**Лабораторна робота №7**

**Задача про розподіл ресурсів між можливими напрямками їх використання**

Мета: набуття теоретичних знань та практичних навичок побудови математичних моделей та знаходження оптимальних розв'язків задач про розподіл ресурсів.

**Завдання**

Виробниче об'єднання складається з чотирьох підприємств . Загальна сума річних інвестицій в виробничому об'єднанні дорівнює 500 ум. од. . Розмір інвестицій в кожне окреме підприємство кратний 100 ум. од. Якщо підприємство на початку року отримує інвестиції в обсязі ум. од., то в кінці року прибуток підприємства зростає на ум. од.

Передбачається, що:

1) збільшення прибутку кожним підприємством не залежить від вкладених коштів в інші підприємства;

2) прибутки всіх підприємств виражені в одних умовних одиницях;

3) сумарне збільшення прибутку виробничого об’єднання дорівнює сумі збільшень прибутків підприємств.

Необхідно визначити, яку кількість інвестицій необхідно вкласти в кожне підприємство, щоб сумарний приріст прибутку в виробничому об'єднанні був найбільшим.



**Короткі теоретичні відомості**

Задачі розподілу ресурсів відносяться до одного з найважливіших класів задач прикладного спрямування. Це задачі про розподіл грошових коштів, матеріальних запасів, водних потоків, мережевих ресурсів, часу, оперативної або віртуальної пам'яті та інші.

Розглянемо задачу розподілу коштів між підприємствами.

*Постановка задачі про розподіл коштів між підприємствами*

Планується розподіл початкової суми коштів між підприємствами . Передбачається, що виділені підприємству на початку планового періоду кошти на кінці періоду приносять прибуток *.* Будемо вважати, що:

1) прибуток, отриманий від вкладання коштів в підприємство , не залежить від вкладання коштів в інші підприємства;

2) прибуток, отриманий від різних підприємств, виражається в однакових одиницях;

3) загальний прибуток дорівнює сумі прибутків, отриманих від розподілу всіх коштів по всім підприємствам.

Необхідно визначити, яку кількість коштів потрібно виділити кожному підприємству, щоб сумарний прибуток був максимальним. При цьому вважається, що змінні повинні задовольняти умовам

*Схема розв’язування задачі про* *розподіл коштів між підприємствами*

Примінимо до сформульованої задачі схему динамічного програмування.

Будемо умовно вважати, що спочатку виділяємо кошти підприємству , потім *, ...,*. Тоді під -м кроком будемо розуміти виділення коштів підприємству . Отримаємо кроків.

Під станом будемо розуміти залишок коштів по завершенню -го кроку або їх наявність на початок -го кроку.

Під управлінням на -му кроці будемо розуміти кількість коштів , що виділяються на -му кроці (тобто підприємству ).

Рівняння стану для нашої задачі будуть мати вигляд:

.

Під величиною доходу на -му кроці будемо розуміти задані функції доходу причому сумарний прибуток

.

Початковий і кінцевий стани жорстко закріплені, а саме:

Отримали задачу динамічного програмування, для розв’язання якої необхідно знайти оптимальний набір управлінь , на якому .

Вводимо в розгляд умовні максимуми цільової функції та умовно-оптимальні управління на -ому кроці, .

Записуємо рівняння Беллмана (4), (7) для нашої задачі:

(8)

(9)

Розв’язуємо послідовно рівняння Беллмана (умовна оптимізація) та отримуємо дві послідовності: .

Значення   
і є оптимумом. Виконуючи безумовну оптимізацію (використовуючи рівняння стану) знаходимо оптимальний розв’язок

Альтернативою динамічному програмуванню для даної задачі є перебір всіх варіантів розв'язку. ДП краще перебору тим, що відкидає невигідні варіанти.

Також ДП дозволяє виконувати аналіз розв'язку на чутливість до зміни початкових коштів і кількості кроків.

**Хід роботи**

Вказана модель має лінійні цілочислові обмеження задані табличним методом, тому не можна застосувати методи цілочислового лінійного програмування. Скористаємось методами динамічного програмування.

Процес розподілу коштів представимо у вигляді 4-ох кроків. При цьому номер кроку збігається з номером підприємства.

Позначимо через управління на першому, другому, третьому і четвертому кроках (виділення коштів відповідним підприємствам), а через стани після першого, другого, третього і четвертого кроків (кількість коштів, що залишилися після виділення відповідно першому, другому, третьому та четвертому підприємствам). Початковий стан .

Рівняння станів в цій задачі мають вигляд:

де

– кошти перед -м кроком,

– кошти, виділені -му підприємству,

– кошти, що залишилися після -го кроку.

Під величиною доходу на -му кроці будемо розуміти задані функції доходу причому сумарний прибуток

.

Початковий і кінцевий стани жорстко закріплені, а саме:

Отримали задачу динамічного програмування, для розв’язання якої необхідно знайти оптимальний набір управлінь на кожному кроці, тобто такий набір управлінь , на якому .

Вводимо в розглядумовні максимуми цільової функції та умовно-оптимальні управління на -ому кроці,

Використовуючи обернену схему Беллмана, проведемо умовну оптимізацію.

*Розглянемо останній четвертий крок*. Згідно (8) умовне оптимальне значення цільової функції на 4-му кроці дорівнює:

Так як всі кошти, що залишилися до четвертого кроку, повинні бути вкладені в четверте підприємство, то попереднє співвідношення набуде вигляду:

і умовне оптимальне керування на 4-му кроці дорівнюватиме:

*Розглянемо два останні кроки (третій і четвертий).* Згідно (9) умовне оптимальне значення цільової функції на третьому та четвертому кроках дорівнює

і умовне оптимальне керування на 3-му кроці дорівнюватиме

Визначимо умовно оптимальні управління для четвертого и третього підприємств, а потім для четвертого, третього та другого и після цього усіх підприємств.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 |
|  | | 0 | 50 | 68 | 82 | 88 | 91 |
|  |  | ↓ | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | 50 | 68 | 82 | 88 | 91 |
| 100 | 22 | 22 | 72 | 90 | 104 | 110 |  |
| 200 | 37 | 37 | 87 | 105 | 119 |  |  |
| 300 | 49 | 49 | 99 | 117 |  |  |  |
| 400 | 59 | 59 | 109 |  |  |  |  |
| 500 | 68 | 68 |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 |
|  | 0 | 50 | 72 | 90 | 105 | 119 |
|  | 0 + 0 | 100 + 0 | 100 + 100 | 200 + 100 | 200 + 200 | 300 + 200 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 |
|  | | 0 | 50 | 72 | 90 | 105 | 119 |
|  | | 0+0 | 100+0 | 100+100 | 200+100 | 200+200 | 300+200 |
|  |  | ↓ | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | 50 | 72 | 90 | 105 | 119 |
| 100 | 30 | 30 | 80 | 102 | 120 | 135 |  |
| 200 | 49 | 49 | 99 | 121 | 139 |  |  |
| 300 | 63 | 63 | 113 | 135 |  |  |  |
| 400 | 68 | 68 | 118 |  |  |  |  |
| 500 | 69 | 69 |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 |
|  | 0 | 50 | 80 | 102 | 121 | 135 |
|  | 0+0+0 | 100+0+0 | 100+0+100 | 100+100+100 | 100+100+200 | 100+100+300  200+200+100 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 |
|  | 0 | 50 | 80 | 102 | 121 | 135 |
|  | 0+0+0 | 100+0+0 | 100+0+100 | 100+100+100 | 100+100+200 | 100+100+300  200+200+100 |
|  | 500 | 400 | 300 | 200 | 100 | 0 |
|  | 89 | 80 | 71 | 58 | 42 | 0 |
| Z\* | 89 | 130 | 151 | 160 | 163 | 135 |
| x\* |  |  |  |  | 100+100+200+100 |  |

Таким чином маємо:

**Висновок:** під час виконання лабораторної роботи, я набув теоретичних знань та практичних навичок розв'язання транспортних задач.