1) Найти собственные вектора и собственное значение

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

1) $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(6-\lambda) + 12 = 0$

$-6 + \lambda - \lambda \cdot 6 + \lambda^2 + 12 = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$D = 25 - 4 \cdot 6 = 1$

$\lambda_1 = \frac{5 - \sqrt{1}}{2} = 2$ $\quad \lambda_2 = \frac{5 + \sqrt{1}}{2} = 3$

2) $\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -x_1 - 6x_2 = 2x_1 \\ 2x_1 + 6x_2 = 2x_2 \end{cases}$

$\begin{cases} -6x_2 = 3x_1 \\ 2x_1 = -4x_2 \end{cases}$

$x_1 = -2x_2$

Вектор $(-2, 1)$

$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -x_1 - 6x_2 = 3x_1 \\ 2x_1 + 6x_2 = 3x_2 \end{cases}$

$\begin{cases} -6x_2 = 4x_1 \\ 2x_1 = -3x_2 \end{cases}$

$x_1 = -\frac{3}{2}x_2$

Вектор: $(-\frac{3}{2}, 1)$

г) Дан оператор поворота на 180 градусов, задаваемый матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Показать что любой вектор яв-ся для него собственным.

1)

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -1$$

2)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 = -x_1 \\ -x_2 = -x_2 \end{cases}$$

При любом (x_1, x_2), оператор A является собственным.

3) Пусть линейный оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Установить, является ли вектор $x(1, 1)$ собственным вектором этого линейного оператора.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 1 = 0$$

$$3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$D = 16 - 4 \cdot 4 = 0$$

$$\lambda = \frac{4}{2} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$1 + 1 = 2$$

$$-1 + 3 = 2$$

Вектор $x(1, 1)$ является собственным вектором для A.

4) Пусть линейный оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Установить, яв-ся ли вектор $x = (3, -3, -4)$ собственным вектором этого линейного оператора.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -9 = 3\lambda \\ 9 = -3\lambda \\ -12 = -4\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lambda = -3 \\ \lambda = -3 \\ \lambda = 3 \end{array}$$

Вектор $x = (3, -3, -4)$ не явл-ся собственным вектором для A