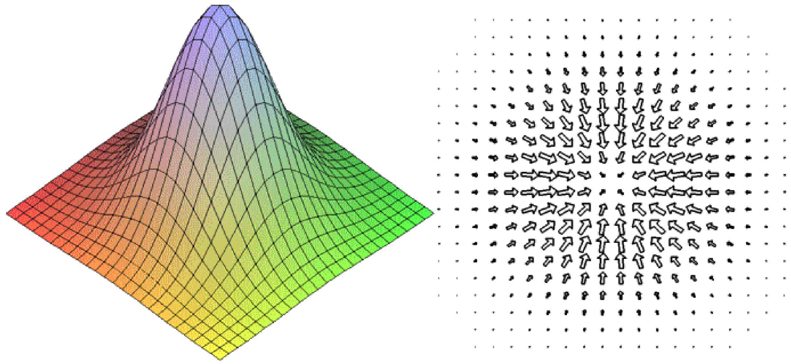
Википедия

Градиент

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

Градие́нт (от лат. *gradiens* — «шагающий, растущий») — вектор, своим направлением указывающий направление наискорейшего роста некоторой скалярной величины φ (значение которой меняется от одной точки пространства к другой, образуя скалярное поле).



Оператор градиента преобразует холм (слева), если смотреть на него сверху, в поле векторов (справа). Видно, что векторы направлены «в горку» и чем они длиннее, тем круче наклон

Градиент поля φ обозначается: $\operatorname{grad}\varphi$. По величине (модулю) градиент равен скорости роста величины φ в направлении вектора[1][2]. Например, если взять в качестве φ высоту поверхности земли над уровнем моря, то её градиент в каждой точке поверхности будет показывать «направление самого крутого подъёма», а своей величиной характеризовать крутизну склона.

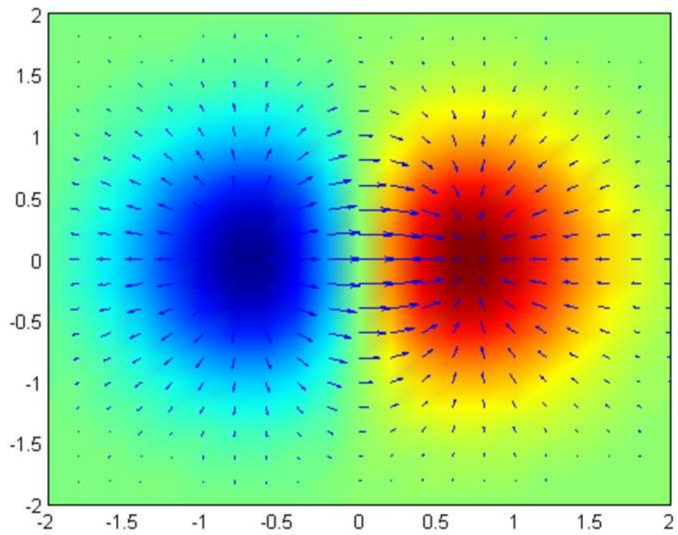
Пространство, на котором определена функция и её градиент, может быть, вообще говоря, как обычным трёхмерным пространством, так и пространством любой другой размерности.

Термин впервые появился в метеорологии для исследования изменений температуры и давления атмосферы, а в математику был введён Максвеллом в 1873 году; обозначение grad тоже предложил Максвелл. Наряду со стандартным обозначением $(\operatorname{grad}\varphi)$ часто используется компактная запись с использованием оператора набла: $\nabla\varphi$.

Содержание

Иллюстрация применения

Пусть температура в комнате задана с помощью скалярного поля T таким образом, что в каждой точке, заданной координатами (x, y, z) температура равняется $T(x, y, z)$ (предположим, что температура не изменяется с течением времени). В каждой точке комнаты градиент функции T будет показывать направление, в котором температура возрастает быстрее всего. Величина градиента определяет, насколько быстро температура возрастает в данном направлении.



Градиент 2D функции отображен на графике в виде синих стрелок

Определение и вычисление

Для случая трёхмерного пространства градиентом дифференцируемой в некоторой области скалярной функции $\varphi = \varphi(x, y, z)$ координат x, y, z называется векторная функция с компонентами

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$ [3]

Или, использовав для единичных векторов по осям прямоугольных декартовых координат $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$:

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z.$$

Если φ — функция n переменных $x_1, \ \ldots, \ x_n$, то её градиентом называется n-мерный вектор

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right),$$

компоненты которого равны частным производным φ по всем её аргументам.

- Размерность вектора градиента определяется, таким образом, размерностью пространства (или многообразия), на котором задано скалярное поле, о градиенте которого идёт речь.
- Оператором градиента называется оператор, действие которого на скалярную функцию (поле) даёт её градиент. Этот оператор иногда коротко называют просто «градиентом».

Смысл градиента любой скалярной функции f в том, что его скалярное произведение с бесконечно малым вектором перемещения $d\mathbf{x}$ даёт полный дифференциал этой функции при соответствующем изменении координат в пространстве, на котором определена f, то есть линейную (в случае общего положения она же главная) часть изменения f при смещении на $d\mathbf{x}$. Применяя одну и ту же букву для обозначения функции от вектора и соответствующей функции от его координат, можно написать:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\,dx_3 + \ldots = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i = (\operatorname{grad}\mathbf{f} \cdot d\mathbf{x}).$$

Стоит здесь заметить, что поскольку формула полного дифференциала не зависит от вида координат x_i, то есть от природы параметров x вообще, то полученный дифференциал является инвариантом, то есть скаляром, при любых преобразованиях координат, а поскольку $d\mathbf{x}$ — это вектор, то градиент, вычисленный обычным образом, оказывается ковариантным вектором, то есть вектором, представленным в дуальном базисе, какой только и может дать скаляр при простом суммировании произведений координат обычного (контравариантного), то есть вектором, записанным в обычном базисе. Таким образом, выражение (вообще говоря — для произвольных криволинейных координат) может быть вполне правильно и инвариантно записано как:

$$df = \sum_i (\partial_i f)\,dx^i$$

или, опуская по правилу Эйнштейна знак суммы,

$$df = (\partial_i f)\,dx^i$$

(в ортонормированном базисе мы можем писать все индексы нижними, как мы и делали выше). Однако градиент оказывается настоящим ковариантным вектором в любых криволинейных координатах.

Используя интегральную теорему

$$\iiint\limits_V \nabla\varphi\,dV = \iint\limits_S \varphi\,d\mathbf{s},$$

градиент можно выразить в интегральной форме:

$$\nabla\varphi = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \left(\iint\limits_S \varphi \, d\mathbf{s} \right),$$

здесь S — замкнутая поверхность охватывающая объём V, $d\mathbf{s}$ — нормальный элемент этой поверхности.

Пример

Например, градиент функции $\varphi(x,\ y,\ z) = 2x + 3y^2 - \sin z$ будет представлять собой:

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y},\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) = (2,\ 6y,\ -\cos z).$$

Некоторые применения

Геометрический смысл

Рассмотрим семейство линий уровня функции φ:

$$\gamma(h) = \{(x_1,\ \ldots,\ x_n) \mid \varphi(x_1,\ \ldots,\ x_n) = h\}.$$

Нетрудно показать, что градиент функции φ в точке $\vec{x}^{\,0}$ перпендикулярен её линии уровня, проходящей через эту точку. Модуль градиента показывает максимальную скорость изменения функции в окрестности $\vec{x}^{\,0}$, то есть частоту линий уровня. Например, линии уровня высоты изображаются на топографических картах, при этом модуль градиента показывает крутизну спуска или подъёма в данной точке.

В физике

В различных отраслях физики используется понятие градиента различных физических полей.

Например, напряжённость электростатического поля есть минус градиент электростатического потенциала, напряжённость гравитационного поля (ускорение свободного падения) в классической теории гравитации есть минус градиент гравитационного потенциала. Консервативная сила в классической механике есть минус градиент потенциальной энергии.

В других естественных науках

Понятие градиента находит применение не только в физике, но и в смежных и даже сравнительно далёких от физики науках (иногда это применение носит количественный, а иногда и просто качественный характер).

Например, *градиент концентрации* — нарастание или уменьшение по какому-либо направлению концентрации растворённого вещества, *градиент температуры* — увеличение или уменьшение по какому-то направлению температуры среды и т. д.

Градиент таких величин может быть вызван различными причинами, например, механическим препятствием, действием электромагнитных, гравитационных или других полей или различием в растворяющей способности граничащих фаз.

В экономике

В экономической теории понятие градиента используется для обоснования некоторых выводов и для оптимизации. В частности, используемые для нахождения оптимума потребителя метод множителей Лагранжа и условия Куна — Таккера (позаимствованные из естественных наук) основаны на сопоставлении градиентов функции полезности и функции бюджетного ограничения.

Связь с производной по направлению

Используя правило дифференцирования сложной функции, нетрудно показать, что производная функции φ по направлению $\vec{e} = (e_1,\ \ldots,\ e_n)$ равняется скалярному произведению градиента φ на **единичный** вектор $\vec{e}$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{e}} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}e_1 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}e_n = (\nabla\varphi,\ \vec{e}).$$

Таким образом, для вычисления производной скалярной функции векторного аргумента по любому направлению достаточно знать градиент функции, то есть вектор, компоненты которого являются её частными производными.

Градиент в ортогональных криволинейных координатах

$$\operatorname{grad} U(q_1,\ q_2,\ q_3) = \frac{1}{H_1}\frac{\partial U}{\partial q_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial U}{\partial q_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}\vec{e}_3,$$

где H_i — коэффициенты Ламе.

Полярные координаты (на плоскости)

Коэффициенты Ламе:

$$\begin{array}{l} H_1 = 1 \\ H_2 = r \end{array}.$$

Отсюда:

$$\operatorname{grad} U(r,\ \theta) = \frac{\partial U}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta}.$$

Цилиндрические координаты

Коэффициенты Ламе:

$$\begin{array}{l} H_1 = 1 \\ H_2 = r \\ H_3 = 1 \end{array}.$$

Отсюда:

$$\operatorname{grad} U(r,\ \theta,\ z) = \frac{\partial U}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial U}{\partial z}\overrightarrow{e_z}.$$

Сферические координаты

Коэффициенты Ламе:

$$\begin{array}{l} H_1 = 1 \\ H_2 = r \\ H_3 = r\sin\theta \end{array}.$$

Отсюда:

$$\operatorname{grad} U(r,\ \theta,\ \varphi) = \frac{\partial U}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\overrightarrow{e_\varphi}.$$

Вариации и обобщения

Пусть $u\colon X \to Y$ — отображение между метрическими пространствами. Борелева функция $\rho\colon X \to \mathbb{R}$ называется **верхним градиентом** u если следующее неравенство

$$|u(p) - u(q)|_Y \leq \int\limits_\gamma \rho$$

выполняется для произвольной спрямляемой кривой γ, соединяющей p и q в X.[4]

См. также

- 4-градиент
- Векторный анализ
- Градиент концентрации
- Градиентные методы
- Оператор Кэнни
- Теорема Остроградского — Гаусса
- Формулы векторного анализа

Примечания

1. Градиент // Советский энциклопедический словарь. — 2-е изд.. — М.: Советская энциклопедия, 1982. — С. 332. — 1600 с.
2. Математическая энциклопедия, 1977.
3. *Коваленко Л. И.* Методические указания по математическому анализу для студентов второго курса. Элементы векторного анализа. (https://mipt.ru/education/chair/mathematics/upload/795/kovalenk-arph0dud37q.pdf). — МФТИ, 2001. — С. 5. — 35 с. Архивная копия (https://web.archive.org/web/20201107191951/https://mipt.ru/education/chair/mathematics/upload/795/kovalenk-arph0dud37q.pdf) от 7 ноября 2020 на Wayback Machine
4. 6.2 в Heinonen, Juha, et al. Sobolev spaces on metric measure spaces. Vol. 27. Cambridge University Press, 2015.

Литература

- *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. Методы и приложения: уч. пособие для физико-математических специальностей университетов. — М.: Наука, 1986. — 759 с.
- *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. — 9-е изд. — М. : Наука, 1965.
- *Купцов Л. П.* Градиент // Математическая энциклопедия (в 5 томах). — М.: Советская Энциклопедия, 1977. — Т. 1. — Стб. 1080. — 1152 с.

- *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. — 3-е изд. — М. : Наука, 1967.

Ссылки

- Что такое градиент (https://www.youtube.com/watch?v=rCDTFotk7ro) на YouTube
- *Weisstein, Eric W.* Gradient (https://mathworld.wolfram.com/Gradient.html) (англ.) на сайте Wolfram MathWorld.

Источник — https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Градиент&oldid=129294663