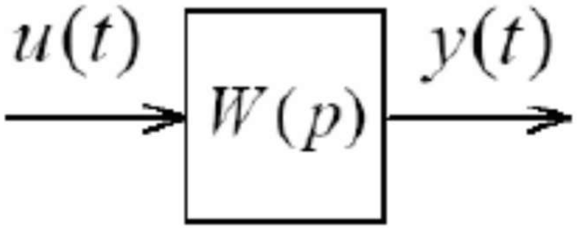
Тема 4.
Переход от передаточных функций к дифференциальным уравнениям и структурным схемам

Передаточная функция без нулей



$$W(p) = \frac{b}{A(p)}$$

$$W(p) = \frac{b}{p^n + a_n p^{n-1} + \cdots + a_3 p^2 + a_2 p + a_1}$$

$$[p^n + a_n p^{n-1} + \cdots + a_3 p^2 + a_2 p + a_1] y(t) = b u(t)$$

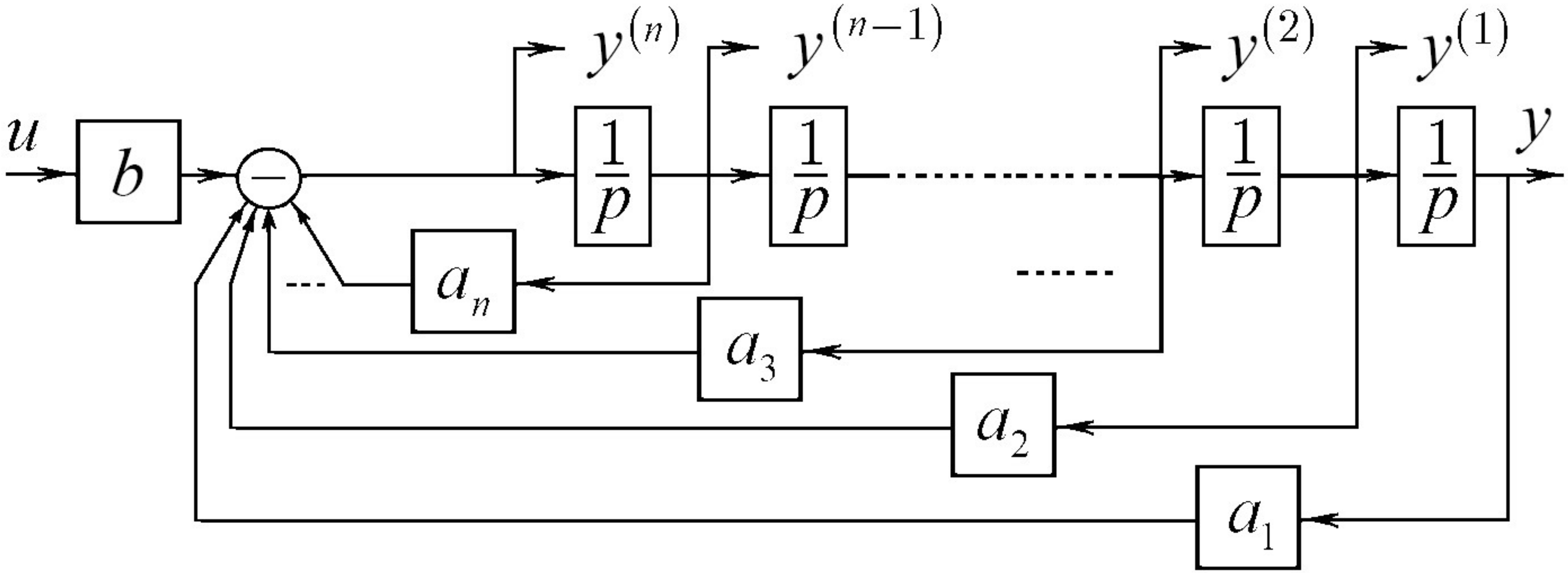
$$p = d / dt$$

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y^{(1)} + a_1 y = bu$$

Переход от дифференциального уравнения *n*-го порядка к структурной схеме

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y^{(1)} + a_1 y = bu$$

$$y^{(n)} = -a_1 y - \cdots - a_{n-1} y^{(n-2)} - a_n y^{(n-1)} + bu$$

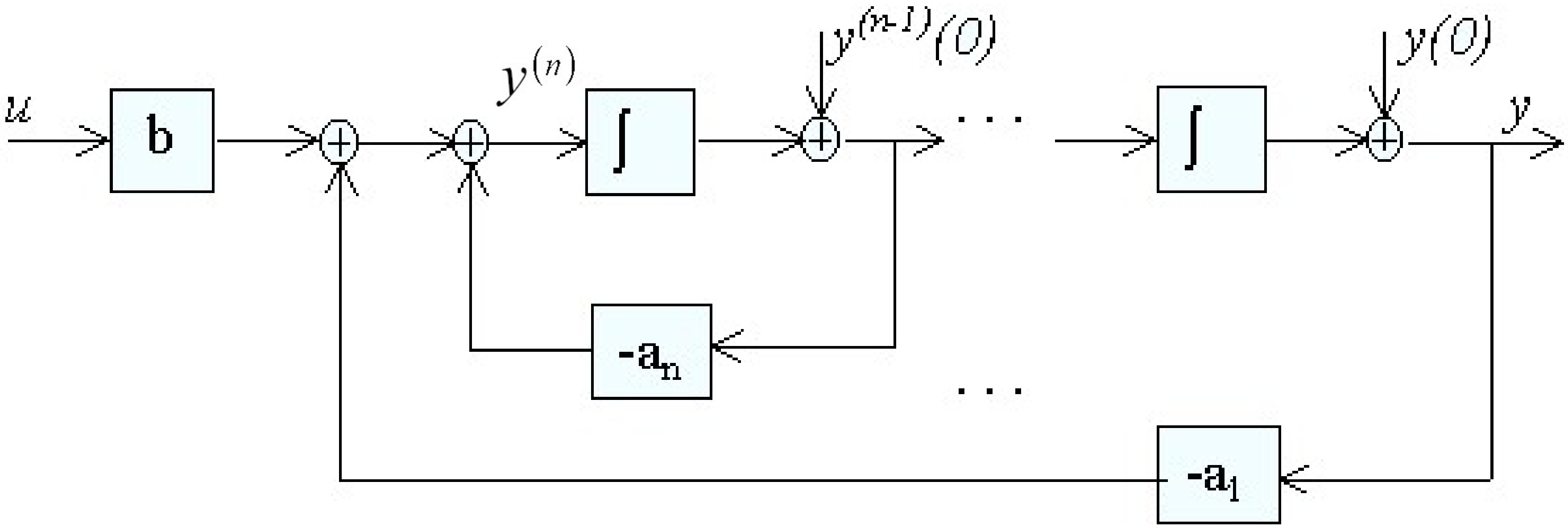


(при нулевых начальные условиях)

Переход от дифференциального уравнения n-го порядка к структурной схеме

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y^{(1)} + a_1 y = bu$$

$$y^{(n)} = -a_1 y - \cdots - a_{n-1} y^{(n-2)} - a_n y^{(n-1)} + bu$$



(при ненулевых начальные условиях)

Переход к системе дифф.уравнений в форме Коши

Дифф.уравнение *n*-го порядка:

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y^{(1)} + a_1 y = bu$$

Система *n* дифф.уравнений 1-го порядка (форма Коши):

$$\dot{X} = AX + Bu$$
$$y = CX$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = y \;\Rightarrow\; \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \;\Rightarrow\; \dot{x}_1 = x_2$$

$$x_2 = \dot{y} \;\Rightarrow\; \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \;\Rightarrow\; \dot{x}_2 = x_3$$

Матричная форма уравнений состояния

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2\,; \\ \dot{x}_2 = x_3\,; \\ \dots \\ \dot{x}_n = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - \dots - a_n x_n + bu \end{cases}$$

$$y = x_1$$

Частный случай управляемой канонической формы для дифференциальных уравнений ОУ

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ b \end{bmatrix}; \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\dim A = n \times n, \qquad \dim B = n \times 1, \qquad \dim C = 1 \times n.$$

Передаточная функция с нулям

$$u(t) \longrightarrow \boxed{W(p)} \longrightarrow y(t)$$

$$W(p) = \frac{b_n p^{n-1} + \cdots + b_3 p^2 + b_2 p + b_1}{p^n + a_n p^{n-1} + \cdots + a_3 p^2 + a_2 p + a_1}$$

$$y(t) = \frac{B(p)}{A(p)} u(t) \qquad A(p) y(t) = B(p) u(t)$$

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y^{(1)} + a_1 y$$
$$= b_n u^{(n-1)} + \cdots + b_2 u^{(1)} + b_1 u$$

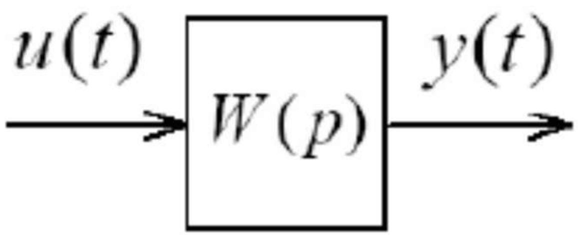
$$\dot{X} = AX + Bu$$
$$y = CX$$

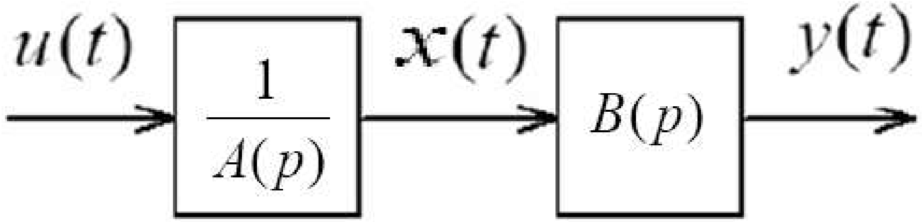
Канонические формы для дифф.уравнений ОУ

1. ***Управляемая каноническая форма для дифференциальных уравнений ОУ***

2. ***Наблюдаемая каноническая форма для дифференциальных уравнений ОУ***

Переход к управляемой канонической форме (1)





$$x(t)=\frac{1}{A(p)}u(t)$$

$$[p^n+a_n p^{n-1}+\cdots+a_3p^2+a_2p+a_1]x(t)=u(t)$$

$$x^{(n)}+a_n x^{(n-1)}+\cdots+a_2x^{(1)}+a_1x=u$$

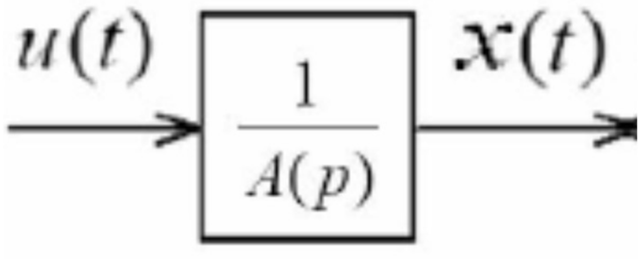
$$y(t)=B(p)x(t) \qquad y(t)=[b_n p^{n-1}+\cdots+b_3p^2+b_2p+b_1]x(t)$$

$$y=b_n x^{(n-1)}+\cdots+b_2x^{(1)}+b_1x$$

Переход к управляемой канонической форме (2)

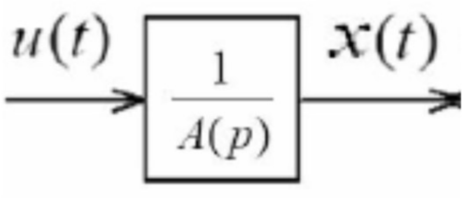
$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(n-2)} \\ x^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

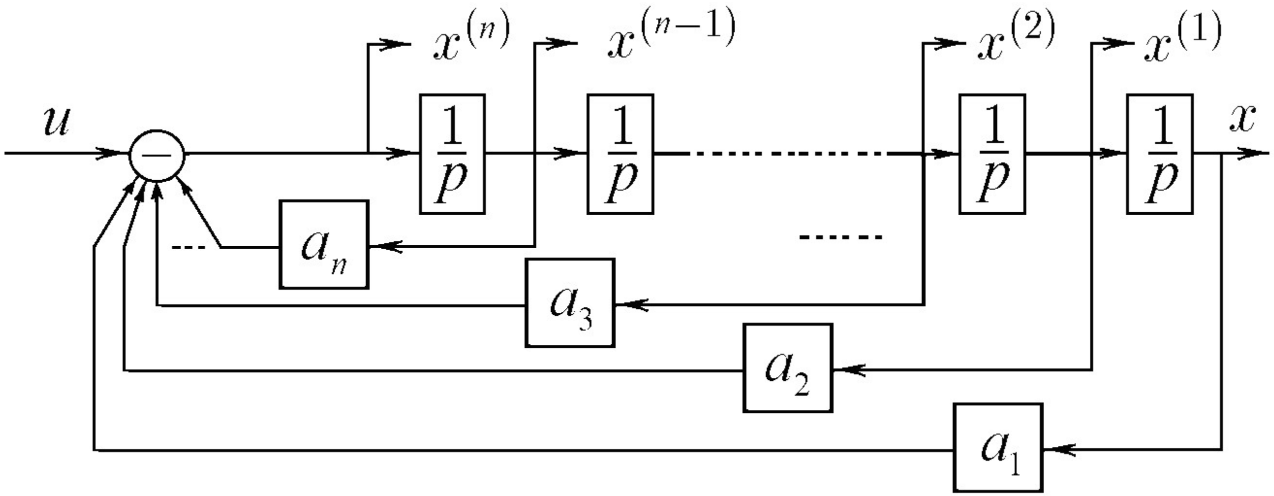
$$x^{(n)}+a_n x^{(n-1)}+\cdots+a_2 x^{(1)}+a_1 x=u$$

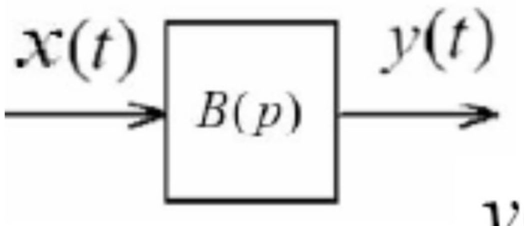


$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

Переход к управляемой канонической форме (3)







$$y(t) = B(p)x(t)$$

$$y(t) = [b_n p^{n-1} + \cdots + b_3 p^2 + b_2 p + b_1]x(t)$$

$$y = b_n x^{(n-1)} + \cdots + b_2 x^{(1)} + b_1 x$$

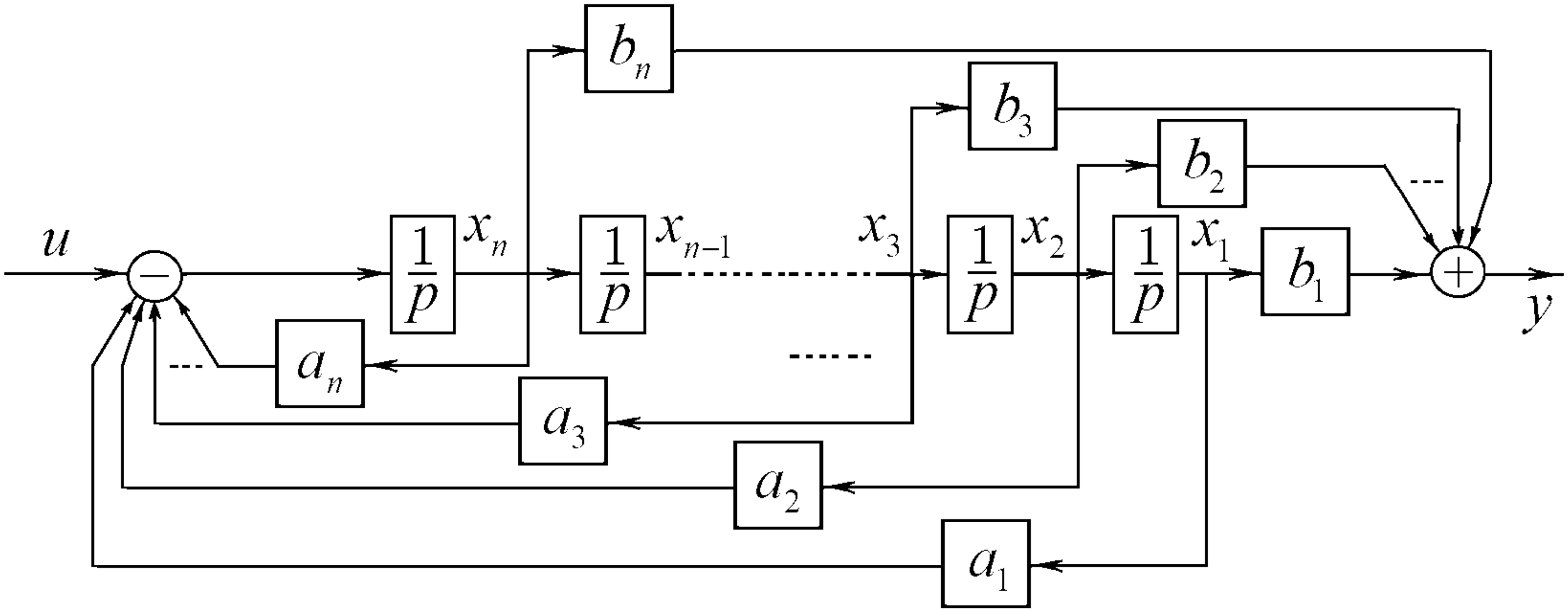
$$y = b_n x_n + \cdots + b_2 x_2 + b_1 x_1$$

Управляемая каноническая форма

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

Структурная схема для управляемой канонической формы



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

Переход к наблюдаемой канонической форме (1)

$$u(t) \longrightarrow \boxed{W(p)} \longrightarrow y(t)$$

$$W(p) = \frac{b_n p^{n-1} + \cdots + b_3 p^2 + b_2 p + b_1}{p^n + a_n p^{n-1} + \cdots + a_3 p^2 + a_2 p + a_1}$$

$$y(t) = \frac{b_3 p^2 + b_2 p + b_1}{p^3 + a_3 p^2 + a_2 p + a_1} u(t)$$

$$y^{(3)} + a_3 y^{(2)} + a_2 y^{(1)} + a_1 y = b_3 u^{(2)} + b_2 u^{(1)} + b_1 u$$

Переход к наблюдаемой канонической форме (2)

$$y^{(3)} + a_3 y^{(2)} + a_2 y^{(1)} + a_1 y = b_3 u^{(2)} + b_2 u^{(1)} + b_1 u$$

$$y^{(3)} + a_3 y^{(2)} + a_2 y^{(1)} - b_3 u^{(2)} - b_2 u^{(1)} = -a_1 y + b_1 u = x_1^{(1)}$$

$$y^{(2)} + a_3 y^{(1)} + a_2 y - b_3 u^{(1)} - b_2 u = x_1$$

$$y^{(2)} + a_3 y^{(1)} - b_3 u^{(1)} = x_1 - a_2 y + b_2 u = x_2^{(1)}$$

$$y^{(1)} + a_3 y - b_3 u = x_2$$

$$y^{(1)} = x_2 - a_3 y + b_3 u = x_3^{(1)}$$

$$y = x_3$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_1 y + b_1 u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - a_2 y + b_2 u \\ \dot{x}_3 &= x_2 - a_3 y + b_3 u \end{aligned}}$$

$$\boxed{y = x_3}$$

Переход к наблюдаемой канонической форме (3)

$$\dot{x}_1 = -a_1 x_3 + b_1 u$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - a_2 x_3 + b_2 u$$

$$\dot{x}_3 = x_2 - a_3 x_3 + b_3 u$$

$$y = x_3$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} u$$