Задача 4 Лабортаторная 1: Найти наименьшую константу Липшица функции $f(x)$ на заданных отрезках

Дана функция:

$$f(x) = \frac{x^4}{20}(3x - 40) + x(6x^2 + 1)$$

Найдём её константы Липшица на двух отрезках:

$$a) \quad [0, 2], \quad b) \quad [2, 6]$$

1. Найдём первую производную $f'(x)$

Используем правило дифференцирования суммы и произведения.

1.1. Первая часть $\frac{x^4}{20}(3x - 40)$: Рассмотрим отдельно произведение $\frac{x^4}{20} \cdot (3x - 40)$. Используем правило произведения:

$$f_1(x) = \frac{x^4}{20}, \quad g_1(x) = 3x - 40$$

Производная будет:

$$f_1'(x) = \frac{4x^3}{20} = \frac{x^3}{5}, \quad g_1'(x) = 3$$

Применяя правило произведения:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{20}(3x - 40)\right) = \frac{x^3}{5}(3x - 40) + \frac{3x^4}{20}$$

1.2. Вторая часть $x(6x^2 + 1)$: Теперь дифференцируем $x(6x^2 + 1)$:

$$f_2(x) = x, \quad g_2(x) = 6x^2 + 1$$

Производная будет:

$$f_2'(x)g_2(x) + f_2(x)g_2'(x) = (6x^2 + 1) + x \cdot 12x = 6x^2 + 1 + 12x^2 = 18x^2 + 1$$

1.3. Полная производная $f'(x)$: Теперь соберём полную производную $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{x^3}{5}(3x - 40) + \frac{3x^4}{20} + 18x^2 + 1$$

Упрощаем выражение:

$$f'(x) = \frac{3x^4}{20} - \frac{8x^3}{5} + 18x^2 + 1$$

2. Поиск константы Липшица на отрезках

Константа Липшица L на отрезке — это максимальное значение абсолютной величины первой производной на отрезке:

$$L = \sup_{x_1, x_2 \in [a,b]} \frac{|f'(x_1) - f'(x_2)|}{|x_1 - x_2|}$$

Найдем максимумы $f'(x)$ на каждом отрезке.

2.1. Оценка на отрезке $[0, 2]$: Подставим значения из отрезка в производную и найдём экстремумы: - Для $x = 0$:

$$f'(0) = \frac{3(0)^4}{20} - \frac{8(0)^3}{5} + 18(0)^2 + 1 = 1$$

- Для $x = 2$:

$$f'(2) = \frac{3(2)^4}{20} - \frac{8(2)^3}{5} + 18(2)^2 + 1 = \frac{48}{20} - \frac{64}{5} + 72 + 1 = 2.4 - 12.8 + 72 + 1 = 62.6$$

Теперь найдём критические точки, исследуя производную:

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3x^4}{20} - \frac{8x^3}{5} + 18x^2 + 1 = 0$$

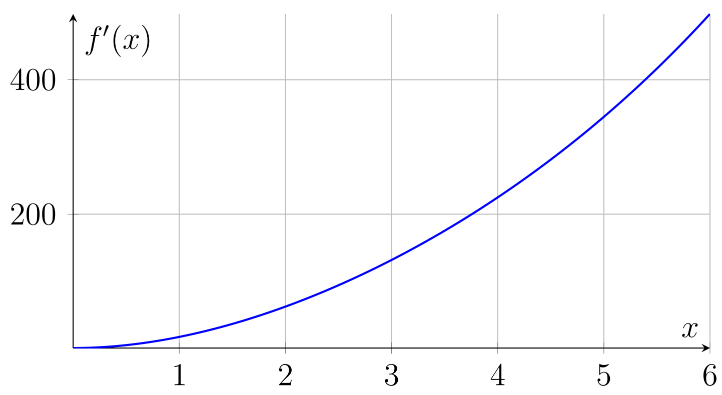
Для решения этого уравнения можно использовать численные методы.

2.2. Оценка на отрезке $[2, 6]$: Аналогично, подставим значения из отрезка $[2, 6]$ в производную и найдём экстремумы: - Для $x = 6$:

$$f'(6) = \frac{3(6)^4}{20} - \frac{8(6)^3}{5} + 18(6)^2 + 1 = 388.8$$

2.3. Построим график первой производной для наглядности

График первой производной $f'(x)$



3. Результаты

Константа Липшица на отрезке $[0, 2]$ равна $L_1 = 62.6$, а на отрезке $[2, 6]$ — $L_2 = 388.8$. Минимальная константа Липшица — это $L_1 = 62.6$.