Задача 5 Лабораторная 1: Найти минимум функции $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ на заданных интервалах

Функция $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ определена на отрезках $\left[-3, -\frac{3}{2}\right]$ и $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

1. Найдём производную функции $f'(x)$

Производная функции $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ находится с использованием правила Лейбница для дифференцирования частного:

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)\cdot 3x^2 - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2}$$

Рассчитаем числитель:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

Таким образом:

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

2. Найдём критические точки

Критические точки находятся из уравнения $f'(x) = 0$. Решим уравнение:

$$\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0$$

Числитель $x^2(x^2-3) = 0$, откуда $x^2 = 0$ или $x^2 = 3$.

- $x = 0$ — не принадлежит заданным интервалам, поэтому его не рассматриваем. - $x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1.732$.

3. Поведение функции на заданных интервалах

3.1. Интервал $\left[-3, -\frac{3}{2}\right]$

На этом интервале рассматриваем значения функции в краевых точках и в точке $x = -\sqrt{3} \approx -1.732$: - Для $x = -3$:

$$f(-3) = \frac{(-3)^3}{(-3)^2 - 1} = \frac{-27}{9-1} = \frac{-27}{8} = -3.375$$

- Для $x = -\frac{3}{2}$:

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^3}{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 1} = \frac{-\frac{27}{8}}{\frac{9}{4} - 1} = \frac{-\frac{27}{8}}{\frac{5}{4}} = -\frac{27}{10} = -2.7$$

- Для $x = -\sqrt{3} \approx -1.732$:

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{(-\sqrt{3})^3}{(-\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{-3\sqrt{3}}{3-1} = \frac{-3\sqrt{3}}{2} \approx -2.598$$

Таким образом, на интервале $\left[-3, -\frac{3}{2}\right]$ минимум достигается в точке $x = -3$ и равен $f(-3) = -3.375$.

3.2. Интервал $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$

Теперь исследуем функцию на интервале $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$: - Для $x = \frac{3}{2}$:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1} = \frac{\frac{27}{8}}{\frac{9}{4} - 1} = \frac{\frac{27}{8}}{\frac{5}{4}} = \frac{27}{10} = 2.7$$

- Для $x = 2$:

$$f(2) = \frac{2^3}{2^2 - 1} = \frac{8}{4-1} = \frac{8}{3} \approx 2.667$$

- Для $x = \sqrt{3} \approx 1.732$:

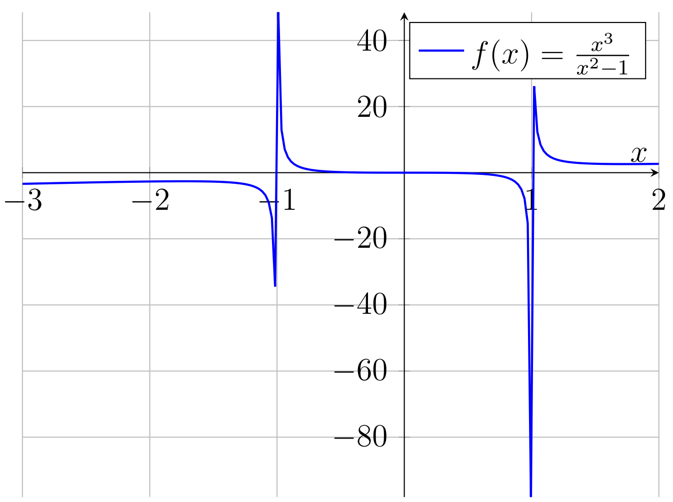
$$f(\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{3\sqrt{3}}{3-1} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.598$$

Таким образом, на интервале $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ минимум достигается в точке $x = \sqrt{3} \approx 1.732$ и равен $f(\sqrt{3}) \approx 2.598$.

4. График функции $f(x)$

Для наглядности построим график функции $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ на двух интервалах.

График функции $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$



5. Результаты

- На интервале $\left[-3, -\frac{3}{2}\right]$ минимум функции равен $f(-3) = -3.375$. - На интервале $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ минимум функции равен $f(\sqrt{3}) \approx 2.598$.