Лабораторная 4

Филиппенко Дмитрий Александрович, 341 группа

Вариант 24

Задание 1: Построение линий уровня

Дана функция:

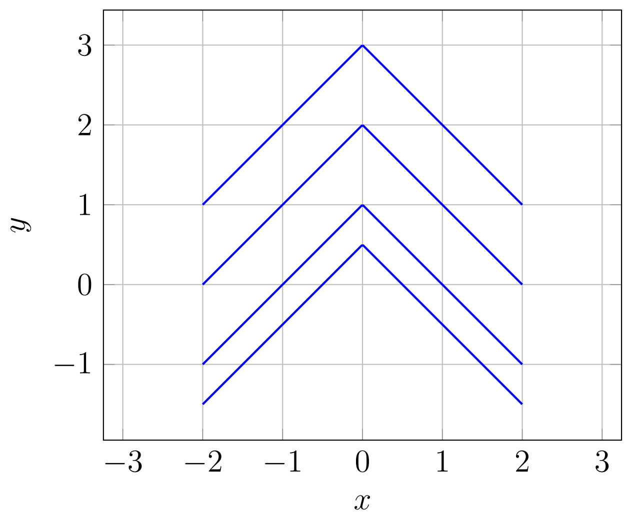
$$z = |x| + |y|, \quad z > 0.$$

Линии уровня представляют собой ромбы, заданные уравнением:

$$|x| + |y| = C, \quad C > 0.$$

График линий уровня для нескольких значений C:

Линии уровня $z = |x| + |y|$



Задание 2: Градиент и матрица Гессе

Дана функция:

$$z = \ln(2x^2 - y), \quad (2x^2 - y > 0).$$

Градиент:

$$\nabla z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\frac{4x}{2x^2 - y}, -\frac{1}{2x^2 - y}\right).$$

Матрица Гессе:

$$H(z) = \begin{bmatrix} \frac{-8x^2-4y}{(2x^2-y)^2} & \frac{4x}{(2x^2-y)^2} \\ \frac{4x}{(2x^2-y)^2} & -\frac{1}{(2x^2-y)^2} \end{bmatrix}.$$

Результаты в точках:

1. В точке $A(1,2)$: функция не определена, так как $2x^2 - y = 0$. 2. В точке $B(2,1)$:

$$\nabla z = \left(\frac{8}{7}, -\frac{1}{7}\right), \quad H(z) = \begin{bmatrix} -\frac{68}{49} & \frac{8}{49} \\ \frac{8}{49} & -\frac{1}{49} \end{bmatrix}.$$

3. В точке $C(1,1)$:

$$\nabla z = (4, -1), \quad H(z) = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Задание 3: Выпуклость функции

Дана функция:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^4, \quad x \in E_2.$$

Матрица Гессе:

$$H(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения матрицы:

$$\lambda_1 = 2 > 0, \quad \lambda_2 = 12x_2^2 \geq 0.$$

Следовательно, $f(x)$ — выпуклая функция.

Задание 4: Нахождение экстремумов

Дана функция:

$$f(x) = x_1^2 x_2^2 (1 - x_1 - x_2), \quad x \in E_2.$$

Критические точки:

$$\nabla f = 0 \quad \Rightarrow \quad (x_1, x_2) \in \{(0,0), (0,1), (1,0), (\frac{2}{5}, \frac{2}{5})\}.$$

Анализ типа экстремумов:

- В точке $(0,0)$: $f(0,0) = 0$ (глобальный минимум, так как $f(x) \geq 0$). - В точке $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$: локальный максимум $f(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}) = \frac{16}{625}$. - На границах области: анализируем поведение $f(x_1, x_2) \to 0$.

График функции: