

План занятия (10.11.17)

- Построение выпуклой оболочки в трехмерном пространстве
- Триангуляция

Выпуклая оболочка в 3D

- Воспользуемся идеей “заворачивания подарка”, использованной в алгоритме Джарвиса
- Пусть $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ - точки в трехмерном пространстве. Считаем, что
 - $n \geq 3$ и точки не лежат на одной прямой
 - точки не компланарны (не лежат в одной плоскости): в случае их компланарности задача сводится к двумерному случаю

Выпуклая оболочка в 3D

- Выпуклая оболочка - пересечение всех выпуклых подмножеств \mathbb{R}^3 , содержащих P .
- Выпуклая оболочка может быть получена как пересечение конечного числа полупространств, каждое из которых “опирается” на одну из граней

Выпуклая оболочка в 3D

- H - полупространство

$$H = \{(x, y, z) \mid ax + by + cz + d \geq 0\}$$

- dH - граница полупространства

$$\partial H = \{(x, y, z) \mid ax + by + cz + d = 0\}$$

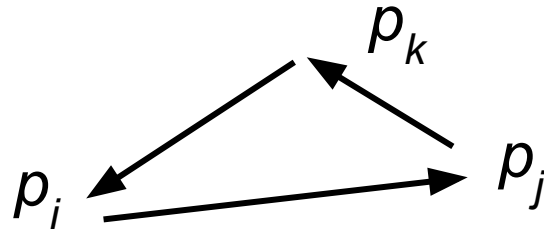
- H “опирается” на грань, если P содержится в H и dH содержит как минимум 3 неколлинеарные точки из H

Выпуклая оболочка в 3D

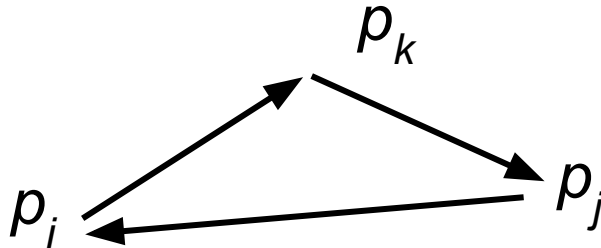
- Считаем, что каждая грань выпуклой оболочки - треугольник.
- В противном случае:
 - можно немного “отклонить” точки
 - в силу ограниченной точности вычислений такая ситуация маловероятна

Ориентация граней. Смотрим снаружи

- Грань $\text{face}(p_i, p_j, p_k) = \text{face}(p_j, p_k, p_i) = \text{face}(p_k, p_i, p_j)$



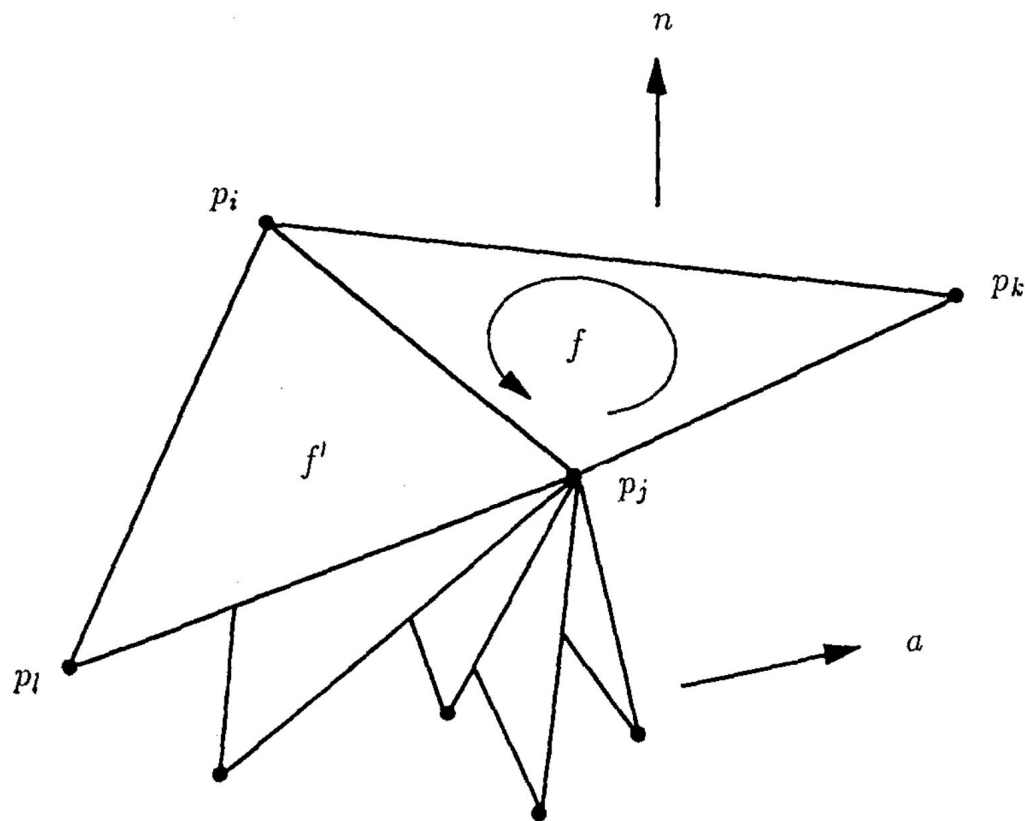
- Грань $\text{face}(p_i, p_k, p_j) = \text{face}(p_k, p_j, p_i) = \text{face}(p_j, p_i, p_k)$



Итерация алгоритма

- Обработываем грань $f_1 = \text{face}(p_i, p_j, p_k)$:
- Ищем новую грань f_2 , которая разделяет (в смысле “share”) ребро $p_i p_j$ с гранью f_1
 - Ребро уже есть $(p_i p_j)$. Осталось найти одну точку
 - Ищем точку, максимизирующую угол между (см. рисунок)

Итерация алгоритма



$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{p}_i \mathbf{p}_j}{|\mathbf{n} \times \mathbf{p}_i \mathbf{p}_j|}.$$

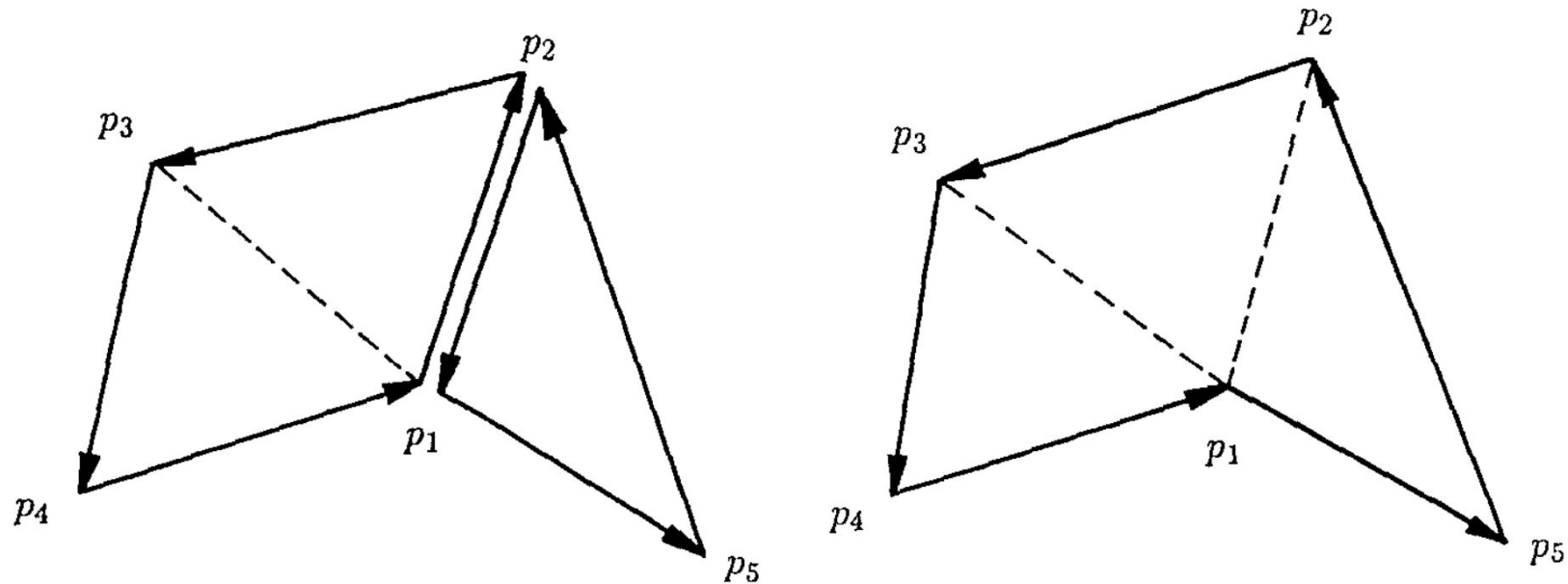
$$g(f, p_l) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}_i \mathbf{p}_l}{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}_i \mathbf{p}_l|}$$

$$g(f, p_l) \rightarrow \min$$

Алгоритм

1. Заводим очередь граней Q для обработки
2. Поддерживаем контур E построенной оболочки
3. Достаем грань f из очереди.
 - а. Для каждого ребра e , принадлежащего текущей грани f и контуру E :
 - і. находим новую грань f_new (пред. слайд), добавляем ее в очередь Q
 - іі. перестраиваем контур E в соответствии и f_new
 - б. Добавляем f в ответ.

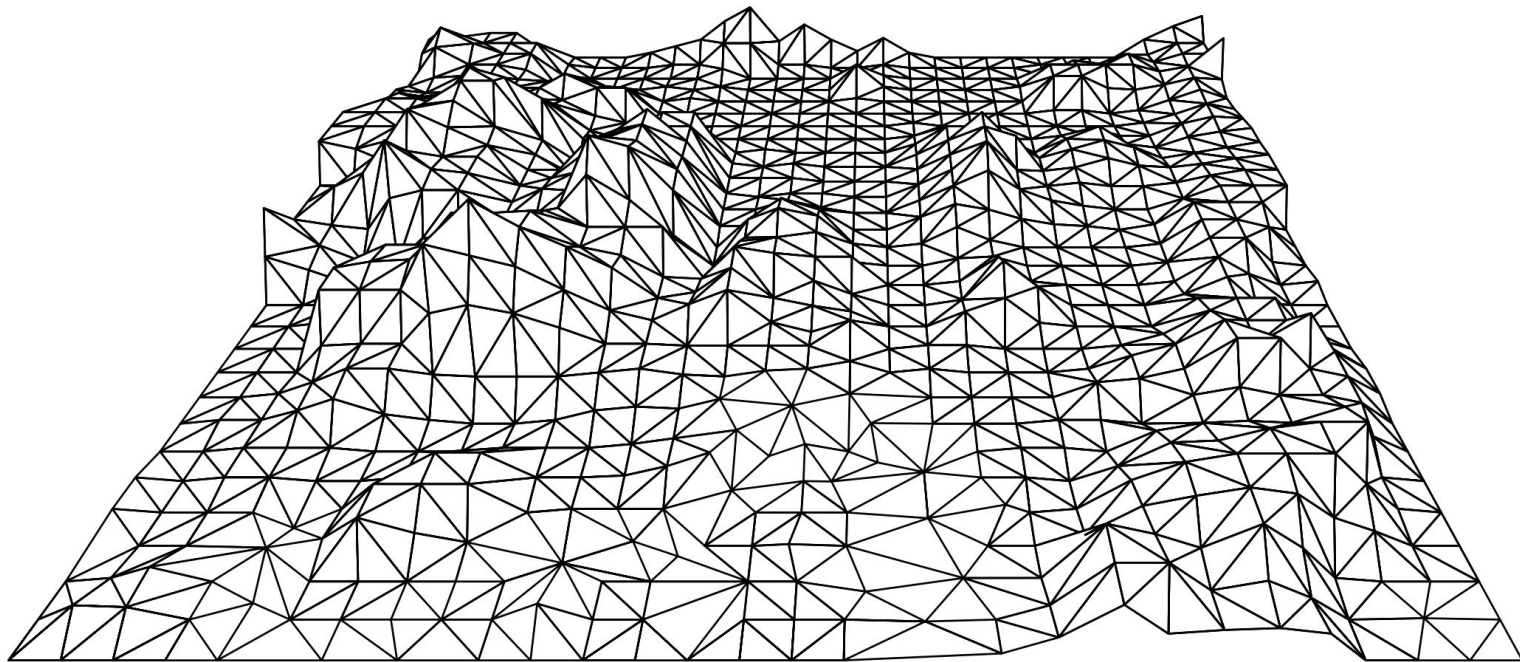
Перестройка контура



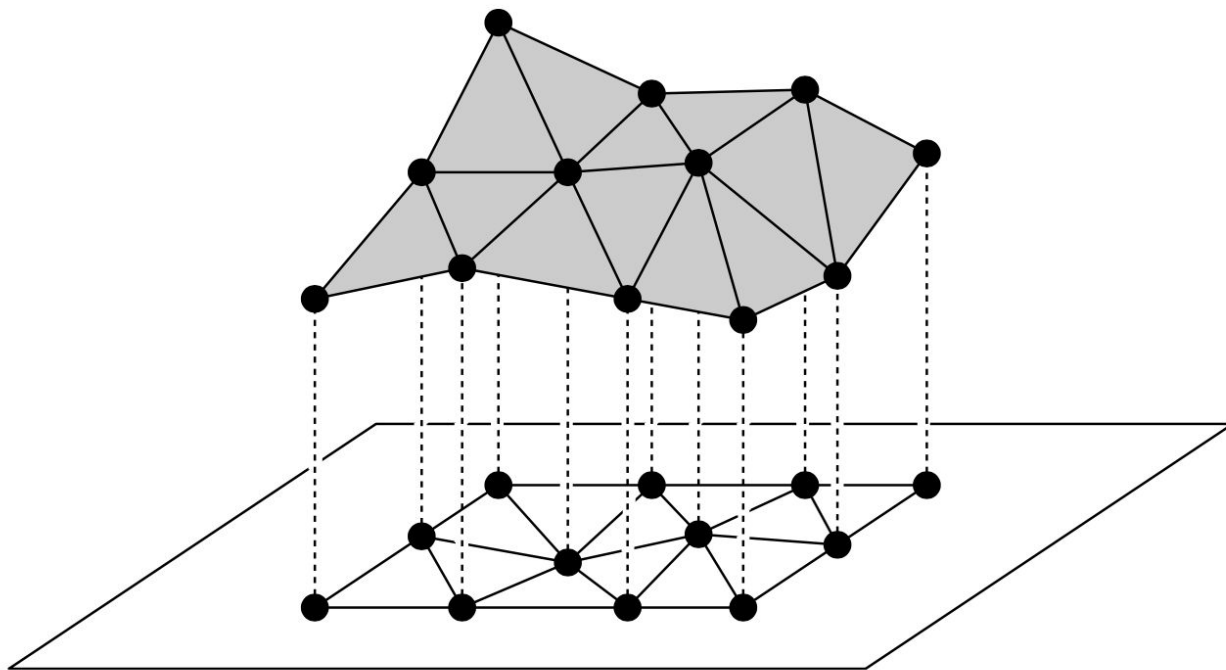
Итог

- Время работы $O(n * k)$, где k - число граней
- <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002200000580056X>

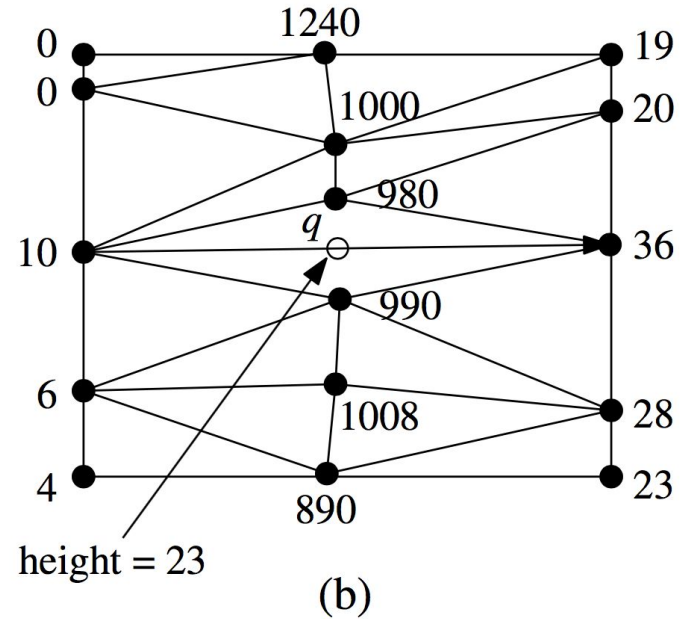
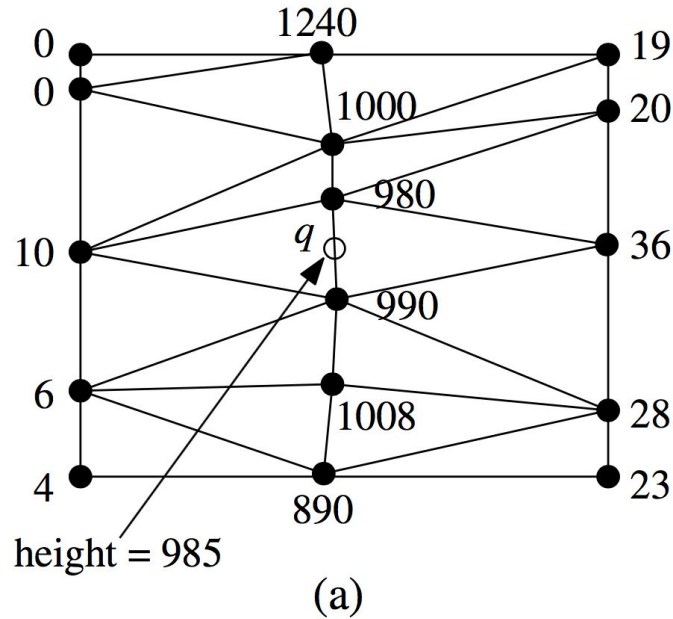
Триангуляция



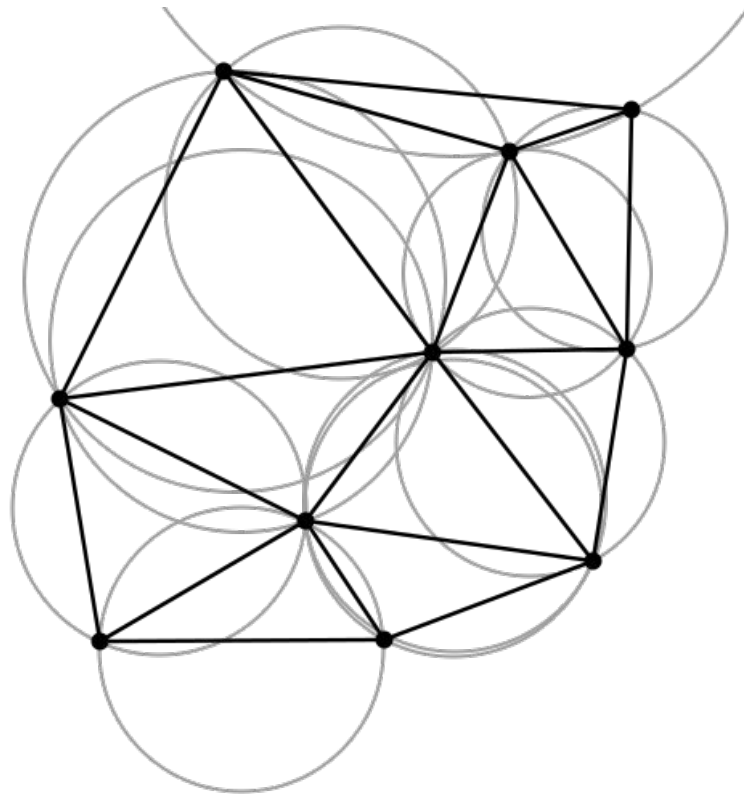
Триангуляция



Какая триангуляция является “хорошей”?



Триангуляция Делоне



Триангуляция Делоне

