Декартово дерево

Гусев Илья, Булгаков Илья

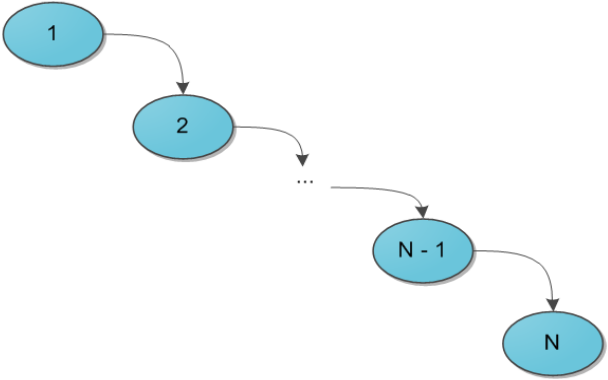
Московский физико-технический институт

Москва, 2018

Содержание

Проблемы бинарных деревьев поиска

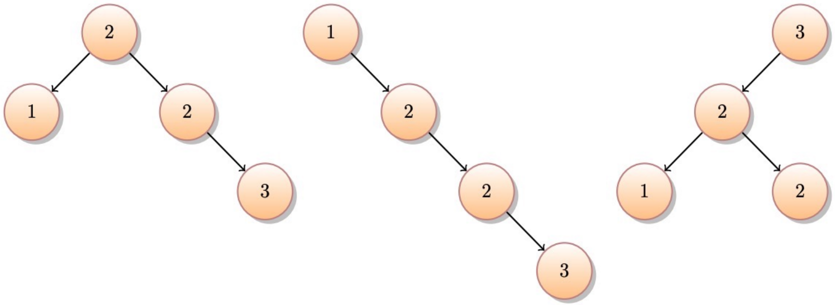
Вырождение



O(N) на вставку и удаление

Проблемы бинарных деревьев поиска

Неоднозначность

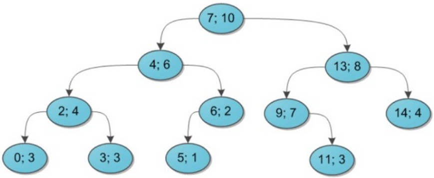


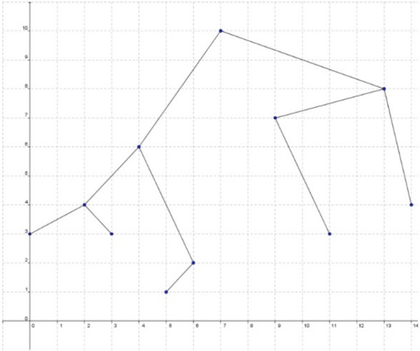
Зависит от порядка вставки элементов

Декартово дерево
Общее описание

- Бинарное дерево поиска по ключу x
- Куча по приоритету y
- В одной вершине храним x и y
- Случайные приоритеты $\rightarrow$ балансировка
- Другие названия:
  1. treap (tree + heap)
  2. дуча (дерево + куча)
  3. дерамида (дерево + пирамида)
  4. курево (куча + дерево)

Почему декартово?





По x - дерево поиска, по y - куча

Декартово дерево

Внешние операции

- Вставка элемента: в среднем $O(log(N))$
- Удаление элемента: в среднем $O(log(N))$
- Поиск по ключу: в среднем $O(log(N))$
- Построение по отсортированному массиву за $O(n)$
- Поиск k-порядковой статистики: в среднем $O(log(N))$, нужно $O(n)$ доп. памяти
- Сумма, минимум, максимум на отрезке: в среднем $O(log(N))$, нужно $O(n)$ доп. памяти

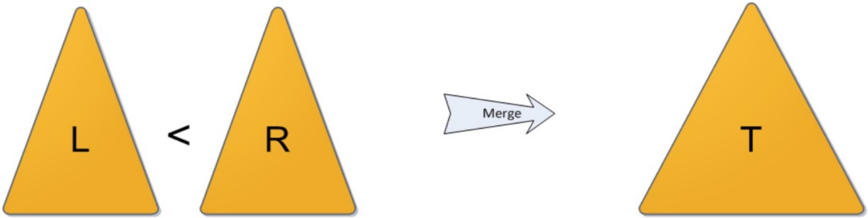
Декартово дерево

Внутрненние операции

- Merge - склейка 2 деревьев; все ключи одного меньше всех ключей другого: в среднем $O(log(N))$
- Split - разрезание по ключу на 2 дерева: в среднем $O(log(N))$

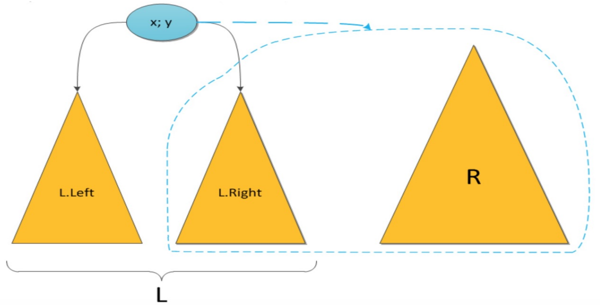
Декартово дерево

Merge



- Все ключи дерева L меньше ключей дерева R
- Б.о.о. приоритет (y) корня левого дерева больше приоритета корня правого дерева $\rightarrow$ новый корень - корень левого дерева

Декартово дерево
Merge



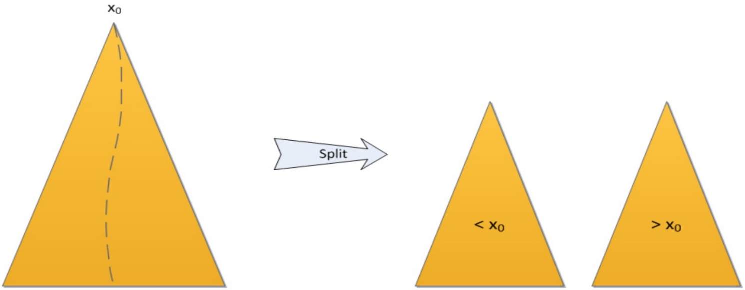
- Тогда R - точно в правом поддереве нового корня
- L.Left - точно левое поддерво нового корня
- Рекурсивно сливаем L.Right и R
- База рекурсии: хотя бы одно дерево пустое

Декартово дерево

Merge

- Сложность: сумма высот деревьев, в среднем $O(log(n) + log(m))$

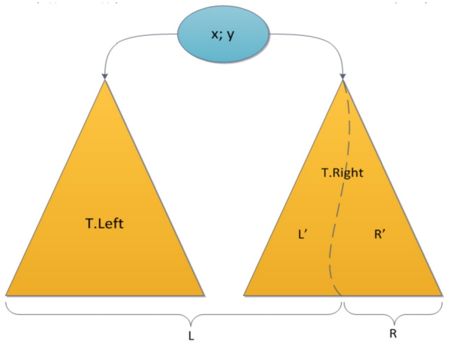
Декартово дерево
Split



- Разделяем по ключу x_o
- Б.о.о ключ корня меньше x_0

Декартово дерево

Split



- Рекурсивно делим правое поддерево корня на L’ и R’
- L’ - новое правое поддерево корня

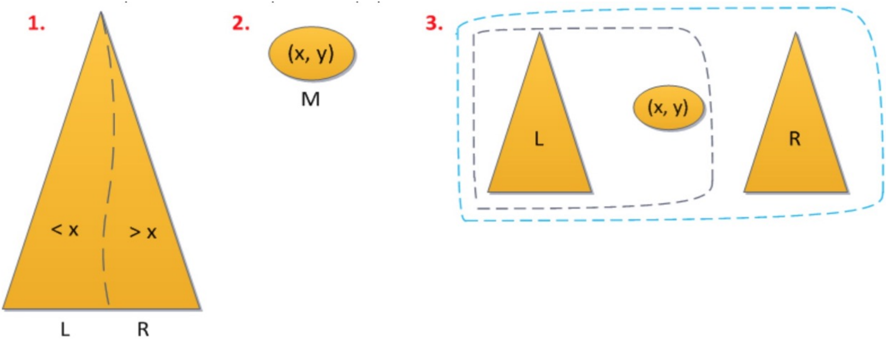
Декартово дерево

Split

- Сложность: высота изначального дерева, в среднем $O(log(n))$

Декартово дерево

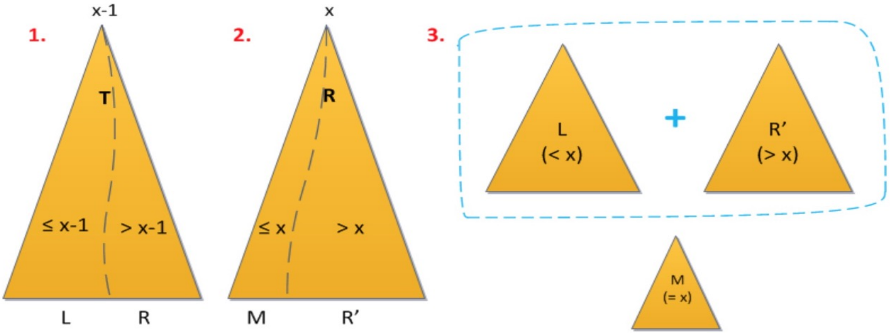
Insert



Вставка элемента (x, y)
1 Split + 2 Merge

Декартово дерево

Remove



Удаление элементов с ключом x

2 Split + 1 Merge

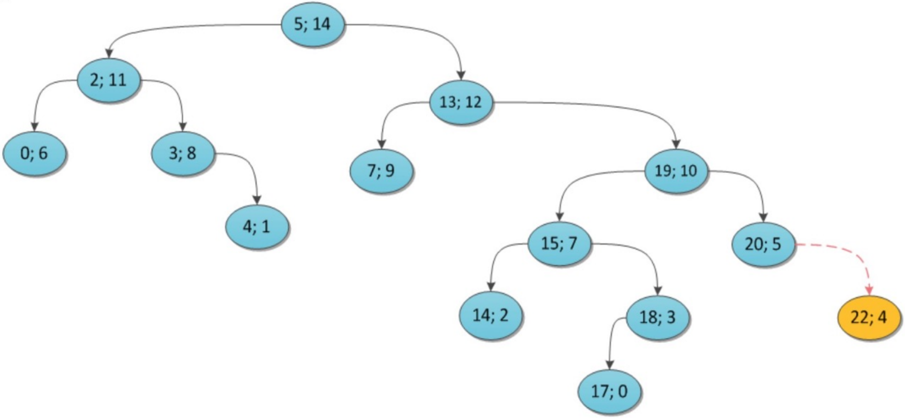
Декартово дерево
Build

- В случае неотсортированного массива - n вставок, $O(n \cdot log(n))$
- В случае отсортированного массива всегда рассматриваем самую правую ветку и вставляем в самую правую ветку $\rightarrow$ каждый элемент рассматривается не больше 2 раз $\rightarrow O(n)$
- Нужны ссылки на предков и на последнюю вставленную вершину

Декартово дерево

Build-1

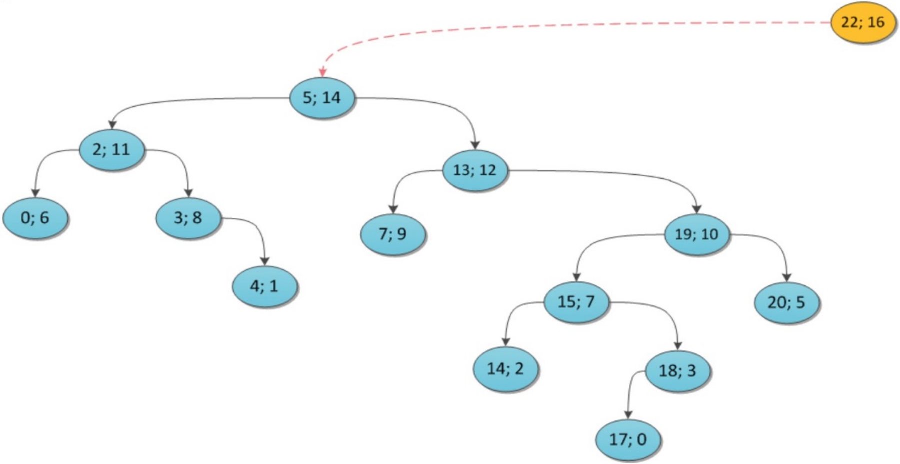
y = 4:



Декартово дерево

Build-2

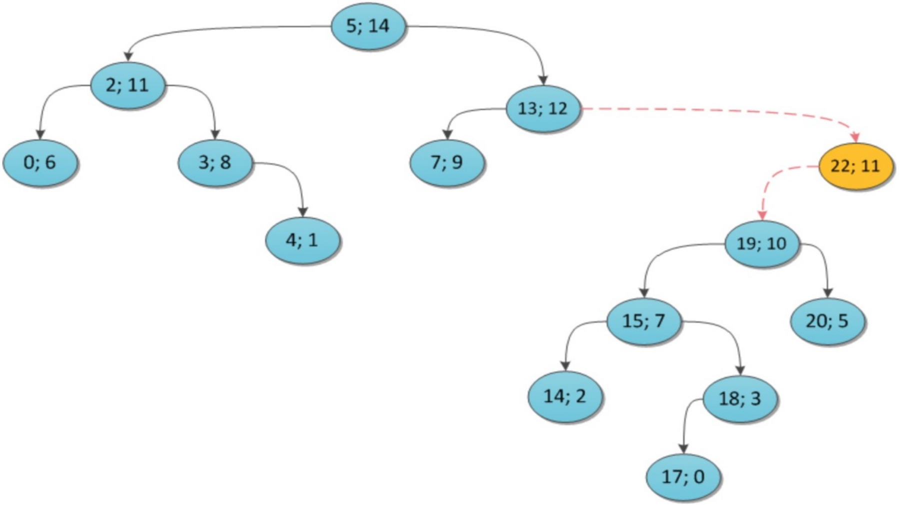
y = 16:



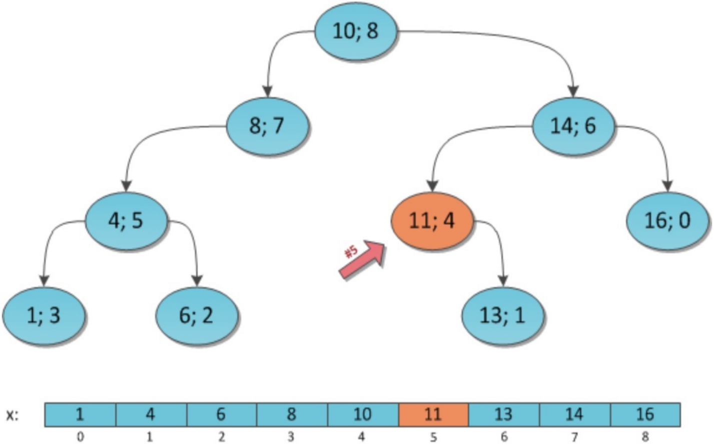
Декартово дерево

Build-3

y = 11:



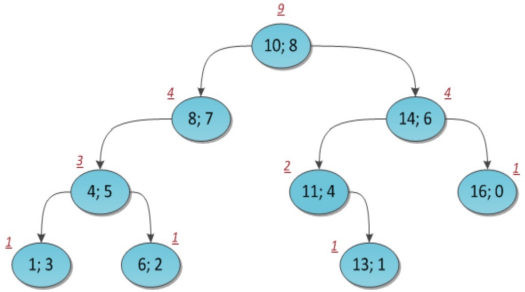
К-ая порядковая статистика



Используем обычный обход бинарного дерева поиска $\rightarrow O(n)$

K-ая порядковая статистика

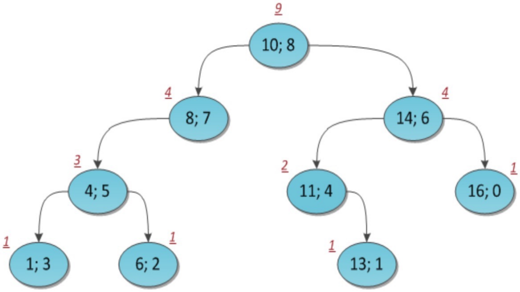
Через размер поддеревьев



- Для каждой вершины храним размер её поддерева
- Спускаемся с корня
- Если размер левого поддерева равен K - мы победили
- Если размер левого поддерева больше K, спускаемя в него и повторяем
- Если размер левого поддерева меньше K, уменьшаем K и спускаемся в правое поддерево

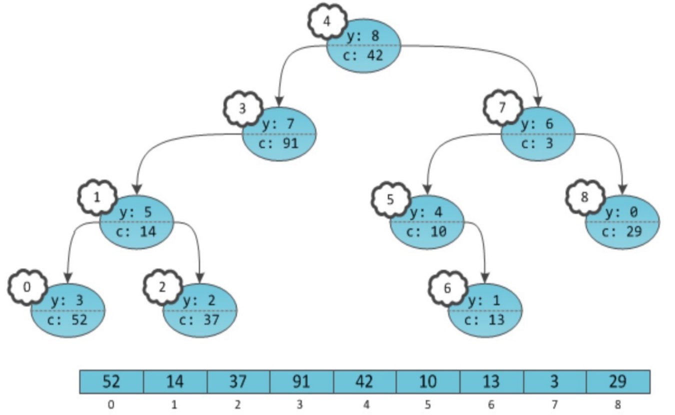
К-ая порядковая статистика

Через размер поддеревьев



- Сложность: $O(log(n))$
- Но при вставке элементов нужно пересчитывать размеры, наивно: $O(n)$
- Модифицируем Merge и Split - плюс O(1) операций на каждый их шаг
- Не только размер поддеревьев, а любые значения: max, min, sum

Декартово дерево по неявному ключу



- Рассматриваем дерево как массив, ключи - индексы в массиве
- Слияние 2 массивов, вставка элемента в произвольное место, удаление элемента из произвольного места и много другого: в среднем $O(log(n))$!

Полезные ссылки I

- Цикл 'Декартово дерево' на Хабре
  https://habr.com/post/101818/
- E-maxx: Декартово дерево (treap, дерамида)
  http://www.e-maxx-ru.1gb.ru/algo/treap
- Конспкеты лекций ЗКШ: декартово дерево
  https://bit.ly/2ORjVU2
- Викиконспекты: Декартово дерево
  https://bit.ly/2CcsxOa