Теорема: Пусть F - нормированное линейное пространство, а G - его конечномерное подпространство. Тогда для любого элемента $f \in F$ найдется его наилучшее приближение $g \in G$

$$\|f-g\| = \inf_{y \in G} \|f-y\|_F \qquad (1)$$

Док-во:

• Пусть $g_1 \dots g_n$ - некоторый базис в G. Тогда любой элемент $y \in G$ однозначно разлагается в этом базисе:

$$y = y_1 g_1 + \dots + y_n g_n \qquad (2)$$

с нормой:

$$\|y\|_G = \|y_1 g_1 + \dots + y_n g_n\|_G = \|y_1 g_1 + \dots + y_n g_n\|_F \qquad (3)$$

Рассмотрим также евклидову норму $\|y\|_E$ элемента $y \in G$:

$$\|y\|_E = \|y_1 g_1 + \dots + y_n g_n\|_E = \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2\right)^{1/2} \qquad (4)$$

В конечномерных пространствах все нормы эквивалентны, т.е. $\exists\ \alpha, \beta > 0$, что:

$$\alpha \|y\|_E \le \|y\|_F \le \beta \|y\|_E \qquad (5)$$

Докажем непрерывность ф-ции:

$$\varphi(y) = \varphi(y_1, \dots, y_n) = \|f-y\|_G \qquad (6)$$

Справедливо н-во:

$$\|u-v\| \geq \big| \|u\| - \|v\| \big| \qquad (7)$$

в любом нормированном лин. пространстве. Из этого н-ва будем иметь:

$$|\varphi(y) - \varphi(z)| = \big| \|f-y\|_E - \|f-z\|_E \big| \le \|(f-y)-(f-z)\|_E = \qquad (8)$$

$$= \|z-y\|_E = \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k - y_k|^2\right)^{1/2} \qquad (9)$$

Следовательно, если $\|z-y\|_E \to 0$, то и $\varphi(y) - \varphi(z) \to 0$. Непрерывность доказана.

Теперь докажем, что элемент наилучшего приближения g для элемента f достаточно искать в шаре $\|y\|_E \le r$, где

$$r = \frac{\beta + 1 + \|f\|_F}{\alpha}. \qquad (10)$$

Действительно, пусть

$$\|y\|_E > r. \qquad (11)$$

Так как

$$\|f-y\|_F = \|y-f\|_F \geq |\,\|y\|_F - \|f\|_F\,| \qquad (12)$$

и в силу (5) и (11):

$$\|y\|_F \geq \alpha\|y\|_E > \alpha\cdot r = \alpha\cdot\frac{\beta+1+\|f\|_F}{\alpha} = \beta+1+\|f\|_F \qquad (13)$$

Отсюда.

$$\|y_F\| - \|f\|_F > \beta+1 > 0 \qquad (14)$$

Из (14) и (12) следует:

$$\|f-y\|_F \geq |\,\|y\|_F - \|f\|_F\,| = \|y\|_F - \|f\|_F > \beta+1 \qquad (15)$$

Таким образом, инфимум $\inf\|f-y\|_F$ не достигается вне шара $\|y\|_E \leq r$. Поэтому (т. Вейерштрасса) инфимум достигается внутри этого шара:

$$\inf_{y\in G}\|f-y\| = \inf_{\substack{y\in G\\ \|y\|\leq r}}\|f-y\|_F$$

Теорема доказана.

Нозимов

Дилмодхон.