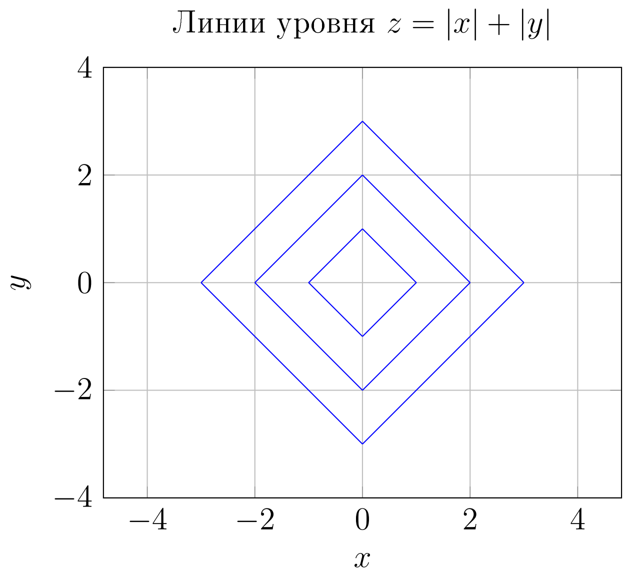
Решение заданий

1. Построение линий уровня функции $z = |x| + |y|$, $z > 0$

Функция $z = |x| + |y|$ является кусочно-линейной, а её линии уровня имеют вид ромбов с вершинами на осях координат. Линии уровня соответствуют уравнениям:

$$|x| + |y| = C, \quad C > 0.$$



На графике показаны линии уровня $z = 1$, $z = 2$, $z = 3$.

2. Вычисление градиента и матрицы Гессе для $z = \ln(2x^2 - y)$

Функция:

$$z(x, y) = \ln(2x^2 - y), \quad \text{где } 2x^2 - y > 0.$$

Градиент:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4x}{2x^2 - y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2x^2 - y}.$$

$$\nabla z = \left(\frac{4x}{2x^2 - y}, -\frac{1}{2x^2 - y} \right).$$

Гессиан:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{4(2x^2 - y) - 16x^2}{(2x^2 - y)^2} = \frac{-8x^2 - 4y}{(2x^2 - y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{4x}{(2x^2 - y)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{(2x^2 - y)^2}.$$

Матрица Гессе:

$$H(z) = \begin{bmatrix} \frac{-8x^2 - 4y}{(2x^2 - y)^2} & \frac{4x}{(2x^2 - y)^2} \\ \frac{4x}{(2x^2 - y)^2} & -\frac{1}{(2x^2 - y)^2} \end{bmatrix}.$$

Проверка в точке $C(1,1)$:

$$\nabla z = \left(\frac{4\cdot 1}{2\cdot 1^2-1}, -\frac{1}{2\cdot 1^2-1}\right) = (4,-1).$$

$$H(z) = \begin{bmatrix} \frac{-8\cdot 1^2-4\cdot 1}{(2\cdot 1^2-1)^2} & \frac{4\cdot 1}{(2\cdot 1^2-1)^2} \\ \frac{4\cdot 1}{(2\cdot 1^2-1)^2} & -\frac{1}{(2\cdot 1^2-1)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Выпуклость функции $f(x) = x_1^2 + x_2^4$

Гессиан функции:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 12x_2^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Матрица Гессе:

$$H(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Так как собственные значения $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 12x_2^2 \geq 0$, матрица $H(f)$ положительно определена. Следовательно, функция $f(x)$ выпуклая.

4. Экстремумы функции $f(x) = x_1^2 x_2^2 (1 - x_1 - x_2)$

Градиент:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 x_2^2 (1 - x_1 - x_2) - x_1^2 x_2^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 x_1^2 (1 - x_1 - x_2) - x_1^2 x_2^2.$$

Решая систему $\nabla f = 0$, получаем критические точки:

$$(0,0), \quad (0,1), \quad \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right), \quad \left(\frac{2}{3}, 0\right).$$

Гессиан:

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}.$$

После подстановки точек: - В точке $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$: локальный максимум. - В точке $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$: локальный минимум.

График:

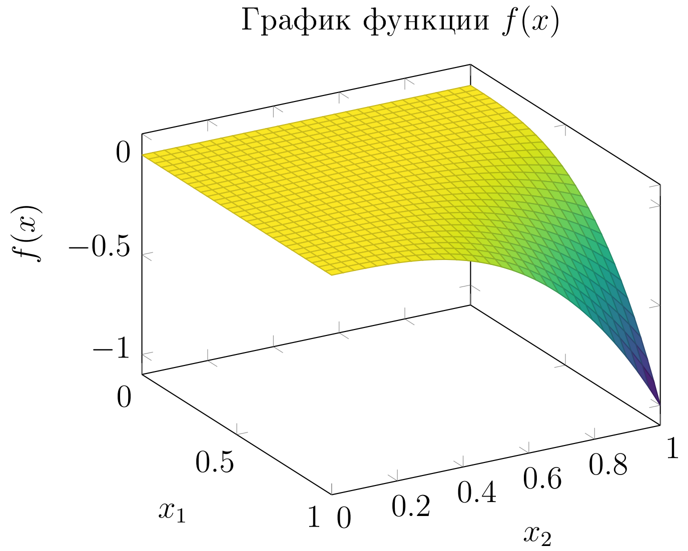


График функции $f(x)$
$f(x)$
0
−0.5
−1
0
0.5
1
x_1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x_2