Примеры решения экзаменационных задач
по дисциплине
“Математические методы исследования операций”

Задача 1

Некоторое предприятие выпускает продукцию двух видов: А и В. На производство одной единицы продукции А необходимо затратить 30 минут, а на одну единицу продукции В необходимо – 90 мин. Фонд рабочего времени, используемого на производство изделий, не может превышать 10 часов. Объём выпуска продукции В не может быть меньше 5 единиц. Прибыль, получаемая от реализации как единицы продукции А, так единицы В, составляет 1 у.е. Определить объёмы выпуска продукции обоих видов, при которых достигается максимальная суммарная прибыль.

1) *Определить* статус и ценность каждого ресурса.
2) Для запасов каждого из ресурсов *определить* максимальный интервал изменения, при котором решение не изменится.
3) *Определить*, изменится ли полученное решение в каждом из следующих случаев, если нет, то *найти* соответствующие значения целевой функции и переменных:
   a) *фонд рабочего времени увеличен до 11 часов;*
   b) *фонд рабочего времени уменьшен до 7 часов;*
   c) *минимальное количество продукции В увеличено до 10.*
4) *Найти* максимальные интервалы изменения величин прибыли, в пределах которых полученное решение остается оптимальным.

1 Построение математической модели задачи

Переменные:

x_1 – суточный объём выпуска продукции А,

x_2 – суточный объём выпуска продукции В.

Целевая функция:

Суммарная прибыль

$$z = 1x_1 + 1x_2 \to \max$$

Ограничения:

Объём выпуска продукции В не может быть меньше 5 единиц:

$$x_2 \geq 5;$$

фонд рабочего времени, используемого на производство изделий, не может превышать 10 ч:

$$\frac{1}{2} \cdot x_1 + \frac{3}{2} \cdot x_2 \leq 10;$$

ограничение не отрицательности:

$x_1,\ x_2 \geq 0$.

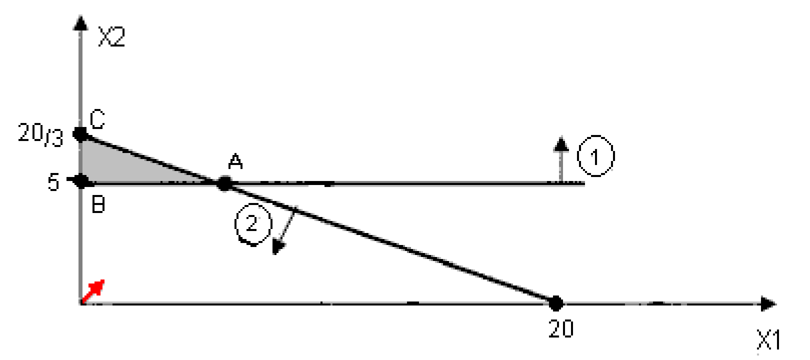
2 Решение задачи графическим способом

$$\max z = x_1 + x_2;$$

$$x_2 \geq 5;$$

$$\frac{1}{2} \cdot x_1 + \frac{3}{2} \cdot x_2 \leq 10;$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

	Множество допустимых решений - треугольник ABC. Оптимум - точка A(5;5). Z=10

3 Решение задачи двухэтапным симплекс-методом

<u>Приведём задачу к канонической форме:</u>

$$\max z = x_1 + x_2 + 0\cdot S_1 + 0\cdot s_2$$

$$x_2 - S_1 = 5 \quad (y_1)$$

$$\frac{1}{2}\cdot x_1 + \frac{3}{2}\cdot x_2 + s_2 = 10 \quad (y_2)$$

$$x_1,\ x_2, S_1, s_2 \ge 0$$

В первое ограничение введём искусственную переменную:

$$\max z = x_1 + x_2 + 0\cdot S_1 + 0\cdot s_2$$

$$x_2 - S_1 + R_1 = 5$$

$$\frac{1}{2}\cdot x_1 + \frac{3}{2}\cdot x_2 + s_2 = 10$$

$$x_1,\ x_2, S_1, s_2, R_1 \ge 0$$

Заполним начальную симплекс таблицу:

БП	x_1	$x_2\downarrow$	S_1	s_2	R_1	Решение
r (min)	0	1	-1	0	0	5
z	-1	-1	0	0	0	0
$R_1\leftarrow$	0	1	-1	0	1	5
s_2	1/2	3/2	0	1	0	10

Итерация 1

БП	$x_1\downarrow$	x_2	S_2	s_2	R_1	Решение
r	0	0	0	0	-1	0
z (max)	-1	0	-1	0		5
x_2	0	1	-1	0	1	5
$s_1\leftarrow$	1/2	0	3/2	1	-3/2	5/2

Итерация 2

БП	x_1	x_2	S_1	s_2	R_1	Решение
z (max	0	0	2	2		10
x_2	0	1	-1	0	1	5
x_1	1	0	3	2	-3	5

Оптимальное решение:

– суточный объём выпуска продукции А x_1=5,

– суточный объём выпуска продукции В x_2=5,

– суммарная прибыль z=10.

4 Постоптимальный анализ

4.1 Определение ценности ресурсов

Способ №1:

Найдём ценности ресурсов по формуле $y^T = c_B^T B^{-1}$

Вектор коэффициентов базисных переменных: $c_B^T = (c_{x2} \quad c_{x1}) = (1 \quad 1)$.

!!! Извлечем из оптимальной симплекс-таблицы матрицу B^{-1}, соответствующую оптимуму. Для этого учтем, что в начальном ДБР единичная базисная матрица состоит из столбцов α_{*R1} и α_{*s2}: $B_0 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [\alpha_{*R1} \quad \alpha_{*s2}]$ (отметим, что в симплекс-таблицах **порядок этих столбцов обратный**). Значит, обратная оптимальная базисная матрица B^{-1} составляется из коэффициентов векторов α_{*R1} и α_{*s2} **и именно в указанном порядке!!!** То есть

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, $y^T = (1 \quad 1) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = (-2 \quad 2)$.

Таким образом: $y_1 = -2$, $y_2 = 2$.

Способ №2:

Базируется на использовании соотношений дополняющей нежёсткости.

Двойственная задача:

$$\begin{array}{lccccl} \min w = & 5 \cdot y_1 & + & 10 \cdot y_2 & & \\ & & & \frac{1}{2} \cdot y_2 & \geq 1 & (x_1) \\ & y_1 & + & \frac{3}{2} \cdot y_2 & \geq 1 & (x_2) \\ & -y_1 & & & \geq 0 & (S_1) \\ & & & y_2 & \geq 0 & (s_2) \end{array}$$

В оптимальной таблице прямой задачи базисными являются переменные x_1, x_2. Значит, соответствующие этим переменным ограничения – неравенства двойственной задачи в точке оптимума выполняются как равенства. Таким образом, получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot y_2 = 1 \\ y_1 + \frac{3}{2} \cdot y_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = 2 \\ y_1 = -2 \end{cases}.$$

Способ №3

$y_1 = -(d_N)_{S_1} = -2$ (S_1 - избыточная переменная);

$y_2 = (d_N)_{s_2} = 2$ (s_2 - остаточная переменная).

4.2 Нахождение допустимых диапазонов изменения компонент вектора ограничений

Ресурс 1. Переменная S_1 небазисная, поэтому ресурс 1 - дефицитный. Так как соответствующее ограничение изначально имело вид «$\geq$», то работаем по формуле:

$$\max_{i/\alpha_{ij}<0} \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} \right\} \leq \Delta_i \leq \min_{i/\alpha_{ij}>0} \left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} \right\};$$

БП	x_1	x_2	S_1	s_2	R_1	Решение
z (max	0	0	2	2		10
x_2	0	1	-1	0	1	5
x_1	1	0	3	2	-3	5

$$\max\left\{\frac{5}{-1}\right\} \leq \Delta_1 \leq \min\left\{\frac{5}{3}\right\};$$

$$-5 \leq \Delta_1 \leq \frac{5}{3};$$

$$-5+5 \leq b_1 \leq \frac{5}{3}+5;$$

$$0 \leq b_1 \leq \frac{20}{3}.$$

Ресурс 2. Переменная s_2 небазисная, поэтому ресурс 2- дефицитный. Так как соответствующее ограничение изначально имело вид «$\leq$», то работаем по формуле:

$$\max_{i/\alpha_{ij}>0} \left\{ \frac{\beta_i}{-\alpha_{ij}} \right\} \leq \Delta_i \leq \min_{i/\alpha_{ij}<0} \left\{ \frac{\beta_i}{-\alpha_{ij}} \right\};$$

БП	x_1	x_2	S_1	s_2	R_1	Решение
z (max	0	0	2	2		10
x_2	0	1	-1	0	1	5
x_1	1	0	3	2	-3	5

$$\max\left\{\frac{5}{-2}\right\} \le \Delta_2 < \infty$$

$$-2{,}5 \le \Delta_2 < \infty$$

$$-2{,}5 + 10 \le b_2 < \infty$$

$$7{,}5 \le b_2 < \infty$$

4.3 Нахождение нового решения при изменении уровней запасов ресурсов

а) фонд рабочего времени увеличен до 11 часов;

$b_{2нов} = 11 \in [7{,}5 \quad \infty)$,

$x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$,

$z = 5 + 7 = 12$;

б) фонд рабочего времени уменьшен до 7 часов;

$b_{2нов} = 7 \notin [7{,}5 \quad \infty)$

В данном случае базис оптимального решения изменится (для нахождения нового решения полученной информации недостаточно)..

в) минимальное количество продукции В увеличено до 10;

$b_{1нов} = 1 \notin \left[0 \quad \frac{20}{3}\right]$

В данном случае базис оптимального решения изменится.

4.4 Нахождение допустимых диапазонов изменения коэффициентов целевой функции

Имеем задачу на **максимум**.

Переменные x_1 и x_2 являются базисными, значит, для нахождения диапазона изменения их коэффициентов целевой функции воспользуемся формулой:

$$\max_{j/\alpha_{ij}>0}\left\{\frac{d_j}{-\alpha_{ij}}\right\} \le \Delta_i \le \min_{j/\alpha_{ij}<0}\left\{\frac{d_j}{-\alpha_{ij}}\right\}.$$

Переменная x_1:

БП	x_1	x_2	S_1	s_2	R_1	Решение
z (max	0	0	2	2		10
x_2	0	1	-1	0	1	5
x_1	1	0	3	2	-3	5

$$\max\left\{\frac{2}{-2};\frac{2}{-3}\right\} \le \Delta_1 < \infty,$$

$$-\frac{2}{3} \le \Delta_1 < \infty,$$

$$-\frac{2}{3}+1 \le C_1 < \infty,$$
$$\frac{1}{3} \le C_1 < \infty.$$

Переменная x_2:

БП	x_1	x_2	S_1	s_2	R_1	Решение
z (max	0	0	2	2		10
x_2	0	1	-1	0	1	5
x_1	1	0	3	2	-3	5

$$-\infty < \Delta_2 \le \min\left\{\frac{2}{-(-1)}\right\},$$
$$-\infty < \Delta_2 \le 2,$$
$$-\infty < C_2 \le 2+1,$$
$$-\infty < C_2 \le 3.$$

ПОСТОПТИМАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ графическим способом
(Этот пункт не обязателен, этот способ можно использовать для проверки полученных результатов)

Интервалы изменения правых частей и ценности ресурсов

Ресурс 1.
Для улучшения значений ЦФ запас 1-го ресурса нужно уменьшать. Точка нового оптимума $A_1(20;0)$, новое значение правой части: $b_1(A_1)=x_2(A_1)=0$.

Соответствующие значения ЦФ: $z(A_1)=20$

Найдем изменение значений ЦФ и правой части:

$$\Delta z_1' = z(A_1) - z(A) = 20-10=10$$
$$\Delta b_1' = b_1(A_1) - b_1(A) = 0-5=-5.$$

При уменьшении уровня запаса 1-го ресурса значение ЦФ также уменьшается, предельный сдвиг – до точки C(0, $^{20}/_{3}$). Найдем соответствующие изменения значений ЦФ и правой части:

$$\Delta z_1'' = z(C) - z(A) = \frac{20}{3} - 10 = -\frac{10}{3};$$
$$\Delta b_1'' = b_1(C) - b_1(A) = \frac{20}{3} - 5 = \frac{5}{3}.$$

Итак: $-5 \le \Delta b_2 < \frac{5}{3}$ (что совпадает с данными, полученными ранее).

Определим ценность ресурса:

$$y_1 = \frac{\Delta z_1'}{\Delta b_1'} = \frac{10}{-5} = \frac{\Delta z_1''}{\Delta b_1''} = \frac{10}{-3} : \frac{5}{3} = -2$$

Ресурс 2. Для улучшения значений ЦФ запас 2-го ресурса нужно увеличивать, причем не ограниченно. Остановимся на точке $A_2(10;5)$

$$b_2(A_2) = \frac{1}{2}\cdot x_1 + \frac{3}{2}\cdot x_2 = 12{,}5;$$
$$z_2(A_2) = 15;$$

$$\Delta z_2' = z(A_2) - z(A) = 15 - 10 = 5;$$

$$\Delta b_2' = b_2(A_2) - b_2(A) = 12{,}5 - 10 = 2{,}5.$$

При уменьшении уровня запаса 2-го ресурса значение ЦФ также уменьшается, предельный сдвиг – до точки С(0, 5). Найдем изменение значений ЦФ и правой части:

$$b_2(C) = \frac{1}{2} \cdot x_1 + \frac{3}{2} \cdot x_2 = 7{,}5;$$

$$z_2(C) = 5;$$

$$\Delta z_2'' = z(C) - z(A) = 5 - 10 = -5;$$

$$\Delta b_2'' = b_2(C) - b_2(A) = 7{,}5 - 10 = -2{,}5.$$

Итак: $-2{,}5 \le \Delta b_2 < \infty$.

$$y_2 = \frac{\Delta z_2'}{\Delta b_2'} = \frac{5}{2{,}5} = \frac{\Delta z_2''}{\Delta b_2''} = \frac{-5}{-2{,}5} = 2.$$

Задача 2

Некоторое предприятие производит статуэтки двух видов - Аполлона и Венеру. Для изготовления одного Аполлона необходим 1 кг металла, для одной Венеры – 2 кг металла. Предприятие закупает металл по цене 100 грн. за кг и больше 40 кг в день закупить не может. Суммарное количество статуэток должно быть не меньше 10. Найти оптимальное количество выпуска статуэток, при которых затраты на закупку металла были бы минимальными.

1) *Определить* статус и ценность каждого ресурса.
2) Для запасов каждого из ресурсов *определить* максимальный интервал изменения, при котором решение не изменится.
3) *Определить*, изменится ли полученное решение в каждом из следующих случаев, если нет, то *найти* соответствующие значения целевой функции и переменных:
   a. *суммарное количество статуэток должно быть не меньше 2;*
   b. *суточный запас металла увеличен до 70 кг;*
   c. *суммарное количество статуэток должно быть не меньше 45;*
4) *Найти* максимальный интервал изменения затрат на статуэтки, в пределах которого полученное решение остается оптимальным.

1 Построение математической модели задачи

Переменные:

x_1 – суточный объём выпуска статуэток Аполлона,

x_2 – суточный объём выпуска статуэток Венеры.

Целевая функция:

Затраты на закупку металла для производства статуэток:

$$z = 100 \cdot x_1 + 200 \cdot x_2 \to \min$$

Ограничения:

{количество затраченного металла не должно превышать 40 кг.}

$$x_1 + 2 \cdot x_2 \le 40$$

{общее количество статуэток не должно быть меньше 10}

$$x_1 + x_2 \ge 10$$

{ограничение неотрицательности}

$x_1,\ x_2 \ge 0$;

{ограничение целочисленности}

$x_1,\ x_2$ - целые.

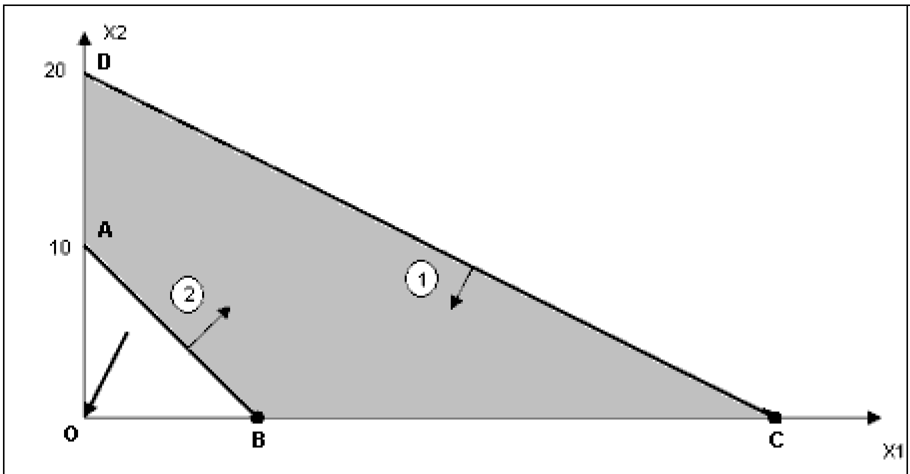
2 Решение задачи графическим способом

$$\min z = 100 \cdot x_1 + 200 \cdot x_2;$$

$x_1 + 2 \cdot x_2 \le 40$ 1-й ресурс

$x_1 + x_2 \ge 10$ 2-й ресурс

$x_1,\ x_2 \ge 0$



Множество допустимых решений задачи – многоугольник $ABCD$.

Оптимумом является точка B(10;0).

$z(B) = 1000$.

3 Решение задачи двухэтапным симплекс-методом

Приведём задачу к канонической форме:

$$\min z = 100 \cdot x_1 + 200 \cdot x_2 + 0 \cdot s_1 - 0 \cdot S_2$$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + s_1 = 40 \quad (y_1)$$

$$x_1 + x_2 - S_2 = 10 \quad (y_2)$$

$$x_1,\ x_2, s_1, S_2 \geq 0$$

Введём искусственную переменную (во второе ограничение, изначально имевшее вид “≥”):

$$\min z = 100 \cdot x_1 + 200 \cdot x_2 + 0 \cdot s_1 - 0 \cdot S_2$$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + s_1 = 40$$

$$x_1 + x_2 - S_2 + R_1 = 10$$

$$x_1,\ x_2, s_1, S_2, R_1 \geq 0$$

Заполним начальную симплекс таблицу:

БП	x_1 ↓	x_2	s_1	S_2	R_1	Решение	
r (min)	1	1	0	-1	0	10	
z	-100	-200	0	0	0	0	
s_1	1	2	1	0	0	40	40/1
← R_1	1	1	0	-1	1	10	10/1

Итерация 1

БП	x_1 ,	x_2	s_1	S_2	R_1	Решение
r	0	0	0	0	-1	0
*z (**min**)*	0	**-100**	0	**-100**		1000
s_1	0	1	1	1	-1	30
x_1	1	1	0	-1	1	10

(Мы вычисляем столбец, соответствующий искусственной переменной R1, для того, чтобы иметь обратную базисную матрицу B^{-1}, которая необходима нам для вычисления ценностей ресурсов и нахождения новых значений базисных переменных).

Итак, оптимальное решение задачи таково: для того, чтобы достичь минимальных затрат необходимо выпускать:

- суточный объём выпуска статуэток Аполлона =10 (шт.)
- суточный объём выпуска статуэток Венеры = 0 (шт.)

При таких объёмах выпуска затраты составят 1000 грн. в день.

4 Постоптимальный анализ

4.1 Определение ценности ресурсов

Существует несколько способов определения ценности ресурсов.

Способ №1:

Справедливо следующее соотношение, позволяющее определить ценности ресурсов y_i:

$$y^T = c_B^T B^{-1}$$

Вектор коэффициентов базисных переменных:

$$c_B^T = (c_{s1} \quad c_{x1}) = \begin{pmatrix}0 & 100\end{pmatrix},$$

такой порядок коэффициентов этого вектора обусловлен порядком расположения строк, соответствующих базисным переменным оптимальной симплекс-таблицы.

Матрицу B^{-1} получаем из оптимальной симплекс таблицы: $B^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,

Значит, $y^T = \begin{pmatrix}0 & 100\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 100\end{pmatrix}$.

Получаем следующие ценности ресурсов: y_1 = 0 (ресурс 1), y_2 = 100 (ресурс 2).

Способ №2:

Базируется на использовании соотношений дополняющей нежёсткости.

Построим двойственную задачу:

$$\begin{array}{llllll}
\max w = & 40 \cdot y_1 & + & 10 \cdot y_2 & & \\
 & y_1 & + & y_2 & \le 100 & (x_1) \\
 & 2 \cdot y_1 & + & y_2 & \le 200 & (x_2) \\
 & y_1 & & & \le 0 & (s_1) \\
 & & & - y_2 & \le 0 & (S_2)
\end{array}$$

В оптимальной таблице прямой задачи базисными являются переменные x_1 и s_1. Значит, согласно соотношениям дополняющей нежёсткости, соответствующие этим переменным ограничения – неравенства двойственной задачи в точке оптимума выполняются как равенства. Таким образом, получаем следующую систему линейных уравнений.

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 100 \\ y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 100 \end{cases}.$$

Способ №3:

(в полной мере может использоваться в случае, если в исходной задаче нет ограничений равенств):

В этой задаче оба ограничения – неравенства:

- значение двойственной переменной, соответствующей ограничению-неравенству “≤”, равно относительной оценке остаточной переменной: $y_1 = \left(d_N\right)_{s_1}$ =0.
- значение двойственной переменной, соответствующей ограничению-неравенству “≥”, равно относительной оценке избыточной переменной, взятой с обратным знаком: $y_2 = -\left(d_N\right)_{s_2}$ = –(–100)=100.

(Этот способ дает возможность проверить правильность решения задачи симплекс методом, сравнивая значения y_i, полученные способами №1 или №2, со значениями относительных оценок дополнительных переменных оптимальной симплекс-таблицы).

4.2 Нахождение допустимых диапазонов изменения компонент вектора ограничений

Ресурс 1. В оптимальной симплекс таблице переменная s_1 является базисной, поэтому ресурс 1- недефицитный. Для недефицитных ресурсов диапазон устойчивости решения (учитывая, что у нас неравенство вида «≤»):

$$-s_1^0 \le \Delta_1 < \infty$$
$$-30 \le \Delta_1 \le \infty,$$
$$-30 + 40 \le \Delta_1 \le \infty,$$
$$10 \le b_1 \le \infty.$$

Ресурс 2. Переменная S_2 является небазисной, поэтому ресурс 2 - дефицитный. Так, как второе ограничение вида « ≥ », то по следующей формуле найдём диапазон изменения коэффициента b_2:

$$\max_{i/\alpha_{ij}<0}\left\{\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}\right\} \le \Delta_i \le \min_{i/\alpha_{ij}>0}\left\{\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}\right\},$$
$$\max\left\{\frac{10}{-1}\right\} \le \Delta_2 \le \min\left\{\frac{30}{1}\right\},$$
$$-10 \le \Delta_2 \le 30,$$
$$-10+10 \le \Delta_2 \le 30+10,$$
$$0 \le b_2 \le 40.$$

4.3 Нахождение нового решения при изменении уровней запасов ресурсов

а) суммарное количество статуэток должно быть не меньше 2;

$b_2^{нов} = 2 \in [0;\quad 40].$

Новые значения базисных переменных определим по формуле: $x_B = B^{-1}b^{нов}$.

Из оптимальной симплекс таблицы извлекаем $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

С учетом нового значения b_1 новое значение вектора ограничений: $b^{нов} = \begin{bmatrix} 40 \\ 2 \end{bmatrix}$. Тогда

$$x_B = \begin{pmatrix} s_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 40 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Получив значения $x_1 = 2$ и $x_2 = 0$, подсчитаем новое значение целевой функции: $z = 100 \cdot 2 + 200 \cdot 0 = 200$.

б) суточный запас металла увеличен до 70 кг.

$b_1^{нов} = 70 \in [10; \quad +\infty)$.

Так как первый ресурс недефицитный, то его изменение повлияет только на значение соответствующей остаточной переменной:

$x_B = \begin{pmatrix} s_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 70 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 10 \end{pmatrix}$; значение ЦФ не изменится: $z = 1000$.

в) суммарное количество вил и совков должно быть не меньше 45;

Поскольку, $b_2^{нов} = 45 \notin [0; \quad 40]$, в данном случае базис оптимального решения изменится (для нахождения нового решения нужно либо решать задачу заново, либо, изменив данные, применить двойственный симплекс-метод и продолжить вычисления).

4.4 Нахождение допустимых диапазонов изменения коэффициентов целевой функции

Имеем задачу на **минимум**.

Переменная x_1 является базисной, диапазон изменения коэффициентов целевой функции находится по формуле:

$$\max_{j/\alpha_{ij}<0} \left\{ \frac{d_j}{-\alpha_{ij}} \right\} \le \Delta_i \le \min_{j/\alpha_{ij}>0} \left\{ \frac{d_j}{-\alpha_{ij}} \right\},$$

$$\max \left\{ \frac{-100}{-(-1)} \right\} \le \Delta_1 \le \min \left\{ \frac{-100}{-1} \right\},$$

$$-100 \le \Delta_1 \le 100,$$

$$-100 + 100 \le c_1 \le 100 + 100,$$

$$0 \le c_1 \le 200.$$

Переменная x_2 является небазисной, поэтому диапазон устойчивости:

$$d_2^0 \le \Delta < \infty,$$

$$-100 \le \Delta < \infty,$$

$$-100 + 200 \le c_2 < \infty,$$

$$100 \le c_2 < \infty.$$

ПОСТОПТИМАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ графическим способом

(Этот пункт не обязателен, этот способ можно использовать для проверки полученных результатов)

Ресурс 1. Как мы уже определили, ресурс 1 – недефицитный, поэтому его ценность $y_1 = 0$.

Интервалы изменения правой части:

- увеличивать её можно не ограниченно – на оптимум это не повлияет:
- уменьшать правую часть можно до тех пор, пока прямая (1) не пройдёт через точку оптимума В (10; 0).: $b_1(B) = 10 - 0 = 10$,

  $\Delta b_1 = b_1(B) - b_1 = 10 - 40 = -30$,
- т.о. $-30 \le \Delta b_1 \le +\infty$ (что и требовалось доказать).

Ресурс 2.

Найдём интервалы изменения правой части.

- Для улучшения значения ЦФ уровень запаса 2-го ресурса нужно уменьшать, предельный сдвиг – до точки O(0;0): $b_2(O) = x_1 + x_2 = 0$, соответствующее значение ЦФ: $z(O) = 0$.

  Изменение значения ЦФ и уровня запаса:

  $\Delta z_2' = z(O) - z(B) = 0 - 1000 = -1000$,

  $\Delta b_2' = b_2(O) - b_2 = 0 - 10 = -10$.
- При увеличении уровня запаса 2-го ресурса значение ЦФ также увеличивается, предельный сдвиг – до точки C(40; 0). Найдем соответствующие изменения значений ЦФ и правой части: $z(C) = 100 \cdot 40 = 4000$;

  $\Delta z_2'' = z(C) - z(B) = 4000 - 1000 = 3000$;

  $b_1(C) = 40 + 0 = 40$;

  $\Delta b_1'' = b_1(C) - b_2 = 40 - 10 = 30$.
- Т.о. $-10 \le \Delta b_2 \le 30$ (что и требовалось доказать).
- Теперь получим ценность ресурса: $y_2 = \dfrac{\Delta z_2'}{\Delta b_2'} = \dfrac{-1000}{-10} = \dfrac{\Delta z_2''}{\Delta b_2''} = \dfrac{3000}{30} = 100$.

Задача 3

Для укладки асфальта используют две машины. Первая машина укладывает 8 м^2 асфальта в час, а вторая — 14 м^2. При работе первая машина потребляет в час 2 л бензина, вторая — 4 л. Суточная норма расхода бензина составляет 40 л. Общее время работы машин должно быть равно 18 часам в сутки. Определить время работы каждой машины, при которых за день асфальтируется наибольшая площадь.

1) *Определить* статус и ценность каждого ресурса.
2) Для запасов каждого из ресурсов *определить* максимальный интервал изменения, при котором решение не изменится.
3) *Определить*, изменится ли полученное решение в каждом из следующих случаев, если нет, то *найти* соответствующие значения целевой функции и переменных:
   a. *суточный запас бензина увеличен до 50,*
   b. *суточный запас бензина уменьшен до 38,*
   c. *суточный запас бензина уменьшен до 30.*
4) *Найти* максимальные интервалы изменения величин производительности машин, в пределах которого полученное решение остается оптимальным.

1 Построение математической модели задачи

Переменные:

x_1 – время работы первой машины в сутки;

x_2 – время работы второй машины в сутки;

Целевая функция:

Требуется, найти такие времена работы машин, при которых асфальтируется максимальная площадь. Таким образом, ЦФ - суммарная площадь, асфальтируемая двумя машинами:

$\max z = 8 \cdot x_1 + 14 \cdot x_2$;

Ограничения:

{общие затраты бензина двумя машинами на асфальтирование ≤ 40 литров}

$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 40$;

{общее время работы двух машин должно = 18 часам}

$x_1 + x_2 = 18$;

{ограничение неотрицательности}

$x_1,\ x_2 \geq 0$;

{ограничение целочисленности}

$x_1,\ x_2$ - целые.

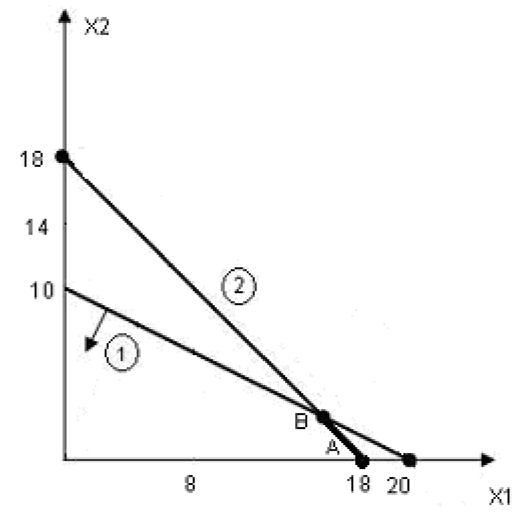
2 Решение задачи графическим способом

$\max z = 8 \cdot x_1 + 14 \cdot x_2$

$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 40$ (1-й ресурс);

$x_1 + x_2 = 18$ (2-й ресурс)

$x_1,\ x_2 \geq 0$



Множество допустимых решений - отрезок AB.
Точка оптимума - точка B, координаты которой получим, решив систему:

$$\begin{cases} 2\cdot x_1 + 4\cdot x_2 = 40 \\ 1\cdot x_1 + 1\cdot x_2 = 18 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 16 \\ x_2 = 2 \end{cases}.$$

$$z(B) = 156.$$

3 Решение задачи двухэтапным симплекс-методом

Приведём задачу к канонической форме:

$$\max z = 8\cdot x_1 + 14\cdot x_2 + 0\cdot s_1$$
$$2\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + s_1 = 40 \quad (y_1)$$
$$x_1 + x_2 = 18 \quad (y_2)$$
$$x_1,\ x_2, s_1 \geq 0$$

Введём искусственную переменную:

$$\max z = 8\cdot x_1 + 14\cdot x_2 + 0\cdot s_1$$
$$2\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + s_1 = 40 \quad (y_1)$$
$$x_1 + x_2 + R_1 = 18 \quad (y_2)$$
$$x_1,\ x_2, s_1, R_1 \geq 0.$$

Построим начальную симплекс таблицу:

БП	x_1 ↓	x_2	s_1	R_1	Решение
r (**min**)	1	1	0	0	18
z	-8	-14	0	0	0
s_1	2	4	1	0	40
← R_1	1	1	0	1	18

Итерация 1

БП	x_1	x_2 ↓	s_1	R_1	решение
r	0	0	0	-1	0
z (**max**)	0	-6	0	8	144
← s_1	0	2	1	-2	4
x_1	1	1	0	1	18

Итерация 2

БП	x_1	x_2	s_1	R_1	Решение
z (**max**)	0	0	**3**		156
x_2	0	1	0,5	-1	2
x_1	1	0	-0,5	2	16

Мы вычисляли коэффициенты столбца, соответствующего искусственной переменной R1, для того, чтобы получить обратную базисную матрицу B^{-1}, которая необходима нам для вычисления ценностей ресурсов и нахождения новых значений базисных переменных.

Итак, оптимальное решение задачи:
Времена работы машин:

- первая машина должна работать на укладке асфальта 16 часов;
- вторая машина – 2 часа.

При таком распределении времени будет заасфальтирована площадь в размере 156 $м^2$.

4 Постоптимальный анализ

4.1 Определение ценности ресурсов

Способ №1:

Справедливо следующее соотношение, позволяющее определить ценности ресурсов y_i:

$$y^T = c_B^T B^{-1}.$$

Вектор коэффициентов базисных переменных:

$$c_B^T = (c_{x2} \quad c_{x1}) = (14 \quad 8),$$

Матрицу B^{-1} получаем из оптимальной симплекс таблицы (итерация 2):

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -1 \\ -0.5 & 2 \end{pmatrix},$$

Тогда $y^T = (14 \quad 8) \times \begin{pmatrix} 0.5 & -1 \\ -0.5 & 2 \end{pmatrix} = (3 \quad 2).$

Получили такие ценности ресурсов: $y_1 = 3$ (ресурс 1), $y_2 = 2$ (ресурс 2).

Способ №2

Базируется на использовании соотношений дополняющей нежёсткости.
Построим двойственную задачу:

$$\begin{array}{lllllll} \min w = & 40 \cdot y_1 & + & 18 \cdot y_2 & & & \\ & 2 \cdot y_1 & + & y_2 & & \geq 8 & (x_1) \\ & 4 \cdot y_1 & + & y_2 & & \geq 14 & (x_2) \\ & y_1 & & & & \geq 0 & (s_1) \\ & & & y_2 & <=> 0 & & \end{array}$$

В оптимальной таблице прямой задачи базисными являются переменные x_1, x_2. Значит, согласно соотношениям дополняющей нежёсткости, соответствующие этим переменным ограничения – неравенства двойственной задачи в точке оптимума выполняются как равенства. Таким образом, получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2 \cdot y_1 + y_2 = 8 \\ 4 \cdot y_1 + y_2 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \cdot y_1 = -6 \\ y_2 = 14 - 4 \cdot y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = 2 \end{cases}.$$

<u>Проверка:</u>

Исходя из теоремы 2 (о равенстве значений пары двойственных задач) $z^{opt} = w^{opt}$:
$z^{opt} = 156$; $w^{opt} = 40 \cdot 3 + 18 \cdot 2 = 156$. Значит, двойственные переменные (ценности ресурсов) найдены правильно.

Способ №3
(в полной мере может использоваться только в том случае, если в исходной задаче нет ограничений равенств)
В этой задаче первое ограничение - неравенство, второе - равенство. Значение двойственной переменной первого ограничения-неравенства (“≤”), равно относительной оценке остаточной переменной s_i: $y_1 = \left(d_N\right)_{s_1}$ =3.

4.2 Нахождение допустимых диапазонов изменения компонент вектора ограничений

Ресурс 1. В оптимальной симплекс таблице переменная s_1 является небазисной, поэтому ресурс 1 – дефицитный. Так как первое ограничение имеет вид «$\le$», то по следующей формуле найдём диапазон изменения b_1:

$$\max_{i/\alpha_{ij}>0}\left\{\frac{\beta_i}{-\alpha_{ij}}\right\} \le \Delta_i \le \min_{i/\alpha_{ij}<0}\left\{\frac{\beta_i}{-\alpha_{ij}}\right\},$$

$$\max\left\{\frac{2}{-0.5}\right\} \le \Delta_1 \le \min\left\{\frac{16}{0.5}\right\},$$

$$-4 \le \Delta_1 \le 32,$$

с учётом того, что изначально $b_1 = 40$, имеем:

$$-4+40 \le b_1 \le 32+40,$$

$$36 \le b_1 \le 72.$$

Ресурс 2. Так как 2-ое ограничение «=», то мы нужно воспользоваться предыдущей формулой, а коэффициенты вектора α_{*j} взять из столбца переменной R_1. Диапазон изменения коэффициента b_2:

$$\max\left\{\frac{16}{-2}\right\} \le \Delta_2 \le \min\left\{\frac{2}{1}\right\},$$

$$-8 \le \Delta_2 \le 2,$$

$$10 \le b_2 \le 20.$$

4.3 Нахождение нового решения при изменении уровней запасов ресурсов

а) суточный запас бензина увеличен до 50.

Так как $b_1^{нов} = 50 \in [36; \quad 72]$, то мы можем посчитать новые значения базисных переменных по формуле:

$$x_B = B^{-1} b^{нов}$$

Из оптимальной симплекс таблицы получаем: $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -1 \\ -0.5 & 2 \end{pmatrix}$,

С учетом нового значения b_1 новое значение вектора ограничений: $b^{нов} = \begin{bmatrix} 50 \\ 18 \end{bmatrix}$. Тогда

$$x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & -1 \\ -0.5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 50 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Получив значения $x_1 = 11$ и $x_2 = 7$, подсчитаем новое значение целевой функции:

$$z = 8 \cdot 11 + 14 \cdot 7 = 186.$$

б) суточный запас бензина уменьшен до 38,

$b_1^{нов} = 38 \in [36; \quad 72]$.

$$x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & -1 \\ -0.5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 38 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

$x_1 = 17$,

$x_2 = 1$.

$z = 8 \cdot 17 + 14 \cdot 1 = 150$;

в) суточный запас бензина уменьшен до 30.

Поскольку, $b_1^{нов} = 30 \notin [36; \quad 72]$, то в данном случае базис оптимального решения изменится (для нахождения нового решения полученной информации недостаточно).

4.4 Нахождение допустимых диапазонов изменения коэффициентов целевой функции

Имеем задачу на **максимум**.

Переменные x_1 и x_2 являются базисными, значит, диапазон изменения коэффициентов целевой функции рассчитывается по формуле:

$$\max_{j/\alpha_{ij}>0} \left\{ \frac{d_j}{-\alpha_{ij}} \right\} \le \Delta_i \le \min_{j/\alpha_{ij}<0} \left\{ \frac{d_j}{-\alpha_{ij}} \right\}.$$

Если отсутствуют $\alpha_{ij} > 0$, то левая часть неравенства равна $-\infty$, если отсутствуют $\alpha_{ij} < 0$, то правая часть неравенства равна ∞ .

Переменная x_1.

$$-\infty < \Delta_1 \le \min\left\{ \frac{3}{0.5} \right\},$$

$$-\infty < \Delta_1 \le 6.$$

Исходное значение коэффициента целевой функции при x_1 равно 8. Значит:

$$-\infty < c_1 \le 6 + 8,$$

$$-\infty < c_1 \le 14.$$

Переменная x_2.

$$\max\left\{ -\frac{3}{0.5} \right\} \le \Delta_2 < \infty,$$

$$-6 \le \Delta_2 < \infty,$$

$$-6 + 14 \le c_2 < \infty,$$

$$8 \le c_2 < \infty.$$

ПОСТОПТИМАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ графическим способом
(Этот пункт не обязателен, этот способ можно использовать для проверки полученных результатов)

Ресурс 1.

- Для улучшения значения ЦФ запас 1-го ресурса нужно увеличивать. Точка нового оптимума $B_1(0;18)$. Новое значение правой части:
  $b_1(B_1) = 2\cdot x1 + 4\cdot x2 = 2\cdot 0 + 4\cdot 18 = 72$.
  Соответствующее значение ЦФ:
  $z(B_1) = 8\cdot x1 + 14\cdot x2 = 14\cdot 18 = 252$
  Найдем изменение значения ЦФ и уровня запаса ресурса:
  $\Delta z_1' = z(B_1) - z(B) = 252 - 156 = 96$,
  $\Delta b_1' = b_1(B_1) - b_1 = 72 - 40 = 32$.
- Предельный сдвиг (при уменьшении правой части первого ресурса) – до точки A(18; 0):
  $z(A) = 8\cdot x1 + 14\cdot x2 = 8\cdot 18 + 14\cdot 0 = 144$;
  $b_1(A) = 2\cdot x1 + 4\cdot x2 = 2\cdot 18 + 4\cdot 0 = 36$;
  $\Delta z_1'' = z(A) - z(B) = 144 - 156 = -12$;
  $\Delta b_1'' = b_1(A) - b_1 = 36 - 40 = -4$.
- $-4 \le \Delta b_1 \le 32$,
- Итак, ценность ресурса: $y_1 = \dfrac{\Delta z_1'}{\Delta b_1'} = \dfrac{96}{32} = \dfrac{\Delta z_1''}{\Delta b_1''} = \dfrac{-12}{-4} = 3$.

Ресурс 2.

- Для улучшения значения ЦФ запас 2-го ресурса также нужно увеличивать. Точка нового оптимума $B_2(20;0)$. Новое значение правой части:
  $b_2(B_2) = x1 + x2 = 20$.

Соответствующее значение ЦФ:

$z(B_2) = 8\cdot 20 + 14\cdot 0 = 160$

Изменения уровня запаса ресурса и значения ЦФ:

$\Delta z_2 = z(B_2) - z(B) = 160 - 156 = 4$,

$\Delta b_2 = b_2(B_2) - b_2(B) = 20 - 18 = 2$.

- Предельный сдвиг (при уменьшении правой части второго ресурса) – до точки (0; 10):
  $\Delta z_1'' = (8\cdot 0 + 14\cdot 10) - 156 = 140 - 156 = -16$;
  $\Delta b_1'' = (0 + 10) - 18 = -8$.
- $-8 \le \Delta b_2 \le 2$,
- Итак, ценность ресурса: $y_2 = \dfrac{\Delta z_2}{\Delta b_2} = \dfrac{4}{2} = \dfrac{\Delta z_2''}{\Delta b_2''} = \dfrac{-16}{-8} = 2$..

Таким образом, делаем вывод о верном решении задачи.