Транспортная задача Монжа-Канторовича

m пунктов производства $i = 1, 2, \dots, m$

n пунктов потребления $j = 1, 2, \dots, n$

a_i — объём производства в пункте i

b_j — объём потребления в пункте j

c_{ij} — затраты на перевозку единицы продукта из i в j

x_{ij} — объём перевозок из i в j

Условие: 1) $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$ 4) $X \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$

2) $\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$

3) $\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$

Задача: ~~4)~~

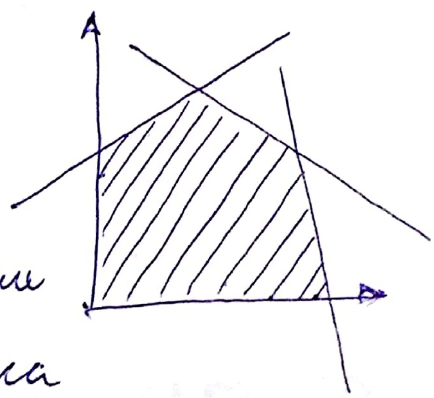
$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\langle C, X \rangle \to \min$$

Симплекс метод

$$\begin{cases} c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max \\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \le b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \le b_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 \le b_3 \end{cases}$$

n неравенств образуются в равенства и мы получаем вершину многоугольника



$$\begin{cases} \langle C, X \rangle \to \max \\ Ax \le b \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}^n$; $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$; $b \in \mathbb{R}^m$

Scanned by CamScanner

$$\mathcal{W}(p, q) = \min_{x \in U(p,q)} \langle C, x \rangle$$ — расстояние Васерштейна, где

$$U(p,q) = \begin{cases} \sum_j x_{ij} = p_i & \forall i,j \\ \sum_i x_{ij} = q_j & \forall i,j \\ x_{ij} \geq 0 & \forall i,j \end{cases}$$

Асимптотика решения

$$\tilde{p} = \arg\min_p \sum_{i=1}^{n} \mathcal{W}(p, q_i) \quad — \quad O(n^3)$$

Добавим регуляризационное слагаемое

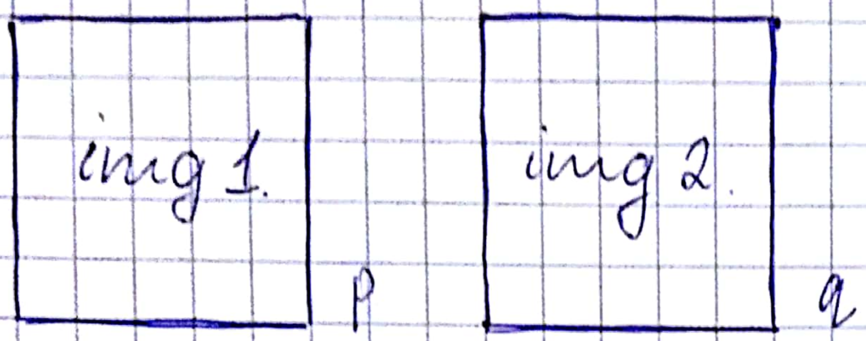
$$\mathcal{W}_\gamma(p, q) = \min_{x \in U(p,q)} \left\{ \langle C, x \rangle + \gamma \sum x_{ij} \cdot \log \frac{x_{ij}}{x^0_{ij}} \right\}$$

Асимптотика решения

$$\tilde{p} = \arg\min_p \sum_{i=1}^{n} \mathcal{W}_\gamma(p, q_i) \quad — \quad O(n^2)$$

Scanned by CamScanner

Общая картина



$$p = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2}$$ — гистограмма яркости пикселей на картинке 1.

$$p, q \in S_n(1), \quad S_n(1) = \{p \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}$$ — единичный симплекс

$$U(p,q) = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n}_+ : \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = p_i, \ \sum_{i=1}^{n} X_{ij} = q_j\}$$

$$W(p,q) = \min_{x \in U(p,q)} \sum_{i,j}^{n} c_{ij} x_{ij} = \min_{x \in U(p,q)} \langle C, X \rangle$$

$$\tilde{p} = \min_{p} \sum_{i=1}^{n} W_q(p)$$ — барицентр Вассерштейна

$$W_\gamma(p,q) = \min_{\substack{\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = p_i, \ \sum_{i=1}^{n} = q_j \\ x_{ij} \geq 0 \ \forall i,j}} \left\{ \sum_{i,j}^{n} c_{ij} x_{ij} + \gamma \sum_{i,j}^{n} x_{ij} \log x_{ij} \right\} =$$

$$= \min_{x_{ij} \geq 0} \max_{u,v} \left\{ \sum_{i=1}^{n} u_i \left(p_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) + \sum_{j=1}^{n} v_j \left(p_j - \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i,j}^{n} c_{ij} x_{ij} + \gamma \sum_{i,j}^{n} x_{ij} \log x_{ij} \right\} \overset{df}{=} \min_{x_{ij} \geq 0} \max_{u,v} g =$$

$$g'_{x_{ij}} = 0$$

$$\vdots$$

$$x_{ij} = f_1(u,v)$$

$$\vdots$$

$$= \max_{u,v} \left\{ \langle u, p \rangle + \langle v, q \rangle - \gamma \sum_{i,j}^{n} \exp\left(\frac{u_i - c_{ij} + v_j}{\gamma} - 1 \right) \right\} =$$

$$\overset{df}{=} \max_{u,v} \varphi =$$

$$\varphi'_v = 0$$

$$\vdots$$

$$v = f_2(u)$$

$$= \max_{u} \left\{ \langle u, p \rangle - \underbrace{\gamma \sum_{j=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{q_j} \sum_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{u_i - c_{ij}}{\gamma} \right) \right)}_{= W^*} \right\}$$

$$W = |W^{**}|$$

$x_{ij}^{k} = 1/n^2$

Метод Синхорна (Брегмана – Шелейховского)

$$\sum_{i,j=1,1}^{n,n} c_{ij} x_{ij} + \gamma \sum_{i,j=1,1}^{n,n} x_{ij} \ln(x_{ij}/x_{ij}^{k}) \to \min$$

$$(A)\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = p_i,\ i=\overline{1,n} & \lambda_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = q_j,\ j=\overline{1,n} & \mu_j \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

$$L(x,\lambda,\mu) = \sum_{i,j=1,1}^{n,n} \left(c_{ij} x_{ij} + \gamma x_{ij} \ln(x_{ij}/x_{ij}^{k}) \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - p_i \right) + \sum_{j=1}^{n} \mu_j \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} - q_j \right) \to \min_{x_{ij}}$$

$$L'_{x_{ij}}(x,\lambda,\mu) = 0, \quad \forall i,j \Rightarrow x_{ij}(\lambda,\mu) \to (A)$$

$$\Downarrow$$

$$c_{ij} + \gamma \ln(x_{ij}/x_{ij}^{k}) + \gamma + \lambda_i + \mu_j = 0 \Rightarrow$$

$$x_{ij} = \cancel{\exp}\ x_{ij}^{k} \exp\left(- \frac{\gamma + c_{ij} + \lambda_i + \mu_j}{\gamma} \right)$$

$$x_{ij}(\lambda,\mu) = x_{ij}^{k} \exp\left(- \frac{\gamma + c_{ij} + \lambda_i + \mu_j}{\gamma} \right) \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{k} \exp\left(- \frac{\gamma + c_{ij} + \lambda_i + \mu_j}{\gamma} \right) = p_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^{k} \exp\left(- \frac{\gamma + c_{ij} + \lambda_i + \mu_j}{\gamma} \right) = q_j \end{cases}$$

$$\to \exp\left(-\frac{\lambda_i}{\gamma}\right) \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{k} \exp\left(- \frac{\gamma + c_{ij} + \mu_j}{\gamma} \right) = p_i$$

$$\to \exp\left(-\frac{\mu_j}{\gamma}\right) \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^{k} \exp\left(- \frac{\gamma + c_{ij} + \lambda_i}{\gamma} \right) = q_j$$

$$\ln\left(\frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{k} \exp\left(- \frac{\gamma + c_{ij} + \mu_j}{\gamma} \right) \right) = -\frac{\lambda_i}{\gamma}$$

$$\lambda_i^{t+1} = \gamma \ln\left(\frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{k} \exp\left(- \frac{\gamma + c_{ij} + \mu_j^{t}}{\gamma} \right) \right) \quad (2)$$

$$\mu_j^{t+1} = \gamma \ln\left(\frac{1}{q_j} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^{k} \exp\left(- \frac{\gamma + c_{ij} + \lambda_i^{t+1}}{\gamma} \right) \right) \quad (3)$$

$t = 1, 2, 3, \ldots$ итерации

$~~(\lambda^0, \mu^0)~~$ $\quad \mu^0 \to \lambda^1 \to \mu^1 \to \lambda^2 \to \ldots$

Th. Будет неподвижная точка