ИДЗ №1

Пелагеев Даниил Иванович

Группа: Б9122-01.03.02мкт

1 Найти все значения корня: $\sqrt[3]{\frac{i}{27}}$

Решение:

$$\sqrt[3]{\frac{i}{27}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{i}$$

$$z = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{6}i, \quad -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{6}i, \quad -\frac{1}{3}i$

2 Представить в алгебраической форме: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 5i\right)$

Решение:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 5i\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(5i) - \sin(5i)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \cos(5i) = \frac{e^{-5} + e^{5}}{2}$$

Ответ: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 5i\right) = \frac{e^{-5}+e^{5}}{2}$

3 Представить в алгебраической форме: $\operatorname{arctg}\left(\frac{3\sqrt{3}-8i}{7}\right)$

Решение:

$$\operatorname{arctg}(z) = w$$

$$z = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}}{\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}} = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})}$$

Умножим числитель и знаменатель на $2e^{iw}$:

$$z = \frac{e^{2iw} - 1}{i(e^{2iw} + 1)} = i\frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1}$$

Теперь выразим e^{2iw}:

$$iz = \frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1}$$

$$iz(e^{2iw} + 1) = e^{2iw} - 1$$

$$e^{2iw}(1 - iz) = 1 + iz$$

$$e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz}$$

Теперь найдём w:

$$w = \frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) = \frac{1}{2i}\left(\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) + \mathrm{Arg}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)\right) = \frac{1}{2i}\ln(3) + \left(\frac{3n+1}{3}\right)2\pi$$

$$\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right| = \left|\frac{1+i\frac{3\sqrt{3}-8i}{7}}{1-i\frac{3\sqrt{3}-8i}{7}}\right| = \left|\frac{\frac{7+3\sqrt{3}i+8}{7}}{\frac{7-3\sqrt{3}i-8}{7}}\right|$$

$$= \left|\frac{15+3\sqrt{3}i}{-(1+3\sqrt{3}i)}\right| = \left|\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right| = 3$$

Ответ: $w = \frac{1}{2i}\ln 3 + \frac{3n+1}{3}2\pi$

4 Представить в алгебраической форме: $(-3)^{2i}$

Решение:

$$(-3)^{2i} = e^{2i\mathrm{Ln}(-3)}$$

$$= e^{2i(\ln 3 + i(\pi + 2\pi n))}$$

$$= e^{-2\pi(2n+1)}\left(\cos(2\ln 3) + i\sin(2\ln 3)\right)$$

Ответ: $(-3)^{2i} = e^{-2\pi(2n+1)}\left(\cos(2\ln 3) + i\sin(2\ln 3)\right)$

5 Представить в алгебраической форме: Ln$(-1+i)$

Решение:

$$\mathrm{Ln}(-1+i) = \ln|-1+i| + i\,\mathrm{Arg}(-1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{4n+3}{2}\pi\right)$$

1) Найдем $\mathrm{Arg}(-1+i)$:

$$\mathrm{Arg}(-1+i) = \arg(-1+i) + 2\pi n = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n = \left(\frac{4n+3}{2}\pi\right)$$

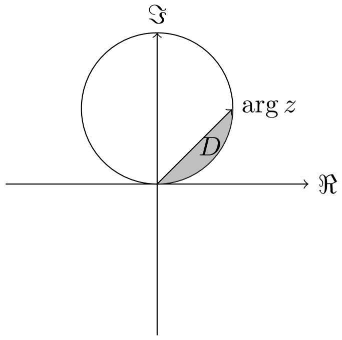
2) Найдем $|-1+i|$:

$$|-1+i| = \sqrt{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{4n+3}{2}\pi\right)$

6 Вычертить область, заданную неравенствами: $D = \{z : |z-i| \leq 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$

Ответ:



7 Определить вид пути и в случае, когда он проходит через точку ∞, исследовать его поведение в этой точке: $z = 3t\,\mathrm{tg}\,t + i4\sec t$

Решение:

Рассмотрим путь $z = 3t\,\mathrm{tg}\,t + i4\sec t$.

$$z = \frac{3\sin(t)}{\cos(t)} = \frac{4i}{\cos(t)}$$

$$x = \frac{3\sin(t)}{\cos(t)}, y = \frac{4}{\cos(t)}$$

$$x^2 = \frac{9(1-\cos^2(t))}{\cos^2 t} = \frac{9}{\cos^2 t} - 9, y^2 = \frac{16}{\cos^2(t)} \implies \frac{1}{\cos^2(t)} = \frac{y^2}{16}$$

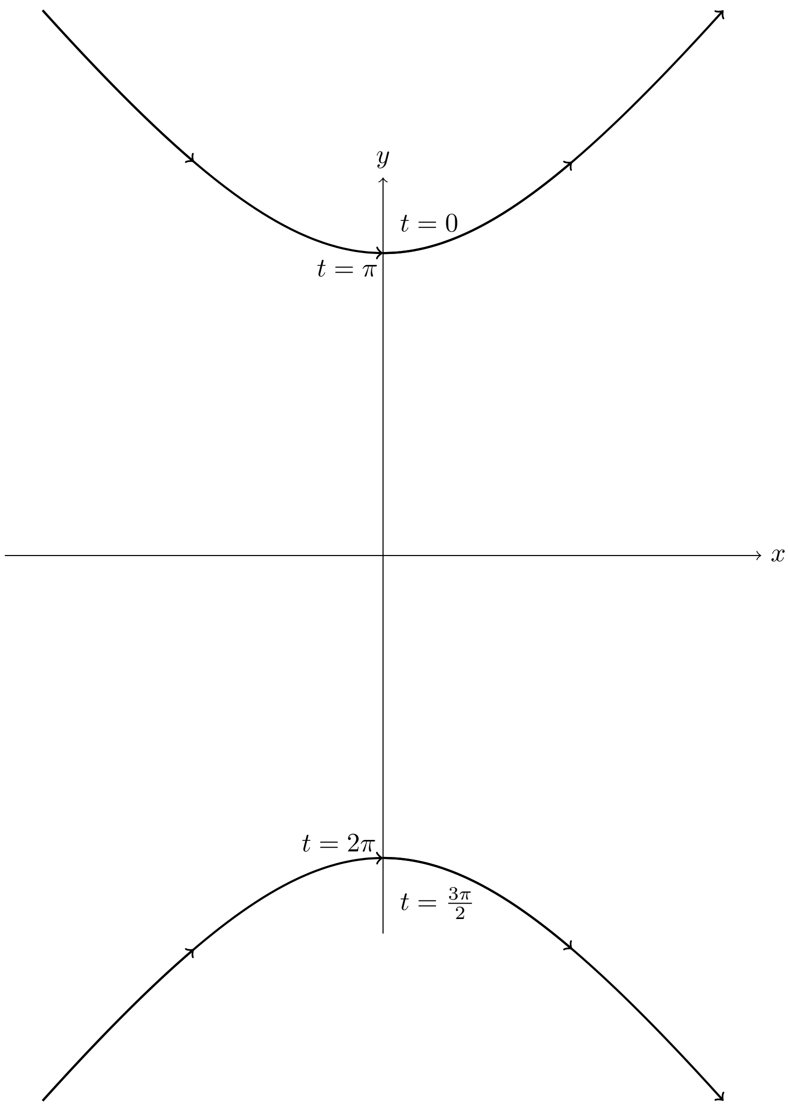
$$x^2 = \frac{9}{16}y^2 - 9 = \frac{9}{16}y^2 - x^2 = 9 \implies \frac{y^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} - x^2 = 9$$

$$\frac{y^2}{4^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1$$

$$\left(\frac{y}{4} - \frac{x}{3}\right)\left(\frac{y}{4} + \frac{x}{3}\right) = 1$$

$$\begin{cases} x = 3\,\mathrm{tg}\,t \\ y = \frac{4}{\cos t} \end{cases}$$

Ответ:



8 Восстановить голоморфную в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x,y)$ или мнимой $v(x,y)$ и начальному значению $f(z_0)$: $v = x^2 - y^2 - x, \quad f(0) = 0$

Решение:

Найдем производные u и v:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x - 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -2y, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -2$$

Отсюда следует, что $\triangle u = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -2y \implies u(x,y) = -2xy + \phi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1 = -2x + \phi^{'}(y)$$

$$\phi^{'}(y) = 1, \quad \phi(y) = y + C$$

$$f(z) = 2xy + y + C + i(x^2 - y^2 - x); \quad f(0) = C$$

$$f(z) = i(x^2 - y^2) - 2xy + y - ix = iz^2 - iz = i(z^2 - z)$$

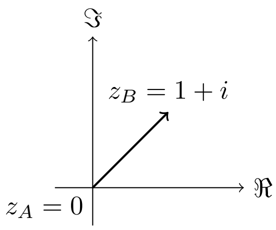
$$z = x + iy$$

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

9 Вычислить интеграл от функции комплексной переменной по данному пути: $\int_{AB} (2z+1)\, dz, \quad AB = \{z : y = x^3, z_A = 0, z_B = 1 + i\}$

Решение:

$$\int_{AB} (2z+1)\, dz = \int_0^{1+i} (2z+1)\, dz$$



Для наглядности изобразим путь на комплексной плоскости:
Теперь вычислим интеграл:

$$\int_0^{1+i} (2z+1)\, dz = \left[z^2 + z\right]_0^{1+i} = (1+i)^2 + (1+i) - (0^2 + 0)$$

$$= 3i + 1$$

Ответ: $3i + 1$

10 Найти радиус сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}(1+in^2)\cdot z^n$

Решение:

Рассмотрим степенной ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1+in^2)z^{n^2}$$

Найдем коэффициенты C_n:

$$C_n = \begin{cases} 0, & n \neq k^2 \\ (1+ik^2), & n = k^2 \end{cases}$$

Для нахождения радиуса сходимости используем формулу:

$$R = \frac{1}{\rho}, \quad \rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|C_n|}$$

Так как $C_n = 0$ для $n \neq k^2$, рассмотрим только $n = k^2$:

$$C_{n_k} = (1+ik^2)$$

Найдем $\sqrt[n_k]{|C_n|}$ для $n = k^2$:

$$\sqrt[k^2]{|1+ik^2|} \to 0$$

$$R = \frac{1}{\rho} = 1$$

$$|1+ik^2| = \sqrt{1+k^2}$$

$$1 \leqslant \sqrt[k^2]{1+k^2} \leqslant \sqrt[k^4]{k^4+k^4} = \sqrt[k^2]{2}\cdot\sqrt[k^2]{k^4} \to 1$$

Ответ: $R = 1$

11 Данную функцию разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0: $f(z) = z\cos\frac{z}{z-3}, \quad z_0 = 3$

Решение:

$$\frac{z}{z-3} = 1 + \frac{3}{z-3}$$

Тогда функция $f(z)$ примет вид:

$$f(z) = ((z-3)+3)\cos\left(1+\frac{3}{z-3}\right)$$

$$\cos\left(1+\frac{3}{z-3}\right) = \cos 1\cos\frac{3}{z-3} - \sin 1\sin\frac{3}{z-3}$$

Разложим cos и sin в ряд Тейлора:

$$\cos\frac{3}{z-3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{3}{z-3}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 9^n}{(2n)!}\left(\frac{1}{(z-3)^{2n}}\right) = |n = n'|$$

$$= \sum_{-\infty}^{0}\frac{(-1)^n}{9^n\cdot(-2n)!}(z-3)^{2n}$$

$$\sin\frac{3}{z-3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{3}{z-3}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = |n = n'| = \sum_{-\infty}^{0}\frac{3\cdot(-1)^n}{9^n\cdot(1-2n)!}(z-3)^{2n-1}$$

Тогда:

$$f(z) = ((z-3)+3)\left(\cos 1 \sum_{-\infty}^{0} \frac{(-1)^n}{9^n \cdot (-2n)!}(z-3)^{2n} - \sin 1 \sum_{-\infty}^{0} \frac{3\cdot(-1)^n}{9^n\cdot(1-2n)!}(z-3)^{2n-1}\right)$$

$$= 3\left(\sum_{-\infty}^{0} \frac{(-1)^n \cdot \cos(1)}{9^n \cdot (-2n)!}(z-3)^{2n+1} - \sum_{-\infty}^{0} \frac{3\cdot(-1)^{n-1}\cdot\sin(1)}{9^n\cdot(1-2n)!}(z-3)^{2n}\right)$$

$$z\cos\left(\frac{z}{z-3}\right) = 3\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z-3)^k$$

Итак, получили разложение:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-3)^n$$

Где:

$$C_k = \begin{cases} \frac{2(-1)^n \cos 1 \cdot 3^{2n}}{(2n)!}, & k = 2n, n \leqslant 0 \\ \frac{-2(-1)^n \sin 1 \cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!}, & k = 2n+1, n \leqslant 0 \\ 0, & k \geqslant 2 \end{cases}$$

12 Определить тип особой точки $z = 0$ для данной функции: $f(z) = \frac{\sin 8z - 6z}{\cos z - 1 + z^2/2}$

Решение:

$$f(z) = \frac{\sin 8z - 6z}{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}}$$

Найдём предел при $z \to 0$:

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin 8z - 6z}{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}} = \lim_{z\to 0} \frac{2z}{-\frac{z^6}{6!}} = \lim_{z\to 0} -\frac{2\cdot 6!\cdot z}{z^6} = -2\cdot 6! \lim_{z\to 0}\frac{1}{z^5} = \infty$$

$$-2\cdot 6! \lim_{z\to 0} \frac{z^5}{z^5} \implies \text{Полюс 5-го порядка}$$

Ответ: Полюс 5-го порядка

13 Для данной функции найти все изолированные особые точки и определить их тип: $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^3(z+1)^2}$

Решение:

Найдем изолированные особые точки:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = \infty - \text{С.О.Т.}$$

1. Рассмотрим $z \to 0$:

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z^3(z+1)^2} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{z^3} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{z^2} = \infty \implies \text{(полюс)}$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{z^k(e^z - 1)}{z^3(z+1)^2} = \lim_{z\to 0}\frac{z^k}{z^2} =$$

Это выражение принимает следующие значения:

$$\begin{cases} 0, & k > 2 \\ 1, & k = 2 \implies \text{Полюс 2-го порядка} \\ \infty, & k < 2 \end{cases}$$

2. Рассмотрим $z \to -1$:

$$\lim_{z \to -1} \frac{e^z - 1}{z^3(z+1)^2} = \lim_{z \to -1} \frac{e^{-1} - 1}{-(z+1)^2} \implies \text{(полюс)}$$

$$\lim_{z \to -1} \frac{(e^z - 1)(z+1)^k}{z^3(z+1)^2} = \lim_{z \to -1} \frac{(e^z - 1)(z+1)^k}{-(z+1)^2}$$

Это выражение принимает следующие значения:

$$\begin{cases} 0, & k > 2 \\ 1 - e^{-1}, & k = 2 \\ \infty, & k < 2 \end{cases} \implies \text{Полюс 2-го порядка}$$

Ответ: Изолированные особые точки: $0, -1$ (Полюсы 2-го порядка)