Probabilități și Statistică

Bazat pe cursul domnului Niculescu
și laboratorul doamnei Cojocea
Tehnoredactat de Gabriel Majeri

5 februarie 2020

Cuprins

1 Laboratoare **2**

1.1 Probabilități și evenimente 2

1.2 Variabile aleatoare 7

1.3 Operații cu variabile aleatoare independente 10

1.3.1 Operații unare 10

1.3.2 Operații binare (în cazul în care sunt independente) 11

1.4 Variabile aleatoare bidimensionale 14

1.5 Variabile aleatoare continue 17

1.6 Repartiții 23

1.7 Regresie liniară 25

2 Modele de examen rezolvate **26**

2.1 Examen 2019 26

2.2 Colocviu 2019 29

2.2.1 Bilet 1 29

2.2.2 Bilet 3 31

Capitolul 1

Laboratoare

1.1 Probabilități și evenimente

Notăm cu $(\Omega, \mathcal{K}, \mathbb{P})$ un câmp de probabilitate.

Exercițiul 1. Un om de afaceri a investit în trei societăți comerciale. S-a stabilit că o investiție făcută la prima societate devine rentabilă după un an de activitate cu o probabilitate de 0.4, o investiție la a doua cu o probabilitate de 0.8 și la ultima cu o probabilitate de 0.5.

Știind că activitățile celor trei societăți sunt independente, se cere probabilitatea ca după un an de activitate:

a) să devină rentabile investițiile la toate cele trei societăți

b) cel puțin una dintre investii să devină rentabilă

c) să devină rentabile fix **două** dintre investiții

Rezolvare.

a) Notăm cu A_i probabilitatea ca investiția $i \in \overline{1,3}$ să fie profitabilă. Atunci $A =$ probabilitatea ca toate să fie rentabile $= A_1 \cap A_2 \cap A_3$. Avem că:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\underbrace{A_1 \cap A_2 \cap A_3}_{\text{independente}}) \\ &= \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3) \\ &= 0.4 \cdot 0.8 \cdot 0.5 = 0.16\end{aligned}$$

b) Notăm cu $B =$ probabilitatea ca cel puțin una dintre investiții să devină rentabilă.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\ &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) \\ &\qquad - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) \\ &\quad + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= 0.4 + 0.8 + 0.5 - 0.4 \cdot 0.8 - 0.4 \cdot 0.5 - 0.8 \cdot 0.5 + 0.16 \\ &= 0.94\end{aligned}$$

Alternativ, considerăm probabilitatea să nu fie rentabilă nicio investiție, și luăm complementul:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(\overline{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}}) \\ &= 1 - ((1-0.4)\cdot(1-0.8)\cdot(1-0.5)) \\ &= 1 - 0.06 \\ &= 0.94\end{aligned}$$

c) Notăm cu $C =$ probabilitatea ca fix două investiții să devină rentabile.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}((A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3)) \\ &= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) + \mathbb{P}(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) + \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(A_2)\cdot\mathbb{P}(\overline{A_3}) + \mathbb{P}(A_1)\cdot\mathbb{P}(\overline{A_2})\cdot\mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(\overline{A_1})\cdot\mathbb{P}(A_2)\cdot\mathbb{P}(A_3) \\ &= 0.4\cdot 0.8\cdot 0.5 + 0.4\cdot 0.2\cdot 0.5 + 0.6\cdot 0.8\cdot 0.5 = 0.44\end{aligned}$$

□

Exercițiul 2. Se știe că $\mathbb{P}(A) = 0.5$, $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.8$. Determinați valoarea lui $\mathbb{P}(B)$ în următoarele situații:

a) A și B sunt independente

b) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

c) $\mathbb{P}(B \mid A) = 0.3$

Rezolvare.

a) Putem extrage probabilitatea reuniunii din formula pentru intersecție:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Deoarece evenimentele sunt independente, putem rescrie $A \cap B$:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$$

De aici putem extrage $\mathbb{P}(B)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + (1 - \mathbb{P}(A))\cdot\mathbb{P}(B) &\iff \\ \mathbb{P}(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A)}{1 - \mathbb{P}(A)} &\iff \\ \mathbb{P}(B) = \frac{0.8 - 0.5}{1 - 0.5} &\iff \\ \mathbb{P}(B) = 0.6 &\end{aligned}$$

b) Din faptul că $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ avem că:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A) \iff \\ \mathbb{P}(B) &= 0.8 - 0.5 \iff \\ \mathbb{P}(B) &= 0.3 \end{aligned}$$

c) Aplicăm teorema lui Bayes:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B \mid A) &= \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \\ \mathbb{P}(B \mid A) &= \frac{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)}{\mathbb{P}(A)} \\ \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B \mid A) \cdot \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A \cup B) \\ \mathbb{P}(B) &= 0.3 \cdot 0.5 - 0.5 + 0.8 = 0.45 \end{aligned}$$

□

Exercițiul 3. Într-un magazin se găsesc 100 de calculatoare de același tip, dintre care 30 de la furnizorul F_1, 50 de la furnizorul F_2 și 20 de la furnizorul F_3. S-a observat că apar defecțiuni în perioada de garanție la 2% dintre calculatoarele fabricate de F_1, 4% dintre calculatoarele fabricate de F_2, și 5% dintre cele ce provin de la F_3.

Determinați probabilitatea ca:

a) un calculator din magazin se defectează

b) un calculatoare care se defectează în perioada de garanție să provină de la al doilea furnizor.

c) un calculator care provine de la primul sau de la al treilea furnizor să se defecteze în perioada de garanție.

d) un calculator care nu se defectează în perioada de garanție să provină de la primul sau de la al doilea furnizor.

Rezolvare. Notăm cu X evenimentul că un calculator se defectează. Notăm cu A_i evenimentul că un calculatorul provine de la F_i, $i \in \overline{1,3}$.

Avem că:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1) &= \frac{30}{100} = 0.3 \\ \mathbb{P}(A_2) &= \frac{50}{100} = 0.5 \\ \mathbb{P}(A_3) &= \frac{20}{100} = 0.2 \end{aligned}$$

Scriem din enunț probabilitățile ca un calculator să se strice sub forma de probabilități condiționate:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \mid A_1) &= 0.02 \\ \mathbb{P}(X \mid A_2) &= 0.04 \\ \mathbb{P}(X \mid A_3) &= 0.05 \end{aligned}$$

a) Observăm că A_1, A_2, A_3 formează o *partiție*, deci putem aplica formula probabilității condiționate.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(X \mid A_1) \\ + \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(X \mid A_2) \\ + \mathbb{P}(A_3) \cdot \mathbb{P}(X \mid A_3) \\ = 0.3 \cdot 0.02 + 0.5 \cdot 0.04 + 0.2 \cdot 0.05 = 0.036\end{aligned}$$

b) Aplicăm teorema lui Bayes:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_2 \mid X) &= \frac{\mathbb{P}(X \mid A_2) \cdot \mathbb{P}(A_2)}{\mathbb{P}(X)} \\ &= \frac{0.04 \cdot 0.5}{0.036} = 0.55\end{aligned}$$

c) Putem rescrie probabilitatea condiționată folosind definiția:

$$\mathbb{P}(X \mid (A_1 \cup A_3)) = \frac{\mathbb{P}(X \cap (A_1 \cup A_3))}{\mathbb{P}(A_1 \cup A_3)}$$

Acum ne folosim de faptul că A_1 și A_3 sunt incompatibile, deci și $X \cap A_1$ și $X \cap A_3$ sunt incompatibile:

$$= \frac{\mathbb{P}(X \cap A_1) + \mathbb{P}(X \cap A_3)}{\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_3)}$$

Extragem $X \cap A_i$ din Bayes:

$$\begin{aligned}&= \frac{\mathbb{P}(X \mid A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(X \mid A_3) \cdot \mathbb{P}(A_3)}{\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_3)} \\ &= \frac{0.02 \cdot 0.3 + 0.05 \cdot 0.2}{0.3 + 0.2} = 0.032\end{aligned}$$

d) Rescriem probabilitatea condiționată folosind definiția:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((A_1 \cup A_2) \mid \overline{X}) &= \frac{\mathbb{P}((A_1 \cup A_2) \cap \overline{X})}{\mathbb{P}(\overline{X})} \\ &= \mathbb{P}((A_1 \cap \overline{X}) \cup (A_2 \cap \overline{X})) \\ &= \mathbb{P}(A_1 \cap \overline{X}) + \mathbb{P}(A_2 \cap \overline{X}) \\ &= \mathbb{P}(\overline{X} \mid A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(\overline{X} \mid A_2) \cdot \mathbb{P}(A_2) \\ &= (1 - \mathbb{P}(X \mid A_1)) + (1 - \mathbb{P}(X \mid A_2)) = 0.8\end{aligned}$$

□

Teoremă (Inegalitatea lui Boole)**.**

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - (n-1)$$

Exercițiul 4. Un agregat are trei componente la care pot să apară defecțiuni de funcționare cu probabilitățile 0.075, 0.09, respectiv 0.082.

a) probabilitatea minimă ca agregatul să funcționeze

b) probabilitatea maximă ca agregatul să funcționeze

Rezolvare. Notăm cu A_i evenimentul să funcționeze componenta $i \in \overline{1,3}$.

Atunci avem din ipoteză:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{A_1}) &= 0.075 = 0.925\\ \mathbb{P}(\overline{A_2}) &= 0.09 = 0.91\\ \mathbb{P}(\overline{A_3}) &= 0.082 = 0.918\end{aligned}$$

Probabilitatea ca agregatul să funcționeze este notată cu

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

a) Din inegalitatea lui Boole avem că:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &\geq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - 2\\ &= 0.925 + 0.91 + 0.918 - 2 = 0.753\end{aligned}$$

b) Probabilitatea maximă a intersecției este cel mult probabilitatea celui mai improbabil eveniment:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \text{min}(\mathbb{P}(A_1), \mathbb{P}(A_2), \mathbb{P}(A_3))\\ &= 0.91\end{aligned}$$

□

Exercițiul 5. Avem două urne. Prima urnă conține 3 bile albe și 2 bile negre iar urna conține și 3 bile albe și 2 bile negre. Din una dintre aceste urne s-a extras o bilă de culoare albă.

Care este probabilitatea ca această bilă să provină din prima urnă?

Rezolvare. Notăm cu B_i probabilitatea că bila extrasă provine din urna $i \in \overline{1,2}$.

Notăm cu A probabilitatea că bila extrasă este albă.

Atunci avem că:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_2) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(A \mid B_1) = \frac{3}{5}$$

$$\mathbb{P}(A \mid B_2) = \frac{2}{5}$$

Noi vrem să determinăm probabilitatea evenimentului că bila este din urna 1, știind deja că este albă.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_1 \mid A) &= \frac{\mathbb{P}(A \mid B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}\end{aligned}$$

□

1.2 Variabile aleatoare

Exercițiul 1. Fie $f_{XY} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$,

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} ke^{-2x-3y}, x, y \in \mathbb{R}_+ \\ 0, \text{ altfel} \end{cases}$$

Determinați valorile parametrului real k astfel încât f_{XY} să fie densitatea comună a două variabile aleatoare continue X, Y.

Condiții care trebuie îndeplinite:

i) $k > 0$ ca să fie pozitivă funcția

ii)

$$\begin{gathered}\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = 1 \\ \iff k \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x-3y} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = 1 \\ \iff k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x} (\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3y} \,\mathrm{d}y) \,\mathrm{d}x = 1 \\ \iff k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x} \left. \frac{e^{-3y}}{-3} \right|_0^{+\infty} \mathrm{d}x = 1 \\ \iff \frac{k}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x} \,\mathrm{d}x = 1 \\ \iff \frac{k}{3} \cdot \left. \frac{e^{-2x}}{-2} \right|_0^{+\infty} = 1 \\ \iff \frac{k}{3} \cdot \frac{1}{2} = 1 \\ \iff k = 6\end{gathered}$$

Exercițiul 2. Fie $X \sim \mathcal{B}(3, 0.1)$.

Calculați:

1. $P(X = 3) = p_X(3) = \texttt{dbinom}(3, \texttt{size} = 3, \texttt{prob} = 0.1) = 0.001$
2. $P(X \leq 1) = F_X(1) = \texttt{pbinom}(1, \texttt{size} = 3, \texttt{prob} = 0.1) = 0.972$

Exercițiul 3. Fie $X \sim Poisson(8)$.

Calculați:

1. $P(X = 3) = p_X(3) = \texttt{dpois}(3, \texttt{lambda} = 8) = 0.02862614$
2. $P(X < 2) = P(X \leq 1) = \texttt{ppois}(2, \texttt{lambda} = 8) = 0.003019164$

Exercițiul 4. Avem 10 bile negre și 8 bile albe.

Extragem 5 bile fără revenire. Notăm cu $X =$ numărul de bile negre extrase.

Calculați:

1. $P(X = 3) = p_X(3) = \texttt{dhyper}(3, \texttt{m} = 10, \texttt{n} = 90, \texttt{k} = 4) = 0.3921569$
2. $P(X \leq 1) = F_X(1) = \texttt{phyper}(1, \texttt{m} = 10, \texttt{n} = 90, \texttt{k} = 4) = 0.08823529$

Exercițiul 5. Avem $X \sim G(0.3)$.

1. $p_X(3) = \texttt{dgeom}(3, \texttt{prob} = 0.3) = 0.1029$
2. $F_X(1) = \texttt{pgeom}(1, \texttt{prob} = 0.3) = 0.51$

Exercițiul 6. Dintr-o urnă ce conține 10 bile mov și 90 bile galbene se extrag 4 bile cu revenire. Notăm cu X variabila aleatoare ce indică numărul bilelor mov obținute în urma celor 4 extrageri.

Să se determine

a) repartiția variabilei aleatoare X

b) probabilitățile $\mathbb{P}(X = 2)$, $\mathbb{P}(X \geq \frac{1}{2})$, $\mathbb{P}(X \leq \frac{\pi}{3})$, $\mathbb{P}(X < 3 \mid X > 1)$.

Rezolvare. Notăm cu $p = \frac{1}{10}$ probabilitatea să extragem o bilă de culoare mov, și cu $q = \frac{9}{10}$ să extragem o bilă galbenă.

Notăm cu p_i probabilitatea să extragem i bile de culoare mov din cele patru. Analog avem și q_i.

a) Calculăm repartiția lui X:

$$X\colon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix}$$

$$p_0 = \mathbb{P}(X = 0) = q^4 = \left(\frac{9}{10}\right)^4$$
$$p_1 = \mathbb{P}(X = 1) = \mathrm{C}_4^1 \cdot p \cdot q^3 = 4 \cdot \frac{9^3}{10^4}$$
$$p_2 = \mathbb{P}(X = 2) = \mathrm{C}_4^2 \cdot p^2 \cdot q^2$$
$$p_3 = \mathbb{P}(X = 3) = \mathrm{C}_4^3 \cdot p^3 \cdot q$$
$$p_4 = \mathbb{P}(X = 4) = p^4 = \left(\frac{1}{10}\right)^4$$

b) Calculăm probabilitățile:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 2) &= \mathrm{C}_4^2 \cdot p^2 \cdot q^2 \\
\mathbb{P}(X \geq \frac{1}{2}) &= \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) \\
\mathbb{P}(X \leq \frac{\pi}{3}) &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) \\
\mathbb{P}(X < 3 \mid X > 1) &= \mathbb{P}(X = 2 \mid X > 1)
\end{aligned}$$

□

Exercițiul 7. La un examen participă 100 de studenți, dintre care 5 copiază. Se realizează în sală 3 verificări simultane. Notăm cu X variabila aleatoare ce indică numărul de studenți depistați cu fraudă din cele trei verificări. Determinați:

a) repartiția variabilei aleatoare X

b) probabilitatea ca toți cei trei studenți verificați să fi fost fraudulenți știind că cel puțin unul dintre ei a fost prins copiind

Rezolvare. Fie N numărul total de studenți din care extragem, N_1 este numărul studenților care copiază, N_2 este numărul studenților care nu copiază. Pentru o extragere de n studenți, n_1 este numărul studenților găsiți că copiază, n_2 este numărul studenților care nu copiau, dintre cei verificați.

Formula probabilității extragerilor fără revenire: fie $N = N_1 + N_2$:

$$\mathbb{P}(n, n_1) = \frac{\mathrm{C}_{N_1}^{n_1} \cdot \mathrm{C}_{N_2}^{n_2}}{\mathrm{C}_N^n}$$

Notăm cu $p = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$ probabilitatea să prindem un student fraudulent.

$$p_0 = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{\mathrm{C}_5^0 \cdot \mathrm{C}_{95}^3}{\mathrm{C}_{100}^3}$$

□

Repartiții discrete comune

- $X \sim$ Unif$(1, 2, ...n)$: aruncarea unui zar echilibrat cu n fețe.
- $X \sim$ Bern(p): aruncarea unei monede care are probabilitatea p să pice cap (dacă $p = \frac{1}{2}$ moneda este echilibrată).
- $X \sim$ Binom(n, p): repartiția binomială modelează de câte ori pică cap dacă arunci de n ori o monedă care are probabilitatea p să pice cap.

  În mod echivalent: modelează câte bile albe obții, dacă extragi *cu revenire* n bile, dintr-o urnă în care ai $p\%$ bile albe.

- $X \sim$ Hiper(N, M, n): repartiția hipergeometrică modelează de câte ori obții o bilă albă dacă extragi *fără revenire* n bile dintr-o urnă cu N bile albe și M bile negre.
- $X \sim$ Geom(p)
- $X \sim$ Poisson(λ)
- $X \sim$ Exp(λ)

Exercițiul 8. Fie $X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$ independente. Să se afle densitatea comună a lui $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_1 - X_2$.

$$g(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_1 - x_2 = y_2 \end{cases}$$

$$\implies x_1 = g_1^{-1}(y) = \frac{y_1 + y_2}{2}, x_2 = g_2^{-1}(y) = \frac{y_1 - y_2}{2}, \text{ soluție unică}$$

$$\implies g \text{ bijectivă}$$

$$J$$

$$X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(0,1) \implies f_{X_1}(x) = f_{X_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{x^2}{2}$$

1.3 Operații cu variabile aleatoare independente

$$X\colon \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}, Y\colon \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix}$$

1.3.1 Operații unare

Fie $c \in \mathbb{R}$. Atunci avem că $c + X$ este

$$c + X\colon \begin{pmatrix} c + x_1 & c + x_2 & \dots & c + x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

Analog pentru $c - X$, $c \cdot X$.

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci avem că X^α este

$$X^\alpha\colon \begin{pmatrix} x_1^\alpha & x_2^\alpha & \dots & x_n^\alpha \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

1.3.2 Operații binare (în cazul în care sunt independente)

X, Y sunt independente dacă și numai dacă

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \cdot \mathbb{P}(Y = y), \forall x, y$$

$$X + Y \colon \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & ... & x_1 + y_m & x_2 + y_1 & ... & x_n + y_m \\ p_1 \cdot q_1 & ... & p_1 \cdot q_m & p_2 \cdot q_1 & ... & p_n \cdot q_n \end{pmatrix}$$

Analog pentru $X - Y, X \cdot Y$.

Pentru $\frac{X}{Y}$ avem

$$\frac{X}{Y} = X \cdot Y^{-1}$$

Dacă am $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă, atunci

$$g(X) \colon \begin{pmatrix} g(x_1) & ... & g(x_n) \\ p_1 & ... & p_n \end{pmatrix}$$

Exercițiul 1. Fie variabilele aleatoare discrete

$$X \colon \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p + \frac{1}{6} & q + \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, Y \colon \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 2p - q & 12p^2 \end{pmatrix}$$

a) Determinați $X + Y = ?$

b) Aflați valorile lui a pentru care $\mathbb{P}((X + Y) = 0) > \frac{2}{9}$.

Rezolvare. În primul rând, trebuie să determinăm exact probabilitățile lui X și Y, calculând valorile parametrilor reali p și q.

Ne folosim de faptul că suma probabilităților trebuie să fie 1:

$$\begin{cases} p + \frac{1}{6} + q + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 \\ \frac{1}{3} + 2p - q + 12p^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} p + q = \frac{1}{6} \\ 12p^2 + 2p - q = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Delta = 49 \implies p = \frac{1}{6}, q = 0$$

Deci variabilele noastre aleatoare sunt:

$$X \colon \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, Y \colon \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Acum putem calcula mult mai ușor cerințele:

a)

$$X + Y \colon \begin{pmatrix} -1 + a & -1 & 0 & a & 0 & 1 & 1 + a & 1 & 2 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$X + Y \colon \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 + a & 1 + a & 1 & 2 & a \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

b) Facem suma tuturor probabilităților corespunzătoare valorii 0, inclusiv cele care depind de a și ar putea fi 0.

$$\mathbb{P}((X+Y)=0) > \frac{2}{9} \iff$$
$$\frac{2}{9}+\frac{1}{9} > \frac{2}{9}, \text{ dacă } a \in \{-1, 0, 1\} \iff$$
$$\begin{cases} a = 1 \\ a = 0 \\ a = -1 \end{cases}$$

c) Determinați $\mathbb{E}$ și Var pentru $5X - 3Y$.

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{E}(5X-3Y) = 5\mathbb{E}(X) - 3\mathbb{E}(Y) \\ \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = -\frac{1}{3}+0+\frac{1}{3} = 0 \end{array}\right\} \implies$$
$$\implies \mathbb{E}(5X-3Y) = 0$$

Pentru a calcula varianța, avem nevoie să calculăm

$$X^2\colon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Acum putem aplica formula:

$$\begin{aligned} \text{Var}(5X-3Y) &= 25\,\text{Var}(X) + 9\,\text{Var}(Y) \\ \text{Var}(X) = \text{Var}(Y) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

□

Exercițiul 2. Fie

$$X\colon \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.2+p & 0.25+p & 0.3-2p & 0.25 \end{pmatrix}$$

Aflați parametrul real p pentru care $\mathbb{P}(X < 2.5) = 0.7$.

Rezolvare.

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X < 2.5) = 0.7 \\ \iff &\mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) = 0.7 \\ \iff &0.45 + 2p = 0.7 \\ \iff &p = \frac{0.7-0.45}{2} = \frac{0.25}{2} \\ \iff &p = 0.125 \end{aligned}$$

□

Exercițiul 3. Fie

$$V\colon \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.2+p & 0.4-2p & 0.4+p \end{pmatrix}$$

Determinați valoarea parametrului real p pentru care Var(V) este

- maximă
- minimă

Rezolvare.

$$\begin{aligned} \text{Var}(V) &= \mathbb{E}(V^2) - \mathbb{E}(V)^2 = 2p + 0.56 \\ \mathbb{E}(V^2) &= 0.2 + p + 0.6 - 8p + 3.6 + 9p = 2p + 5.4 \\ \mathbb{E}(V) &= 0.2 + p + 0.8 - 4p + 1.2 + 3p = 2.2 \end{aligned}$$

unde

$$V^2\colon \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0.2+p & 0.4-2p & 0.4+p \end{pmatrix}$$

Pentru a determina valorile minime și maxime ale varianței, punem condițiile ca V^2 să fie probabilitate:

$$\begin{cases} 0 \le 0.2 + p \le 1 \\ 0 \le 0.4 - 2p \le 1 \\ 0 \le 0.4 + p \le 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -0.2 \le p \le 0.8 \\ -0.4 \le -2p \le 0.6 \\ -0.4 \le p \le 0.6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -0.2 \le p \le 0.8 \\ -0.3 \le p \le 0.2 \\ -0.4 \le p \le 0.6 \end{cases}$$

$$\implies p \in [-0.2, 0.2]$$

Varianța este o funcție de gradul 1 în p, deci valoarea sa maximă se atinge când p este maxim (0.2), respectiv minimă când p este minim (-0.2). □

Exercițiul 4. Avem un joc unde probabilitățile de câștig sunt

$$X\colon \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Mai avem un joc cu probabilitățile

$$Y\colon \begin{pmatrix} -1 & 1.5 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Pentru a juca oricare din ambele jocuri, trebuie plătită o sumă x.
Ce joc ar trebui să alegem ca să maximizăm profitul?

Rezolvare. Calculăm mediile ambelor jocuri:

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{9}{10} + 10 \cdot \frac{1}{10} = 1$$
$$\mathbb{E}(Y) = -1 \cdot \frac{1}{5} + 1.5 \cdot \frac{4}{5} = 1$$

Deoarece mediile sunt egale, ambele jocuri ar părea la fel de favorabile.

Calculăm și dispersiile:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 10 - 1 = 9$$
$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = 2 - 1 = 1$$

unde

$$X^2 \colon \begin{pmatrix} 0 & 100 \\ \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$
$$Y^2 \colon \begin{pmatrix} 1 & 2.25 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

□

1.4 Variabile aleatoare bidimensionale

Exercițiul 1. Fie două variabile aleatoare discrete

$$X \colon \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ se0.4 & 0.6 \end{pmatrix}, Y \colon \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$$

1. Determinați probabilitatea lor comună.
2. Determinați parametrul real k astfel încât X și Y să fie necorelate.
3. Pentru k determinat la punctul anterior, determinați dacă X și Y sunt independente.

Rezolvare. 1. Fie k = $\rho(X = -2, Y = 3)$.

X \ Y	-1	3	
-2	0.4 - k	k	0.4
1	0.3 + k	0.3 - k	0.6
	0.7	0.3	

2. Trebuie să determinăm k astfel încât $\rho(X, Y) = 0$.

$$\rho(X,Y) = 0 \implies \text{Cov}(X,Y) = 0$$
$$\mathbb{E}(X) = -0.8 + 0.6 = -0.2$$
$$\mathbb{E}(Y) = -0.7 + 0.9 = 0.2$$
$$\begin{aligned} \text{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) \\ &= 1.4 - 12k + 0.04 \\ &= 1.44 - 12k \implies k = 0.12 \end{aligned}$$

3. Mai întâi, rescriem tabelul de repartiție pentru $k = 0.12$:

X \ Y	-1	3	
-2	0.28	0.12	0.4
1	0.42	0.18	0.6
	0.7	0.3	

Acum trebuie să verificăm dacă produsele dintre probabilitățile marginale corespund valorilor din tabel:

$$0.4 \cdot 0.7 = 0.28 = \pi_{1,1}$$
$$0.4 \cdot 0.3 = 0.12 = \pi_{1,2}$$
$$0.6 \cdot 0.7 = 0.42 = \pi_{2,1}$$
$$0.6 \cdot 0.3 = 0.18 = \pi_{2,2}$$

□

Exercițiul 2. Fie două variabile aleatoare X și Y:

$$X\colon \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}, Y\colon \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

cu repartiția comună:

X \ Y	-2	-1	1	
-1	0.1	0.3	0.2	0.6
3	0.2	0.1	0.1	0.4
	0.3	0.4	0.3	

Fie variabilele aleatoare $A = \max(X, Y)$, $B = X - Y$. Determinați repartițiile pentru A, B și repartiția comună a lui A și B.

Rezolvare. Scriem valorile pentru $A = \max(X, Y)$ într-un tabel:

X \ Y	-2	-1	1
-1	-1	-1	1
3	3	3	3

Pentru a determina probabilitățile pentru A, adunăm probabilitățile corespunzătoare din distribuția lui comună a lui X, Y:

$$A = \max(X, Y) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Rezolvăm analog pentru B. Scriem mai întâi tabelul în care completăm cu valoarea lui $X - Y$:

X \ Y	-2	-1	1
-1	1	0	-2
3	5	4	2

Probabilitățile corespunzătoare sunt:

$$B = X - Y = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Acum putem scrie probabilitățile comune pentru A, B:

A \ B	-2	0	1	2	4	5	
-1	0.0	0.2 + k					0.4
1	0.2	0.0					0.2
3	0.0	0.0					0.4
	0.2	0.3	0.1	0.1	0.1	0.2	

□

Exercițiul 3. Se dau variabilele aleatoare X și Y descrise de distribuția comună:

X \ Y	-2	-1	2	
-2	0.08	0.12	0.05	0.25
0	0.12	0.23	0.15	0.5
3	0.05	0.05	0.15	0.25
	0.25	0.4	0.35	

Determinați Cov(U, V) unde $U = 3X - 2Y$ și $V = X + 4Y$.

Rezolvare. Începem prin a extrage din distribuția comună a lui X și Y probabilitățile marginale:

$$X \colon \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}, Y \colon \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0.25 & 0.4 & 0.35 \end{pmatrix}$$

Calculăm principalele valori descriptive pentru acestea:

$$\mathbb{E}(X) = -0.5 + 0.75 = 0.25$$
$$\mathbb{E}(Y) = -0.5 - 0.4 + 0.7 = -0.2$$

$$X^2 \colon \begin{pmatrix} 0 & 4 & 9 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}, Y^2 \colon \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \mathbb{E}(X, Y) = 0.81$$

Acum rescriem covarianța cerută folosindu-ne de proprietatea ei de biliniaritate:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(U, V) &= \text{Cov}(3X - 2Y, X + 4Y) \\ &= 3 \cdot \text{Var}(X) + (12 - 2) \cdot \text{Cov}(X, Y) - 8 \cdot \text{Var}(Y) \\ &= 3 \cdot 3.1875 + 8.6 - 8 \cdot 2.76 = 3.175 \end{aligned}$$

□

1.5 Variabile aleatoare continue

Definiție. Se numește *densitate de probabilitate* o funcție $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care îndeplinește următoarele condiții:

1. $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$

Definim *probabilitatea* pe variabile aleatoare continue ca:

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Se numește *funcție de repartiție* funcția $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Avem că

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Definim *media* variabilei aleatoare continue X ca

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$$

Fie $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă, atunci

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

Varianța se definește la fel ca la variabile aleatoare discrete:

$$\mathsf{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Exercițiul 1. Fie $a \in \mathbb{R}$, $k > 0$:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x^2 \cdot e^{-kx}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

1. Determinați a astfel încât f să fie o densitate de probabilitate.
2. Calculați $\mathbb{E}(X)$ și $\mathsf{Var}(X)$.
3. Scrieți funcția de repartiție.

Rezolvare.

1. Pentru ca $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ trebuie ca $a > 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x + a\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-kx}\,\mathrm{d}x$$

Facem schimbarea de variabilă:

$$\begin{aligned} k \cdot x = t &\implies x = \frac{t}{k} \\ k\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t &\implies \mathrm{d}x = \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t \\ x = 0 &\implies t = 0 \\ x = \infty &\implies t = \infty \end{aligned}$$

Continuăm integrarea:

$$= \int_{0}^{+\infty} t^2 \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{a}{k^3}\Gamma(3) = \frac{2a}{k^3} = 1 \implies a = \frac{k^3}{2}$$

2. Putem calcula media lui X din definiție:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \frac{k^3}{2} x^3 e^{-kx}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Efectuăm o schimbare de variabilă:

$$\begin{aligned} kx = t &\implies x = \frac{t}{k} \\ k\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t &\implies \mathrm{d}x = \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t \\ x = 0 &\implies t = 0 \\ x = \infty &\implies t = \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{0}^{+\infty} \frac{k^3}{2} \cdot \frac{t^3}{k^3} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2k}\int_{0}^{+\infty} t^3 \cdot e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2k}\Gamma(4) = \frac{1}{2k} \cdot 3! = \frac{3}{k} \end{aligned}$$

Pentru varianță, avem nevoie să calculăm $\mathbb{E}(X^2)$:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} \frac{k^3}{2} x^4 e^{-4x}\,\mathrm{d}x$$

Facem substituția:

$$\begin{aligned} kx = t &\implies x = \frac{t}{k} \\ k\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t &\implies \mathrm{d}x = \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t \\ x = 0 &\implies t = 0 \\ x = \infty &\implies t = \infty \end{aligned}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{k^2}{2}\frac{t^4}{k^4}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2k^2}\Gamma(5) = \frac{4!}{2k^2} = \frac{24}{2k^2} = \frac{12}{k^2}$$

Acum avem toate elementele necesare pentru a calcula varianța lui X:

$$\begin{aligned} \mathsf{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \frac{12}{k^2} - \left(\frac{3}{k}\right)^2 = \frac{12-3k}{k^2} \end{aligned}$$

3. În calcularea funcției de repartiție, apare următoarea integrală, pe care o calculăm separat aici:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{-k}\int_0^x \frac{k^3}{2}\cdot t^2 \cdot (-k)e^{-kt}\,\mathrm{d}t = -\frac{k^2}{2}\int_0^x t^2(e^{-kt})'\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{k^2}{2}(t^2e^{-kt}\big|_0^x - \underbrace{\int_0^x 2te^{-kt}\,\mathrm{d}t)}_{I_2} \\ &= \frac{-k^2}{2}\left(x^2\cdot e^{-kx} + \frac{2x}{k}e^{-kx} + \frac{2}{k^2}\left(e^{-kx}-1\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{-k}\int_0^x 2t\cdot(e^{-kt})'\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{k}\left(2t\cdot e^{-kt}\big|_0^x - \int_0 2\cdot e^{-kt}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= -\frac{1}{k}\left(2x\cdot e^{-kx} + \frac{2}{k}\,e^{-kx}\big|_0^x\right) \end{aligned}$$

Substituind, funcția de repartiție este:

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{k^2}{2}\left(x^2\cdot e^{-kx} + \frac{2x}{k}e^{-kx} + \frac{2}{k^2}\left(e^{-kx}-1\right)\right), x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

Aceasta respectă proprietățile din definiție:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \\ &\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{k^2}{2}\left(0 + 0 - \frac{2}{k^2}\right) = 1 \end{aligned}$$

O putem folosi pentru a calcula diferite probabilități:

$$\mathbb{P}(X \geq 3.7) = 1 - \mathbb{P}(X < 3.7) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 3.7) = 1 - F(3.7)$$

$$\mathbb{P}(X > 3.14 \mid X < 7) = \frac{\mathbb{P}(3.14 < X < 7)}{\mathbb{P}(X < 7)} = \frac{F(7) - F(3.14)}{F(7)}$$

$\square$

Repartiții de variabile aleatoare continue

1. Repartiția uniformă $X \sim Unif(a, b)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, x \in (a, b) \\ 0 \text{ în rest} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, a \leq x < b \\ 1, x \geq b \end{cases}$$

2. Repartiția exponențială

Exercițiul 2. Fie $X \sim Unif(50, 100)$. Determinați:

a) $\mathbb{P}(X < 70)$

b) $\mathbb{P}(X \geq 55)$

c) $\mathbb{P}(X > 69 \mid X < 80)$

Rezolvare. Funcția de repartiție este

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 50 \\ \frac{x-50}{50}, 50 \leq x < 100 \\ 1, x \geq 100 \end{cases}$$

Deci:

1.

$$\mathbb{P}(X < 70) = F(70) = \frac{70 - 50}{50} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

2.

$$\mathbb{P}(X \geq 55) = 1 - \mathbb{P}(X < 55) = 1 - F(55) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

3.

$$\mathbb{P}(X > 69 \mid X < 80) = \frac{\mathbb{P}(69 < X < 80)}{\mathbb{P}(X < 80)} = \frac{11}{30}$$

$$\mathbb{P}(69 < X < 80) = F(80) - F(69)$$

$$\mathbb{P}(X < 80) = \frac{11}{50}$$

$\square$

Exercițiul 3. Un feribot sosește într-o stație la fiecare 30 de minute începând cu ora 9:00. Un student care dorește să ia feribotul ajunge în stație la un moment de timp uniform distribuit pe intervalul 9-12.

Determinați probabilitatea ca studentul să aibă de așteptat feribotul:

a) mai mult de 10 minute

b) între 10 și 20 de minute

c) mai mult de 25 de minute

Rezolvare. Notăm cu X numărul de minute peste ora 9 la care sosește studentul. Distribuția lui X este $X \sim Unif(0, 180)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \frac{x}{180}, 0 \le x < 180 \\ 1, x \ge 180 \end{cases}$$

1.

$$\begin{gathered} \mathbb{P}((0 < X < 20) \cup (30 < X < 50) \cup (60 < X < 80) \cup \\ (90 < X < 110) \cup (120 < X < 140) \cup (150 < X < 170)) = \\ = \mathbb{P}(0 < X < 20) + \cdots + \mathbb{P}(150 < X < 170) = \frac{2}{3} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \mathbb{P}(0 < X < 20) = F(20) - F(0) = \frac{20}{180} - 0 = \frac{1}{9} \\ \mathbb{P}(30 < X < 50) = F(50) - F(30) = \frac{50}{180} - \frac{30}{180} = \frac{1}{9} \\ \ldots \end{gathered}$$

2.

$$\begin{gathered} \mathbb{P}((10 < X < 20) \cup (40 < X < 50) \cup (70 < X < 80) \cup \\ (100 < X < 110) \cup (130 < X < 140) \cup (160 < X < 170)) = \\ 6\mathbb{P}(10 < X > 20) = 6(F(20) - F(10)) \\ = 6(\frac{20}{180} - \frac{10}{180}) \\ = \frac{1}{3} \end{gathered}$$

3.

$$\begin{gathered} \mathbb{P}((0 < X < 5) \cup (30 < X < 35) \cup (60 < X < 65) \cup \\ (90 < X < 95) \cup (120 < X < 125) \cup (150 < X < 155)) = \\ = 6\mathbb{P}(0 < X < 3) = 6(\mathbb{P}(5) - \mathbb{P}(0)) = 6(\frac{5}{180} - 0) = \frac{30}{180} = \frac{1}{6} \end{gathered}$$

$\square$

Exercițiul 4. Un student este primul în coada de așteptare pentru un examen oral. Se știe că timpul de examinare este o variabilă aleatoare repartizată exponențial de parametru $\lambda = \frac{1}{20}$.

Determinați probabilitatea ca:

a) studentul să aștepte mai mult de 20 de minute

b) studentul să aștepte între 20 și 40 de minute

Rezolvare. Știm că

$$X \sim Exp(\frac{1}{20})$$

Cu alte cuvinte, durata medie de așteptare este de 20 de minute.

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{20}x}, x > 0 \end{cases}$$

a)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 20) &= 1 - \mathbb{P}(X < 20) \\ &= 1 - F(20) \\ &= 1 - 1 + e^{-1} \\ &= \frac{1}{e} \approx 0.368 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(20 < X < 40) &= F(40) - F(20) \\ &= 1 - e^{-2} - 1 + e^{-1} \\ &= e^{-1} - e^{-2} \approx 0.233 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(40 < X < 60) &= F(60) - F(40) \\ &= 1 - e^{-3} - 1 + e^{-1} \\ &= -e^{-3} + e^{-2} = e^{-1}(e^{-1} - e^{-2}) \end{aligned}$$

Procedeul de standardizare

$$\begin{aligned} Z &\sim \mathcal{N}(0, 1) \\ \phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t \\ \phi(-x) &= 1 - \phi(x) \end{aligned}$$

$$Z = \frac{X - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \mathbb{E}(\frac{X-m}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma}\mathbb{E}(X-m) \\
&= \frac{1}{\sigma}(\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(m)) = \frac{1}{\sigma}(\mathbb{E}(X) - m) \\
&= \frac{1}{\sigma}(m - m) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{Var}(Z) &= \mathsf{Var}(\frac{X-m}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma^2}\mathsf{Var}(X-m) \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\mathsf{Var}(X) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sigma^2 = 1
\end{aligned}$$

□

Exercițiul 5. Gigel este chemat în instanță pentru a recunoaște paternitatea asupra copilului Lucicăi. Acesta se apără spunând că nu poate fi tatăl copilului întrucât a părăsit țara cu 290 de zile înainte de nașterea copilului și a revenit în țară cu 240 de zile înainte de nașterea copilului.

Un expert depune mărturie în cadrul procesului și afirmă că durata sarcinii unei femei este o variabilă aleatoare a cărei repartiție poate fi aproximată cu repartiția normală de medie 270 și dispersie 100.

Ce va decide instanța?

Rezolvare. Trebuie să calculăm probabilitatea

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((X < 240) \cup (X > 290)) &= \mathbb{P}(X < 240) + \mathbb{P}(X > 290) = \\
&= \mathbb{P}(\frac{X - 270}{10} > 2) + \mathbb{P}(\frac{X - 270}{10} < -3) = \\
&= \mathbb{P}(Z > 2) + \mathbb{P}(Z < -3) = 1 - \phi(2) + \phi(-3) = 0.0241
\end{aligned}$$

□

1.6 Repartiții

Exercițiul 1. Avem o variabilă aleatoare $X \sim \exp(\lambda)$. Aflați estimatorul de moment pentru $\theta = \lambda$.

Rezolvare. Începem prin a scrie în mod explicit distribuția exponențială, parametrizată de λ:

$$f(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases}$$

Pentru distribuția X, momentul de ordin 1 este media variabilei aleatoare:

$$\alpha_1 = \mathbb{E}(X)$$
$$\alpha_1(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x;\theta)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\theta}$$

Pentru o selecție, momentul de ordinul 1 este media aritmetică a valorilor:

$$M_1 = \overline{X}$$
$$M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Vrem să vedem pentru ce valoare a lui θ cele două momente de ordin 1 sunt egale:

$$\alpha_1(\hat{\theta}) = M_1 \iff$$
$$\iff \frac{1}{\widehat{\Theta}} = \overline{X} \iff \widehat{\Theta} = \frac{1}{\overline{X}}$$

□

Exercițiul 2. Fie distribuția $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ cu σ^2 necunoscută. Aflați intervalul de 15% încredere pentru m.

Rezolvare. Intervalul de încredere de parametru α este

$$\left(\overline{x} - \frac{t_{n-1,\alpha/2} \cdot s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \frac{t_{n-1,\alpha/2} \cdot s}{\sqrt{n}}\right)$$

unde avem:

- n este numărul de date din selecție `length(x)`
- $\overline{x}$ este media selecției, `mean(x)`
- s este deviația standard a selecției, `sd(x)`
- $t_{n-1,\alpha/2}$ este valoarea distribuției t a lui Student, care se poate calcula în R cu funcția `qt`:
$$t_{n-1,\alpha/2} = \mathtt{qt}(\mathtt{1} - \mathtt{alpha}/\mathtt{2}, \mathtt{n} - \mathtt{1})$$
- Dacă avem un procent $p\%$, putem determina α prin relația:
$$[100(1-\alpha)]\% = p\%$$
$$\iff 1 - \alpha = \frac{p}{100}$$
$$\iff \alpha = 1 - \frac{p}{100}$$

  În cazul nostru, $\alpha = 1 - 0.15 = 0.85$.

$\square$

Exercițiul 3. Fie $X \sim \mathcal{N}(m, 10)$. Aflați intervalul de 90% încredere pentru m.

Rezolvare. Intervalul de încredere de parametru α pentru m este

$$\left(\overline{x} - \frac{\sigma \cdot u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \frac{\sigma \cdot u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right)$$

Unde $u_{\alpha/2}$ este `qnorm(1 - alpha / 2, 0, 1)`.

Putem determina α cu formula de la exercițiul anterior: $\alpha = 0.1$. $\square$

1.7 Regresie liniară

Pentru fiecare punct de pe grafic, avem coordonatele acestuia (x_k, y_k). Variabila x_k (pe care o știm) se numește *variabila predictor*, iar cea pe care vrem să o determinăm y_k este *variabila răspuns*.

$$\hat{y_k} = ax_k + b$$

Funcția de eroare, care ne zice cât de prost prezice dreapta noastră datele, este dată de

$$S(a, b) = \sum_k (y_k - \hat{y}_k)^2 = \sum_k (y_k - ax_k - b)^2$$

Funcția corespunzătoare în R care rezolvă problema este `lm` (de la *linear model*), care returnează direct parametrii optimi pentru un set de date de intrare.

Capitolul 2

Modele de examen rezolvate

2.1 Examen 2019

La acest examen, cerințele erau la fel dar fiecare student primea un i unic. Rezolvările de aici sunt în funcție de i.

Exercițiul 1. Trei trăgători trag independent asupra unei ținte. Primul atinge ținta cu probabilitatea $\frac{1}{2}$, al doilea cu probabilitatea $\frac{3}{5}$, iar al treilea cu probabilitate $\frac{i}{100}$. Care este probabilitatea ca ținta să fie atinsă de exact 2 ori?

Rezolvare. Notăm cu E_i evenimentul „trăgătorul i nimerește ținta”. Atunci probabilitatea cerută este

$$\mathbb{P}((E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}) \cup (E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3) \cup (\overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3))$$

Observăm că evenimentele aflate în reuniune sunt incompatibile (de exemplu, nu se poate ca trăgătorul 3 să nimerească și să rateze ținta în același timp). Probabilitatea devine:

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}) + \mathbb{P}(E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3) + \mathbb{P}(\overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3)$$

Evenimentele aflate în intersecții sunt independente (conform cerinței). Rămâne să calculăm:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2) \cdot \mathbb{P}(\overline{E_3}) \\
& + \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(\overline{E_2}) \cdot \mathbb{P}(E_3) \\
& + \mathbb{P}(\overline{E_1}) \cdot \mathbb{P}(E_2) \cdot \mathbb{P}(E_3) \\
= & \; \mathbb{P}(E_1) \cdot \mathbb{P}(E_2) \cdot (1 - \mathbb{P}(E_3)) \\
& + \mathbb{P}(E_1) \cdot (1 - \mathbb{P}(E_2)) \cdot \mathbb{P}(E_3) \\
& + (1 - \mathbb{P}(E_1)) \cdot \mathbb{P}(E_2) \cdot \mathbb{P}(E_3) \\
= & \; \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(1 - \frac{i}{100}\right) \\
& + \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{i}{100} \\
& + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{i}{100}
\end{aligned}$$

$\square$

Exercițiul 2. Dintr-o urnă cu i bile albe și $100-i$ bile negre se extrag 3 bile cu revenire. Fie X numărul de bile albe extrase. Aflați repartiția și media lui X și $\mathbb{P}(X \leq 2)$.

Rezolvare. Deoarece avem extrageri cu revenire, avem o repartiție binomială cu

$$p = \frac{i}{100}$$

Pentru repartiție putem folosi `dbinom(k, p=i/100)` pentru $k = \overline{1,4}$.
Repartiția:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \mathrm{C}_{100}^0 \cdot (1-p)^3 & \mathrm{C}_{100}^1 \cdot p \cdot (1-p)^2 & \mathrm{C}_{100}^2 \cdot p^2 \cdot (1-p) & \mathrm{C}_{100}^3 \cdot p^3 \end{pmatrix}$$

Media: $\mathbb{E}(X)$ se calculează înmulțind fiecare k cu probabilitatea corespunzătoare și însumând.

Probabilitatea cerută este `pbinom(2, p=i/100)` (adică suma probabilităților pentru $k = \overline{0,2}$). $\square$

Exercițiul 3. Fie $X \sim \mathcal{N}(m, 1)$. Știind că $\mathbb{P}(X < 3) = \frac{i}{100}$, aflați m.

Rezolvare. În primul rând, să vedem dacă m e pozitiv sau negativ. Calculăm această probabilitate pentru repartiția normală standard, de medie 0 și varianță 1:

$$\texttt{pnorm}(3) \approx 0.9986$$

Ne folosim de repartiția Z (repartiția normală standard):

$$Z = \frac{X-m}{\sigma} \iff m = X - Z \cdot \sigma$$

Știm că aria pentru $X < 3$ este $\frac{i}{100}$. Ca să găsim punctul corespunzător pentru distribuția Z putem folosi funcția `qnorm(i/100)`. Înlocuim și avem:

$$m = 3 - \texttt{qnorm}(\texttt{i}/\texttt{100}) \cdot 1$$

$\square$

Fie setul de 5 valori de selecție $x_k = k$, $k = \overline{1,4}$, $x_5 = i + 4$ din populația X.

Exercițiul 4. Fie $y_k = k$, $k = \overline{1,5}$. Determinați prin metoda celor mai mici pătrate estimările coeficienților de regresie din modelul de regresie liniară simplă.

Rezolvare. Notăm cu X matricea în care punem valorile de selecție:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

Notăm cu Y matricea în care punem valorile pe care vrem să le estimăm, corespunzătoare valorilor de selecție:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}$$

Pentru a găsi parametrii modelului $y = \beta x$ cu metoda celor mai mici pătrate, trebuie să efectuăm următorul calcul:

$$\beta = (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}Y$$

În cazul nostru:

$$\beta = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & i+4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ i+4 \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & i+4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Adăugăm o coloană doar cu 1 setului de date prin

$$\texttt{c} = \texttt{cbind}(\texttt{1}, \texttt{x})$$

(în felul ăsta vom avea și un coeficient pentru bias în rezultat)

Putem găsi parametrii modelului efectuând

$$\texttt{solve}(\texttt{t}(\texttt{c})\% * \%\texttt{c}, \texttt{t}(\texttt{c})\% * \%\texttt{y})$$

□

Exercițiul 5. Presupunând că X are o repartiție normală de dispersie necunoscută σ^2, să se determine intervalul de încredere 90% pentru σ^2 cu ambele margini finite.

Rezolvare. Vom folosi următoarea formulă:

$$\left(\frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}, \frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}} \right)$$

unde

- s^2 este dispersia selecției, `var(x)`;
- $\chi^2_{n-1,param}$ se poate calcula cu `qchisq(param, n - 1)`.

□

Exercițiul 6. Testați ipoteza că X are o repartiție uniformă pe intervalul $[0, i+5]$ la nivelul de semnificație 1%.

Rezolvare. Putem folosi testul Kolmogorov-Smirnov pentru a testa ipoteza că o selecție respectă o anumită repartiție.

Dacă reținem în variabila `x` selecția putem efectua testul cu

$$\texttt{ks.test}(\texttt{x}, \texttt{"punif"}, \texttt{min} = \texttt{0}, \texttt{max} = \texttt{i} + \texttt{5})$$

comparăm valoarea p obținută cu nivelul de semnificație. Dacă este mai mare decât 1% înseamnă că ipoteza că au aceeași repartiție este adevărată. □

2.2 Colocviu 2019

2.2.1 Bilet 1

Exercițiul 1. Un student are de susținut într-o sesiune 4 examene. Notăm cu E_i evenimentul de a promova examenul cu $i \in \overline{1,4}$. Scrieți evenimentele corespunzătoare următoarelor situații:

a) Toate evenimentele sunt promovate

b) Cel puțin două examene sunt promovate

c) Cel puțin un examen și cel mult trei examene sunt promovate

d) Niciun examen nu este promovat

e) Cel mult un examen este promovat

Rezolvare.

a) Trebuie să promoveze primul examen, pe al doilea, pe al treilea *și* pe al patrulea:

$$E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4$$

b) Poate să promoveze orice combinație de două examene:

$$\begin{gathered}(E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3) \cup (E_1 \cap E_4) \\ \cup\ (E_2 \cap E_3) \cup (E_2 \cap E_4) \cup (E_3 \cap E_4)\end{gathered}$$

c) Asemănător cu exemplul de mai sus, dar excludem cazul când promovează toate examenele:

$$\begin{gathered}(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4) \\ \cap\ \overline{(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4)}\end{gathered}$$

d) Niciun examen nu este promovat înseamnă că a picat fiecare examen:

$$\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3} \cap \overline{E_4}$$

e) Trebuie să luăm pe rând fiecare caz în care este promovat un examen și celelalte nu sunt promovate:

$$\begin{gathered}(E_1 \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3} \cap \overline{E_4}) \\ \cup\ (\overline{E_1} \cap E_2 \cap \overline{E_3} \cap \overline{E_4}) \\ \cup\ (\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap E_3 \cap \overline{E_4}) \\ \cup\ (\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3} \cap E_4)\end{gathered}$$

□

Exercițiul 2. Dintr-o urnă cu 5 bile albe și 10 bile negre se scot succesiv două bile, fără revenire. Precizați cu ce probabilitate vor apărea:

a) Două bile albe

b) Prima bilă albă și a doua bilă neagră

c) Bile de culori diferite

d) Exact o bilă albă

e) Prima bilă albă

f) Cel puțin o bilă albă

g) Cel mult o bilă albă

h) Nicio bilă albă

Rezolvare. Identificăm mai întâi parametrii din formula pentru extrageri fără revenire:

$$\begin{aligned} N_1 &= \text{numărul bilelor albe} = 5 \\ N_2 &= \text{numărul bilelor negre} = 10 \\ N &= N_1 + N_2 = 15 \end{aligned}$$

a) Avem $n_1 = 2$, deci $n_2 = 0$:

$$\mathbb{P} = \frac{\mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{C}_{10}^0}{\mathrm{C}_{15}^2}$$

b) Probabilitatea se poate rescrie ca probabilitatea să fie albă prima bilă extrasă *și* a doua bilă să fie neagră, în condițiile în care o bilă albă deja a fost extrasă.

□

Exercițiul 7. O monedă nemăsluită (echilibrată) este aruncată până când capul apare de 10 ori. Fie X o variabilă aleatoare care numără de câte ori apare pajura în cadrul acestor aruncări. Determinați funcția de masă a variabilei aleatoare X.

Rezolvare. Notăm cu n numărul de aruncări până am obținut cap de 10 ori. Acest număr trebuie să fie cel puțin 10.

- Dacă $n = 10$, atunci nu a fost nicio pajură. Probabilitatea să fie acest caz este probabilitatea să fie cap de 10 ori consecutiv:

$$x_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

- Dacă $n = 11$, știm că a fost o pajură în primele 10 aruncări, și a 11-a a fost cap.

$$x_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \underbrace{\mathrm{C}_{10}^1 \cdot \frac{1}{2}}_{\text{moduri în care poate fi pajură}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{ultima să fie cap}}$$

- Dacă $n = 12$, știm că a fost pajură de două ori în primele 11 aruncări, și apoi cap.
$$x_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \mathrm{C}_{11}^{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2} \cdot \frac{1}{2}$$
- La cazul general, știm că în primele $n-1$ aruncări pajura a apărut de $n-10$ ori în primele $n-2$ aruncări:
$$x_{n-10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot \mathrm{C}_{n-1}^{n-10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-10} \cdot \frac{1}{2}$$

Putem să extragem funcția de masă pentru X din observațiile de mai sus:
$$X\colon \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & ... \\ x_0 & x_1 & x_2 & ... \end{pmatrix}$$

□

2.2.2 Bilet 3

Exercițiul 1. Fie A și B două evenimente care se exclud reciproc, definite pe același spațiu de probabilitate. Știind că $P(A) = 0.3$ și $P(B) = 0.5$, determinați probabilitatea să se întâmple:

1. A sau B
2. A și nu B
3. atât A cât și B

Rezolvare.

1. Deoarece A și B sunt incompatibile, avem că
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 0.8$$
2. Deoarece A și B nu se pot întâmpla în același timp, dacă A se întâmplă atunci sigur B nu se întâmplă. Deci probabilitatea cerută se reduce la $\mathbb{P}(A) = 0.3$
3. A și B nu se pot întâmpla în același timp, deci probabilitatea cerută este 0

□

Exercițiul 2. S-a stabilit că, în medie, din trei persoane care se adresează unei agenții de turism una cumpără bilete și două nu cumpără. Să se determine probabilitatea ca din 8 persoane care se adresează agenției:

a) trei să cumpere și restul să nu cumpere bilete

b) toate persoanele să cumpere bilete

c) cel mult trei persoane să nu cumpere

d) cel puțin patru persoane să cumpere

Rezolvare. Din cerință, avem că probabilitatea ca o persoană să cumpere un bilet este $\frac{1}{3}$. Probabilitatea să nu cumpere este de $\frac{2}{3}$.

1. Probabilitatea să cumpere trei oameni bilete înseamnă să cumpere un om un bilet, și să cumpere și alt om un bilet, și să cumpere un al treilea om un bilet. Deoarece aceste achiziții sunt independente una de cealaltă, este suficient să înmulțim probabilitățile.

$$P = \mathrm{C}_8^3 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3}\right) = \mathrm{C}_8^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

2. Trebuie să cumpere și prima persoană, și a doua persoană, ..., și a 8-a persoană.

$$P = \left(\frac{1}{3}\right)^8$$

3. Cel mult trei persoane să nu cumpere este echivalent cu cel puțin cinci să cumpere: adică fix 5 cumpără, sau fix 6 cumpără, sau fix 7 sau toți cumpără.

$$P = \mathrm{C}_8^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \mathrm{C}_8^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \mathrm{C}_8^7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^8$$

4. Analog cu subpunctul anterior.

$\square$

Exercițiul 3. Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = kx^5(1-x)^7$, $x \in (0,1)$, $k \in \mathbb{R}$. Să se determine:

a) valoarea parametrului real k astfel încât f să fie densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare continue X

b) media și dispersia lui X

Rezolvare. a) Trebuie ca $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Deci $k \geq 0$.

Mai trebuie ca

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x}_{=0} + \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int_{1}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x}_{=0} = 1$$

$$\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$\int_{0}^{1} kx^5(1-x)^7\,\mathrm{d}x = 1$$

$$k \cdot \mathrm{B}(6,8) = 1$$

$$k \cdot \frac{\Gamma(6)\cdot\Gamma(8)}{\Gamma(6+8)} = 1$$

$$k \cdot \frac{5!\cdot 7!}{13!} = 1$$

De unde

$$k = \frac{13!}{5!\cdot 7!}$$

b) Aplicăm formulele pentru medie și dispersie:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$$

Pentru dispersie avem nevoie și de media lui X^2:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Formula dispersiei:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

□