1. (**1p**) Asociați muchiilor grafului obținut din $K_{3,3}$ prin eliminarea unei muchii ponderile 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 astfel încât graful obținut să aibă cel puțin doi arbori parțiali de cost minim. Justificați alegerea făcută.

2. (**1p**) Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate pentru un graf neorientat conex (neponderat) cu n>3 vârfuri și m muchii care conține cel puțin un ciclu? Justificați (complexitatea algoritmilor studiați se presupune cunoscută, nu trebuie demonstrată în justificare)

a) Putem determina distanța de la nodul 1 la celelalte noduri în O(m)

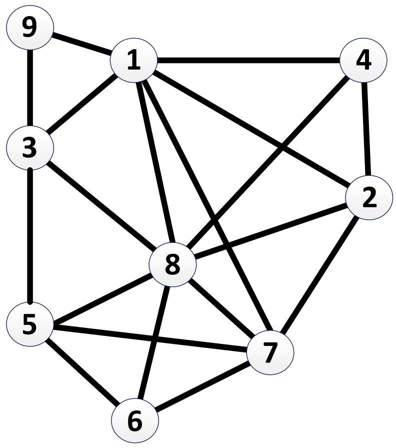
b) Putem determina câte un drum minim de la 1 la celelalte noduri în O(m)

c) Putem detecta existenta unui ciclu în G folosind parcurgerea în lățime

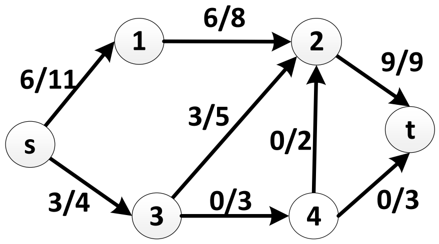
d) m>n

3. **(1p)** a) Fie G un graf neorientat conex cu gradul maxim al unui vârf 7. Care este numărul maxim de culori folosite de algoritmul Greedy de colorare a vârfurilor lui G prezentat la curs, dacă vârfurile sunt ordonate folosind strategia Smallest First? Justificați.

b) Exemplificați (cu explicații) algoritmul Greedy de colorare cu vârfurile ordonate folosind strategia Smallest First pentru graful următor.



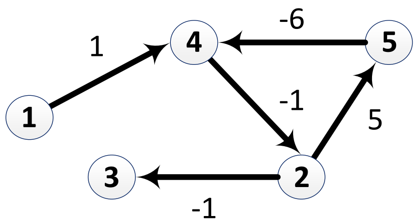
4. (**1,5p)** Definiți noțiunile de flux, tăietură minimă și lanț nesaturat/drum de creștere. Ilustrați pașii algoritmului Ford-Fulkerson pentru rețeaua din figura următoare (unde pe un arc e sunt trecute valorile f(e)/c(e) reprezentând flux/capacitate), pornind de la fluxul indicat și alegând la fiecare pas un s-t lanț f-nesaturat de lungime minimă (algoritmul Edmonds-Karp)**.** Indicați o tăietură (s-t tăietură) minimă în rețeaua (se vor indica vârfurile din bipartiție, arcele directe, arcele inverse). Mai există și o altă s-t tăietură minimă în această rețea? Justificați răspunsurile.



5. (**2p)** Fie G = (V, E, w) un graf orientat ponderat, cu ponderi numere întregi și s un vârf în G. Considerăm algoritmul lui Bellman Ford descris în următorul pseudocod:

```
pentru fiecare u∈V executa
     d[u] = infinit; tata[u]=0
d[s] = 0
pentru i = 1, |V|-1 executa
     pentru fiecare uv ∈ E executa
          daca d[u]+w(u,v)<d[v] atunci
               d[v] = d[u]+w(u,v)
               tata[v] = u
```

Considerăm graful următor.



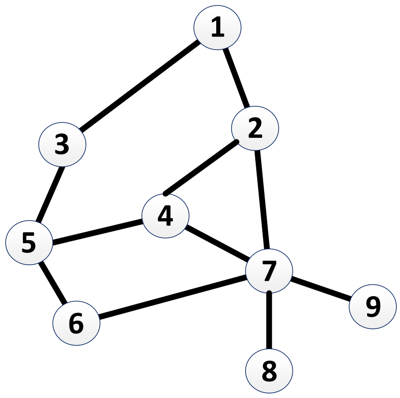
La finalul execuției pseudocodului de mai sus pentru acest graf, s=1 și arcele considerate in ordinea (1,4), (5,4) (4,2), (2,5), (2,3) vectorul d are elementele 0 , -8, -9, -7, -3 iar vectorul tata este 0, 4, 2, 5, 2.

Adăugați în pseudocod instrucțiunile necesare pentru ca algoritmul să testeze existența unui circuit cu cost negativ în graf accesibil din s (=pentru care există un drum de la s la un vârf al său) și, în caz afirmativ, să afișeze unul, și ilustrați-le pe graful dat ca exemplu (cu explicații).

6. (1p) Este corect următorul algoritm de determinare a unui arbore parțial de cost minim al unui graf conex ponderat G = (V, E, w)? Justificați (fără a apela în justificare la modul de funcționare al altor algoritmi; rezultatele folosite trebuie demonstrate și trebuie explicat modul în care se folosesc)

```
T=G
Cat timp T contine cicluri
   1. Alege C un ciclu elementar de lungime minimă în T
   2. Alege e o muchie de cost maxim in C
   3. T = T-e (elimina e din T)
```

7. (**1,5p)**.a) Indicați fețele hărții următoare și gradul fiecărei fețe.



b) Fie M = (V,E, F) o hartă conexă bipartită cu $n = |V| \geq 4$. Arătați că $m = |E| \leq 2n - 4$,

$|F| \leq n - 2$ și există în M cel puțin un vârf de grad mai mic sau egal cu 3.