

实验七 IIR 数字滤波器设计

一、实验目的：

1. 掌握 IIR 数字滤波器的设计步骤。
2. 掌握模拟低通滤波器设计。
3. 掌握设计从模拟低通滤波器到数字域的 IIR 滤波器中采用的二种变换技术：冲激不变法和双线性变换法。
4. 掌握设计 IIR 数字滤波器的二种方法。（方法一：先设计模拟低通滤波器，然后通过频带变换而成为其它频带选择滤波器（带通、高通等），最后通过滤波器变换而得到数字域的 IIR 滤波器。方法二：先设计模拟低通滤波器，然后通过滤波器变换而得到数字域的低通滤波器，最后通过频带变换而得到所期望的 IIR 滤波器。）

二、实验原理：

IIR 滤波器设计技术依靠现有的模拟滤波器得到数字滤波器，工程实际当中把这些模拟滤波器叫做滤波器原型。

1. 模拟低通滤波器原型的设计

低通滤波器的性能可用频率响应的幅值平方表示：

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \leq |H_a(j\Omega)|^2 \leq 1 \quad |\Omega| \leq \Omega_p \quad \Omega_p \text{ 为通带截止频率}$$

$$0 \leq |H_a(j\Omega)|^2 \leq \frac{1}{A^2} \quad \Omega_s \leq |\Omega| \quad \Omega_s \text{ 为阻带截止频率}$$

这样，可得出：

$$\text{通带衰减: } R_p = -10 \log_{10} \frac{1}{1+\varepsilon^2} \quad \varepsilon = \sqrt{10^{R_p/10} - 1}$$

$$\text{阻带衰减: } A_s = -10 \log_{10} \frac{1}{A^2} \quad A = 10^{A_s/20}$$

这里主要讨论 Butterworth 和 Chebyshev I 型模拟低通滤波器。

(1) Butterworth 模拟低通滤波器原型的设计

N 阶低通 Butterworth 滤波器频率响应的幅值平方表示为

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}; \quad (\text{在通带内, 幅频特性最平坦, 随着频率的升高而单调下降。})$$

系统函数可写成：

$$H_a(s)H_a(-s) = |H_a(j\Omega)|_{\Omega=s/j}^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{(j\Omega_c)^{2N}}{s^{2N} + (j\Omega_c)^{2N}}$$

在 MATLAB 中，可利用信号处理工具箱 [z,p,k]=buttap(N) 函数设计归一化的 ($\Omega_c = 1$)

N 阶 Butterworth 模拟低通滤波器。

在实际中，模拟低通滤波器是由参数 Ω_p 、 Ω_s 、 R_p 和 A_s 来描述，根据这些，求出 N 和 Ω_c 。

$$N = \frac{\log_{10} \left[(10^{R_p/10} - 1) / (10^{A_s/10} - 1) \right]}{2 \log_{10} (\Omega_p / \Omega_s)} \quad \text{一般 } N \text{ 取比计算结果稍大的整数。}$$

(2) Chebyshev I 模拟低通滤波器原型的设计

有两种类型的 Chebyshev 低通滤波器，Chebyshev I 型滤波器在通带内具有等波纹特性。Chebyshev II 型滤波器在阻带内具有等波纹特性。在此仅讨论 Chebyshev I 型滤波器。

Chebyshev I 型滤波器:
$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)}$$

其中 N 为滤波器阶数， ε 为通带波纹系数（与 R_p 有关）， $T_N(x)$ 为 N 阶 Chebyshev 多项式：

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1}(x)) & 0 \leq x \leq 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1}(x)) & 1 < x < \infty \end{cases}$$

在 MATLAB 中可利用信号处理工具箱函数 $[z,p,K]=\text{Cheblap}([N,Rp])$ 函数设计归一化的 Chebyshev I 型滤波器。其中 Rp 分贝为通带内的波纹系数，系统函数为：

$$H(s) = \frac{k}{(s - p(1))(s - p(2)) \cdots (s - p(n))}$$

实际设计中，一般已知 Ω_p 、 Ω_s 、 R_p 和 A_s ，但需要知道 N 、 ε 和 Ω_c 。

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sqrt{10^{0.1R_p} - 1} & A &= 10^{A_s/20} & \Omega_c &= \Omega_p \\ \Omega_r &= \frac{\Omega_s}{\Omega_p} & g &= \sqrt{(A^2 - 1) / \varepsilon^2} & N &= \frac{\log_{10} \left[g + \sqrt{g^2 - 1} \right]}{\log_{10} [\Omega_r + \sqrt{\Omega_r^2 - 1}]} \end{aligned}$$

一般 N 取比计算结果稍大的整数。

Chebyshev I 型模拟低通滤波器，其极点均匀分布在左半平面内的某椭圆上。

2. 模拟滤波器到数字滤波器的变换（设计滤波器的方法一）

在设计完模拟滤波器的设计方法之后，我们来讨论将模拟滤波器转化为数字滤波器的方法。

(1) 冲激不变法: $z = e^{sT}$

(2) 双线性变换法: $z = \frac{1 + sT/2}{1 - sT/2}, \quad s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$

一般根据工程实际的经验，双线性变换比冲激响应不变变换具有更好的实用性。

3. 频带变换（设计滤波器的方法二）

在设计数字低通滤波器后，可通过频带变换得到带通、高通和带阻滤波器。

设数字低通为 $H_{LP}(p)$ ，期望得到的频选滤波器为 $H(z)$ ，则可定义一映射 $p^{-1} = G(z^{-1})$

使得 $H(z) = H_{LP}(p) | p^{-1} = G(z^{-1})$

具体的变换公式如下：

数字滤波器的频率变换（低通滤波器原型的截止频率为 w'_c ）

变换类型	变换	参数
低通	$p^{-1} = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}}$	$a = \frac{\sin(\frac{w'_c - w_c}{2})}{\sin(\frac{w'_c + w_c}{2})}$
高通	$p^{-1} = \frac{z^{-1} + a}{1 + az^{-1}}$	$a = \frac{\cos(\frac{w'_c + w_c}{2})}{\cos(\frac{w'_c - w_c}{2})}$
带通	$p^{-1} = \frac{z^{-2} - a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} - a_1 z^{-1} + 1}$	$a_1 = \frac{2\beta K}{K+1}$ $a_2 = \frac{K-1}{K+1}$ $\beta = \frac{\cos(\frac{w'_c + w_c}{2})}{\cos(\frac{w'_c - w_c}{2})}$ $K = \cot \frac{w_u - w_l}{2} \tan \frac{w'_c}{2}$
带阻	$p^{-1} = \frac{z^{-2} - a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} - a_1 z^{-1} + 1}$	$a_1 = \frac{2\beta}{K+1}$ $a_2 = \frac{K-1}{K+1}$ $\beta = \frac{\cos(\frac{w'_c + w_c}{2})}{\cos(\frac{w'_c - w_c}{2})}$ $K = \tan \frac{w_u - w_l}{2} \tan \frac{w'_c}{2}$

4. 用 matlab 来直接设计各种模拟和数字滤波器。

(1) 通过给定的技术指标确定滤波器的阶数。

其中：(a) $[n, Wn] = \text{buttord}[Wp, Ws, Rp, Rs, 's']$: 可求出 Butterworth 滤波器的阶数。其中 's' 为所求滤波器为模拟滤波器。

(b) $[n, Wn] = \text{cheb1ord}[Wp, Ws, Rp, Rs, 's']$: 可求出 chebyshev I 型滤波器的阶数。其

中 ‘s’ 为所求滤波器为模拟滤波器。

(2) 通过上面所求的滤波器阶数，求出直接型滤波器的系统函数的系数。

(a) $[b,a]=\text{butter}(n,W_n, \text{'ftype'})$:可设计 Butterworth 低通、带通、高通和带阻的数字和模拟滤波器。截止频率为 W_n ，其中 $W_n \in [0,1]$ ，其中 1 相应于 $0.5f_s$ (取样频率)。

(b) $[b,a]=\text{cheby1}(n,R_p,W_n,\text{'ftype'})$ 可用来设计 chebyshev I 型的低通、带通、高通和带阻的数字和模拟滤波器。

三、实验内容：

1.设计 Butterworth 模拟低通滤波器

(1) 编写一个求取去归一化的 Butterworth 模拟低通滤波器的函数。
(function[b,a]=**u_buttap**(N,Omega))

(2) 编写一个根据指定指标 Ω_p 、 Ω_s 、 R_p 和 A_s 来设计 Butterworth 模拟低通滤波器的函数。(function[b,a]=afd_butt(Wp,Ws,Rp,As))

(3) 编写一个显示模拟滤波器频域特性的函数。
(function[db,pha,w]=freqs_m(b,a,wmax))

(4) 设计一个模拟 Butterworth 低通滤波器，其指标为

$$\Omega_p = 0.2\pi \quad R_p = 1dB \quad \Omega_s = 0.3\pi \quad A_s = 15dB$$

要求根据以上函数求出此滤波器的级联型的系统函数并画出其幅频特性及相频特性曲线。

2.设计 Chebyshev 模拟低通滤波器

(1) 编写一个求取去归一化的 Chebyshev I 型模拟低通滤波器的函数。
(function[b,a]=**U_CHB1AP**(N,Rp,Omega))

(2) 编写一个根据指定指标 Ω_p 、 Ω_s 、 R_p 和 A_s 来设计 Chebyshev I 型模拟低通滤波器的函数。(function[b,a]=afd_chb1(Wp,Ws,Rp,As))

(3) 设计一个模拟 Chebyshev I 型低通滤波器，其指标为

$$\Omega_p = 0.2\pi \quad R_p = 1dB \quad \Omega_s = 0.3\pi \quad A_s = 15dB, \text{通带波纹与通带衰减一致}$$

要求根据以上函数求出此滤波器的级联型的系统函数并画出其幅频特性及相频特性曲线。

3.滤波器的变换

(1) 编制实现冲激响应不变法的函数。(function[b,a]=imp_invr(c,d,T))

(2) 认识实现双线性不变法的函数。(function[b,a]=bilinear(cs,ds,**FS**))

(3) 设计一个以模拟 Butterworth 低通滤波器为原型的数字滤波器，分别使用冲激不变法和双线性不变法，采样时间间隔为 1 秒，要求满足下列技术指标：

$$w_p = 0.2\pi \quad R_p = 1dB \quad w_s = 0.3\pi \quad A_s = 15dB$$

(4) 设计一个以 Chebyshev I 型模拟低通滤波器为原型的数字滤波器，分别使用冲激不变法和双线性不变法，采样时间间隔为 1 秒，要求满足下列技术指标：

$$w_p = 0.2\pi \quad R_p = 1dB, \quad w_s = 0.3\pi \quad A_s = 15dB, \text{通带波纹与通带衰减一致}$$

(5) 编写一个程序对频率变换的方法二进行自动转换。

(function(bz, az)=zmapping(bZ, aZ, Nz, Dz)

(6) 采用频率变换的方法二，编写一个 Chebyshev I 型滤波器原型设计高通滤波器。

(7) 利用所设计 Chebyshev I 型数字滤波器原型，采用频率变换的方法二，设计高通数字滤波器。

$$\omega_p = 0.6\pi \quad R_p = 1dB \quad \omega_s = 0.45\pi \quad A_s = 15dB$$

4. 用 MATLAB 函数直接设计滤波器

用 butterord、butter、cheby1、cheblord 函数来设计如下滤波器。

(1) 设计满足下列技术指标的 Butterworth 模拟低通滤波器，并与上面所设计的同类滤波器进行比较。

$$\Omega_p = 0.2\pi, \quad R_p = 1dB, \quad \Omega_s = 0.3\pi, \quad A_s = 15dB$$

(2) 设计满足下列技术指标的 Chebyshev I 型模拟低通滤波器，并与上面所设计的同类滤波器进行比较。

$$\Omega_p = 0.2\pi, \quad R_p = 1dB, \quad \Omega_s = 0.3\pi, \quad A_s = 15dB, \quad \text{通带波纹与通带衰减一致}$$

(3) 设计满足下列技术指标的 Butterworth 数字低通滤波器，并与上面所设计的同类滤波器进行比较。

$$\omega_p = 0.2\pi, \quad R_p = 1dB, \quad \omega_s = 0.3\pi, \quad A_s = 15dB$$

(4) 设计满足下列技术指标的 Chebyshev I 型数字低通滤波器，并与上面所设计的同类滤波器进行比较。

$$\omega_p = 0.2\pi, \quad R_p = 1dB, \quad \omega_s = 0.3\pi, \quad A_s = 15dB, \quad \text{通带波纹与通带衰减一致}$$

(5) 设计满足下列技术指标的 Butterworth 数字带通滤波器，采样频率分别用为 500Hz 和 1000Hz。 $R_p = 3dB$ $A_s = 30dB$ ，通带截止频率分别为：100Hz、200Hz，阻带截止频率分别为：60Hz、240Hz。

(6) 设计满足下列技术指标的 Chebyshev I 型数字带通滤波器采样频率分别用为 500Hz 和 1000Hz。 $R_p = 1dB$ $A_s = 30dB$ ，通带波纹与通带衰减一致。带截止频率分别为：100Hz、200Hz，阻带截止频率分别为：60Hz、240Hz。

(7) 设计满足下列技术指标的 Butterworth 数字高通滤波器。采样频率分别用为 500Hz 和 1000Hz。 $R_p = 3dB$ $A_s = 30dB$ ，通带截止频率 $f_p = 200Hz$ ，阻带截止频率 $f_s = 150Hz$ 。

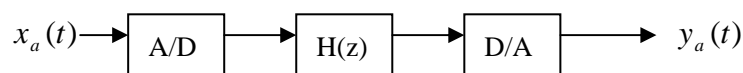
(8) 设计满足下列技术指标的 Butterworth 数字带阻滤波器。采样频率分别用为 500Hz 和 1000Hz。 $R_p = 3dB$ $A_s = 30dB$ ，通带截止频率分别为：60Hz、240Hz，阻带截止频率分别为：100Hz、200Hz。

(9) 设计满足下列技术指标的 Chebyshev I 型数字带阻滤波器，采样频率分别用为 500Hz 和 1000Hz。 $R_p = 1dB$ $A_s = 30dB$ ，通带波纹与通带衰减一致。通带截止频率分别

为：60Hz、240Hz，阻带截止频率分别为：100Hz、200Hz。

5. IIR 数字滤波器仿真设计

假设：一模拟信号 $x_a(t) = 5\sin(200\pi t) + 2\cos(300\pi t)$ 由系统



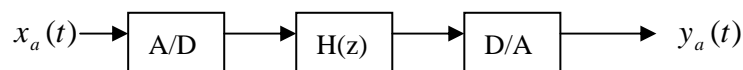
处理，其采样间隔为 1000 个样本/秒。

- 设计一个最小阶数的 IIR 数字滤波器，以小于 1dB 的衰减通过 150Hz 的分量，以至少 40dB 抑制 100Hz 的分量。滤波器应有等波动的通带和单调的阻带，画出此滤波器的频率响应。
- 产生上述信号 $x_a(t)$ 的 300 个样本（采样速率为 1000 个样本/秒），通过上述所设计的滤

波器得到输出序列，内插此序列得到 $y_a(t)$ 。画出输入和输出信号的图并解释你的结果。

四、思考题

- 写出基于冲激不变法设计数字低通滤波器的函数。
- 写出基于双线性不变法设计数字高通滤波器的函数。
- 写了一个函数，根据已知高通数字滤波器的指标求出低通原型数字滤波器的各指标。
- 写了一个函数，根据已知任意低通数字滤波器的指标求出低通原型数字滤波器的指标。
- 写了一个函数，根据已知带通数字滤波器的指标求出低通原型数字滤波器的各指标。
- 写了一个函数，根据已知低通原型数字滤波器的指标求出高通数字滤波器的各指标。
- 写了一个函数，根据已知低通原型数字滤波器的指标求出任意低通原型数字滤波器的指标。
- 写了一个函数，根据已知低通原型数字滤波器的指标求出带通原型数字滤波器的各指标。
- 设计一个数字高通滤波器 $H(z)$ ，它用在结构



中，满足下列要求：采样频率 10kHz，阻带边缘频率为 1.5kHz，衰减为 40dB 通带边缘频率为 2kHz，波动为 3dB；单调的通带和阻带；采用冲激不变法变换；

- 画出整个模拟滤波器在 $[0, 5\text{kHz}]$ 上的幅度响应；
- 画出数字低通原型的幅度响应；
- 画出模拟低通原型的幅度响应；
- 输入信号应有什么限制，使得上述结构能对它真正起高通滤波器的作用？