Отчет для задания № 3+.

Выполнил: Нозимов Дилшодхон Зафарович, группа 23151

Описание задания:

В данном задании было предложено решить краевую задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке [0; 1]:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} - u + x^2 = 0, \qquad x \in [0;1],$$

$$u(0) = 0, \qquad \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1} = 1.$$

Для решения задачи используется **метод конечных элементов.**
Для применения метода конечных элементов отрезок [0; 1] был разбит на N равных элементов. Для приближения в элементах использовались квадратичные функции. В условии дана приближаемая функция $u = \frac{2\cos(1-x) - \sin(x)}{\cos(1)} + x^2 - 2$. Для решения данной задачи была поставлена слабая постановка задачи:

$$\int_0^1 (u'v' - uv)dx = -\int_0^1 x^2 dx + v(1).$$

Были найдены следующие функции формы:

$$N_i^1 = \frac{(x - x_{2i+1})(x - x_{2i+2})}{(x_{2i} - x_{2i+1})(x_{2i} - x_{2i+2})},$$

$$N_i^2 = \frac{(x - x_{2i})(x - x_{2i+2})}{(x_{2i+1} - x_{2i})(x_{2i+1} - x_{2i+2})},$$

$$N_i^3 = \frac{(x - x_{2i})(x - x_{2i+1})}{(x_{2i+2} - x_{2i})(x_{2i+2} - x_{2i+1})}.$$

Была найдена локальная матрица жесткости:

$$[K^{(e)}]\{u_h^e\} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} N_i^1 \\ N_i^2 \\ N_i^3 \end{pmatrix} \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} N_i^1 & N_i^2 & N_i^3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} N_i^1 \\ N_i^2 \\ N_i^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N_i^1 & N_i^2 & N_i^3 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+1/2} \\ u_{i+1} \end{pmatrix} dx$$

Для упрощения расчетов была приведена замена $\xi = \frac{x - x_{i+\frac{1}{2}}}{x_{i+1} - x_{i+\frac{1}{2}}} = \frac{2}{L_e}(x - x_{i+1/2})$, где $L_e = x_{i+1} - x_i$ – длина промежутка интегрирования. Отсюда:

$$[K^{(e)}]\{u_h^e\} = \left(\frac{1}{3L_e}\begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix} - \frac{L_e}{30}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+1/2} \\ u_{i+1} \end{pmatrix}.$$

Результаты численных экспериментов приведены в таблице 1. На рисунках 1, 2, 3 были приведены по 2 графика – 1) График точного и приближенного решения для N = 8, 32, 128 соответственно, 2) Разность точного и приближенного решения для N = 8, 32, 128 соответственно.

Характеристики компьютера:
Процессор: 1,1 GHz 2-ядерный процессор Intel Core m3. **Память:** 8 ГБ 1867 MHz LPDDR3

Графика: Intel HD Graphics 515 1536 МБ

Таблица 1. Результаты численных экспериментов

Размер сетки	$\|E_r\|_\infty$	R	$\|E_r\|_{L_2}$	$\mu([K])$	Время расчетов, с
2	3.11e-4	—	2.39e-4	4.69e+2	6.42e-1
4	3.89e-5	3.00	2.99e-5	1.69e+3	2.08e-1
8	4.86e-6	3.00	3.73e-6	6.30e+3	2.44e-1
16	6.07e-7	3.00	4.66e-7	2.42e+4	5.05e-1
32	7.58e-8	3.00	5.83e-8	9.50e+4	7.06e-1
128	9.47e-9	3.00	7.29e-9	3.76e+5	4.03e-1

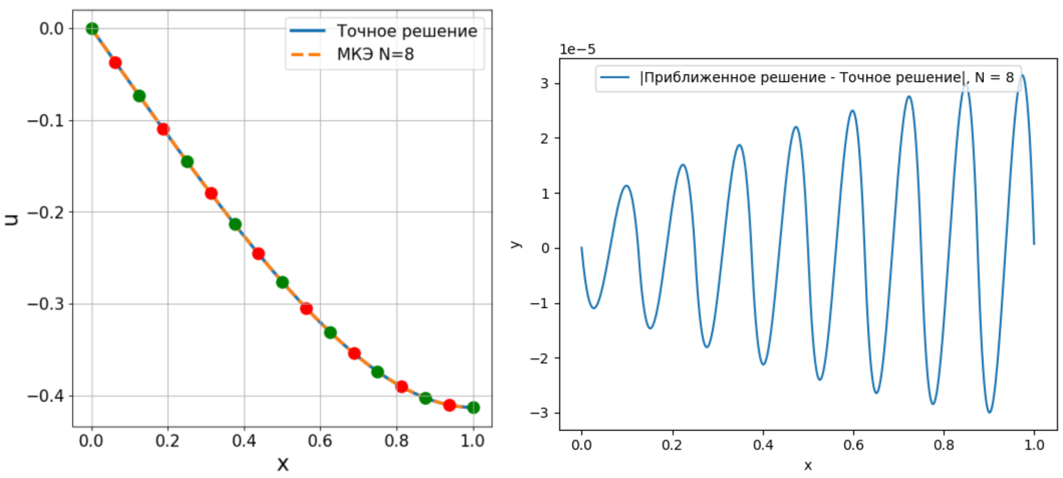

Рисунок 1. 1) График точного и приближенного решения 2)График разности приближённого и точного решений при количестве элементов N = 8

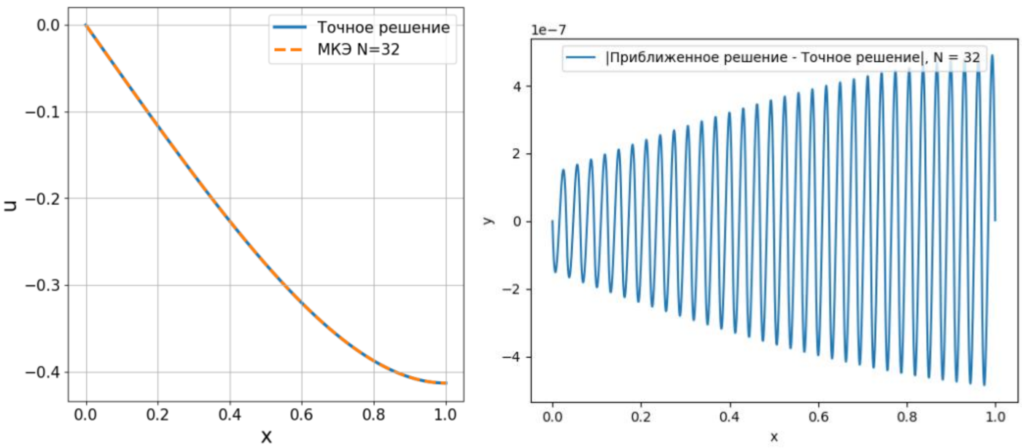

Рисунок 2. 1) График точного и приближенного решения 2)График разности приближённого и точного решений при количестве элементов N = 32

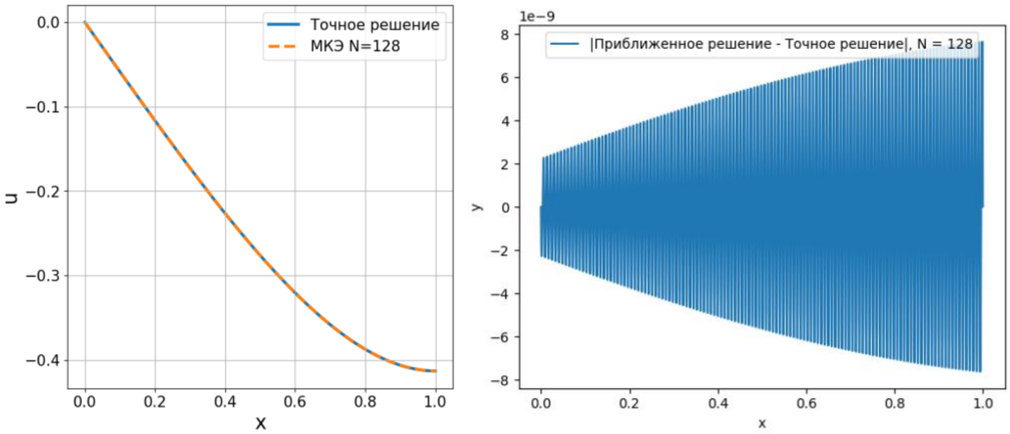

Рисунок 3. 1) График точного и приближенного решения 2)График разности приближённого и точного решений при количестве элементов N = 128