

⑦ Матрицы и матричные операции  
Часть 1

- 1) Установить, какие произведения матриц  $AB$  и  $BA$  определены, и найти размерность полученных матриц.

$A \cdot B$

$$\begin{array}{l} \delta) \ 2 \times 3 \\ \text{б)} \ 8 \times 8 \\ \Gamma) \ 4 \times 4 \end{array}$$

$B \cdot A$

$$\begin{array}{l} \text{б)} \ 3 \times 3 \\ \Gamma) \ 4 \times 4 \end{array}$$

- 2) Найти сумму и произведение матриц.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Сумма } A+B = \begin{pmatrix} 1+4 & -2-1 \\ 3+0 & 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Произведение  $A \cdot B$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$$



3) Из закономерностей сложения и умножения матриц на число можно сделать вывод, что матрицы одного размера образуют линейное пространство.

Вычислить линейную комбинацию

$3A - 2B + 4C$  для матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 9 & -18 \end{pmatrix}, \quad 2B = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad 4C = \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3A - 2B + 4C = \begin{pmatrix} 3-0+8 & 21-10-16 \\ 9-4+4 & -18+2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ 9 & -12 \end{pmatrix}$$



4) Дана матрица  $A$ . Вычислить  $A \cdot A^T$  и  $A^T \cdot A$ .

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 4 \cdot 4 + 1 \cdot 1 & 4 \cdot 5 + 1 \cdot (-2) & 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 5 \cdot 4 + 2 \cdot 1 & 5 \cdot 5 + (-2) \cdot (-2) & 5 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 \\ 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 17 & 18 & 11 \\ 18 & 29 & 4 \\ 11 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

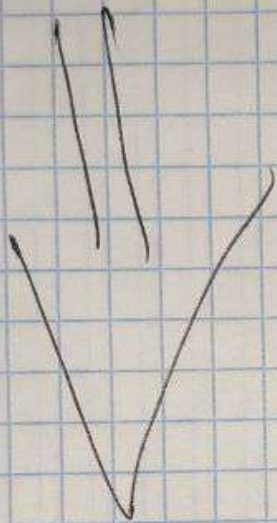
$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 2 & 4 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \\ 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$



ЗАДАНИЕ 5 В

Jupyter Notebook





(4)

Часть 2

1) Вычислить определитель:

$$a) \begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot (-\cos x) = 1$$

$$b) \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot 9 = 180$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (5 \cdot 9 - 8 \cdot 6) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 7 \cdot 6) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 7 \cdot 5) =$$

$$= 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) = -3 + 12 - 9 = 0$$



3) 2) Определитель матрицы  $A$  равен 4. Найдите.

a)  $\det(A^2) = 4 \cdot 4 = 16$   ~~$4 \cdot 4 = 16$~~

б)  $\det(A^T) = 4$

в)  $\det(2A) = 2^n \cdot \det(A) = 2^n \cdot 4$

3) Доказать что матрица вырожденная

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = -2 \begin{vmatrix} -14 & 6 \\ 7 & 13 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 13 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & -14 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(-14 \cdot 13 - 7 \cdot 6) - 7(4 \cdot 13 + 3 \cdot 6) - 3(4 \cdot 7 + 3 \cdot 14) =$$

$$= 448 - 490 + 42 = 0$$

Матрица является вырожденной, т.к.

$$\underline{\det A = 0}$$



4) Найти ранг матрицы

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{или}$$

Третья строка явл-ся суммой первой и второй

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Возьмем из ~~первой~~ второй строки, первую.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\text{rank} = 2}$$



$$b) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

1) Выкинем 3 строку, т.к сумма 1 и 2

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

2) Поменяем 1 и 3 строку местами

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\text{RANK} = 3}$$