1. Решить систему уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-2x_4=0 \\ 2x_1+x_2-x_3+x_4=-2 \\ x_1+x_2-3x_3+x_4=4 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Приводим матрицу к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-2x_4=0 \\ -x_2+x_3+5x_4=-2 \\ -2x_3+3x_4=4 \end{cases}$$

Система имеет множество решений.

$x_4 = c$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2c = 0 \\ -x_2 + x_3 + 5c = -2 \\ -2x_3 - 3c = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2c = 0 \\ -x_2 + x_3 + 5c = -2 \\ x_3 = (4 + 3c) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2c = 0 \\ -x_2 + x_3 + 5c = -2 \\ x_3 = -2 - \frac{3}{2}c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + x_3 + 2c \\ x_2 = x_3 + 5c + 2 \\ x_3 = -2 - \frac{3}{2}c \end{cases}$$

при $c = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= -2 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= -2 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}}$$

2) Проверить на совместимость и выяснить сколько решений будет иметь система линейных уравнений.

а) $$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{ex} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$\operatorname{rank} A = 3$

$\operatorname{rank} \tilde{A} = 3$

Система имеет единственное решение.

б) $$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{array}\right)$$

$\operatorname{rank} A = 1$

$\operatorname{rank} \tilde{A} = 3$

Система несовместна.

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -8 \end{pmatrix}$, $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -8 & -2 \end{array}\right)$

$\operatorname{rank} A = 2$

$\operatorname{rank} \tilde{A} = 2$

Т.к число переменных не совпадает с рангом, система имеет бесконечное количество решений

3) Проверить на совместность и выяснить, сколько решений будет иметь СЛУ, заданная расширенной матрицей.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rank} A = 4$

$\operatorname{rank} \hat{A} = 4$

Система совместна и имеет единственное решение.

4) Дано система линейных уравнений, заданная расширеной матрицей.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right)$$

Найти соотношение между параметрами a, b, c. При которых система яв-ся несовместимой.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & -6 & -12 & c-7a \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2 & \frac{b-4a}{-3} \\ 0 & -6 & -12 & c-7a \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2 & \frac{b-4a}{-3} \\ 0 & 0 & 0 & c-7a+6\left(\frac{b-4a}{-3}\right) \end{array}\right)$$

Система несовместима при

$c+a-2b \neq 0$.

1) Решить СЛУ методом Крамера

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 7 \end{cases}$

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2$

$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 14 = 10$

$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 3 = 4$

$x_1 = \frac{10}{2} = 5$

$x_2 = \frac{4}{2} = 2$

б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(1+12) + (1+6) + 5(4-2) = 26 + 7 + 10 = 43$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 10(1+12) + (-2+3) + 5(-8-1) = 130 + 1 + 45 = 86$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-2+3) - 10(1+6) + 5(1+4) = 2 - 70 + 25 = -43$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 10\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(1+8) + (1+4) + 10(4-2) = 18 + 5 + 20 = 43$$

$$x_1 = \frac{86}{43} = 2$$

$$x_2 = \frac{-43}{43} = -1$$

$$x_3 = \frac{43}{43} = \underline{1}$$

2) Найти L-матрицу LU-разложения для матрицы коэффициентов.

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 12 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix}$

$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix}$

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 20 & 18 \end{pmatrix}$

$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 18 & 29 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix}$

$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 18 & 29 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix}$

$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 15 & 23 & 6 \\ 4 & 22 & 53 & 18 \end{pmatrix}$

$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 15 & 23 & 6 \\ 0 & 18 & 45 & 17 \end{pmatrix}$

$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 18 & 45 & 17 \end{pmatrix}$

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 21 & 11 \end{pmatrix}$

$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

3) Решить систему линейных уравнений методом LU-разложения

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = \underline{1} \\ 11x_1 + 7x_2 + 5x_3 = -6 \\ 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases}$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 11 & 7 & 5 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 \\ 9 & \frac{7}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 22 & 14 & 10 \\ 18 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Ly = b}$$

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ 11y_1 + y_2 = -12 \\ 9y_1 + \frac{7}{3}y_2 + y_3 = -10 \end{cases}$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -23 \\ 18 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -23 \\ 0 & 7 & -19 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = 1, \quad y_2 = -23, \quad y_3 = \frac{104}{3}$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -23 \\ 0 & 0 & \frac{104}{3} \end{pmatrix}$$

$$Ux = y$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$$

$$3x_2 - 23x_3 = -23$$

$$\frac{104}{3}x_3 = \frac{104}{3}$$

$$x_1 = -\underline{1}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \underline{1}$$

4) Решить систему линейных уравнений методом Холецкого

$$\begin{cases} 81x_1 - 45x_2 + 45x_3 = 531 \\ -45x_1 + 50x_2 - 15x_3 = -460 \\ 45x_1 - 15x_2 + 38x_3 = 193 \end{cases}$$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{81} = 9$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = -\frac{45}{9} = -5$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{45}{9} = 5$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{50-25} = 5$$

$$l_{32} = \frac{(a_{32} - l_{21}l_{31})}{l_{22}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{38-25-4} = 3$$

$$L = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad L^T = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 9y_1 = 531 \\ -5y_1 + 5y_2 = -460 \\ 5y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 193 \end{cases}$$

59

$y_1 = 59$

$y_2 = \dfrac{-460 + 295}{5} = -33$

$y_3 = \dfrac{193 - 5 \cdot 59 - 2 \cdot (-33)}{3} = -12$

$$\begin{cases} 9x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 59 \\ 5x_2 + 2x_3 = -33 \\ 3x_3 = -12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 59 \\ 5x_2 + 2x_3 = -33 \\ x_3 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x_1 - 5x_2 + 20 = 59 \\ 5x_2 - 8 = -33 \\ x_3 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x_1 + 5x_2 = 79 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = -4 \end{cases}$$