

# 实验六 数字滤波器结构

## 一、实验目的：

1. 掌握 IIR 滤波器的三种结构（直接形式、级联形式、并联形式）及其它们的互相转换。
2. 掌握线性相位 FIR 滤波器的四种结构（横截(直接)形、级联形、线性相位形、频率抽样形）及其它们的互相转换。

## 二、实验原理：

### 1. IIR 滤波器

IIR 滤波器可写成：

$$h(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}$$

当  $a_N \neq 0$  时，滤波器的阶为 N。IIR 滤波器的差分方程表示为：

$$y(n) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) - \sum_{m=1}^N a_m y(n-m)$$

实现 IIR 滤波器可采用三种不同的结构：直接形式、级联形式、并联形式。

#### （1）直接形式为：

可用 DSP 工具箱函数 filter 实现 IIR 滤波器的直接形式设计。Y=filter(B,A,X)是一维的数字滤波器。其中 B, A 为系数矩阵，B={b1,b2,...,bM},A={a1,a2,...,aN},X 为信号矩阵。

#### （2）级联形式：

IIR 化为二阶节的形式。

$$h(z) = b_0 \prod_{k=1}^K \frac{1 + B_{k,1} z^{-1} + B_{k,2} z^{-2}}{1 + A_{k,1} z^{-1} + A_{k,2} z^{-2}}$$

#### （3）并联形式：

$$H(z) = \sum_{k=1}^K \frac{B_{k,0} + B_{k,1} z^{-1}}{1 + A_{k,1} z^{-1} + A_{k,2} z^{-2}} + \sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k}$$

其中  $K=N/2$ ，每一部分均为二阶，它们之间是并联关系。

### 2. FIR 滤波器

FIR 滤波器可表示为

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{M-1} z^{-(M-1)}$$

其差分方程为：

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \cdots + b_{M-1} x(n-M+1)$$

### (1)直接形式:

可用 MATLAB 中函数 filter 实现 FIR 滤波器的直接形式设计。

### (2)级联形式:

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{M-1} z^{-(M-1)} = b_0 \prod_{k=1}^K (1 + B_{k,1} z^{-1} + B_{k,2} z^{-2})$$

### (3)线性相位形式:

线性相位条件: 频率响应的相角  $\angle H(e^{j\omega}) = \beta - \alpha\omega \quad -\pi < \omega \leq \pi$

其中  $\beta = 0$  或  $\beta = \pm\pi/2$ ,  $\alpha$  为常数。对于因果滤波器, 设冲激响应处于  $[0, M-1]$  区间上, 则

上述条件就表示下列对称性:

$$h(n) = h(M-1-n) \quad \beta = 0 \quad 0 \leq n \leq M-1 \quad (\text{偶对称冲激响应})$$

$$h(n) = -h(M-1-n) \quad \beta = \pm\pi/2 \quad 0 \leq n \leq M-1 \quad (\text{奇对称冲激响应})$$

可用 MATLAB 中函数 filter 实现 FIR 滤波器的线性相位形式设计。

### (4)频率取样形式:

冲激响应  $h(n)$  的  $M$  点 DFT 为  $H(k)$  ( $0 \leq k \leq M-1$ ) 则有

$$H(z) = Z[h(n)] = Z[IDFT(H(k))]$$

利用内插公式可得:

$$H(z) = \left(\frac{1-z^{-M}}{M}\right) \sum_{k=0}^{M-1} \frac{H(k)}{1-W_M^{-k} z^{-1}} = \left(\frac{1-z^{-M}}{M}\right) \sum_{k=0}^{M-1} C_k \frac{B_{i,0} + B_{i,1} z^{-1}}{A_{i,0} + A_{i,1} z^{-1} + A_{i,2} z^{-2}}$$

这种结构采用了离散付里叶变换  $H(k)$ , 而不是冲激响应  $h(n)$ 。这种结构分成两部分:

第一部分由  $\frac{1-z^{-M}}{M}$  构成, 第二部分由  $M$  个  $\frac{H(k)}{1-W_M^{-k} z^{-1}}$  并联而成。

## 三、实验内容:

### 1.IIR 滤波器

(1) 已知直接型的滤波器系数为矩阵  $b$  和  $a$ , 假设级联形式的滤波器结构为  $b_0$ ,  $B_{k,i}$  和  $A_{k,i}$  编一扩展函数 dir2cas 来实现由直接形转换成级联形式。(function[b0,B,A]=dir2cas(b,a)).

(2) 编一扩展函数 casfilt.m 来实现级联形式滤波器的函数。

(function y=casfilt(b0,B,A, x).

(3) 已知级联型的滤波器结构为  $b_0$ ,  $B_{k,i}$  和  $A_{k,i}$  设直接型的滤波器的系数为矩阵  $b$  和  $a$ , 编一扩展函数 cas2dir 来实现由级联形转换成直接形式。(function [b,a]=cas2dir(b0,B,A)

(4) 已知直接型的滤波器系数为矩阵  $b$  和  $a$ , 假设并联形式的滤波器结构为  $C$ ,  $B_{k,i}$  和  $A_{k,i}$  编一

扩展函数 `dir2par` 来实现由直接形转换成并联形式。

(function[b0,B,A]=dir2par(b,a)) .

(5) 编一扩展函数 `parfiltr.m` 来实现并联形式滤波器的函数。

(function y=parfiltr(C,B,A,x))

(6) 已知并联型的滤波器结构为  $C$  ,  $B_{k,i}$  和  $A_{k,i}$  设直接型的滤波器的系数为矩阵  $b$  和  $a$ ,编一扩

展函数 `par2dir` 来实现由并联形转换成直接形式。(function [b,a]=par2dir(c0,B,A))

(7)编程：有一滤波器

$$\begin{aligned} &15y(n) + 10y(n-1) + 3y(n-2) - 5y(n-3) - 2y(n-4) \\ &= x(n) - 4x(n-1) + 10x(n-2) - 25x(n-3) + 16x(n-4) \end{aligned}$$

求出该滤波器的级联结构和并联结构，并验证其正确性。然后求出这 3 种形式表示时的单位冲激响应。

## 2.FIR 滤波器

(1)编程：有一 FIR 滤波器传递函数为

$$H(z) = 1 + 8.125z^{-3} + z^{-6}$$

确定并画出滤波器的直接、线性相位及级联形式结构。

(2) 给定脉冲响应  $h(n)$ 或 DFT  $H(k)$ ，把直接形式转换成频率采样形式。

(function[C,B,A]=dir2fs(h))

(3)设  $h(n) = \frac{1}{9} \{1, 2, 3, 2, 1\}$ ,求出并画出频率采样结构。

(4)32 点线性相位 FIR 滤波器的频率样本由下式决定；

$$|H(k)| = \begin{cases} 1 & k = 0, 1, 2 \\ 0.5 & k = 3 \\ 0 & k = 4, 5, \dots, 15 \end{cases}$$

求出它的频率采样形式，并比较它与线性相位形式的计算复杂度。