Привет!!

Слышно ли? Видно ли?

Вр. ряды

Вова: ARIMA ← чёрные ящики

⊕ неплохие практ. прогнозы.

⊖ неинтерпр внутр.

$$\text{SARIMA}(2,\underset{\substack{\uparrow\\ \Delta^1\\ \text{инт}}}{1},0)(0,\underset{\substack{\uparrow\\ \Delta_s^1\\ \text{инт}}}{1},1)[12]$$

y_t

$\downarrow$

$$\Delta_s y_t = y_t - y_{t-12}$$

$$\Delta(\Delta_s y_t) =$$

$$= \Delta(y_t - y_{t-12}) =$$

$$\boxed{z_t = y_t - y_{t-1} - y_{t-12} + y_{t-13}}$$

инт ? !!

$$z_t \sim \text{SARMA}(2,0)(0,1)[12]$$

$$z_t = 0{,}03 - 0{,}6\, z_{t-1} \underbrace{- 0{,}08}_{?}\, z_{t-2} + u_t + 0{,}53\, u_{t-12}$$

Будьте эгоистичными онлайн!!

ETS (error - trend - seasonality)

Выделяем в ряду вымышленные компоненты с удобной интерпретацией.

ETS [+ автомат] [– нельзя придумать]

модели рядов с высоты птичьего полёта!

ETS → Структурн. модели, модели с ненабл. комп.

[PROPHET, ORBIT (2020)]

ETS → Theta-method [модель-крыса]

ARIMA

ETS(AAA)

Additive Error [A/M]

Additive Trend N/A/Ad/M/Md

Additive Seasonality. N/A/M

в теории $2 \cdot 5 \cdot 3 \approx 30$

„сезонность" – постоянный период и стабильная амплитуда сост-ий

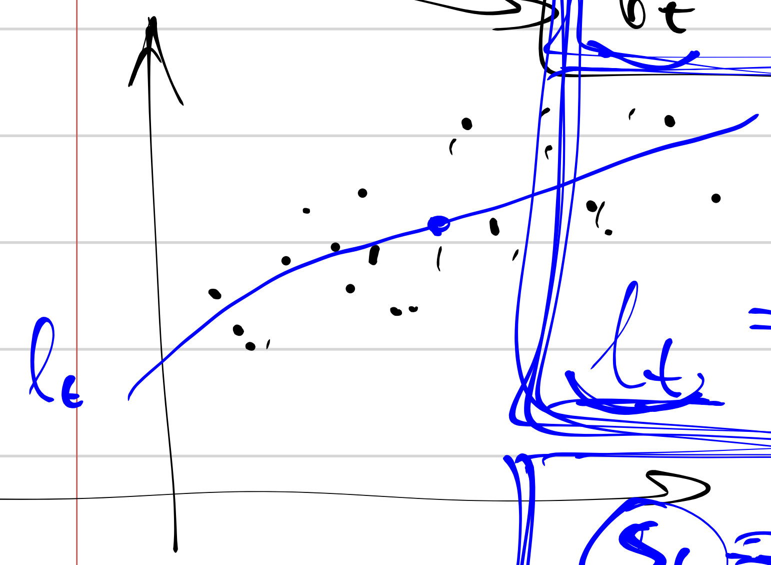
✓ „тренд" – медленно меняется темп роста

y_t - несез. ряд.

b_t – темп роста рассез. (y_t)

$$b_t = b_{t-1} + u_t^b$$

b_t – наклон рассезонир-го y_t



$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + u_t^l$$

$$S_t = S_{t-12} + u_t^s$$

[мес]

темп роста детерм. y_t

ETS(AAA)

$$\begin{cases} b_t = b_{t-1} + u_t^b \to b_0 \; ⑤ \\ l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + u_t^l \to l_0 \; ⑥ \\ s_t = s_{t-12} + u_t^s \to [s_{-11}, s_{-10}, s_{-9}, \ldots, s_{-1}, s_0] \\ y_t = \cancel{l_t + s_t} = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-12} + u_t \end{cases}$$

Q. Сколько всего пар-в в этой модели?

как связаны ошибки?

$u_t \sim N(0; \sigma^2)$ незав. ④

$u_t^l = \alpha \cdot u_t$ ①

$u_t^b = \beta \cdot u_t$ ②

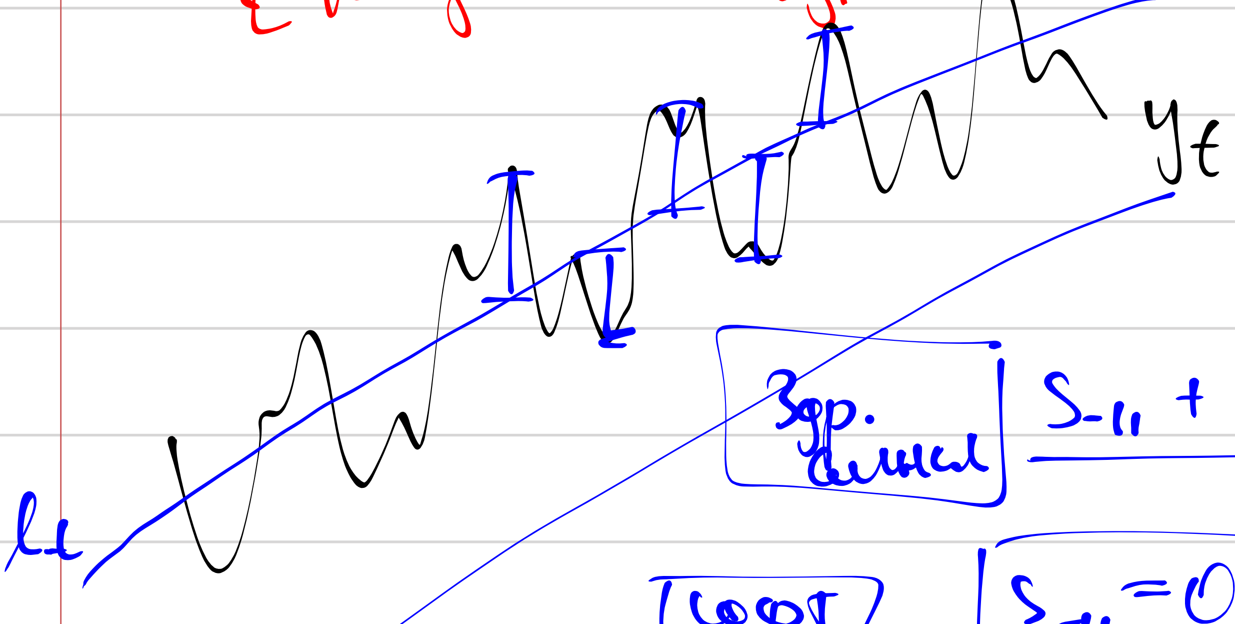
$u_t^s = \gamma \cdot u_t$ ③

как оц-ть ETS-модель?

max правдоподобия!

параметров (полным списком) 18 штук.

[правда есть одно соотношение!]



добавл. ограничение на $s_{-11}, s_{-10}, \ldots, s_{-1}, s_0$

здр. смысл: $s_{-11} + s_{-10} + \ldots + s_{-1} + s_0 = 0$

(софт) $s_{-11} = 0$.

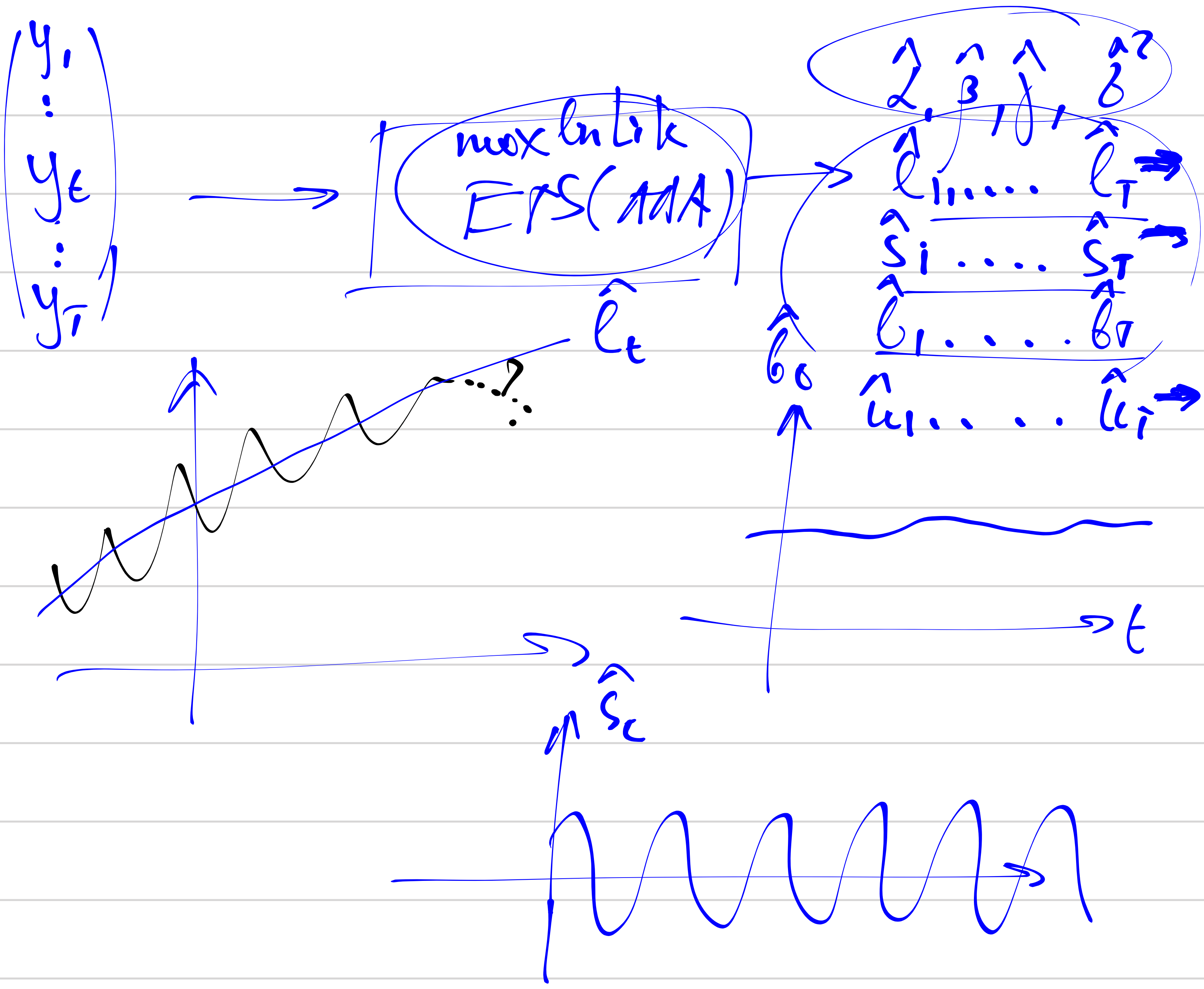
напр. l_t

ETS(AAA): 17 свободных пар-в.

$$\begin{cases} y_t = \boxed{l_{t-1} + b_{t-1}} + \boxed{s_{t-12}} + u_t \\ l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t \; (u_t^l) \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_t \; (u_t^b) \\ s_t = s_{t-12} + \gamma u_t \; (u_t^s) \end{cases}$$

$u_t \sim N(0; \sigma^2)$ незав

пар: $\alpha, \beta, \gamma, \sigma^2$
l_0, b_0
$s_{-11}, s_{-10}, \ldots, s_{-1}, s_0$
с соотнош.
$s_{-11} + \ldots + s_0 = 0$



y_1
y_t
y_T
max lnLik
ETS(AAA)
$\hat\alpha, \hat\beta, \hat\gamma, \hat\sigma^2$
$\hat l_1 \ldots \hat l_T$
$\hat s_1 \ldots \hat s_T$
$\hat b_1 \ldots \hat b_T$
$\hat u_1 \ldots \hat u_T$
$\hat l_t$
$\hat b_t$
t
$\hat s_t$
?

⊕ возможность разрезать ряд на компоненты.

py : sktime

R : fable

Упр. lnL для ETS ?

Упр. при изв-х $\theta = (\alpha, \beta, \gamma, \sigma^2 \ldots)$ построить предикт. интер-л

посчитать ETS

Forecasting principles & practice Rob Hyndman,

fpp3, hyndman

Упр

$\alpha = 0.1$ $\beta = 0{,}3$ $\gamma = 0.5$ $\sigma^2 = 4$ $S_{90} = 4$ $\begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_{100} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{100} \end{pmatrix}$

$T = 100$ $S_{89} = 3$ $l_{100} = 100$ $b_{100} = -3$

постройте предиктивный 95% интервал для y_{102}

подставить все, что знаем

[fpp 3, hyndman]

Упр

$\alpha = 0.1 \quad \beta = 0{,}3 \quad \gamma = 0.5 \quad \boxed{\sigma^2 = 4} \quad s_{90} = 4 \quad \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

$\boxed{T = 100} \quad s_{89} = 3 \quad l_{100} = 100 \quad b_{100} = -3$

постройте предиктивный 95% интервал для y_{102} подставить всё, что знаем

$$y_{102} = l_{101} + b_{101} + s_{102-12} + u_{102} =$$

$$= (l_{100} + b_{100} + 0.1 \cdot u_{101}) + (b_{100} + 0{,}3 \cdot u_{101}) + 4 +$$

$$+ u_{102} = 100 + (-3) + 0{,}4 \cdot u_{101} + (-3) + 4 + u_{102}$$

сез. прибавка

$$= \underbrace{100}_{\text{сглаж. } (y_t) \text{ два шага назад}} + \underbrace{2 \cdot (-3)}_{2x \text{ посл. скорость изменения}} + 4 + \boxed{u_{102} + 0{,}4 \cdot u_{101}}$$

$$(y_{102} \mid \mathcal{F}_{100}) \sim N(98;\ 4 + 0{,}4^2 \cdot 4)$$

$$\sim N(98;\ 4 + 0.64)$$

$$\sim N(98;\ 4.64)$$

95% пред. интервал:

$$(y_{102} \mid \mathcal{F}_{100}) \in [98 - 1{,}96 \cdot \sqrt{4.64};\ 98 + 1{,}96\sqrt{4.64}]$$

Упр.

ETS(AAN) — no seasonality

trend

A - error

$$\begin{cases} —//— \\ \boxed{s_t = 0} \end{cases}$$

$$\ln f = \ln f(y_1, \ldots, y_T) =$$

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|A\cap B)$$

$$f(y_1,\ldots,y_T)=f(y_1)\cdot f(y_2|y_1)\cdot f(y_3|y_2,y_1)\cdot\ldots$$

$$\ln f=\ln f(y_1)+\ln f(y_2|y_1)+\ln f(y_3|y_2,y_1)+\ldots$$

$$\boxed{(y_t|\boxed{y_{t-1},\ldots,y_1})\sim N(\underbrace{l_{t-1}+b_{t-1}}; \sigma^2)}$$

ETS(AAN)

$+\ S_{t-12}$

$$\boxed{y_t=\boxed{l_{t-1}+b_{t-1}}+0+\underbrace{u_t}}$$

$$\begin{array}{ccc} y_1 & & u_1\\ \vdots & \longleftarrow & \vdots\\ y_t & & u_t\end{array}$$

мн-но зав от

$$\begin{tikzcd}
u_1 \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drr] & u_2 \arrow[d] \arrow[dr] & u_3 \arrow[d] & u_4 & \ldots & u_T\\
y_1 & y_2 & y_3 & \ldots & & y_T
\end{tikzcd}$$

Unmasking the theta method

Theta

ETS → ORBIT, PROPHET

$$\ln f(y_2|y_1)=\ln\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y_2-l_1-b_1)^2}{\sigma^2}\right)\right]$$

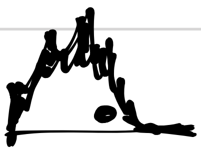
$$=-\frac{1}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2}\frac{(y_2-l_1-b_1)^2}{\sigma^2}$$

$$\ln f(y_1)=-\frac{1}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2}\frac{(y_1-l_0-b_0)^2}{\sigma^2}$$

$\boxed{y_1\ldots y_T}$ есть $\quad\boxed{l_0,\ b_0,\ \alpha,\ \beta,\ \sigma^2}$ пар-ры

$\ln f\to\max_{\theta}$

$$\searrow l_1 \swarrow$$

$$\theta=\begin{pmatrix}l_0\\ b_0\\ \alpha\\ \beta\\ \sigma^2\end{pmatrix}$$