Computation Process using Scilab

Komputasi Proses

1. Pengenalan Scilab
2. Bahasa pemrograman dengan Scilab
3. Metoda Numerik
4. Aplikasi Komputasi Proses dengan Scilab

Introduction

Physical & Mathematical MODELS

Simplified picture of REALITY

Engineers are symbolic analysts

TOOL to solve PROBLEMS

- Forecasting
- Controlling

Software

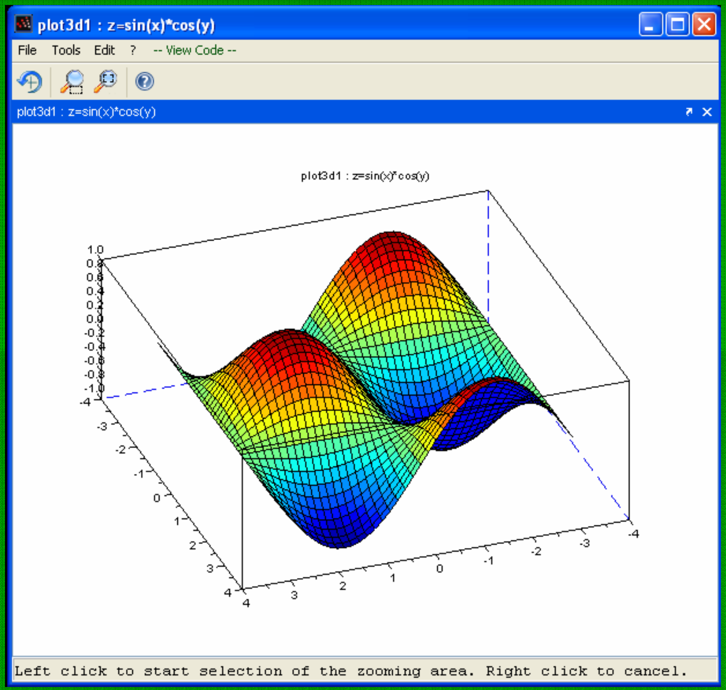
Scilab 5

Language

Programme

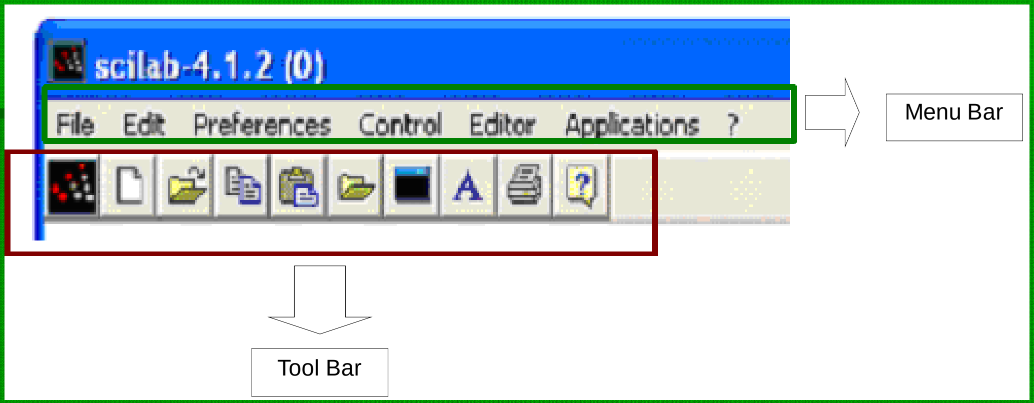
Interactive program

Numerical computation & data visualization



Scilab

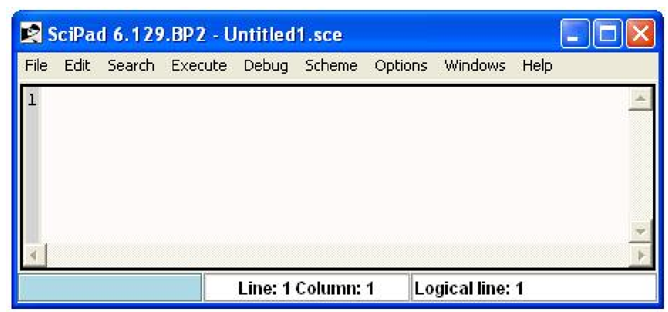
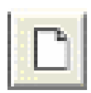
- Software gratis: http://www.scilab.org
- OS: Windows dan Linux
- Mirip dengan program Matlab

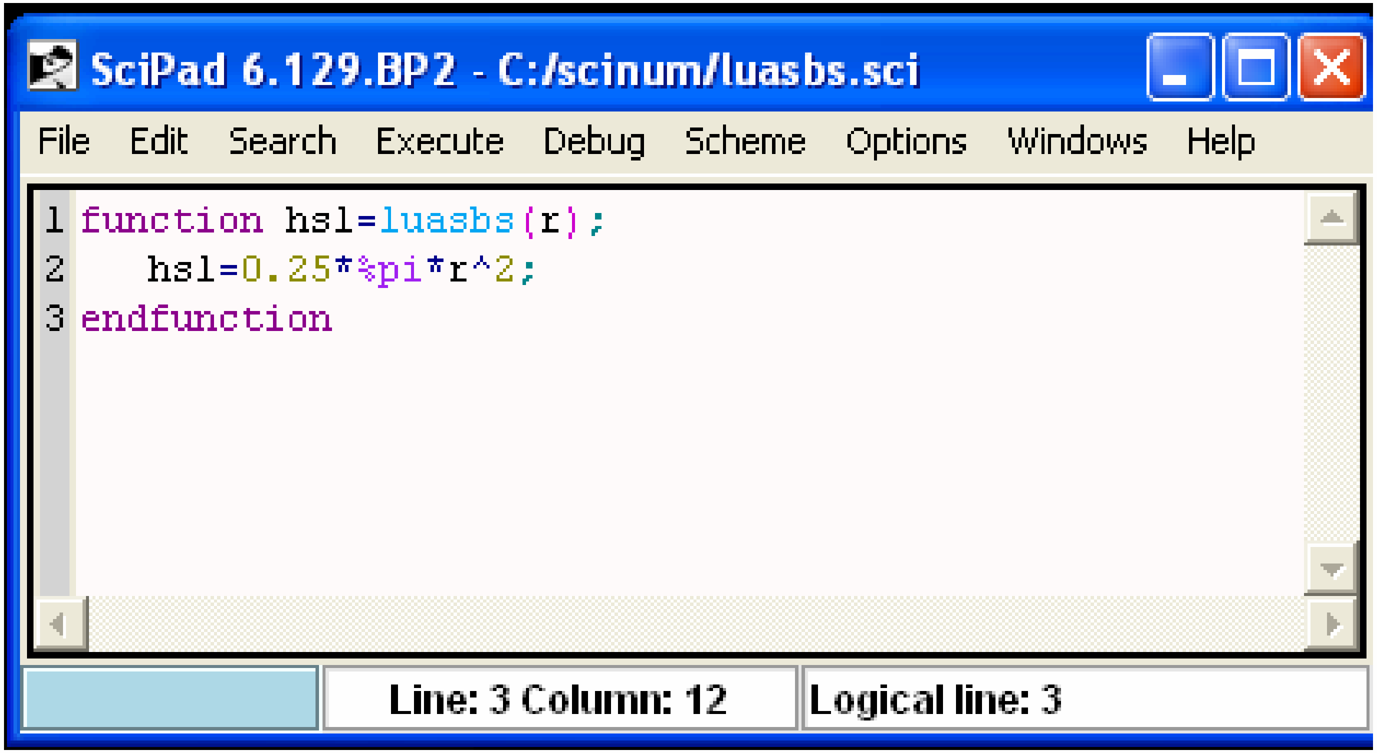


```
-->r=6
 r  =
    6.
-->luas=0.25*%pi*r^2
 luas  =
    28.274334
```

	deff(‘(out1,out2,...)=**modul**(in1,in2,...)’,’**persamaan**’
	Fungsi: mendefinisikan persamaan (rumus) pada jendela kerja

```
-->deff('A=luas(r)','A=0.25*%pi*r^2')
-->ls=luas(3)
 ls  =
    7.0685835
-->
```

<table>
<tr><th>Perintah membuka
Jendela Editor</th><th>Hasil</th></tr>
<tr><td>Dari menu bar: (klik)
Editor
Atau tekan [alt – d]</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>Dari Tool bar: (klik)
</td></tr>
<tr><td>Dari Jendela kerja:
(ketik) scipad()</td></tr>
</table>



Perlu di eksekusi: -->exec('c:\scinum\luasbs.sci');

Tips:

Cara lebih mudah, dapat dilakukan (pilih salah satu):

- Pada <u>menu bar</u> <u>"jendela **editor**"</u>, pilih Execute (Alt+x) → Load into Scilab
- Pada <u>menu bar</u> <u>"jendela **editor**"</u>, Ctrl + l
- Pada <u>menu bar</u> <u>"jendela **kerja**"</u>, pilih File → Exec... → pilih file yang akan dieksekusi

```
-->exec('c:\scilabc\luasbs.sci')
-->function hsl=luasbs(r);
-->  hsl = 0.25*%pi*r^2;
-->endfunction;
-->
```

getf()	**Fungsi**: mengambil / mengaktifkan file *.sci pada suatu fungsi yang lain

```
function V=volbs(h,r)
    getf('c:/scilabc/luasbs.sci')
   V=h*luasbs(r)
endfunction
```

ls file_dir	**Fungsi**: menampilkan file pada 'direktori file'

```
-->ls c:/scinum
 ans  =
!volbs.sci   !
!            !
!luasbs.sci  !
-->
```

Apabila fungsi atau modul yang akan digunakan cukup banyak,maka penggunaan getf() tidak efektif

genlib('nama','file_dir')	**Fungsi**: membangun library dari fungsi (*.sci) pada 'direktori file'

```
-->genlib('libsbs','c:/scinum')
```

load('file_dir/lib')	**Fungsi**: memanggil library dari fungsi pada 'direktori file'

```
-->load('c:/scinum/lib')
```

DIFFERENSIASI NUMERIK

- Persamaan differensial merupakan model matematis yang paling sering muncul dalam bidang keteknikan maupun saintifik
- Salah satu penyelesaiannya dengan metode beda hingga (*finite difference*)

Definisi turunan (*derivatif*)

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_0} = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Jika $h = x - x_0 = \Delta x$ maka pendekatan turunan di atas adalah

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Diketahui suatu fungsi $y = f(x)$, ingin dicari $\frac{dy}{dx}$ pada $x = x_0$.

Penyelesaiannya dapat menggunakan 3 cara yaitu :

1. Forward Difference (Beda Maju)
2. Backward Difference (Beda Mundur)
3. Central Difference (Beda Pusat)

1. Metode Beda Maju (Forward Difference)

Beda hingga maju pertama dari y pada i atau x didefinisikan :

$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$

atau $\Delta y(x) = y(x+h) - y(x)$

Beda maju kedua pada i atau x didefinisikan :

$\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$

atau $\Delta^2 y(x) = y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)$

Sehingga penyelesaiannya bisa dituliskan :

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{1}{h}\left(y_{i+1} - y_i\right) \quad \text{atau} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \cong \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

2. Metode Beda Mundur (Backward Difference)

Beda hingga mundur pertama dari y pada i atau x didefinisikan :

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$$

atau $\nabla y(x) = y(x) - y(x-h)$

Beda mundur kedua pada i atau x didefinisikan :

$$\nabla^2 y_i = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}$$

atau $\nabla^2 y(x) = y(x) - 2y(x-h) + y(x-2h)$

Sehingga penyelesaiannya bisa dituliskan :

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{1}{h}\left(y_i - y_{i-1}\right) \quad \text{atau} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \cong \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$$

3. Metode Beda Pusat (Central Difference)

Beda hingga terpusat pertama dari y pada i atau x didefinisikan :

$$\partial y_i = y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}}$$

atau $\delta y(x) = y(x+1/2\ h) - y(x-1/2\ h)$

Turunan beda terpusat selanjutnya adalah :

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{1}{2h}\left(y_{i+1} - y_{i-1}\right) \quad ; \quad \frac{d^2 y_i}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}\right)$$

$$\frac{d^3 y_i}{dx^3} = \frac{1}{2h^3}\left(y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}\right)$$

Penyelesaiannya dapat dituliskan

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{1}{2h}\left(y_{i+1} - y_{i-1}\right)$$ atau $$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \cong \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$$

Derivatif Orde Dua

Untuk penurunan (derivatif) pangkat dua dengan metode beda hingga terpusat digunakan rumus dengan bentuk :

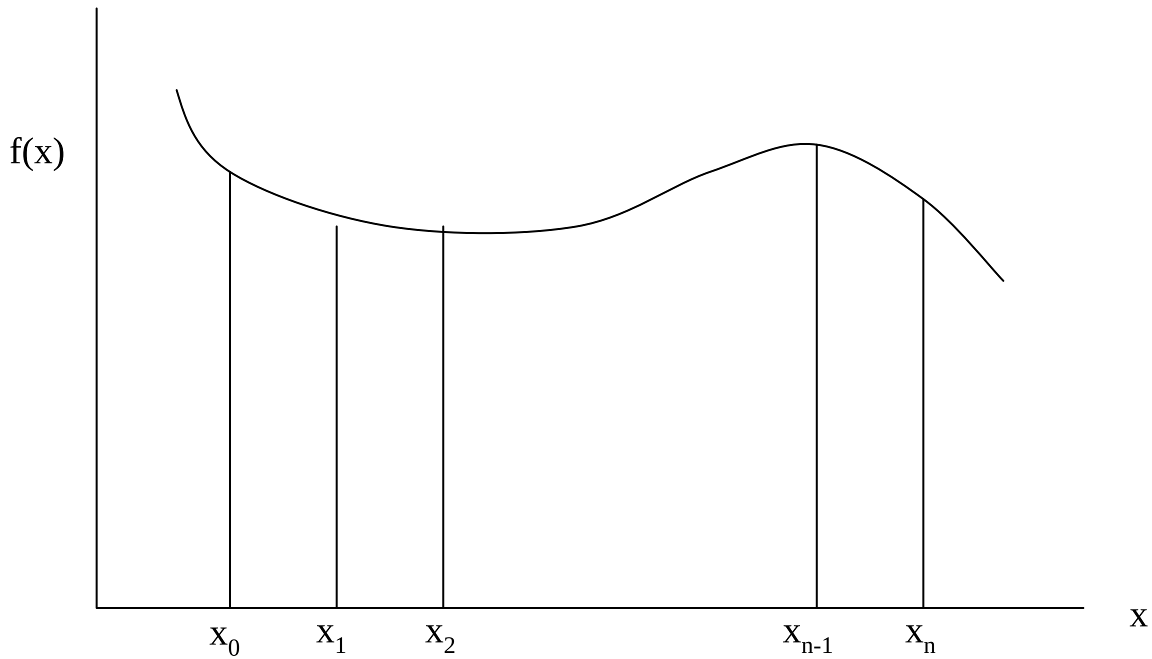
$$\frac{d^2 y_i}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left(y_{i+2} - 2y_i + y_{i-1}\right)$$

Atau dapat juga dituliskan :

$$\left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{x = x_0} \cong \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x^2}$$

INTEGRASI NUMERIS

Jika ada fungsi $Y = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$ sedangkan f(x) sulit sekali untuk diintegrasikan secara analitik, maka cara yang paling mudah adalah dengan mengintegrasikannya secara numerik



- Dalam perhitungan integrasi numerik, luasan di bawah kurva akan diubah dalam bentuk trapesium, dimana ruang kosong merupakan bagian dari kesalahan numerik
- Untuk mengatasi kesalahan dilakukan dengan cara membagi menjadi trapesium dengan segmen yang lebih kecil
- Integrasi dilakukan dengan menggunakan interval Δx yang sama (homogen) sepanjang batas integrasi dari x_0 sampai x_n
- Batas/interval integrasi dibagi menjadi n interval

$$\Delta x = \frac{(x_n - x_0)}{n}$$

- Batas interval diberi indeks 0, 1, 2, ….. , n sehingga

$$x_i = x_0 + i.\Delta x$$

Penyelesaian numerik dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu

- Trapezoidal Rule

$$\int_{x0}^{x_n} f(x)\,dx \cong \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

- Simpson Rule

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \cong \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

AKAR PERSAMAAN
(PERSAMAAN NON LINIER)

- Merupakan bentuk persamaan aljabar yang nilainya sama dengan nol
- Untuk satu variabel bebas x, maka $f(x) \cong 0$
- Banyak digunakan dalam model keteknikan maupun saintis

Metode Penyelesaian Akar Persamaan

1. Metode Pengurungan (bracketing method)
   - Memerlukan dua titik sebagai tebakan awal
2. Metode Terbuka (open method)
   - Hanya memerlukan satu titik sebagai tebakan awal

1. METODE PENGURUNGAN

Dilakukan dengan menebak 2 angka

a. Metode Bisection (bagi dua)
b. Metode Regula Falsi (posisi palsu) atau Metode Interpolasi Linier

a. Metode Bisection (Bagi Dua)

- Merupakan metode yang paling sederhana
- Diawali dengan menebak dua nilai yaitu nilai bawah (sblm akar) x_a dan nilai atas (stlh akar) x_b
- Tebakan benar jika $f(x_b)$ dan $f(x_a)$ mempunyai tanda yang berlawanan : $f(x_b) \cdot f(x_a) < 0$
- Jika $f(x_b) \cdot f(x_a) > 0$ maka tebakan awal diulangi
- Nilai kedua tebakan dibagi dua, disebut x_c
- Nilai x_c akan menggantikan posisi nilai lama.
- Jika x_c berada pada posisi x_b disebut dengan x'_b dan jika berada pada posisi x_a akan diubah menjadi x'_a

Algoritma Bisection (Bagi Dua)

1. Tebak akar atas, x_a dan akar bawah, x_b
2. Periksa $f(x_a).f(x_b)=0 \Rightarrow$ stop $\Rightarrow$ didapat harga akar
3. Periksa $f(x_a).f(x_b)<0$, jika tidak $\Rightarrow$ kembali ke-1
4. Periksa kriteria penghentian,

   jika terpenuhi $\Rightarrow$ stop $\Rightarrow$ tulis akar
5. Perkirakan akar yang dicari

   $$x_c = (x_a + x_b)/2$$
6. Evaluasi akar x_c $\Rightarrow$ Hitung $f(x_c)$
   a. Jika $f(x_c).f(x_a)>0$, $\Rightarrow$ maka x_c berada di subinterval bawah $\Rightarrow$ Atur $x_a = x_c \Rightarrow$ kembali ke-4
   b. Jika $f(x_c).f(x_a)<0$, $\Rightarrow$ maka x_c berada di subinterval atas $\Rightarrow$ Atur $x_b = x_c \Rightarrow$ kembali ke-4
   c. Jika $f(x_b).f(x_c)=0$, $\Rightarrow$ maka didapat harga akar yang dicari: x_c $\Rightarrow$ selesai

b. Metode Regula Falsi (Posisi Palsu)

- Merupakan perbaikan dari metode bisection
- Dilakukan dengan menarik garis lurus pada kedua interval x_b dan x_a
- Harga $$x_c = x_a - \frac{f(x_a)(x_b - x_a)}{f(x_b) - f(x_a)}$$
- Algoritma sama dengan metode bisection, hanya tahapan 5 diganti nilai $x_c$nya

2. METODE TERBUKA

Dilakukan dengan menebak 1 angka

a. Metode Pertemuan Dua Grafik
b. Metode Newton Raphson
c. Metode Secant

b. Metode Newton Raphson

- Mula-mula diperkirakan harga x_i awal kemudian dipotongkan thd kurva dan ditarik garis singgung
- Garis singgung merupakan tangen atau slope.
- Slope merupakan turunan pertama dari $f(x_i)$ sehingga didapat hubungan :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i+1})}$$

- Persamaan Newton Raphson :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Algoritma Newton Raphson

1. Tuliskan fungsi f(x)
2. Cari harga f'(x)
3. Masukkan tebakan awal x_0
4. Masukkan parameter penghentian program :
   - Kesalahan relatif perkiraan E_{bs}
   - Jumlah iterasi maksimum
5. Inisialisasi harga : iterasi = 0 dan E_{as} = 1.1 E_{bs}
6. Jika kesalahan relatif ($E_{as} > E_{bs}$) dan (iterasi < iterasi makasimum) maka :
   a. Harga $x_{iter} = x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
   b. Cek harga E_{as} $E_{as} = \left| \dfrac{x_{iter} - x_{iter-1}}{x_{iter}} \right|$
   c. Iterasi = iterasi + 1
7. Ulangi 6 sampai kondisi tercapai
8. Tulis x_{iter} = akar

c. Metode Secant

- Kelemahan metode Newton Raphson, harus mencari turunan pertama dari fungsi $f(x_i)$
- Metode secant untuk menghindari turunan pertama dengan turunan numerik mundur

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}$$

Sub Program PERSAMAAN NON LINEAR

Scilab menyediakan sub program untuk menyelesaikan satu atau beberapa sistem persamaan non linear secara simultan dengan menggunakan perintah **fsolve**

```
x = fsolve(x0, persamaan)
```

Contoh :
Akan dicari akar persamaan simultan non linear dari :

$$x^2 + xy = 10$$
$$y + 3xy^2 = 57$$

Kedua persamaan diubah menjadi :

$$f_1(x, y) = x^2 + xy - 10 = 0$$
$$f_2(x, y) = y + 3xy^2 - 57 = 0$$

Persamaan ditulis dalam bentuk matrik dengan x sebagai x(1) dan y sebagai x(2)

Contoh :

Diketahui persamaan Van der Waals untuk menggambarkan kondisi gas non-ideal :

$$\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT$$

Hitunglah volume molar udara (V) pada 50 atm dan suhu -100°C jika diketahui nilai konstanta a = 1.33 atm.liter^2/gmol, b = 0.0366 liter/gmol dan R = 0.08205 liter.atm/K.gmol

PERSAMAAN DIFERENSIAL

1. Persamaan Diferensial Biasa (ODE), hanya terdapat 1 variabel bebas

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y\frac{dy}{dx} = kx$$

2. Persamaan Diferensial Parsial (PDE), terdapat lebih dari 1 variabel bebas

$$\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Persamaan Diferensial Biasa (ODE)

Berdasarkan pangkat (Orde) :

- PDB Orde satu : $\dfrac{dy}{dx} + y = kx$
- PDB Orde dua : $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y\dfrac{dy}{dx} = kx$
- PDB Orde tiga : $\dfrac{d^3y}{dx^3} + a\dfrac{d^2y}{dx^2} + b\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = kx$

Berdasarkan kondisi batas :

- IVP (Initial Value Problems), bila nilai variabel tak bebas atau turunannya diketahui pada kondisi nilai mula-mula
- BVP (Boundary Value Problems), bila nilai variabel tak bebas atau turunannya diketahui lebih dari satu nilai variabel bebasnya

Persamaan Diferensial Parsial (PDE)

- PDE Order satu : $\dfrac{\partial C}{\partial x} - \alpha \dfrac{\partial C}{\partial y} = 0$
- PDE Order dua : $\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_e \dfrac{\partial C}{\partial y} = 0$
- PDE Order tiga : $\left(\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)^2 + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa (ODE)

1. Metode Euler (Eksplisit)
2. Metode Euler Modifikasi (Implisit)
3. Metode Runge-Kutta

1. Metode Euler (Eksplisit)

Disebut juga metoda integrasi nilai awal

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Kondisi awal : $y(x_0) = y_0$

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} dy = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)\, dx \quad \Rightarrow \quad y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)\, dx$$

$$y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i)$$

Perbandingan Analitis dengan Metode Euler (Eksplisit)

Persamaan diferensial yang diselesaikan:

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 6x^2 + 8$$

Dimana x = 0, y = 2 (kondisi awal); x_a=3, h=0.5

x_i	y_{analtk}	y_{euler}	% kslhan
0	2	2	-
0.5	5.81	6	3.27
1	9	9.5	5.56
1.5	12.31	12.5	1.54
2	18	16.5	8.33
2.5	29.81	24.5	17.81
3	53	41	22.64

Algoritma Metode Euler (Eksplisit)

1. Tentukan $x = x_0$ dan $y = y_0$
2. Tentukan nilai awal x_0 dan nilai akhir x_a dari variabel bebas
3. Tentukan nilai h
4. Inisialisasi i = 0
5. Buat persamaan f(x,y), modul terpisah
6. Vektor $x(i)=[x_0, x_0+h, x_0+2h,\ldots,x_a]$
7. Jumlah loop, $n=(x_a-x_0)/h$
8. Untuk i=0 sampai n-1 maka :
9. $y_{i+1}=y_i + hf(x_i,y_i)$
10. $x = x + h$
11. Simpan nilai x_i, y_i
12. Lanjutkan i

2. Metode Euler Modifikasi (Implisit)

- Untuk memperkecil kesalahan
- Merupakan gabungan antara beda maju dan beda mundur
- Beda maju pertama dari y pada i sama dengan beda mundur pertama dari y pada i+1

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = \nabla y_{i+1} \quad \Rightarrow \quad y_{i+1} = y_i + \nabla y_{i+1}$$

- sehingga

$$y_{i+1} = y_i + h\,f\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right)$$

- Untuk memperbaiki metode Euler, maka metode Euler eksplisit digunakan untuk memprediksi nilai y_{i+1}

$$\left(y_{i+1}\right)_{pred} = y_i + h\,f\left(x_i, y_i\right) \dashrightarrow f_{pred}$$

- Nilai prediksi pada persamaan di atas digunakan untuk mengkoreksi metoda implisit

$$\left(y_{i+1}\right)_{kork} = y_i + h\,f\left(x_{i+1}, \left(y_{i+1}\right)_{pred}\right) \dashrightarrow f_{corr}$$

- Persamaan di atas disebut dengan Metode Prediktor Korektor atau Metode Heun
- Kombinasi metoda beda maju dan beda mundur dituliskan dalam bentuk

$$y_{i+1} = y_i + \tfrac{1}{2}\left(\nabla y_i + \nabla y_{i+1}\right)$$

$$\left(y_{i+1}\right) = y_i + \tfrac{1}{2}h\,\underbrace{f\left(x_i, y_i\right)}_{f_{pred}} + \tfrac{1}{2}h\,\underbrace{f\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right)}_{f_{corr}}$$

Perbandingan dengan Analitis

x_i	y_{analtk}	y_{euler}	% kslhan Euler	$y_{euler\text{-}mod}$	% kslhan Euler-mod
0	2	2	-	2	-
0.5	5.81	6	3.27	5.75	1.03
1	9	9.5	5.56	9	0.0
1.5	12.31	12.5	1.54	12.5	1.54
2	18	16.5	8.33	18.5	2.78
2.5	29.81	24.5	17.81	30.75	3.15
3	53	41	22.64	54.5	2.83

3. Metode Runge-Kutta

- Merupakan metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial dengan ketelitian dan kestabilan yang cukup tinggi.
- Sangat umum digunakan untuk menyelesaikan bentuk PDB baik linear maupun non linear dengan problema kondisi awal

Bentuk penyelesaian berdasarkan orde (pangkat):

- Orde (pangkat) dua: $y_{i+1} = y_i + \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2)$

  Dimana nilai dari k_i adalah : $k_1 = h\,f(x_i, y_i)$

  $k_2 = h\,f(x_i + h, y_i + k_1)$

- Orde (pangkat) tiga : $y_{i+1} = y_i + \tfrac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$

  Dimana nilai dari k_i adalah : $k_1 = h\,f(x_i, y_i)$

  $$k_2 = h\,f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \quad ; \quad k_3 = h\,f(x_i + h, y_i + 2k_2 - k_1)$$

- Orde (pangkat) empat : $y_{i+1} = y_i + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

  Dimana nilai dari k_i adalah :

  $$k_1 = h\,f(x_i, y_i)$$

  $$k_2 = h\,f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

  $$k_3 = h\,f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right)$$

  $$k_4 = h\,f(x_i + h, y_i + k_3)$$

Perbandingan dengan Analitis

x_i	y_{analtk}	y_{euler}	**% kslhan Euler**	$y_{euler\text{-}mod}$	**% kslhan Euler-mod**	y_{rk4}	**% kslhan rk4**
0	2	2	-	2	-	2	-
0.5	5.8125	6	3.27	5.75	1.03	5.8125	0
1	9	9.5	5.56	9	0.0	9	0
1.5	12.3125	12.5	1.54	12.5	1.54	12.3125	0
2	18	16.5	8.33	18.5	2.78	18	0
2.5	29.8125	24.5	17.81	30.75	3.15	29.8125	0
3	53	41	22.64	54.5	2.83	53	0

Sub Program PDB

Scilab menyediakan sub program siap pakai untuk menyelesaikan persoalan PDB

```
y=ode (y0,t0,t,fungsi)
```

Bentuk persamaan : $\frac{dy}{dt} = \text{fungsi}$

Dimana :

y0 = kondisi awal dari variabel tak bebas (y)

t0 = kondisi awal dari variabel bebas (t)

t = batasan simulasi dari variabel bebas

Persamaan Diferensial Biasa Simultan

Merupakan sekumpulan persamaan diferensial biasa yang harus diselesaikan secara simultan

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

.

.

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Penyelesaian dengan menggunakan metode Runge Kutta orde empat

$$y_{i+1,j} = y_{i,j} + \tfrac{1}{6}\left(k_{1j} + 2k_{2j} + 2k_{3j} + k_{4j}\right)$$

Dengan nilai k adalah :

$$k_{1,j} = hf_j\left(x_i, y_{i,1}, y_{i,2}, \ldots, y_{i,n}\right)$$

$$k_{2,j} = hf_j\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{i,1} + \frac{k_{1,1}}{2}, y_{i,2} + \frac{k_{1,2}}{2}, \ldots, y_{i,n} + \frac{k_{1,n}}{2}\right)$$

$$k_{3,j} = hf_j\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{i,1} + \frac{k_{2,1}}{2}, y_{i,2} + \frac{k_{2,2}}{2}, \ldots, y_{i,n} + \frac{k_{2,n}}{2}\right)$$

$$k_{4,j} = hf_j\left(x_i + h, y_{i,1} + k_{3,1}, y_{i,2} + k_{3,2}, \ldots, y_{i,n} + k_{3,n}\right)$$

Dimana j = 1, 2, … , n $\rightarrow$ menunjukkan nomor persamaannya

Jika dalam sistem terdapat dua persamaan diferensial biasa dengan bentuk

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2)$$
$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2)$$

Maka penyelesaian persamaan diferensial biasa tersebut dengan menggunakan metode Runge Kutta orde 4 secara simultan adalah :

$$y_{i+1,1} = y_{i,1} + \tfrac{1}{6}\left(k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}\right)$$
$$y_{i+1,2} = y_{i,2} + \tfrac{1}{6}\left(k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}\right)$$

dimana :

$$k_{1,1} = hf_1\left(x_i, y_{i,1}, y_{i,2}\right)$$

$$k_{1,2} = hf_2\left(x_i, y_{i,1}, y_{i,2}\right)$$

$$k_{2,1} = hf_1\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{i,1} + \frac{k_{1,1}}{2}, y_{i,2} + \frac{k_{1,2}}{2}\right)$$

$$k_{2,2} = hf_2\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{i,1} + \frac{k_{1,1}}{2}, y_{i,2} + \frac{k_{1,2}}{2}\right)$$

$$k_{3,1} = hf_1\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{i,1} + \frac{k_{2,1}}{2}, y_{i,2} + \frac{k_{2,2}}{2}\right)$$

$$k_{3,2} = hf_2\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{i,1} + \frac{k_{2,1}}{2}, y_{i,2} + \frac{k_{2,2}}{2}\right)$$

$$k_{4,1} = hf_1\left(x_i + h, y_{i,1} + k_{3,1}, y_{i,2} + k_{3,2}\right)$$

$$k_{4,2} = hf_2\left(x_i + h, y_{i,1} + k_{3,1}, y_{i,2} + k_{3,2}\right)$$

Akan diselesaikan dan divisualisasikan dua buah persamaan diferensial biasa sebagai berikut :

$$\frac{dy_1}{dx} = -0.5\,y_1$$

$$\frac{dy_2}{dx} = 4 - 0.3\,y_2 - 0.1\,y_1$$

Dengan kondisi awal (batas) :

$x = 0; \quad y_1 = 4; \quad y_2 = 2$

Contoh :

Dua buah tangki air tersambung secara seri dan saling berinteraksi. Kecepatan aliran keluar merupakan fungsi akar kuadrat dari ketinggian air, jadi untuk tangki 1 kecepatan alirannya adalah $\sqrt{h_1 - h_2}$ sedangkan untuk tangki 2 sebagai fungsi $\sqrt{h_2}$. Akan ditentukan ketinggian h_1 dan h_2 sebagai fungsi waktu dari t = 0 sampai t = 40 menit dengan interval 4 menit. Setelah disusun neraca bahan, diperoleh persamaan diferensial simultan sebagai fungsi waktu :

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{F}{A_1} - \frac{\beta_1}{A_1}\sqrt{h_1 - h_2} \quad ; \quad \frac{dh_2}{dt} = \frac{\beta_2}{A_2}\sqrt{h_1 - h_2} - \frac{\beta_2}{A_2}\sqrt{h_2}$$

Harga-harga parameter yang ada :

β_1 = 2,5 $ft^{2,5}$/menit $\beta_2 = 5/\sqrt{6}$ ft^3/menit

A_1 = 5 ft^2 A_2 = 10 ft^2 F = 5 ft^3/menit

Dengan kondisi awal pada t = 0, h_1 = 12 ft dan h_2 = 7 ft

Uap campuran keluar dari kondensor parsial kolom destilasi yang beroperasi pada 1 atm dengan komposisi 47% mol air (1), 20% mol asam formiat (2) dan sisanya methanol (3). Pada kondensor terjadi kesetimbangan antara uap dan cairannya dan berlaku persamaan-persamaan berikut :

$x_i = \frac{y_i}{K_i}$ dimana, $K_i = \frac{P^o{}_i}{P}$ dan untuk $P^0{}_i$ diperkirakan dengan persamaan Antoine :

$$P^o{}_i = \exp\left(A_i - \frac{B_i}{T + C_i}\right)$$ dengan i = 1, 2, 3 dan $\sum_i x_i = 1$

Perkirakanlah suhu operasi pada operasi kondensor (=dewpoint uap campuran) dalam ^oC, dengan data konstanta

A1 = 18,304	A2 = 16,988	A3 = 18,510
B1 = 3816,4	B2 = 3599,6	B3 = 3593,4
C1 = -46,13	C2 = -26,09	C3 = -35,225

P^o dalam mmHg dan T dalam Kelvin