Задание 3. Лабораторная 1

Убедимся в выпуклости функции $f(x)$ на отрезке $\left[-\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Дана функция:

$$f(x) = x^2 + \frac{x}{4}\cos x - 2$$

1. Найдём первую производную $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^2 + \frac{x}{4}\cos x - 2\right)$$

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{4}\cos x - \frac{x}{4}\sin x$$

2. Найдём вторую производную $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(2x + \frac{1}{4}\cos x - \frac{x}{4}\sin x\right)$$

$$f''(x) = 2 - \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin x - \frac{x}{4}\cos x$$

$$f''(x) = 2 - \frac{1}{2}\sin x - \frac{x}{4}\cos x$$

3. Проверим знак второй производной на границах отрезка $\left[-\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Для $x = -\pi$:

$$f''(-\pi) = 2 - \frac{1}{2}\sin(-\pi) - \frac{-\pi}{4}\cos(-\pi)$$

Так как $\sin(-\pi) = 0$ и $\cos(-\pi) = -1$, получаем:

$$f''(-\pi) = 2 + \frac{\pi}{4}$$

Для $x = \frac{3\pi}{2}$:

$$f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{\frac{3\pi}{2}}{4}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

Так как $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$ и $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$, то:

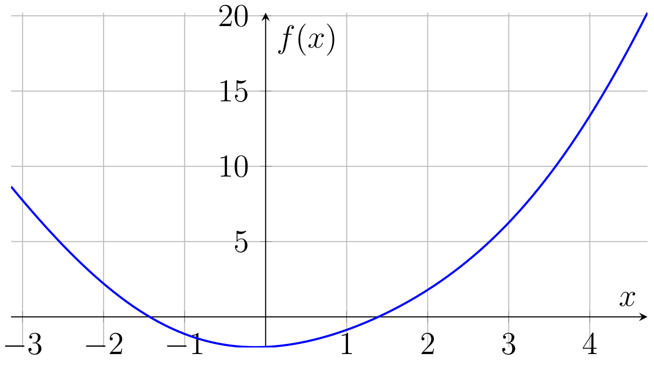
$$f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 + \frac{1}{2} = 2.5$$

Таким образом, на границах отрезка вторая производная положительна.

4. Чтобы убедиться в выпуклости функции на всём отрезке $\left[-\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, необходимо построить график второй производной $f''(x)$ или проанализировать её поведение аналитически. Если $f''(x) \geq 0$ на всём отрезке, то функция $f(x)$ выпуклая.

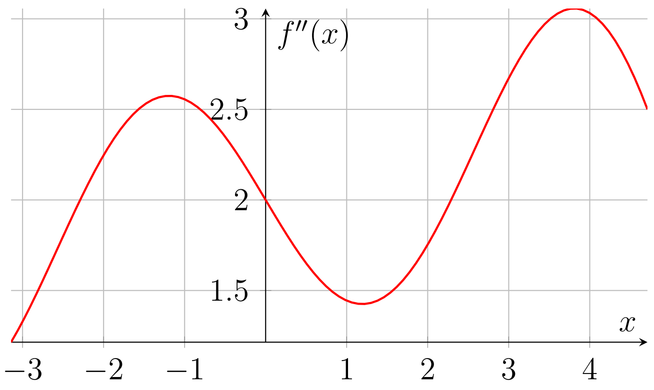
3. Построим график функции $f(x)$ на отрезке $\left[-\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

График функции $f(x)$



4. Построим график второй производной $f''(x)$ для проверки выпуклости.

График второй производной $f''(x)$



На графике видно, что вторая производная $f''(x)$ неотрицательна на всём интервале, что подтверждает выпуклость функции $f(x)$.