Задание 1, лек. 1.

1) Переопределенная СЛАУ с $\exists!$ решением.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(Решение: $(x, y) = (1, 2)$)

Ранг основной матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$A: \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{(-2)} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{(-1)} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} :(-3) \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \Rightarrow rk(A) = 2.$$

Ранг расширенной матрицы $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{(-2)} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{(-1)} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \Rightarrow rk(A^*) = 2$$

По т. Кр.-К.:

$rk(A) = rk(A^*) \Rightarrow \exists$ решение, причем кол-во неизвестных $= 2 \Rightarrow$ имеет $\exists!$ решение.

2) Недоопределенная СЛАУ с беск. решений:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$rk(A)$: ~~$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$~~

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{(-1)} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} :(-3) \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow rk(A) = 2$$

$rk(A^*)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{(-2)} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -6 \end{pmatrix} (:-3) \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow rk(A^*) = 2$$

$rk(A) = rk(A^*) \Rightarrow \exists$ решение.

$rk(A) <$ число неизвестных (3: x, y, z) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ беск. число решений.