Planificarea mișcării cu garanții de conectivitate și acoperire
curs 7 - opțional SPER

Florin Stoican

29 martie 2022

Cuprins

Cuprins

Motivație

Planificarea mișcării pentru o echipă de agenți, într-un mediu multi-obstacol este dificilă:

- pentru a asigura comunicarea în interiorul echipei este nevoie de linii ne-întrerupte între perechi de agenți ("LOS – line of sight")
- pentru a acoperi o regiune în mod complet, este necesară găsirea unor poziții de vizualizare ("art gallery problem")
- condiții de evitare a coliziunii la momente predefinite de timp nu garantează comportamentul de-a lungul întregului orizont de timp ("corner cutting problem").

Dificultățile provin din:

- geometric, regiunea de vizibilitate poate să fie ne-conectată (formată din sub-regiuni disjuncte) și neconvexă
- se ajunge la o problemă combinatorică, a cărei complexitate crește rapid

Exemplu – "corner cutting problem"

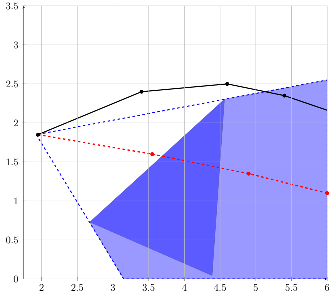
Constrângerile de evitare sunt de obicei impuse la momente discrete de timp fără a ține cont de comportamentul continuu al dinamicii.

Rezultatele curente[1],[2],[3] sunt adesea

- conservative în descriere
- nu tratează eficient cazul multi-obstacol

Ideea de bază:

- poziția viitoare trebuie să nu stea în *umbra* obstacolelor
- se pot considera reprezentări exacte și aproximări ale acestora



[1] A. Richards și O. Turnbull. „Inter-sample avoidance in trajectory optimizers using mixed-integer linear programming". În: *Int. J. Robust Nonlinear Control* 25 (2015), pag. 521–526.
[2] M. H. Maia și R. K. H. Galvão. „On the use of mixed-integer linear programming for predictive control with avoidance constraints". În: *Int. J. Robust Nonlinear Control* 19 (2009), pag. 822–828.
[3] R. Deits și R. Tedrake. „Efficient mixed-integer planning for UAVs in cluttered environments". În: *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*. 2015.

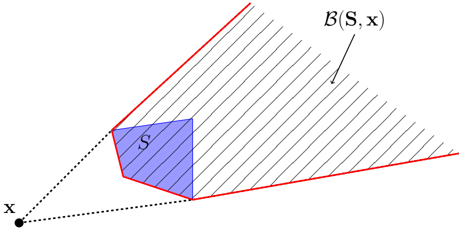
Cuprins

Descrierea regiunii "în umbră"

Putem defini o regiune în umbră $\mathcal{B}(S,x)$ ca o colecție de puncte din $\mathbb{R}^n$ ce sunt "în umbră/ascunse" din punctul de vedere al x:

$$\mathcal{B}(S,x) = \{y : [x,y] \cap S \neq \emptyset\}$$

- S denotă obstacolul
- x denotă agentul/senzorul



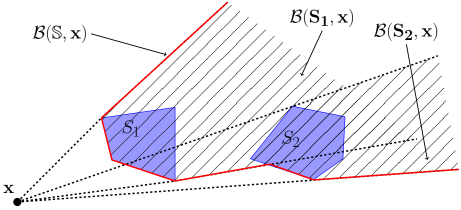
Dacă segmentul $[x,y]$ intersectează S atunci punctul y este "ascuns" de către obstacolul S și prn urmare nu este "vizibil" dinspre x.

Descrierea regiunii "în umbră"

Putem defini o regiune în umbră $\mathcal{B}(\mathbb{S}, x)$ ca o colecție de puncte din $\mathbb{R}^n$ ce sunt "în umbră/ascunse" din punctul de vedere al x:

$$\mathcal{B}(\mathbb{S}, x) \quad = \{y \in \mathbb{R}^n : \; [x, y] \cap \mathbb{S} \neq \emptyset\} = \bigcup_{l=1}^{N_o} \mathcal{B}(S_l, x)$$

- $\mathbb{S} \triangleq \bigcup_{l=1}^{N_o} S_l$ denotă colecția de obstacole
- x denotă agentul/senzorul



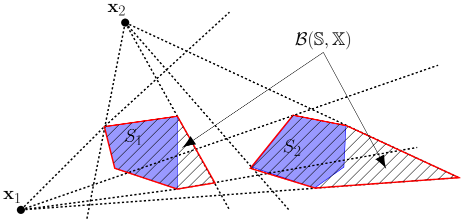
Dacă segmentul $[x, y]$ intersectează S atunci punctul y este "ascuns" de către obstacolul $S \in \mathbb{S}$ și prn urmare nu este "vizibil" dinspre x.

Descrierea regiunii "în umbră"

Putem defini o regiune în umbră $\mathcal{B}(\mathbb{S}, \mathbb{X})$ ca o colecție de puncte din $\mathbb{R}^n$ ce sunt "în umbră/ascunse" din punctul de vedere al $\mathbb{X}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\mathbb{S}, \mathbb{X}) &= \bigcap_{k=1}^{N_a} \mathcal{B}(\mathbb{S}, x_k) = \bigcap_{k=1}^{N_a} \left[\left(\bigcup_{l=1}^{N_o} \mathcal{B}(S_l, x_k) \right) \right] \\ &= \bigcap_{k=1}^{N_a} \left(\bigcup_{l=1}^{N_o} \mathcal{B}(S_l, x_k) \right)\end{aligned}$$

- $\mathbb{S} \triangleq \bigcup_{l=1}^{N_o} S_l$ denotă colecția de obstacole
- $\mathbb{X} \triangleq \{x_1, \ldots, x_{N_a}\}$ denotă colecția de agenți/senzori



Dacă segmentul $[x, y]$ intersectează S atunci punctul y este "ascuns" de către obstacolul $S \in \mathbb{S}$ și prn urmare nu este "vizibil" dinspre $x \in \mathbb{X}$.

Câteva remarci

Chiar și în cazurile simple, zona „ în umbră” rezultată are o formă complexă:

- forma se schimbă la fiecare variație a poziției
- posibil o uniune neconectată de regiuni

Idee:

- să descriem zona “în umbră” ca o uniune de regiuni convexe parametrizate după poziția agenților
- agentul/agenții trebuie să fie în afara acestei zone la următoarea iterație $\Rightarrow$ scriem acest lucru ca o constrângere suplimentară care implică poziția curentă – x și următoarea poziție – x^+ în ceea ce privește obstacol(ele) – $S(\mathbb{S})$

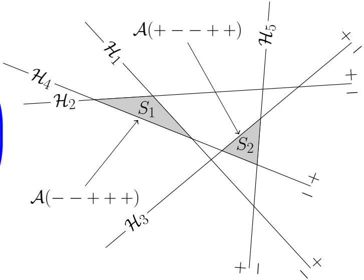
Implementare practică:

- folosim mulțimi poliedrale pentru a descrie obstacolele și *aranjamente de hiperplane* pentru a caracteriza zona „ în umbră”
- folosim *programarea cu variabile întregi* pentru a scrie problema într-o formă rezonabilă

Construcția regiunii "în umbră" – I

Fie $S = \mathcal{A}(\sigma^\bullet)$ unde $\sigma^\bullet \in \Sigma^\bullet$, atunci putem defini mulțimea auxiliară

$$\mathcal{E}(\sigma^\bullet, x) = \mathcal{A}(\sigma^\bullet) \cap \left(\bigcup_{x \notin \mathcal{H}_i^{\sigma^\bullet(i)}} \mathcal{H}_i \right) \cap \left(\bigcup_{x \in \mathcal{H}_i^{\sigma^\bullet(i)}} \mathcal{H}_i \right)$$



ce caracterizează punctele extreme ale lui S, tangente dpdv al x.

Pentru orice $x \in \mathcal{A}(\sigma^\circ)$ avem că $\mathcal{E}(\sigma^\bullet, x)$ rămâne fixată:

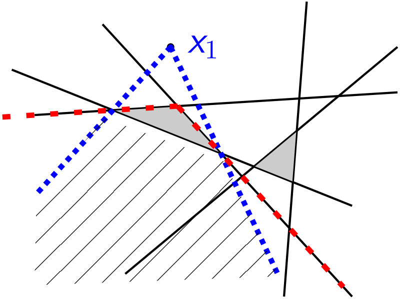
$$\mathcal{E}(\sigma^\bullet, \sigma^\circ) = \mathcal{A}(\sigma^\bullet) \cap \left(\bigcup_{\sigma^\circ(i) \neq \sigma^\bullet(i)} \mathcal{H}_i \right) \cap \left(\bigcup_{\sigma^\circ(i) = \sigma^\bullet(i)} \mathcal{H}_i \right)$$

$\mathcal{E}(\sigma^\bullet, x)$ e parametrizat după $\sigma^\circ \in \Sigma^\circ \Rightarrow$ și rămâne constant față de σ° !

Construcția regiunii “în umbră” – I

Fie $S = \mathcal{A}(\sigma^{\bullet})$ unde $\sigma^{\bullet} \in \Sigma^{\bullet}$, atunci putem defini mulțimea auxiliară

$$\mathcal{E}(\sigma^{\bullet}, x) = \mathcal{A}(\sigma^{\bullet}) \cap \left(\bigcup_{x \notin \mathcal{H}_i^{\sigma^{\bullet}(i)}} \mathcal{H}_i \right) \cap \left(\bigcup_{x \in \mathcal{H}_i^{\sigma^{\bullet}(i)}} \mathcal{H}_i \right)$$



ce caracterizează punctele extreme ale lui S, tangente dpdv al x.
Pentru orice $x \in \mathcal{A}(\sigma^{\circ})$ avem că $\mathcal{E}(\sigma^{\bullet}, x)$ rămâne fixată:

$$\mathcal{E}(\sigma^{\bullet}, \sigma^{\circ}) = \mathcal{A}(\sigma^{\bullet}) \cap \left(\bigcup_{\sigma^{\circ}(i) \neq \sigma^{\bullet}(i)} \mathcal{H}_i \right) \cap \left(\bigcup_{\sigma^{\circ}(i) = \sigma^{\bullet}(i)} \mathcal{H}_i \right)$$

$\mathcal{E}(\sigma^{\bullet}, x)$ e parametrizat după $\sigma^{\circ} \in \Sigma^{\circ} \Rightarrow$ și rămâne constant față de σ° !

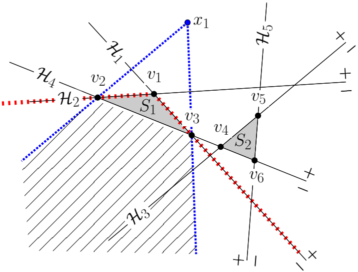
Construcția regiunii “în umbră” – II

Aceasta permite să redefinim $\mathcal{B}(\sigma^\bullet, x)$ ca:

$$\mathcal{B}(\sigma^\bullet, x) = \mathrm{Cone}\left(x, \mathcal{E}(\sigma^\bullet, x)\right) \cap \bigcap_{\sigma^\circ(i) \neq \sigma^\bullet(i)} H_i^{\sigma^\bullet(i)}$$

$\mathcal{B}(\sigma^\bullet, x)$ are o structură constantă pentru orice $x \in \mathcal{A}(\sigma^\circ)$:

- pornind de la colecția $\mathbb{S}$ de obstacole, se creează un aranjament de hiperplane $A(\mathbb{H})$
- calculăm și stocăm toate mulțimile $\mathcal{E}(\sigma^\bullet, \sigma^\circ)$ for $\sigma^\bullet \in \Sigma^\bullet$ și $\sigma^\circ \in \Sigma^\circ$
- pentru x curent identificăm σ° așa încât $x \in \mathcal{A}(\sigma^\circ)$ și construim $\mathcal{B}(\sigma^\bullet, x)$, $\forall \sigma^\bullet \in \Sigma^\bullet$



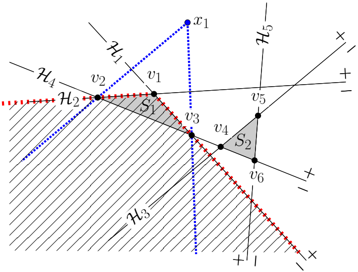
Construcția regiunii "în umbră" – II

Aceasta permite să redefinim $\mathcal{B}(\sigma^{\bullet}, x)$ ca:

$$\mathcal{B}(\sigma^{\bullet}, x) = \mathrm{Cone}\left(x, \mathcal{E}(\sigma^{\bullet}, x)\right) \cap \bigcap_{\sigma^{\circ}(i) \neq \sigma^{\bullet}(i)} H_i^{\sigma^{\bullet}(i)}$$

$\mathcal{B}(\sigma^{\bullet}, x)$ are o structură constantă pentru orice $x \in \mathcal{A}(\sigma^{\circ})$:

- pornind de la colecția $\mathbb{S}$ de obstacole, se creează un aranjament de hiperplane $A(\mathbb{H})$
- calculăm și stocăm toate mulțimile $\mathcal{E}(\sigma^{\bullet}, \sigma^{\circ})$ for $\sigma^{\bullet} \in \Sigma^{\bullet}$ și $\sigma^{\circ} \in \Sigma^{\circ}$
- pentru x curent identificăm σ° așa încât $x \in \mathcal{A}(\sigma^{\circ})$ și construim $\mathcal{B}(\sigma^{\bullet}, x)$, $\forall \sigma^{\bullet} \in \Sigma^{\bullet}$



Putem folosi o aproximare pentru a caracteriza regiunea în umbră:

$$\mathcal{B}(\sigma^{\bullet}, \sigma^{\circ}) = \bigcap_{\sigma^{\circ}(i) \neq \sigma^{\bullet}(i)} H_i^{\sigma^{\bullet}(i)}$$

Construcția regiunii "în umbră" – II

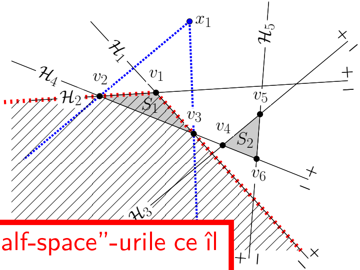
Aceasta permite să redefinim $\mathcal{B}(\sigma^\bullet, x)$ ca:

$$\mathcal{B}(\sigma^\bullet, x) = \mathrm{Cone}\left(x, \mathcal{E}(\sigma^\bullet, x)\right) \cap \bigcap_{\sigma^\circ(i) \neq \sigma^\bullet(i)} H_i^{\sigma^\bullet(i)}$$

$\mathcal{B}(\sigma^\bullet, x)$ are

$\mathcal{B}(\sigma^\bullet, x)$ este definit de conul cu vârful în poziția curentă și "half-space"-urile ce îl separă pe agent de obstacol

- pornind de la colecția $\mathbb{S}$ de obstacole, se creează un aranjament de hiperplane $A(\mathbb{H})$
- calculăm și stocăm toate mulțimile $\mathcal{E}(\sigma^\bullet, \sigma^\circ)$ for $\sigma^\bullet \in \Sigma^\bullet$ și $\sigma^\circ \in \Sigma^\circ$
- pentru x curent identificăm σ° așa încât $x \in \mathcal{A}(\sigma$



$\mathcal{B}(\sigma^\bullet, \sigma^\circ)$ este definit doar de către "half-space"-urile ce îl separă pe agent de obstacol

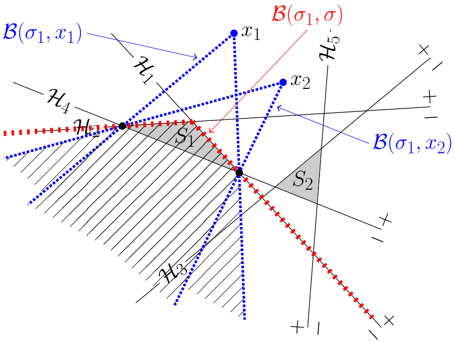
Putem folosi o aproximare pentru a caracteriza regiunea în umbră:

$$\mathcal{B}(\sigma^\bullet, \sigma^\circ) = \bigcap_{\sigma^\circ(i) \neq \sigma^\bullet(i)} H_i^{\sigma^\bullet(i)}$$

Exemplu ilustrativ

Considerăm o uniune de două obstacole în $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{S} = S_1 \cup S_2$ definite de 5 hiperplane.

- $S_1 = \mathcal{A}(- - + + +)$
- $S_2 = \mathcal{A}(+ - - + +)$
- $\mathcal{E}(\sigma_1, x_1) = \{\mathcal{H}_2 \cap \mathcal{H}_4, \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_4\}$
- $\mathcal{B}(\sigma_1, x_1) = \mathrm{Cone}(x_1, S_1) \cap \mathcal{H}_1^- \cap \mathcal{H}_2^-$
- $\mathcal{B}(\sigma_1, \sigma) = \mathcal{H}_1^- \cap \mathcal{H}_2^-$
- $\mathcal{B}(\sigma_1, \sigma)$ conține atât $\mathcal{B}(\sigma_1, x_1)$ cât și $\mathcal{B}(\sigma_1, x_2)$



Cuprins

MI pentru aranjamente de hiperplane

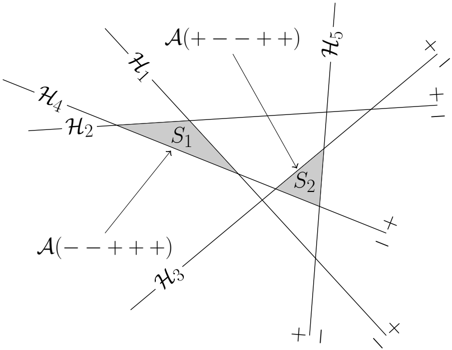
Ca prim pas, definim $\delta : \{-,+\}^N \times \{-,+\}^N \to \{0\} \cup [1,\infty)$:

$$\delta(\sigma_1,\sigma_2) = \sum_i \delta_i(\sigma_1,\sigma_2),$$

unde $\delta_i(\sigma_1,\sigma_2) = \begin{cases} 1-\sigma_2(i), & \sigma_1(i) = `+' \\ \sigma_2(i), & \sigma_1(i) = `-' \end{cases}.$

Putem acum rescrie constrângerile ca:

$$\begin{aligned} h_i x &\leq \quad k_i + M(1-\sigma_i) \\ -h_i x &\leq -k_i + M\sigma_i \\ \delta(\sigma^\bullet,\sigma) &> 0,\ \forall \sigma^\bullet \in \Sigma^\bullet \end{aligned}$$



MI pentru aranjamente de hiperplane

Ca prim pas, definim $\delta : \{-,+\}^N \times \{-,+\}^N \to \{0\} \cup [1,\infty)$:

$$\delta(\sigma_1,\sigma_2) = \sum_i \delta_i(\sigma_1,\sigma_2),$$

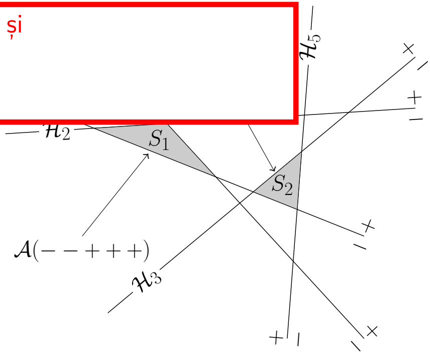
unde $\delta_i(\sigma_1,\sigma_2) = \begin{cases} 1-\sigma_2(i), & \sigma_1(i) = `+' \\ \sigma_2(i), & \sigma_1(i) = `-' \end{cases}$.

$\delta_i(\sigma_1,\sigma_2)$ descrie $|\sigma_1(i)-\sigma_2(i)|$ și

$$\delta(\sigma_1,\sigma_2) = \sum_i |\sigma_1(i)-\sigma_2(i)|$$

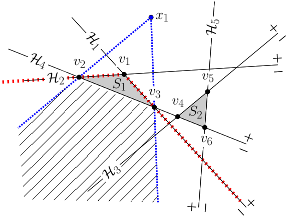
Putem acum

$$h_i x \leq \quad k_i + M(1-\sigma_i)$$
$$-h_i x \leq -k_i + M\sigma_i$$
$$\delta(\sigma^\bullet,\sigma) > 0,\ \forall \sigma^\bullet \in \Sigma^\bullet$$



Reprezentare MI – cazul exact (incluziune)

Fie un punct $x^+ \in \mathcal{B}(\sigma^\bullet, x)$ unde $\{v_i\}$ denotă punctele extreme ale $\mathcal{A}(\sigma^\bullet)$, atunci:



- $\boxed{x^+ \in \mathrm{Cone}\,(x, \mathcal{E}(\sigma^\bullet, x))}$
- $x^+ \in \bigcap\limits_{\sigma^\circ(i) \neq \sigma^\bullet(i)} H_i^{\sigma^\bullet(i)}$

$$\boxed{\begin{aligned} x^+ &= x + \sum_j \beta_j v_j, \\ \sum_{j \text{ s.t. } v_j \notin \mathcal{E}(\sigma^\bullet, \sigma^\circ)} \beta_j &\leq M\delta(\sigma^\circ, \sigma), \quad \forall \sigma^\circ \in \Sigma^\circ, \\ \beta_j &\geq 0, \end{aligned}}$$

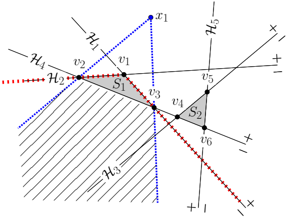
$$\sigma^\bullet(i) h_i x^+ \leq \sigma^\bullet(i) k_i + M(1 - \delta_i(\sigma^\bullet, \sigma)),$$

Implementarea MI este standard[4].

[4] J. Vielma și G. Nemhauser. „Modeling disjunctive constraints with a logarithmic number of binary variables and constraints”. În: *Mathematical Programming* 128.1 (2011), pag. 49–72.

Reprezentare MI – cazul exact (incluziune)

Fie un punct $x^+ \in \mathcal{B}(\sigma^\bullet, x)$ unde $\{v_i\}$ denotă punctele extreme ale $\mathcal{A}(\sigma^\bullet)$, atunci:



$$x^+ = x + \sum_j \beta_j v_j,$$

$$\sum_{j \text{ s.t. } v_j \notin \mathcal{E}(\sigma^\bullet, \sigma^\circ)} \beta_j \leq M\delta(\sigma^\circ, \sigma), \quad \forall \sigma^\circ \in \Sigma^\circ,$$

$$\beta_j \geq 0,$$

- $x^+ \in \mathrm{Cone}\left(x, \mathcal{E}(\sigma^\bullet, x)\right)$
- $\boxed{x^+ \in \bigcap_{\sigma^\circ(i) \neq \sigma^\bullet(i)} H_i^{\sigma^\bullet(i)}}$

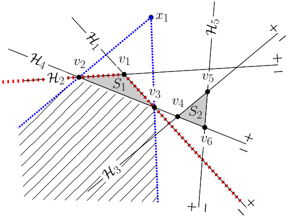
$$\boxed{\sigma^\bullet(i) h_i x^+ \leq \sigma^\bullet(i) k_i + M(1 - \delta_i(\sigma^\bullet, \sigma)),}$$

Implementarea MI este standard[4].

[4] J. Vielma și G. Nemhauser. „Modeling disjunctive constraints with a logarithmic number of binary variables and constraints”. În: *Mathematical Programming* 128.1 (2011), pag. 49–72.

Reprezentare MI – cazul exact (excluziune)

Fie un punct $x^+ \notin \mathcal{B}(\sigma^\bullet, x)$ unde $\{v_i\}$ denotă punctele extreme ale $\mathcal{A}(\sigma^\bullet)$, atunci:



- $\boxed{x^+ \notin \mathrm{Cone}\,(x, \mathcal{E}(\sigma^\bullet, x))}$ OR
- $x^+ \notin \bigcap\limits_{\sigma^\circ(i) \neq \sigma^\bullet(i)} H_i^{\sigma^\bullet(i)}$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
& M(1-\alpha) \geq |x^+ - x - \sum_j \beta_j v_j|, \\
& \quad |\beta_j| \leq M\delta(\sigma^\circ, \sigma), \ \forall j \text{ s.t. } v_j \notin \mathcal{E}(\sigma^\bullet, \sigma^\circ), \\
& \quad \beta_j \leq M\gamma_j, \\
& \quad \gamma_j \leq \delta(\sigma^\circ, \sigma), \forall j \text{ s.t. } v_j \notin \mathcal{E}(\sigma^\bullet, \sigma^\circ), \\
& \quad \sum_j \gamma_j > 0,
\end{aligned}
}
$$

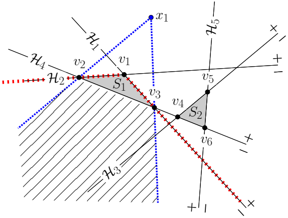
$$
\begin{aligned}
& -\sigma^\bullet(i) h_i x^+ \leq -\sigma^\bullet(i) k_i + M[\delta_i(\sigma^\bullet, \sigma) + \alpha + \rho_i], \\
& \quad \sum_i \rho_i < N
\end{aligned}
$$

Implementarea MI este standard[5].

[5] J. Vielma și G. Nemhauser. „Modeling disjunctive constraints with a logarithmic number of binary variables and constraints”. În: *Mathematical Programming* 128.1 (2011), pag. 49–72.

Reprezentare MI – cazul exact (excluziune)

Fie un punct $x^+ \notin \mathcal{B}(\sigma^\bullet, x)$ unde $\{v_i\}$ denotă punctele extreme ale $\mathcal{A}(\sigma^\bullet)$, atunci:



$$
\begin{aligned}
M(1-\alpha) &\geq |x^+ - x - \sum_j \beta_j v_j|,\\
|\beta_j| &\leq M\delta(\sigma^\circ, \sigma),\ \forall j \text{ s.t. } v_j \notin \mathcal{E}(\sigma^\bullet, \sigma^\circ),\\
\beta_j &\leq M\gamma_j,\\
\gamma_j &\leq \delta(\sigma^\circ, \sigma), \forall j \text{ s.t. } v_j \notin \mathcal{E}(\sigma^\bullet, \sigma^\circ),\\
\sum_j \gamma_j &> 0,
\end{aligned}
$$

- $x^+ \notin \mathrm{Cone}\,(x, \mathcal{E}(\sigma^\bullet, x))$ OR
- $\boxed{x^+ \notin \bigcap_{\sigma^\circ(i) \neq \sigma^\bullet(i)} H_i^{\sigma^\bullet(i)}}$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
-\sigma^\bullet(i) h_i x^+ &\leq -\sigma^\bullet(i) k_i + M[\delta_i(\sigma^\bullet, \sigma) + \alpha + \rho_i],\\
\sum_i \rho_i &< N
\end{aligned}
}
$$

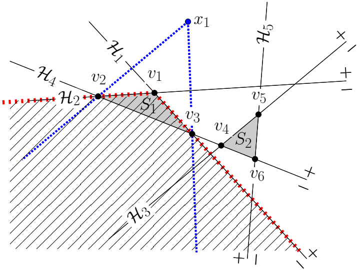
Implementarea MI este standard[5].

[5] J. Vielma și G. Nemhauser. „Modeling disjunctive constraints with a logarithmic number of binary variables and constraints”. În: *Mathematical Programming* 128.1 (2011), pag. 49–72.

Cazul simplificat – I

Formulările exacte sunt complexe datorită $\mathrm{Cone}(\sigma^\bullet, x) \Rightarrow$ să-l ignorăm!

Idee: σ^+ caracterizează regiunea umbră/vizibilă și este constrâns de poziția curentă (σ) și de obstacol ($\sigma^\bullet$) $\Rightarrow$ constrângem σ^+ a.î. să apară doar "half-space"-urile care separă obstacolul de poziția curentă a agentului.



- dacă $\delta_i(\sigma^\bullet, \sigma) = 0$, $\sigma^+(i)$ nu e constrâns
- dacă $\delta_i(\sigma^\bullet, \sigma) = 1$, $\delta_i(\sigma^\bullet, \sigma^+) = 0$

(i) pentru $x^+ \in \mathcal{B}(\sigma^\bullet, \sigma)$:

$$\sum_i \delta_i(\sigma^\bullet, \sigma) \cdot \delta_i(\sigma^\bullet, \sigma^+) = 0,$$

(ii) pentru $x^+ \notin \mathcal{B}(\sigma^\bullet, \sigma)$:

$$\sum_i \delta_i(\sigma^\bullet, \sigma) \cdot \delta_i(\sigma^\bullet, \sigma^+) > 0,$$

Cazul simplificat – II

Constrângerile sunt liniare numai dacă σ este cunoscut $\Rightarrow$ enumera fiecare celulă fezabilă σ° și oferă o descriere pe bucăți !

Să presupunem că obstacolul este $\mathcal{A}(\sigma^\bullet)$. Atunci poziția viitoare $x^+ \in \mathcal{A}(\sigma^+)$ este constrânsă după cum urmează:

(i) pentru $x^+ \in \mathcal{B}(\sigma^\bullet, \sigma)$:

$$\sum_i \delta_i(\sigma^\bullet, \sigma^\circ) \cdot \delta_i(\sigma^\bullet, \sigma^+) \leq N\delta(\sigma^\circ, \sigma),\ \forall \sigma^\circ \in \Sigma^\circ$$

(ii) pentru $x^+ \notin \mathcal{B}(\sigma^\bullet, \sigma)$:

$$\sum_i \delta_i(\sigma^\bullet, \sigma^\circ) \cdot \delta_i(\sigma^\bullet, \sigma^+) > -N\delta(\sigma^\circ, \sigma),\ \forall \sigma^\circ \in \Sigma^\circ$$

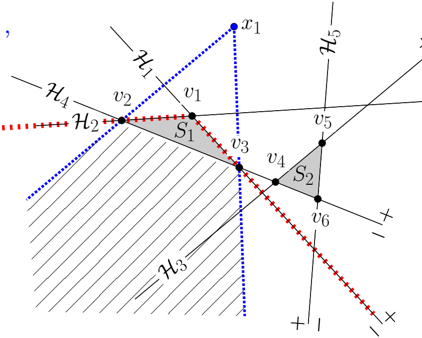
- toate inegalitățile sunt relaxate, cu excepția celei pentru care $\sigma = \sigma^\circ$
- aceasta NU este o formulare "big-M" $\Rightarrow$ fără probleme numerice

Exemplu ilustrativ

Să ne re-amintim că $\mathcal{B}(\sigma_1, x_1) = \mathrm{Cone}(x_1, S_1) \cap \mathcal{H}_1^- \cap \mathcal{H}_2^-$ și $\mathcal{B}(\sigma_1, \sigma) = \mathcal{H}_1^- \cap \mathcal{H}_2^-$.

$$
\begin{aligned}
x^+ &= x + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3, \\
&\ldots\ldots \\
&\beta_3 \leq M\left(5 - \sigma(1) - \sigma(2) - \sigma(3) - \sigma(4) - \sigma(5)\right), \\
&\ldots\ldots \\
&\beta_1 \geq 0,\ \beta_2 \geq 0,\ \beta_3 \geq 0, \\
-h_1 x^+ &\leq -k_1 + M(1 - \sigma(1)), \\
-h_2 x^+ &\leq -k_2 + M(1 - \sigma(2)), \\
h_3 x^+ &\leq \quad k_3 + M\sigma(3), \\
h_4 x^+ &\leq \quad k_4 + M\sigma(4), \\
h_5 x^+ &\leq \quad k_5 + M\sigma(5).
\end{aligned}
$$

$x^+ \in \mathcal{B}(\sigma_1, x_1)$



Exemplu ilustrativ

Avem că $x^+ \in \mathcal{B}(S_1 \cup S_2, \sigma) \Rightarrow x^+ \in \mathcal{B}(\sigma_1, \sigma) \cup \mathcal{B}(\sigma_2, \sigma)$ ceea ce înseamnă că

$$x^+ \in \mathcal{B}(S_1 \cup S_2, \sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma^+(1) + \sigma^+(2) & = 0 \\ \text{OR} & \\ \sigma^+(2) + \sigma^+(3) & = 0. \end{cases}$$

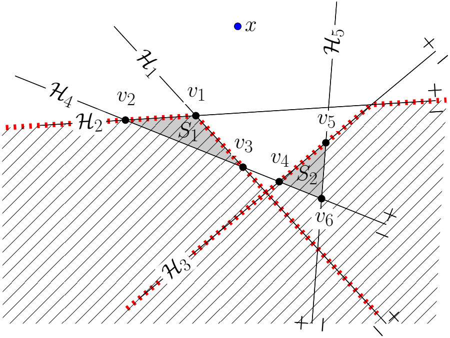
Atunci,

$$x^+ \notin \mathcal{B}(S_1 \cup S_2, \sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma^+(1) + \sigma^+(2) & > 0 \\ \text{AND} & \\ \sigma^+(2) + \sigma^+(3) & > 0. \end{cases}$$

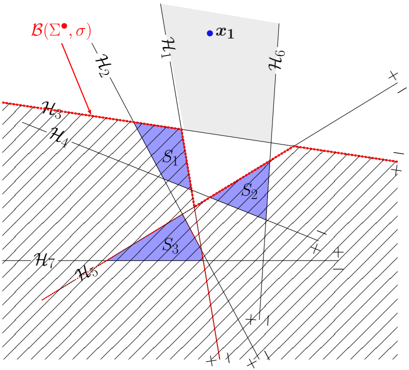
deci, poziția viitoare nu poate să fie în

- regiunea $\mathcal{H}_1^+ \cap \mathcal{H}_2^+$ ȘI
- regiunea $\mathcal{H}_2^+ \cap \mathcal{H}_3^+$

$x^+ \notin \mathcal{B}(\sigma_1, \sigma) \cup \mathcal{B}(\sigma_2, \sigma)$



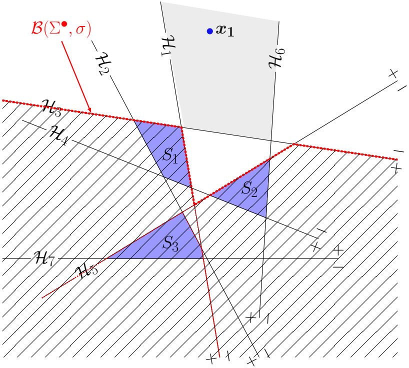
Exemplu ilustrativ (mediu multi-obstacol)



Regiunea supra-aproximată “în umbră” $\mathcal{B}(\Sigma^\bullet, \sigma)$ are reprezentarea mixtă:

$$
\begin{aligned}
\left|1-\sigma^+(1)\right| + \left|1-\sigma^+(3)\right| &\leq N(1-\alpha^1),\\
\left|1-\sigma^+(3)\right| + \left|\sigma^+(5)\right| &\leq N(1-\alpha^2),\\
\left|1-\sigma^+(1)\right| + \left|1-\sigma^+(2)\right| + \left|1-\sigma^+(3)\right| + \left|1-\sigma^+(4)\right| + \left|\sigma^+(5)\right| &\leq N(1-\alpha^3),\\
\alpha^1+\alpha^2+\alpha^3 &\geq 1.
\end{aligned}
$$

Exemplu ilustrativ (mediu multi-obstacol)



Regiunea supra-aproximată vizibilă $\overline{\mathcal{B}(\Sigma^\bullet, \sigma)}$, are reprezentarea mixtă:

$$\begin{aligned} \left|1-\sigma^+(1)\right| + \left|1-\sigma^+(3)\right| > 0, \\ \left|1-\sigma^+(3)\right| + \left|\sigma^+(5)\right| > 0, \\ \left|1-\sigma^+(1)\right| + \left|1-\sigma^+(2)\right| + \left|1-\sigma^+(3)\right| + \left|1-\sigma^+(4)\right| + \left|\sigma^+(5)\right| > 0. \end{aligned}$$

Cuprins

Condiții suficiente

Cazul multi-obstacol, multi-agent

Pentru o colecție de obstacole $\mathbb{S}$ și agenți $\mathbb{P}$, domeniul fezabil $\mathbb{R}^n \setminus S$ este acoperit complet de agenți dacă:

1. domeniul fezabil este descris de o uniune de regiuni convexe: $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{S} = \bigcup_k R_k$;
2. pentru fiecare regiune R_k există cel puțin un agent p_l astfel încât $p_l \in R_k$.

- folosim regiunile rezultate din aranjamentul de hiperplane pentru a obține R_k
- formulăm condițiile de acoperire folosind variabilele binare din reprezentarea mixtă

Problema de acoperire statică

Scop: găsiți poziționarea optimă (în funcție de o funcție de cost dată) a unui grup de agenți astfel încât spațiul fezabil să fie complet acoperit.

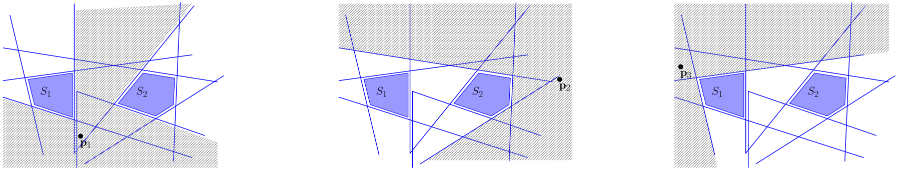
- N_a agenți și N_m regiuni
- în fiecare regiune, cel puțin 1 agent
- toți agenții trebuie să rămână în domeniul fezabil domain

$$\min_{\substack{p_1,\ldots p_{N_a},\\ \alpha_1^1,\ldots,\alpha_1^{N_a},\ldots,\alpha_{N_m}^{N_a}}} \sum_{l=1}^{N_a} ||p_l||_2$$

$$s.t.$$

$$\left.\begin{aligned} &H_k p_l \leq K_k + M\alpha_k^l, \quad \forall l = 1\ldots N_a,\\ &\sum_{l=1}^{N_a} \alpha_k^l \leq N_a - 1, \end{aligned}\right\}\forall k$$

$$\sum_{k=1}^{N_m} \alpha_k^l \leq N_m - 1, \forall l = 1,\ldots,N_a$$



Problema de acoperire statică

Scop: găsiți poziționarea optimă (în funcție de o funcție de cost dată) a unui grup de agenți astfel încât spațiul fezabil să fie complet acoperit.

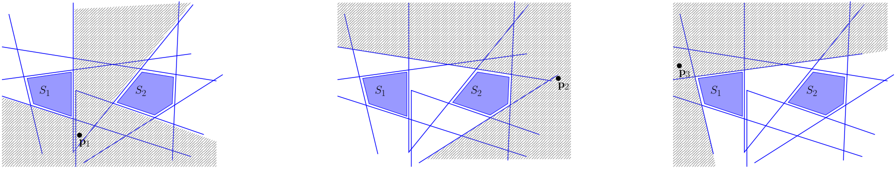
- N_a agenți și N_m regiuni
- în fiecare regiune, cel puțin 1 agent
- toți agenții trebuie să rămână în domeniul fezabil domain

$$\min_{\substack{p_1,\dots p_{N_a},\\ \alpha_1^1,\dots,\alpha_1^{N_a},\dots,\alpha_{N_m}^{N_a}}} \sum_{l=1}^{N_a} ||p_l||_2$$

$$s.t.$$

$$\left.\begin{aligned} &H_k p_l \leq K_k + M\alpha_k^l, \quad \forall l = 1\dots N_a,\\ &\sum_{l=1}^{N_a} \alpha_k^l \leq N_a - 1, \end{aligned}\right\}\forall k$$

$$\sum_{k=1}^{N_m} \alpha_k^l \leq N_m - 1, \forall l = 1,\dots,N_a$$



Problema de acoperire statică

Scop: găsiți poziționarea optimă (în funcție de o funcție de cost dată) a unui grup de agenți astfel încât spațiul fezabil să fie complet acoperit.

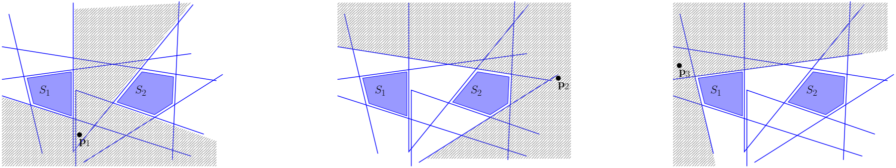
- N_a agenți și N_m regiuni
- în fiecare regiune, cel puțin τ agents
- toți agenții trebuie să rămână în domeniul fezabil domain

$$\min_{\substack{p_1,\dots p_{N_a},\\ \alpha_1^1,\dots,\alpha_1^{N_a},\dots,\alpha_{N_m}^{N_a}}} \sum_{l=1}^{N_a} ||p_l||_2$$

$$s.t.$$

$$\left.\begin{aligned} &H_k p_l \leq K_k + M\alpha_k^l, \quad \forall l = 1\dots N_a,\\ &\sum_{l=1}^{N_a} \alpha_k^l \leq N_a - \tau, \end{aligned}\right\}\forall k$$

$$\sum_{k=1}^{N_m} \alpha_k^l \leq N_m - 1, \forall l = 1, \dots, N_a$$



Problema de acoperire dinamică

Scop: găsiți traiectoria optimă (în funcție de o funcție de cost dată) a unui agent astfel încât spațiul fezabil să fie complet acoperit.

- T instanțe de timp și N_m regiuni
- agentul trebuie să treacă prin fiecare regiune măcar o dată
- agentul trebuie să rămână în domeniul fezabil domain

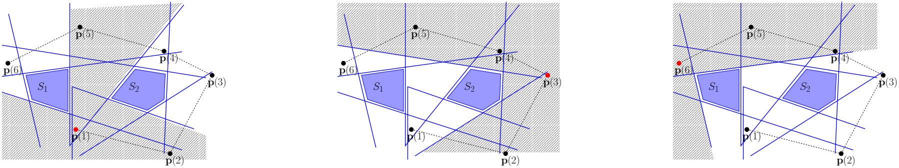
$$\min_{\substack{p(1),\ldots,p(T),\\ \alpha_1^1,\ldots,\alpha_1^T,\ldots,\alpha_{N_m}^T}} \sum_{t=1}^{T} \left(||p(t)||_Q + ||u(t)||_R\right)$$

$$s.t.$$

$$p(t+1) = Ap(t) + Bu(t),\ \forall t = 0,\ldots,T-1$$

$$\left.\begin{aligned} &H_k p(t) \leq K_k + M\alpha_k^t,\ \forall t = 1\ldots T,\\ &\sum_{t=1}^{T} \alpha_k^t \ \leq T-1, \end{aligned}\right\}\forall k$$

$$\sum_{k=1}^{N_m} \alpha_k^t \ \leq N_m - 1, \forall t = 1,\ldots,T.$$



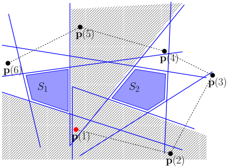
Problema de acoperire dinamică

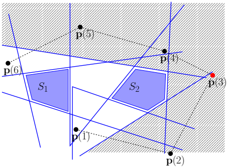
Scop: găsiți traiectoria optimă (în funcție de o funcție de cost dată) a unui agent astfel încât spațiul fezabil să fie complet acoperit.

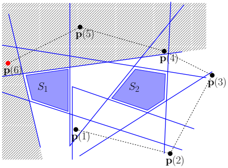
- T instanțe de timp și N_m regiuni
- agentul trebuie să treacă prin fiecare regiune măcar o dată
- agentul trebuie să rămână în domeniul fezabil domain

$$\min_{\substack{p(1),\ldots,p(T),\\ \alpha_1^1,\ldots,\alpha_1^T,\ldots,\alpha_{N_m}^T}} \sum_{t=1}^{T} \left(||p(t)||_Q + ||u(t)||_R\right)$$

$$\begin{aligned}
&s.t.\\
&p(t+1) = Ap(t) + Bu(t),\ \forall t = 0, \ldots, T-1\\
&\left.\begin{aligned}
&H_k p(t) \leq K_k + M\alpha_k^t,\ \forall t = 1 \ldots T,\\
&\sum_{t=1}^{T} \alpha_k^t \leq T-1,
\end{aligned}\right\}\forall k\\
&\sum_{k=1}^{N_m} \alpha_k^t \leq N_m - 1, \forall t = 1, \ldots, T.
\end{aligned}$$

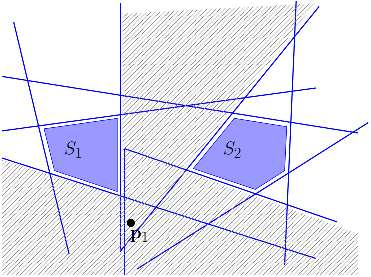




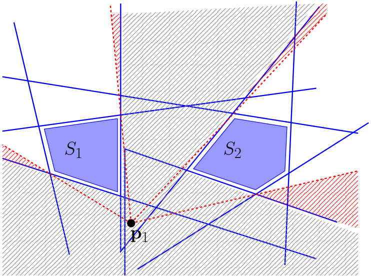


Caveat emptor

- La rezolvarea problemei de optimizare nu știm a priori dacă numărul de agenți este suficient sau dacă timpul T este suficient de mare



- Condițiile suficiente pot să fie conservative



Cuprins

Problema comunicației într-un mediu complex

Noțiunile de vizibilitate și de asigurare a comunicației într-un mediu cu obstacole sunt strâns legate. Sunt posibile mai multe variații:

- graf de comunicație staționar / dinamic (al doilea caz apare în situațiile în care agenții/obstacolele sunt mobile);
- conectivitate robustă (în sensul de redundanță, un agent este conectat cu mai mulți agenți);
- conectivitate rezilientă (în sensul că există capacitatea în sistem de a recupera conectivitatea).

Există multiple modalități (sub-optimale, heuristice) pentru a garanta comunicația într-o echipă de agenți ce se deplasează într-un mediu cu obstacole:

- penalizarea distanței dintre 2 agenți dacă aceasta a crescut prea mult;
- menținerea unei linii de comunicație (LOS – line of sight).

Conectivitate în sensul LOS

Pentru metodele LOS, implementarea se face prin *programare cu variabile mixte* ceea ce echivalent cu a impune condiții de conectivitate asupra unui graf. **Ideea**:

- considerăm o echipă de agenți $\mathcal{V} = \{v_1, \dots v_N\}$;
- enumerăm o colecție de legături, variabilă în timp, între perechi de agenți $\epsilon(k) = \{(v_i, v_j) : \ v_i, v_j \in \mathcal{V}\}$;
- construim graful variabil în timp $\mathcal{G}(k) = (\mathcal{V}, \epsilon(k))$;
- echipa este conectată la pasul $k \Leftrightarrow$ graful $\mathcal{G}(k)$ este conectat.

Doi agenți, cu pozițiile p_i, p_j, vor fi conectați (se află în LOS) dpdv al unui obstacol $\mathcal{O}$ dacă este respectată relația

$$\{p_i(k) \cdot \alpha + p_j(k) \cdot (1 - \alpha), \ \forall \alpha \in [0, 1]\} \cap \mathcal{O} = \emptyset.$$

Echivalent spus, dacă segmentul definit de pozițiile celor doi agenți intersectează obstacolul $\mathcal{O}$ nu există o linie de comunicație între cei doi.

O astfel de relație este greu de integrat în formulările standard de planificare a mișcării (mai ales în cele care necesită rezolvarea unei probleme de optimizare la fiecare pas).

Implementare MI I

Soluția propusă este[6]:

$$F_\ell^\top p_i(k) \leq \theta_\ell + M(1 - z_{i\ell}(k)), \forall i, \ell \tag{1a}$$

$$\bar{z}_{ij}(k) \geq z_{i\ell}(k) + z_{j\ell}(k) - 1, \forall i, j, \ell \tag{1b}$$

$$d_i(k) = \sum_{j \neq i} \bar{z}_{ij}(k), \forall i \tag{1c}$$

$$d_i(k) + d_j(k) \geq (N-1) - N\bar{z}_{ij}(k), \forall 1 \leq j < i \tag{1d}$$

Forțând doi agenți să stea în aceeași regiune convexă garantăm că există o linie de comunicație între ei. Mai precis:

- relația (1a) controlează prin intermediul variabilei binare $z_{i\ell}(k)$ dacă agentul i se află în interiorul regiunii $A_\ell = \{x : F_\ell^\top x \leq \theta_\ell\}$:

$$p_i(k) \in \mathcal{A}_\ell \quad \Leftrightarrow \quad z_{i\ell}(k) = 1;$$

- relațiile (1b) leagă variabilele binare $z_{i\ell}, z_{j\ell}$ de variabila binară $\bar{z}_{ij}$ ce arată că 2 agenți sunt sau nu adiacenți (se află în aceeași regiune);

Implementare MI II

- relația (1c) stochează în variabila $d_i(k)$ gradul corespunzător agentului i (câte muchii din graf se termină/încep în nodul i);
- relația (1d) impune o condiție pe gradele fiecărei perechi de noduri distincte din graf, în așa fel încât să fie garantată conectivitatea echipei ("1-connectivity").

  Mai precis: dacă suma gradelor pentru oricare două noduri ce nu sunt adiacente este $\geq N-1$, atunci graful este conectat.

O astfel de abordare este sub-optimală deoarece se fac presupuneri restrictive:

- se pre-calculează regiunile $\mathcal{A}_\ell$ ce descriu spațiul fezabil iar condiția de conectivitate în graf este una suficientă (nu necesară și suficientă)
- probleme vor apărea la dimensiuni mari ale echipei datorită conservatismului condiției de conectivitate și datorită numărului ridicat de variabile binare.

.

[6] R. J. Afonso și alții. „Task allocation and trajectory planning for multiple agents in the presence of obstacle and connectivity constraints with mixed-integer linear programming". În: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 30.14 (2020), pag. 5464–5491.

Cuprins

Descrierea modelului

- dinamica continuă de tip “dublu integrator”:

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t),\ y(t) = C_c x(t),$$

cu starea $x(t)$ – compusă din poziție și viteză, comandă $u(t) \in \mathbb{R}^2$ – accelerația și ieșirea $y(t) \in \mathbb{R}^2$ – componenta de poziție a stării și

$$A_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},\ B_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix},\ C_c = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

- pasul de eșantionare T dă dinamica discretă:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k,\ y_k = Cx_k,$$

cu matricele A, B, C:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & T \cdot \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \cdot \mathbf{I} \\ T \cdot \mathbf{I} \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

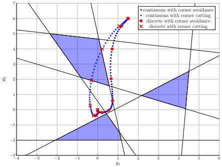
- problema MPC cu “corner cutting avoidance”:

$$u^* = \arg \min_{u_k, \sigma_{k+1}, \dots u_{k+N_p-1}, \sigma_{k+N_p}} \sum_{i=0}^{N_p-1} \|x_{k+i+1}\|_Q + \|u_k\|_R,$$

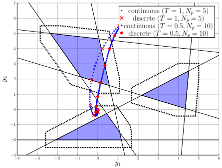
$$\text{s.t. } x_{k+i+1} = Ax_{k+i} + Bu_{k+i}.\ y_{k+i} = Cx_{k+i},$$

Comportament intra-interval pentru dinamica dublu integrator

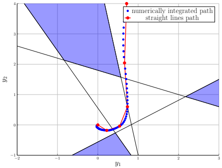
- traiectorii cu și fără tăierea colțurilor (cu $T = 1$, $N_p = 5$)



- scalare obstacole (pentru $T = 1$)



- aproximare prin linii drepte (pentru $T = 1$)



Comparați între diverse strategii

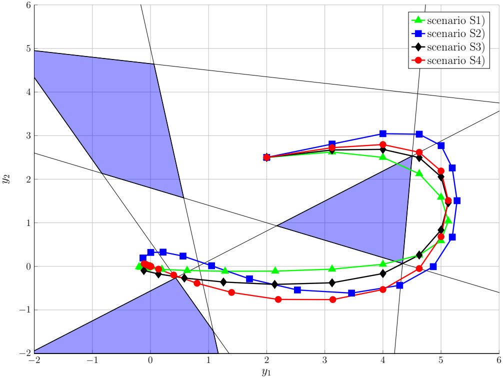
S1 evitare de obstacole, fără garanții “corner cutting avoidance”

S2 evitarea de obstacole, cu scalare pentru a lua în calcul o regiune de siguranță $4 \cdot \frac{T^2}{2}\mathcal{U}$

S3 evitare de obstacole cu garanții “corner cutting avoidance”, cazul exact

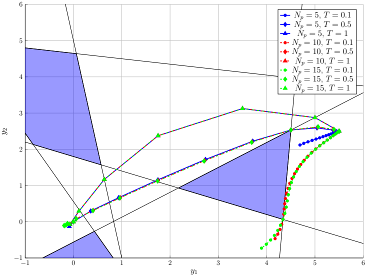
S4 evitare de obstacole cu garanții “corner cutting avoidance”, cazul aproximat

- timpii de simulare 0.0957, 0.6353, 11.7452 and 0.0232 respectively
- lungimea traiectoriei 10.0180, 11.5498, 10.1024 and 10.8133



Probleme de performanță și robustețe

- diverse lungimi ale orizontului de predicție ($N_p \in \{5, 10, 15\}$)
- multipli pași de eșantionare ($T \in \{0.1, 0.5, 1\}$)



- timpul de calcul (atât în medie, cât și extremele) crește odată cu lungimea orizontului de predicție
- un timp de eșantionare mai mare forțează un comportament mai grosier asupra agentului: trebuie să facă pași mai mari și să renunțe la o parte mai mare a domeniului fezabil (ducând astfel la calcule mai complexe)
- elementul definitoriu este timpul de eșantionare: traiectoriile aproape coincid pentru $T = 0.5$ și $T = 1$ și sunt similare pentru $T = 0.1$, indiferent de dimensiunea orizontului de predicție

Cuprins

Concluzii

- aranjamentele hiperplane oferă un instrument pentru descrierea eficientă a regiunilor neconvexe "în umbră"
- formulările cu variabile mixte apar în mod natural pentru acest tip de obiecte geometrice
- ca de obicei, trebuie să alegem între reprezentări exacte (dar dificil de implementat) și aproximări (de obicei mult mai eficiente, dar restricționate într-un sens sau altul)
- se aplică pentru problema conectivității, acoperirii spațiului și evitarea coliziunii cu garanții de "corner cutting avoidance"

Referințe

[1] R. J. Afonso, M. R. Maximo și R. K. Galvão. „Task allocation and trajectory planning for multiple agents in the presence of obstacle and connectivity constraints with mixed-integer linear programming". În: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 30.14 (2020), pag. 5464–5491.

[2] R. Deits și R. Tedrake. „Efficient mixed-integer planning for UAVs in cluttered environments". În: *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*. 2015.

[3] M. H. Maia și R. K. H. Galvão. „On the use of mixed-integer linear programming for predictive control with avoidance constraints". În: *Int. J. Robust Nonlinear Control* 19 (2009), pag. 822–828.

[4] A. Richards și O. Turnbull. „Inter-sample avoidance in trajectory optimizers using mixed-integer linear programming". În: *Int. J. Robust Nonlinear Control* 25 (2015), pag. 521–526.

[5] J. Vielma și G. Nemhauser. „Modeling disjunctive constraints with a logarithmic number of binary variables and constraints". În: *Mathematical Programming* 128.1 (2011), pag. 49–72.