LFA CURS 12

ECHIVALENȚA DINTRE AUTOMATELE STIVĂ ȘI GRAMATICILE INDEPENDENTE DE CONTEXT

Teorema 1 Fie $G = (N, \Sigma, S, P)$ o gramatică independentă de context. Atunci există A_G automat stivă astfel încât $L_\lambda(A_G) = L(G)$.

Demonstrație. Considerăm automatul stivă

$$A_G = (\{q\}, \Sigma, N \cup \Sigma, \delta, q, S, \emptyset), \text{ unde}$$

$$\delta(q, \lambda, A) = \{(q, \alpha) \mid A \to \alpha \in P\}$$

$$\delta(q, a, a) = \{(q, \lambda)\}, \ \forall a \in \Sigma.$$

Arătăm că $\forall w \in \Sigma^*$, $\forall A \in N$, avem:

$$(q_0, w, A) \vdash^{n} (q, \lambda, \lambda) \Leftrightarrow A \underset{s}{\overset{m}{\Rightarrow}} w$$

unde n reprezintă numărul schimbărilor de configurații, iar m reprezintă numărul pașilor în derivarea stângă a lui w din A, $n, m \geq 1$.

"$\Rightarrow$" Inducție după n.

"

$\boxed{n=1}$ Rezultă că $w=\lambda$ și $A\to\lambda\in P$, deci $A\Rightarrow\lambda$.

$\boxed{n\to n+1}$ Presupunem că pentru orice $w\in\Sigma^*$ și $A\in N$ astfel încât $(q,w,A)\vdash^{\leq n}(q,\lambda,\lambda)$, atunci $A\overset{*}{\underset{s}{\Rightarrow}} w$.

Fie $(q,z,A)\vdash^{n+1}(q,\lambda,\lambda)$. Punem în evidență prima mișcare a lui A_G:

$$(q,z,A)\vdash(q,z,z_0A_1z_1\cdots A_mz_m)\vdash^{n}(q,\lambda,\lambda),$$

unde $A\to z_0A_1z_1\cdots A_mz_m\in P$, $m\geq 0$, $z_0,z_1,\dots,z_m\in\Sigma^*$

Din felul în care am definit δ, rezultă că z este de forma $z=z_0y_1z_1\cdots y_mz_m$, unde $(q,y_i,A_i)\vdash^{\leq n}(q,\lambda,\lambda)$, $i=1,\dots,m$

Atunci, conform ipotezei de inducție, $A_i\overset{*}{\underset{s}{\Rightarrow}} y_i$, $i=1,\dots,m$. Rezultă că:

$$A\underset{s}{\Rightarrow} z_0A_1z_1\cdots A_mz_m\overset{*}{\underset{s}{\Rightarrow}} z_0y_1z_1\cdots A_mz_m\overset{*}{\underset{s}{\Rightarrow}}\cdots$$

$$\overset{*}{\underset{s}{\Rightarrow}} z_0y_1z_1\cdots y_mz_m=z,$$ adică $A\overset{*}{\underset{s}{\Rightarrow}} w$.

„$\Leftarrow$" Reciproc, fie $A\overset{m}{\underset{s}{\Rightarrow}} w$. Facem inducție după m.

$\boxed{m=1}$ Rezultă că $A\to w\in P$ și atunci $(q,w,A)\vdash(q,w,w)\vdash^{|w|}(q,\lambda,\lambda)$.

$\boxed{m \to m+1}$ Presupunem că $\forall A \in N, \forall z \in \Sigma^*$ astfel încât $A \overset{m}{\underset{s}{\Rightarrow}} z$, atunci $(q, z, A) \vdash^* (q, \lambda, \lambda)$.

Fie $A \overset{m+1}{\underset{s}{\Rightarrow}} w$. Punem în evidență primul pas al acestei derivări:

$$A \underset{s}{\Rightarrow} z_0 A_1 z_1 \cdots A_k z_k \overset{m}{\underset{s}{\Rightarrow}} w, \quad z_0, z_1, \ldots, z_m \in \Sigma^*, \quad A_1, \ldots, A_m \in N$$

Rezultă că $w = z_0 y_1 z_1 \cdots y_k z_k$, unde $A_i \overset{\leq m}{\underset{s}{\Rightarrow}} y_i$. În conformitate cu ipoteza de inducție, $(q, y_i, A_i) \vdash^* (q, \lambda, \lambda)$, $i = 1, \ldots, m$, deci

$$(q, w, A) \vdash (q, z_0 y_1 z_1 \cdots y_k z_k, z_0 A_1 z_1 \cdots A_k z_k)$$
$$\vdash^{|z_0|} (q, y_1 z_1 \cdots y_k z_k, A_1 z_1 \cdots A_k z_k) \vdash^*$$
$$\vdash^* (q, y_1 z_1 \cdots y_k z_k, y_1 z_1 \cdots A_k z_k) \vdash^* \cdots \vdash^*$$
$$\vdash^* (q, z_k, z_k) \vdash^{|z_k|} (q, \lambda, \lambda).$$

În final, pentru $z \in \Sigma^*$ avem

$(q, z, S) \vdash^* (q, \lambda, \lambda) \Leftrightarrow S \overset{*}{\underset{s}{\Rightarrow}} z$, deci

$z \in L(A_G) \Leftrightarrow z \in L(G)$, adică $L(A_G) = L(G)$

q.e.d.

Teorema 2 Dacă $L = L_\lambda(A)$ pentru un automat stivă A cu vidarea stivei, atunci L este independent de context.

Demonstrație Fie $A = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, \phi)$ un automat stivă.

Construim gramatica $G = (N, \Sigma, S, P)$, unde $N = \{S\} \cup \{[q, X, p] \mid q, p \in Q, X \in \Gamma\}$, iar P constă din producții de forma:

1) $S \to [q_0, z_0, q]$, $\forall q \in Q$

2) $[q, B, q_{m+1}] \to a[q_1, B_1, q_2][q_2, B_2, q_3] \cdots [q_m, B_m, q_{m+1}]$

pentru $\forall q, q_1, q_2, \ldots, q_{m+1} \in Q$, $\forall a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$, $\forall B, B_1, B_2, \ldots, B_m \in \Gamma$ astfel încât $(q_1, B_1 \ldots B_m) \in \delta(q, a, B)$. (Dacă $m=0$ producția $[q, B, q_1] \to a$ este în P).

Observăm că simulăm cu ajutorul producțiilor lui G mișcările lui A, în care înlocuim simbolul B din vârful stivei (pentru producțiile de tipul 2) cu simbolurile $B_1 B_2 \cdots B_m$ astfel încât în vârful stivei apare B_1.

Arătăm că $\forall q, p \in Q$, $\forall B \in \Gamma$, $\forall x \in \Sigma^*$,

$$[q, B, p] \overset{m}{\underset{G}{\Longrightarrow}} x \Longleftrightarrow (q, x, B) \vdash^{n} (p, \lambda, \lambda)$$

unde m reprezintă numărul pașilor derivării din G, iar n reprezintă numărul mișcărilor lui A.

„$\Rightarrow$" Presupunem că $[q, B, p] \underset{G}{\overset{m}{\Longrightarrow}} x$.

Arătăm prin inducție după m că $(q, x, B) \vdash^* (p, \lambda, \lambda)$.

$\boxed{m=1}$ Rezultă că $[q, B, p] \to x \in P$, deci $x \in \Sigma \cup \{\lambda\}$, $(p, \lambda) \in \delta(q, x, B)$ și $(q, x, B) \vdash (p, \lambda, \lambda)$.

$\boxed{m \to m+1}$ Presupunem că $\forall q, p \in Q$, $\forall B \in \Gamma$, $\forall x \in \Sigma^*$ astfel încât $[q, B, p] \underset{G}{\overset{\leq m}{\Longrightarrow}} x$, atunci $(q, x, B) \vdash^* (q, \lambda, \lambda)$.

Fie $[q, B, p] \underset{G}{\overset{m+1}{\Longrightarrow}} x$. Punem în evidență primul pas al derivării, în care se aplică o producție de tipul 2). Atunci:

$$[q, B, p] \Rightarrow a[q_1, B_1, q_2] \cdots [q_j, B_j, q_{j+1}] \overset{m}{\Longrightarrow} x,$$

unde $q_{j+1} = p$ și $(q_1, B_1 \dots B_j) \in \delta(q, a, B)$, iar $x = a x_1 \cdots x_j$, unde $[q_i, B_i, q_{i+1}] \overset{\leq m}{\Longrightarrow} x_i$, $i = 1, \dots, j$.

Din ipoteza de inducție, $(q_i, x_i, B_i) \vdash^* (q_{i+1}, \lambda, \lambda)$, $i = 1, \dots, j$. Dacă inserăm $B_{i+1} \cdots B_j$ la capătul stivei în secvența de mai sus, obținem:

$(q_i, x_i, B_i B_{i+1} \dots B_j) \vdash^{*} (q_{i+1}, \lambda, B_{i+1} \dots B_j)$.

Atunci:

$(q, x, B) \vdash (q_1, x_1 \dots x_j, B_1 \dots B_j) \vdash^{*} (q_2, x_2 \dots x_j, B_2 \dots B_j)$

$\vdash^{*} \dots \vdash^{*} (q_{j+1}, \lambda, \lambda) = (p, \lambda, \lambda)$.

„$\Leftarrow$" Presupunem că $(q, x, B) \vdash^{n} (p, \lambda, \lambda)$.

Arătăm prin inducție după n că

$[q, B, p] \overset{*}{\Rightarrow} x$.

$\boxed{n=1}$. Rezultă că $(p, \lambda) \in \delta(q, x, B)$, $x \in \Sigma \cup \{\lambda\}$.

Atunci $[q, B, p] \to x \in P$, adică $[q, B, p] \Rightarrow x$.

$\boxed{n \to n+1}$ Presupunem că $\forall q, p \in Q$, $\forall B \in N$, $\forall x \in \Sigma^{*}$ astfel încât $(q, x, B) \vdash^{\leq n} (p, \lambda, \lambda)$, atunci $[q, B, p] \overset{*}{\Rightarrow} x$.

Fie $(q, x, B) \vdash^{n+1} (p, \lambda, \lambda)$. Atunci $x = ay$ și

$(q, ay, B) \vdash (q_1, y, B_1 \dots B_t) \vdash^{n} (p, \lambda, \lambda)$.

Șirul y poate fi scris $y = y_1 \dots y_t$, unde y_j are efectul de a extrage din vârful stivei pe B_j, posibil după o secvență mai lungă de mișcări. Altfel spus, y_1 este prefixul lui y care face ca stiva să conțină, după ce y_1 a fost citit din intrare, $t-1$ simboluri. Fie y_2 prefixul lui $y_2 \dots y_t$ care face ca stiva să conțină $t-2$ simboluri. ... În general, B_j rămâne în stivă neschimbat până când $y_1 \dots y_{j-1}$ este citit din intrare.

Atunci există stările $q_2, q_3, \dots, q_{t+1}$, $q_{t+1} = p$, astfel încât:

$$(q_j, y_j, B_j) \overset{\leq n}{\vdash} (q_{j+1}, \lambda, \lambda), \ 1 \leq j \leq t.$$

Din ipoteza de inducție rezultă:

$$[q_j, B_j, q_{j+1}] \overset{*}{\Rightarrow} y_j, \ 1 \leq j \leq t.$$

Atunci:

$$[q, B, p] \Rightarrow a[q_1, B_1, q_2][q_2, B_2, q_3] \dots [q_t, B_t, q_{t+1}]$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} a y_1 [q_2, B_2, q_3] \dots [q_t, B_t, q_{t+1}] \overset{*}{\Rightarrow} \dots \overset{*}{\Rightarrow}$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} a y_1 y_2 \dots y_t = x$$

Completăm demonstrația pornind de la echivalența

$$[q_0, z_0, p] \overset{*}{\Rightarrow} x \Leftrightarrow (q_0, x, z_0) \overset{*}{\vdash} (p, \lambda, \lambda)$$

care, împreună cu producția $S \to [q_0, z_0, p]$ conduce la:

$$S \overset{*}{\Rightarrow} x \Leftrightarrow (q_0, x, z_0) \overset{*}{\vdash} (p, \lambda, \lambda), \text{ adică}$$

$$x \in L(G) \Leftrightarrow x \in L_\lambda(A), \text{ deci}$$

$$L(G) = L_\lambda(A)$$

q.e.d.

EXEMPLE

1) Fie gramatica cu producțiile

$S \to TR$
$R \to +TR$
$R \to *TR$
$R \to \lambda$
$T \to n$

Automatul stivă corespunzător este:

$\lambda, S | TR$
$\lambda, R | +TR$
$\lambda, R | *TR$
$\lambda, R | \lambda$
$\lambda, T | n$
$+, + | \lambda$
$*, * | \lambda$
$n, n | \lambda$

2) Fie $A = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \{X, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \phi)$,
unde δ este definită prin:

$\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}$, $\delta(q_1, 1, X) = \{(q_1, \lambda)\}$
$\delta(q_0, 0, X) = \{(q_0, XX)\}$ $\delta(q_1, \lambda, X) = \{(q_1, \lambda)\}$
$\delta(q_0, 1, X) = \{(q_1, \lambda)\}$ $\delta(q_1, \lambda, Z_0) = \{(q_1, \lambda)\}$

Construim $G = (N, \Sigma, S, P)$, unde

$N = \{S, [q_0, X, q_0], [q_0, X, q_1], [q_1, X, q_0], [q_1, X, q_1]$
$[q_0, Z_0, q_0], [q_0, Z_0, q_1], [q_1, Z_0, q_0], [q_1, Z_0, q_0]\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

Vom introduce în P mai întâi producțiile:

$S \to [q_0, Z_0, q_0]$
$S \to [q_0, Z_0, q_1]$

Adăugăm apoi producțiile de tipul 2) din Teorema 2).

$[q_0, z_0, q_0] \to 0[q_0, X, q_0][q_0, z_0, q_0] \in P$

$[q_0, z_0, q_0] \to 0[q_0, X, q_1][q_1, z_0, q_0] \in P$

pentru $(q_0, Xz_0) \in \delta(q_0, 0, z_0)$.

Pentru $[q_0, z_0, q_1]$ și $\delta(q_0, 0, z_0) = \{(q_0, Xz_0)\}$ introducem

$[q_0, z_0, q_1] \to 0[q_0, X, q_0][q_0, z_0, q_1] \in P$

$[q_0, z_0, q_1] \to 0[q_0, X, q_1][q_1, z_0, q_1] \in P$

Celelalte producții ale lui P sunt:

1) pentru $\delta(q_0, 0, X) = \{(q_0, XX)\}$:

$[q_0, X, q_0] \to 0[q_0, X, q_0][q_0, X, q_0]$

$[q_0, X, q_0] \to 0[q_0, X, q_1][q_1, X, q_0]$

$[q_0, X, q_1] \to 0[q_0, X, q_0][q_0, X, q_1]$

$[q_0, X, q_1] \to 0[q_0, X, q_1][q_1, X, q_1]$

2) $[q_0, X, q_1] \to 1$, pentru $\delta(q_0, 1, X) = \{(q_1, \lambda)\}$

3) $[q_1, z_0, q_1] \to \lambda$, pentru $\delta(q_1, \lambda, z_0) = \{(q_1, \lambda)\}$

4) $[q_1, X, q_1] \to \lambda$, pentru $\delta(q_1, \lambda, X) = \{(q_1, \lambda)\}$

5) $[q_1, X, q_1] \to 1$, pentru $\delta(q_1, 1, X) = \{(q_1, \lambda)\}$

Observăm că nu există producții pentru neterminalii $[q_1, X, q_0]$, $[q_1, z_0, q_0]$, deci vom șterge toate producțiile ce conțin în membrul drept acești neterminali. Rezultă în final producțiile:

$S \to [q_0, z_0, q_1]$

$[q_0, z_0, q_1] \to 0[q_0, X, q_1][q_1, z_0, q_1]$

$[q_0, X, q_1] \to 0[q_0, X, q_1][q_1, X, q_1]$

$[q_0, X, q_1] \to 1$

$[q_1, z_0, q_1] \to \lambda$

$[q_1, X, q_1] \to \lambda$

$[q_1, X, q_1] \to 1$

<u>Teorema 3</u> Fie $L \in \mathcal{L}_{CF}$ și $R \in \mathcal{L}_{REG}$. Atunci $L \cap R \in \mathcal{L}_{CF}$.

<u>Demonstrație</u> Fie $L = L(M)$ unde M este un automat stivă, $M=(Q_M, \Sigma, \Gamma, \delta_M, q_0, z_0, F_M)$, fie AFD $A=(Q_A, \Sigma, \delta_A, p_0, F_A)$ astfel încât $L(A)=R$.

Construim automatul stivă M' pentru $L \cap R$ care va "rula" în paralel pentru M și A pentru aceeași intrare $x \in \Sigma^*$.

$$M' = (Q_A \times Q_M, \Sigma, \Gamma, \delta, [p_0, q_0], z_0, F_A \times F_M)$$

unde δ este definită prin:

$([p', q'], \gamma) \in \delta([p, q], a, X) \iff \delta_A(p, a) = p'$ și $(q', \gamma) \in \delta_M(q, a, X)$. În cazul în care $a = \lambda$, atunci $p' = p$.

Demonstrăm prin inducție după i că

$$([p_0, q_0], w, z_0) \vdash^{i}_{M'} ([p, q], \lambda, \gamma) \iff$$

$$(q_0, w, z_0) \vdash^{i}_{M} (q, \lambda, \gamma) \text{ și } \delta(p_0, w) = p. \quad (1)$$

"$\Rightarrow$"

$\boxed{i=0}$ $p = p_0$, $q = q_0$, $\gamma = z_0$, $w = \lambda$, rezultă imediat

$\boxed{i \to i+1}$ Presupunem (1) adevărată pentru i.

Fie $([p_0, q_0], xa, z_0) \vdash^{i}_{M'} ([p', q'], a, \beta) \vdash_{M'} ([p, q], \lambda, \gamma)$

unde $w = xa$, $a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$ și $([p_0, q_0], x, z_0) \vdash^{i}_{M'} ([p', q'], \lambda, \beta)$

Din ipoteza de inducție:

$\delta_A(p_0, x) = p'$ şi $(q_0, x, z_0) \vdash^{i}_{M} (q', \lambda, \beta)$.

Din $([p', q'], a, \beta) \vdash_{M'} ([p, q], \lambda, \gamma)$ şi definiţia lui δ rezultă $\delta_A(p', a) = p$, $(q', a, \beta) \vdash_M (q, \lambda, \gamma)$.

Astfel, $\delta_A(p_0, w) = p$ şi $(q_0, w, z_0) \vdash^{i+1}_{M} (q, \lambda, \gamma)$

„$\Leftarrow$" Se demonstrează similar ca mai sus.

<u>Exemple</u> 1) Fie limbajul

$L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

Să se arate că L nu este independent de context.

Presupunem că $L \in \mathcal{L}_{CF}$.

În conformitate cu Teorema 3,

$L \cap a^+b^+a^+b^+ \in \mathcal{L}_{CF}$, adică

$\{a^i b^j a^i b^j \mid i, j \geq 1\} \in \mathcal{L}_{CF}$

Utilizând Lema de pompare se arată că $\{a^i b^j a^i b^j \mid i, j \geq 1\} \notin \mathcal{L}_{CF}$, contradicţie.

2) Limbajul $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$ nu este independent de context.

<u>Soluţie</u>. Presupunem că limbajul de mai sus, să îl notăm cu L_2, est independent de context.

Atunci $L_2 \cap a^+b^+c^+ = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ care nu este independent de context, contradicţie