

# План занятия ( 03.11.17 )

- Нахождение минимального накрывающего прямоугольника
- Пересечение выпуклых многоугольников

## Выпуклая оболочка (напоминание)

Алгоритм	Асимптотика n - число точек k - размер выпуклой оболочки
Джарвиса	$O(n*k)$
Грэхема	$O(n \log n)$
Эндрю	$O(n \log n)$

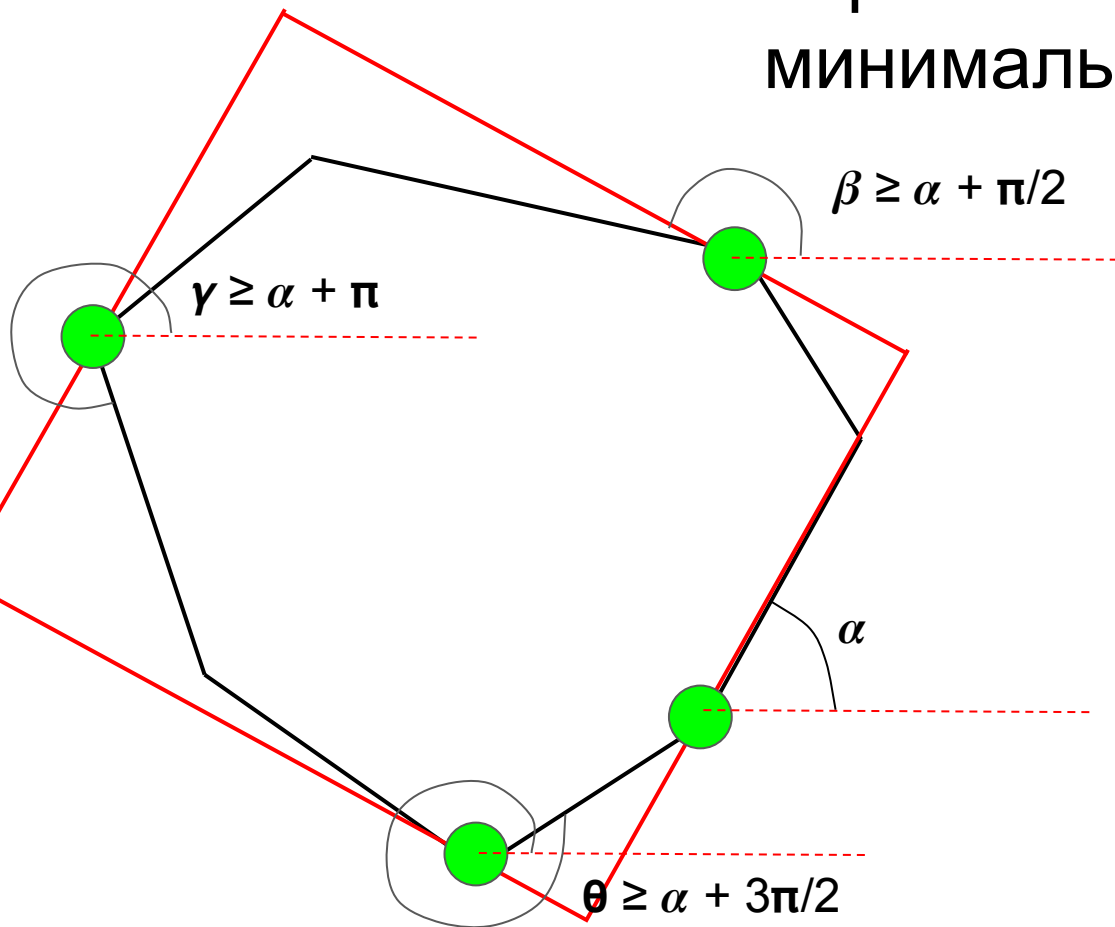
# Поиск накрывающего прямоугольника минимальной площади

- Минимальный накрывающий прямоугольник множества точек на плоскости есть минимальный накрывающий прямоугольник их выпуклой оболочки
- Минимальный накрывающий прямоугольник содержит как минимум одно ребро выпуклой оболочки  
(Докажем)

## Поиск накрывающего прямоугольника минимальной площади

1. Для каждого ребра выпуклой оболочки строим “опирающийся” на нее накрывающий прямоугольник
2. Находим его площадь
3. Выбираем прямоугольник с наименьшей площадью

# Поиск накрывающего прямоугольника минимальной площади

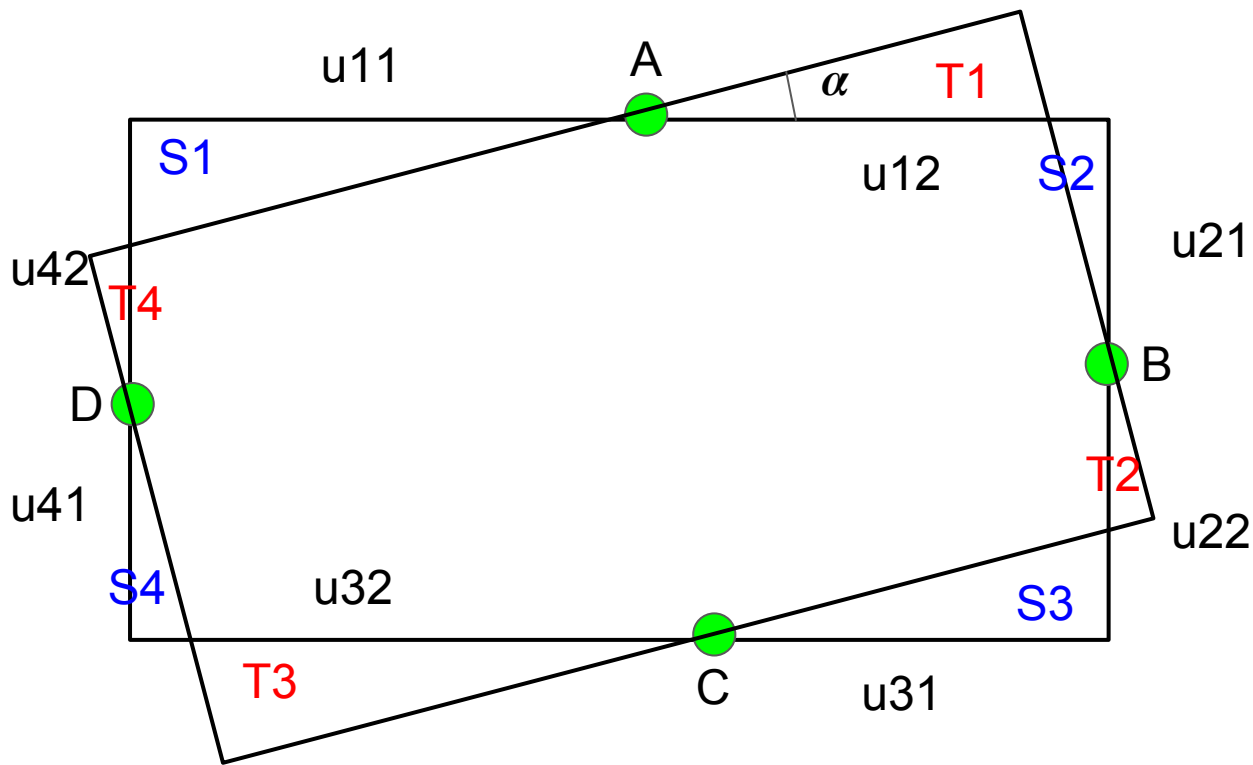


Работаем с четырьмя углами:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\theta$

Каждый угол делает не более двух оборотов

Время работы  $O(n)$ ,  $n$  - размер выпуклой оболочки

Почему полученный прямоугольник будет минимальным накрывающим?



Найдем разность площадей исходного прямоугольника и повернутого

## Формулы

$$\Delta A = \sum_{i=1}^4 S_i - \sum_{i=1}^4 T_i$$

where

$$S_i = \frac{1}{2} u_{i1}^2 \tan \alpha$$

$$T_i = \frac{1}{2} (u_{i2} - u_{i+1,1} \tan \alpha)^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

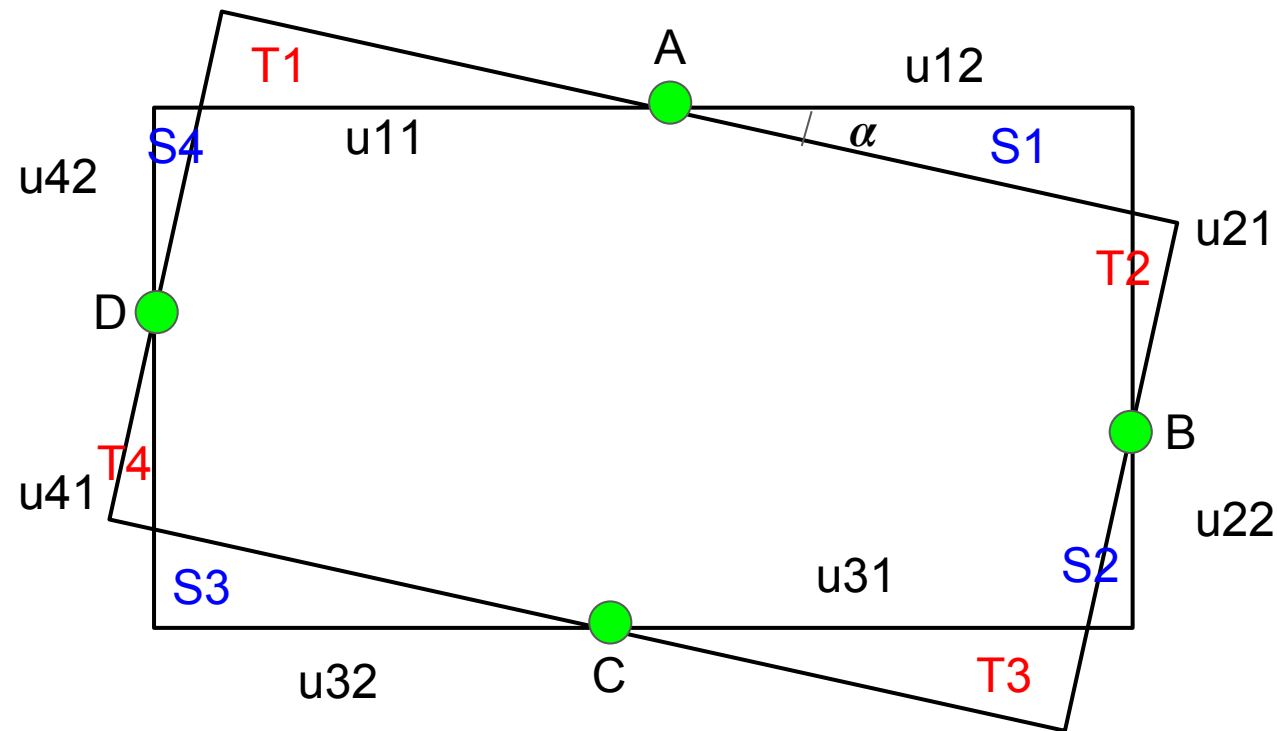
## Формулы

$$\begin{aligned}\Delta A &= \sin^2 \alpha \sum_{i=1}^4 u_{i2} u_{i+1,1} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha \left[ \sum_{i=1}^4 u_{i1}^2 - \sum_{i=1}^4 u_{i2}^2 \right] \\ &= K_1 + K_2 \left[ \sum_{i=1}^4 u_{i1}^2 - \sum_{i=1}^4 u_{i2}^2 \right]\end{aligned}$$

where  $K_1$  and  $K_2$  are both positive.



# Теперь поворот в другую сторону



Найдем разность  
площадей исходного  
прямоугольника и  
повернутого

## Формулы

$$S_i = \frac{1}{2} u_{i2}^2 \tan \alpha$$

$$T_i = \frac{1}{2} (u_{i1} - u_{i-1,2} \tan \alpha)^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\Delta A = \sum_{i=1}^4 S_i - \sum_{i=1}^4 T_i$$

$$= \sin^2 \alpha \sum_{i=1}^4 u_{i1} u_{i-1,2}$$

$$+ \frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha \left[ \sum_{i=1}^4 u_{i2}^2 - \sum_{i=1}^4 u_{i1}^2 \right]$$

$$= K_1 - K_2 \left[ \sum_{i=1}^4 u_{i1}^2 - \sum_{i=1}^4 u_{i2}^2 \right]$$

## Итог

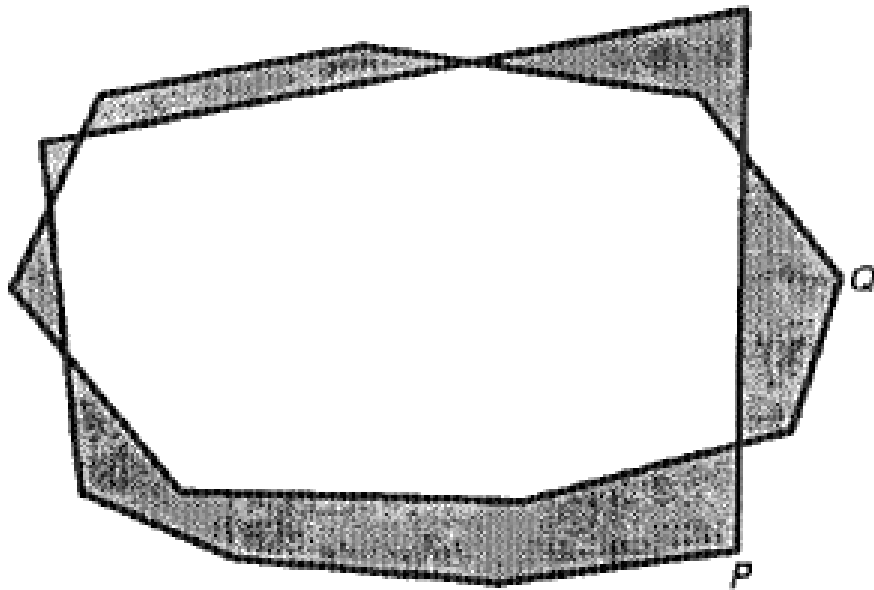
- Повернув в одну из сторон, получим прямоугольник меньшей площади
- Пусть минимальный прямоугольник не опирается на ребро, тогда его можно повернуть. Противоречие с минимальностью прямоугольника

Статью с доказательством выложим

# Поиск накрывающего прямоугольника минимального периметра

Аналогично, только вместо разности площади находим  
разность периметров ( Упражнение )

# Пересечение выпуклых многоугольников

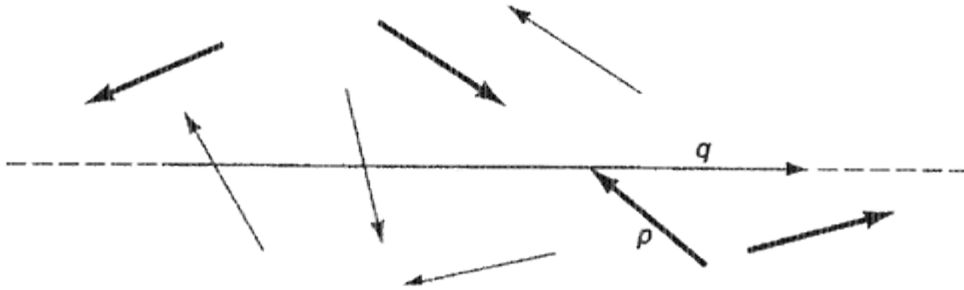


Закрашенные области  
называются “серпами”

Для P и Q поддерживаются  
текущие ребра

Ребра P и Q обходятся по  
часовой стрелке

# Правило перемещения для текущих ребер. “Нацеленность” ребра

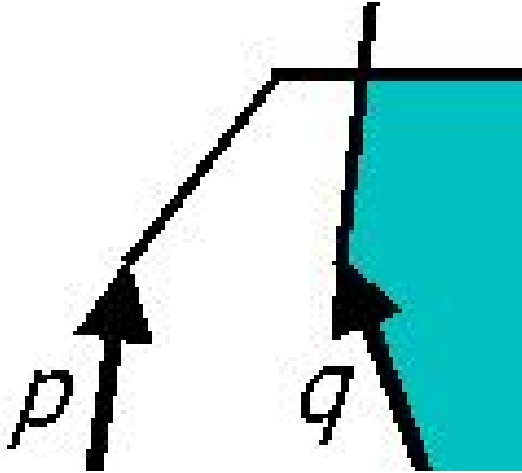


Ребро  **$p$**  “нацелено” на ребро  **$q$** , если луч  $P$  пересекает прямую  $Q$

Ребро  **$p$**  “снаружи” ребра  **$q$** , если луч конец  **$p$**  расположен левее  $Q$

# Правило перемещения для текущих ребер

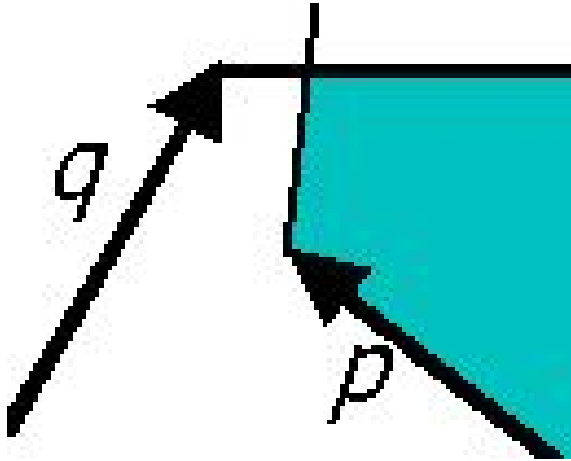
## Случай 1 ( $p$ и $q$ нацелены друг на друга)



- перемещаем тот указатель, который соответствует тому ребру, которое находится снаружи от другого;

# Правило перемещения для текущих ребер

## Случай 2 ( $p$ нацелено на $q$ , а $q$ не нацелено на $p$ )

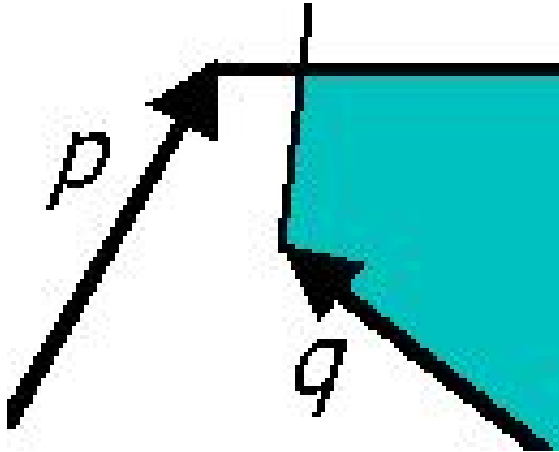


- если  $p$  не находится снаружи  $q$ , то конечная концевая точка ребра  $p$  заносится в многоугольник пересечения;
- перемещаем окно  $p$ ;



# Правило перемещения для текущих ребер

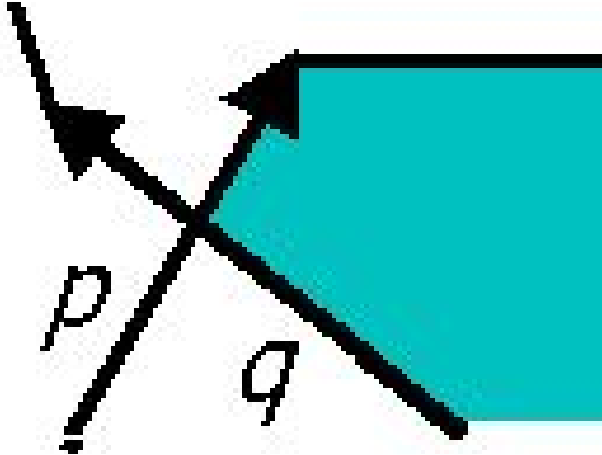
## Случай 3 ( $q$ нацелено на $p$ , а $p$ не нацелено на $q$ )



- если  $q$  не находится снаружи  $p$ , то конечная концевая точка ребра  $q$  заносится в многоугольник пересечения;
- перемещаем окно  $q$ ;

# Правило перемещения для текущих ребер

## Случай 4 ( $p$ и $q$ не нацелены друг на друга)

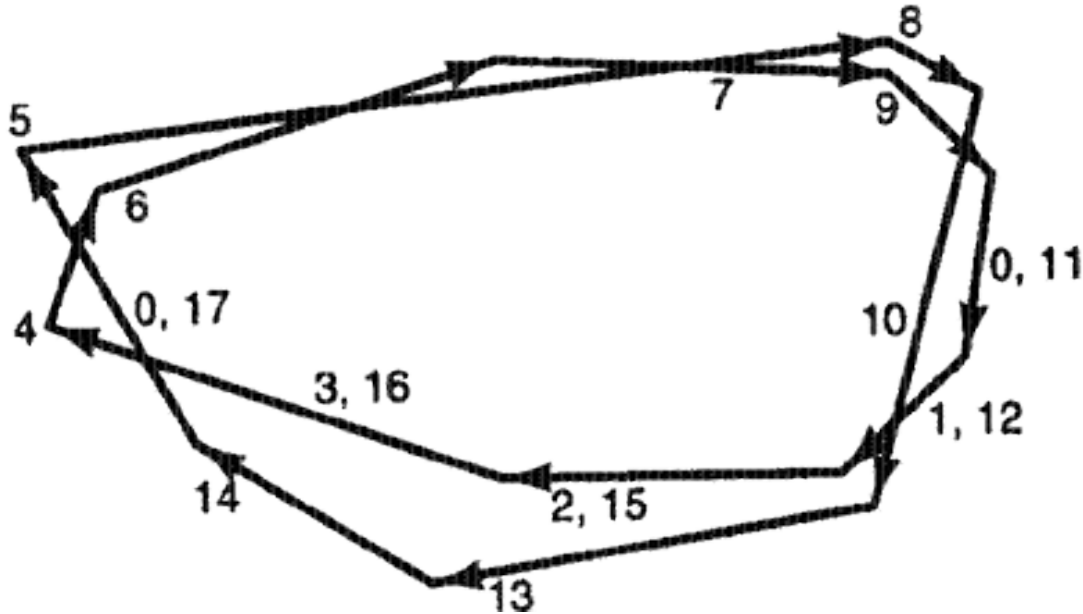


- если  $p$  и  $q$  пересекаются, то точка их пересечения заносится в многоугольник пересечения;
- перемещаем окно, которое соответствует тому ребру, которое находится снаружи от другого.

# Алгоритм

1. перемещаем указатели по указанным выше правилам (не формируя многоугольник пересечения) до обнаружения точки пересечения рёбер.
  - а. если такая точка нашлась, то переходим к следующей части
  - б. иначе проверяем принадлежность многоугольников друг другу и завершаем работу;
2. перемещаем указатели по тем же правилам (формируя многоугольник пересечения) до повторного обнаружения какой-либо точки пересечения.

## Пример работы



Время работы -  $O(n)$

## Ссылки

### 1. Накрывающий прямоугольник

- a. <https://pdfs.semanticscholar.org/5f8e/a150ac5447c1103b75eaefd702280b91670d.pdf>
- b. <http://www.datagenetics.com/blog/march12014/index.html>

### 2. Пересечение выпуклых многоугольников

- a. [http://algotist.manual.ru/maths/geom/intersect/convex\\_intersect.php](http://algotist.manual.ru/maths/geom/intersect/convex_intersect.php)
- b. <http://rain.ifmo.ru/cat/view.php/theory/math/geometry-2005>