Algoritmi avansaţi

Seminar 5 (săpt. 9 şi 10)

1. *Fie punctele* $A = (1, 2, 3), B = (4, 5, 6) \in \mathbb{R}^3$.

a) *Fie* $C = (a, 7, 8)$. *Arătaţi că există* a *astfel ca punctele* A, B, C *să fie coliniare şi pentru* a *astfel determinat calculaţi raportul* $r(A, B, C)$.

b) *Determinaţi punctul* P *astfel ca raportul* $r(A, P, B) = 1$.

c) *Daţi exemplu de punct* Q *astfel ca* $r(A, B, Q) < 0$ *şi* $r(A, Q, B) < 0$.

Soluţie.

a) Condiţia de coliniaritate a punctelor A, B, C este echivalentă cu coliniaritatea vectorilor $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$. Au loc relaţiile:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 3, 3), \quad \overrightarrow{BC} = (a - 4, 2, 2).$$

Vectorii daţi sunt proporţionali dacă şi numai dacă $a - 4 = 2$, deci $a = 6$. De fapt, dreapta AB este direcţionată de vectorul $(1, 1, 1)$ (şi de orice vector proporţional cu acesta).

În acest caz, avem $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 3, 3), \quad \overrightarrow{BC} = (2, 2, 2)$, deci

$$\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2} \overrightarrow{BC},$$

adică $r(A, B, C) = \frac{3}{2}$ (raportul $r(A, B, C)$ este acel scalar r pentru care are loc relaţia $\overrightarrow{AB} = r\ \overrightarrow{BC}$).

b) Condiţia $r(A, P, B) = 1$ este echivalentă cu $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$. Punctul P care verifică această condiţie este mijlocul segmentului $[AB]$, deci $P = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = (\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2})$.

c) Semnele rapoartelor indică faptul că (i) B nu este între A şi Q; (ii) Q nu este între A şi B. Trebuie deci ca A să fie situat între Q şi B. Un astfel de punct este $Q = (0, 1, 2)$ (l-am ales ca fiind $A - (1, 1, 1)$). Au loc relaţiile

$$\overrightarrow{AB} = (3, 3, 3), \quad \overrightarrow{BQ} = (-4, -4, -4), \quad r(A, B, Q) = -\frac{3}{4},$$

$$\overrightarrow{AQ} = (-1, -1, -1), \quad \overrightarrow{QB} = (4, 4, 4), \quad r(A, Q, B) = -\frac{1}{4},$$

deci sunt verificate cerinţele din enunţ.

2. *Fie punctele* $P = (1, -1), Q = (3, 3)$.

a) *Calculaţi valoarea determinantului care apare în testul de orientare pentru muchia orientată* $\overrightarrow{PQ}$ *şi punctul de testare* $O = (0, 0)$.

b) *Fie* $R_\alpha = (\alpha, -\alpha)$, *unde* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Determinaţi valorile lui* α *pentru care punctul* R_α *este situat în dreapta muchiei orientate* $\overrightarrow{PQ}$.

Soluţie.

a) Conform teoriei,

$$\Delta(P, Q, R) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}.$$

În exemplu avem:

$$\Delta(P, Q, R) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \text{ (dezvoltare după ultima coloană).}$$

Se poate verifica şi pe un desen că O este la stânga muchiei orientate $\overrightarrow{PQ}$.

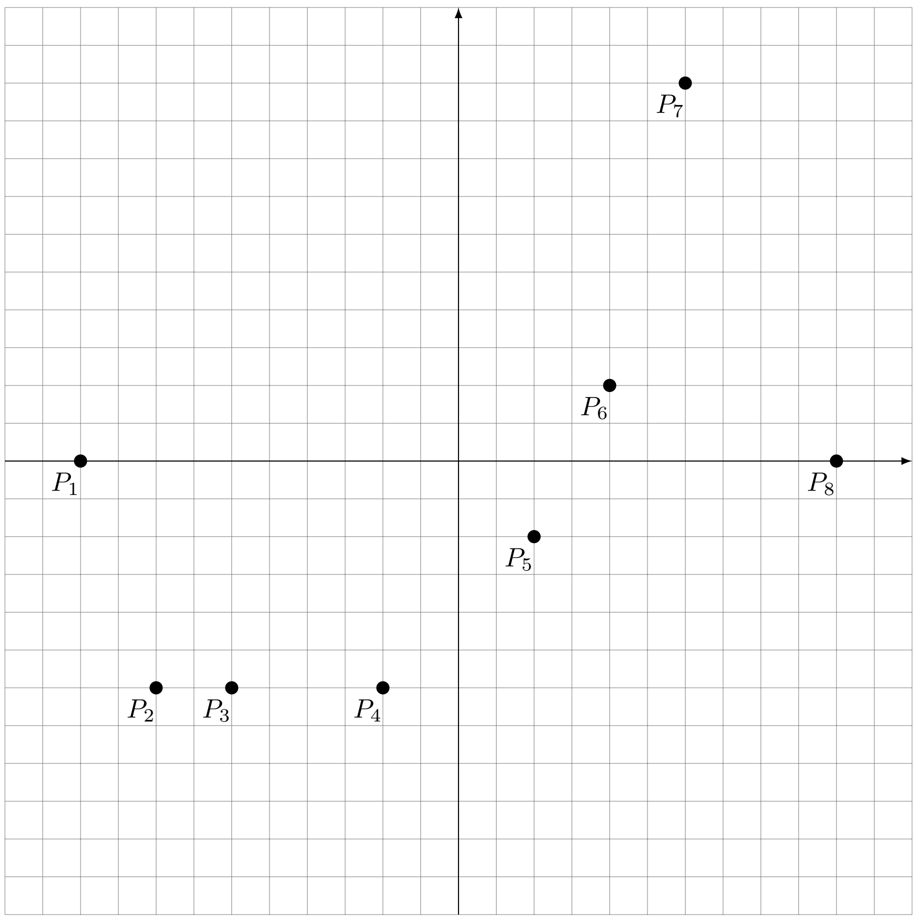
b) Calculăm, pentru un α, valoarea $\Delta(P, Q, R_\alpha)$:

$$\Delta(P, Q, R_\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & \alpha \\ -1 & 3 & -\alpha \end{vmatrix} = 6(1 - \alpha).$$

Punctul R_α este situat în dreapta muchiei orientate $\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \Delta(P, Q, R_\alpha) < 0$ $\Leftrightarrow \alpha > 1$. Acest lucru poate fi verificat şi pe desen, punctul R_α este variabil pe cea de-a doua bisectoare (de ecuaţie $x + y = 0$), iar pentru $\alpha > 1$ acest punct este situat în dreapta muchiei orientate $\overrightarrow{PQ}$.

3. *Fie* $\mathcal{M} = \{P_1, P_2, \ldots, P_9\}$, *unde* $P_1 = (-5, 0)$, $P_2 = (-4, -3)$, $P_3 = (-3, -3)$, $P_4 = (-1, -3)$, $P_5 = (1, -1)$, $P_6 = (2, 1)$, $P_7 = (3, 5)$, $P_8 = (5, 0)$. *Detaliaţi cum evoluează lista* $\mathcal{L}_i$ *a vârfurilor care determină marginea inferioară a frontierei acoperirii convexe a lui* $\mathcal{M}$, *obţinută pe parcursul Graham's scan, varianta Andrew.*

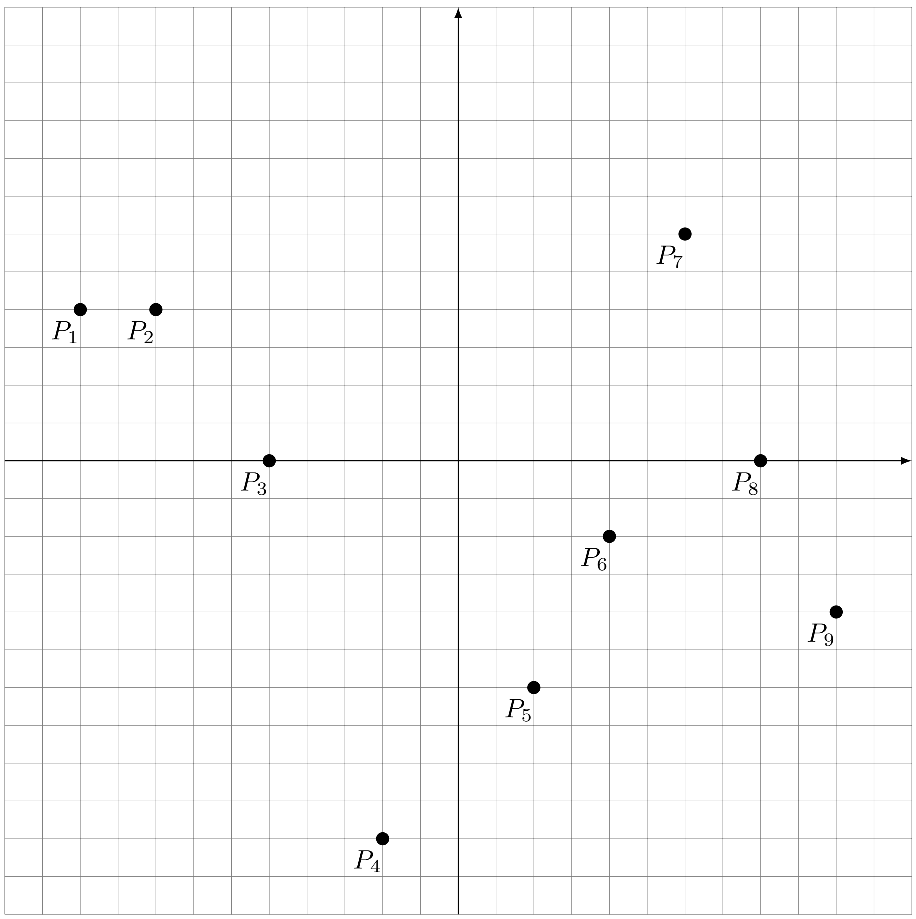
Soluţie.



Lista $\mathcal{L}_i$ evoluează astfel:
P_1P_2
$P_1P_2P_3$
$P_1P_2P_3P_4$ // este eliminat P_3, deoarece P_2, P_3, P_4 coliniare (nu viraj la stânga)
$P_1P_2P_4$
$P_1P_2P_4P_5$
$P_1P_2P_4P_5P_6$
$P_1P_2P_4P_5P_6P_7$
$P_1P_2P_4P_5P_6P_7P_8$ // punctele P_7, P_6, P_5 sunt eliminate în această ordine
$P_1P_2P_4P_8$ // lista finală ($\mathcal{L}_i$) a vârfurilor care determină marginea inferioară

4. *Daţi un exemplu de mulţime $\mathcal{M}$ din planul $\mathbb{R}^2$ pentru care, la final, $\mathcal{L}_i$ are 3 elemente, dar, pe parcursul algoritmului, numărul maxim de elemente al lui $\mathcal{L}_i$ este egal cu 6 ($\mathcal{L}_i$ este lista vârfurilor care determină marginea inferioară a frontierei acoperirii convexe a lui $\mathcal{M}$, obţinută pe parcursul Graham's scan, varianta Andrew). Justificaţi!*

Soluţie.



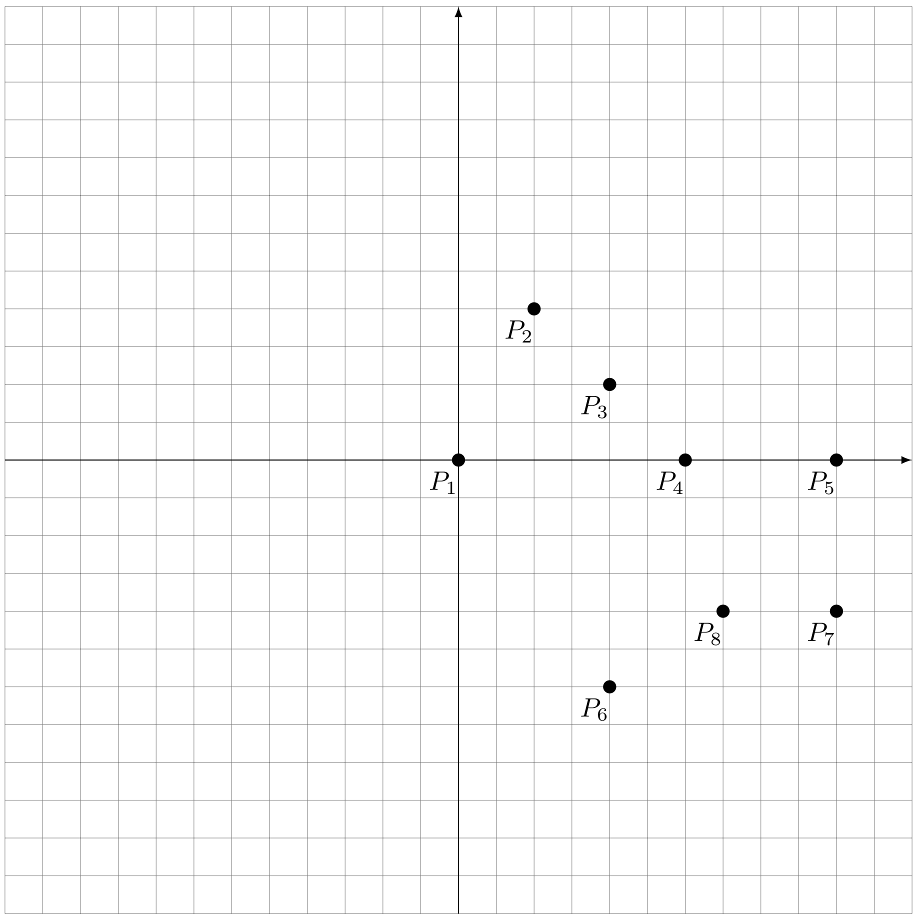
Lista $\mathcal{L}_i$ are la final 3 elemente (P_1, P_4, P_9).

Numărul maxim de elemente este 6: $P_1P_4P_5P_6P_7P_8$ (la adăugarea lui P_8 în listă).

Obs. Numărul maxim de elemente *după verificări ale virajelor* este 5: $P_1P_4P_5P_6P_7$.

5. *Fie mulţimea $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_7\}$, unde $P_1 = (0,0), P_2 = (1,2)$, $P_3 = (2,1), P_4 = (3,0), P_5 = (5,0), P_6 = (2,-3), P_7 = (5,-2)$. Indicaţi testele care trebuie făcute pentru a găsi succesorul lui P_1 atunci când aplicăm Jarvis' march pentru a determina marginea inferioară a acoperirii convexe a lui $\mathcal{P}$, parcursă în sens trigonometric (drept pivot iniţial va fi considerat P_2).*

Soluţie.



Pentru a găsi succesorul lui P_1 este adăugat pivotul P_2 (S cu notaţia din suportul de curs). Punctele sunt apoi testate, iar dacă un punct P este la dreapta muchiei orientate P_1S, punctul P devine noul pivot.
Punctul P_3: este în dreapta muchiei P_1P_2, deci pivotul P_2 este înlocuit cu P_3.
Punctul P_4: este în dreapta muchiei P_1P_3, deci pivotul P_3 este înlocuit cu P_4.
Punctul P_5: nu este în dreapta muchiei P_1P_4, deci pivotul P_4 rămâne.
Punctul P_6: este în dreapta muchiei P_1P_4, deci pivotul P_4 este înlocuit cu P_6.
Punctul P_7: nu este în dreapta muchiei P_1P_6, deci pivotul P_6 rămâne.
Punctul P_8: nu este în dreapta muchiei P_1P_6, deci pivotul P_6 rămâne.

Au fost parcurse toate punctele. Ultimul pivot (P_6) este succesorul lui P_1 în parcurgerea frontierei acoperirii convexe a mulţimii date în sens trigonometric.

6. *Discutaţi un algoritm bazat pe paradigma Divide et impera pentru determinarea acoperirii convexe. Analizaţi complexitatea-timp.*

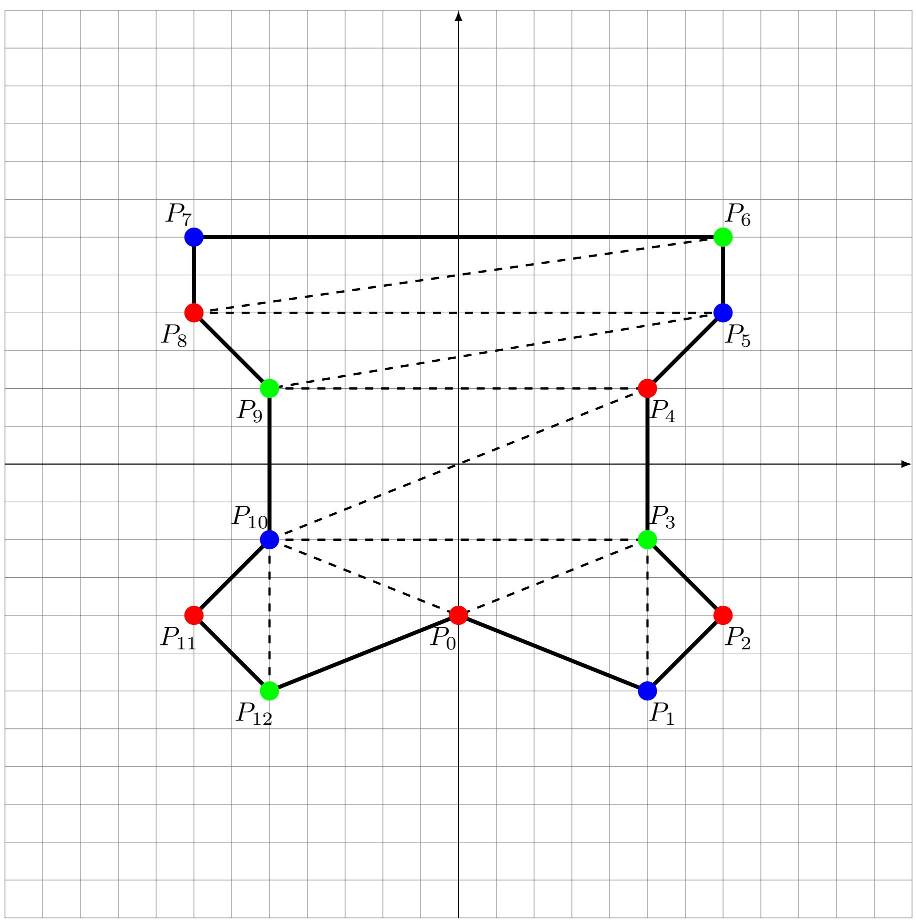
Soluţie. Complexitatea-timp este $O(n \log n)$. O descriere a algoritmului şi a analizei complexităţii poate fi găsită în survey-ul [Lee & Preparata, 1984].

Algoritmi avansaţi

Seminar 6 (săpt. 11 şi 12)

1. *Aplicaţi metoda din demonstraţia teoremei galeriei de artă, indicând o posibilă amplasare a camerelor de supraveghere în cazul poligonului* $P_0P_1P_2\ldots P_{12}$*, unde* $P_0 = (0,-2), P_1 = (5,-6), P_2 = (7,-4), P_3 = (5,-2), P_4 = (5,2), P_5 = (7,4)$*,* $P_6 = (7,6)$ *iar punctele* $P_7,\ldots,P_{12}$ *sunt respectiv simetricele punctelor* $P_6,\ldots,P_1$ *faţă de axa* Oy*.*

Soluţie. În figură sunt reprezentate o posibilă triangulare şi 3-colorarea asociată - există şi alte variante corecte.



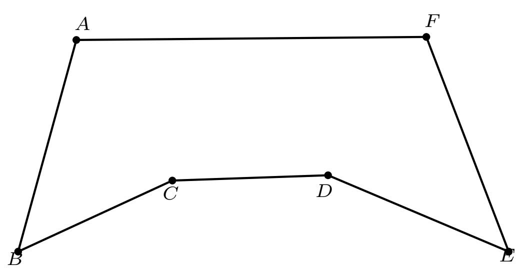
2. *Fie poligonul* $\mathcal{P} = (P_1P_2P_3P_4P_5P_6)$*, unde* $P_1 = (5,0)$*,* $P_2 = (3,2)$*,* $P_3 = (-1,2)$*,* $P_4 = (-3,0)$*,* $P_5 = (-1,-2)$*,* $P_6 = (3,-2)$*. Arătaţi că Teorema Galeriei de Artă poate fi aplicată în două moduri diferite, aşa încât, aplicând metoda din teoremă şi mecanismul de 3-colorare, în prima variantă să fie suficientă o singură cameră, iar în cea de-a doua variantă să fie necesare şi suficiente două camere pentru supravegeherea unei galerii având forma poligonului* $\mathcal{P}$*.*

Soluţie. Poligonul este un hexagon convex, deci pentru triangularea sa vor fi folosite $3\cdot 6-6-3 = 9$ muchii. Aceasta înseamnă că vom trasa 3 diagonale. Sunt posibile două situaţii: (a) cele trei diagonale au un vârf comun; (b) nu există un vârf comun al celor trei diagonale (acest lucru se poate demonstra trasând una dintre diagonale şi apoi raţionând inductiv - este esenţial că poligonul este un hexagon convex). În cazul (a) este suficientă o cameră, iar în cazul (b) 3-colorarea indică utilizarea a două camere.

(a) (b)

3. *Daţi exemplu de poligon cu* 6 *vârfuri care să aibă atât vârfuri convexe, cât şi concave şi toate să fie principale.*

Soluţie. În figură este desenat un poligon cu 4 vârfuri convexe şi 2 vârfuri concave. Pot fi luate în considerare şi alte variante (de exemplu cu un singur vârf concav, cu doar 3 vârfuri convexe, etc.).



4. *Fie* $\mathcal{M} = \{A_i \,|\, i = 0, \ldots, 50\} \cup \{B_i \,|\, i = 0, \ldots, 40\} \cup \{C_i \,|\, i = 0, \ldots, 30\}$*, dată de punctele* $A_i = (i + 10, 0)$*,* $i = 0, 1, \ldots, 50$*,* $B_i = (0, i + 30)$*,* $i = 0, 1, \ldots, 40$*,* $C_i = (-i, -i)$*,* $i = 0, 1, \ldots, 30$*. Determinaţi numărul de triunghiuri şi numărul de muchii ale unei triangulări a lui* $\mathcal{M}$*.*

Soluţie. Trebuie stabilite mai întâi numărul de puncte n şi numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe k (atenţie la numărarea punctelor, nu trebuie numărat un punct de două ori...). Pe o schiţă se observă că sunt în total 123 de puncte (punctele din mulţimile $\{A_i \,|\, i = 0, \ldots, 50\}$, $\{B_i \,|\, i = 0, \ldots, 40\}$, respectiv $\{C_i \,|\, i = 0, \ldots, 30\}$ sunt diferite între ele). Obţinem $n = 123$, $k = 3$, apoi aplicăm formulele pentru determinarea numărului de triunghiuri, respectiv a numărului de muchii.

$$n_t = 2n - k - 2 = 241, \qquad n_m = 3n - k - 3 = 343.$$

5. *Daţi un exemplu de mulţime din* $\mathbb{R}^2$ *care să admită o triangulare având* 6 *triunghiuri şi* 11 *muchii.*

Soluţie. Fie n numărul de puncte ale unei astfel de mulţimi şi k numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe. Au loc relaţiile

$$\begin{cases} 2n - k - 2 = 6 \\ 3n - k - 3 = 11 \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem obţinem $n = 6$, $k = 4$, deci o astfel de mulţime are 6 puncte, din care 4 sunt situate pe frontiera acoperirii convexe.

Un posibil exemplu: $\{(0, 0), (5, 0), (5, 3), (0, 3), (1, 1), (3, 1)\}$.

6. *În* $\mathbb{R}^2$ *fie punctele* $P_1 = (1, 7)$*,* $P_2 = (5, 7)$*,* $P_3 = (7, 5)$*,* $P_4 = (1, 3)$*,* $P_5 = (5, 3)$*,* $P_6 = (\alpha - 1, 5)$*, cu* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Discutaţi, în funcţie de* α*, numărul de muchii ale unei triangulări asociate mulţimii* $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$*.*

Soluţie. Trebuie analizată configuraţia punctelor $P_1, P_2, \ldots P_6$ şi determinate numărul n de puncte şi numărul k de puncte de pe frontiera acoperirii convexe.

Punctele $P_1P_2P_3P_4P_5$ determină un pentagon convex. Punctul P_6 descrie o dreaptă paralelă cu Ox care trece prin punctul P_3.

- Pentru $\alpha - 1 \leq 1$, adică $\alpha \in (-\infty, 2]$ punctul P_6 este situat în exteriorul sau pe laturile pentagonului $P_1P_2P_3P_4P_5$. Avem $n = 6, k = 6$, deci 4 feţe şi 9 muchii.

- Pentru $\alpha - 1 > 1$ şi $\alpha - 1 < 7$, adică $\alpha \in (2, 8)$ punctul P_6 este situat în interiorul pentagonului $P_1P_2P_3P_4P_5$. Avem $n = 6, k = 5$, deci 5 feţe şi 10 muchii.

- Pentru $\alpha - 1 = 7$, adică $\alpha \in \{8\}$ punctul P_6 coincide cu P_3. Avem $n = 5, k = 5$, deci 3 feţe şi 7 muchii.

- Pentru $\alpha - 1 > 7$, adică $\alpha \in (8, \infty)$ punctul P_6 este situat în exteriorul pentagonului $P_1P_2P_3P_4P_5$. Avem $n = 6, k = 6$, deci 4 feţe şi 9 muchii.

7. *Fie $\mathcal{G}$ un graf planar conex, v numărul de noduri, m numărul de muchii, f numărul de feţe. Se presupune că fiecare vârf are gradul ≥ 3. Demonstraţi inegalităţile*

$$\begin{array}{ll} v \leq \frac{2}{3}m, & m \leq 3v - 6 \\ m \leq 3f - 6, & f \leq \frac{2}{3}m \\ v \leq 2f - 4, & f \leq 2v - 4 \end{array}$$

Daţi exemplu de grafuri în care au loc egalităţi în relaţiile de mai sus.

Algoritmi avansaţi

Seminar 7 (săpt. 13 şi 14)

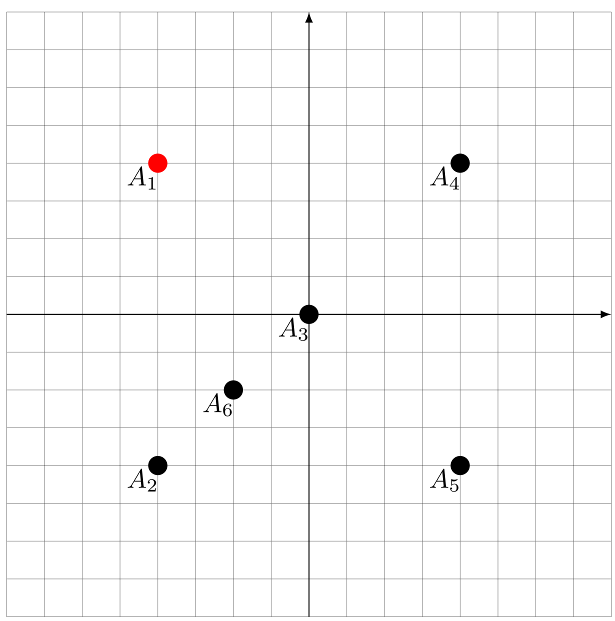
1. *Daţi exemplu de mulţime* $\mathcal{M} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ *din* $\mathbb{R}^2$ *astfel ca diagrama Voronoi asociată lui* $\mathcal{M}$ *să conţină exact patru semidrepte, iar diagrama Voronoi asociată lui* $\mathcal{M} \setminus \{A_1\}$ *să conţină exact cinci semidrepte. Justificaţi alegerea făcută.*

Soluţie. Numărul de semidrepte ale unei diagrame Voronoi este egal cu numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe.

Alegem mulţimea $\mathcal{M}$ astfel ca A_1, A_2, A_3, A_4 să determine frontiera acoperirii convexe, iar pentru $\mathcal{M} \setminus \{A_1\}$ toate punctele să fie situate pe frontiera acoperirii convexe.

În figură este indicată configuraţia punctelor, însă, întrucât în enunţ se cere ca punctele să fie din $\mathbb{R}^2$, le indicăm în coordonate. În exemplul ales $A_1 = (-4, 4)$. $A_2 = (-4, -4)$, $A_3 = (0, 0)$, $A_4 = (4, 4)$, $A_5 = (4, -4)$, $A_6 = (-2, -2)$.

O altă soluţie posibilă (în care punctele A_2, A_6, A_3, A_4 nu mai sunt coliniare, este $A_1 = (-4, 4)$. $A_2 = (-4, -4)$, $A_3 = (0, 3)$, $A_4 = (4, 4)$, $A_5 = (4, -4)$, $A_6 = (-3, 0)$ (verificaţi prin desen!).



2. *a) Fie o mulţime cu n situri necoliniare. Atunci, pentru diagrama Voronoi asociată au loc inegalităţile*

$$n_v \leq 2n - 5, \quad n_m \leq 3n - 6,$$

unde n_v este numărul de vârfuri ale diagramei şi n_m este numărul de muchii al acesteia.

b) Câte vârfuri poate avea diagrama Voronoi $\mathcal{D}$ asociată unei mulţimi cu cinci puncte din $\mathbb{R}^2$ ştiind că $\mathcal{D}$ are exact cinci semidrepte? Analizaţi toate cazurile. Este atins numărul maxim de vârfuri posibile ($n_v = 2n-5$)? Justificaţi!

Soluţie. a) Cum punctele nu sunt coliniare, diagrama Voronoi are muchii de tip segment şi de tip semidreaptă. Se consideră un vârf suplimentar, notat v_∞, prin care, prin convenţie, trece fiecare muchie de tip semidreaptă. Se construieşte un graf $\mathcal{G}$ care are

- *vârfuri*: vârfurile diagramei Voronoi şi vârful v_∞ (deci $n_v + 1$ vârfuri);
- *muchii*: muchiile diagramei Voronoi - fiecare uneşte exact două vârfuri ale lui $\mathcal{G}$ (deci n_m muchii);
- *feţe*: în corespondenţă biunivocă cu siturile iniţiale (deci n feţe).

Graful $\mathcal{G}$ este un graf planar conex.

(i) Conform relaţiei lui Euler avem

$$(n_v + 1) - n_m + n = 2.$$

(ii) Analizăm incidenţele dintre muchii şi vârfuri.

- fiecare muchie este incidentă cu exact două vârfuri;
- fiecare vârf (inclusiv v_∞) este incident cu cel puţin trei muchii;
- numărând incidenţele în două moduri avem

$$2n_m \geq 3(n_v + 1).$$

Din (i) şi din (ii) rezultă inegalităţile dorite.

Observaţie. Pentru ca relaţiile din enunţ să fie egalităţi este necesar şi suficient ca fiecare vârf al lui $\mathcal{G}$ să fie incident cu exact trei muchii. Aceasta înseamnă să nu existe grupuri de (cel puţin) patru puncte conciclice şi pe frontiera acoperirii convexe a mulţimii de situri să fie exact trei situri.

b) Fie $\mathcal{M}$ o mulţime ca în enunţ. Diagrama Voronoi a lui $\mathcal{M}$ are cinci semidrepte, deci toate cele cinci puncte ale lui $\mathcal{M}$ sunt situate pe frontiera acoperirii convexe. În particular, conform observaţiei anterioare, nu este posibil să fie atins numărul maxim de vârfuri posibile ($n_v = 2n - 5 = 5$). Mai mult, urmând paşii din raţionament, observăm că, de fapt, $n_v \leq 3$. Sunt posibile trei situaţii:

- toate punctele sunt conciclice, $n_v = 1$,

- patru dintre puncte sunt conciclice, dar al cincilea nu este situat pe acelaşi cerc cu acestea, $n_v = 2$,

- oricare patru puncte nu sunt conciclice, $n_v = 3$.

3. *Fie punctele $O = (0, 0)$, $A = (\alpha, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (2, 0)$, $D = (1, -1)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ este un parametru. Discutaţi, în funcţie de α, numărul de muchii de tip semidreaptă ale diagramei Voronoi asociate mulţimii $\{O, A, B, C, D\}$.*

Soluţie. Numărul de muchii de tip semidreaptă este egal cu numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe (le notăm cu m).

Punctul A este variabil pe axa Ox. Punctele O, B, C, D determină un pătrat şi trebuie doar să stabilim, în funcţie de α, poziţia lui A faţă de acest pătrat. Distingem următoarele cazuri:

- $\alpha < 0$: punctul A este situat în exteriorul pătratului $OBCD$ şi avem $m = 4$ (punctele de frontieră sunt A, B, C, D);

- $\alpha = 0$: avem $A = O$, deci $m = 4$;

- $0 < \alpha < 2$: punctul A este situat în interiorul pătratului $OBCD$ şi avem $m = 4$ (punctele de frontieră sunt O, B, C, D);

- $\alpha = 2$: avem $A = C$, deci $m = 4$;

- $\alpha > 2$: punctul A este situat în exteriorul pătratului $OBCD$ şi avem $m = 4$ (punctele de frontieră sunt O, B, D, A).

4. *(i) Fie punctul $A = (1, 2)$. Alegeţi două drepte distincte d, g care trec prin A, determinaţi dualele A^*, d^*, g^* şi verificaţi că A^* este dreapta determinată de punctele d^* şi g^*.*

(ii) Determinaţi duala următoarei configuraţii: Fie patru drepte care trec printr-un acelaşi punct M. Se aleg două dintre ele; pe fiecare din aceste două drepte se consideră câte un punct diferit de M şi se consideră dreapta determinată de cele două puncte. *Desenaţi ambele configuraţii. Completaţi configuraţia iniţială (adăugând puncte/drepte) astfel încât să obţineţi o configuraţie auto-duală (i.e. configuraţia duală să aibă aceleaşi elemente geometrice şi aceleaşi incidenţe ca cea iniţială).*

Soluţie. a) Conform teoriei, pentru un punct $p = (p_x, p_y)$ se defineşte dreapta $p^* : (y = p_x x - p_y)$ (duala lui p), iar pentru o dreaptă neverticală $d : (y = mx + n)$, se defineşte punctul $d^* = (m, -n)$ (dualul lui d).

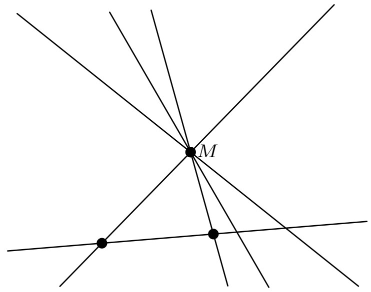
Alegem dreptele $d : (y = 2x)$ şi $g : (y = -x + 3)$. Avem:

$$A^* : (y = x - 2), \quad d^* = (2, 0), \quad g^* = (-1, -3).$$

Se verifică imediat că punctele d^* şi g^* determină dreapta A^*.

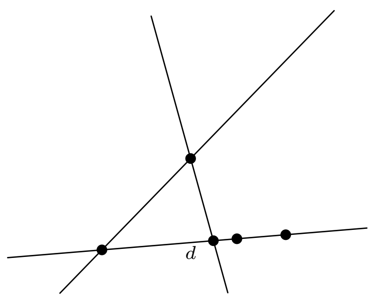
b) Configuraţia iniţială:

Fie patru drepte care trec printr-un acelaşi punct M. Se aleg două dintre ele; pe fiecare din aceste două drepte se consideră câte un punct diferit de M şi se consideră dreapta determinată de cele două puncte.



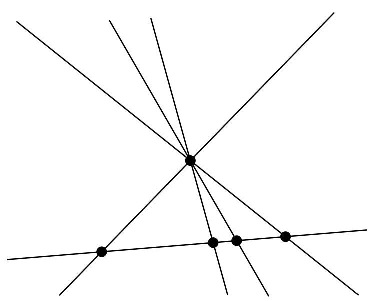
Configuraţia duală:

Fie patru puncte situate pe o aceeaşi dreaptă d. Se aleg două dintre ele; prin fiecare din aceste două puncte se consideră câte o dreaptă diferită de d şi se consideră punctul de intersecţie al acestor două drepte.



Configuraţia completată (astfel ca să fie autoduală):

Fie patru drepte care trec printr-un acelaşi punct. Pe fiecare dreaptă se alege câte un punct diferit de punctul comun, astfel ca aceste patru puncte să fie coloniare şi se consideră dreapta determinată de aceste patru puncte.



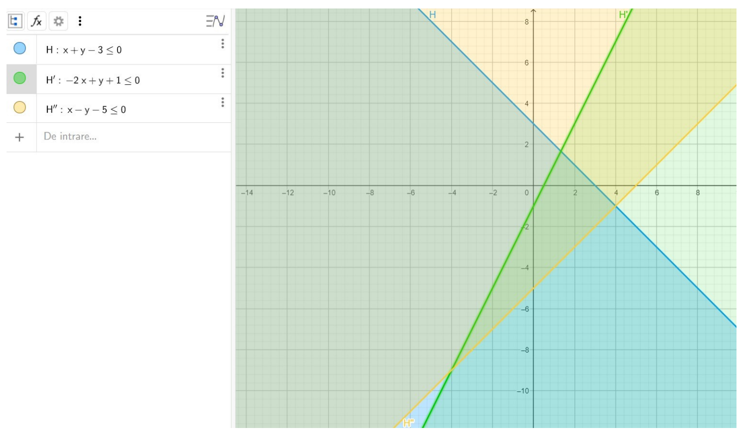
5. *a) Fie semiplanele $H : x + y - 3 \leq 0$ şi $H' : -2x + y + 1 \leq 0$. Daţi exemplu de semiplan H'' astfel ca intersecţia $H \cap H' \cap H''$ să fie un triunghi dreptunghic.*

b) Fie semiplanele H_1, H_2, H_3, H_4 date de inecuaţiile

$$H_1 : -y + 1 \leq 0; \qquad H_2 : y - 5 \leq 0; \qquad H_3 : -x \leq 0; \qquad H_4 : x - y + a \leq 0,$$

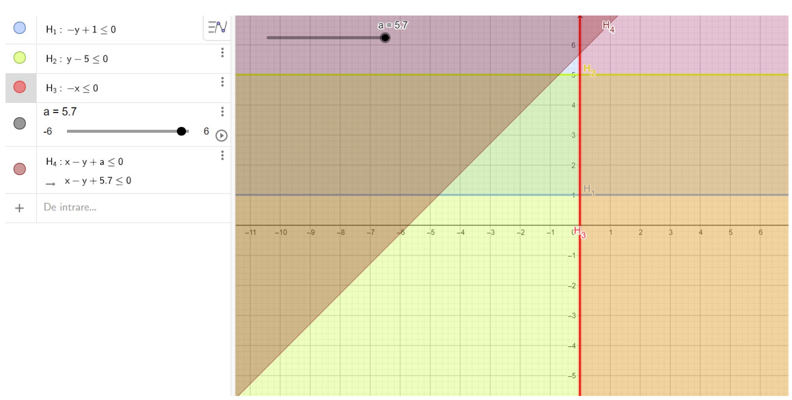
unde $a \in \mathbb{R}$ este un parametru. Discutaţi, în funcţie de parametrul a, natura intersecţiei $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4$.

Soluţie. a) Alegem semimplanul $H'' : x - y - 5 \leq 0$. Dreapta suport $x - y - 5 = 0$ este perpendiculară pe dreapta suport a lui H, $x + y - 3 = 0$. Intersecţia semiplanelor este un triunghi (cf. figură, se pot determina vârfurile acestuia), deci H'' verifică cerinţele din enunţ.

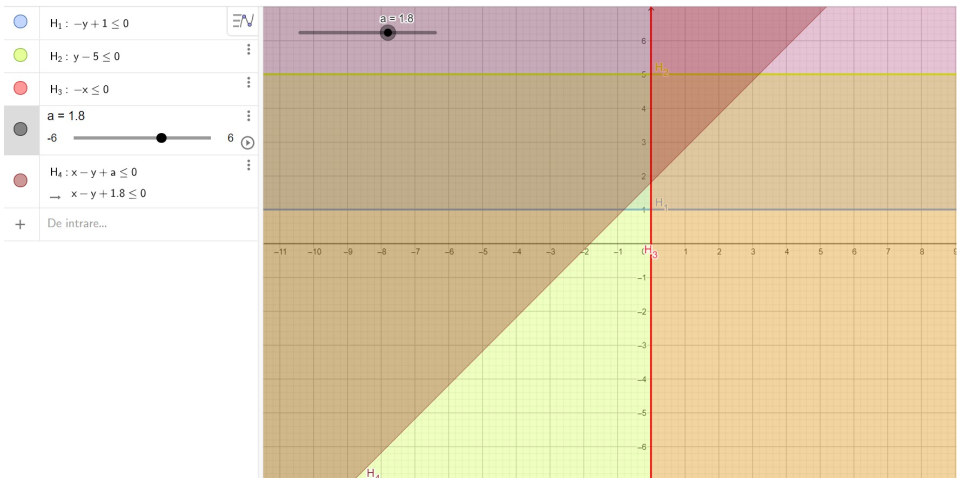


b) Intersecţia $H_1 \cap H_2 \cap H_3$ este o mulţime convexă nemărginită delimitată de dreptele $y = 1$, $y = 5$, respectiv $x = 0$. Vârfurile relevante sunt punctele $(0, 1)$ şi $(0, 5)$.

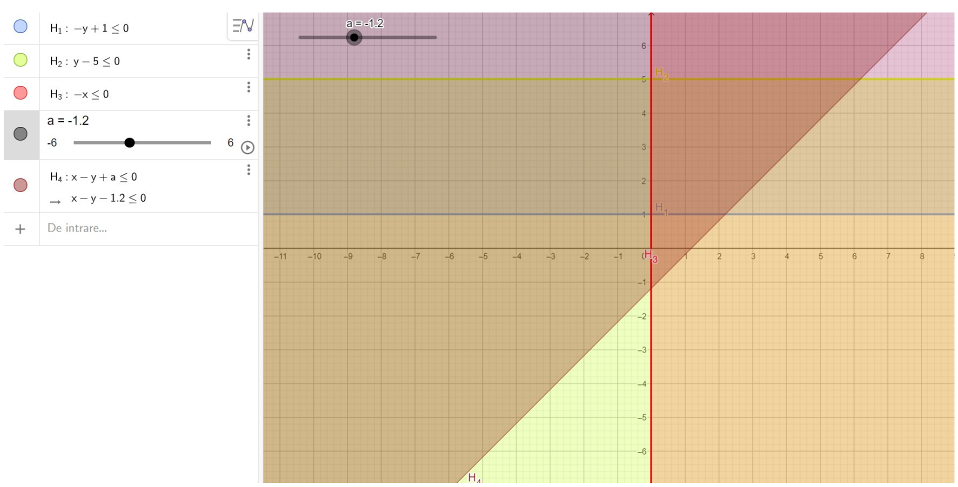
- Pentru $a > 5$ se obţine $0 \geq x - y + a > x - y + 5 \geq 0$ (deoarece $x \geq 0$ şi $-y + 5 \geq 0$), contradicţie. În acest caz intersecţia este mulţimea vidă.



- Pentru $a = 5$ se obţine punctul $(0, 5)$.
- Pentru $1 \leq a < 5$ se obţine un triunghi având unul dintre vârfuri $(0, 5)$, un vârf la intersecţia dintre dreptele $x = 0$ şi $x - y + a = 0$ şi un vârf la intersecţia dintre dreptele $y = 5$ şi $x - y + a = 0$. Pentru $a = 1$ punctul $(0, 1)$ este vârf al acestui triunghi.



- Pentru $a < 1$ se obţine un trapez. Laturile sale au ca drepte suport exact dreptele suport ale celor patru semiplane.



6. *Scrieţi inecuaţiile semiplanelor corespunzătoare şi studiaţi intersecţia acestora, dacă normalele exterioare ale feţelor standard sunt coliniare cu vectorii*

$$(0, 1, -1),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, -1),\ (0, -1, 0),\ (0, -1, -1).$$

Soluţie. Conform teoriei, dacă normala exterioară a unei feţe f este coliniară cu un vector $\vec{v}_f = (a, b, c)$, semiplanul corespunzător feţei f este

$$ax + by + c \leq 0.$$

Se ajunge la inegalităţile

$$\begin{aligned} y - 1 &\leq 0 \\ y &\leq 0 \\ -1 &\leq 0 \\ -y &\leq 0 \\ -y - 1 &\leq 0 \end{aligned}$$

Acest sistem este compatibil, admiţând soluţia $y = 0$.

Notă. Ca în exemplul de la curs, am făcut abstracţie de componenta x.

7. ***(Suplimentar)*** *Demonstraţi că arborele parţial de cost minim al lui $\mathcal{P}$ este un subgraf al triangulării Delaunay.*

Soluţie. D. Mount, *Computational Geometry*, pag. 75.