfall?

$$F = I^2 \cdot \frac{\ell}{2\pi a} \cdot \mu_0 = (50 \cdot 10^3 \text{ A})^2 \cdot \frac{1 \text{ m}}{2\pi \cdot 0,25\text{m}} \cdot 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

$$= 2 \cdot 10^3 \text{ N}$$

### 7.6.4 Kraft auf frei bewegte Ladung

$\rightarrow$  Elektronenablenkung

Es ist unerheblich, ob eine Ladung im Leiter geführt wird, oder frei im Raum fliegt.  
 Die Kraft ist stets senkrecht zur Bewegungsrichtung und senkrecht zum Magnetfeld!

Bewegte Ladung  $dQ$   $I = \frac{dQ}{dt}$

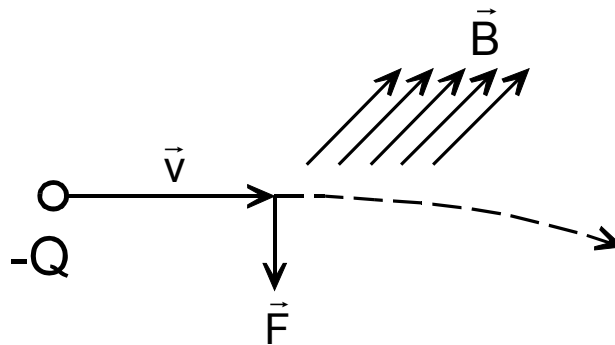
$$\rightarrow d\vec{F} = \frac{dQ}{dt} \cdot (d\vec{\ell} \times \vec{B}) = dQ \underbrace{\left( \frac{d\vec{\ell}}{dt} \times \vec{B} \right)}$$

$\vec{v}$  = Augenblicksgeschwindigkeit der Ladung  $dQ$

Die gesamte Kraft  $F$  auf die bewegte Ladung  $Q$  erhält man durch Integration

$$\boxed{\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B})} \quad \text{Lorentzkraft}$$

Elektronenablenkung



### 7.6.5 Hall-Generator

Ausnutzung des Hall-Effektes (E.A. Hall, 1880)

Hall-Generatoren bestehen aus einer polykristallinen Halbleiterschicht aus Indium- oder Iridiumverbindungen aber auch aus Silizium oder Germanium.

Die Halbleiterschicht hat zwei Steuerstromanschlüsse und zwei Kontakte zum Abgriff der Hall-Spannung.

Wird der Halbleiter von einem Magnetfeld durchsetzt, so wirkt auf den Steuerstrom die **Lorentzkraft**, d.h. die Ladungsträger werden von ihrer ursprünglichen Bahn (ohne Magnetfeld) abgelenkt und es entsteht die Hallspannung.

→ Die Ablenkung von Ladungsträgern im Magnetfeld verursacht deren Trennung, dadurch entsteht eine Potentialdifferenz, d.h. eine el. Spannung.

Die Polarität der Hallspannung ist abhängig von der Art der Ladungsträger (p-Halbleiter oder n-Halbleiter).

Hallspannung

$$\boxed{U_H = \frac{K_H}{d} \cdot I_{St} \cdot B}$$

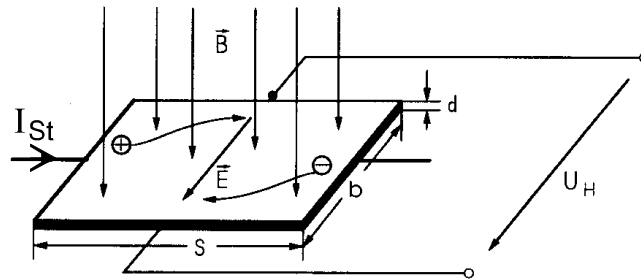
$K_H$  = Hallkonstante

$d$  = Schichtdicke des Halbleiters

$I_{St}$  = Steuerstrom

$B$  = Flußdichte senkrecht zum Halbleiter

## Hallgenerator



Bis zu Steuerstromstärken  $I_{St} \approx 500 \text{ mA}$  und Flussdichten  $B \approx 1 \text{ T}$  besteht Proportionalität zwischen  $B$  und  $U_H$ . Je nach Halbleiter sind Hallspannungen bis zu  $500 \text{ mV}$  möglich. In Metallen tritt eine sehr kleine, technisch kaum nutzbare Hallspannung auf.

Anwendungen:

- Messung großer Gleich- und Wechselströme mittels Magnetfeld des Leiters (Stromwandler)
- Messung von Gleichstromleistung (Hall-Generator als Multiplizierer)
- kontaktloser Schalter (Geber für Zündzeitpunkt in Otto-Motoren)

Neben dem Hallgenerator kommt zur Messung von magnetischen Flüssen noch die **Feldplatte** zum Einsatz. Die Feldplatte ist ein passives Bauelement, bei dem sich der el. Widerstand beim Auftreten eines magnetischen Flusses verändert.

**7.7 Energie im Magnetkreis**

Allgemeine Definition 'Energie=Kraft mal Weg' gilt auch hier:

$$\begin{aligned}
 W &= \int F ds = \int_0^{\ell_m} \underbrace{\frac{L}{\ell_m} \cdot \frac{I_L^2}{2}}_F \cdot ds \\
 &= \frac{L}{\ell_m} \cdot \frac{I_L^2}{2} = \int_0^{\ell_m} ds = \frac{L}{\ell_m} \cdot \frac{I_L^2}{2} \cdot \ell_m
 \end{aligned}$$

$$\boxed{W = \frac{L \cdot I_L^2}{2}} \text{ Energie einer Spule}$$

**7.8 Magnetische Induktion****7.8.1 Selbstinduktionsspannung**

Bekanntlich erzeugt der elektrische Strom in einem Leiter ein Magnetfeld. Jede Änderung des Stromes hat auch eine Änderung des Magnetfeldes zur Folge.

Ein sich änderndes Magnetfeld hat eine Induktionswirkung auf Ladungsträger, d.h. es werden Ladungsträger verschoben, getrennt, es wird eine el. Spannung erzeugt.

- Jede Stromänderung in einem Leiter führt zur Erzeugung einer Spannung, der sog. Selbstinduktionsspannung, die der Ursache entgegen wirkt (Lenz'sche Regel).

Ein Leiter ist eine Spule mit einer gestreckten Windung, demnach gilt vorhergesagtes auch für allg. Spulen mit entsprechend größerer Wirkung.

Induktionsgesetz 
$$u_i = -L \cdot \frac{di_L}{dt}$$
  $\frac{di_L}{dt} =$  Stromänderungsgeschwindigkeit

analog zum el. Feld:  $i_c = C \cdot \frac{du_c}{dt}$  Vertauschung von  $i \leftrightarrow u$  und  $L \leftrightarrow C$  ergibt das Induktionsgesetz.

Die induzierte Spannung wirkt der äußeren Spannung entgegen, daher das neg. Vorzeichen. Als Summe liegt an der Spule die Spannung

$$u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

Durch Integration kann der Spulenstrom berechnet werden:  $i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt + i_L(0)$

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N \cdot \Phi}{I} ; \quad I = \frac{N \cdot \Phi}{L} = i_L$$

mit

$$u_L = N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

Induktionsgesetz beschrieben mit der Flussänderung

### 7.8.2 Auf- und Entmagnetisierung von idealen Induktivitäten

Aufmagnetisieren:  $U_L > 0$

Entmagnetisieren:  $U_L < 0$

Näherung:  $R_L \rightarrow 0, u_R \ll u_L$

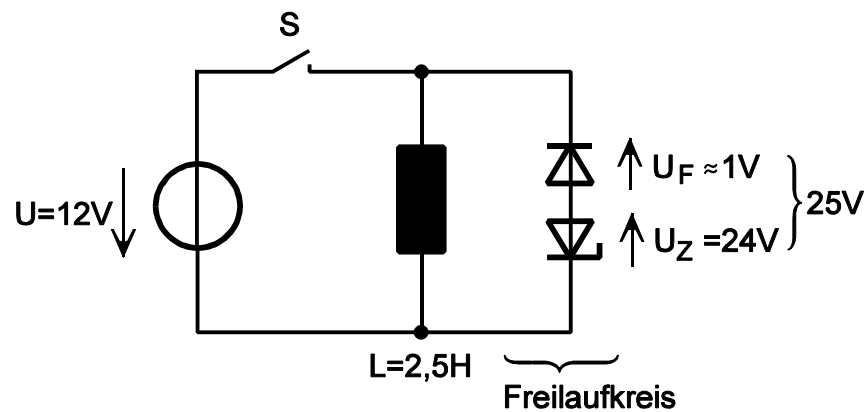
Auf- und Entmagnetisierung mit konstanter Spannung  $u_L = U_L = \text{konst}$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t_1} U_L dt + i_L(0) = \frac{U_L \cdot (t_1 - t_0)}{L} + i_L(0)$$

$\Delta i_L$

$\Rightarrow$  linearer Stromanstieg

$$\Delta I = \frac{U_L \cdot \Delta t}{L}$$

Beispiel 1:

- a)  $i_L(t_1) = ?$  wenn  $i_L(t=0) = 0$ ;  $t_1 = \Delta t_1 = 20\text{ms}$

$$i_L(t_1) = \frac{U_L \cdot \Delta t_1}{L} + 0 = \frac{12\text{V} \cdot 20\text{ms}}{2,5\text{H}} = 96\text{mA}$$

- b)  $\Delta t_2$  für vollkommene Entmagnetisierung  $\rightarrow i_L(t_2) = 0$

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta I_{L/E}}{U_{L/E}} \cdot L = \frac{-96\text{mA}}{-25\text{V}} \cdot 2,5\text{H} = 9,6\text{ms}$$

(ohne Z-Diode:  $\Delta t_2 = 240\text{ms}$ )

- c) Gespeicherte Energie

$$W_L = \frac{L \cdot I_L^2}{2} = \frac{2,5\text{H} \cdot (96\text{mA})^2}{2} = 11,5\text{mWs}$$

- d) Verlustleistung der Dioden beim Entmagnetisieren bei einer Taktfrequenz  $f=10\text{Hz}$

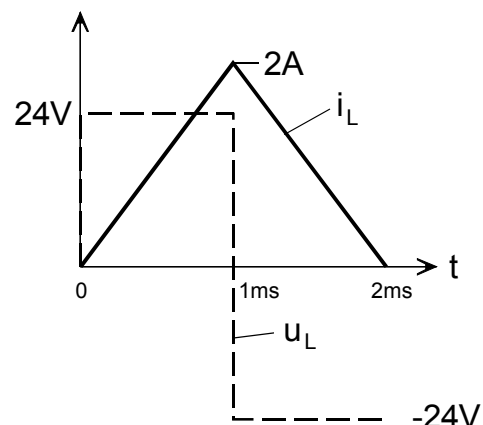
$$P_V = \frac{W_L}{T} = \frac{11,5\text{mWs}}{100\text{ms}} = 115\text{mW}$$

Beispiel 2:

Wie groß ist die Induktivität  $L$ , wenn folgender Stromverlauf vorliegt?

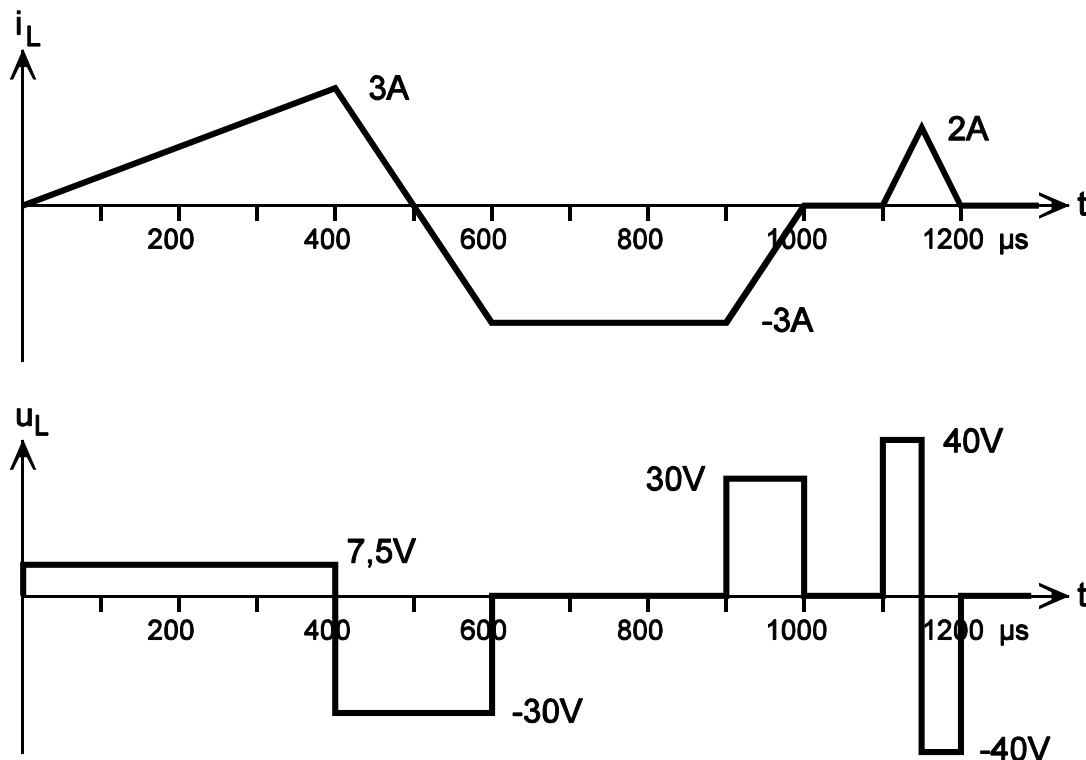
$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = U_L = 24\text{V}$$

$$\rightarrow L = \frac{U_L \cdot \Delta t}{\Delta I_L} = \frac{24\text{V} \cdot 1\text{ms}}{2\text{A}} = 12\text{mH}$$



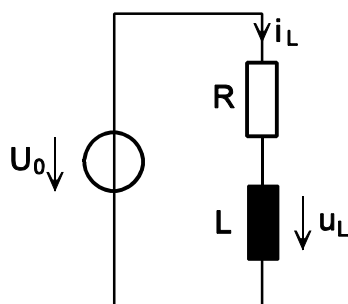
Beispiel 3:

Zeichne dem Spannungsverlauf  $u_L(t)$  entsprechend den gegebenen Stromverlauf bei einer idealen Induktivität  $L=1\text{mH}$ .



$$\begin{aligned}
 U_{L1} &= 1\text{mH} \frac{3\text{A}}{400\mu\text{s}} = 7,5\text{V}; & U_{L2} &= 1\text{mH} \frac{-6\text{A}}{200\mu\text{s}} = -30\text{V}; & U_{L3} &= 1\text{mH} \frac{0\text{A}}{300\mu\text{s}} = 0; \\
 U_{L4} &= 1\text{mH} \frac{3\text{A}}{100\mu\text{s}} = 30\text{V}; & U_{L5} &= 1\text{mH} \frac{0\text{A}}{50\mu\text{s}} = 0; & U_{L6} &= 1\text{mH} \frac{2\text{A}}{50\mu\text{s}} = 40\text{V}; \\
 U_{L7} &= 1\text{mH} \frac{-2\text{A}}{50\mu\text{s}} = -40\text{V}; & U_{L8} &= 0;
 \end{aligned}$$

### 7.8.3 Auf- und Entmagnetisierung von realen Induktivitäten mit R und L



$$R = R_i + R_L$$

$\begin{array}{cc} | & | \\ \text{Quelle} & \text{Spulenwiderstand} \end{array}$

Masche  $U_0 - L \frac{di_L}{dt} - i_L \cdot R = 0$



Rechnung wie bei der Aufladung des Kondensators:

→ Vertauschung  $i \leftrightarrow u$

Zeitkonstante

$$\tau = \frac{L}{R}$$

### 1. Aufmagnetisierung

$$i_{L/A}(t) = \frac{U_0}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

↓

$$i_{\max} = i_L(\infty)$$

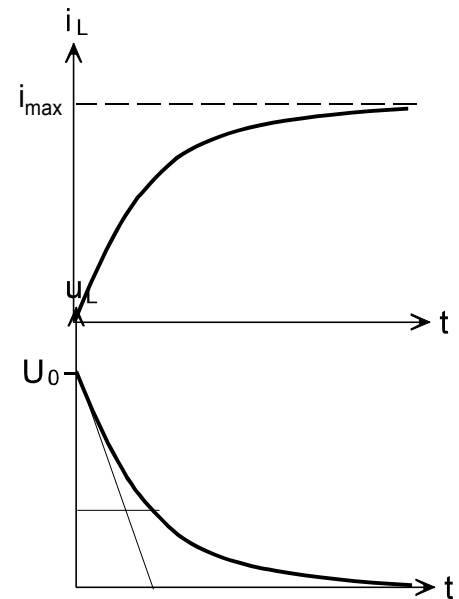
$$u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt} = L \cdot \left(0 - \frac{U_0}{R} \cdot (-) \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$u_{L/A} = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

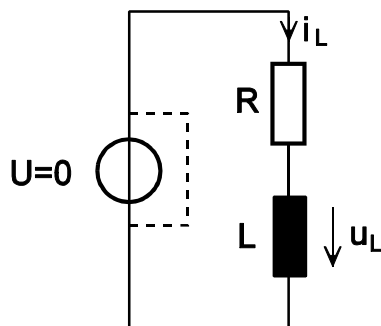
↓

$$u_L(0)$$

Spannung nimmt ab

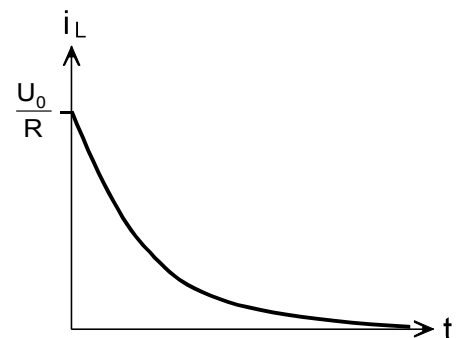


### 2. Entmagnetisierung



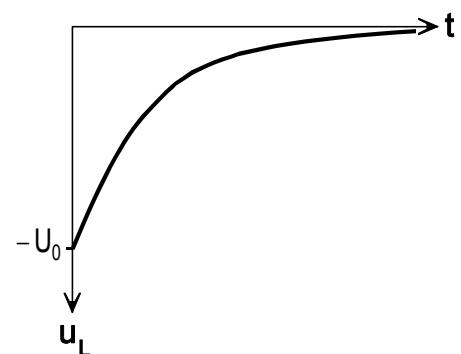
$$i_{L/E} = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

↓  
 $i_{\max}$



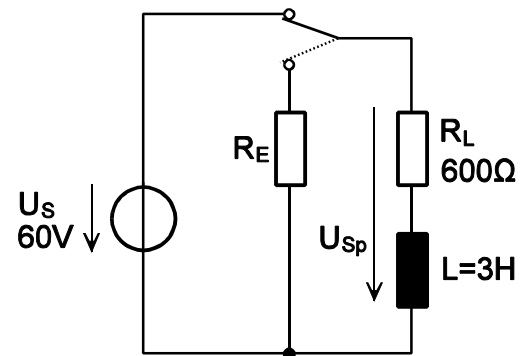
Der Strom fließt im ersten Moment weiter.

$$u_{L/E} = L \cdot \frac{di_{L/E}}{dt} = -U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$



Beispiel

- a) Auf wieviel % von  $i_L(\infty)$  ist die Spule nach  $t_A = 8\text{ms}$  aufgeladen?
- b) Wie lange dauert die Entmagnetisierung auf 10% von  $i_L(\infty)$  bei  $R_E = 0\Omega$  und  $200\Omega$ ?
- c) Welche max. Spannung  $U_{Sp}$  tritt im Abschaltmoment auf?



a)  $i_L(t) = i_L(\infty) \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

$$\rightarrow \frac{i_L(8\text{ms})}{i_L(\infty)} = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = (1 - e^{-\frac{8\text{ms}}{3\text{H}/600\Omega}}) = 0,798$$

$$\hat{=} 79,8\%$$

b)  $i_{L/E} = i_L(\infty) \cdot e^{-\frac{t_E}{\tau}}$

$$\rightarrow \frac{i_{L/E}}{i_L(\infty)} = e^{-\frac{t_E}{\tau}} = 0,1 \rightarrow t_E = -\tau \cdot \ln 0,1$$

$$= -\frac{3\text{H}}{600\Omega} \ln 0,1 = 11,5\text{ms}$$

$$t_{E(200\Omega)} = -\frac{3\text{H}}{800\Omega} \ln 0,1 = 8,6\text{ms}$$

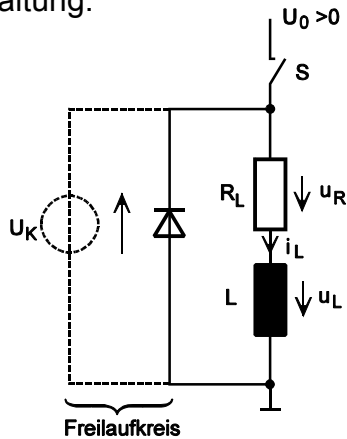
c)  $R_E = 0 \rightarrow U_{Sp}(0) = \frac{-U_s}{R_L} \cdot R_E = 0$

$$R_E = 200\Omega \rightarrow U_{Sp}(0) = \frac{-60\text{V}}{600\Omega} \cdot 200\Omega = -20\text{V}$$

$$R_E = 10\text{k}\Omega \rightarrow U_{Sp}(0) = -1000\text{V}$$

### 7.8.4 Abschalten von aufmagnetisierten Induktivitäten mit Gegenspannung

Schaltung:



$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \cdot \dot{i} \quad (1)$$

Masche

$$u_L + i_L \cdot R_L + U_K = 0$$

$$L \cdot \dot{i}_L + i_L R_L + U_K = 0 \rightarrow \boxed{\dot{i}_L + i_L \cdot \frac{R_L}{L} = \frac{-U_K}{L}} \quad (2) \text{ Dgl.}$$

$$\text{Lösungsansatz mit folgender Funktion } i_L(t) = k_1 \cdot e^{k_2 \cdot t} + k_3 \quad (3)$$

bei  $t=0$  abschalten

$$1. \text{ Bedingung mit (2)} \quad i_L(t=0) = \frac{U_o}{R_L} = k_1 \cdot 1 + k_3 \quad (4)$$

→ Strom fließt im Abschaltmoment weiter

$$2. \text{ Bedingung} \quad U_K = \text{konst.} \Rightarrow \frac{dU_K}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \Rightarrow \dot{i}_L + i_L \frac{R_L}{L} = 0$$

$$k_1 k_2^2 \cdot 1 + k_1 k_2 \cdot \frac{R_L}{L} = 0 \quad (5)$$

$$3. \text{ Bedingung} \quad \text{Dgl. (2) für } t=0$$

$$k_1 k_2 \cdot 1 + 0 + (k_1 \cdot 1 + k_3) \frac{R_L}{L} = -\frac{U_K}{L} \quad (6)$$

$$\text{aus (5)} \quad k_1 k_2^2 \cdot 1 + k_1 k_2 \cdot \frac{R_L}{L} = 0$$

$$k_1 k_2 k_2 = -k_1 k_2 \frac{R_L}{L}$$

$$k_2 = -\frac{R_L}{L}$$

$$\rightarrow \boxed{\tau = \frac{L}{R_L}}$$

$$(4) \rightarrow (6) \quad k_1 \cdot (-) \frac{R_L}{L} + \frac{U_o}{R_L} \frac{R_L}{L} = -\frac{U_K}{L} \rightarrow k_1 = \frac{U_o + U_K}{R_L}$$

mit (4)

$$\frac{U_o}{R_L} = \frac{U_o + U_K}{R_L} + k_3 \rightarrow k_3 = \frac{U_o}{R_L} - \frac{U_o + U_K}{R_L} = -\frac{U_K}{R_L}$$

 $k_1, k_2, k_3 \rightarrow (3)$  ergibt:

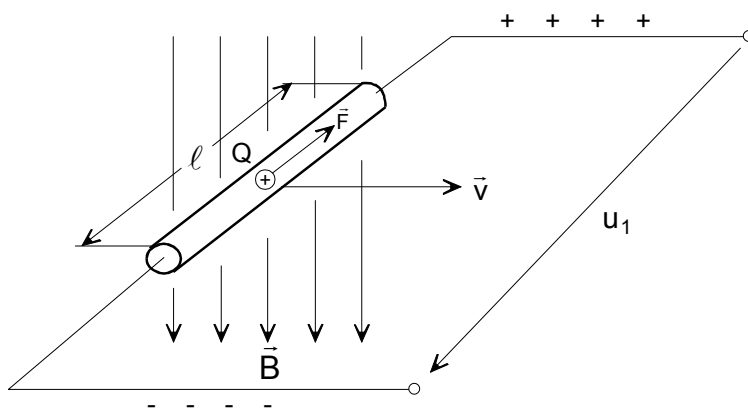
$$i_l(t) = \frac{U_o + U_K}{R_L} \cdot e^{-\frac{t}{L/R_L}} - \frac{U_K}{R_L}$$

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L}{dt} = L \cdot \frac{U_o + U_K}{R_L} \cdot \left(-\frac{R_L}{L}\right) e^{-\frac{t}{L/R_L}} - 0 \rightarrow$$

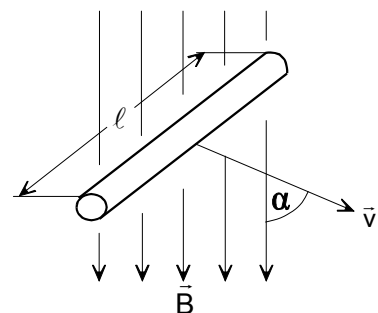
$$u_L(t) = -(U_o + U_K) \cdot e^{-\frac{t}{L/R_L}}$$

### 7.8.5 Bewegung eines Leiters (Leiterschleife) im Magnetfeld

Lineare Bewegung



$\ell$  = Leiterlänge  
 $ds$  = Wegelement  
 $v$  = Geschwindigkeit  
 $B$  = Flussdichte  
 $\alpha$  = Winkel des Weges zu  $\vec{B}$



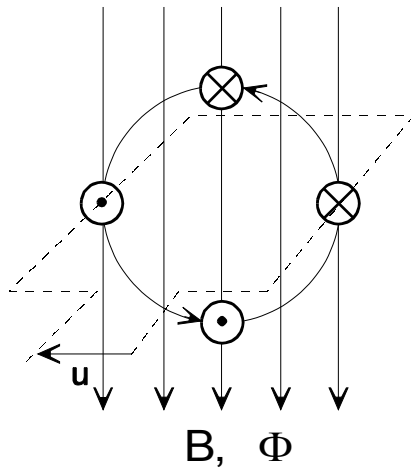
Induzierte Spannung (1 Schleife):

$$u_1 = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{B \cdot dA \cdot \sin \alpha}{dt} = -\frac{B \cdot \ell \cdot ds \cdot \sin \alpha}{dt} = -B \cdot \ell \cdot v \cdot \sin \alpha$$

N Leiterschleifen:

$$u_N = -N \cdot B \cdot \ell \cdot v \cdot \sin \alpha$$

### 7.8.6 Rotation einer Leiterschleife im homogenen Magnetfeld



Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

(Abgriff der induzierten Spannung  $u$  über Schleifringe)

Annahme: bei  $t=0$  steht die Fläche  $A$  der Leiterschleife senkrecht zu  $B$  bzw.  $\Phi$ .  
Ausgangsposition  $\rightarrow$  Winkel  $\alpha=0$  (zwischen  $A$  und  $B$ )  
d.h. bei  $t=0$  ist  $\Phi_{\max} = B \cdot A$

Nach Drehung um  $\alpha=90^\circ$ : Vektoriell betrachtet haben  $\vec{B}$  und  $\vec{A}$  zwar zueinander einen Winkel von  $90^\circ$ , aber der magnetische Fluss, der durch die Fläche tritt, ist  $0 \rightarrow \Phi = 0$

$\rightarrow$  Der magn. Fluss durch die Leiterschleife ändert sich mit dem  $\cos$  des Drehwinkels  $\alpha$ .

$$\Phi(t) = \vec{B} \cdot \vec{A} = B \cdot A \cdot \cos \alpha(t)$$

$$\alpha = \omega \cdot t$$

Mit  $\Phi(t) = \vec{B} \cdot \vec{A} = B \cdot A \cdot \cos \omega t$  berechnet sich die induzierte Spannung:

$$u_1 = -\frac{d\Phi}{dt} = -BA \frac{d\cos \omega t}{dt}$$

$$u_1 = \underbrace{B \cdot A \cdot \omega}_{\hat{u}} \sin \omega t$$

$$u_1(t) = \hat{u} \cdot \sin \omega t$$

Bei einer Spule mit  $N$  Windungen erhält man:

$$u_N(t) = N \cdot \hat{u} \cdot \sin \omega t$$

