

### Отчет по заданию 3

**Выполнил:** Нозимов Дилшодхон Зафарович

В данном задании предлагалось найти решение задачи при помощи метода конечных элементов. В таблице 1 приведены результаты численных экспериментов при различных  $N$ . На рисунках 1, 2, 3 приведены точное и приближенное решение задачи.

#### Задание:

Найти точное решение задачи, заполнить таблицу по образцу, привести рисунки.

#### Задача:

**1. Задача о растяжении стержня постоянного сечения**, где  $C(x) = EA$ ,  $f(x) = \rho g A$ . Здесь  $L = 5$  м — длина балки,  $g = 9.81$  м/с<sup>2</sup> — ускорение свободного падения,  $P = 30000$  Н — сила,  $E = 30$  ГПа — модуль упругости,  $\rho = 2150$  кг/м<sup>3</sup> — плотность,  $A = 0.0341$  м<sup>2</sup> — постоянная площадь поперечного сечения. Краевые условия:  $u(0) = 0$ ,  $\frac{du}{dx}(L) = -P/(EA)$ .

#### Точное решение задачи:

$$u(x) = \frac{\rho g A}{2EA} x^2 - \left( \frac{P}{EA} + \frac{\rho g AL}{EA} \right) x$$

#### Характеристики компьютера:

**Процессор:** 1,1 GHz 2-ядерный процессор Intel Core m3

**Память:** 8 ГБ 1867 MHz LPDDR3

**Графика:** Intel HD Graphics 515 1536 МБ

Таблица 1: Результаты численных экспериментов

N	$\ E_r\ _\infty$	R	$\ E_r\ _L$	R	Время расчетов, с	$\mu[K]$
2	3.49e-03	-	4.40e-03	-	1.36e-01	8.34e+00
4	8.73e-04	2.00e+00	1.10e-03	2.00e+00	2.42e-01	3.03e+01
8	2.18e-04	2.00e+00	2.75e-04	1.99e+00	4.69e-01	1.14e+02
16	5.45e-05	1.99e+00	6.87e-05	2.00e+00	8.73e-01	4.38e+02
32	1.36e-05	2.00e+00	1.72e-05	2.00e+00	1.69e+00	1.71e+03
64	3.41e-06	1.99e+00	4.29e-06	1.99e+00	3.55e+00	6.74e+03
128	8.52e-07	2.09e+00	1.07e-06	2.00e+00	7.05e+00	2.68e+04

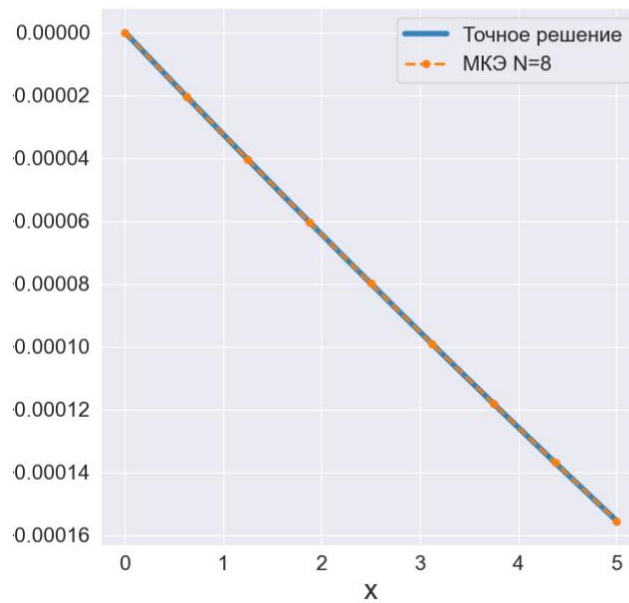


Рис. 1. Метод МКЭ для N=8

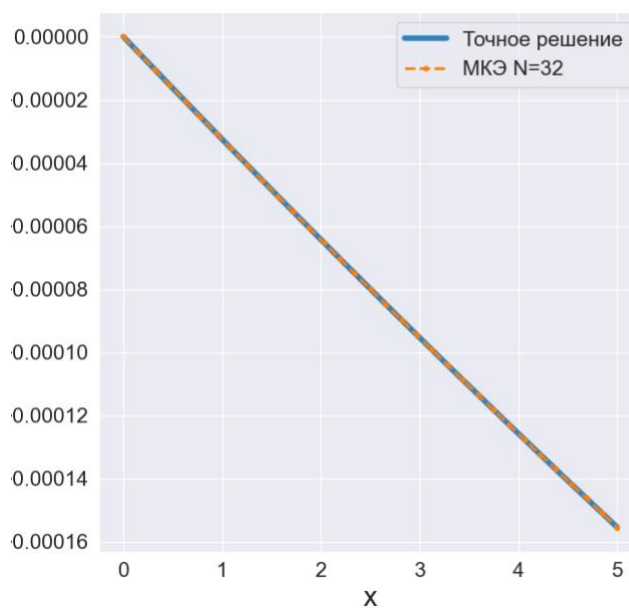


Рис. 2. Метод МКЭ для N=32

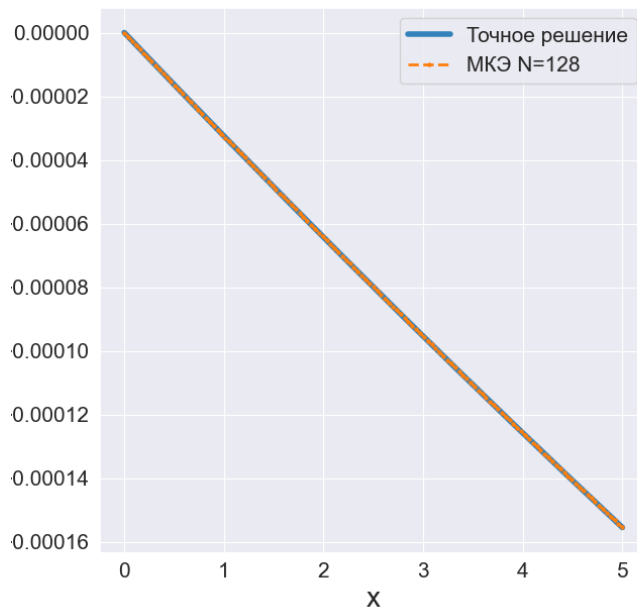


Рис. 3. Метод МКЭ для N=128

#### Ответы на вопросы:

**1. Оцените арифметическую сложность полученного алгоритма.**  
Решение СЛАУ с трёхдиагональной матрицей производится за  $O(N)$ . Правая часть считается путём умножения трёхдиагональной матрицы на вектор известных значений – тоже за  $O(N)$ .

**2. Влияет ли способ нумерации элементов на вычислительную эффективность алгоритма?**  
Да. Например, в данном конкретном примере матрица  $K$  трёхдиагональная, что существенно упрощает подсчёты. В общем виде это не так.

**3. Оцените, во сколько раз увеличится глобальная СЛАУ, если вместо  $n$  линейных элементов использовать  $n$  квадратичных.**  
В квадратичном случае к узлам на краях элементов добавятся узлы в серединах элементов, то есть число переменных вырастет вдвое. Соответственно увеличится и глобальная СЛАУ – из  $(n+1) \times (n+1)$  до  $(2n+1) \times (2n+1)$

**4. Каким образом найти локальную матрицу жёсткости и вектор правой части, если нет возможности провести интегрирование аналитически?**  
Численно, например, метод трапеций.