Лабораторная 4

Филиппенко Дмитрий Александрович, 341 группа

Вариант 24

Необходимая теория

Для выполнения заданий, связанных с анализом функций многих переменных, необходимо знание следующих теоретических основ:

1. Линии уровня функции

Линии уровня функции $f(x, y)$ — это множество точек (x, y), для которых функция принимает фиксированное значение C, то есть:

$$f(x, y) = C.$$

Это уравнение описывает "горизонтальные"срезы графика функции. Например, для функции $z = f(x, y)$, линия уровня для значения $z = C$ будет множеством точек на плоскости x, y, где функция $f(x, y)$ равна C.

- Линии уровня показывают, как функция ведет себя на плоскости x, y для различных значений C.
- Для функций, зависимых от двух переменных, линии уровня могут быть кривыми на плоскости xy, и форма этих кривых зависит от свойств самой функции.
- Линии уровня полезны для визуализации поведения функции.

2. Градиент функции

Градиент функции $f(x, y)$ — это вектор, который указывает направление наибольшего возрастания функции в каждой точке:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Градиент включает в себя частные производные функции по каждой переменной. Он направлен в сторону наибольшего увеличения функции.

- Если $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$, то точка (x_0, y_0) может быть критической точкой.
- Градиент перпендикулярен линиям уровня функции. Это означает, что вектор градиента направлен под углом $90°$ к линиям уровня в точке.

3. Матрица Гессе

Матрица Гессе функции $f(x, y)$ — это матрица, состоящая из вторых частных производных функции:

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}.$$

Матрица Гессе позволяет анализировать кривизну функции и помогает определить, является ли критическая точка точкой минимума, максимума или седловой точкой.

- Если матрица Гессе положительно определена (все её собственные значения положительны), то функция имеет локальный минимум в данной точке.
- Если матрица Гессе отрицательно определена (все её собственные значения отрицательны), то функция имеет локальный максимум в данной точке.
- Если матрица Гессе неопределённая (собственные значения имеют разные знаки), то точка является седловой.
- Матрица Гессе симметрична, что облегчает её анализ.

4. Критические точки и экстремумы

Критическая точка функции — это точка, в которой градиент функции равен нулю:

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0).$$

Чтобы найти критические точки, нужно решить систему уравнений для частных производных функции, приравняв их к нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

После нахождения критических точек необходимо определить, является ли эта точка минимумом, максимумом или седловой точкой. Это можно сделать, используя матрицу Гессе и анализируя её собственные значения.

- Если все собственные значения матрицы Гессе положительны, то критическая точка является локальным минимумом.
- Если все собственные значения отрицательны, то критическая точка является локальным максимумом.
- Если собственные значения матрицы Гессе имеют разные знаки, то критическая точка является седловой.

5. Выпуклость функций

Функция $f(x)$ называется **выпуклой**, если для любых двух точек x_1, x_2 области определения функции выполнено неравенство:

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2), \quad \alpha \in [0, 1].$$

Это означает, что график функции всегда лежит ниже прямой, соединяющей любые две её точки.

- Если функция выпуклая, то её локальный минимум является глобальным минимумом.
- Если функция строго выпуклая, то локальный минимум единственен.
- Выпуклость функции можно проверить с помощью матрицы Гессе: если её собственные значения неотрицательны, то функция выпуклая.
- Если все собственные значения матрицы Гессе положительны, то функция строго выпуклая.

6. Алгоритм нахождения экстремумов

1. Найдите **критические точки**, решив систему уравнений $\nabla f = 0$. 2. Постройте **матрицу Гессе** для каждой критической точки. 3. Проанализируйте матрицу Гессе:

- Если все собственные значения матрицы Гессе положительны, то точка является локальным минимумом.
- Если все собственные значения матрицы Гессе отрицательны, то точка является локальным максимумом.
- Если собственные значения матрицы Гессе имеют разные знаки, то точка является седловой.

Необходимая теория

Для выполнения заданий, связанных с анализом функций многих переменных, необходимо знание следующих теоретических основ:

1. Линии уровня функции

Линии уровня функции $f(x, y)$ — это множество точек (x, y), для которых функция принимает фиксированное значение C, то есть:

$$f(x, y) = C.$$

Это уравнение описывает "горизонтальные"срезы графика функции. Например, для функции $z = f(x, y)$, линия уровня для значения $z = C$ будет множеством точек на плоскости x, y, где функция $f(x, y)$ равна C.

- Линии уровня показывают, как функция ведет себя на плоскости x, y для различных значений C.
- Для функций, зависимых от двух переменных, линии уровня могут быть кривыми на плоскости xy, и форма этих кривых зависит от свойств самой функции.
- Линии уровня полезны для визуализации поведения функции.

2. Градиент функции

Градиент функции $f(x, y)$ — это вектор, который указывает направление наибольшего возрастания функции в каждой точке:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Градиент включает в себя частные производные функции по каждой переменной. Он направлен в сторону наибольшего увеличения функции.

- Если $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$, то точка (x_0, y_0) может быть критической точкой.
- Градиент перпендикулярен линиям уровня функции. Это означает, что вектор градиента направлен под углом 90° к линиям уровня в точке.

3. Матрица Гессе

Матрица Гессе функции $f(x, y)$ — это матрица, состоящая из вторых частных производных функции:

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}.$$

Матрица Гессе позволяет анализировать кривизну функции и помогает определить, является ли критическая точка точкой минимума, максимума или седловой точкой.

- Если матрица Гессе положительно определена (все её собственные значения положительны), то функция имеет локальный минимум в данной точке.
- Если матрица Гессе отрицательно определена (все её собственные значения отрицательны), то функция имеет локальный максимум в данной точке.
- Если матрица Гессе неопределённая (собственные значения имеют разные знаки), то точка является седловой.
- Матрица Гессе симметрична, что облегчает её анализ.

4. Критические точки и экстремумы

Критическая точка функции — это точка, в которой градиент функции равен нулю:

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0).$$

Чтобы найти критические точки, нужно решить систему уравнений для частных производных функции, приравняв их к нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

После нахождения критических точек необходимо определить, является ли эта точка минимумом, максимумом или седловой точкой. Это можно сделать, используя матрицу Гессе и анализируя её собственные значения.

- Если все собственные значения матрицы Гессе положительны, то критическая точка является локальным минимумом.

- Если все собственные значения отрицательны, то критическая точка является локальным максимумом.

- Если собственные значения матрицы Гессе имеют разные знаки, то критическая точка является седловой.

5. Выпуклость функций

Функция $f(x)$ называется **выпуклой**, если для любых двух точек x_1, x_2 области определения функции выполнено неравенство:

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2), \quad \alpha \in [0,1].$$

Это означает, что график функции всегда лежит ниже прямой, соединяющей любые две её точки.

- Если функция выпуклая, то её локальный минимум является глобальным минимумом.

- Если функция строго выпуклая, то локальный минимум единственен.

- Выпуклость функции можно проверить с помощью матрицы Гессе: если её собственные значения неотрицательны, то функция выпуклая.

- Если все собственные значения матрицы Гессе положительны, то функция строго выпуклая.

6. Алгоритм нахождения экстремумов

1. Найдите **критические точки**, решив систему уравнений $\nabla f = 0$. 2. Постройте **матрицу Гессе** для каждой критической точки. 3. Проанализируйте матрицу Гессе:

- Если все собственные значения матрицы Гессе положительны, то точка является локальным минимумом.

- Если все собственные значения матрицы Гессе отрицательны, то точка является локальным максимумом.

- Если собственные значения матрицы Гессе имеют разные знаки, то точка является седловой.

4. Если требуется определить глобальный экстремум, сравните значения функции в локальных экстремумах с учётом ограничений на области определения функции.

7. Линейная и нелинейная оптимизация

Линейная оптимизация — это задача, в которой целевая функция и ограничения являются линейными. Для решения таких задач используются методы, такие как симплекс-метод и методы градиентного спуска.

Нелинейная оптимизация — это задачи с нелинейными целевыми функциями и ограничениями. Эти задачи требуют более сложных методов, таких как методы численного поиска экстремума (градиентный спуск, метод Ньютона).

4. Если требуется определить глобальный экстремум, сравните значения функции в локальных экстремумах с учётом ограничений на области определения функции.

7. Линейная и нелинейная оптимизация

Линейная оптимизация — это задача, в которой целевая функция и ограничения являются линейными. Для решения таких задач используются методы, такие как симплекс-метод и методы градиентного спуска.

Нелинейная оптимизация — это задачи с нелинейными целевыми функциями и ограничениями. Эти задачи требуют более сложных методов, таких как методы численного поиска экстремума (градиентный спуск, метод Ньютона).