Лекция 2. Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Геометрический и экономический смысл определенного интеграла

Пусть на отрезке $[a,b]$ определена функция $y = f(x)$ (рис. 1). Составим интегральную сумму, для этого выполним действия:

1. С помощью произвольных точек $x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n$, выбранных так, что $a = x_0 < x_1 < x_2 <\ldots< x_{n-1} < x_n = b$, отрезок $[a,b]$ разобьем на n элементарных отрезков длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (i = 1,2,…, n).
2. На каждом элементарном отрезке $[x_{i-1},x_i]$ выберем произвольную точку c_i, $x_{i-1}, \le c_i \le x_i$ и найдем значение $f(c_i)$.
3. Составим сумму $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, которая называется *интегральной суммой* для функции $f(x)$ на отрезке [a,b].

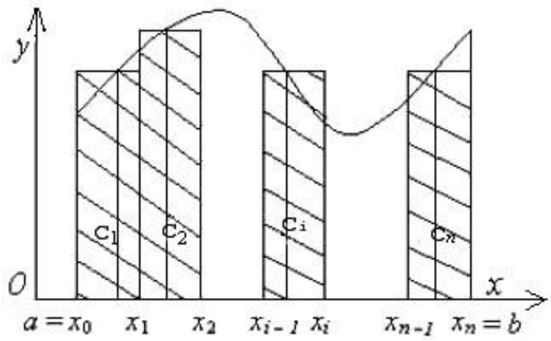

Рис. 1

Определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего элементарного отрезка стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i .$$

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интеграла, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, отрезок $[a,b]$ – отрезком интегрирования.

Теорема о существовании определенного интеграла. Определенный интеграл от функции, непрерывной на отрезке $[a,b]$, существует, т.е. предел интегральной суммы существует и не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек c_i в них.

Функция, для которой существует определенный интеграл на данном отрезке, называется *интегрируемой* на данном отрезке.

Основные свойства определенного интеграла

1. При перестановке пределов интегрирования интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

2. Определенный интеграл от функции с равными верхним и нижним пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x)\ dx = 0.$$

3. Интеграл по отрезку равен сумме интегралов по его частям:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\ ,\ где\ \ a < c < b.$$

4. Определенный интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций:

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + + \int_a^b f_2(x)dx.$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ служит формула Ньютона-Лейбница**.**

Формула Ньютона-Лейбница. Если для непрерывной функции $f(x)$ известна какая-либо первообразная функция $F(x)$ то справедлива формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Данная формула устанавливает взаимосвязь между неопределенным и определенным интегралами.

Для того чтобы вычислить определенный интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, необходимо найти сначала неопределенный интеграл от данной функции, а затем разность его значений в граничных точках отрезка.

Алгоритм нахождения определенного интеграла

1. Найти первообразную функцию *F(x)* для функции *f*(x);
2. Вычислить значение *F(b);*
3. Вычислить значение *F(a);*
4. Вычислить разность *F(b)- F(a).*

Используя формулу Ньютона-Лейбница, вычислить следующие интегралы:

$$1)\ \int_1^2 \frac{dx}{x^2};\quad 2)\ \int_0^{\pi/6} \cos x dx;\quad 3)\ \int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}};\quad 4)\ \int_{-1}^2 \left(x^2+2x+1\right)dx.$$

По формуле Ньютона-Лейбница получаем:

$$1)\int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \int_1^2 x^{-2}dx = \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_1^2 = -\left.\frac{1}{x}\right|_1^2 = -\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{2};$$

$$2)\int_0^{\pi/6} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\pi/6} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin 0 = \frac{1}{2};$$

$$3)\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_4^9 x^{-\frac{1}{2}}dx = \left.\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_4^9 = 2(\sqrt{9}-\sqrt{4}) = 2\ .$$

$$\int_{-1}^2 \left(x^2+2x+1\right) = \left.\left(\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)\right|_{-1}^2 = \left(\frac{2^3}{3}+2^2+2\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3}+(-1)^2+(-1)\right) = 9.$$

Интегрирование подстановкой

При вычислении определенных интегралов часто используется метод подстановки (замены переменной). Пусть для интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции сделана подстановка $x=\varphi(t)$. Если функция $\varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha;\beta]$, причем $a=\varphi(\alpha)$ и $b=\varphi(\beta)$, то справедлива формула: $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$

Отметим, что при вычислении определенного интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не требуется. Новые пределы интегрирования находятся из соотношений $a=\varphi(\alpha)$ и $b=\varphi(\beta)$.

Вычислить интеграл $\int_{-1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{7-2x}}$; при помощи подстановки.

Применим подстановку $t=7-2x$, тогда $dt=-2dx,\ dx=\frac{dt}{-2}$. Находим новые границы интегрирования: $t_н=7-2\cdot(-1)=9,\ t_в=7-2\cdot 3=1.$

$$\int_{-1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{7-2x}}=\left|\begin{array}{ll} 7-2x=t & \\ -2dx=dt & dx=-\dfrac{dt}{2} \\ x_н=-1, & t_н=7-2(-1)=9 \\ x_в=3, & t_в=7-2\cdot 3=1 \end{array}\right|=-\frac{1}{2}\int_9^1\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\sqrt{t}\Big|_9^1=2.$$

Интегрирование по частям определенных интегралов

Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a;b]$, то имеет место формула $\int_a^b udv=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b vdu$.

Вычислить интеграл $\int_1^e x\ln xdx.$

Применим формулу интегрирования по частям. Положим $u=\ln x$, $dv=xdx$. Тогда $du=(\ln x)'\,dx=\frac{dx}{x}$, $v=\int xdx=\frac{x^2}{2}$. По формуле имеем:

$$\int_1^e x\ln x dx = \begin{vmatrix} u=\ln x & du=\frac{dx}{x} \\ dv = xdx & v=\frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e \frac{x^2dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e xdx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e =$$

$$= \frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

Геометрический смысл определенного интеграла.

Фигура, ограниченная непрерывной, неотрицательной функцией *y = f(x),* осью *ox,* прямыми *y=a и y=b* называется криволинейной трапеции (рис. 1)**.**

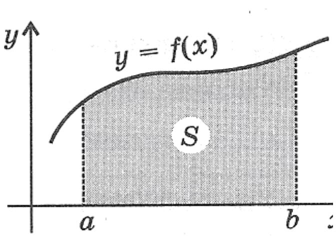

Рис. 1

Вычислим площадь криволинейной трапеции (рис. 2). Для этого отрезок [a;b] точками a = x_0, x_1, x_2, x_3,…, $b = x_n$, ($x_0 < x_1 < x_2 <\ldots< x_{n-1} < x_n$) разобьем отрезок [$a,b$] на n частичных отрезков [$x_1;x_2$],…,[$x_{i-1};x_i$],… ,[$x_{n-1};x_n$] . В каждом частичном отрезке [x_{i-1},x_i] (i = 1,2,…,n) возьмем произвольную точку c_i, и вычислим значение функции в ней $f(c_i)$.

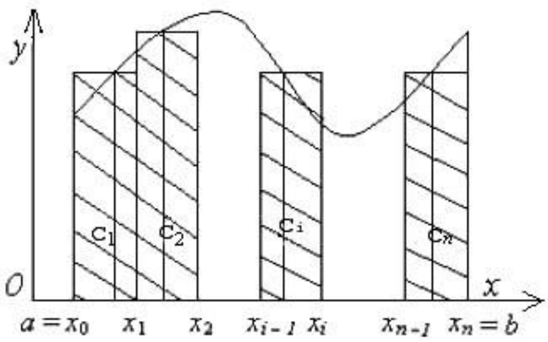

Рис. 2

Умножим значение функции $f(c_i)$ на длину соответствующего отрезка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Произведение $f(c_i)\cdot\Delta x_i$ равно площади прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(c_i)$. Сумма всех таких произведений

$$f(c_1)\cdot\Delta x_1 + f(c_2)\cdot\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\cdot\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = S_n$$

равна площади ступенчатой фигуры и приближенна, равна площади S криволинейной трапеции: $S \approx S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$

С уменьшение всех величин Δx_i точность приближения криволинейной трапеции ступенчатой фигурой и точность полученной формулы увеличиваются. Поэтому за точное значение S криволинейной трапеции принимается предел S, к которому стремится площадь ступенчатой фигуры S_n , когда n неограниченно возрастает так, что $\lambda = \max\Delta x_i \to 0$:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i, \quad \text{, то есть } S = \int_a^b f(x)dx.$$

Итак, *определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции*.

В этом состоит геометрический смысл определенного интеграла.