ИДЗ №2

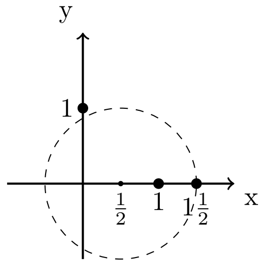
Пелагеев Даниил Иванович

Группа: Б9122-01.03.02мкт

1 Вычислить интеграл: $\oint_{|z-\frac{1}{2}|=1} \frac{iz(z-i)}{\sin \pi z}\, dz$

Решение:

$$\sin(\pi z) = 0 \Rightarrow z = n$$



1) При $z = 0$:

$$(z(z-i))' = 2z - i\Big|_{z=0} = -i$$

$$(\sin(\pi z))' = \pi \cos(\pi z)\Big|_{z=0} = \pi$$

$$z = 0 - \text{У.О.Т}$$

2) При $z = 1$:

$$iz(z-i)\Big|_{z=1} = i(1-i) = 1 + i$$

$$(\sin(\pi z))' = \pi \cos(\pi z)\Big|_{z=1} = -\pi$$

$$z = 1 - \text{Полюс 1-го порядка}$$

$$\oint_{|z-\frac{1}{2}|=1} \frac{iz(z-i)}{\sin(\pi z)} dz = 2\pi i \left(-\frac{1+i}{\pi}\right) = -2i(1+i) = 2 - 2i$$

Ответ: $\oint_{|z-\frac{1}{2}|=1} \frac{iz(z-i)}{\sin(\pi z)} dz = 2 - 2i$

2 Вычислить интеграл: $\oint_{|z|=1} \frac{3z^4-2z^3+5}{z^4}\, dz$

Решение:

$$f(z) = 3 - \frac{2}{z} + \frac{5}{z^4}$$

$$z = 0 - \text{Особая точка}$$

$$\text{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{6} \lim_{z\to 0} \frac{d^3}{dz^3}\left[f(z)z^4\right] = \frac{1}{6} \lim_{z\to 0} \frac{d^3}{dz^3}\left(3z^4 - 2z^3 + 5\right)$$

$$= -\frac{12}{6} = -2$$

$$\oint_{|z|=1}\frac{3z^4-2z^3+5}{z^4}dz=2\pi i\cdot(-2)=-4\pi i$$

Ответ: $-4\pi i$

3 Вычислить интеграл: $\oint_{|z|=0.5}\frac{e^{6z}-\cos 8z}{z\ \mathrm{sh}\, 4z}\,dz$

Решение:

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{e^{6z}-\cos(8z)}{z\sinh(4z)}\,dz=2\pi i\,\mathrm{Res}(f(z))$$

$$g(z)=e^{6z}-\cos(8z)$$

$$n(z)=z\,\mathrm{sh}(4z)$$

$$\mathrm{Res}(f(z))=\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{e^{6z}-\cos(8z)}{\mathrm{sh}(4z)}=\lim_{z\to 0}\frac{6e^{6z}-8\sin(8z)}{4\,\mathrm{ch}(4z)}$$

$$=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{e^{6z}-\cos(8z)}{z\,\mathrm{sh}(4z)}\,dz=2\pi i\cdot\frac{3}{2}=3\pi i$$

Ответ: $3\pi i$

4 Вычислить интеграл: $\oint_{|z-4|=2}\left(z\,\mathrm{sh}\,\frac{1}{z-4}+\frac{2\sin\frac{\pi z}{6}}{(z-3)(z-1)}\right)dz$

Решение:

1.

$$1.\oint_{|z-4|=2}z\,\mathrm{sh}\,\frac{1}{z-4}dz=2\pi i\cdot\mathrm{Res}_{z=4}\left(z\frac{1}{z-4}\right)=2\pi i\cdot 4=8\pi i$$

$$\mathrm{sh}\,z=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+...$$

$$z=4-\text{С.О.Т}$$

$$z\,\mathrm{sh}(\frac{1}{z-4})=(4+(z-4))\cdot\left(\frac{1}{z-4}+\frac{1}{3!}\frac{1}{(z-4)^3}+...\right)$$

$$C_{-1}=4$$

$$2.\oint_{|z|=2}\frac{2\sin(\frac{\pi z}{6})}{(z-3)^2(z-1)}dz=2\pi i\cdot\mathrm{Res}_{z=3}\left(\frac{2\sin(\frac{\pi z}{6})}{(z-3)^2(z-1)}\right)=2\pi i\lim_{z\to 3}\left(\frac{2\sin(\frac{\pi z}{6})}{(z-1)}\right)'$$

$$\lim_{z\to 3}\frac{2\sin(\frac{\pi z}{6})}{(z-3)^2(z-1)}=\lim_{z\to 3}\frac{1}{(z-3)^2}=\infty$$

$$\lim_{z\to 3}\frac{2\sin(\frac{\pi z}{6})(z-3)^k}{(z-3)^2(z-1)}=\lim_{z\to 3}\frac{(z-3)^k}{(z-3)^2}=$$

$$=\begin{cases}k>2; & 0\\ k=2; & 1\to z_0=3\text{Полюс 2-го порядка}\\ k<2; & \infty\end{cases}$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{2\operatorname{sh}(\frac{\pi z}{6})}{(z-3)^2(z-1)}dz = 2\pi i \cdot 2\frac{\cos(\frac{\pi z}{6})\cdot\frac{\pi}{6}\cdot(z-1)\cdot\sin(\frac{\pi z}{6})}{(z-1)^2}\Bigg|_{z=3} = -\pi i$$

$$\oint_{|z-4|=2}\left(z\operatorname{sh}\frac{1}{z-4}+\frac{2\sin\frac{\pi z}{6}}{(z-3)(z-1)}\right)dz = 8\pi i + (-\pi i) = 7\pi i$$

Ответ: $7\pi i$

5 Вычислить интеграл: $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\sqrt{2}\sin t+3}$

Решение:

$$int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\sqrt{2}\sin t+3} = \left|\sin(t) = \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}),\quad dt = \frac{dz}{di}\right| = \oint_{|z|=1}\frac{dz}{\sqrt{2}(z^2-1)+3iz} = \oint_{|z|=1}\frac{dz}{\sqrt{2}(z+i\sqrt{2})+(z+\frac{i}{\sqrt{2}})}$$

$$\text{Особые точки: } z=\frac{i}{\sqrt{2}} - \text{не сходится,}\quad z=\frac{1}{\sqrt{2}} - \text{простой полюс}$$

$$\operatorname{Res}_{z=\frac{i}{\sqrt{2}}} = (f(z)) = \lim_{z\to\frac{i}{\sqrt{2}}}\left[f(z)\left(z-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right] = \lim_{z\to\frac{i}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{2}(z+i\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}+i\sqrt{2}\right)} = -i$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2\sqrt{2}\sin t+3} = 2\pi i\cdot(-i) = 2\pi$$

Ответ: 2π

6 Вычислить интеграл: $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(3+\cos t)^2}$

Решение:

7 Вычислить интеграл: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx$

Решение:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx = \oint\frac{z^2-z+2}{(z^2+9)(z^2+1)}\,dz$$

Особые точки:

$$z=3i\quad(\Im z>0)\quad\text{проходит}$$

$$z=-i\quad(\Im z\geq 0)\quad\text{не проходит}$$

$$z=-3i\quad(\Im z<0)\quad\text{не проходит}$$

$$z=i\quad(\Im z\leq 0)\quad\text{проходит}$$

$$1.\operatorname{Res}_{z=3i}(f(z)) = \lim_{z\to 3i}\left[f(z)\,(z-3i)\right] = \lim_{z\to 3i}\frac{z^2-z+2}{(z+3i)(z^2+1)} = \frac{3-7i}{48}$$

$$2.\operatorname{Res}_{z=i}(f(z)) = \lim_{z\to i}\left[f(z)\,(z-i)\right] = \lim_{z\to i}\frac{z^2-z+2}{(z+9)(z^2+1)} = \frac{-i-1}{16}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx = 2\pi i\left(\frac{3-7i}{48}+\frac{-i-1}{16}\right) = 2\pi i(\frac{10}{48i}) = \frac{5\pi}{12}$$

Ответ: $\frac{5\pi}{12}$

8 Вычислить интеграл: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3-2)\cos\frac{x}{2}}{(x^2+1)^2}\,dx$

Решение:

9 Найти оригинал по заданному изображению: $\frac{1}{p^3(p^2-4)}$

Решение:

$$\frac{1}{p^3(p^2-4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p^3} + \frac{Dp+E}{p^2-4}$$

$$= \frac{A^{(p^2(p^2-4)}}{p} + \frac{B^{(p(p^2-4)}}{p^2} + \frac{C^{(p^2-4}}{p^3} + \frac{(Dp+E)^{(p^3}}{p^2-4}$$

$$\begin{cases} p^3: & A+D=0 \\ p^2: & B+E=0 \\ p: & -4A+C=0 \\ 1: & -4B=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B=E=0 \\ 5C=-1 \\ C=-\frac{1}{5} \\ A=-\frac{4}{5} \\ D=\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$= -\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{p} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{4p}{p^2-4}$$

$$= -\frac{4}{5} - \frac{1}{10}t^2 + \frac{4}{5}\operatorname{ch}(2t)$$

Ответ: $\frac{1}{p^3(p^2-4)} = -\frac{4}{5} - \frac{1}{10}t^2 + \frac{4}{5}\operatorname{ch}(2t)$

10 Найти решения дифференциального уравнения, удовлетворяющее условиям $y'' - 4y = \operatorname{th}^2 2t$

Решение:

11 Операционным методом решить задачу Коши $y'' + y' + y = 7e^{2t}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$

Решение:

$$p^2\bar{y} - p - 4 + p\bar{y} - 1 + \bar{y} = \frac{7}{p-2}$$

$$(p^2+p+1)\bar{y} - p - 5 = \frac{7}{p-2} + p + 5$$

$$\bar{y} = \frac{7}{(p-2)(p^2+p+1)} + \frac{p+5}{p^2+p+1} = \frac{p^2+3p-3}{(p-2)(p^2+p+1)}$$

$$= \frac{1}{p-2} + \frac{2}{p^2+p+1}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{p-2} + \frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \to y(t) = e^{2t} + \frac{4}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t$$

Ответ: $y(t) = e^{2t} + \frac{4}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t$

12 Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданному начальному условию:

$$\begin{cases} x' = 2y \qquad x(0) = 2 \\ y' = 2x + 3y + 1 \qquad y(0) = 1 \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} pX(p) - x(0) = 2Y(p) \\ pY(p) - y(0) = 2X(p) + 3Y(p) + \frac{1}{p} \end{cases}$$

$$\begin{cases} pX(p) - 2 = 2Y(p) \\ pY(p) - 1 = 2X(p) + 3Y(p) + \frac{1}{p} \end{cases}$$

$$pY(p) - 1 = 2X(p) + 3Y(p) + \frac{1}{p} \Rightarrow X(p) = \frac{pY(p) - 1 - 3Y(p) - \frac{1}{p}}{2}$$

$$p\frac{pY(p) - 1 - 3Y(p) - \frac{1}{p}}{2} - 2 = 2Y(p) \Rightarrow Y(p) = \frac{p+5}{p^2 - 3p - 4}$$

$$Y(p) = \frac{p+5}{p^2-3p-4} = \frac{p+5}{(p-\frac{3}{2})^2 - 4}$$

$$= \frac{5}{3}\frac{p-1}{(p-1)^2-4} = \frac{i}{3}\frac{2i}{(p-1)^2-4} - \frac{2}{3p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{5}{3}e^t\cos(2it) + \frac{i}{3}e^t\sin(2it) - \frac{2}{3} = \frac{5}{3}e^t\operatorname{ch}(2t) - \frac{1}{3}e^t\operatorname{sh}(2t) - \frac{2}{3}$$

$$y' = 2x + 3y + 1 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}[y' - 3y - 1]$$

$$= \frac{1}{2}(e^2\operatorname{ch}(2t) + 3e^t\operatorname{sh}(2t) - 5e^2\operatorname{ch}(2t) + e^t\operatorname{sh}(2t) + 2 - 1)$$

$$= 2e^t\operatorname{sh}(2t) - 2e^t\operatorname{ch}(2t) + \frac{1}{2}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x(t) = 2e^t\operatorname{sh}(2t) - 2e^t\operatorname{ch}(2t) + \frac{1}{2} \\ y(t) = \frac{5}{3}e^t\operatorname{ch}(2t) - \frac{1}{3}e^t\operatorname{sh}(2t) - \frac{2}{3} \end{cases}$$