Algoritmi avansaţi

Seminar 5 (săpt. 9 şi 10)

1. Fie punctele $A = (1, 2, 3), B = (4, 5, 6) \in \mathbb{R}^3$.

a) Fie $C = (a, 7, 8)$. Arătaţi că există a astfel ca punctele A, B, C să fie coliniare şi pentru a astfel determinat calculaţi raportul $r(A, B, C)$.

b) Determinaţi punctul P astfel ca raportul $r(A, P, B) = 1$.

c) Daţi exemplu de punct Q astfel ca $r(A, B, Q) < 0$ şi $r(A, Q, B) < 0$.

2. Fie punctele $P = (1, -1), Q = (3, 3)$.

a) Calculaţi valoarea determinantului care apare în testul de orientare pentru muchia orientată $\overrightarrow{PQ}$ şi punctul de testare $O = (0, 0)$.

b) Fie $R_\alpha = (\alpha, -\alpha)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinaţi valorile lui α pentru care punctul R_α este situat în dreapta muchiei orientate $\overrightarrow{PQ}$.

3. Fie $\mathcal{M} = \{P_1, P_2, \ldots, P_9\}$, unde $P_1 = (-2, 4)$, $P_2 = (-1, 1)$, $P_3 = (0, 1)$, $P_4 = (2, 1)$, $P_5 = (4, 3)$, $P_6 = (5, 5)$, $P_7 = (6, 9)$, $P_8 = (8, 4)$, $P_9 = (10, 6)$. Detaliaţi cum evoluează lista $\mathcal{L}_i$ a vârfurilor care determină marginea inferioară a frontierei acoperirii convexe a lui $\mathcal{M}$, obţinută pe parcursul Graham's scan, varianta Andrew. Justificaţi!

4. Daţi un exemplu de mulţime $\mathcal{M}$ din planul $\mathbb{R}^2$ pentru care, la final, $\mathcal{L}_i$ are 4 elemente, dar, pe parcursul algoritmului, numărul maxim de elemente al lui $\mathcal{L}_i$ este egal cu 6 ($\mathcal{L}_i$ este lista vârfurilor care determină marginea inferioară a frontierei acoperirii convexe a lui $\mathcal{M}$, obţinută pe parcursul Graham's scan, varianta Andrew). Justificaţi!

5. Fie mulţimea $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_7\}$, unde $P_1 = (1, 0), P_2 = (2, 2)$, $P_3 = (3, 1), P_4 = (4, 0), P_5 = (6, 0), P_6 = (3, -3), P_7 = (6, -2)$. Indicaţi testele care trebuie făcute pentru a găsi succesorul lui P_1 atunci când aplicăm Jarvis' march pentru a determina marginea inferioară a acoperirii convexe a lui $\mathcal{P}$, parcursă în sens trigonometric (drept drept pivot iniţial va fi considerat P_2).

6. Discutaţi un algoritm bazat pe paradigma *Divide et impera* pentru determinarea acoperirii convexe. Analizaţi complexitatea-timp.

Algoritmi avansaţi

Seminar 6 (săpt. 11 şi 12)

1. *Aplicaţi metoda din demonstraţia teoremei galeriei de artă, indicând o posibilă amplasare a camerelor de supraveghere în cazul poligonului* $P_0P_1P_2\dots P_{12}$*, unde* $P_0 = (0,-2), P_1 = (5,-6), P_2 = (7,-4), P_3 = (5,-2), P_4 = (5,2), P_5 = (7,4)$*,* $P_6 = (7,6)$ *iar punctele* $P_7,\dots,P_{12}$ *sunt respectiv simetricele punctelor* $P_6,\dots,P_1$ *faţă de axa* Oy*.*

2. *Fie poligonul* $\mathcal{P} = (P_1P_2P_3P_4P_5P_6)$*, unde* $P_1 = (5,0)$*,* $P_2 = (3,2)$*,* $P_3 = (-1,2)$*,* $P_4 = (-3,0)$*,* $P_5 = (-1,-2)$*,* $P_6 = (3,-2)$*. Arătaţi că Teorema Galeriei de Artă poate fi aplicată în două moduri diferite, aşa încât, aplicând metoda din teoremă şi mecanismul de 3-colorare, în prima variantă să fie suficientă o singură cameră, iar în cea de-a doua variantă să fie necesare şi suficiente două camere pentru supravegeherea unei galerii având forma poligonului* $\mathcal{P}$*.*

3. *Daţi exemplu de poligon cu* 6 *vârfuri care să aibă atât vârfuri convexe, cât şi concave şi toate să fie principale.*

4. *Fie* $\mathcal{M} = \{A_i \mid i = 0,\dots,50\} \cup \{B_i \mid i = 0,\dots,40\} \cup \{C_i \mid i = 0,\dots,30\}$*, dată de punctele* $A_i = (i+10,0)$*,* $i = 0,1,\dots,50$*,* $B_i = (0,i+30)$*,* $i = 0,1,\dots,40$*,* $C_i = (-i,-i)$*,* $i = 0,1,\dots,30$*. Determinaţi numărul de triunghiuri şi numărul de muchii ale unei triangulări a lui* $\mathcal{M}$*.*

5. *Daţi un exemplu de mulţime din* $\mathbb{R}^2$ *care să admită o triangulare având* 6 *triunghiuri şi* 11 *muchii.*

6. *În* $\mathbb{R}^2$ *fie punctele* $P_1 = (1,7)$*,* $P_2 = (5,7)$*,* $P_3 = (7,5)$*,* $P_4 = (1,3)$*,* $P_5 = (5,3)$*,* $P_6 = (\alpha-1,5)$*, cu* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Discutaţi, în funcţie de* α*, numărul de muchii ale unei triangulări asociate mulţimii* $\{P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6\}$*.*

7. *Fie* $\mathcal{G}$ *un graf planar conex,* v *numărul de noduri,* m *numărul de muchii,* f *numărul de feţe. Se presupune că fiecare vârf are gradul* ≥ 3*. Demonstraţi inegalităţile*

$$\begin{array}{ll} v \leq \frac{2}{3}m, & m \leq 3v-6 \\ m \leq 3f-6, & f \leq \frac{2}{3}m \\ v \leq 2f-4, & f \leq 2v-4 \end{array}$$

Daţi exemplu de grafuri în care au loc egalităţi în relaţiile de mai sus.

Algoritmi avansaţi

Seminar 7 (săpt. 13 şi 14)

1. *Daţi exemplu de mulţime* $\mathcal{M} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ *din* $\mathbb{R}^2$ *astfel ca diagrama Voronoi asociată lui* $\mathcal{M}$ *să conţină exact patru semidrepte, iar diagrama Voronoi asociată lui* $\mathcal{M} \setminus \{A_1\}$ *să conţină exact cinci semidrepte. Justificaţi alegerea făcută.*

2. *a) Fie o mulţime cu n situri necoliniare. Atunci, pentru diagrama Voronoi asociată au loc inegalităţile*

$$n_v \leq 2n - 5, \quad n_m \leq 3n - 6,$$

unde n_v *este numărul de vârfuri ale diagramei şi* n_m *este numărul de muchii al acesteia.*

b) Câte vârfuri poate avea diagrama Voronoi $\mathcal{D}$ *asociată unei mulţimi cu cinci puncte din* $\mathbb{R}^2$ *ştiind că* $\mathcal{D}$ *are exact cinci semidrepte? Analizaţi toate cazurile. Este atins numărul maxim de vârfuri posibile (*$n_v = 2n-5$*)? Justificaţi!*

3. *Fie punctele* $O = (0,0)$, $A = (\alpha, 0)$, $B = (1,1)$, $C = (2,0)$, $D = (1,-1)$, *unde* $\alpha \in \mathbb{R}$ *este un parametru. Discutaţi, în funcţie de* α, *numărul de muchii de tip semidreaptă ale diagramei Voronoi asociate mulţimii* $\{O, A, B, C, D\}$.

4. *(i) Fie punctul* $A = (1,2)$. *Alegeţi două drepte distincte* d, g *care trec prin* A, *determinaţi dualele* A^*, d^*, g^* *şi verificaţi că* A^* *este dreapta determinată de punctele* d^* *şi* g^*.

(ii) Determinaţi duala următoarei configuraţii: Fie patru drepte care trec printr-un acelaşi punct M. Se aleg două dintre ele; pe fiecare din aceste două drepte se consideră câte un punct diferit de M şi se consideră dreapta determinată de cele două puncte. *Desenaţi ambele configuraţii. Completaţi configuraţia iniţială (adăugând puncte/drepte) astfel încât să obţineţi o configuraţie autoduală (i.e. configuraţia duală să aibă aceleaşi elemente geometrice şi aceleaşi incidenţe ca cea iniţială).*

5. *a) Fie semiplanele* $H : x + y - 3 \leq 0$ *şi* $H' : -2x + y + 1 \leq 0$. *Daţi exemplu de semiplan* H'' *astfel ca intersecţia* $H \cap H' \cap H''$ *să fie un triunghi dreptunghic.*

b) Fie semiplanele H_1, H_2, H_3, H_4 *date de inecuaţiile*

$$H_1 : -y + 1 \leq 0; \qquad H_2 : y - 5 \leq 0; \qquad H_3 : -x \leq 0; \qquad H_4 : x - y + a \leq 0,$$

unde $a \in \mathbb{R}$ *este un parametru. Discutaţi, în funcţie de parametrul* a, *natura intersecţiei* $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4$.

6. *Scrieţi inecuaţiile semiplanelor corespunzătoare şi studiaţi intersecţia acestora, dacă normalele exterioare ale feţelor standard sunt coliniare cu vectorii*

$$(0,1,-1),\ (0,1,0),\ (0,0,-1),\ (0,-1,0),\ (0,-1,-1).$$

7. ***(Suplimentar)*** *Demonstraţi că arborele parţial de cost minim al lui $\mathcal{P}$ este un subgraf al triangulării Delaunay.*