Решение задачи линейного программирования

Формулировка задачи

Найти максимум функции

$$z = 3x_1 - x_2,$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} &2x_1 - x_2 \leq 4, \\ &x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ &x_1 + x_2 \leq 5, \\ &x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Теория линейного программирования

Линейное программирование — это метод оптимизации, который используется для нахождения максимального или минимального значения линейной функции при наличии системы линейных ограничений. В рамках линейного программирования решается задача в следующей общей форме:

- **Целевая функция:** $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$, где c_i — коэффициенты целевой функции.
- **Ограничения:** система линейных неравенств, задающая допустимую область решений.
- **Допустимая область:** пересечение полуплоскостей, задаваемых ограничениями, обычно образует выпуклый многогранник.

Максимум или минимум целевой функции достигается в одной из вершин допустимой области.

Графическое решение задачи

1. **Построение ограничений.** Выразим каждое ограничение в виде равенств для построения прямых:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 = 4 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = 2x_1 - 4, \\ x_1 - 2x_2 = 2 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = \frac{x_1 - 2}{2}, \\ x_1 + x_2 = 5 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = 5 - x_1. \end{aligned}$$

Кроме того, учтём ограничения $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$, что означает, что область решений находится в первом квадранте.

2. **Определение области допустимых решений.** Найдём точки пересечения прямых:

- Пересечение $2x_1 - x_2 = 4$ и $x_1 - 2x_2 = 2$:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 4, \\ x_1 - 2x_2 &= 2. \end{aligned}$$

  Решая систему, получаем точку $(x_1, x_2) = (2, 0)$.

- Пересечение $2x_1 - x_2 = 4$ и $x_1 + x_2 = 5$:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 4, \\ x_1 + x_2 &= 5. \end{aligned}$$

  Решая систему, получаем точку $(x_1, x_2) = (3, 2)$.

- Пересечение $x_1 - 2x_2 = 2$ и $x_1 + x_2 = 5$:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 2, \\ x_1 + x_2 &= 5. \end{aligned}$$

  Решая систему, получаем точку $(x_1, x_2) = (4, 1)$.

Таким образом, вершины области допустимых решений: $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$.

3. **Вычисление значений целевой функции.** Подставляем координаты вершин в целевую функцию:

$$\begin{aligned} z(0, 0) &= 3 \cdot 0 - 0 = 0, \\ z(2, 0) &= 3 \cdot 2 - 0 = 6, \\ z(3, 2) &= 3 \cdot 3 - 2 = 7, \\ z(4, 1) &= 3 \cdot 4 - 1 = 11. \end{aligned}$$

4. **Оптимальное решение.** Максимальное значение функции $z = 11$ достигается в точке $(4, 1)$.