

# ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΜΕ ΨΗΦΙΑΚΑ 'ΠΟΛΥΕΡΓΑΛΕΙΑ' ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΑΣΗΣ ΑΠΟ ΤΟ FUNCTION PROBE ΣΤΟ GEOGEBRA

Δημήτρης Διαμαντίδης<sup>1</sup>, Ελισάβετ Καλογερία<sup>2</sup>, Χρόνης Κυνηγός<sup>3</sup>, Χρήστος  
Μάλλιαρης<sup>1</sup>, Μάριος Σπάθης<sup>4</sup>

<sup>1</sup>2ο Πειρ/κό Γ/σιο Αθηνών, <sup>2</sup>3ο Γ/σιο Αργυρούπολης, Εργ. <sup>3</sup>Εκπαιδευτικής  
Τεχνολογίας, ΦΣ, ΕΚΠΑ, <sup>4</sup>Πειρ/κό ΓΕΛ Αγίων Αναργύρων

[dimitrd@ppp.uoa.gr](mailto:dimitrd@ppp.uoa.gr), [ekaloger@math.uoa.gr](mailto:ekaloger@math.uoa.gr), [kynigos@ppp.uoa.gr](mailto:kynigos@ppp.uoa.gr),  
[chrismalliaris@gmail.com](mailto:chrismalliaris@gmail.com), [mspathis@gmail.com](mailto:mspathis@gmail.com)

*Η παρούσα έρευνα εστιάζει στις σχεδιαστικές επιλογές μιας ομάδας έμπειρων εκπαιδευτικών, που κατασκευάζει στο Geogebra ένα νέο εργαλείο ώστε να προσομοιάζει χρηστικά και λειτουργικά στο εργαλείο «αυξομείωση» του Function Probe. Η ανάλυση των επιλογών αυτών ανέδειξε δυο διακριτές φάσεις της διαδικασίας σχεδιασμού, κατά τη διάρκεια των οποίων ενεργοποιούνται διαφορετικές μορφές γνώσης σε σχέση με το μοντέλο TRACK.*

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αφορμή για την εκπόνηση της παρούσας μελέτης αποτέλεσε το ανανεωμένο Πρόγραμμα Σπουδών της Επιμόρφωσης Επιμορφωτών για την παιδαγωγική αξιοποίηση της ψηφιακής τεχνολογίας στα Μαθηματικά. Συγκεκριμένα, τα υποδειγματικά σενάρια με χρήση τριών κατηγοριών λογισμικών (Δυναμικής Γεωμετρίας: The Geometer's Sketchpad / Cabri, Αλγεβρικών συστημάτων: Function Probe, Μοντελοποίησης: Modelus) αντικαταστάθηκαν με το πιο προσαρμοσμένο στις σύγχρονες τεχνολογικές εξελίξεις και ελεύθερης πρόσβασης Geogebra. Η αντικατάσταση αυτή που σηματοδοτεί τη μετάβαση από τα εξειδικευμένα για κάθε μαθηματική χρήση ψηφιακά εργαλεία, σε «πολυεργαλεία» ευρύτερης χρήσης, αποτελεί πρόκληση για τη μαθηματική εκπαίδευση και χρήζει περαιτέρω έρευνας. Πόσο απαραίτητα θεωρούνται τα εξειδικευμένα εργαλεία για τη διδασκαλία των Μαθηματικών και πώς μπορούν να κατασκευασθούν στο Geogebra; Ο εκπαιδευτικός-χρήστης του FP εξελίσσεται στον εκπαιδευτικό-σχεδιαστή με το Geogebra; Αυτή η εξέλιξη αφορά και γνωστικές πτυχές του εκπαιδευτικού, άρα μπορεί να συντελέσει στην επαγγελματική του ανάπτυξη; Με αφορμή αυτά τα ερωτήματα, η παρούσα εργασία εστιάζει σε μια πτυχή αυτής της μετάβασης, που αφορά την σύγκριση αναπαραστασιακών εργαλείων μεταξύ ενός «πολυεργαλείου» όπως το GeoGebra και ενός πιο εξειδικευμένου λογισμικού όπως το Function Probe (FP).

Το FP είναι ένα πολυαναπαραστασιακό λογισμικό με τρία αλληλο-συνδεδεμένα παράθυρα: «Πίνακας», «Γράφημα» και «Αριθμομηχανή». Τα γραφήματα μπορούν να παραχθούν με διάφορους τρόπους, π.χ. εισάγοντας ζεύγη (x, y) από έναν πίνακα (μπορούν να δημιουργηθούν στήλες "x" και "y"). Επίσης υπάρχει και το παράθυρο «Εργαλειοθήκη», που ένα από τα εργαλεία του είναι η «αυξομείωση». Επιλέγοντάς το, ο χρήστης μπορεί να προκαλέσει άμεσα και δυναμικά «οριζόντια» και «κατακόρυφη» παραμόρφωση στα γραφήματα των συναρτήσεων, που βρίσκονται στο παράθυρο «Γράφημα» (η λειτουργία περιγράφεται παρακάτω). Το

συγκεκριμένο λογισμικό δεν λειτουργεί πλέον στα σύγχρονα λειτουργικά συστήματα και αντικαταστάτης του θεωρείται το Geogebra, ένα λογισμικό ανοικτού κώδικα που συνδυάζει τα βασικά χαρακτηριστικά των Λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας (DGS) με αυτά των Υπολογιστικών Συστημάτων Άλγεβρας (CAS) με στόχο να γεφυρώσει κάποια κενά μεταξύ γεωμετρίας, άλγεβρας και λογισμού (<http://www.geogebra.gr/joomla/>).

Η έρευνά μας επικεντρώνεται στο εργαλείο «αυξομείωση» του FP που δεν υπάρχει στο Geogebra και στην προσπάθειά μας (ως μέλη της συγγραφικής-ερευνητικής ομάδας) να κατασκευάσουμε αντίστοιχο εργαλείο σε αυτό. Θελήσαμε να ερμηνεύσουμε τις σχεδιαστικές επιλογές μας κατά τη διαδικασία κατασκευής ενός τέτοιου εργαλείου, κυρίως σε σχέση με τις μορφές γνώσης που ενεργοποιούνται.

### ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η μελέτη του σχεδιασμού και κατασκευής του εργαλείου «αυξομείωσης» στο GeoGebra, υλοποιήθηκε μέσω του θεωρητικού δομήματος της «δημιουργίας εργαλείων» (instrumental genesis) (Vérillon & Rabardel, 1995) και του μοντέλου TPaCK (Mishra & Koehler, 2006). Το πρώτο αναφέρεται στην αλληλεπίδραση των ψηφιακών εργαλείων με τον εκπαιδευτικό που τα χρησιμοποιεί και τα τροποποιεί, ενώ το δεύτερο στην περιγραφή της γνώσης των εκπαιδευτικών που αξιοποιούν ψηφιακά μέσα.

Οι Vérillon & Rabardel (1995) διαχώρισαν τα τεχνουργήματα (artifacts), που είναι προϊόντα ανθρώπινης δραστηριότητας, από τα εργαλεία, που είναι ατομικές κατασκευές, ανάμικτες οντότητες, φτιαγμένες από τεχνουργήματα και σχήματα χρήσης τους (schemes). Σύμφωνα με τον Vergnaud (2009), ως σχήμα ορίζεται η σταθερή οργάνωση μιας δραστηριότητας που έχει ολοκληρωθεί, η οποία ενσωματώνει γνώση και είναι δομημένη μέσω άτυπων εννοιών και κανόνων που διαμορφώνονται κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας. Η διαδικασία μέσω της οποίας ένα ανθρώπινο κατασκεύασμα μετατρέπεται σε εργαλείο περιγράφεται με τον όρο «δημιουργία εργαλείου» και περιλαμβάνει δυο εσωτερικές διεργασίες (Vérillon & Rabardel, 1995): (α) τη δημιουργία εργαλείου (instrumentation): αναφέρεται στο πώς το ίδιο το εργαλείο με τις δυνατότητες και τους περιορισμούς του χαράσσει τη δραστηριότητα του χρήστη και (β) την αλλοίωση εργαλείου (instrumentalisation): αναφέρεται στο πώς ο χρήστης παρεμβαίνει στο εργαλείο και ορίζει τρόπους χρήσης του. Στην εργασία μας θεωρούμε ως τεχνουργήματα την «αυξομείωση» του FP, τον δρομέα του GeoGebra και τις εφαρμογές που κατασκευάζονται σε αυτά τα περιβάλλοντα. Ταυτόχρονα όμως είναι και εργαλεία εφόσον ο χρήστης (μαθητής ή εκπαιδευτικός, ο δεύτερος στην περίπτωση μας) τους αποδίδει μία χρήση.

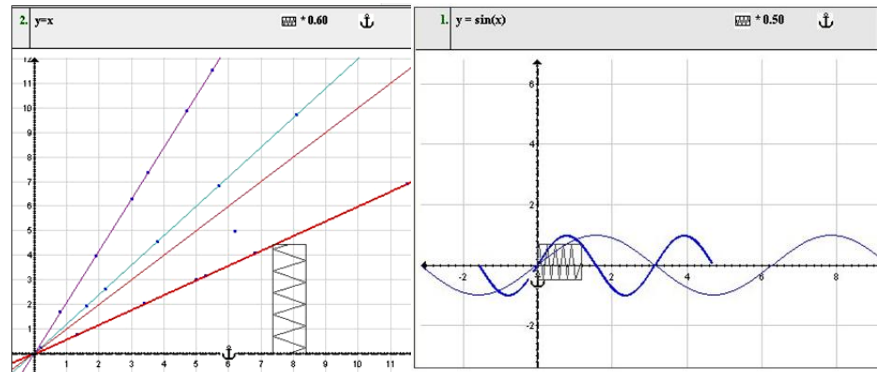
Οι γνώσεις που απαιτούνται για την ενσωμάτωση της τεχνολογίας στη διδασκαλία περιγράφονται από το μοντέλο TPACK (Mishra & Koehler, 2006), το οποίο λαμβάνει υπόψη την αλληλεπίδραση μεταξύ περιεχομένου, παιδαγωγικής και τεχνολογίας: α) Η τεχνολογική γνώση (TK) αφορά τη γνώση σχετικά με τις τεχνικές πτυχές του λογισμικού. (β) Η τεχνολογική γνώση περιεχομένου (TCK) αναφέρεται στους τρόπους με τους οποίους η τεχνολογία μπορεί να αλληλοσυνδέεται με τη γνώση του

αντικειμένου (των μαθηματικών εν προκειμένω). γ) Η τεχνολογική παιδαγωγική γνώση (TPK) περιγράφει μια ευρύτερη γνώση της τεχνολογίας σε σχέση με τις παιδαγωγικές στρατηγικές που επικεντρώνονται στη γνώση των εργαλείων και των λειτουργικοτήτων τους, καθώς και στην αλληλεξάρτηση μεταξύ ειδικών εργαλείων και δραστηριοτήτων. (δ) Η τεχνολογική παιδαγωγική γνώση περιεχομένου (TPCK) περιγράφει μια αναδυόμενη μορφή γνώσης που απαιτεί κατανόηση των εννοιών, παιδαγωγικές τεχνικές για την επικοινωνία του μαθηματικού περιεχομένου με εποικοδομητικούς τρόπους, γνώση των δυσκολιών των μαθητών στην μάθηση συγκεκριμένων θεμάτων, γνώση της προηγούμενης γνώσης των μαθητών και πώς όλα τα παραπάνω μπορούν να απευθυνθούν με νέο τρόπο μέσω της χρήσης της τεχνολογίας. Η κατηγοριοποίηση των Mishra & Koehler μας χρησίμευσε στη σύνδεση των σχεδιαστικών επιλογών με τις γνώσεις που βρίσκονται πίσω από αυτές.

Υποθέτοντας ότι οι γνώσεις του εκπαιδευτικού - όπως αυτές περιγράφονται μέσω του μοντέλου TRACK - συνδέονται με τις σχεδιαστικές επιλογές καταλήξαμε στο παρακάτω ερευνητικό ερώτημα «Ποιες γνώσεις του εκπαιδευτικού ενεργοποιούνται μέσα από τις σχεδιαστικές του επιλογές κατά τη διαδικασία δημιουργίας ενός συγκεκριμένου εργαλείου με το Geogebra».

## ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η παρούσα έρευνα αποτελεί μια μελέτη περίπτωσης (Yin, 2014) η οποία εστιάζει στις σχεδιαστικές επιλογές της συγγραφικής - ερευνητικής ομάδας (τέσσερις έμπειροι καθηγητές Μαθηματικών, ιδιαίτερα εξοικειωμένοι με την παιδαγωγική αξιοποίηση της τεχνολογίας στα Μαθηματικά) για την κατασκευή ενός εργαλείου τύπου «αυξομείωσης» στο GeoGebra. Ξεκινήσαμε από την υπόθεση ότι οι επιλογές της ομάδας καθοδηγούνταν από την κοινή, διαμορφωμένη κουλτούρα των μελών της, τα οποία συνεργάστηκαν για μεγάλο χρονικό διάστημα για την αναμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού του ΠΑΚΕ. Συνεπώς, η μεθοδολογική προσέγγιση είχε στοιχεία εθνογραφίας αφού οι ερευνητές ήταν μέλη της ομάδας, λειτουργώντας ως συμμετέχοντες παρατηρητές (Hammersley & Atkinson, 2010). Τα δεδομένα της έρευνας αποτέλεσαν οι σημειώσεις από τις δια ζώσης συνομιλίες της ομάδας, τα κείμενα των εξ αποστάσεως ηλεκτρονικών συνομιλιών, καθώς και τα παραγόμενα ψηφιακά υλικά, στις διάφορες φάσεις τους μέχρι το τελικό προϊόν. Η περιγραφή των σχεδιαστικών επιλογών των εκπαιδευτικών βασίζεται στη χρονική αλληλουχία με την οποία παράχθηκαν τα δεδομένα μας. Οι επιλογές αυτές αναλύονται σε σχέση με τα χαρακτηριστικά των τεσσάρων μορφών γνώσης του μοντέλου TRACK. Σημειώνουμε ότι αν και ο σχεδιασμός υλοποιήθηκε μέσω αλληλεπίδρασης των μελών της συγγραφικής-ερευνητικής ομάδας, στην παρούσα μελέτη εστιάζουμε στις σχεδιαστικές επιλογές ως αποτέλεσμα της συνεργασίας και όχι στην ίδια τη διαδικασία μέσα από την οποία προέκυψαν.



**Εικόνα 1: Αριστερά κατακόρυφη - δεξιά οριζόντια παραμόρφωση**

## **ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΤΟΥ ΕΡΓΑΛΕΙΟΥ «ΑΥΞΟΜΕΙΩΣΗ» ΣΤΟ GEOGEBRA**

### **Η αυθεντική μορφή της «αυξομείωσης»**

Επιλέγοντάς την «αυξομείωση» ο χρήστης του FP μπορούσε μέσω κουμπιών τα οποία απεικόνιζαν ένα οριζόντιο και ένα κατακόρυφο ελατήριο να παραμορφώσει αντίστοιχα το γράφημα της συνάρτησης που εμφανιζόταν στο παράθυρο «Γράφημα». Η τιμή της κάθε «αυξομείωσης» εμφανιζόταν στην επάνω δεξιά γωνία του γραφήματος, με μορφή αριθμού. Ένα παράθυρο ιστορικού στο γράφημα επέτρεπε την προβολή των τύπων των μετασχηματισμένων συναρτήσεων και ο μαθητής έβλεπε στην οθόνη του (Εικ.1) τον αρχικό τύπο της συνάρτησης, τις τιμές της «αυξομείωσης» που αντιστοιχούσαν στις 'μεταβολές' λόγω της χρήσης των ελατηρίων και τις αλγεβρικές αλλαγές στις οποίες υπόκειται ο αρχικός τύπος της συνάρτησης.

Η χρήση αυτών των εργαλείων οδηγεί σε μετασχηματισμούς του αρχικού τύπου της συνάρτησης στις μορφές του πίνακα 1 (οι μετατροπές αυτές είναι εμφανέστερες σε περιοδική συνάρτηση).

Αρχικός τύπος	Νέος τύπος	Αποτέλεσμα «αυξομείωσης»
$y = f(x)$	$y = f\left(\frac{1}{\alpha} \cdot x\right)$	Οριζόντια κίνηση (παραμόρφωση)
$y = f(x)$	$y = \beta \cdot f(x)$	Κατακόρυφη κίνηση (παραμόρφωση)

**Πίνακας 1: Μετασχηματισμοί του αρχικού τύπου της συνάρτησης**

Από διδακτικής πλευράς η χρήση του εργαλείου ήταν διερευνητική. Ο μαθητής μπορούσε να εισάγει τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης στο αντίστοιχο παράθυρο του FP και στη συνέχεια να την παραμορφώσει με την «αυξομείωση» ώστε π.χ. να την «ταιριάξει» με δοσμένα σημεία και να ανακαλύψει γραφικά ένα μαθηματικό μοντέλο πίσω από κάποια δεδομένα. Κάθε παραμόρφωση που προκαλούσε στην γραφική παράσταση αντιστοιχούσε σε κάποιον αλγεβρικό μετασχηματισμό του τύπου της συνάρτησης (Πίνακας 1), ωστόσο αυτός ο μετασχηματισμός δε φαινόταν ούτε ήταν μέρος του χειρισμού ή της διερεύνησης

(τουλάχιστον σε αυτή τη φάση). Ο μαθητής που προκαλούσε μία παραμόρφωση στη γραφική παράσταση, δε χρειαζόταν να γνωρίζει την αντίστοιχη αλγεβρική αναπαράσταση που υλοποιούσε τον αντίστοιχο μετασχηματισμό. Για παράδειγμα, αν προκαλούσε «κατακόρυφη» παραμόρφωση στη συνάρτηση  $ημx$ , δε χρειαζόταν να γνωρίζει ότι αλγεβρικά αυτό αντιστοιχούσε στην συνάρτηση  $β \cdot ημx$  με μεταβλητό  $β$ . Η διερεύνηση γινόταν μόνο γραφικά και η εικόνα του εργαλείου (ελατήριο) είχε κιναισθητικό χαρακτήρα.

### Η «αυξομείωση» στο GeoGebra ή «τεντώστρα»

Ξεκινώντας από το δεδομένο ότι στο Geogebra ο χειρισμός γίνεται πάντα μέσω δρομέων που βρίσκονται έξω από το σχήμα, η βασική ιδέα ήταν η δημιουργία ενός εργαλείου χειρισμού παρόμοιου με την «αυξομείωση» του FP για μία συγκεκριμένη συνάρτηση και στη συνέχεια η δημιουργία ενός εργαλείου γενικής χρήσης για πολλές συναρτήσεις. Έτσι, εισαγάγαμε δύο δρομείς  $α$  και  $β$  και στη συνέχεια τους χρησιμοποιήσαμε όπως στον πίνακα 1, στον τύπο της συνάρτησης της οποίας τη γραφική παράσταση θέλαμε να υποβάλλουμε σε παραμόρφωση τύπου «αυξομείωση» (στο εξής ΠΤΑ). Το χαρακτηριστικό του δρομέα που είχαμε σκοπό να εκμεταλλευτούμε ήταν αυτό του δυναμικού χειρισμού. Για παράδειγμα, για να υποβάλλουμε σε ΠΤΑ τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $ημx$  εισαγάγαμε στη «γραμμή εισαγωγής» του GeoGebra την οικογένεια συναρτήσεων  $f(x) = β \cdot ημ\frac{α}{β}x$ , με

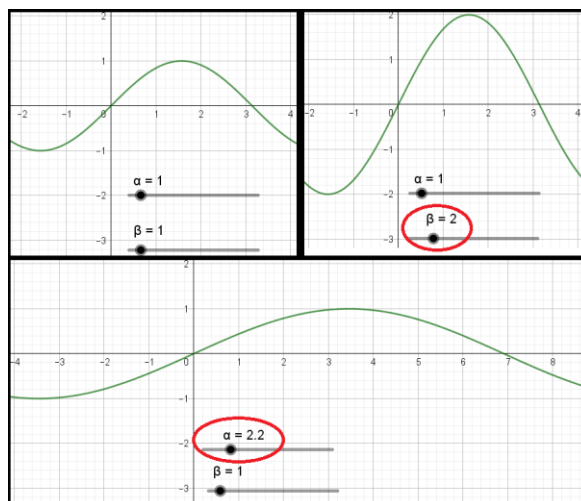
παραμέτρους  $α$  και  $β$  με αρχικές τιμές των δρομέων  $α=1$  και  $β=1$ . Έτσι, στο παράθυρο των γραφικών αποτυπώνεται η γραφική παράσταση της  $ημx$ , ως στιγμιότυπο της παραπάνω οικογένειας. Με μετακίνηση του δρομέα  $α$  είχαμε οριζόντια ΠΤΑ, ενώ με μετακίνηση του δρομέα  $β$  είχαμε κατακόρυφη ΠΤΑ (Εικ. 2): όταν μεταβάλαμε δυναμικά το δρομέα  $β$  από την τιμή 1 στην τιμή 2, στο παράθυρο των γραφικών αποτυπώθηκε η δυναμική μεταβολή της γραφικής παράστασης από το στιγμιότυπο της  $ημx$  στο στιγμιότυπο της  $2ημx$ , δίνοντας την αίσθηση της ζητούμενης παραμόρφωσης. Αντίστοιχα, ο χειρισμός του δρομέα  $α$  από την τιμή 1 στην τιμή 2,2 οδηγεί στη δυναμική μεταβολή της γραφικής παράστασης από το στιγμιότυπο της  $ημx$  στο στιγμιότυπο της  $ημ\frac{1}{2,2}x$ , ενώ ο χειρισμός και των δύο

μεταβολέων οδηγεί σε μεικτή ΠΤΑ (και οριζόντια και κατακόρυφη). Για να υποβάλλουμε άλλη συνάρτηση ΠΤΑ, θα έπρεπε να σβήσουμε τη γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης και να εισαγάγουμε τη νέα συνάρτηση στη γραμμή εισαγωγής, χρησιμοποιώντας καταλλήλως τις μεταβλητές  $α$  και  $β$ .

Συγκρίνοντας με το αυθεντικό εργαλείο «αυξομείωσης», παρατηρήσαμε ότι ο χρήστης του στο FP, όχι μόνο δε χρειαζόταν να ορίσει νέα συνάρτηση γράφοντας τον τύπο της για να ξαναχρησιμοποιήσει το εργαλείο, αλλά δεν χρειαζόταν καν να γνωρίζει το αλγεβρικό «μέρος» της παραπάνω διερεύνησης. Σε αυτό το σημείο αποφασίσαμε ότι θα έπρεπε να αρθεί κατά το δυνατόν αυτή τη διαφοροποίηση από την αυθεντική «αυξομείωση», γιατί θεωρήσαμε αλλάζει πολύ η διδακτική αξιοποίηση του εργαλείου.



Αν η διερεύνηση για την κατάλληλη συνάρτηση γινόταν μέσω της αλγεβρικής αναπαράστασης, τότε αυτό προϋπέθετε κάποια ικανότητα χειρισμού αυτής της αναπαράστασης. Αντιθέτως, στο FP η «λογική» είναι να μπορεί να γίνει η διερεύνηση χωρίς να χρειάζεται ο μαθητής να χειριστεί την αλγεβρική αναπαράσταση. Αυτό ενισχύεται και από την εικόνα του ελατηρίου που χρησιμοποιείται στο FP η οποία παραπέμπει σε ένα περισσότερο χωρικό χαρακτηριστικό της γραφικής παράστασης (Εικ. 1). Σε αντίθεση με αυτό, η αναπαράσταση του δρομέα στο GeoGebra είναι ένας ολισθητής που παραπέμπει σε ποσοτική μεταβολή (Εικ. 2). Έτσι, αποφασίσθηκε η εισαγωγή όλων των συναρτήσεων που μελετάμε στη Β' θμια εκπαίδευση, χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές  $\alpha$  και  $\beta$  με κατάλληλο τρόπο στους τύπους τους, ώστε να μπορεί να λειτουργήσει το εργαλείο «τύπου αυξομείωσης» στο GeoGebra, ή αλλιώς «τεντώστρα». Στη συνέχεια «κρύψαμε» τους τύπους τους και τοποθετήσαμε κατάλληλα κουμπιά επιλογής, ώστε να μπορεί ο χρήστης να επιλέξει ποια συνάρτηση θέλει να εμφανίσει. Επιπλέον, φροντίσαμε με χρήση εντολών Boolean (κρυφές για το χρήστη), όταν επιλέγει κανείς μία συνάρτηση, τα υπόλοιπα κουμπιά να εξαφανίζονται ώστε να υπάρχει «καθαρό» το παράθυρο των γραφικών. Όταν ο χρήστης αποεπιλέξει το κουτί επιλογής που είχε αρχικά επιλέξει, ξαναεμφανίζονται μπροστά του όλες οι δυνατές επιλογές για να διαλέξει την επόμενη συνάρτηση και να συνεχίσει τη διερεύνησή του (Εικ. 3).

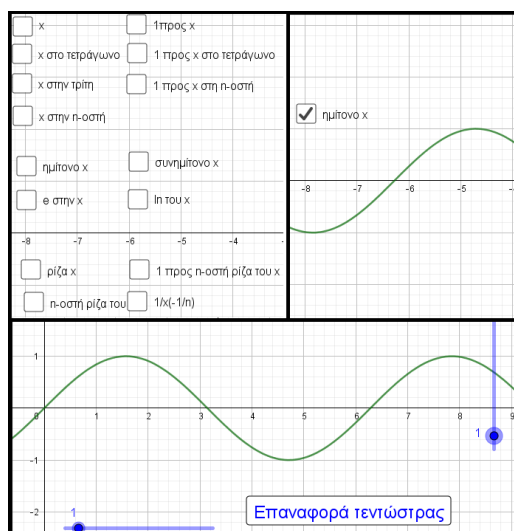


**Εικόνα 2: Κατακόρυφη και οριζόντια παραμόρφωση της ημx**

Ένα ακόμα σημείο σύγκρισης με το FP ήταν ο προσανατολισμός των δρομέων του Geogebra σε σχέση με τα ελατήρια που στο FP είναι είτε οριζόντια είτε κατακόρυφα και μέσα στο σχήμα. Έτσι, ο δρομέας που αντιστοιχεί στην κατακόρυφη ΠΤΑ τοποθετήθηκε κατακόρυφα ώστε να είναι περισσότερο συμβατή η κίνηση του ολισθητή με τη μεταβολή που προκαλεί στη συνάρτηση. Επίσης αφήσαμε εμφανή μόνο την τιμή του κάθε δρομέα και όχι τους συμβολισμούς  $\alpha$  και  $\beta$ , που παραπέμπουν σε αλγεβρικό χειρισμό. Τέλος, προσθέσαμε το κουμπί «επαναφορά τεντώστρας», ώστε να μπορεί ο χρήστης να επαναφέρει τη γραφική παράσταση στην αρχική της θέση, χωρίς παραμορφώσεις. Το ίδιο συμβαίνει όταν ο χρήστης επιλέγει νέα συνάρτηση από το αντίστοιχο κουτί επιλογής. Στην Εικόνα 3, επάνω

αριστερά φαίνονται τα κουτιά επιλογής, επάνω δεξιά με την επιλογή ενός κουτιού εμφανίζεται η γραφική παράσταση της αντίστοιχης συνάρτησης και κάτω οι δρομείς της «τεντώστρας» και το κουμπί «επαναφορά τεντώστρας».

Μια τελική σύγκριση των λειτουργικότητων των δύο εργαλείων δείχνει ότι η «τεντώστρα» δεν λειτουργεί ακριβώς όπως η «αυξομείωση» (οι περιορισμοί προκύπτουν από τα διαθέσιμα εργαλεία του GeoGebra και τον τρόπο που τα αξιοποιεί ο σχεδιαστής), αν και στο Geogebra μπορεί να δημιουργηθεί ένα φιλικό προς τον χρήστη περιβάλλον για χειρισμό-μετασχηματισμό των γραφημάτων οικογενειών συναρτήσεων. Ωστόσο ο δρομέας παραμένει «εκτός» του γραφήματος και δεν παρέχει τα κιναισθητικά χαρακτηριστικά μιας μεταβολής όπως τα ελατήρια του FP, οι παραμορφώσεις των οποίων συνδέονται άμεσα με το γράφημα.



**Εικόνα 2: Κουμιά επιλογής συνάρτησης και οι αντίστοιχες παραμορφώσεις**

### **Ανάλυση των σχεδιαστικών επιλογών**

Η ανάλυση της διαδικασίας σχεδιασμού-δημιουργίας του νέου εργαλείου ανέδειξε δυο διακριτές φάσεις (όχι απαραίτητα με προτεραιότητα) στις οποίες ο εκπαιδευτικός-σχεδιαστής καλείται να λάβει αποφάσεις.

*A) Ερμηνεία της λειτουργίας και λειτουργικότητας του αυθεντικού εργαλείου:* Αρχικά ερμηνεύει τη λειτουργία της «αυξομείωσης», με όρους αλγεβρικού συμβολισμού (Πίνακας 1), δηλαδή ενεργοποιώντας γνώσεις TCK. Στη συνέχεια μέσω του δυναμικού χειρισμού της «αυξομείωσης» και βλέποντάς την ως μέσο δράσης για τον χρήστη, φαίνεται να εντοπίζει τη λειτουργικότητα μίας συμμεταβολής που συντονίζει δύο χαρακτηριστικά: τη μορφή της γραφικής παράστασης και τη μορφή του ελατηρίου. Από την άλλη μεριά, στο δρομέα του GeoGebra, η συμμεταβολή συντονίζει λειτουργικά τη μορφή της γραφικής παράστασης και τη θέση ενός σημείου στον ολισθητή (Thompson & Carlson, 2017). Η συνειδητοποίηση αυτών των λειτουργικότητων (με κατεύθυνση από το εργαλείο προς τον χρήστη), οδηγεί στην βαθύτερη οικειοποίησή του εργαλείου (instrumentation), ώστε να μπορέσει στη συνέχεια να προχωρήσει στην επόμενη φάση.

*B) Μεταφορά λειτουργικότητας του αυθεντικού εργαλείου στον δρομέα του Geogebra: Ο σχεδιαστής έχοντας εντοπίσει την παραπάνω διαφορά, προσπαθεί να μεταφέρει στο δρομέα του GeoGebra το «νέο» σχήμα χρήσης. Θεωρούμε ότι η γνώση του σχεδιαστή που ενεργοποιείται παράλληλα με τον εντοπισμό αυτής της διαφοράς είναι η TPCCK, καθώς η ερμηνεία του γίνεται με όρους διδακτικής προσέγγισης της λειτουργικότητας του εργαλείου με αναφορά (ρητή ή άρρητη) στην έννοια της συμμεταβολής. Για να μεταφέρει το νέο σχήμα χρήσης, ο σχεδιαστής αρχικά συνδέει την κίνηση του ολισθητή με την παραμόρφωση της γραφική παράστασης. Θεωρούμε ότι εδώ ενεργοποιείται η γνώση TCK, ώστε να γίνει λειτουργικό το νέο εργαλείο. Στη συνέχεια μετατρέπει τη διεπαφή του δρομέα (τον ολισθητή) έτσι ώστε οι εξωτερικές αναπαραστάσεις του να είναι πιο κοντά σε αυτό σχήμα (Norman, 1991): αλλάζει τις εξωτερικές ιδιότητές του δρομέα (από οριζόντιο σε κατακόρυφο, κρύβεται η ονομασία των μεταβλητών) και χρησιμοποιεί τις εσωτερικές αναπαραστάσεις του (συνάρτηση, μεταβλητές) ώστε ο χειρισμός του ολισθητή να προκαλεί το επιθυμητό αποτέλεσμα. Εδώ θεωρούμε ότι ενεργοποιούνται γνώσεις TPCCK, καθώς το εργαλείο αρχίζει και μετατρέπεται σε διδακτικό, με το κρύψιμο κάποιων αλγεβρικών σημαινόντων, η επιλογή των οποίων έγινε με συνδυαστικά κριτήρια διδακτικής προσέγγισης και περιεχομένου, αναδεικνύοντας τη διαλεκτική σχέση μεταξύ σχεδιασμού και πιθανής δραστηριότητας υποθετικών μαθητών με το συγκεκριμένο εργαλείο (Kynigos & Psycharis, 2013). Τέλος, για να είναι πιο εργονομικό το νέο εργαλείο, ο σχεδιαστής προσθέτει λειτουργικότητες (κουτιά επιλογής, κουμπί επαναφοράς) που απαιτούν καλή γνώση των δυνατοτήτων του GeoGebra. Εδώ θεωρούμε ότι ενεργοποιούνται γνώσεις TPK. Οι διαδικασίες σχεδιασμού σε αυτή τη φάση έχουν κατεύθυνση από τον χρήστη προς το εργαλείο, καθώς προσπαθεί να του προσδώσει συγκεκριμένα μαθηματικά και διερευνητικά χαρακτηριστικά: Ο δρομέας παίρνει νέο σχήμα χρήσης, που προσαρμόζεται σε αυτό των ελατηρίων της «αυξομείωσης» (instrumentalization).*

## **ΣΥΖΗΤΗΣΗ**

Στην παρούσα εργασία σχεδιάσαμε και δημιουργήσαμε ένα νέο εργαλείο στο Geogebra που να «μοιάζει» με το εργαλείο «αυξομείωση» του FP και μέσα από την παρατήρηση της διαδικασίας σχεδιασμού καταγράψαμε τις διαστάσεις που συνδέονται με γνωστικές πτυχές του εκπαιδευτικού-σχεδιαστή. Η ανάλυση των φάσεων σχεδιασμού έδειξε ότι η μετάβαση από τα εξειδικευμένα μαθηματικά λογισμικά στα πολυεργαλεία είναι μια διαδικασία πολυεπίπεδη, καθώς κάποιες από τις λειτουργικότητες των πρώτων δεν υπάρχουν στα δεύτερα και η δημιουργία τους (στο μέτρο του δυνατού) ενεργοποιεί μια σειρά γνώσεων του εκπαιδευτικού-σχεδιαστή. Η αντικατάσταση ενός εργαλείου με ένα άλλο, συνδέεται με: α) την οπτική του σχεδιαστή για τις λειτουργικότητες του πρώτου (σε σχέση με το μαθηματικό περιεχόμενο, τα τεχνικά και παιδαγωγικά χαρακτηριστικά του, καθώς και τις μεθόδους διδακτικής του αξιοποίησης) β) τη δυνατότητα μεταφοράς κάποιων από αυτά σε ένα νέο περιβάλλον-εργαλείο, το οποίο με τη σειρά του αλλοιώνεται προκειμένου να ενσωματώσει τα ανωτέρω.



Θεωρούμε πως η διαδικασία αυτή εμπεριέχει σημαντικά χαρακτηριστικά για την επαγγελματική εξέλιξη του εκπαιδευτικού, καθώς συνδέεται με την ενεργοποίηση ή ανάπτυξη μιας σειράς μορφών γνώσεων σχετικών με τη χρήση της τεχνολογίας στα Μαθηματικά. Με αυτή την έννοια, η διαδικασία μετατροπής εργαλείων θα μπορούσε να αξιοποιηθεί ως μια από τις μεθόδους σε προγράμματα επιμόρφωσης εκπαιδευτικών.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Hammersley, M., & Atkinson, P. (2010). *Ethnography: Principles in practice* (3. ed., reprinted). London: Routledge.
- Kynigos, C., & Psycharis, G. (2013). Designing for Instrumentalisation: Constructionist Perspectives on Instrumental Theory. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 20(1), 15–19.
- Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. *Teachers College Record*, 108(6), 1017–1054. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x>
- Norman, D. A. (1991). Cognitive Artifacts. In J. M. Carroll (Ed.), *Designing interaction: Psychology at the human-computer interface*. Cambridge [England] ; New York: Cambridge University Press.
- Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Vergnaud, G. (2009). The Theory of Conceptual Fields. *Human Development*, 52(2), 83–94. <https://doi.org/10.1159/000202727>
- Yin, R. K. (2014). *Case study research: Design and methods* (Fifth edition). Los Angeles: SAGE.
- Vérillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity, *European Journal of Psychology of Education*, 10, 77-101.