➢ Probleme CC seminar_1:

❖ Problema 1
Se dă X un număr natural scris în baza 1.
Să se deplaseze X spre dreapta cu 4 celule.

Exemple:
Pentru **X = 5**, banda arată astfel:
- La început:

…	B	B	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	B	B	...

- La final:

…	B	B	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	B	B	...

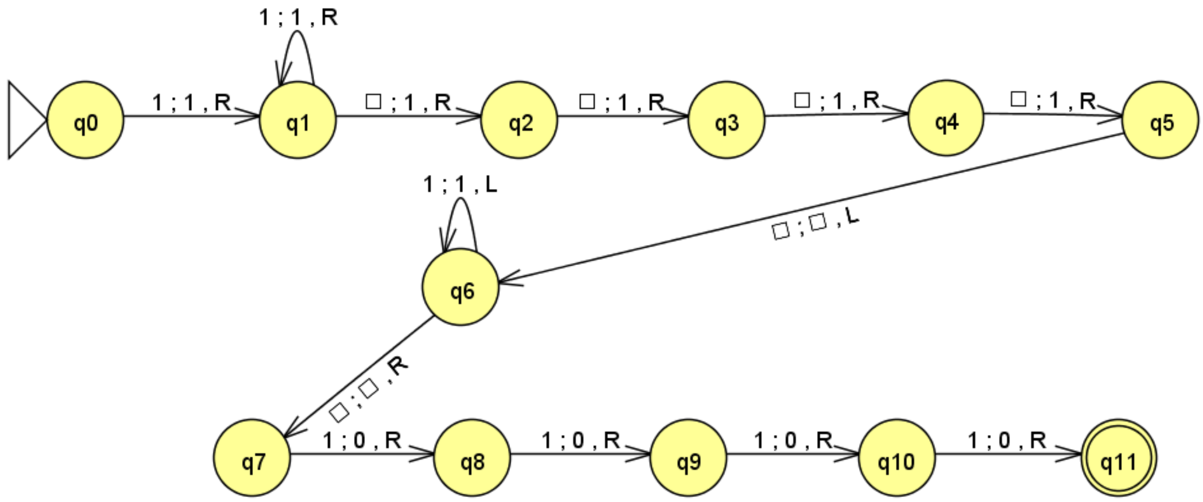
Pentru **X = 2**, banda arată astfel:
- La început:

…	B	B	**1**	**1**	**1**	B	B	...

- La final:

…	B	B	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	B	B	...

Pas 1: **Cât timp** citim 1, scriem 1, pas dreapta.
Pas 2: **(De 4 ori)** citim B, scriem 1, pas dreapta.
Pas 3: Citim B, scriem B, pas stânga.
Pas 4: **Cât timp** citim 1, scriem 1, pas stânga.
Pas 5: Citim B, scriem B, pas dreapta.
Pas 6: **(De 4 ori)** citim 1, scriem 0, pas dreapta.



Obs: Pentru simplitate, la complexități am *aproximat* lungimea inițială a benzii (X+1 simboluri de 1) cu valoarea X.

Complexitate spațiu: (numărul de celule ocupate pe bandă la finalul problemei)
$C.S. = X + 4 => \boldsymbol{O}(\boldsymbol{X})$

Complexitate timp: (am însumat complexitățile pentru cei 6 pași din algoritm)
$C.T. = X + 4 + 1 + (4 + X) + 1 + 4 = 2X + 14 => \boldsymbol{O}(\boldsymbol{X})$

➢ Probleme CC seminar_2:

❖ Problema 2

Se dau X și Y numere naturale scrise în baza 1 și separate prin simbolul 0.
Să se calculeze funcția $|X - Y|$.
(Să se adauge la finalul benzii simbolul 2, apoi rezultatul $|X - Y|$ scris în baza 1.)

Exemple:

Pentru $\boldsymbol{X = Y = 5}$, banda arată astfel:
- La început:

…	B	1	1	1	1	1	**0**	1	1	1	1	1	B	B	B	...	

- La final:

…	B	a	a	a	a	a	**0**	b	b	b	b	b	**2**	1	B	...	

Pentru $\boldsymbol{X = 5, Y = 2}$, banda arată astfel:
- La început:

…	B	1	1	1	1	1	**0**	1	1	B	B	B	B	B	B	...	

- La final:

…	B	a	a	a	1	1	**0**	b	b	**2**	1	1	1	1	B	...	

Pentru $\boldsymbol{X = 2, Y = 5}$, banda arată astfel:
- La început:

…	B	1	1	**0**	1	1	1	1	1	B	B	B	B	B	B	...	

- La final:

…	B	a	a	**0**	b	b	1	1	1	**2**	1	1	1	1	B	...	

Pas 1 (*Comparăm* numerele X și Y, marcând alternativ câte o cifră din X și apoi din Y):
- **Citim un 1 din X**, scriem **a**, pas dreapta (schimbăm starea)
  SAU (dacă nu mai există 1 în X și citim 0) **sărim la pas 2 ($\boldsymbol{X \le Y}$).**
- *Cât timp* citim 1, scriem 1, pas dreapta.
- Citim 0, scriem 0, pas dreapta (schimbăm starea).
- *Cât timp* citim b, scriem b, pas dreapta.
- **Citim un 1 din Y**, scriem **b**, pas stânga (schimbăm starea)
  SAU (dacă nu mai există 1 în Y și citim B) **sărim la pas 3 ($\boldsymbol{X > Y}$).**
- *Cât timp* citim 0, 1 sau b, nu modificăm banda (scriem simbolul citit), pas stânga.
- Citim a, scriem a, pas dreapta (schimbăm starea).
- ***Repetăm*** **pas 1.**

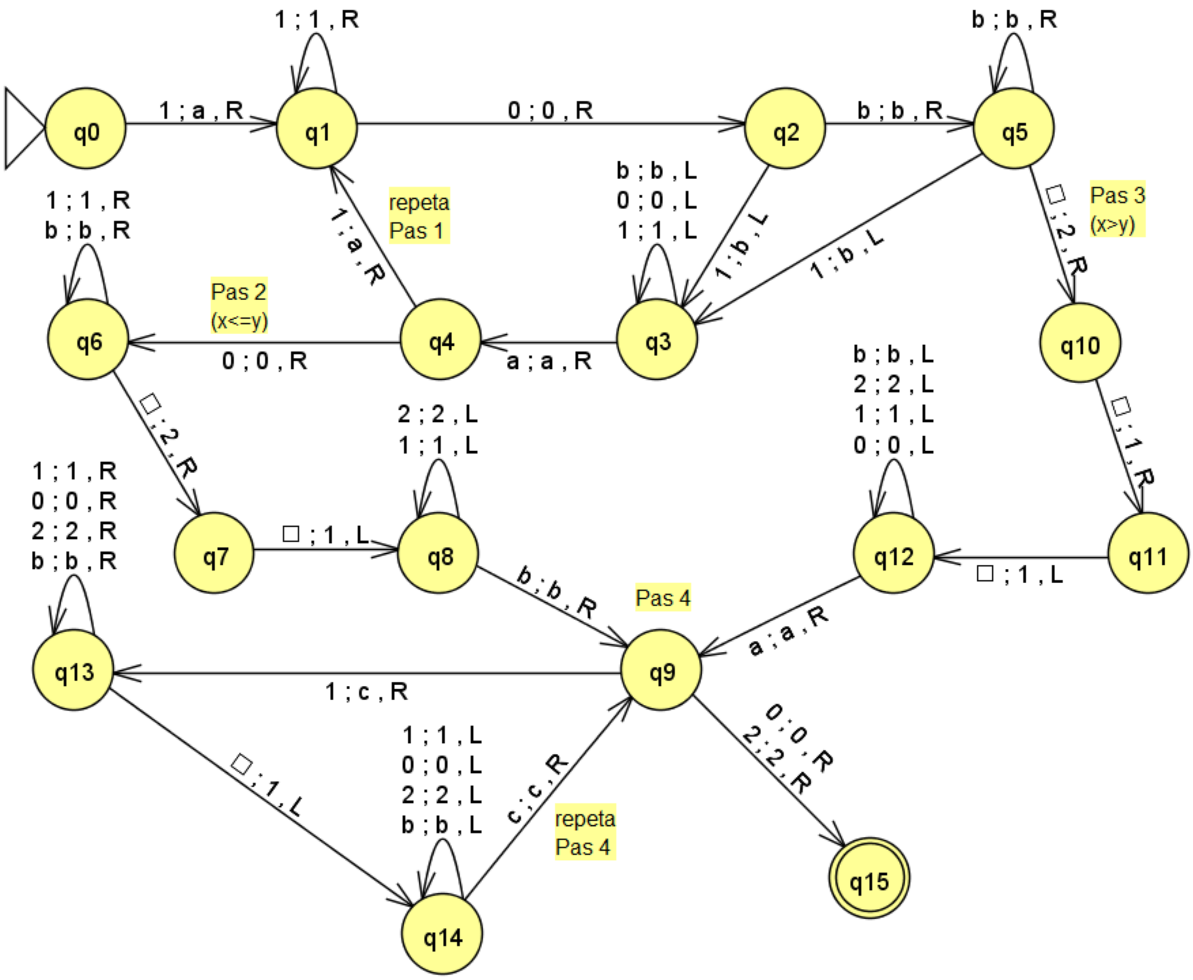
Pas 2 (Numărul X este complet marcat, deci $\boldsymbol{X \le Y}$. Mergem la finalul benzii și scriem delimitatorul 2 și 1-ul în plus pentru scrierea specială a numerelor în baza 1.)
- Citim 0, scriem 0, pas dreapta.
- *Cât timp* citim 1 sau b, nu modificăm banda, pas dreapta.
- Citim B, **scriem 2**, pas dreapta.
- Citim B, **scriem 1**, pas stânga.
- *Cât timp* citim 1 sau 2, nu modificăm banda, pas stânga.
- Citim b, scriem b, pas dreapta.
- **Sărim la pas 4.** (Vom copia la finalul benzii unitățile nemarcate din Y.)

Pas 3 (Numărul Y este complet marcat, deci $X > Y$. Mergem la finalul benzii și scriem delimitatorul 2 și 1-ul în plus pentru scrierea specială a numerelor în baza 1. Apoi scriem încă un 1 corespunzător unității din X care a fost deja marcată cu a la pas 1.)

- Citim B, **scriem 2**, pas dreapta.
- Citim B, **scriem 1**, pas dreapta.
- Citim B, **scriem 1**, pas stânga.
- *Cât timp* citim 0, 1, 2 sau b, nu modificăm banda, pas stânga.
- Citim a, scriem a, pas dreapta.
- **Sărim la pas 4.** (Vom copia la finalul benzii unitățile nemarcate din X.)

Pas 4 (*Copiem* la finalul benzii cele $Y - X$ unități rămase nemarcate la finalul numărului Y sau cele $X - Y - 1$ unități rămase nemarcate la finalul numărului X după terminarea primului pas.)

- **Citim un 1**, scriem **c**, pas dreapta
  SAU (dacă toate unitățile sunt deja marcate cu c)
  citim 0 sau 2, nu modificăm banda, pas dreapta => **STOP în stare finală.**
- *Cât timp* citim 0, 1, 2 sau b, nu modificăm banda, pas dreapta.
- Citim B, **scriem 1**, pas stânga.
- *Cât timp* citim 0, 1, 2 sau b, nu modificăm banda, pas stânga.
- Citim c, scriem c, pas dreapta.
- ***<u>Repetăm</u>*** **pas 4.**



Complexitate spațiu:
$C.S. = X + Y + |X - Y| => \boldsymbol{O}(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y})$
(complexitate spațiu *liniară* în funcție de lungimea inițială a benzii, adică a datelor de intrare)

Complexitate timp:
- **Pas1** este ***recursiv***, se repetă de $\mathbf{min}\{\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\}$ ori (până cel mai mic dintre numere ajunge să fie complet marcat), iar distanța parcursă dus-întors este constantă și aproximativ egală cu $\mathbf{2}\boldsymbol{X}$.
- La **Pas2** parcurgem banda spre dreapta de la delimitatorul 0 până la final unde adăugăm două simboluri (facem aproximativ $\boldsymbol{Y}$ pași), apoi parcurgem banda spre stânga de la final sărind peste partea rămasă nemarcată în Y (facem aproximativ $\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}$ pași).
- La **Pas3** parcurgem banda spre dreapta de la final unde adăugăm trei simboluri (facem **număr constant** de pași), apoi parcurgem banda spre stânga de la final sărind peste Y și peste partea rămasă nemarcată în X (facem aproximativ $Y + (X - Y) = \boldsymbol{X}$ pași).
- Dar după Pas1 se va aplica **fie Pas2, fie Pas3**, deci la complexitate considerăm $\mathbf{max}\{\boldsymbol{Pas}\mathbf{2}, \boldsymbol{Pas}\mathbf{3}\}$.
- **Pas4** este ***recursiv***, se repetă de aproximativ $|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}|$ ori (pentru fiecare unitate pe care o copiem la finalul benzii), iar distanța parcursă dus-întors este constantă și aproximativ egală cu cea parcursă spre stânga fie la Pas2, fie la Pas3.
- ***Concluzie:***
  $C.T. = \min\{X, Y\} * (2X) + \max\{Y + (Y - X), X\} + |X - Y| * (2 * \max\{Y - X, X\})$
  Observăm că funcțiile dominante sunt cele de la pașii recursivi 1 și 4.
  - Dacă $X \leq Y$, avem $X * (2X) + (Y - X) * 2(Y - X) = 2 * (X^2 + (Y - X)^2)$
  - Dacă $X > Y$, avem $Y * (2X) + (X - Y) * (2X) = 2X * (Y + X - Y) = 2X^2$.

  Putem spune că algoritmul are complexitatea timp $\boldsymbol{O}(\boldsymbol{X}^\mathbf{2} + (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X})^\mathbf{2})$, dar putem observa și că are complexitate timp *pătratică* în funcție de lungimea inițială a benzii, adică $\boldsymbol{O}((\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y})^\mathbf{2})$.

❖ Problema 3
Se dă X număr natural scris în baza 1.
Să se accepte intrarea dacă X este o putere a lui 2 (adică $X = 2^k, k \geq 0$).

Obs:
acceptare input = ne oprim în stare finală
respingere input = ne oprim în stare nefinală

Exemple:
Pentru $\boldsymbol{X} = \mathbf{8}$, banda arată astfel:
- La început:

…	B	1	1	1	1	1	1	1	1	B	...

- Apoi (marcăm 1-ul special;
și cât timp e posibil, pentru fiecare doi de 1, îl marcăm doar pe ***primul din pereche***):

…	B	a	a	1	a	1	a	1	a	1	B	...
…	B	a	a	a	a	1	a	a	a	1	B	...
…	B	a	a	a	a	a	a	a	a	1	B	...

- La final *(X>0* este putere a lui 2 <=> *X* împărțit repetat la 2 ajunge la valoarea impară =1, adică ***acceptăm X*** dacă avem **doar *a*-uri** pe bandă*)*:

…	B	a	a	a	a	a	a	a	a	B	...

Pentru $\boldsymbol{X} = \mathbf{6}$, banda arată astfel:
- La început:

…	B	1	1	1	1	1	1	1	B	...

- Apoi (marcăm 1-ul special;
și cât timp e posibil, pentru fiecare doi de 1, îl marcăm doar pe ***primul din pereche***):

…	B	a	a	1	a	1	a	1	B	...
…	B	a	a	a	a	1	a	a	B	...

- La final *(X>0* nu este putere a lui 2 <=> *X* împărțit repetat la 2 ajunge la o valoare impară ≠ 1, adică ***respingem X*** dacă avem **un *a* la final** și **în rest cel puțin un *1***):

…	B	a	a	a	a	1	a	a	B	...

Pas 1:
- Citim un 1, scriem 1, pas dreapta (unitatea specială pentru scrierea în baza 1).
- Dacă **citim B**, scriem B, pas stânga => (respingem $X = 0$) **STOP în stare nefinală.**
  SAU Dacă **citim 1**, scriem 1, pas stânga => ($X > 0$) **Sărim la pas 2**.

Pas 2 (Împărțim numărul curent de 1-uri de pe bandă la 2, marcând doar primul 1 din fiecare pereche de două unități nemarcate.)
- *Cât timp* citim a, nu modificăm banda, pas dreapta.
- **Citim un 1** *(primul din pereche)***, scriem a**, pas dreapta
  SAU (dacă deîmpărțitul a fost ***nr par*** citim B) **sărim la pas 3.**
- *Cât timp* citim a, nu modificăm banda, pas dreapta.
- **Citim un 1** *(al doilea din pereche)***, scriem 1**, pas dreapta
  SAU (dacă deîmpărțitul a fost ***nr impar*** citim B) **sărim la pas 4.**
- ***<u>Repetăm</u>* pas 2.**
  [* recursivitate internă (Pas2) = repetăm "scăderea" a două unități din numărul curent]

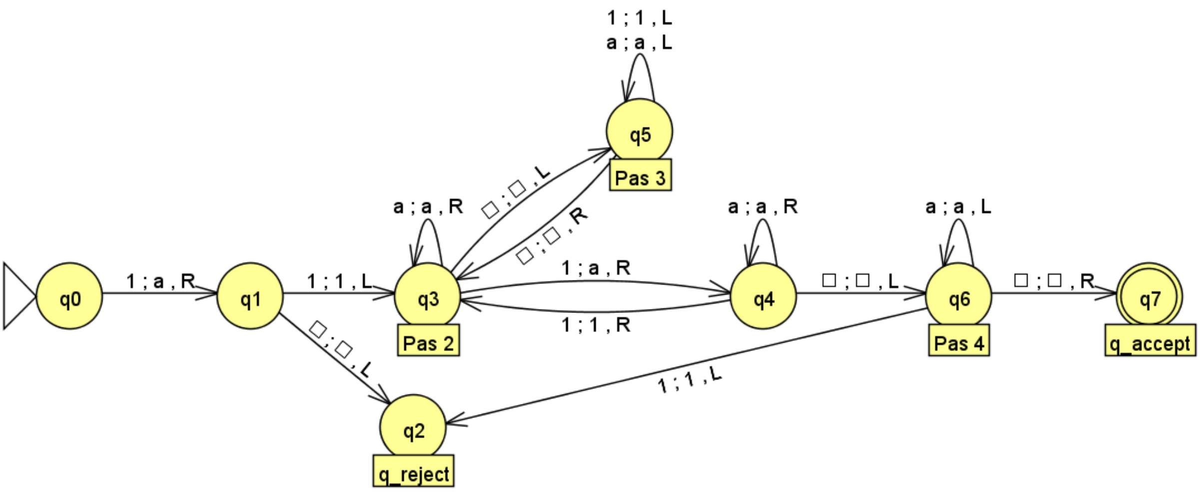
Pas 3 (Parcurgem toată banda spre stânga pentru a face apoi încă o împărțire la 2.)
- Citim B, scriem B, pas stânga.
- *Cât timp* citim a sau 1, nu modificăm banda, pas stânga.
- Citim B, scriem B, pas dreapta.
- **Sărim la pas 2.**
  [** recursivitate externă (Pas2+Pas3) = repetăm împărțirea numărului curent la 2]

Pas 4 (Verificăm dacă deîmpărțitul a fost =1 sau o altă valoare impară ≠1.)
- Citim B, scriem B, pas stânga.
- *Cât timp* citim a, scriem a, pas stânga.
- **Dacă citim 1**, scriem 1, pas dreapta => **STOP în stare nefinală** *(respingem X)*
  (Dacă banda încă conține unități de 1 nemarcate cu a
  => ultimul deîmpărțit nr impar ≠1, deci *X* nu este putere a lui 2.)

  SAU Dacă citim B, scriem B, pas dreapta => **STOP în stare finală** *(acceptăm X)*
  (Dacă banda este complet marcată cu a-uri
  => ultimul deîmpărțit nr impar = 1, deci *X* este putere a lui 2.)

Complexitate spațiu:
$C.S. = X => \boldsymbol{O(X)}$ (nu am folosit spațiu suplimentar față de input)

Complexitate timp:
- La **Pas1** facem un **număr constant** de pași pe bandă.
- [**] *Recursivitatea externă* (care conține pașii 2 și 3) se repetă de maxim $\boldsymbol{\log_2 X}$ ori (pentru că de maxim atâtea ori putem să-l împărțim pe X la 2 până să ajungem la un număr impar).
    - [*] *La recursivitatea internă* (**Pas2** executat recursiv) observăm că, indiferent câți de 1 sunt pe bandă, pentru a împărți numărul curent la 2 facem o parcurgere completă spre dreapta a benzii (deci facem aproximativ $\boldsymbol{X}$ pași pe bandă).
    - La **Pas3** facem o parcurgere completă spre stânga a benzii (tot aproximativ $\boldsymbol{X}$ pași).
- La **Pas4** mai facem o parcurgere spre stânga a benzii pentru a verifica dacă mai conține vreun simbol de 1 sau este complet marcată cu a-uri (facem maxim $\boldsymbol{X}$ pași).
- ***Concluzie:***
  $C.T. = \log_2(X) * (X + X) + X => \boldsymbol{O(X * log(X))}$



Obs: La complexitatea pasului 2 recursiv [*] am fi putut calcula și altfel. Dacă presupunem că numărul curent este n (deci avem n simboluri de 1 aflate la distanțe egale pe bandă), pentru a-l împărți la 2 („scăzând" repetat câte două unități) vom repeta Pas2 de $\frac{n}{2}$ ori și la fiecare repetare vom face câte $2 * d$ pași pe bandă, unde $d = \frac{X}{n}$ este distanța dintre două simboluri de 1 consecutive. Rezultă complexitatea timp totală a recursivității interne este $\frac{n}{2} * \left(2 * \frac{X}{n}\right) = \boldsymbol{X}$.

➢ Probleme CC seminar_3:

❖ Problema 4

Se dau (pe banda B1) X și Y numere naturale scrise în baza 2, separate prin simbolul #.
Să se calculeze (pe banda B2) funcția $X + Y$ (rezultatul scris tot în baza 2).

Obs: Dacă avem nevoie, putem folosi și alte benzi auxiliare, număr finit.

Exemplu de adunare în baza 2:

X	=	**B**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	
Y	=	**B**	**B**	**B**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	
u	=	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	*(unitate ținută minte)*
S	=	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	(suma X+Y)

- La început benzile arată astfel:
B1: …B 1 1 1 0 1 0 1 1 1 0 0 1 0 # 1 0 0 1 1 1 1 0 1 0 0 B… (input: ***X#Y***)
B2: …B B B… (vom calcula rezultatul ***X+Y***)
B3: …B B B… (bandă auxiliară)

- La final benzile arată astfel:
B1: …B B 1 1 1 0 1 0 1 1 1 0 0 1 0 # 1 0 0 1 1 1 1 0 1 0 0 B… (input: ***X#Y***)
B2: …B **1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 1 1 0** B… (rezultatul ***X+Y***)
B3: …B B B B 1 0 0 1 1 1 1 0 1 0 0 B… (copia lui ***Y***)

Pas 1 (Pe banda B1 *parcurgem numărul X* spre dreapta până la simbolul #.)
- *Cât timp* pe B1 citim 1 sau 0, nu modificăm, pas dreapta
  (și pe benzile B2 și B3 staționăm pe B).
- Pe B1 citim #, scriem #, pas dreapta (schimbăm starea).

Pas 2 (*Copiem numărul Y* de pe banda B1 pe banda B3.)
- *Cât timp* pe B1 citim 1 sau 0, nu modificăm, pas dreapta
  și pe B3 citim B, scriem simbolul citit de pe B1, pas dreapta
  (și pe B2 staționăm pe B).
- Pe B1 citim B, scriem B, pas stânga (și pe B2 și B3 staționăm pe B).

Pas 3 (Pe banda B1 *parcurgem numărul Y* spre stânga până la simbolul #.)
- *Cât timp* pe B1 citim 1 sau 0, nu modificăm, pas stânga
  (și pe benzile B2 și B3 staționăm pe B).
- Pe B1 citim #, scriem #, pas stânga **și** pe B3 citim B, scriem B, stânga.
  (***Obs:*** Pe B1 și B3 capetele de citire/scriere sunt pe ultimele cifre din X și Y.)

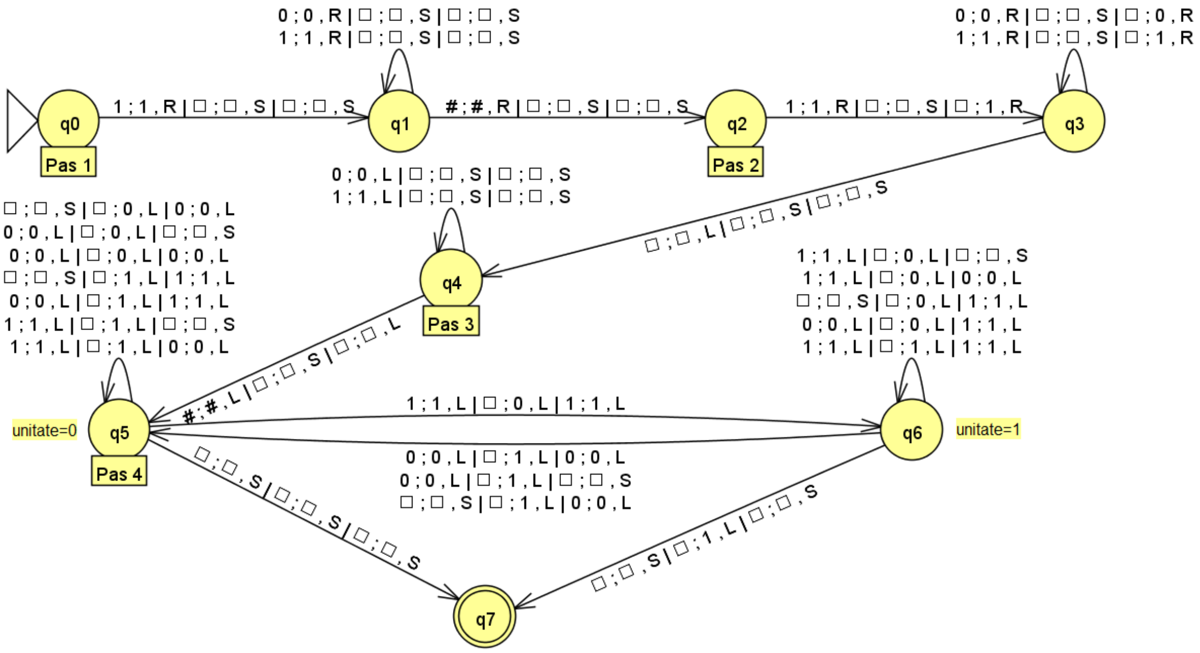
Pas 4 (*Adunăm modulo 2* numărul *X* de pe banda B1 cu numărul *Y* de pe banda B3 și scriem rezultatul *X*+*Y* pe banda B2.)
Observații valabile pentru pas4:
- Pentru adunare folosim ***două stări*** în funcție de *valoarea unității ținute minte* (**0 sau 1**).
- Pe toate cele 3 benzi facem simultan câte un **pas la stânga** (dar dacă pe B1 sau B3 citim **B**, atunci **staționăm** pe acea bandă).
- Pe B1 și B3 nu le modificăm (scriem simbolul citit).
- Pe B2 **citim B** și scriem unitatea calculată din rezultat (conform tranzițiilor detaliate mai jos).

Caz 1: Dacă suntem în starea pentru *unitate = 0*.
Caz 1.1: Tranzițiile de pe *bucla* stării pentru *unitate = 0*:
- Dacă pe B1 citim **1** și pe B3 citim **0 sau B**, atunci pe B2 scriem **1**.
- Dacă pe B1 citim **0 sau B** și pe B3 citim **1**, atunci pe B2 scriem **1**.
- Dacă pe B1 citim **0** și pe B3 citim **0**, atunci pe B2 scriem **0**.
- Dacă pe B1 citim **0** și pe B3 citim **B**, atunci pe B2 scriem **0**.
- Dacă pe B1 citim **B** și pe B3 citim **0**, atunci pe B2 scriem **0**.
- Dacă pe B1 citim **B** și pe B3 citim **B**, atunci pe B2 scriem **B**. => **STOP în stare finală.**

Caz 1.2: Tranzițiile de la starea pentru *unitate* = *0* către starea pentru *unitate = 1*:
- Dacă pe B1 citim **1** și pe B3 citim **1**, atunci pe B2 scriem **0**.

Caz 2: Dacă suntem în starea pentru *unitate = 1*.
Caz 2.1: Tranzițiile de pe *bucla* stării pentru *unitate = 1*:
- Dacă pe B1 citim **1** și pe B3 citim **1**, atunci pe B2 scriem **1**.
- Dacă pe B1 citim **0 sau B** și pe B3 citim **1**, atunci pe B2 scriem **0**.
- Dacă pe B1 citim **1** și pe B3 citim **0 sau B**, atunci pe B2 scriem **0**.

Caz 2.2: Tranzițiile de la starea pentru *unitate* = *1* către starea pentru *unitate = 0*:
- Dacă pe B1 citim **0** și pe B3 citim **0**, atunci pe B2 scriem **1**.
- Dacă pe B1 citim **0** și pe B3 citim **B**, atunci pe B2 scriem **1**.
- Dacă pe B1 citim **B** și pe B3 citim **0**, atunci pe B2 scriem **1**.
- Dacă pe B1 citim **B** și pe B3 citim **B**, atunci pe B2 scriem **1**. => **STOP în stare finală.**



Obs: Complexitățile spațiu și timp trebuie exprimate în funcție de *lungimea pe bandă a datelor de intrare*, deci vom nota $\boldsymbol{n} = len\left(X_{(2)}\right) = \log_2(X)$ și $\boldsymbol{k} = len\left(Y_{(2)}\right) = \log_2(Y)$, unde $X_{(2)}$ și $Y_{(2)}$ sunt scrierile în baza 2 ale numerelor X și Y.

Complexitate spațiu:
Observăm că numărul $(X+Y)_{(2)}$ poate avea cu maxim o cifră mai mult decât cel mai mare dintre numerele $X_{(2)}$ și $Y_{(2)}$, deci $len((X+Y)_{(2)}) = \mathbf{max}\{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{k}\} + 1$.

$C.S. = (n+k) + \max\{n,k\} + k \;\; => \boldsymbol{O(n+k)}$ (complexitate spațiu *liniară* în funcție de lungimea inputului)

Complexitate timp:

- La **Pas1** facem ***n*** pași spre dreapta pentru parcurgerea numărului *X*.
- La **Pas2** facem ***k*** pași spre dreapta pentru copierea numărului *Y*.
- La **Pas3** facem ***k*** pași spre stânga pentru parcurgerea numărului *Y*.
- La **Pas4** facem aproximativ $\mathbf{max}\{\boldsymbol{n},\boldsymbol{k}\}$ pași spre stânga pentru a calcula $(X+Y)_{(2)}$.
- ***Concluzie:***
  $C.T. = n + k + k + \max\{n,k\} => \boldsymbol{O(n+k)}$ (complexitate timp *liniară* în funcție de lungimea inputului)

❖ Problema 5

Se dă (pe banda B1) *X* număr natural nenul scris în baza 1 (fără 1-ul în plus).
Să se calculeze (pe banda B2) $\lfloor\sqrt{X}\rfloor$ (parte întreagă inferioară din radical din *X*), rezultatul funcției scris în baza 1.

✓ [Idee 1]

Pornim de la numărul $Y = 1$. Cât timp $Y^2 < X$, îl incrementăm pe *Y*.
Dacă $Y^2 = X$, atunci avem valoarea căutată $Y = \sqrt{X}$ (dacă *X* este pătrat perfect).
Dacă $Y^2 > X$, atunci îl decrementăm o dată pe *Y* și obținem valoarea căutată $Y = \lfloor\sqrt{X}\rfloor$ (dacă *X* nu este pătrat perfect).

Exemple:

Pentru $\boldsymbol{X = 9}$, la început benzile arată astfel:

B1:	…B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	B…		***X***
B2:	…B	B	B	...									vom calcula $\lfloor\sqrt{\boldsymbol{X}}\rfloor$

La final, benzile arată astfel:

B1:	…B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	B…	***X***	$\sim Y^2$
B2:	…B	1	1	1	B	…						$\lfloor\sqrt{\boldsymbol{X}}\rfloor$	$Y \in \{1, 2, \ldots, \sim\sqrt{X}\}$

Pentru $\boldsymbol{X = 6}$, la început benzile arată astfel:

B1:	…B	1	1	1	1	1	1	B…	***X***
B2:	…B	B	B	...					vom calcula $\lfloor\sqrt{\boldsymbol{X}}\rfloor$

La final, benzile arată astfel:

B1:	…B	1	1	1	1	1	1	B…	***X***	$\sim Y^2$
B2:	…B	1	1	0	B	…			$\lfloor\sqrt{\boldsymbol{X}}\rfloor$	$Y \in \{1, 2, \ldots, \sim\sqrt{X}\}$

Pas 1 (Pe banda B2 *inițializăm* $Y = 1$.)
- Pe B1 staționăm pe 1 și pe B2 citim B, scriem 1, staționăm.

Pași 2+3 (Pe B1 încercăm să parcurgem spre dreapta primele Y^2 unități din numărul *X* pentru a *compara* valorile acestor numere.
Pentru a contoriza aceste Y^2 unități ne folosim de numărul curent *Y* scris pe B2, astfel:
- pentru *"for"-ul exterior* de lungime *Y* vom marca cu *a* câte o unitate din Y,
- iar pentru *"for"-ul interior* de lungime *Y* (pentru fiecare unitate marcată sau nemarcată din *Y*) vom face un pas dreapta pe ambele benzi).

Pas2
a) [* pentru *"for"-ul exterior*] Pe B1 staționăm pe 1 și pe B2 citim un 1, **scriem a**, staționăm.
b) - *Cât timp* pe B2 citim a, nu modificăm, pas stânga (și pe B1 staționăm pe 1).
- Apoi pe B2 citim B, scriem B, pas dreapta.

Pas3
a) [*"for"-ul interior*] *Cât timp* pe B1 **citim 1** și pe B2 **citim a sau 1**, nu modificăm benzile, pas dreapta pe ambele.
b) - Dacă pe B1 **citim 1**, scriem 1, staționăm și pe B2 **citim B**, scriem B, pas stânga (am parcurs încă *Y* unități din *X*) → Continuăm cu ***pas3 c)***.
SAU - Dacă pe B1 **citim B** și pe B2 **citim a sau 1**, nu modificăm benzile și staționăm (cele *Y* unități nu au încăput în *X*, deci $Y^2 > X$) → ***Sărim la Pas4*** (decrementăm *Y*).
SAU - Dacă pe B1 **citim B** și staționăm și pe B2 **citim B** și facem pas stânga (am parcurs încă *Y* unități din *X*, deci știm că $X \vdots Y$) → ***Sărim la Pas5*** (avem $Y^2 \geq X$).

c) - *Cât timp* pe B2 citim 1, scriem 1, pas stânga (și pe B1 staționăm pe 1).
- Apoi pe B2 **citim a**, scriem a, pas dreapta.
d) - Dacă pe B2 **citim 1** (adică *Y* nu este complet marcat) → ***Repetăm pas2 a)*** [se repetă "for"-ul exterior].
SAU - Dacă pe B2 **citim B** (adică *Y* este complet marcat, deci am terminat de calculat Y^2 și știm că $\boldsymbol{Y^2 < X}$) → ***Sărim la Pas6*** (incrementăm Y, apoi comparăm noul Y^2 cu *X*).

Pas 4 (Avem $\boldsymbol{Y^2 > X}$, deci îl *decrementăm* pe Y și îl demarcăm, apoi ne oprim.)
a) - *Cât timp* pe B2 citim **a sau 1**, nu modificăm, pas dreapta (și pe B1 staționăm pe B).
- Apoi pe B2 citim B, scriem B, pas stânga.
b) - Pe B2 citim **un a sau un 1**, scriem **0**, pas stânga (***decrementăm Y***).
c) - *Cât timp* pe B2 citim **a sau 1**, scriem **1**, pas stânga (*demarcăm tot Y*).
- Apoi pe B2 citim B, scriem B, staționăm → **STOP în stare finală**.

Pas 5 (Avem $\boldsymbol{X \vdots Y}$, deci *verificăm dacă se terminase calculul lui* Y^2 sau nu.)
-- Dacă pe B2 **citim 1**, scriem 1, staționăm. → ***Sărim la Pas4 b)***.
(Dacă *Y* nu este complet marcat, atunci $\boldsymbol{X = Y * k}$ cu $\boldsymbol{k < Y}$, adică $Y^2 > X$, atunci decrementăm *Y*, îl demarcăm și ne oprim.)
SAU -- Dacă pe B2 **citim a**, scriem a, staționăm. ***Sărim la Pas4 c)***.
(Dacă *Y* este complet marcat, atunci $Y^2 = X$, deci avem *Y* corect, îl demarcăm și ne oprim.)

Pas 6 [** recursivitatea principală, **"while"** $\boldsymbol{Y^2 < X}$]
(*Incrementăm Y*, apoi îl demarcăm parcurgându-l spre stânga.
Mergem stânga până la începutul lui *X*. Comparăm noul Y^2 cu *X*.)
- Pe B1 staționăm pe 1 și pe B2 citim **B**, scriem **1**, pas stânga (***incrementăm Y***).
- *Cât timp* pe B1 staționăm pe 1 și pe B2 citim **a**, scriem **1**, pas stânga (*demarcăm tot Y*).
- Apoi *cât timp* pe B1 citim 1, scriem 1, pas stânga și pe B2 staționăm pe B (mergem la începutul lui *X*).
- Pe B1 și B2 citim B, scriem B, pas dreapta. → ***Sărim la pas2 a)***.

Complexitate spațiu:
$C.S. = X + Y \cong X + \sqrt{X} => \boldsymbol{O(X)}$

Complexitate timp:

- La **Pas1** facem **un pas**.
- [** recursivitatea principală: "while" $Y^2 < X$ incrementăm *Y*] Se aplică **Pas6** pentru fiecare $Y \in \{1, 2, \dots, \sim\sqrt{X}\}$, deci recursivitatea [**] se repetă de $\sim\sqrt{\boldsymbol{X}}$ ori.
- Pentru valoarea curentă a numărului *Y*:
  - o [* "for"-ul exterior] Se repetă de ***Y*** ori (pentru fiecare unitate din *Y*):
    i) La **pas2 a)+b)** marcăm cu a o unitate din *Y* și parcurgem spre stânga tot ***prefixul marcat*** al lui Y.
    ii) [*"for"-ul interior*] La **Pas3 a)** parcurgem tot numărul ***Y*** spre dreapta (partea marcată și cea nemarcată).
    iii) La **Pas3 c)** parcurgem spre stânga tot ***sufixul nemarcat*** al lui *Y*. Apoi:
    - Dacă *Y* nu este complet marcat, atunci *repetăm recursivitatea* [*].
    - Dacă *Y* este complet marcat, atunci mergem la ***Pas6***.

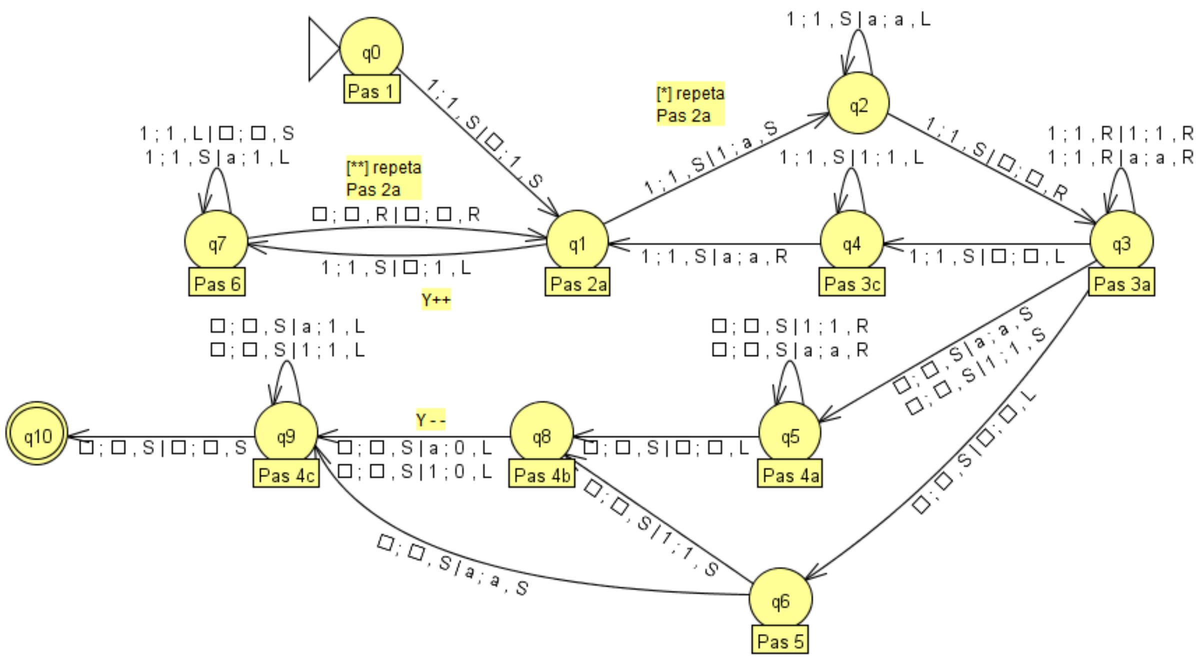
    ➔ Deci în total pentru **i)+ii)+iii)** facem aproximativ **2****Y*** pași pe bandă.
  - o La **Pas6** facem **un pas** pentru incrementarea lui *Y*, apoi ***Y*** pași pentru demarcarea lui *Y*, apoi $\boldsymbol{Y^2}$ (<*X*) pași pentru a reveni la începutul lui *X*, *repetăm recursivitatea* [**].
- Când s-a terminat numărul *X* (la ***Pas3 b***), sărim <u>**fie la *Pas4*, fie la *Pas5***</u>.

  - La **Pas4: a)** facem **maxim *Y*** pași pentru a ajunge la finalul benzii; **b) un pas** pentru decrementarea lui *Y*; **c)** apoi ***Y*** pași pentru demarcarea lui *Y*.

  - SAU La **Pas5** facem aproximativ ***Y*** pași pentru demarcarea lui *Y* (eventual cu decrementare înainte).

  - Deci se fac $\mathbf{max}\{\boldsymbol{Pas4}, \boldsymbol{Pas5}\}$ pași.
- ***Concluzie:***

$C.T. = \sqrt{X} * [Y * (2Y) + Y^2] + \max\{2Y, Y\} = \sqrt{X} * Y^2 \cong \sqrt{X} * X => \boldsymbol{O}(\boldsymbol{X}\sqrt{\boldsymbol{X}})$



✓ **[Idee 2]**

Orice număr pătrat perfect Y^2 este egal cu suma primelor *Y* numere impare.

$$Y^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2 * Y - 1)$$

Rezultă că $1 + 3 + \cdots + \left(2 * \lfloor\sqrt{X}\rfloor - 1\right) \leq \boldsymbol{X} <$

$$< 1 + 3 + \cdots + \left(2 * \lfloor\sqrt{X}\rfloor - 1\right) + \left(2 * \left(\lfloor\sqrt{X}\rfloor + 1\right) - 1\right)$$

Pornim de la numărul $Y = 1$.
La fiecare pas încercăm să scădem din X numărul impar $(2 * Y - 1)$.
- Dacă după scăderea curentă $X > 0$, atunci îl incrementăm pe Y și încercăm o nouă scădere.
- Dacă după scăderea curentă $X = 0$, atunci avem valoarea căutată $Y = \sqrt{X}$ (dacă X este pătrat perfect).
- Dacă numărul impar curent nu poate fi scăzut integral din X, atunci îl decrementăm o dată pe Y și obținem valoarea căutată $Y = \lfloor\sqrt{X}\rfloor$ (dacă X nu este pătrat perfect).

Exemple:

Pentru $\boldsymbol{X} = \mathbf{9}$, la început benzile arată astfel:

B1:	…B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	B…	$\boldsymbol{X}$
B2:	…B	B	B	...								vom calcula $\lfloor\sqrt{\boldsymbol{X}}\rfloor$

La final, benzile arată astfel:

B1:	…B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	B…	$\boldsymbol{X}$	$1 + 3 + \cdots + (2Y - 1)$
B2:	…B	1	1	1	B	…						$\lfloor\sqrt{\boldsymbol{X}}\rfloor$	$Y \in \{1, 2, \dots, \sim\sqrt{X}\}$

Pentru $\boldsymbol{X} = \mathbf{6}$, la început benzile arată astfel:

B1:	…B	1	1	1	1	1	1	B…	$\boldsymbol{X}$
B2:	…B	B	B	...					vom calcula $\lfloor\sqrt{\boldsymbol{X}}\rfloor$

La final, benzile arată astfel:

B1:	…B	1	1	1	1	1	1	B	B	B…	$\boldsymbol{X}$	$1 + 3 + \cdots + (2Y - 1)$
B2:	…B	1	1	0	B	…					$\lfloor\sqrt{\boldsymbol{X}}\rfloor$	$Y \in \{1, 2, \dots, \sim\sqrt{X}\}$

Pas 1 (Pe banda B2 *inițializăm* $Y = 1$.)
- Pe B1 staționăm pe 1 și pe B2 citim B, scriem 1, staționăm.

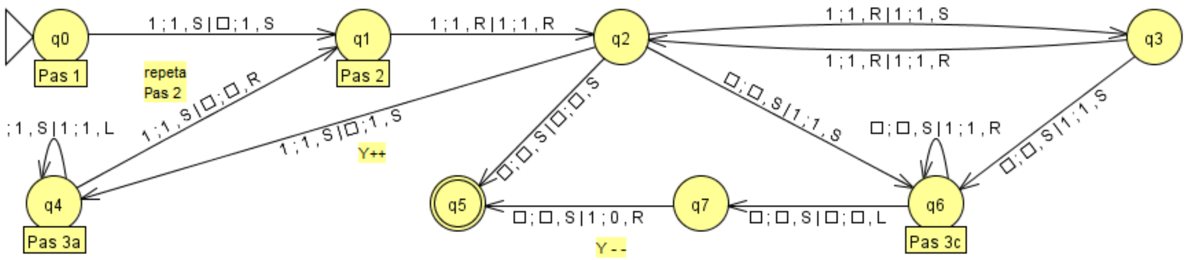
Pas 2 (Pe B1 încercăm să *parcurgem următoarele* $2Y - 1$ *unități* din X, pentru a simula “scăderea” numărului impar curent din X.)
- Pentru primul **1** de pe B2, dacă avem **1** pe B1 facem un pas dreapta pe ambele benzi.
- Apoi *cât timp* citim **1** pe ambele benzi, avem *circuit între două stări*, în prima tranziție facem pas dreapta doar pe B1, iar în cealaltă facem pas dreapta pe ambele benzi.
  → Operația de “scădere” se oprește aplicând unul din pașii **3 a) SAU b) SAU c)**, în funcție de pe care din benzi citim **B**.

Pas 3 (Verificăm dacă numărul impar curent a putut fi “scăzut” integral din X.
- o Dacă da și $X > 0$, atunci îl *incrementăm pe* Y și încercăm o nouă scădere.
- o Dacă da și $X = 0$, atunci ne oprim în stare finală.
- o Dacă nu, atunci îl *decrementăm pe* Y apoi ne oprim în stare finală.)

a) - Dacă pe B1 citim **1**, staționăm și pe B2 citim **B**, scriem **1**, staționăm. (***Y***++)
- Apoi cât timp pe B2 citim 1, scriem 1, pas stânga.
- Pe B2 citim B, scriem B, pas dreapta. ***<u>Repetăm</u> Pas2.***

b) Dacă pe B1 citim **B** și pe B2 citim **B**, nu modificăm benzile, staționăm pe ambele benzi. **STOP în stare finală**.

c) - Dacă pe B1 citim **B**, staționăm și pe B2 citim **1**, scriem 1, staționăm.
- Apoi *cât timp* pe B2 citim 1, nu modificăm, pas dreapta. (mergem la finalul lui B2)
- Pe B2 citim B, scriem B, pas stânga.
- Pe B2 citim un **1**, scriem **0**, staționăm (***Y*** - -). **STOP în stare finală**.



Complexitate spațiu:

$C.S. = X + Y \cong X + \sqrt{X} => \boldsymbol{O}(\boldsymbol{X})$

Complexitate timp:

- La **Pas1** facem **un pas**.
- Numărul de reveniri la Pas2 este aproximativ $\sqrt{\boldsymbol{X}}$ (conform formulei de la începutul acestei rezolvări, primele $\sqrt{X}$ numere impare pot fi scăzute din X până devine 0).
  - La **pas2** facem ***Y*** pași spre dreapta.
  - La **pas3 a)** facem **1+*Y*** pași spre stânga.
- După ieșirea din recursivitate aplicăm fie **Pas3 b)** (facem **1** pas), fie **Pas3 c)** (facem **maxim *Y*** pași până la finalul lui B2), deci facem $\mathbf{max}\{\boldsymbol{Pas3b}, \boldsymbol{Pas3c}\}$ pași.
- ***Concluzie:***
  $C.T. = \sqrt{x} * (2Y) + \max\{1, Y\}$, unde $Y \cong \sqrt{X} => 2X + \sqrt{X} => \boldsymbol{O}(\boldsymbol{X})$

➢ Probleme CC seminar_4:

❖ Problema 6

Să se accepte limbajul $\{z \mid z = w \cdot w^R \cdot w,\ \text{unde } w \in \{a, b\}^+\}$ (unde w^R este oglinditul lui w) folosind:
a) o MT deterministă cu 2 benzi
b) o MT deterministă cu 1 bandă
c) o MT nedeterministă cu 2 benzi
d) o MT nedeterministă cu 1 bandă

Obs: Pentru complexități, notăm $\boldsymbol{n} = |z|$.

✓ Problema 6 a) – *MT deterministă cu 2 benzi*

Exemplu:
Dacă există $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{ababb}$, atunci la început benzile arată astfel:

B1:	…B	a	b	a	b	b	b	b	a	b	a	a	b	a	b	b	B…
B2:	…B	B	B	…													

După Pas1 banda B2 devine:

B2:	…B	1	1	1	1	1	B…	$\|B1\|$ / 3

După Pas2 banda B2 devine:

B2:	…B	a	b	a	b	b	B…	a 3-a treime din z

Pas 1 (Verificăm dacă lungimea cuvântului de pe B1 este *divizibilă cu 3* sau nu.)

- *Cât timp* este posibil (adică *cât timp* pe B1 citim a sau b):
  Folosind ***3 stări***, pentru fiecare 3 simboluri (**a sau b**) citite pe B1 scriem pe B2 un **1**, mergând spre dreapta pe ambele benzi.
  - Dacă $|B1|$ *nu este divizibilă cu 3* (dacă pe B1 citim B după ce am citit doar 1 sau 2 simboluri din grupul de 3), atunci **STOP în stare nefinală** (*input respins*).
  - **SAU** Dacă $|B1|$ *este divizibilă cu 3* (dacă pe B1 citim B după ce am citit un grup complet de 3 simboluri), atunci ***sărim la Pas2***.

Pas 2 (Pe B2 *copiem* a treia treime din cuvântul de pe B1.)

- *Cât timp* pe B2 citim **1**, îl înlocuim cu simbolul (**a sau b**) citit de pe B1, pas stânga pe ambele benzi.
  - Dacă pe B2 citim **B**, scriem B, pas dreapta (și pe B1 staționăm pe a sau b), ***sărim la Pas3***.

Pas 3 (*Comparăm* a doua treime din cuvântul de pe B1 (citit spre stânga) cu cuvântul de pe B2 (citit spre dreapta).)

- *Cât timp* ***simbolurile*** (a sau b) citite pe cele două benzi ***coincid***, pe B1 facem un pas stânga și pe B2 facem un pas dreapta.
  - Dacă pe cele două benzi citim simboluri diferite (**un a și un b**), atunci **STOP în stare nefinală** (input respins).
  - **SAU** Dacă pe B1 citim **a sau b**, staționăm și pe B2 citim **B**, pas stânga, ***sărim la Pas4***.

Pas 4 (*Comparăm* prima treime din cuvântul de pe B1 cu cuvântul de pe B2 (ambele citite spre stânga).)

- *Cât timp **simbolurile*** (a sau b) citite pe cele două benzi ***coincid***, pe B1 și B2 facem un pas stânga.
  - Dacă pe cele două benzi citim simboluri diferite (**un a și un b**), atunci **STOP în stare nefinală** (input respins).
  - **SAU** Dacă pe B1 și B2 citim **B**, pas dreapta, **STOP în stare finală** (input acceptat).

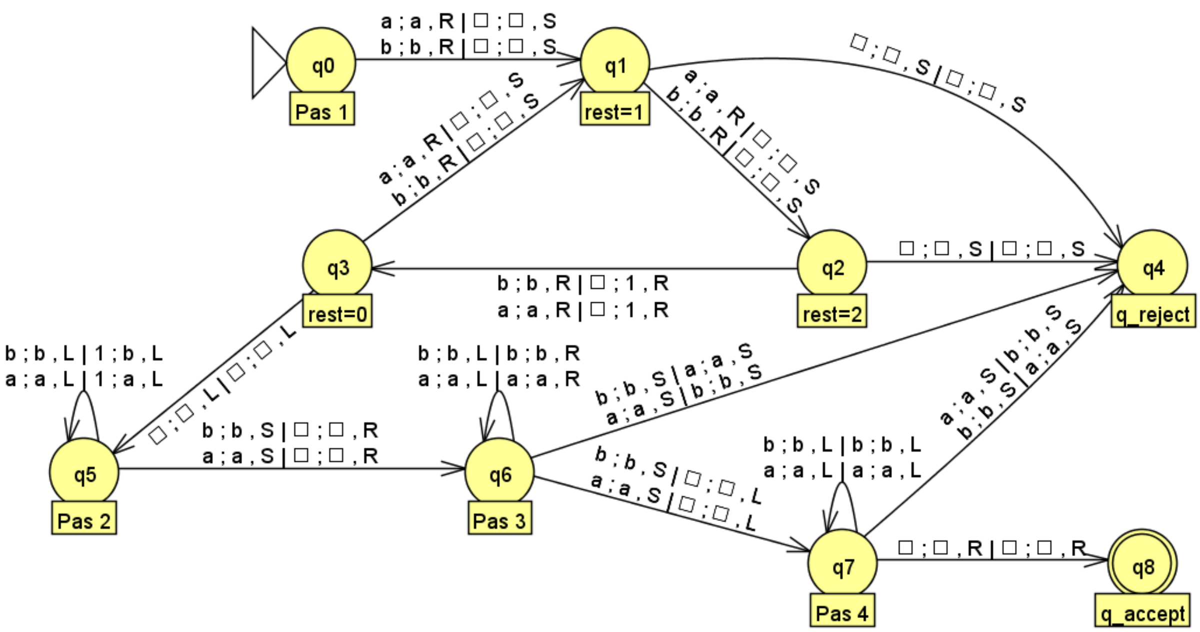
Complexitate spațiu:

$C.S. = n + \frac{n}{3} => \boldsymbol{O(n)}$

Complexitate timp:

- La **Pas1** parcurgem integral banda B1, deci facem **n** pași.
- La **Pas2** copiem o treime din input, deci facem **n / 3** pași.
- La **Pas3** și **Pas4** comparăm B2 cu câte o treime din input, deci facem câte **n / 3** pași.
- ***Concluzie:***

  $C.T. = n + 3 * \frac{n}{3} = 2n => \boldsymbol{O(n)}$



✓ **Problema 6 b)** – *MT deterministă cu 1 bandă*

Exemplu:

Dacă există $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{ababb}$, atunci la început banda arată astfel:

…B	a	b	a	b	b	b	b	a	b	a	a	b	a	b	b	B…

După Pas1 banda devine:

…B	1	2	1	2	2	4	4	3	4	3	3	4	3	4	4	B…

După primele aplicări ale lui Pas2 banda devine:

…B	1	2	1	2	**y**	**y**	4	3	4	3	3	4	3	4	**y**	B…
…B	1	2	1	**y**	y	y	**y**	3	4	3	3	4	3	**y**	y	B…
…B	1	2	**x**	y	y	y	y	**x**	4	3	3	4	**x**	y	y	B…

Pas 1 (Verificăm dacă lungimea cuvântului de pe B1 este *divizibilă cu 3* sau nu.)

- *Cât timp* este posibil, aplicăm următoarele instrucțiuni:
  a) - La ***capătul stâng*** al benzii modificăm ***câte un simbol*** (citim **a** și scriem **1**; sau citim **b** și scriem **2**). *Sărim la **Pas1 b)***.
  SAU - Dacă citim **3 sau 4** (adică s-a terminat împărțirea și rest=0), nu modificăm, pas stânga, *sărim la **Pas2***.
  b) - Apoi parcurgem spre dreapta toate simbolurile de a și b.
  - Citim B, 3 sau 4, nu modificăm, pas stânga.
  c) - La ***capătul drept*** al benzii modificăm ***câte două simboluri*** (citim **a** și scriem **3**; sau citim **b** și scriem **4**; pas stânga, modificăm încă un simbol, pas stânga). *Sărim la **Pas1 d)***.
  SAU - Dacă citim **1 sau 2** (adică s-a terminat împărțirea și rest=1 sau rest=2), nu modificăm, pas dreapta, **STOP în stare nefinală** (input respins).
  d) - Apoi parcurgem spre stânga toate simbolurile de a și b.
  - Citim 1 sau 2, nu modificăm, pas dreapta. ***Sărim la Pas1 a)*** *[repetăm Pas1]*.

Pas 2 (Pentru cuvintele din cele 3 treimi verificăm dacă inputul era de forma $w \cdot w^R \cdot w$.)

- *(În prima treime)* Citim cel mai din dreapta simbol de **1** sau **2** (***reținem în stare*** dacă am citit 1 și va trebui să găsim 3 în celelalte două treimi; SAU am citit 2 și va trebui să găsim 4 în celelalte două treimi). Scriem **x** în loc de 1 sau scriem **y** în loc de 2, pas dreapta.
- Parcurgem spre dreapta toate simbolurile de **x** și **y**.

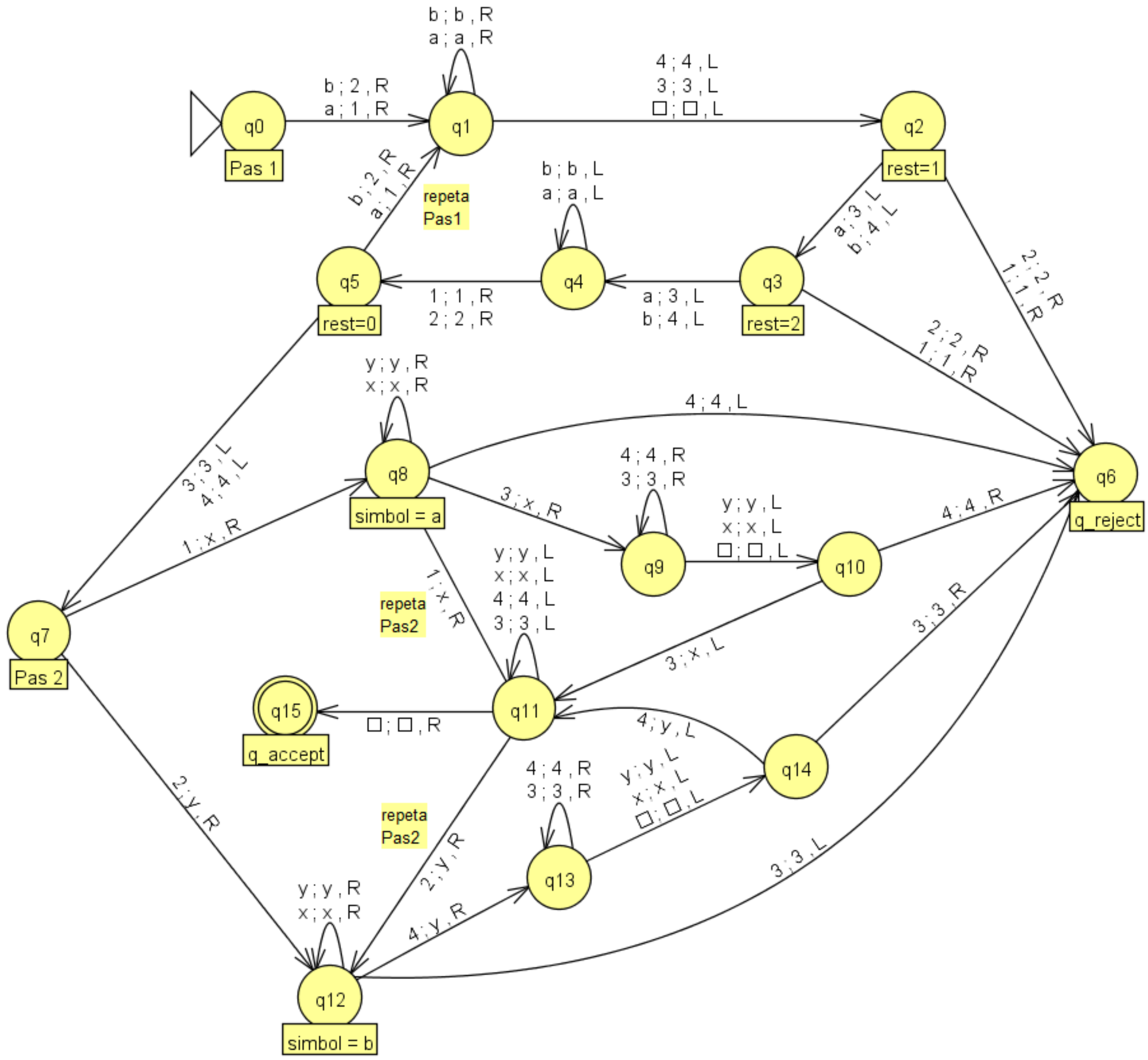
- *(În a doua treime)* - Dacă simbolul citit ***nu corespunde*** cu cel reținut în stare (în stare reținusem 1 și acum citim 4; sau în stare reținusem 2 și acum citim 3), **STOP în stare nefinală** (input respins).
  SAU - Dacă simbolul citit ***corespunde*** cu cel reținut în stare (în stare reținusem 1 și acum citim **3**; sau în stare reținusem 2 și acum citim **4**), scriem **x** în loc de 3 sau scriem **y** în loc de 4, pas dreapta.
- Parcurgem spre dreapta toate simbolurile de **3** și **4**.
- Citim **B**, **x** sau **y**, nu modificăm, pas stânga.

- *(În a treia treime)* – La fel ca mai sus, dacă simbolul citit ***nu corespunde*** cu cel reținut în stare, **STOP în stare nefinală** (input respins).
  SAU - Dacă simbolul citit ***corespunde*** cu cel reținut în stare, scriem **x** în loc de 3 sau scriem **y** în loc de 4, pas stânga.
- Parcurgem spre stânga toate simbolurile de **3**, **4**, **x** și **y**.
- - Dacă citim **1** sau **2**, ***repetăm Pas2***.
  SAU - Dacă citim **B**, scriem B, pas dreapta, **STOP în stare finală** (input acceptat).

Complexitate spațiu:
$C.S. = n \Rightarrow \boldsymbol{O(n)}$ (nu folosim spațiu suplimentar)

Complexitate timp:

- **Pas1** se repetă de $\boldsymbol{n/3}$ ori, iar la fiecare aplicare parcurgem dus-întors maxim toată banda, deci facem maxim **2*n*** pași.
- **Pas2** se repetă de $\boldsymbol{n/3}$ ori, iar la fiecare aplicare parcurgem dus-întors aproximativ două treimi din bandă, deci facem câte **2*n/3** pași.
- ***Concluzie:***
  $C.T. = \frac{n}{3} * (2n) + \frac{n}{3} * \left(\frac{2n}{3}\right) \Rightarrow \boldsymbol{O(n^2)}$



✓ **Problema 6 c) –** *MT nedeterministă cu 2 benzi*

Exemplu:

Dacă există ***w* = *ababb***, atunci la început benzile arată astfel:

B1:	…B	a	b	a	b	b	b	b	a	b	a	a	b	a	b	b	B…
B2:	…B	B	B	…													

Dacă a fost "ales" corect k, după Pas1 banda B2 devine:

B2:	…B	a	b	a	b	b	B…

Pas 1: ***Copiem*** pe B2 primele **k** litere din B1 (k "ales" nedeterminist între 1 și n), mergând dreapta pe ambele benzi.

Pas 2: *Cât timp* simbolurile citite (**a sau b**) pe cele două benzi coincid, ***comparăm*** prima bandă mergând spre dreapta cu a doua bandă mergând spre stânga.

- Dacă citim simboluri diferite (**un a și un b**) => **STOP în stare nefinală**.
- Dacă pe B1 citim **B** și pe B2 citim **a sau b** => k prea mare, **STOP în stare nefinală**.
- Dacă pe B1 citim **a sau b** și pe B2 citim **B** => ***sărim la Pas3***.

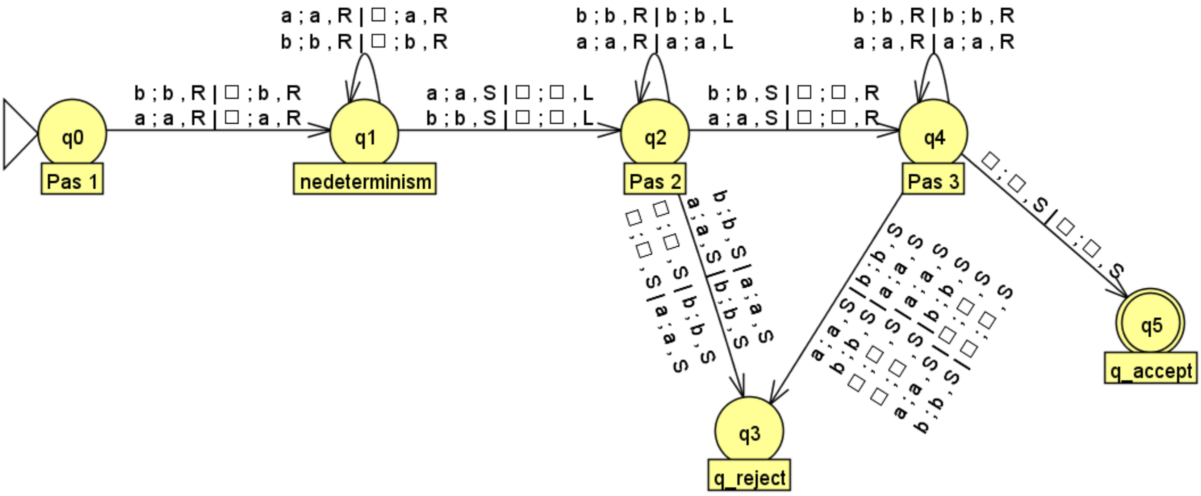
Pas 3: *Cât timp* simbolurile citite (**a sau b**) pe cele două benzi coincid, ***comparăm*** prima bandă mergând spre dreapta cu a doua bandă mergând spre dreapta.

- Dacă citim simboluri diferite (**un a și un b**) => **STOP în stare nefinală**.
- Dacă pe B1 citim **B** și pe B2 citim **a sau b** => k prea mare, **STOP în stare nefinală**.
- Dacă pe B1 citim **a sau b** și pe B2 citim **B** => k prea mic, **STOP în stare nefinală**.
- Dacă pe B1 citim **B** și pe B2 citim **B** => **STOP în stare finală** (input acceptat).

Complexitate spațiu:
$C.S. = n + k, unde\ 1 \le k \le n => \boldsymbol{O(n)}$

Complexitate timp:

- La **Pas1** copiem primele ***k*** simboluri.
- La **Pas2+Pas3** parcurgem maxim restul benzii B1, adică facem maxim ***n – k*** pași.
- ***Concluzie:***
  $C.T. = k + (n - k) = n => \boldsymbol{O(n)}$



✓ **Problema 6 d) –** *MT nedeterministă cu 1 bandă*

Exemplu:
Dacă există ***w = ababb***, atunci la început banda arată astfel:

…B	a	b	a	b	b	b	b	a	b	a	a	b	a	b	b	B…

Dacă au fost “alese” corect *k* și *p (k = p = n / 3)*, după Pas1 banda devine:

…B	1	2	1	2	2	4	4	3	4	3	a	b	a	b	b	B…

După primele aplicări ale lui Pas2 banda devine:

…B	**x**	2	1	2	2	4	4	3	4	**x**	**x**	b	a	b	b	B…
…B	x	**y**	1	2	2	4	4	3	y	x	x	**y**	a	b	b	B…
…B	x	y	**x**	2	2	4	4	**x**	y	x	x	y	**x**	b	b	B…

Pas 1 (Folosim simboluri diferite pentru cele 3 secțiuni ale cuvântului de pe bandă.)

- Primele ***k*** simboluri (*k* “ales” nedeterminist) le transformăm din **a** în **1** sau din **b** în **2**.
- Următoarele ***p*** simboluri (*p* “ales” nedeterminist) le transformăm din **a** în **3** sau din **b** în **4**.
- *(Restul de **n – (k + p)** simboluri rămân scrise cu a sau b.)* Citim un **a sau b**, nu modificăm, pas stânga.
- Parcurgem spre stânga toate simbolurile de **3, 4, 1 și 2**.
- Citim **B**, scriem B, pas dreapta.

Pas 2 (Pentru cele 3 secțiuni marcate diferit verificăm dacă inputul era de forma $w \cdot w^R \cdot w$.)

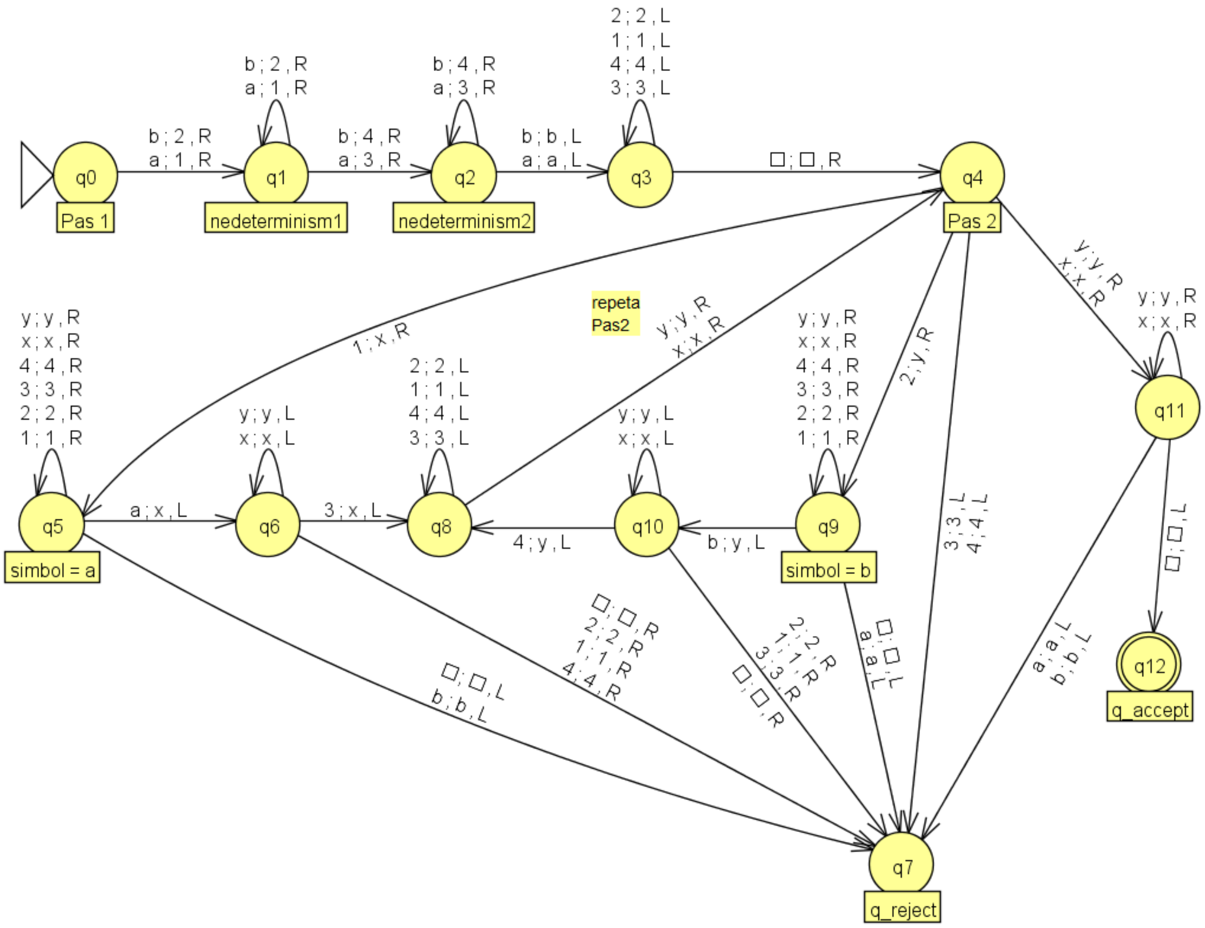
- *(În prima secțiune)* Citim cel mai din stânga simbol de **1** sau **2** (***reținem în stare*** *simbol=a* dacă am citit 1 și va trebui să găsim 3 și a în celelalte două treimi; SAU *simbol=b* dacă am citit 2 și va trebui să găsim 4 și b în celelalte două treimi). Scriem **x** în loc de 1 sau scriem **y** în loc de 2, pas dreapta.
- Parcurgem spre dreapta toate simbolurile de **1, 2, 3, 4, x** și **y**.

- *(În a treia secțiune)* - Dacă citim **B** sau dacă simbolul citit ***nu corespunde*** cu cel reținut în stare (în stare reținusem a și acum citim **b**; sau în stare reținusem b și acum citim **a**), **STOP în stare nefinală**.
  SAU - Dacă simbolul citit ***corespunde*** cu cel reținut în stare (în stare reținusem a și acum citim **a**; sau în stare reținusem b și acum citim **b**), scriem **x** în loc de a sau scriem **y** în loc de b, pas stânga.
- Parcurgem spre stânga toate simbolurile de **x** și **y**.

- *(În a doua secțiune)* - Dacă citim **B, 1, 2** sau simbolul citit ***nu corespunde*** cu cel reținut în stare (în stare reținusem a și acum citim **4**; sau în stare reținusem b și acum citim **3**), **STOP în stare nefinală**.
  SAU - Dacă simbolul citit ***corespunde*** cu cel reținut în stare (în stare reținusem a și acum citim **3**; sau în stare reținusem b și acum citim **4**), scriem **x** în loc de 3 sau scriem **y** în loc de 4, pas stânga.
- Parcurgem spre stânga toate simbolurile de **3**, **4, 1 și 2**.
- Citim **x** sau **y**, nu modificăm, pas dreapta.
- Apoi suntem în unul din cazurile:
  - Dacă citim **1 sau 2**, ***repetăm Pas2***.
  - Dacă citim **3 sau 4** (înseamnă că prima secțiune a fost complet procesată, dar încă mai sunt simboluri neprocesate în a doua secțiune, deci $k < p$), **STOP în stare nefinală**.
  - Dacă citim **x sau y** (înseamnă că primele două secțiuni au fost procesate complet, deci $k = p$), pas dreapta.
    Apoi parcurgem spre dreapta toate simbolurile de **x și y**. Apoi:
    ~ dacă citim **a sau b** (înseamnă că încă mai sunt simboluri neprocesate în a treia secțiune, deci $k = p < (n - k - p)$), **STOP în stare nefinală**.
    ~ **SAU** dacă citim B, scriem B, pas stânga (înseamnă că toate 3 secțiunile au fost procesate complet, deci $k = p = (n - k - p)$), **STOP în stare finală** (input acceptat).

Complexitate spațiu:
$C.S. = n \Rightarrow \boldsymbol{O(n)}$ (nu folosim spațiu suplimentar)

Complexitate timp:
- La **Pas1** facem $\boldsymbol{2 * (k + p) \leq 2 * n}$ pași pentru a parcurge dus-întors primele două secțiuni.
- **Pas2** se repetă de $\boldsymbol{\min\{k, p, n - (k + p)\} \leq n / 3}$ ori (până una dintre cele 3 secțiuni este procesată complet), iar la fiecare aplicare parcurgem dus-întors aproximativ primele două secțiuni din, deci facem câte $\boldsymbol{2 * (k + p)}$ pași.
- ***Concluzie:***
  $C.T. = 2(k + p) * [1 + \min\{k, p, n - (k + p)\}] \leq 2n * (1 + n/3) \Rightarrow \boldsymbol{O(n^2)}$



➢ Probleme CC seminar_5:

❖ Problema 7

Se dau niște numere naturale nenule scrise în baza 1 (fără 1-ul în plus) și delimitate între ele prin simbolul #.
Să se accepte intrarea dacă numerele pot fi separate în două grupuri astfel încât sumele numerelor din cele două grupuri să fie egale.

Obs: Toate rezolvările de mai jos folosesc MT nedeterministe cu 2 benzi.
Pentru complexități notăm cu ***n*** lungimea pe bandă a inputului.

Exemplu:
La început benzile arată astfel:

B1:	…B	1	1	1	#	1	1	#	1	1	1	1	#	1	1	#	1	B…
B2:	…B	B	B	…														

✓ **[Idee 1]**

După Pas1, benzile ar putea arăta astfel:

B1:	**…B**	**x**	**x**	**x**	**#**	**1**	**1**	**#**	**1**	**1**	**1**	**1**	**#**	**x**	**x**	**#**	**x**	**B…**
B2:	**…B**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**B**	**…**									

Pas 1 (Separăm nedeterminist numerele în 2 grupuri și pe banda B2 calculăm suma numerelor din primul grup.)

- *Cât timp* pe B1 nu am ajuns încă la B mergând spre dreapta, pentru fiecare număr dat (încadrat între două simboluri # sau între B și #) *alegem nedeterminist* una dintre următoarele posibilități:
  - (Presupunem că numărul face parte din *primul grup*)
    Pe B1 înlocuim cu **x** toți de 1 din numărul curent și pe B2 *adăugăm* copia numărului.
  - (Presupunem că numărul curent face parte din *al doilea grup*)
    Pe B1 parcurgem numărul fără să îl modificăm (și fără să îl copiem pe B2).
- Pe B1 și B2 citim B, scriem B, pas stânga.

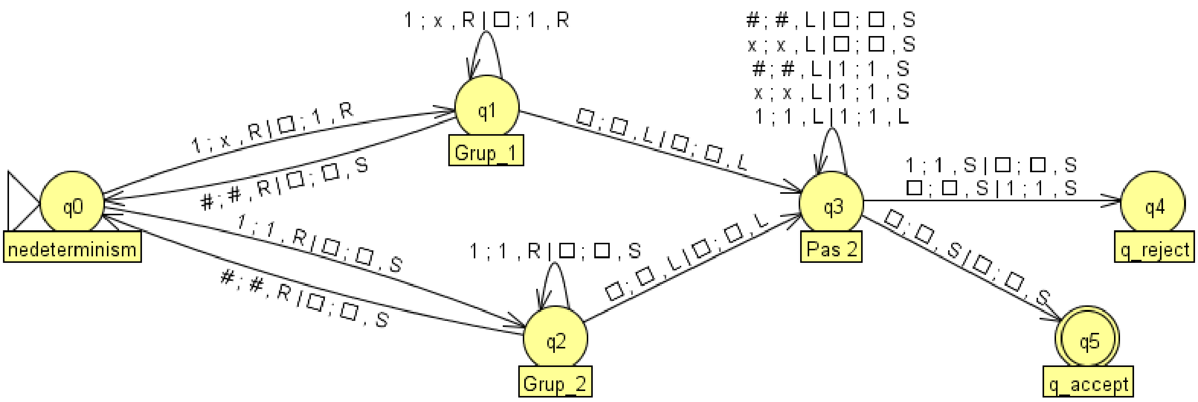
Pas 2 (Verificăm dacă suma numerelor din al doilea grup este egală cu numărul de pe B2.)

- *Cât timp* este posibil, parcurgem ambele benzi spre stânga, fără să le modificăm.

- Dacă pe B1 citim **# sau x** facem pas *stânga* și pe B2 citim **1 sau B** și *staționăm*.
- Dacă pe B1 citim **1** și pe B2 citim **1**, facem pas stânga pe ambele benzi.
- Dacă pe B1 citim **B** și pe B2 citim **1** (sumaG1 > sumaG2), **STOP în stare nefinală**.
- Dacă pe B1 citim **1** și pe B2 citim **B** (sumaG1 < sumaG2), **STOP în stare nefinală.**
- Dacă pe B1 citim **B** și pe B2 citim **B** (sumaG1 = sumaG2), **STOP în stare finală** (input acceptat).

Complexitate spațiu:
$C.S. = n + sumaG1 \le 2n \Rightarrow \boldsymbol{O(n)}$

Complexitate timp:
La **Pas1** parcurgem integral B1 spre dreapta, iar la **Pas2** spre stânga.
$C.T. = 2n \Rightarrow \boldsymbol{O(n)}$



✓ **[Idee 2]**

La final, benzile ar putea arăta astfel:

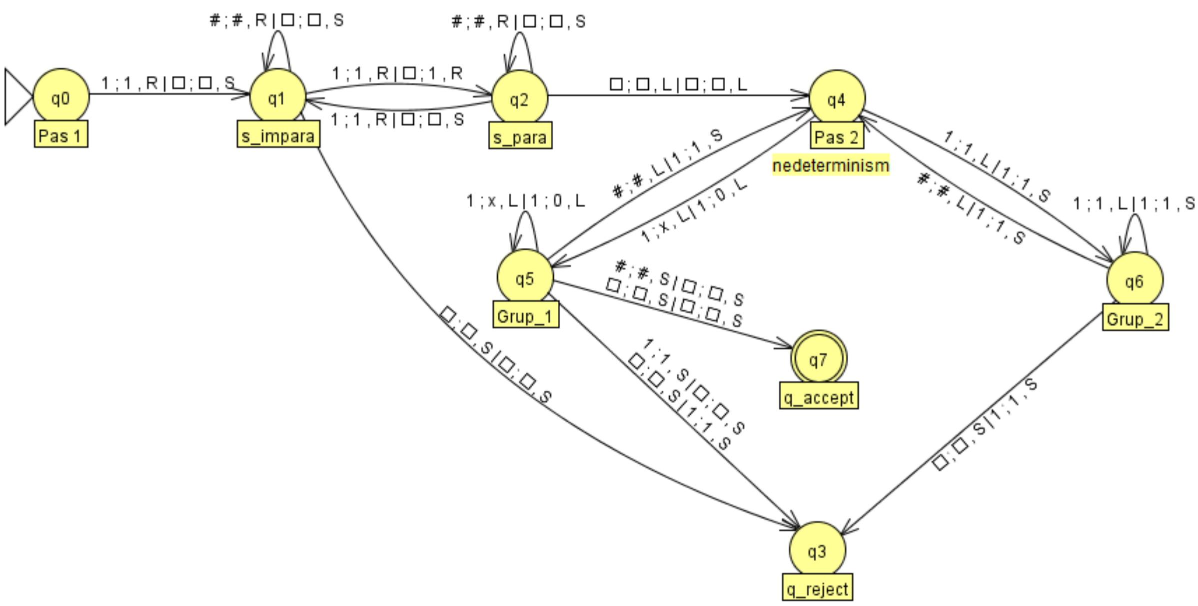
B1:	**…B**	**x**	**x**	**x**	**#**	**1**	**1**	**#**	**1**	**1**	**1**	**1**	**#**	**x**	**x**	**#**	**x**	**B…**
B2:	**…B**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**B**	**…**									

Pas 1 (Pe B2 calculăm *jumătatea* sumei tuturor numerelor din B1.)
Parcurgem B1 spre dreapta, sărim #-urile și pentru fiecare doi de 1 din B1 adăugăm un 1 pe B2, mergând tot spre dreapta.
- Dacă suma tuturor numerelor este *impară*, **STOP în stare nefinală**.
- Dacă suma tuturor numerelor este *pară* (pe ambele benzi citim B și facem pas stânga), ***sărim la Pas2***.

Pas2: *Cât timp* e posibil, parcurgem B1 spre stânga și pentru fiecare număr (încadrat între două simboluri # sau între B și #) alegem nedeterminist dacă face parte din primul grup și îl "scădem" din numărul de pe B2 sau dacă face parte din al doilea grup și nu îl scădem.
Apoi:
- Dacă pe B1 citim **B** și pe B2 citim **1** (nu mai avem numere disponibile de scăzut), **STOP în stare nefinală**.
- Dacă pe B1 citim **1** și pe B2 citim **B** (numărul curent nu a putut fi scăzut integral), **STOP în stare nefinală.**
- Dacă pe B1 citim **B sau #** și pe B2 citim **B** (avem suma=0 după ce am reușit să scădem integral niște numere), **STOP în stare finală** (input acceptat).

Complexitate spațiu:
$C.S. = n + \frac{suma}{2}$, unde $suma \leq n \Rightarrow \boldsymbol{O}(\boldsymbol{n})$

Complexitate timp:
La **Pas1** parcurgem integral B1 spre dreapta, iar la **Pas2** o parcurgem (eventual parțial) spre stânga.
$C.T. = 2n \Rightarrow \boldsymbol{O}(\boldsymbol{n})$



✓ **[Idee 3]**

La final, benzile ar putea arăta astfel:

B1:	**…B**	**x**	**x**	**x**	**#**	**1**	**1**	**#**	**1**	**1**	**1**	**1**	**#**	**x**	**x**	**#**	**x**	**B…**
B2:	**…B**	**0**	**0**	**0**	**#**	**0**	**0**	**0**	**B**	**…**								

După fiecare număr adunat/scăzut, banda B2 arată astfel:

Inițializăm: rez=0	B2: …B#B…
Adunăm: 111	B2: …B#111B…
Scădem: 11	B2: …B#100B…
Scădem: 1111	B2: … B222#000B …
Adunăm: 11	B2: … B002#000B…
Adunăm: 1	B2: … B000#000B… => rez=0 (input acceptat)

Observații:

- Pe B2, în dreapta simbolului # vom ***aduna*** unități atunci când citim **B** sau **0** și scriem **1** (sau când în stânga lui # citim **2** pentru unități negative și scriem **0**) mergând spre dreapta, iar în stânga simbolului # vom ***scădea*** unități atunci când citim **B** sau **0** și scriem **2** (sau când în dreapta lui # citim **1** pentru unități pozitive și scriem **0**) mergând spre stânga.
- La orice moment de timp, banda B2 îl are sigur pe **#** și poate avea fie **2**-uri la stânga lui #, fie **1**-uri la dreapta lui #; banda B2 poate avea simboluri de 0 la capete (pentru unitățile anulate cu +1-1 sau -1+1).
- După procesarea (adunarea/scăderea) fiecărui număr din B1, capul de citire/scriere al benzii B2 rămâne fie pe simbolul **#** (dacă rezultat=0), fie pe cel mai din dreapta **1** (dacă rezultat>0), fie pe cel mai din stânga **2** (dacă rezultat<0).

Pas 1 (Inițializăm banda B2.)
Pe B1 staționăm pe **1** și pe B2 citim **B**, scriem **#**, staționăm (avem rezultat=0.)

Pas 2: Parcurgând toată banda B1 spre dreapta, pentru fiecare număr (încadrat între două simboluri # sau între B și #) alegem nedeterminist dacă face parte din *primul grup* (îl marcăm cu x pe B1 și îl adunăm la numărul de pe B2) sau dacă face parte din *al doilea grup* (nu îl modificăm pe B1 și îl scădem din numărul de pe B2).

- Dacă numărul curent este din *primul grup*:

a) *[facem adunarea]* **Pentru fiecare 1** din număr îl marcăm cu **x** pe B1 și ne deplasăm spre dreapta pe B2 pentru a-l ***aduna***:
- dacă citim **2,** scriem **0**, pas dreapta
- SAU dacă citim **# sau 1**, nu modificăm, pas dreapta (staționăm pe B1)
  și apoi dacă citim **0 sau B**, scriem **1**, pas dreapta

b) *[am terminat adunarea]* Pentru a ne poziționa corect pe B2:
- dacă citim **# sau 2**, nu modificăm, staționăm
- SAU dacă citim **0 sau B**, nu modificăm, pas stânga (suntem pe simbolul **1**)

c) Dacă pe B1 citim #, atunci ***repetăm Pas2*** pentru a procesa următorul număr de pe bandă.
SAU Dacă pe B1 citim B, ***sărim la Pas3***.

- Dacă numărul curent este din *<u>al doilea grup</u>*:

a) *[facem scăderea]* **Pentru fiecare 1** din număr (îl lăsăm nemarcat pe B1) și ne deplasăm spre stânga pe B2 pentru a-l ***scădea***:
- dacă citim **1**, scriem **0**, pas stânga
- SAU dacă citim **# sau 2**, nu modificăm, pas stânga (staționăm pe B1)
  și apoi dacă citim **0 sau B**, scriem **2**, pas stânga

b) *[am terminat scăderea]* Pentru a ne poziționa corect pe B2:
- dacă citim **# sau 1**, nu modificăm, staționăm
- SAU dacă citim **0 sau B**, nu modificăm, pas dreapta (suntem pe simbolul **2**)

c) Dacă pe B1 citim #, atunci ***<u>repetăm</u>*** ***<u>Pas2</u>*** pentru a procesa următorul număr de pe bandă.
SAU Dacă pe B1 citim B, ***sărim la <u>Pas3</u>***.

Pas 3 (După procesarea tuturor numerelor din B1, verificăm cât este rezultatul de pe B2.)
- Dacă pe B1 citim **B** (am procesat toate numerele) și pe B2 citim **#** (avem rezultat = 0), atunci **STOP în stare finală** (input acceptat).
- SAU Dacă pe B1 citim **B** (am procesat toate numerele) și pe B2 citim **B, 0, 1 sau 2** (avem rezultat ≠ 0), atunci **STOP în stare nefinală**.

Complexitate spațiu:
Cel mai rău caz este când toate numerele sunt alese să facă parte din același grup, deci fie sunt toate adunate, fie sunt toate scăzute.
$C.S. = n + rezultat < 2n => \boldsymbol{O}(\boldsymbol{n})$

Complexitate timp:
Facem o singură parcurgere completă spre dreapta pentru B1, iar pe B2 ne mișcăm *simultan* cu B1 fie spre dreapta (când adunăm), fie spre stânga (când scădem).
$C.T. = n => \boldsymbol{O}(\boldsymbol{n})$