

Взвешенные графы. Кратчайшие пути

Гусев Илья, Булгаков Илья

Московский физико-технический институт

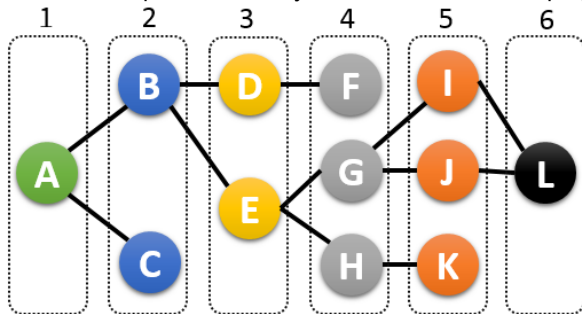
Москва, 2019

Содержание

- Взвешенные и невзвешенные графы
- Граф 0-1. Кратчайшие пути
- Граф 1-K. Кратчайшие пути
- Алгоритм Дейкстры для поиска кратчайших путей
- Алгоритм Беллмана-Форда

Повторение. Кратчайший путь в невзвешенном графе

Как найти кратчайший путь в невзвешенном графе?

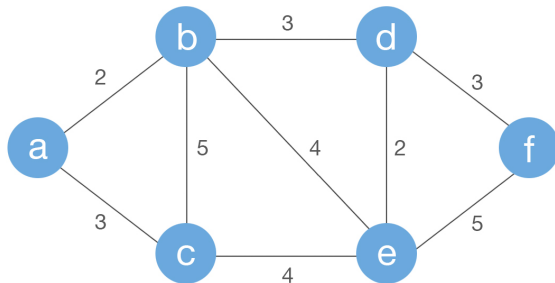


Breadth-First Search Levels

Сложность по времени и памяти - ?

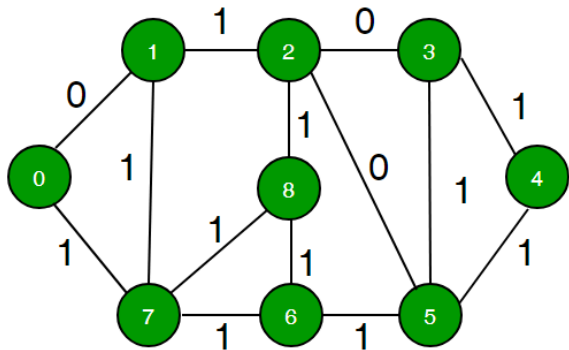
Взвешенный граф

Что такое взвешенный граф?



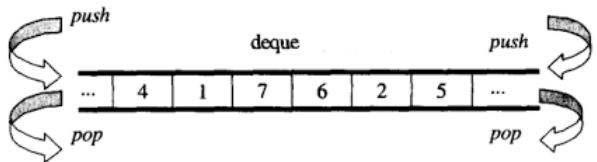
Взвешенный граф. Граф 0-1

Частный случай взвешенного графа. Ребра имеют веса 0 и 1.
Кратчайший путь может быть найден модификацией BFS.



Взвешенный граф. Граф 0-1

Нам поможет структура данных deque.



Напоминание.

Стандартная библиотека: `std::deque`.

- `push_back` - добавление в конец
- `pop_back` - получение из конца
- `push_front` - добавление в начало
- `pop_front` - получение из начала

Взвешенный граф. Граф 0-1

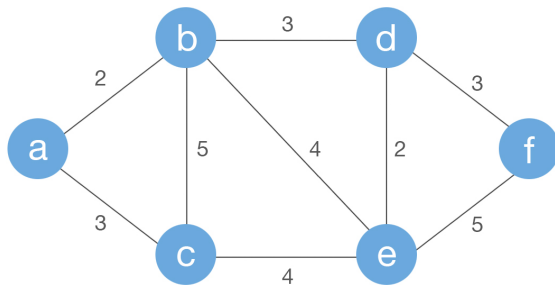
Если найдена необработанная вершина, то делаем проверку, чему равен вес ребра, который ведет к ней. Если 0 - добавление в начало очереди, 1 - в конец.

```
if (dist[edges[v][i].to] > dist[v] + edges[v][i].weight)
{
    dist[edges[v][i].to] = dist[v] + edges[v][i].weight;

    if (edges[v][i].weight == 0)
        Q.push_front(edges[v][i].to);
    else
        Q.push_back(edges[v][i].to);
}
```

Взвешенный граф. Граф 1-К

Частный случай взвешенного графа. Веса всех ребер находятся в диапазоне 1-К.



Взвешенный граф. Граф 1-К

Наивное решение.

Применим трансформацию графа: каждое ребро веса $w > 1$ превратим в w ребер веса 1. Так мы превратили граф в обычный невзвешенный граф.

После этого запустим обычный BFS для поиска кратчайшего пути.

Временная сложность - $O(E \cdot k)$

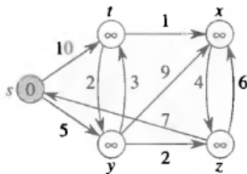
Память - $O(E \cdot k)$.

Взвешенный граф. Граф 1-К

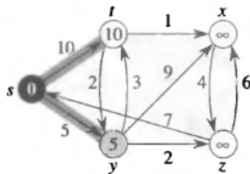
Альтернативное решение: $k + 1$ очередей
Временная сложность - $O(E + V \cdot k)$
Память - $O(V \cdot k)$.

Алгоритм Дейкстры для поиска кратчайших путей

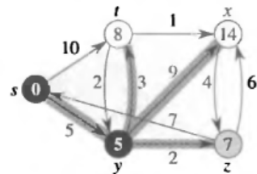
Важно: допустимы только ребра неотрицательного веса



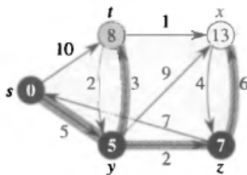
(a)



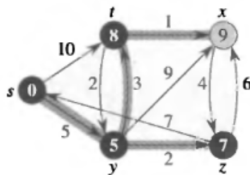
(б)



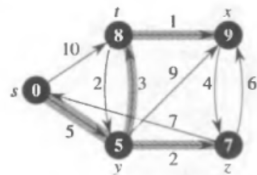
(в)



(r)



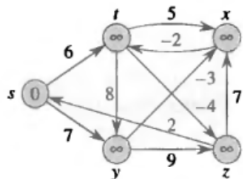
(д)



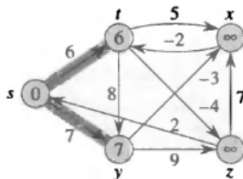
(e)

Алгоритм Беллмана-Форда

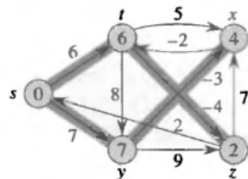
4 итераций обхода по числу вершин - 1



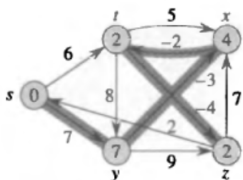
(a)



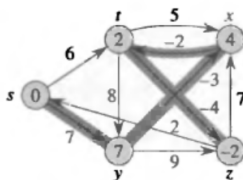
(б)



(в)



(r)



(л)

Алгоритм Беллмана-Форда: оптимизации

- 1 Остановка, если нет изменений в рёбрах
- 2 Список обновлённых вершин