

# Probabilități și statistică

Conf. dr. Cristian Niculescu,  
Facultatea de Matematică și Informatică,  
Universitatea din București

October 5, 2015

## Part I

# Probabilități

## 1 Câmp de probabilitate. Operații cu evenimente și formule de calcul pentru probabilitățile acestora. Evenimente independente. Probabilitatea condiționată. Formula lui Bayes

### 1.1 Câmp de probabilitate

În teoria probabilităților considerăm un experiment cu un rezultat dependent de șansă, care e numit *experiment aleator*. Se presupune că toate rezultatele posibile ale unui experiment aleator sunt cunoscute și ele sunt elemente ale unei mulțimi fundamentale denumită ca *spațiul probelor*. Fiecare rezultat posibil este numit *probă* și un *eveniment* este o submulțime a spațiului probelor.

**Notății.** Fie  $\Omega$  mulțime.

$\mathcal{P}(\Omega) := \{A | A \subseteq \Omega\}$ .

Fie  $A \subseteq \Omega$ .

$\bar{A} = \mathcal{C}A := \{a \in \Omega | a \notin A\}$ .

**Definiția 1.1.** Fie  $\Omega$  mulțime.  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  se numește *corp borelian* sau  $\sigma$ -algebră pe  $\Omega$  dacă și numai dacă

1)  $\mathcal{K} \neq \emptyset$

2)  $A \in \mathcal{K} \implies \bar{A} \in \mathcal{K}$

3)  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{K} \implies \bigcup_n A_n \in \mathcal{K}$ .

$(\Omega, \mathcal{K})$  se numește *spațiu măsurabil* când  $\mathcal{K}$  este corp borelian pe  $\Omega$ .

**Proprietăți.** Dacă  $(\Omega, \mathcal{K})$  este *spațiu măsurabil* atunci:

a)  $\Omega \in \mathcal{K}$

b)  $\emptyset \in \mathcal{K}$

c)  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{K} \implies \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{K}$ .

d)  $I$  cel mult numărabilă (i.e. finită sau numărabilă),  $A_i \in \mathcal{K}, \forall i \in I \implies \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{K}$

e)  $A, B \in \mathcal{K} \implies A \setminus B \in \mathcal{K}$ .

**Demonstrație.** a)  $\mathcal{K} \neq \emptyset \implies \exists A \in \mathcal{K} \implies \bar{A} \in \mathcal{K} \implies \Omega = A \cup \bar{A} \cup A \cup \bar{A} \cup \dots \in \mathcal{K}$ .

b)  $\emptyset = \bar{\Omega} \in \mathcal{K}$ .

c)  $\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n A_i \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots \in \mathcal{K}$ .

d)  $\bigcap_{i \in I} A_i = \overline{\bigcup_{i \in I} \bar{A}_i} \in \mathcal{K}$ .

e)  $A \setminus B = A \cap \bar{B} \in \mathcal{K}.$   $\square$

Considerăm un corp borelian pe  $\mathcal{K}$  pe un spațiu  $\Omega$  de elemente  $a, b, c, \dots$  cu  $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \dots \in \mathcal{K}$  și cu submulțimile  $A, B, C, \dots \in \mathcal{K}$ . Unele dintre corespondențele dintre teoria mulțimilor și teoria probabilităților sunt date în următorul tabel:

Teoria mulțimilor	Teoria probabilităților
Spațiu, $\Omega$	Spațiul probelor, eveniment sigur
Mulțimea vidă, $\emptyset$	Eveniment imposibil
Elemente $a, b, \dots$	Probe $a, b, \dots$ (sau evenimente simple)
Mulțimi $A, B, \dots$	Evenimente $A, B, \dots$
$A$	Evenimentul $A$ apare
$\bar{A}$	Evenimentul $A$ nu apare
$A \cup B$	Cel puțin unul dintre $A$ și $B$ apare
$A \cap B$	Ambele $A$ și $B$ apar
$A \subseteq B$	$A$ este un subeveniment al lui $B$ (i.e. apariția lui $A$ implică apariția lui $B$ )
$A \cap B = \emptyset$	$A$ și $B$ sunt mutual exclusive (i.e. ele nu pot apărea simultan)

$\emptyset$  este considerată un eveniment imposibil deoarece niciun rezultat posibil nu este element al ei. Prin "apariția unui eveniment" înțelegem că rezultatul observat este un element al acelei mulțimi. Spunem că mai multe evenimente sunt mutual exclusive dacă mulțimile corespunzătoare sunt disjuncte două câte două.

**Exemplul 1.1.** Considerăm un experiment de calculare a numărului de mașini care virează la stânga la o intersecție dintr-un grup de 100 de mașini. Rezultatele posibile (numerele posibile de mașini care virează la stânga) sunt  $0, 1, 2, \dots, 100$ . Atunci, spațiul probelor este  $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 100\}$  și  $\mathcal{K} = \mathcal{P}(\Omega)$ .  $A = \{0, 1, 2, \dots, 50\}$  este evenimentul "cel mult 50 de mașini virează la stânga".  $B = \{40, 41, \dots, 60\}$  este evenimentul "între 40 și 60 (inclusiv) de mașini virează la stânga".  $A \cup B$  este evenimentul "cel mult 60 de mașini virează la stânga".  $A \cap B$  este evenimentul "între 40 și 50 (inclusiv) de mașini virează la stânga".

Fie  $C = \{81, 82, \dots, 100\}$ . Evenimentele  $A$  și  $C$  sunt mutual exclusive.

**Definiția 1.2.** Fie  $(\Omega, \mathcal{K})$  spațiu măsurabil. Funcția  $P : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$  se numește *probabilitate* pe  $(\Omega, \mathcal{K})$  dacă și numai dacă are următoarele proprietăți (numite axiomele probabilității):

Axioma 1:  $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{K}$  (nenegativă).

Axioma 2:  $P(\Omega) = 1$  (normată).

Axioma 3: pentru orice colecție numărabilă de evenimente mutual exclusive (mulțimi disjuncte două câte două)  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{K}$ ,

$$P\left(\bigcup_j A_j\right) = \sum_j P(A_j) \text{ (numărabil aditivă).}$$

$(\Omega, \mathcal{K}, P)$  se numește *câmp de probabilitate* dacă și numai dacă  $P$  este probabilitate pe spațiul măsurabil  $(\Omega, \mathcal{K})$ .

## 1.2 Operații cu evenimente și formule de calcul pentru probabilitățile acestora

**Proprietăți.** Dacă  $(\Omega, \mathcal{K}, P)$  este câmp de probabilitate, atunci:

1)  $P(\emptyset) = 0$ .

2) pentru orice colecție finită de evenimente mutual exclusive (mulțimi disjuncte două câte două)  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{K}$ ,

$$P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n P(A_j) \text{ (} P \text{ este aditivă).}$$

3)  $A \subseteq C; A, C \in \mathcal{K} \implies P(A) \leq P(C)$ .

4)  $A, B \in \mathcal{K} \implies$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

5) (Formula lui Poincare)  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{K} \implies$

$$P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n P(A_j) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{j=1}^n A_j\right).$$

În particular,  $A, B, C \in \mathcal{K} \implies$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

6)  $A \in \mathcal{K} \implies P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ .

**Demonstrație.** 1)  $P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots) \stackrel{A3}{=} P(\Omega) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots \stackrel{A2}{\implies} 1 = 1 + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots \implies P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots = 0 \implies P(\emptyset) = 0$ .

$$2) P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots\right) \stackrel{A3}{=} \sum_{j=1}^n P(A_j) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots$$

$$\dots \stackrel{1)}{=} \sum_{j=1}^n P(A_j) + 0 + 0 + \dots = \sum_{j=1}^n P(A_j).$$

$$3) P(C) = P(A \cup (C \setminus A)) \stackrel{2)}{=} P(A) + \underbrace{P(C \setminus A)}_{\geq 0} \implies P(C) \geq P(A).$$

$$4) P(A \cup B) = P(A \cup (B \setminus A)) \stackrel{2)}{=} P(A) + P(B \setminus A) \stackrel{2)}{=} P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

5) Inducție.

Pentru  $n = 1$  e evident.

Presupunem adevărat pentru  $n$ .

Fie  $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1} \in \mathcal{K}$ .

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n+1} A_j\right) = P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j \cup A_{n+1}\right) \stackrel{4)}{=} P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \cap A_{n+1}\right) \stackrel{\text{ip. ind.}}{=} \\ \sum_{j=1}^n P(A_j) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{j=1}^n A_j\right) + \\ P(A_{n+1}) - P\left(\bigcup_{j=1}^n (A_j \cap A_{n+1})\right) \stackrel{\text{ip. ind.}}{=}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} P(A_j) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{j=1}^n A_j\right) - \\ \left[ \sum_{j=1}^n P(A_j \cap A_{n+1}) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P((A_i \cap A_{n+1}) \cap (A_j \cap A_{n+1})) + \right. \\ \left. \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P((A_i \cap A_{n+1}) \cap (A_j \cap A_{n+1}) \cap (A_k \cap A_{n+1})) - \dots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{j=1}^n (A_j \cap A_{n+1})\right) \right] = \\ \sum_{j=1}^{n+1} P(A_j) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) - \sum_{j=1}^n P(A_j \cap A_{n+1}) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \\ \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_{n+1}) - \dots + (-1)^n P\left(\bigcap_{j=1}^{n+1} A_j\right) = \\ \sum_{j=1}^{n+1} P(A_j) - \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n+1} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^n P\left(\bigcap_{j=1}^{n+1} A_j\right).$$

$$6) 1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) \stackrel{2)}{=} P(A) + P(\bar{A}). \square$$

**Exemplul 1.2.** În exemplul 1.1, presupunem că probabilitățile  $P(A)$ ,  $P(B)$  și  $P(C)$  sunt cunoscute. Vrem să calculăm  $P(A \cup B)$  (probabilitatea ca cel mult 60 de mașini să vireze la stânga) și  $P(A \cup C)$  (probabilitatea ca cel mult 50 de mașini sau între 80 și 100 de mașini să vireze la stânga). Deoarece  $A$  și  $C$  sunt mutual exclusive avem

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C).$$

Dar

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Informația dată este insuficientă pentru a determina  $P(A \cup B)$  și avem nevoie de informația adițională  $P(A \cap B)$ , care este probabilitatea ca între 40 și 50 de mașini să vireze la stânga.

### 1.3 Evenimente independente

**Definiția 1.3.** Fie  $(\Omega, \mathcal{K}, P)$  câmp de probabilitate. Două evenimente  $A, B \in \mathcal{K}$  se numesc *independente* dacă și numai dacă

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

**Observație.** Dacă  $A$  și  $B$  sunt evenimente independente, atunci:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(\overline{B}),$$

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A})P(B),$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}).$$

**Demonstrație.**  $P(A) = P((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) \implies P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B})$ .

Analog pentru celelalte relații.  $\square$

**Exemplul 1.3.** În lansarea unui satelit, probabilitatea unui insucces este  $q$ . Care este probabilitatea ca două lansări succesive să eșueze?

Presupunând că lansările satelitului sunt evenimente independente, răspunsul este  $q^2$ .

**Definiția 1.4.** Fie  $(\Omega, \mathcal{K}, P)$  câmp de probabilitate. Evenimentele  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{K}$  sunt *independente* dacă și numai dacă  $\forall m = 2, 3, \dots, n; k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}$  a. î.  $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n$ ,

$$P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \dots \cap A_{k_m}) = P(A_{k_1})P(A_{k_2}) \dots P(A_{k_m}).$$

În particular,  $A_1, A_2, A_3$  sunt independente dacă și numai dacă

$$P(A_j \cap A_k) = P(A_j)P(A_k), \forall j < k; j, k = 1, 2, 3,$$

și

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

**Observații.** 1) Numărul de egalități din definiția independenței a  $n$  evenimente este  $2^n - n - 1$ .

2) Independența două câte două nu conduce în general la independență.

**Contraexemplu.** Fie 3 evenimente  $A_1, A_2, A_3$  definite de

$$A_1 = B_1 \cup B_2, A_2 = B_1 \cup B_3, A_3 = B_2 \cup B_3,$$

unde  $B_1, B_2$  și  $B_3$  sunt mutual exclusive, fiecare având probabilitatea  $\frac{1}{4}$ .

$$P(A_1) = P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Analog } P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}.$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P((B_1 \cup B_2) \cap (B_1 \cup B_3)) = P(B_1 \cup (B_2 \cap B_3)) = P(B_1 \cup \emptyset) = P(B_1) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_1)P(A_2).$$

Analog  $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$ ,  $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$ .  
 $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P((B_1 \cup B_2) \cap (B_1 \cup B_3) \cap (B_2 \cup B_3)) = P((B_1 \cup (B_2 \cap B_3)) \cap (B_2 \cup B_3)) =$   
 $P(B_1 \cap (B_2 \cup B_3)) = P((B_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_3)) = P(\emptyset \cup \emptyset) = P(\emptyset) = 0.$   
 $P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{8}.$   
Deci  $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ .  
Evenimentele  $A_1, A_2, A_3$  sunt independente două câte două, dar nu sunt independente.

3) Dacă evenimentele  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sunt independente, atunci înlocuind oricare din  $A_{k_j}$  cu complementara  $\overline{A_{k_j}}$  în ambii membri din relațiile din definiția independenței, relațiile obținute rămân valabile.

**Exemplul 1.4.** Un sistem compus din 5 componente merge exact atunci când fiecare componentă e bună. Fie  $S_i, i = 1, \dots, 5$ , evenimentul "componenta  $i$  e bună" și presupunem  $P(S_i) = p_i$ . Care e probabilitatea  $q$  ca sistemul să nu meargă?

Presupunând că cele 5 componente merg într-o manieră independentă, fie  $p$  probabilitatea de succes.

$$q = 1 - p = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^5 S_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^5 P(S_i) = 1 - \prod_{i=1}^5 p_i.$$

## 1.4 Probabilitatea condiționată

**Definiția 1.5.** Fie  $(\Omega, \mathcal{K}, P)$  câmp de probabilitate și  $A, B \in \mathcal{K}$  a. î.  $P(B) \neq 0$ . Probabilitatea condiționată de  $B$  a lui  $A$  este dată de

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

**Observație.** În ipotezele definiției 1.5,  $A$  și  $B$  sunt independente  $\iff P(A|B) = P(A)$ .

**Demonstrație.**  $A$  și  $B$  sunt independente  $\iff P(A \cap B) = P(A)P(B) \iff \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \iff P(A|B) = P(A)$ .  $\square$

**Propoziție.** Fie  $(\Omega, \mathcal{K}, P)$  câmp de probabilitate și  $B \in \mathcal{K}$  a. î.  $P(B) \neq 0$ . Atunci funcția  $P_B : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}, P_B(A) = P(A|B)$  este probabilitate pe  $(\Omega, \mathcal{K})$ .

**Demonstrație.** Verificăm cele 3 axiome ale probabilității:

$$1) P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0, \forall A \in \mathcal{K}, \text{ deoarece } P(A \cap B) \geq 0 \text{ și } P(B) > 0.$$

$$2) P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

$$3) A_1, A_2, \dots \in \mathcal{K} \text{ colecție numărabilă de evenimente mutual exclusive} \implies A_1 \cap B, A_2 \cap B, \dots \in \mathcal{K} \text{ mutual exclusive} \implies P_B(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = \frac{P((A_1 \cup A_2 \cup \dots) \cap B)}{P(B)} =$$

$$\frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots)}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} + \dots =$$

$$P_B(A_1) + P_B(A_2) + \dots \square$$

**Exemplul 1.5.** Reconsiderăm exemplul 1.4 presupunând  $p_1 > 0$ . Care este probabilitatea condiționată ca primele două componente să fie bune dat fiind că:

a) prima componentă este bună;

b) cel puțin una dintre cele două este bună?

Evenimentul  $S_1 \cap S_2$  înseamnă că ambele componente sunt bune, iar  $S_1 \cup S_2$  că cel puțin una e bună. Datorită independenței lui  $S_1$  și  $S_2$ , avem:

$$a) P(S_1 \cap S_2 | S_1) = \frac{P(S_1 \cap S_2 \cap S_1)}{P(S_1)} = \frac{P(S_1 \cap S_2)}{P(S_1)} = \frac{P(S_1)P(S_2)}{P(S_1)} = P(S_2) = p_2.$$

$$b) P(S_1 \cap S_2 | S_1 \cup S_2) = \frac{P(S_1 \cap S_2 \cap (S_1 \cup S_2))}{P(S_1 \cup S_2)} = \frac{P(S_1 \cap S_2)}{P(S_1 \cup S_2)} = \frac{P(S_1)P(S_2)}{P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2)} = \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}.$$

**Exemplul 1.6.** Determinați probabilitatea de a trage, fără înlocuire, 2 ași succesiv dintr-un pachet de cărți de joc fără jokeri.

Fie  $A_1$  evenimentul "prima carte trasă este un as" și similar  $A_2$ . Se cere  $P(A_1 \cap A_2)$ .

$$P(A_1) = \frac{4}{52} \text{ (sunt 4 ași în cele 52 de cărți din pachet).}$$

$P(A_2 | A_1) = \frac{3}{51}$  (dacă prima carte trasă este un as, au rămas 51 de cărți dintre care 3 sunt ași).

$$P(A_2 | A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \implies P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{17} = \frac{1}{221}.$$

**Propoziție.** Fie  $(\Omega, \mathcal{K}, P)$  câmp de probabilitate și  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{K}$  a. î.  $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$ . Atunci

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

**Demonstrație.**  $A_1 \supseteq A_1 \cap A_2 \supseteq \dots \supseteq A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \implies P(A_1) \geq P(A_1 \cap A_2) \geq \dots \geq P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0 \implies$  probabilitățile condiționate din membrul drept au sens.

$$P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) = P(A_1) \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdot \dots \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})} = P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n). \square$$

**Definiția 1.6.** Fie  $B_i \subseteq \Omega, \forall i \in I$ .  $(B_i)_{i \in I}$  se numește *partiție* a lui  $\Omega$  dacă și numai dacă  $(B_i)_{i \in I}$  sunt disjuncte două câte două și  $\bigcup_{i \in I} B_i = \Omega$ .

**Teorema probabilității totale.** Fie  $(\Omega, \mathcal{K}, P)$  câmp de probabilitate și  $(B_i)_{i \in I} \subset \mathcal{K}$  partiție cel mult numărabilă a lui  $\Omega$  a. î.  $P(B_i) > 0, \forall i \in I$ . Atunci,  $\forall A \in \mathcal{K}$ ,

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A | B_i) P(B_i).$$

**Demonstrație.**  $(B_i)_{i \in I}$  mutual exclusive,  $A \cap B_i \subseteq B_i, \forall i \in I \implies (A \cap B_i)_{i \in I}$  mutual exclusive  $\implies \sum_{i \in I} P(A | B_i) P(B_i) = \sum_{i \in I} \frac{P(A \cap B_i)}{P(B_i)} \cdot P(B_i) =$

$$\sum_{i \in I} P(A \cap B_i) = P\left(\bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)\right) = P\left(A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i\right)\right) = P(A \cap \Omega) = P(A). \square$$

**Exemplul 1.7.** Să se determine probabilitatea ca un nivel critic al curgerii să fie atins în timpul furtunilor într-un sistem de canalizare pe baza măsurărilor meteorologice și hidrologice.

Fie  $B_i, i = 1, 2, 3$  diferitele nivele (mic, mediu și mare) de precipitații cauzate de o furtună și  $A_j, j = 1, 2$  nivelele critic, respectiv necritic al curgerii.

Probabilitățile  $P(B_i)$  pot fi estimate din înregistrările meteorologice, iar  $P(A_j|B_i)$  din analiza curgerii. Presupunem că:

$$\begin{aligned} P(B_1) &= 0,5; P(B_2) = 0,3; P(B_3) = 0,2; \\ P(A_1|B_1) &= 0; P(A_1|B_2) = 0,2; P(A_1|B_3) = 0,6; \\ P(A_2|B_1) &= 1; P(A_2|B_2) = 0,8; P(A_2|B_3) = 0,4. \end{aligned}$$

Deoarece  $B_1, B_2, B_3$  constituie o partiție, din teorema probabilității totale avem:

$$P(A_1) = P(A_1|B_1)P(B_1) + P(A_1|B_2)P(B_2) + P(A_1|B_3)P(B_3) = 0 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,2 = 0,18.$$

## 1.5 Formula lui Bayes

Thomas Bayes a fost un filozof englez.

**Teorema lui Bayes.** Fie  $(\Omega, \mathcal{K}, P)$  câmp de probabilitate și  $A, B \in \mathcal{K}$  a. î.  $P(A) \neq 0$  și  $P(B) \neq 0$ . Atunci:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

**Demonstrație.**  $\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{P(A \cap B)}{P(B)} \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B|A). \square$

**Formula lui Bayes.** Fie  $(\Omega, \mathcal{K}, P)$  câmp de probabilitate și  $(B_i)_{i \in I} \subset \mathcal{K}$  partiție cel mult numărabilă a lui  $\Omega$  a. î.  $P(B_i) > 0, \forall i \in I$ . Atunci,  $\forall A \in \mathcal{K}$  a. î.  $P(A) \neq 0, \forall i \in I$ ,

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j \in I} [P(A|B_j)P(B_j)]}.$$

**Demonstrație.**  $\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j \in I} [P(A|B_j)P(B_j)]} \stackrel{\text{TPT}}{=} \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)} \stackrel{\text{TB}}{=} P(B_i|A). \square$

**Exemplul 1.8.** În exemplul 1.7, să se determine  $P(B_2|A_2)$ , probabilitatea ca, dat fiind că s-a atins un nivel necritic al curgerii, el să fi fost datorat unei furtuni de nivel mediu. Din formula lui Bayes rezultă

$$P(B_2|A_2) = \frac{P(A_2|B_2)P(B_2)}{\sum_{j=1}^3 [P(A_2|B_j)P(B_j)]} = \frac{0,8 \cdot 0,3}{1 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,2} = \frac{0,24}{0,5 + 0,24 + 0,08} = \frac{0,24}{0,82} =$$

$$\frac{12}{41} \cong 0,293.$$

**Exemplul 1.9.** Un canal de comunicare binar simplu transmite mesaje folosind doar 2 semnale, să spunem 0 și 1. Presupunem că, pentru un canal binar dat, 40% din timp e transmis un 1; probabilitatea ca un 0 transmis să fie corect recepționat este 0,9 și probabilitatea ca un 1 transmis să fie corect recepționat este 0,95. Determinați:

- probabilitatea ca un 1 să fie primit;
- dat fiind că un 1 este primit, probabilitatea ca un 1 să fi fost transmis.

Fie

$$A = \text{"1 este transmis"}$$

$$\bar{A} = \text{"0 este transmis"}$$



$B$  = "1 este primit"

$\overline{B}$  = "0 este primit".

Din ipoteze

$$P(A) = 0,4; P(\overline{A}) = 0,6;$$

$$P(B|A) = 0,95; P(\overline{B}|A) = 0,05;$$

$$P(\overline{B}|\overline{A}) = 0,9; P(B|\overline{A}) = 0,1.$$

a) Deoarece  $A$  și  $\overline{A}$  formează o partiție, din teorema probabilității totale rezultă că

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A}) = 0,95 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,6 = 0,38 + 0,06 = 0,44.$$

b) Din teorema lui Bayes,

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{0,95 \cdot 0,4}{0,44} = \frac{0,38}{0,44} = \frac{19}{22} \cong 0,864.$$

## 2 Variabile aleatoare. Variabile aleatoare discrete și variabile aleatoare continue, cu densitate de repartiție. Funcție de repartiție. Momentele unei variabile aleatoare

### 2.1 Variabile aleatoare

Considerăm un experiment aleator ale cărui rezultate sunt elemente ale spațiului probelor  $\Omega$  din câmpul de probabilitate  $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ . Pentru a construi un model pentru o variabilă aleatoare, presupunem că e posibil să asociem un număr real  $X(\omega)$  pentru fiecare rezultat  $\omega$ , urmând un anumit set de reguli.

**Definiția 2.1.** Funcția  $X$  se numește *variabilă aleatoare* dacă și numai dacă

a)  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $(\Omega, \mathcal{K}, P)$  este câmp de probabilitate și

b)  $\forall x \in \mathbb{R}, \{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{K}$ .

Condiția b) din definiție e așa-numita "condiție de măsurabilitate". Ea ne asigură că are sens să considerăm probabilitatea evenimentului  $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\}$ , notat mai simplu  $X \leq x$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , sau, mai general, probabilitatea oricărei combinații finite sau numărabile de astfel de evenimente.

În continuare, dacă nu e specificat altfel, variabilele aleatoare sunt considerate pe un câmp de probabilitate  $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ .

### 2.2 Variabile aleatoare discrete și variabile aleatoare continue, cu densitate de repartiție

**Definiția 2.2.** O variabilă aleatoare se numește *discretă* dacă și numai dacă ia numai valori izolate. Mulțimea valorilor unei variabile aleatoare discrete este cel mult numărabilă.

**Definiția 2.3.** O variabilă aleatoare se numește *continuă* dacă valorile ei umplu un interval.

**Definiția 2.4.** Fie  $X$ , variabilă aleatoare continuă. O funcție  $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a. î.  $f_X(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  și  $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du, \forall x \in \mathbb{R}$  se numește *funcție densitate de repartiție* sau *funcție densitate de probabilitate* sau simplu *densitate* a lui  $X$ .

### 2.3 Funcție de repartiție

**Definiția 2.5.** Fie  $X$  variabilă aleatoare. Funcția  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$F_X(x) = P(X \leq x),$$

se numește *funcția de repartiție de probabilitate* sau simplu *funcția de repartiție* a lui  $X$ .

Indicele  $X$  identifică variabila aleatoare. Acest indice e uneori omis când nu e pericol de confuzie.

**Proprietăți ale funcției de repartiție.** 1) Există și are valori între 0 și

1.

2) E continuă la dreapta și crescătoare. Mai mult, avem:

$$F_X(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \text{ și } F_X(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1.$$

3) Dacă  $a, b \in \mathbb{R}$  a. î.  $a < b$ , atunci

$$P(a < X \leq b) := P(\{\omega \in \Omega | a < X(\omega) \leq b\}) = F_X(b) - F_X(a).$$

Această relație rezultă din

$$P(X \leq b) = P(X \leq a) + P(a < X \leq b).$$

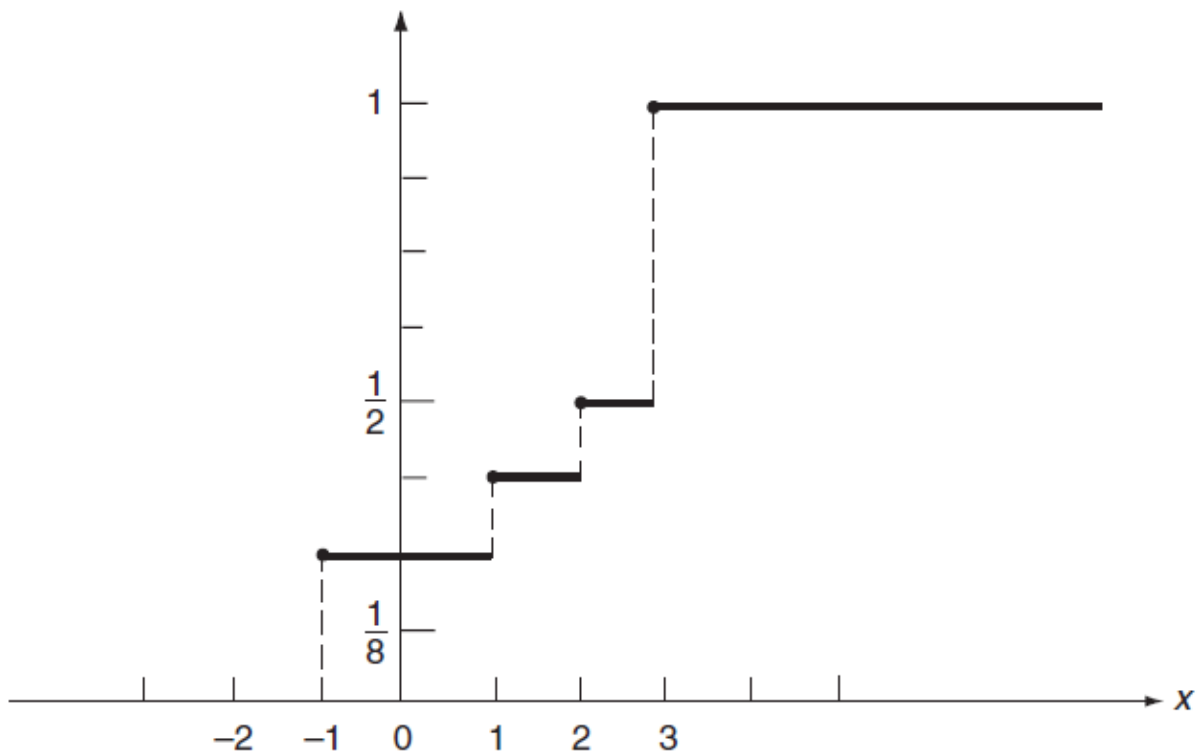
**Exemplul 2.1.** Fie  $X$  o variabilă aleatoare discretă cu valorile  $-1, 1, 2, 3$

luate cu probabilitățile  $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$ , respectiv  $\frac{1}{2}$ . Pe scurt notăm  $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .

Avem

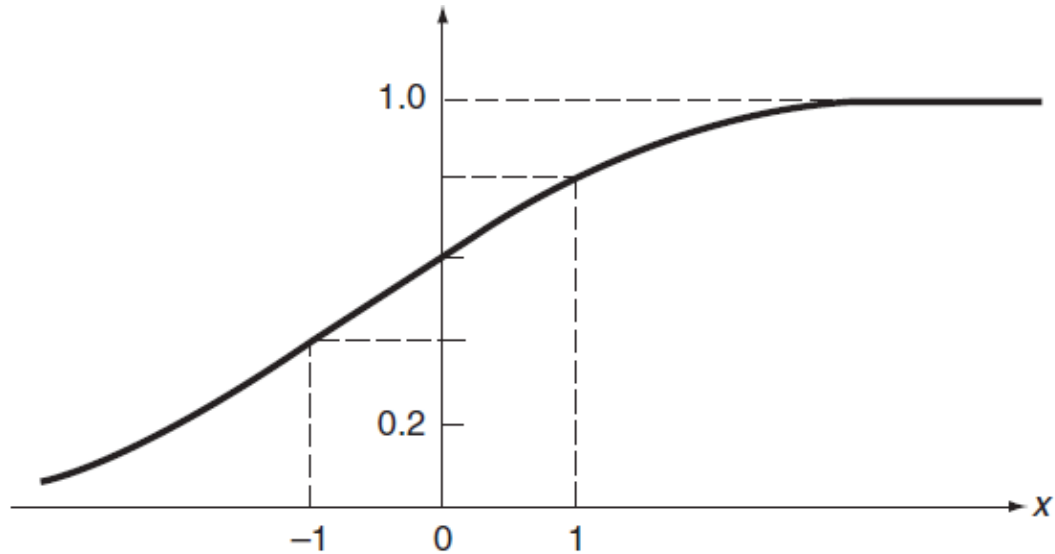
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } x < -1; \\ \frac{1}{4}, & \text{pentru } -1 \leq x < 1; \\ \frac{3}{8}, & \text{pentru } 1 \leq x < 2; \\ \frac{1}{2}, & \text{pentru } 2 \leq x < 3; \\ 1, & \text{pentru } x \geq 3. \end{cases}$$

Graficul lui  $F_X$  este dat mai jos.



Este tipic pentru funcția de repartiție a unei variabile aleatoare discrete să crească de la 0 la 1 "în trepte".

**Exemplul 2.2.** O funcție de repartiție tipică pentru o variabilă aleatoare continuă este reprezentată grafic mai jos.



Ea nu are salturi sau discontinuități ca în cazul unei variabile aleatoare discrete. Probabilitatea ca  $X$  să aibă o valoare într-un anumit interval este dată de proprietatea 3) a funcției de repartiție. Din grafic

$$P(-1 < X \leq 1) = F_X(1) - F_X(-1) = 0,8 - 0,2 = 0,6.$$

Avem  $P(X = a) = 0, \forall a \in \mathbb{R}$ .

**Observație.** Se poate defini funcția de repartiție și ca  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x)$ . În acest caz proprietățile 1) și 2) rămân valabile cu excepția faptului că funcția de repartiție este continuă la stânga și nu la dreapta, iar proprietatea 3) devine

3') Dacă  $a, b \in \mathbb{R}$  a. î.  $a < b$ , atunci

$$P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a).$$

**Proprietăți ale densității.** 1)  $f_X(x) = F'_X(x), \forall x$  în care  $F_X$  este derivabilă.

2)

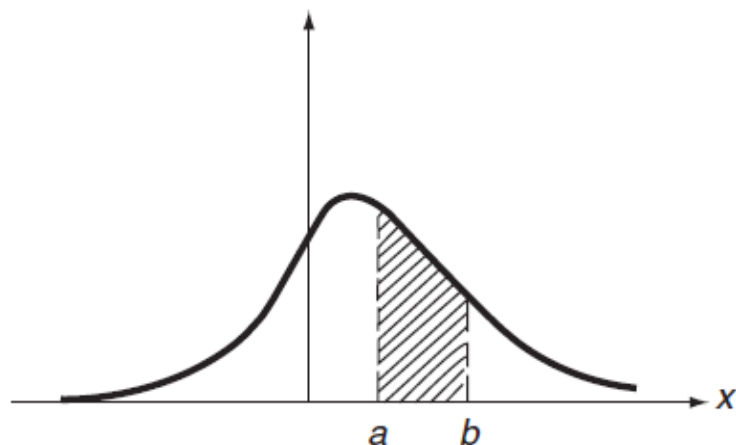
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$3) \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1.$$

4) Dacă  $a, b \in \mathbb{R}$  a. î.  $a < b$ , atunci

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x) dx.$$

**Exemplul 2.3.** Un exemplu de densitate e reprezentată grafic mai jos.



După cum indică proprietățile 3) și 4), aria totală de sub curbă este 1 și suprafața hașurată de la  $a$  la  $b$  e egală cu  $P(a < X \leq b)$ .

**Observație.** Cunoașterea densității sau a funcției de repartiție caracterizează complet o variabilă aleatoare continuă.

**Exemplul 2.4.** Fie  $a > 0$ . O variabilă aleatoare  $X$  a cărei densitate este

$$f_X(x) = \begin{cases} ae^{-ax}, & \text{pentru } x > 0; \\ 0, & \text{altfel,} \end{cases}$$

se numește *repartizată exponențial* (de parametru  $a$ ). Avem  $f_X(x) \geq 0, \forall x \in$

$\mathbb{R}$  și

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{\infty} ae^{-ax} dx = 0 - e^{-ax} \Big|_0^{\infty} = 1,$$

deci  $f_X$  verifică proprietatea 3).

Dacă  $x < 0$ , atunci

$$\int_{-\infty}^x f_X(u) du = \int_{-\infty}^x 0 du = 0.$$

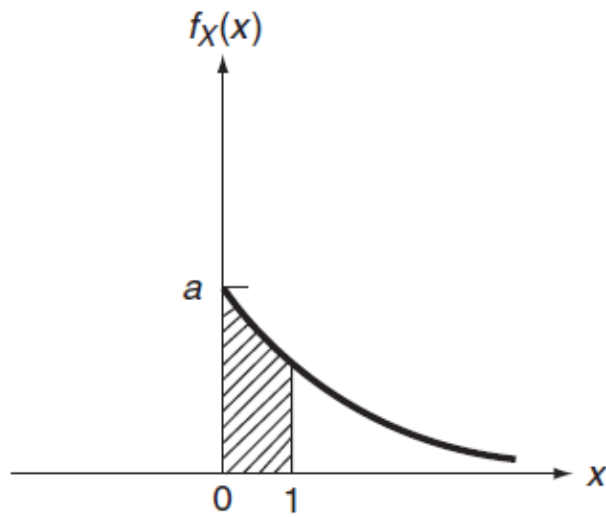
Dacă  $x \geq 0$ , atunci

$$\int_{-\infty}^x f_X(u) du = \int_{-\infty}^0 0 du + \int_0^x ae^{-au} du = 0 - e^{-au} \Big|_0^x = 1 - e^{-ax}.$$

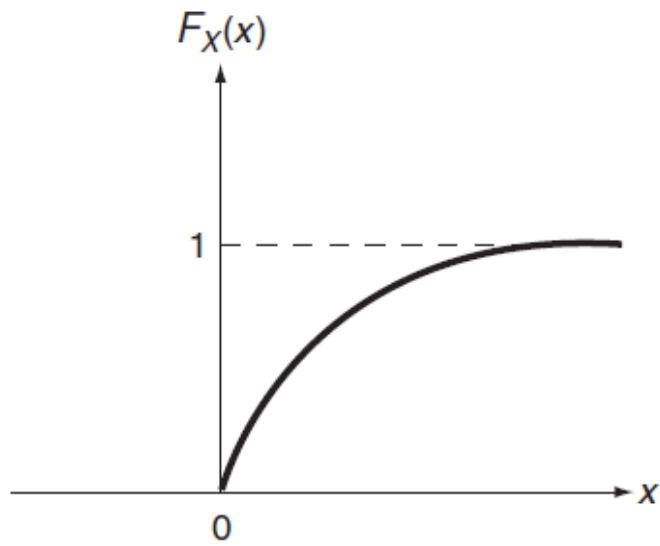
Deci, din proprietatea 2) avem

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } x < 0; \\ 1 - e^{-ax}, & \text{pentru } x \geq 0. \end{cases}$$

Graficul densității e dat în figura (a), iar al funcției de repartiție în figura (b) de mai jos.



(a)



(b)

Calculăm unele probabilități folosind  $f_X$ .

$P(0 < X \leq 1)$  e egală cu aria de sub graficul lui  $f_X$  de la  $x = 0$  la  $x = 1$ , după cum se arată în figura (a). Avem

$$P(0 < X \leq 1) = \int_0^1 f_X(x) dx = -e^{-ax} \Big|_0^1 = 1 - e^{-a}.$$

$P(X > 3)$  e obținută calculând aria de sub graficul lui  $f_X$  la dreapta lui  $x = 3$ , deci

$$P(X > 3) = \int_3^{\infty} f_X(x) dx = -e^{-ax}|_3^{\infty} = e^{-3a}.$$

Aceleași probabilități pot fi obținute din  $F_X$  astfel:

$$P(0 < X \leq 1) = F_X(1) - F_X(0) = 1 - e^{-a} - 0 = 1 - e^{-a},$$

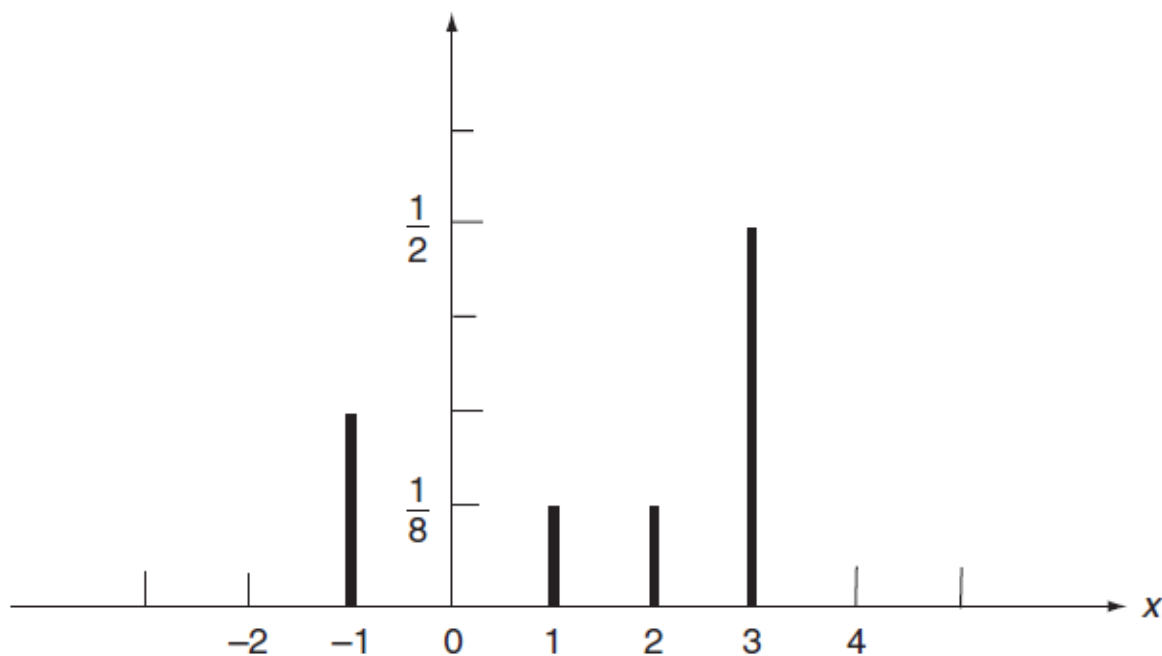
$$P(X > 3) = F_X(\infty) - F_X(3) = 1 - (1 - e^{-3a}) = e^{-3a}.$$

Mai observăm că  $P(0 < X \leq 1) = P(0 \leq X \leq 1)$  pentru variabile aleatoare continue, deoarece  $P(X = 0) = 0$ .

**Definiția 2.6.** Fie  $X$  variabilă aleatoare discretă. Funcția  $p_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p_X(x) = P(X = x) := P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\})$  se numește *funcția masă de probabilitate* a lui  $X$ , sau, pe scurt, masa lui  $X$ .

Din nou indicele  $X$  e folosit pentru a identifica variabila aleatoare asociată.

**Exemplul 2.5.** Funcția masă de probabilitate a variabilei aleatoare  $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  din exemplul 2.1 e reprezentată mai jos.



**Observații.** 1) Dacă  $X$  e variabilă aleatoare discretă cu mulțimea cel mult numărabilă de valori  $\{x_1, x_2, \dots\}$  luate cu probabilități nenule, atunci:

$$0 < p_X(x_i) \leq 1, \forall i;$$

$$\sum_i p_X(x_i) = 1;$$

$$p_X(x) = 0, \forall x \notin \{x_1, x_2, \dots\}.$$

2) Ca și  $F_X$ , specificarea lui  $p_X$  caracterizează complet variabila aleatoare discretă  $X$ . Mai mult, presupunând  $x_1 < x_2 < \dots$ , relațiile dintre  $F_X$  și  $p_X$  sunt

$$\begin{aligned} p_X(x_1) &= F_X(x_1), \\ p_X(x_i) &= F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}), \forall i > 1, \\ F_X(x) &= \sum_{i|x_i \leq x} p_X(x_i), \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3) Specificarea lui  $p_X$  se face de obicei dând numai valorile pozitive, în restul punctelor subînțelegându-se că e 0.

## 2.4 Momentele unei variabile aleatoare

Fie  $X$  variabilă aleatoare discretă cu valorile  $x_1, x_2, \dots$  și funcția masă de probabilitate  $p_X$  sau continuă cu densitatea  $f_X$ .

**Definiția 2.7.** Numărul real

$$E(X) := \begin{cases} \sum x_i p_X(x_i), & \text{pentru } X \text{ discretă;} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx, & \text{pentru } X \text{ continuă,} \end{cases}$$

dacă există, se numește *media* lui  $X$  și se mai notează  $m_X$  sau simplu  $m$ .

**Definiția 2.8.** Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Numărul real

$$\alpha_n := E(X^n) = \begin{cases} \sum x_i^n p_X(x_i), & \text{pentru } X \text{ discretă;} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx, & \text{pentru } X \text{ continuă,} \end{cases}$$

dacă există, se numește *momentul de ordinul  $n$*  al lui  $X$ .

**Observație.** Media este momentul de ordinul 1.

**Exemplul 2.6.** Fie  $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  din exemplul 2.1.

$$E(X) = (-1) \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{1}{8} + \frac{3}{2} = \frac{13}{8}.$$

**Exemplul 2.7.** Timpul de așteptare  $X$  (în minute) al unui client la un automat de bilete are densitatea

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & \text{pentru } x > 0; \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Determinați timpul mediu de așteptare.

Integrând prin părți avem

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{\infty} x \cdot 2e^{-2x} dx = 0 - \int_0^{\infty} x (e^{-2x})' dx = \\ &= -x e^{-2x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-2x} dx = 0 - \frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2} \text{ minut.} \end{aligned}$$

**Proprietăți ale mediei.** Dacă  $c \in \mathbb{R}$  este o constantă și  $X$  și  $Y$  sunt variabile aleatoare pe același câmp de probabilitate  $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ , atunci:



$$\begin{aligned}
E(c) &= c, \\
E(cX) &= cE(X), \\
E(X+Y) &= E(X) + E(Y), \\
E(X) &\leq E(Y), \text{ dacă } X \leq Y \text{ (i.e. } X(\omega) \leq Y(\omega), \forall \omega \in \Omega).
\end{aligned}$$

**Definiția 2.9.** Fie  $X$  variabilă aleatoare. Se numește *mediană* a lui  $X$  o valoare  $x_0$  a lui  $X$  a. î.  $P(X \leq x_0) = \frac{1}{2}$  sau, dacă o astfel de valoare nu există, valoarea  $x_0$  a lui  $X$  a. î.  $P(X < x_0) < \frac{1}{2}$  și  $P(X \leq x_0) > \frac{1}{2}$ .

Media lui  $X$  poate să nu existe, dar există cel puțin o mediană.

În comparație cu media, mediana e uneori preferată ca măsură a tendinței centrale când repartiția e asimetrică, în particular când sunt un număr mic de valori extreme în repartiție. De exemplu, vorbim de mediana veniturilor ca o bună măsură a tendinței centrale a venitului personal pentru o populație. Aceasta e o măsură mai bună decât media, deoarece mediana nu e așa sensibilă la un număr mic de venituri extrem de mari sau venituri extrem de mici ca media.

**Exemplul 2.8.** Fie  $T$  timpul dintre emisiile de particule la un atom radioactiv. Este stabilit că  $T$  e o variabilă aleatoare cu repartiție exponențială, adică

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & \text{pentru } t > 0; \\ 0, & \text{altfel,} \end{cases}$$

unde  $\lambda$  e o constantă pozitivă. Variabila aleatoare  $T$  se numește timpul de viață al atomului și o măsură medie a acestui timp de viață este timpul de înjumătățire, definit ca mediana lui  $T$ . Astfel, timpul de înjumătățire  $\tau$  e găsit din

$$\begin{aligned}
P(T \leq \tau) = \frac{1}{2} &\iff \int_{-\infty}^{\tau} f_T(t) dt = \frac{1}{2} \iff 1 - e^{-\lambda \tau} = \frac{1}{2} \iff e^{-\lambda \tau} = \\
\frac{1}{2} &\iff \tau = \frac{\ln 2}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Observăm că viața medie  $E(T)$  este

$$E(T) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_T(t) dt = \frac{1}{\lambda} \text{ (se calculează analog ca la exemplul 2.7).}$$

**Definiția 2.10.** Fie  $X$  variabilă aleatoare. Se numește *modul* sau *modă* a lui  $X$

a) o valoare  $x_i$  luată de  $X$  a. î.  $p_X(x_i) > p_X(x_{i+1})$  și  $p_X(x_i) > p_X(x_{i-1})$ , dacă  $X$  e discretă cu valorile  $x_1 < x_2 < \dots$ ;

b) un punct de maxim local al lui  $f_X$ , dacă  $X$  e continuă.

Un modul este astfel o valoare a lui  $X$  corespunzătoare unui vârf în funcția masă de probabilitate sau în densitate.

Termenul *distribuție unimodală* se referă la o funcție de repartiție a unei variabile aleatoare care are un modul unic.

Media, mediana și modulul coincid atunci când o repartiție unimodală este simetrică.

**Definiția 2.11.** Fie  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $X$  variabilă aleatoare de medie  $m$ . *Momentul centrat de ordinul  $n$*  al lui  $X$  este

$$\mu_n = E((X - m)^n) = \begin{cases} \sum (x_i - m)^n p_X(x_i), & \text{pentru } X \text{ discretă;} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^n f_X(x) dx, & \text{pentru } X \text{ continuă.} \end{cases}$$

**Definiția 2.12.** Fie  $X$  variabilă aleatoare. *Varianța* sau *dispersia* lui  $X$  este momentul centrat de ordinul 2 al lui  $X$ ,  $\mu_2$ . Se notează cu  $\sigma_X^2$  sau simplu  $\sigma^2$  sau  $var(X)$ .

Valori mari ale lui  $\sigma_X^2$  implică o întindere mare a valorilor lui  $X$  în jurul mediei. Reciproc, valori mici ale lui  $\sigma_X^2$  implică o concentrare a valorilor lui  $X$  în jurul mediei. În cazul extrem când  $\sigma_X^2 = 0$ ,  $X = m$  cu probabilitatea 1 (întreaga masă a distribuției e concentrată în medie).

**Propoziție.** Relația dintre dispersia și momentele lui  $X$  este  $\sigma^2 = \alpha_2 - m^2$ .

**Demonstrație.**  $\sigma^2 = E((X - m)^2) = E(X^2 - 2mX + m^2) = E(X^2) - 2mE(X) + m^2 = \alpha_2 - 2m^2 + m^2 = \alpha_2 - m^2$ .

**Alte proprietăți ale dispersiei.**  $var(X) \geq 0$ ,

$$var(X + c) = var(X), \forall c \in \mathbb{R},$$

$$var(cX) = c^2 var(X), \forall c \in \mathbb{R}.$$

Fie  $X$  variabilă aleatoare de medie  $m$ . Se numește *deviație standard* a lui  $X$

$$\sigma_X = \sqrt{E((X - m)^2)}.$$

Un avantaj al folosirii lui  $\sigma_X$  în locul lui  $\sigma_X^2$  este că  $\sigma_X$  are aceeași unitate de măsură ca media. De aceea poate fi comparată cu media pe aceeași scală pentru a obține o măsură a gradului de împrăștiere.

Un număr adimensional (fără unitate de măsură) care caracterizează împrăștierea relativ la medie și care facilitează compararea variabilelor aleatoare de unități diferite este *coeficientul de variație* definit de

$$v_X = \frac{\sigma_X}{m_X}.$$

**Exemplul 2.9.** Fie  $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  din exemplul 2.1. Să determinăm  $\sigma_X^2$ .

În exemplul 2.6 am văzut că  $m_X = \frac{13}{8}$ . Avem

$$E(X^2) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{8} + 2^2 \cdot \frac{1}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = \frac{3}{8} + 5 = \frac{43}{8}.$$

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - m_X^2 = \frac{43}{8} - \frac{169}{64} = \frac{344 - 169}{64} = \frac{175}{64}.$$

**Exemplul 2.10.** Determinăm dispersia lui  $X$  cu  $f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & \text{pentru } x \geq 0; \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$

În exemplul 2.7 am văzut că  $m_X = \frac{1}{2}$ . Avem, integrând prin părți

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{\infty} x^2 \cdot 2e^{-2x} dx = 0 - \int_0^{\infty} x^2 (e^{-2x})' dx = -x^2 e^{-2x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2xe^{-2x} dx = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \text{ ultima integrală fiind calculată la}$$

exemplul 2.7.

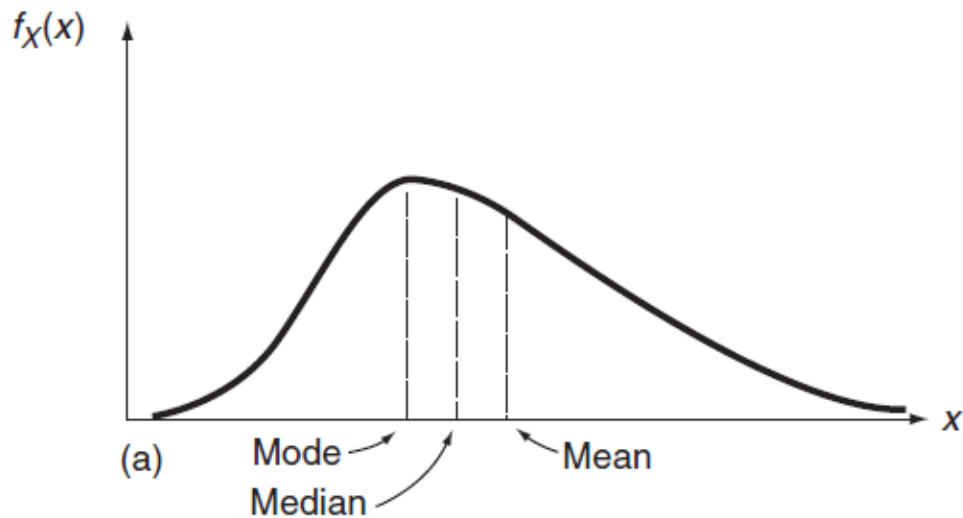
Deci

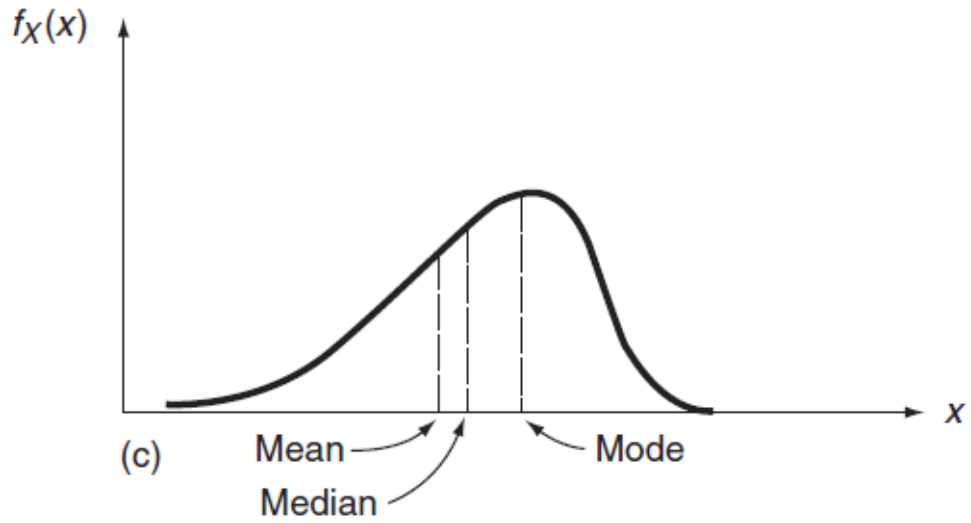
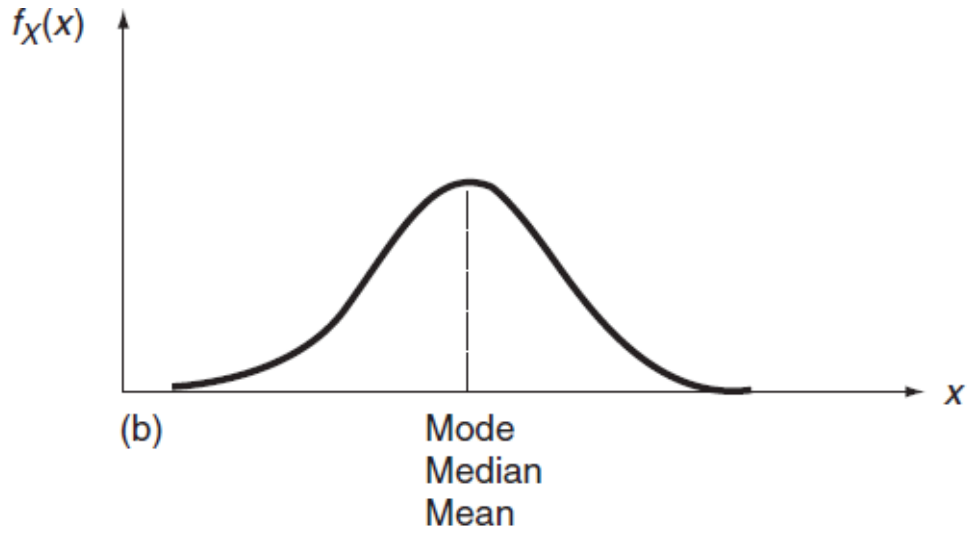
$$\sigma_X^2 = E(X^2) - m_X^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

*Coefficientul de asimetrie* definit de

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

dă o măsură a simetriei unei distribuții. Este pozitiv când o distribuție unimodală are o coadă dominantă la dreapta (adică modulul este la stânga mediei) și negativ în caz contrar. Este 0 când o distribuție e simetrică în jurul mediei. De fapt, o distribuție simetrică în jurul mediei are toate momentele centrate de ordin impar 0. În figurile (a), (b) și (c) sunt reprezentate densități cu  $\gamma_1 > 0$ ,  $\gamma_1 = 0$ , respectiv  $\gamma_1 < 0$ .





Gradul de applatizare a distribuției lângă vârfuri poate fi măsurat de *coeficientul de exces* definit de

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Un  $\gamma_2 > 0$  implică un vârf ascuțit în vecinătatea modului unei distribuții unimodale, iar  $\gamma_2 < 0$  implică, de regulă, un vârf turtit.

#### 2.4.1 Inegalitatea lui Cebîșev

**Teorema 2.1. (Inegalitatea lui Cebîșev)** Fie  $X$  variabilă aleatoare cu media  $m_X$  și deviația standard  $\sigma_X \neq 0$ . Atunci

$$P(|X - m_X| \geq k\sigma_X) \leq \frac{1}{k^2}, \quad (2.1)$$

pentru orice  $k > 0$ .

**Demonstrație.** Presupunem  $X$  continuă. Din definiție avem

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f_X(x) dx \geq \int_{|x - m_X| \geq k\sigma_X} (x - m_X)^2 f_X(x) dx \geq \\ &k^2 \sigma_X^2 \int_{|x - m_X| \geq k\sigma_X} f_X(x) dx = k^2 \sigma_X^2 P(|X - m_X| \geq k\sigma_X). \end{aligned}$$

Rezultă relația (2.1). Demonstrația este similară când  $X$  este discretă.  $\square$

### 3 Independența variabilelor aleatoare. Densitate de repartiție condiționată și formula lui Bayes pentru densități de repartiție. Covarianță și corelație

#### 3.1 Independența variabilelor aleatoare

Toate variabilele aleatoare sunt considerate pe același câmp de probabilitate  $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ , dacă nu se specifică altfel.

**Definiția 3.1.** a) *Funcția de repartiție comună* a variabilelor aleatoare  $X$  și  $Y$  este definită de

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x \cap Y \leq y).$$

b) *Funcția de repartiție comună* a variabilelor aleatoare  $X_1, X_2, \dots, X_n$  este definită de

$$F_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1 \cap X_2 \leq x_2 \cap \dots \cap X_n \leq x_n).$$

**Proprietăți 3.1.** a)  $F_{XY}(x, y) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

b)  $F_{XY}$  e crescătoare în  $x$  și  $y$ .

c)  $F_{XY}$  e continuă la dreapta în raport cu  $x$  și  $y$ .

d)  $F_{XY}(-\infty, -\infty) = F_{XY}(-\infty, y) = F_{XY}(x, -\infty) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

e)  $F_{XY}(\infty, \infty) = 1$ .

f)  $F_{XY}(x, \infty) = F_X(x), \forall x \in \mathbb{R}$ .

g)  $F_{XY}(\infty, y) = F_Y(y), \forall y \in \mathbb{R}$ .

h)  $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$  a. î.  $x_1 < x_2$  și  $y_1 < y_2$ ,

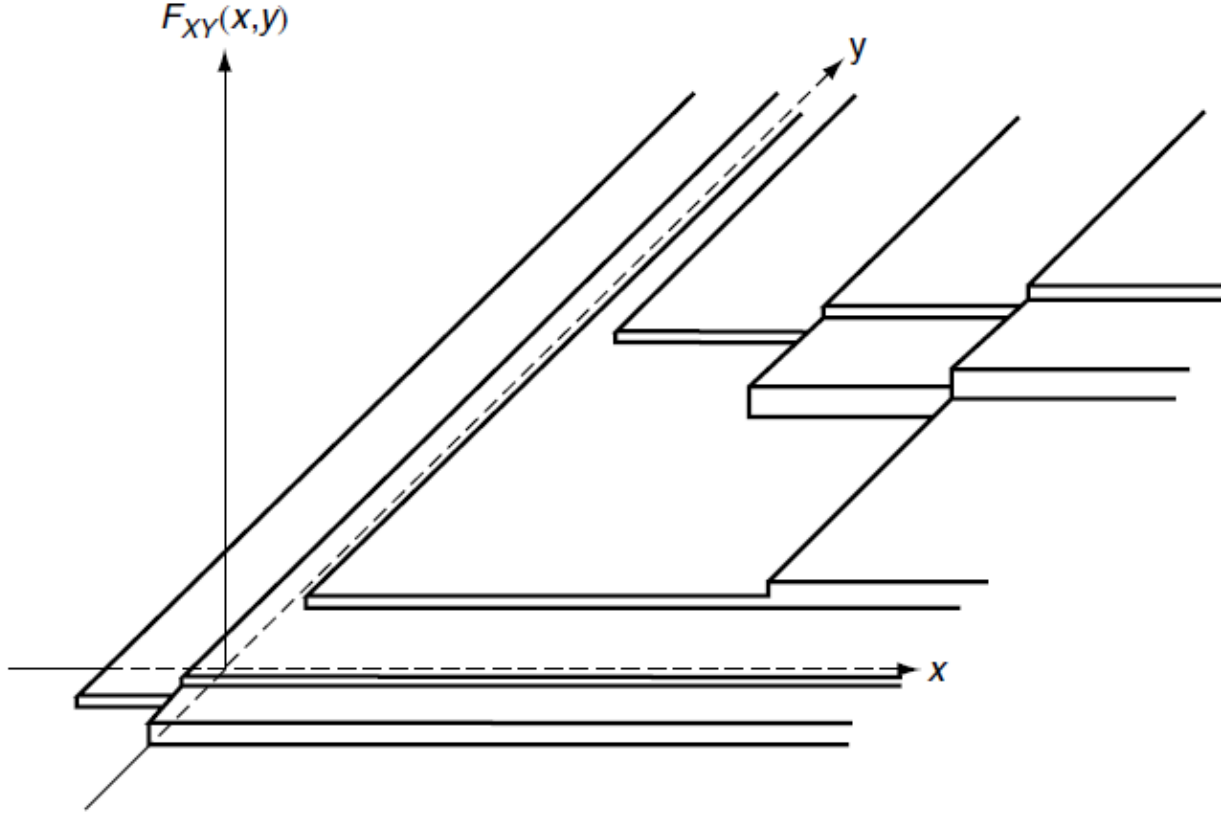
$$P(x_1 < X \leq x_2 \cap y_1 < Y \leq y_2) = F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_1, y_2) - F_{XY}(x_2, y_1) + F_{XY}(x_1, y_1).$$

Demonstrăm de exemplu f):

$$F_{XY}(x, \infty) = P(X \leq x \cap Y \leq \infty) = P(X \leq x \cap \Omega) = P(X \leq x) = F_X(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Proprietăți similare se pot deduce pentru  $F_{X_1 X_2 \dots X_n}$ .

Forma generală a lui  $F_{XY}$  poate fi vizualizată din proprietățile d)-g). În cazul când  $X$  și  $Y$  sunt discrete  $F_{XY}$  seamănă cu un colț al unor trepte neregulate, ca în figura de mai jos.



Crește de la 0 la înălțimea de 1 în direcția dinspre cadranul 3 spre cadranul 1. Când  $X$  și  $Y$  sunt continue  $F_{XY}$  este o suprafață netedă cu aceleași trăsături.

Proprietățile f) și g) arată că funcțiile de repartiție ale variabilelor aleatoare individuale, numite *funcții de repartiție marginale*, pot fi calculate din funcția de repartiție comună a lor. Reciproca nu este în general adevărată. O situație importantă când reciproca este adevărată este când  $X$  și  $Y$  sunt independente.

**Definiția 3.2.** a) Variabilele aleatoare  $X$  și  $Y$  sunt *independente* dacă și numai dacă  $P(X \leq x \cap Y \leq y) = P(X \leq x) P(Y \leq y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

b) Variabilele aleatoare  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sunt *independente* dacă și numai dacă  $P(X_1 \leq x_1 \cap X_2 \leq x_2 \cap \dots \cap X_n \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1) P(X_2 \leq x_2) \dots P(X_n \leq x_n), \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ .

c) Fie  $I$  mulțime infinită. Variabilele aleatoare  $(X_i)_{i \in I}$  sunt independente  $\iff (X_i)_{i \in J}$  sunt independente,  $\forall J \subset I$  finită.

**Observații.** a)  $X$  și  $Y$  sunt independente  $\iff F_{XY}(x, y) = F_X(x) F_Y(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

b)  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sunt independente  $\iff F_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \dots F_{X_n}(x_n), \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ .

c)  $X$  și  $Y$  sunt independente  $\implies$

$P(x_1 < X \leq x_2 \cap y_1 < Y \leq y_2) = P(x_1 < X \leq x_2) P(y_1 < Y \leq y_2), \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$  a. î.  $x_1 < x_2$  și  $y_1 < y_2$ .

**Demonstrație.** a), b) Evident.

$$\begin{aligned} \text{c) } P(x_1 < X \leq x_2 \cap y_1 < Y \leq y_2) &= \\ F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_1, y_2) - F_{XY}(x_2, y_1) + F_{XY}(x_1, y_1) &= \\ F_X(x_2) F_Y(y_2) - F_X(x_1) F_Y(y_2) - F_X(x_2) F_Y(y_1) + F_X(x_1) F_Y(y_1) &= \\ (F_X(x_2) - F_X(x_1))(F_Y(y_2) - F_Y(y_1)) &= P(x_1 < X \leq x_2) P(y_1 < Y \leq y_2). \end{aligned}$$

În general:

$$X_1, X_2, \dots, X_n \text{ sunt independente} \iff P\left(\bigcap_{i=1}^n X_i \in A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in A_i), \forall A_1, \dots, A_n$$

intervale sau mulțimi cu un singur element din  $\mathbb{R}$ .

Aici  $X_i \in A_i = \{\omega \in \Omega | X_i(\omega) \in A_i\}$ .

**Definiția 3.3.** a) *Funcția masă de probabilitate comună* a variabilelor aleatoare discrete  $X$  și  $Y$  este definită de

$$p_{XY}(x, y) = P(X = x \cap Y = y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

b) Fie  $n$  variabile aleatoare discrete  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . *Funcția masă de probabilitate comună* a lor este definită de

$$p_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap \dots \cap X_n = x_n), \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

**Proprietăți 3.2.** Fie  $X$  și  $Y$  variabile aleatoare discrete care iau o mulțime cel mult numărabilă de perechi de valori  $(x_i, y_j), i, j = 1, 2, \dots$  cu probabilități nenule.

a)  $p_{XY}(x, y) = 0$  peste tot, exceptând punctele  $(x_i, y_j), i, j = 1, 2, \dots$  unde ia valori egale cu probabilitatea comună  $P(X = x_i \cap Y = y_j)$ .

b)  $0 < p_{XY}(x_i, y_j) \leq 1$ ;

$$\text{c) } \sum_i \sum_j p_{XY}(x_i, y_j) = 1;$$

$$\text{d) } \sum_i p_{XY}(x_i, y) = p_Y(y);$$

$$\text{e) } \sum_j p_{XY}(x, y_j) = p_X(x);$$

$$\text{f) } F_{XY}(x, y) = \sum_{i|x_i \leq x} \sum_{j|y_j \leq y} p_{XY}(x_i, y_j), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Acum  $p_X(x)$  și  $p_Y(y)$  sunt numite *funcții masă de probabilitate marginale*.

Proprietăți similare pot fi scrise pentru  $p_{X_1 X_2 \dots X_n}$ .

**Definiția 3.4.** a) *Funcția densitate de probabilitate comună* a două variabile aleatoare continue  $X$  și  $Y$  este o funcție  $f_{XY} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât

$$f_{XY}(x, y) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

și

$$P(X \leq x \cap Y \leq y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f_{XY}(u, v) du dv, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$



b) Fie *vectorul aleator*  $\mathbf{X}$  cu componente variabilele aleatoare continue  $X_1, X_2, \dots, X_n$  care au funcția de repartiție comună

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P(X_1 \leq x_1 \cap X_2 \leq x_2 \cap \dots \cap X_n \leq x_n),$$

unde  $\mathbf{x}$  este vectorul cu componentele  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

*Funcția densitate comună* corespunzătoare este o funcție

$f_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

și

$$P(X_1 \leq x_1 \cap \dots \cap X_n \leq x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \dots \int_{-\infty}^{x_1} f_{\mathbf{X}}(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n,$$

$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

**Proprietăți 3.3.** a)  $f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}}{\partial x \partial y}(x, y), \forall x, y \in \mathbb{R}$  pentru care derivata parțială există.

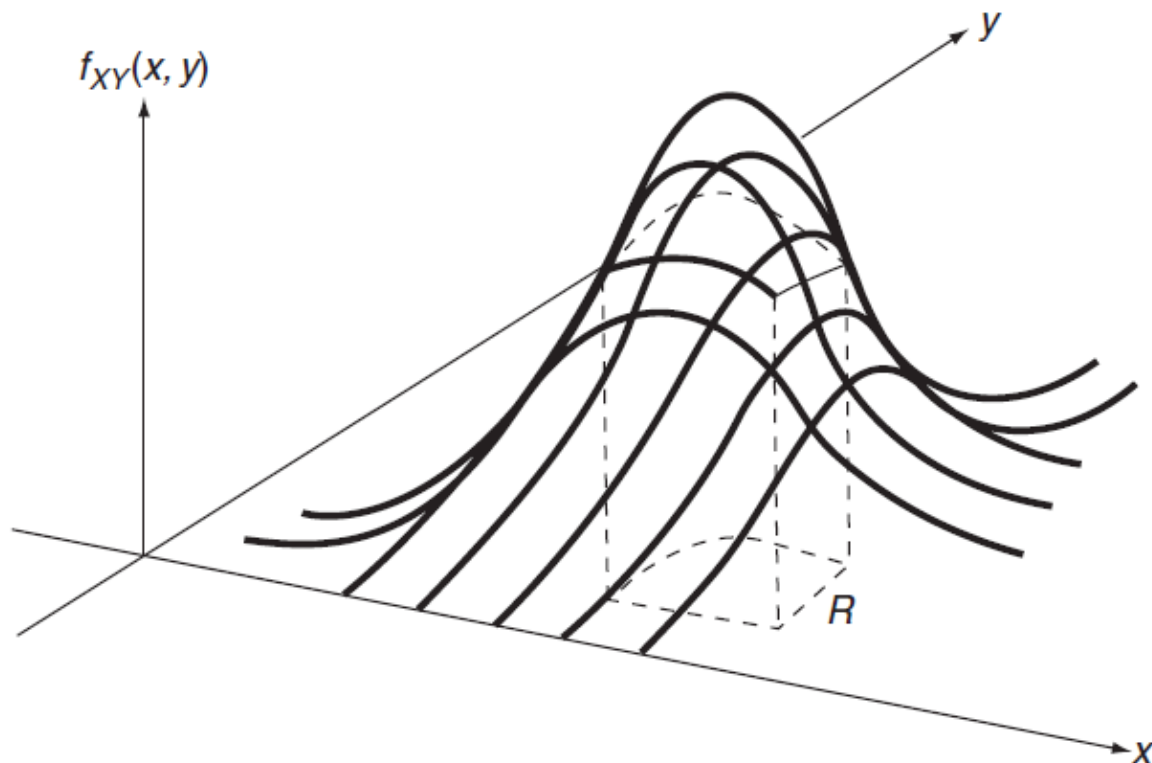
b) Din definiție,

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x \cap Y \leq y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f_{XY}(u, v) dudv.$$

c) Dacă  $x_1 < x_2$  și  $y_1 < y_2$ , atunci

$$P(x_1 < X \leq x_2 \cap y_1 < Y \leq y_2) = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f_{XY}(x, y) dx dy.$$

d)  $f_{XY}$  definește o suprafață deasupra planului  $(x, y)$ . După cum indică proprietatea 3.3 c), probabilitatea ca variabilele aleatoare  $X$  și  $Y$  să se afe într-o anumită suprafață  $R$  este egală cu volumul de sub suprafața  $f_{XY}$  mărginit de acea regiune, ca în figura de mai jos.



e)  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1.$

Această proprietate rezultă din proprietatea b) punând  $x \rightarrow \infty$  și  $y \rightarrow \infty$  și arată că volumul total de sub suprafața  $f_{XY}$  este 1.

f)  $\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy = f_X(x).$

Aceasta rezultă din

$$F_X(x) = F_{XY}(x, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^x f_{XY}(u, y) du dy,$$

derivând în raport cu  $x$ .

g)  $\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx = f_Y(y).$

h)  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^n F_{\mathbf{X}}}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  pentru care derivata parțială există.

Densitățile  $f_X$  și  $f_Y$  din proprietățile f) și g) se numesc *densități marginale* ale lui  $X$ , respectiv  $Y$ .

### 3.2 Densitate de repartiție condiționată și formula lui Bayes pentru densități de repartiție

Fie  $X$  și  $Y$  variabile aleatoare continue și  $y \in \mathbb{R}$  cu  $f_Y(y) \neq 0$ . Funcția densitate de repartiție condiționată (pe scurt densitate condiționată) a lui  $X$  dat fiind

$$Y = y,$$

notată cu  $f_{XY}(x|y)$ , este definită de

$$f_{XY}(x|y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}. \quad (3.1)$$

În general

$$P(X \in A | Y = y) = \int_A f_{XY}(x|y) dx.$$

Când  $X$  și  $Y$  sunt independente avem

$$f_{XY}(x|y) = f_X(x)$$

și

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y),$$

adică densitatea comună e egală cu produsul densităților marginale când  $X$  și  $Y$  sunt independente.

**Exemplul 3.2.1.** Fie variabilele aleatoare continue având densitatea comună

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k(x+y), & \text{dacă } (x, y) \in (0, 3)^2, \\ 0, & \text{altfel,} \end{cases}$$

unde  $k$  este o constantă ce trebuie determinată. Din proprietatea 3.1.3 e),

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = k \int_0^3 \int_0^3 (x+y) dx dy = \\ &k \int_0^1 \left( \frac{x^2}{2} + xy \right) \Big|_{x=0}^{x=3} dy = k \int_0^3 \left( \frac{9}{2} + 3y \right) dy = k \left( \frac{9}{2}y + 3\frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^3 = \\ &k \left( \frac{27}{2} + \frac{27}{2} \right) = 27k, \end{aligned}$$

deci

$$k = \frac{1}{27}.$$

Densitatea marginală a lui  $X$  este

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy = \\ &\begin{cases} \frac{1}{27} \int_0^3 (x+y) dy, & \text{dacă } x \in (0, 3) \\ 0, & \text{altfel} \end{cases} = \\ &\begin{cases} \frac{1}{27} \left( xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=3}, & \text{dacă } x \in (0, 3) \\ 0, & \text{altfel} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2x+3}{18}, & \text{dacă } x \in (0, 3) \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}. \end{aligned}$$

Datorită simetriei în  $x$  și  $y$  a densității comune, densitatea marginală a lui  $Y$  este

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2y+3}{18}, & \text{dacă } y \in (0, 3) \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Deoarece

$$f_{XY}(1, 1) = \frac{2}{27} \neq \frac{25}{324} = f_X(1) f_Y(1),$$

$X$  și  $Y$  nu sunt independente.

Densitatea condiționată a lui  $X$  dat fiind

$$Y = y$$

este

$$f_{XY}(x|y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x+y}{2y+3}, \text{ dacă } (x, y) \in (0, 3)^2.$$

Extinderile pentru mai multe variabile aleatoare sunt imediate.

Plecând de la

$$P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C) P(B|C) P(C)$$

pentru trei evenimente  $A, B$  și  $C$ , avem în cazul a trei variabile aleatoare continue  $X, Y$  și  $Z$ ,

$$f_{XYZ}(x, y, z) = f_{XYZ}(x|y, z) f_{YZ}(y|z) f_Z(z).$$

Pentru cazul a  $n$  variabile aleatoare continue  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , componente ale vectorului aleator  $\mathbf{X}$ , putem scrie

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1|x_2, \dots, x_n) f_{X_2 \dots X_n}(x_2|x_3, \dots, x_n) \dots f_{X_{n-1} X_n}(x_{n-1}|x_n) f_{X_n}(x_n).$$

Dacă  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sunt independente, obținem

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_n}(x_n).$$

**Formula lui Bayes pentru densități de repartiție.** Dacă  $X$  și  $Y$  sunt variabile aleatoare continue, atunci

$$f_{XY}(x|y) = \frac{f_{YX}(y|x) f_X(x)}{f_Y(y)} = \frac{f_{YX}(y|x) f_X(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{YX}(y|\xi) f_X(\xi) d\xi},$$

dacă

$$f_Y(y) \neq 0.$$

### 3.3 Covarianță și corelație

Fie  $X$  și  $Y$  variabile aleatoare discrete care iau o mulțime cel mult numărabilă de perechi de valori  $(x_i, y_j)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots$  cu probabilități nenule sau variabile aleatoare continue.

**Definiția 3.5.** Fie  $n, m \in \mathbb{N}$ .

a) *Momentele comune*  $\alpha_{nm}$  ale variabilelor aleatoare  $X$  și  $Y$  sunt date de, dacă există,

$$\alpha_{nm} = E(X^n Y^m) = \begin{cases} \sum_i \sum_j x_i^m y_j^n p_{XY}(x_i, y_j), & \text{dacă } X \text{ și } Y \text{ sunt discrete,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^n y^m f_{XY}(x, y) dx dy, & \text{dacă } X \text{ și } Y \text{ sunt continue.} \end{cases}$$

b) Similar, *momentele centrate comune* ale lui  $X$  și  $Y$ , când există, sunt date de

$$\mu_{nm} = E((X - m_X)^n (Y - m_Y)^m).$$

**Observații.** Cu notațiile folosite aici, mediile lui  $X$  și  $Y$  sunt  $\alpha_{10}$ , respectiv,  $\alpha_{01}$ . De exemplu, folosind definiția 3.5 a) pentru  $X$  și  $Y$  continue, obținem

$$\alpha_{10} = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{XY}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx,$$

unde  $f_X$  este densitatea marginală a lui  $X$ . Astfel vedem că acest rezultat e identic cu cel din cazul unei singure variabile aleatoare.

Această observație este adevărată și pentru dispersiile individuale. Ele sunt  $\mu_{20}$ , respectiv  $\mu_{02}$ , și pot fi găsite din definiția 3.5 b) cu înlocuiri corespunzătoare pentru  $n$  și  $m$ . Ca și în cazul unei singure variabile aleatoare avem

$$\mu_{20} = \alpha_{20} - \alpha_{10}^2 \text{ sau } \sigma_X^2 = \alpha_{20} - m_X^2,$$

respectiv

$$\mu_{02} = \alpha_{02} - \alpha_{01}^2 \text{ sau } \sigma_Y^2 = \alpha_{02} - m_Y^2.$$

**Definiția 3.6.** Se numește *covarianță* a lui  $X$  și  $Y$

$$\mu_{11} = \text{cov}(X, Y) = E((X - m_X)(Y - m_Y)).$$

Covarianța e o mărime a interdependenței lui  $X$  și  $Y$ .

**Proprietatea 3.4.** Covarianța e legată de  $\alpha_{nm}$  prin

$$\mu_{11} = \alpha_{11} - \alpha_{10}\alpha_{01} = \alpha_{11} - m_X m_Y.$$

**Demonstrație.**  $\mu_{11} = E((X - m_X)(Y - m_Y)) = E(XY - m_Y X - m_X Y + m_X m_Y) = E(XY) - m_Y E(X) - m_X E(Y) + m_X m_Y = \alpha_{11} - \alpha_{10}\alpha_{01} - \alpha_{10}\alpha_{01} + \alpha_{10}\alpha_{01} = \alpha_{11} - \alpha_{10}\alpha_{01}. \square$

**Definiția 3.7.** Coeficientul de corelație al lui  $X$  și  $Y$  este

$$\rho = \rho(X, Y) = \frac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{20}\mu_{02}}} = \frac{\mu_{11}}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

**Proprietatea 3.5.**  $|\rho| \leq 1$ .

**Demonstrație.**  $[t(X - m_X) + Y - m_Y]^2 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R} \implies E([t(X - m_X) + Y - m_Y]^2) = \mu_{20}t^2 + 2\mu_{11}t + \mu_{02} \geq 0, \forall t \in \mathbb{R} \implies \Delta = 4\mu_{11}^2 - 4\mu_{20}\mu_{02} \leq 0 \implies \mu_{11}^2 \leq \mu_{20}\mu_{02} \implies |\rho| \leq 1. \square$

Coeficientul de corelație este fără dimensiune. El este și independent de origine, adică  $\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$  cu  $a_1, a_2 > 0$  se poate demonstra că

$$\rho(a_1 X + b_1, a_2 Y + b_2) = \rho(X, Y).$$

**Proprietatea 3.6.** Dacă  $X$  și  $Y$  sunt independente, atunci

$$\mu_{11} = 0 \text{ și } \rho = 0.$$

**Demonstrație.** Fie  $X$  și  $Y$  continue.

$$\begin{aligned} \alpha_{11} = E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x, y) dx dy \stackrel{\text{indep.}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_X(x) f_Y(y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = m_X m_Y \implies \mu_{11} = \alpha_{11} - m_X m_Y = 0 \implies \\ &\rho = 0. \end{aligned}$$

Similar se poate demonstra dacă  $X$  și  $Y$  sunt discrete.  $\square$

Dacă  $X$  și  $Y$  sunt independente, atunci

$$(3.2) \quad E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)),$$

dacă mediile există.

Când coeficientul de corelație al două variabile aleatoare se anulează, spunem că ele sunt *necorelate*.

**Observații.** 1)  $X$  și  $Y$  sunt necorelate  $\iff E(XY) = E(X)E(Y)$ . (Rezultă din definiții și proprietatea 3.4.)

2)  $X, Y$  independente  $\implies X, Y$  necorelate. (Rezultă din definiție și proprietatea 3.6.)

3) Reciproca nu e adevărată.

**Exemplul 3.1.** Fie  $X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$  și  $Y = X^2$ .

$$\text{Avem } Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$p_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{pentru } (x, y) = (-2, 4); \\ \frac{1}{4}, & \text{pentru } (x, y) = (-1, 1); \\ \frac{1}{4}, & \text{pentru } (x, y) = (1, 1); \\ \frac{1}{4}, & \text{pentru } (x, y) = (2, 4), \end{cases}$$

$$m_X = (-2) \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 0,$$

$$m_Y = 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2},$$

$$\alpha_{11} = (-2) \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} = 0.$$

Deci

$$\mu_{11} = \alpha_{11} - m_X m_Y = 0 \implies \rho = \frac{\mu_{11}}{\sigma_X \sigma_Y} = 0 \implies X \text{ și } Y \text{ sunt necorelate.}$$

Pe de altă parte,

$$P(X \leq -2 \cap Y \leq 1) = F_{XY}(-2, 1) = 0,$$

iar

$$P(X \leq -2)P(Y \leq 1) = F_X(-2) \cdot F_Y(1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

deci

$P(X \leq -2 \cap Y \leq 1) \neq P(X \leq -2)P(Y \leq 1) \implies X$  și  $Y$  nu sunt independente.

Coeficientul de corelație măsoară interdependența liniară a variabilelor aleatoare, adică acuratețea cu care o variabilă aleatoare poate fi aproximată printr-o funcție liniară de cealaltă. Pentru a vedea asta, considerăm problema

aproximării unei variabile aleatoare  $X$  printr-o funcție liniară de o a doua variabilă aleatoare  $Y$ ,  $aY + b$ , unde  $a$  și  $b$  sunt alese a. î. eroarea medie pătratică  $e$  definită de

$$(3.3) \quad e = E \left( [X - (aY + b)]^2 \right)$$

este minimă. Avem

$$e = E(X^2 + a^2 Y^2 + b^2 - 2aXY - 2bX + 2abY) = E(X^2) + a^2 E(Y^2) + b^2 - 2aE(XY) - 2bm_X + 2abm_Y,$$

$$\frac{\partial e}{\partial a} = 2aE(Y^2) - 2E(XY) + 2bm_Y,$$

$$\frac{\partial e}{\partial b} = 2b - 2m_X + 2am_Y.$$

Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial e}{\partial a} = 0, \\ \frac{\partial e}{\partial b} = 0, \end{cases}$$

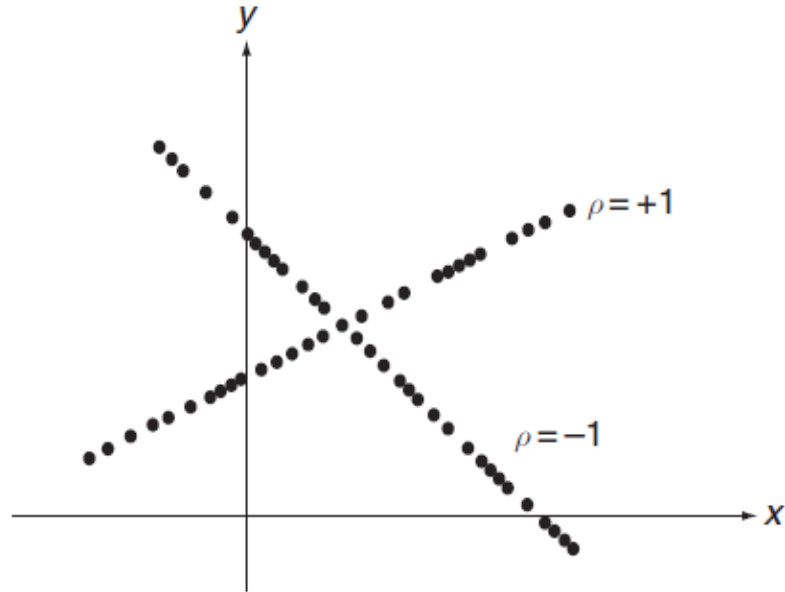
obținem că minimul e atins când

$$a = \frac{\sigma_X \rho}{\sigma_Y}$$

și

$$b = m_X - am_Y.$$

Înlocuind aceste valori în relația (3.3) obținem eroarea medie pătratică minimă  $\sigma_X^2 (1 - \rho^2)$ . Vedem că o potrivire exactă în sensul mediei pătratice e atinsă când  $|\rho| = 1$  și aproximarea liniară este cea mai rea când  $\rho = 0$ . Când  $\rho = 1$ ,  $X$  și  $Y$  se numesc *pozitiv perfect corelate*, în sensul că valorile pe care le iau sunt pe o dreaptă cu pantă pozitivă; ele sunt *negativ perfect corelate* când  $\rho = -1$  și valorile lor se află pe o dreaptă cu pantă negativă. Aceste două cazuri extreme sunt ilustrate în figura de mai jos.



Valoarea lui  $|\rho|$  descrește când împrăștierea valorilor în jurul dreptelor crește. În demonstrația faptului că  $|\rho| \leq 1$ , am obținut

$$\mu_{11}^2 \leq \mu_{20}\mu_{02}.$$

Folosind un procedeu similar, putem arăta de asemenea că

$$E^2(XY) \leq E(X^2)E(Y^2).$$

Ultimele două relații sunt *inegalitățile lui Schwarz*.

**Definiția 3.8.** Fie  $\mathbf{X}$  un vector coloană aleator cu componentele  $X_1, X_2, \dots, X_n$  și  $\mathbf{m}_\mathbf{X}$  vectorul coloană având componente mediile lui  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Matricea de covarianță este

$$\mathbf{\Lambda} = E\left((\mathbf{X} - \mathbf{m}_\mathbf{X})(\mathbf{X} - \mathbf{m}_\mathbf{X})^T\right) = \begin{pmatrix} \text{var}(X_1) & \text{cov}(X_1, X_2) & \dots & \text{cov}(X_1, X_n) \\ \text{cov}(X_2, X_1) & \text{var}(X_2) & \dots & \text{cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(X_n, X_1) & \text{cov}(X_n, X_2) & \dots & \text{var}(X_n) \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{\Lambda}$  este o matrice  $n \times n$  cu având pe diagonală varianțe și în afara diagonalei covarianțe. Deoarece  $\text{cov}(X_i, X_j) = \text{cov}(X_j, X_i)$ , matricea de covarianță este simetrică.

Următorul rezultat este o generalizare a relației (3.2).

**Teoremă.** Dacă  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sunt independente, atunci

$$E(g_1(X_1)g_2(X_2)\dots g_n(X_n)) = E(g_1(X_1))E(g_2(X_2))\dots E(g_n(X_n)),$$

unde  $g_j(X_j)$  este o funcție arbitrară de  $X_j$ . Se presupune că toate mediile care sunt scrise există.

**Propoziție.** Fie  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variabile aleatoare și  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ . Atunci

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_{X_i}^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j).$$

În particular, dacă  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sunt independente, atunci

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_{X_i}^2.$$

**Lema 3.1.** Dacă  $\mathbf{X}$  e un vector aleator și  $\mathbf{Y} = A\mathbf{X}$ , atunci

$$\text{cov}(\mathbf{Y}) = A\text{cov}(\mathbf{X})A^T.$$



## 4 Principalele repartiții discrete și proprietățile lor

### 4.1 Repartiția binomială

O succesiune de probe e făcută astfel încât

- a) pentru fiecare probă sunt doar două rezultate posibile, să spunem succes și eșec;
- b) probabilitățile apariției acestor rezultate rămân aceleași pe durata probelor;
- c) probele sunt independente.

Probele făcute în aceste condiții se numesc *probe Bernoulli*.

Notăm evenimentul "succes" cu  $S$  și evenimentul "eșec" cu  $F$ . Fie  $P(S) = p$  și  $P(F) = q$ , unde  $p + q = 1$ . Rezultate posibile din efectuarea unei succesiuni de probe Bernoulli pot fi reprezentate simbolic prin

$$\begin{aligned} & S \cap S \cap F \cap F \cap S \cap F \cap S \cap S \cap S \cap \dots \cap F \cap F \\ & F \cap S \cap F \cap S \cap S \cap F \cap F \cap F \cap S \cap \dots \cap S \cap F \\ & \vdots \end{aligned}$$

și, datorită independenței, probabilitățile acestor rezultate posibile sunt ușor de calculat. De exemplu,

$$P(S \cap S \cap F \cap F \cap S \cap F \cap \dots F \cap F) = P(S) P(S) P(F) P(F) P(S) P(F) \dots P(F) P(F) = ppqqppq \dots qq.$$

Repartiția unei variabile aleatoare  $X$  reprezentând numărul de succese dintr-o succesiune de  $n$  probe Bernoulli, indiferent de ordinea în care apar este frecvent de interes considerabil. E clar că  $X$  e o variabilă aleatoare discretă care ia valorile  $0, 1, 2, \dots, n$ . Pentru a determina funcția masă de probabilitate, considerăm  $p_X(k)$ , probabilitatea de a avea exact  $k$  succese în  $n$  probe. Acest eveniment poate apărea în la fel de multe moduri precum numărul de submulțimi de  $k$  elemente ale unei mulțimi de  $n$  elemente. De aici, numărul de moduri în care  $k$  succese se pot întâmpla în  $n$  probe este

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

și probabilitatea asociată cu fiecare mod este  $p^k q^{n-k}$ . Din acest motiv avem

$$p_X(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (4.1)$$

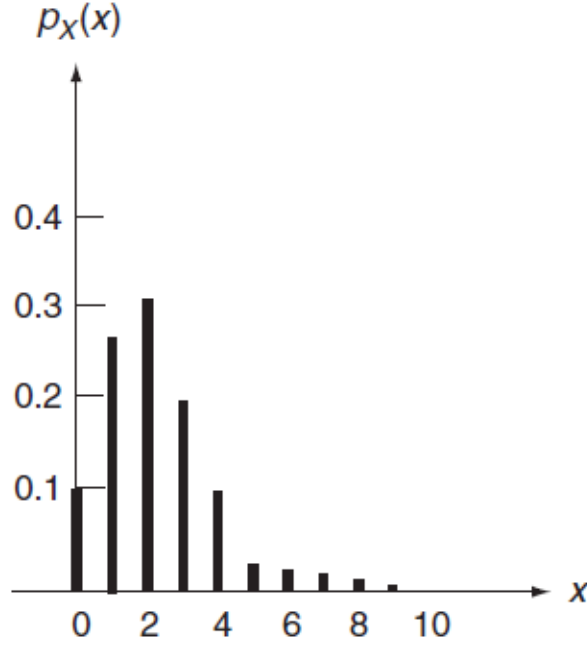
Datorită similarității cu termenii binomului lui Newton

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k},$$

repartiția definită de relația (4.1) se numește *repartiție binomială*. Ea are doi parametri, anume  $n$  și  $p$ . O variabilă aleatoare  $X$  având repartiție binomială se notează  $X \sim B(n, p)$ .

Forma unei repartiții binomiale e determinată de valorile celor doi parametri ai ei,  $n$  și  $p$ . În general,  $n$  se dă ca o parte a problemei și  $p$  trebuie estimat din observații.

O reprezentare a funcției masă de probabilitate  $p_X(k)$  pentru  $n = 10$  și  $p = 0,2$  este în figura de mai jos.



Vârful repartiției se va muta spre dreapta când  $p$  crește, atingând o repartiție simetrică când  $p = 0,5$ . Considerăm raportul

$$\frac{p_X(k)}{p_X(k-1)} = \frac{C_n^k p^k q^{n-k}}{C_n^{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} p^{k-1} q^{n-k+1}} = \frac{(n-k+1)p}{kq} = 1 + \frac{(n-k+1)p-kq}{kq} = 1 + \frac{(n+1)p-k(p+q)}{kq} = 1 + \frac{(n+1)p-k}{kq}.$$

Observăm că  $p_X(k) > p_X(k-1) \iff k < (n+1)p$  și  $p_X(k) < p_X(k-1) \iff k > (n+1)p$ . Deci, dacă definim  $k^* \in \mathbb{Z}$  prin

$$(n+1)p - 1 < k^* \leq (n+1)p,$$

valoarea lui  $p_X(k)$  crește de la  $k = 0$  și își atinge valoarea maximă când  $k = k^*$ , apoi descrește. Dacă  $(n+1)p \in \mathbb{Z}$ , valoarea maximă se atinge în ambele  $p_X(k^* - 1)$  și  $p_X(k^*)$ .  $k^*$  este astfel un modul al acestei repartiții și se numește adesea "cel mai probabil număr de succese".

$p_X(k)$  este tabelată ca o funcție de  $n$  și  $p$ . Tabelul A.1 din figurile de mai jos dă valorile ei pentru  $n = 2, 3, \dots, 10$  și  $p = 0,01; 0,05; \dots; 0,5$ .

**Table A.1** Binomial mass function: a table of

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

for  $n = 2$  to  $10$ ,  $p = 0.01$  to  $0.50$

$n$	$k$	$p$											
		0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	$\frac{1}{3}$	0.35	0.40	0.45	0.50
2	0	0.9801	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4444	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.0198	0.0950	0.1800	0.2550	0.3200	0.3750	0.4200	0.4444	0.4550	0.4800	0.4950	0.5000
	2	0.0001	0.0025	0.0100	0.0225	0.0400	0.0625	0.0900	0.1111	0.1225	0.1600	0.2025	0.2500
3	0	0.9703	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2963	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.0294	0.1354	0.2430	0.3251	0.3840	0.4219	0.4410	0.4444	0.4436	0.4320	0.4084	0.3750
	2	0.0003	0.0071	0.0270	0.0574	0.0960	0.1406	0.1890	0.2222	0.2389	0.2880	0.3341	0.3750
4	0	0.9606	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1975	0.1785	0.1296	0.0915	0.0677
	1	0.0388	0.1715	0.2916	0.3685	0.4096	0.4219	0.4116	0.3951	0.3845	0.3456	0.2995	0.2600
	2	0.0006	0.0135	0.0486	0.0975	0.1536	0.2109	0.2646	0.2963	0.3105	0.3456	0.3675	0.3750
5	0	0.9510	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1317	0.1160	0.0778	0.0503	0.0345
	1	0.0480	0.2036	0.3280	0.3915	0.4096	0.3955	0.3602	0.3292	0.3124	0.2592	0.2059	0.1657
	2	0.0010	0.0214	0.0729	0.1382	0.2048	0.2637	0.3087	0.3292	0.3364	0.3456	0.3369	0.3185
6	0	0.9415	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0878	0.0754	0.0467	0.0277	0.0176
	1	0.0571	0.2321	0.3543	0.3993	0.3932	0.3560	0.3025	0.2634	0.2437	0.1866	0.1359	0.1014
	2	0.0014	0.0305	0.0984	0.1762	0.2458	0.2966	0.3241	0.3292	0.3280	0.3110	0.2780	0.2437
7	0	0.9310	0.7000	0.4800	0.3200	0.2000	0.1200	0.0700	0.0400	0.0250	0.0125	0.0062	0.0031
	1	0.0690	0.2600	0.3600	0.3600	0.3200	0.2400	0.1600	0.1000	0.0625	0.0375	0.0219	0.0125
	2	0.0100	0.0500	0.1200	0.2000	0.2400	0.2400	0.2000	0.1250	0.0875	0.0625	0.0438	0.0312
8	0	0.9200	0.6600	0.4300	0.2700	0.1600	0.0900	0.0500	0.0250	0.0125	0.0062	0.0031	0.0016
	1	0.0800	0.2400	0.3200	0.3000	0.2400	0.1600	0.0900	0.0500	0.0250	0.0125	0.0062	0.0031
	2	0.0100	0.0500	0.1200	0.2000	0.2400	0.2400	0.2000	0.1250	0.0875	0.0625	0.0438	0.0312
9	0	0.9000	0.5900	0.3600	0.2100	0.1200	0.0600	0.0300	0.0150	0.0075	0.0038	0.0019	0.0010
	1	0.1000	0.2100	0.2800	0.2500	0.1800	0.1000	0.0500	0.0250	0.0125	0.0062	0.0031	0.0016
	2	0.0100	0.0500	0.1200	0.2000	0.2400	0.2400	0.2000	0.1250	0.0875	0.0625	0.0438	0.0312
10	0	0.8900	0.5400	0.3200	0.1800	0.1000	0.0500	0.0250	0.0125	0.0062	0.0031	0.0016	0.0008
	1	0.1100	0.1900	0.2600	0.2300	0.1600	0.0800	0.0400	0.0200	0.0100	0.0050	0.0025	0.0012
	2	0.0100	0.0500	0.1200	0.2000	0.2400	0.2400	0.2000	0.1250	0.0875	0.0625	0.0438	0.0312

Table A.1 Continued

$n$	$k$	$p$														
		0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	$\frac{1}{2}$	0.35	0.40	0.45	0.49	0.50		
7	4	0.0000	0.0001	0.0012	0.0055	0.0154	0.0330	0.0595	0.0823	0.0951	0.1382	0.1861	0.2249	0.2344		
	5	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0015	0.0044	0.0102	0.0165	0.0205	0.0369	0.0609	0.0864	0.0938		
	6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0014	0.0018	0.0041	0.0083	0.0139	0.0156		
	0	0.9321	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0585	0.0490	0.0280	0.0152	0.0090	0.0078		
	1	0.0659	0.2573	0.3720	0.3960	0.3670	0.3115	0.2471	0.2048	0.1848	0.1306	0.0872	0.0603	0.0547		
	2	0.0020	0.0406	0.1240	0.2097	0.2753	0.3115	0.3177	0.3073	0.2985	0.2613	0.2140	0.1740	0.1641		
	3	0.0000	0.0036	0.0230	0.0617	0.1147	0.1730	0.2269	0.2561	0.2679	0.2903	0.2918	0.2786	0.2734		
	4	0.0000	0.0002	0.0026	0.0109	0.0287	0.0577	0.0972	0.1280	0.1442	0.1935	0.2388	0.2676	0.2734		
	5	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0043	0.0115	0.0250	0.0384	0.0466	0.0774	0.1172	0.1543	0.1641		
	6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0036	0.0064	0.0084	0.0172	0.0320	0.0494	0.0547		
8	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0005	0.0006	0.0016	0.0037	0.0068	0.0078		
	0	0.9227	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0390	0.0319	0.0168	0.0084	0.0046	0.0039		
	1	0.0746	0.2793	0.3826	0.3847	0.3355	0.2670	0.1977	0.1561	0.1373	0.0896	0.0548	0.0352	0.0312		
	2	0.0026	0.0515	0.1488	0.2376	0.2936	0.3115	0.2965	0.2731	0.2587	0.2090	0.1569	0.1183	0.1094		
	3	0.0001	0.0054	0.0331	0.0839	0.1468	0.2076	0.2541	0.2731	0.2786	0.2787	0.2568	0.2273	0.2188		
	4	0.0000	0.0004	0.0046	0.0185	0.0459	0.0865	0.1361	0.1707	0.1875	0.2322	0.2627	0.2730	0.2734		
	5	0.0000	0.0000	0.0004	0.0026	0.0092	0.0231	0.0467	0.0683	0.0808	0.1239	0.1719	0.2098	0.2188		
	6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0038	0.0100	0.0171	0.0217	0.0413	0.0703	0.1008	0.1094		
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0012	0.0024	0.0033	0.0079	0.0164	0.0277	0.0312		
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0002	0.0007	0.0017	0.0033	0.0039		
9	0	0.9135	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0260	0.0207	0.0101	0.0046	0.0023	0.0020		
	1	0.0830	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1171	0.1004	0.0605	0.0339	0.0202	0.0176		
	2	0.0034	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2341	0.2162	0.1612	0.1110	0.0776	0.0703		
	3	0.0001	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2731	0.2716	0.2508	0.2119	0.1739	0.1641		
	4	0.0000	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2048	0.2194	0.2508	0.2600	0.2506	0.2461		
	5	0.0000	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.1024	0.1181	0.1672	0.2128	0.2408	0.2461		
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0341	0.0424	0.0743	0.1160	0.1542	0.1641		
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0073	0.0098	0.0212	0.0407	0.0635	0.0703		
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0009	0.0013	0.0035	0.0083	0.0153	0.0176		
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0003	0.0008	0.0016	0.0020		
10	0	0.9044	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0173	0.0135	0.0060	0.0025	0.0012	0.0010		
	1	0.0914	0.3151	0.3874	0.3474	0.2684	0.1877	0.1211	0.0867	0.0725	0.0403	0.0207	0.0114	0.0098		
	2	0.0042	0.0746	0.1937	0.2759	0.3020	0.2816	0.2335	0.1951	0.1757	0.1209	0.0736	0.0495	0.0439		
	3	0.0001	0.0105	0.0574	0.1298	0.2013	0.2503	0.2668	0.2601	0.2522	0.2150	0.1665	0.1267	0.1172		
	4	0.0000	0.0010	0.0112	0.0401	0.0881	0.1460	0.2001	0.2276	0.2377	0.2508	0.2384	0.2130	0.2051		
	5	0.0000	0.0001	0.0015	0.0085	0.0264	0.0584	0.1029	0.1366	0.1536	0.2007	0.2340	0.2456	0.2461		
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0012	0.0055	0.0162	0.0368	0.0569	0.0689	0.1115	0.1596	0.1966	0.2051		
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0031	0.0090	0.0163	0.0212	0.0425	0.0746	0.1080	0.1172		
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0030	0.0043	0.0106	0.0229	0.0389	0.0439		
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0005	0.0016	0.0042	0.0083	0.0098		
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0010		

Calculul lui  $p_X(k)$  devine greu când  $n$  devine mare; se folosește aproximarea Poisson a repartiției binomiale.

Funcția de repartiție  $F_X(x)$  pentru o repartiție binomială este dată de

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{[x]} C_n^k p^k q^{n-k},$$

unde  $[x]$  este partea întreagă a lui  $x$ .

**Proprietăți 4.1.** Fie  $X \sim B(n, p)$ . Atunci

a)  $m_X = np$ ;

b)  $\sigma_X^2 = npq$ .

**Demonstrație.** a)  $m_X = \sum_{k=0}^n k p_X(k) = \sum_{k=1}^n k C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} =$

$$\sum_{k=1}^n n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)} \stackrel{k-1=i}{=} np \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i p^i q^{n-1-i} =$$

$$np(p+q)^{n-1} = np.$$

$$\text{b) } E(X^2) = \sum_{k=0}^n k^2 p_X(k) = \sum_{k=1}^n k^2 C_n^k p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^n k C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)} =$$

$$np \left[ \sum_{k=1}^n (k-1) C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)} + \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)} \right] \stackrel{k-1=i, \text{ a)}}{=} np \left[ \sum_{i=0}^{n-1} i C_{n-1}^i p^i q^{n-1-i} + \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i p^i q^{n-1-i} \right]$$

$$np \left( \sum_{i=0}^{n-1} i C_{n-1}^i p^i q^{n-1-i} + 1 \right) = np (m_Y + 1) \stackrel{a)}{=} np [(n-1)p + 1],$$

unde  $Y \sim B(n-1, p)$ .

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - m_X^2 = np[(n-1)p + 1] - n^2 p^2 = n^2 p^2 - np^2 + np - n^2 p^2 = np(1-p) = npq. \square$$

Faptul că  $m_X = np$  sugerează că parametrul  $p$  poate fi estimat pe baza valorii medii a datelor observate.

O altă formulare care duce la repartiția binomială este definirea variabilei aleatoare  $X_j, j = 1, 2, \dots, n$ , reprezentând rezultatul celei de-a  $j$ -a probe Bernoulli.

Dacă punem

$$X_j = \begin{cases} 0, & \text{dacă proba } j \text{ este un eșec,} \\ 1, & \text{dacă proba } j \text{ este un succes,} \end{cases}$$

atunci

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

dă numărul de succese în  $n$  probe. Din definiție,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sunt variabile aleatoare independente.

Deoarece

$$E(X_j) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p, j = 1, 2, \dots, n,$$

rezultă că

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = \underbrace{p + p + \dots + p}_n =$$

$np$ ,

ceea ce coincide cu proprietatea 4.1 a).

Analog, deoarece

$$E(X_j^2) = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sigma_{X_j}^2 = E(X_j^2) - [E(X_j)]^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq, j = 1, 2, \dots, n,$$

din independența lui  $X_1, X_2, \dots, X_n$  rezultă că

$$\sigma_X^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_{X_j}^2 = \underbrace{pq + pq + \dots + pq}_n = npq,$$

ceea ce coincide cu proprietatea 4.1 b).

**Teorema 4.1.** Fie  $X_1 \sim B(n_1, p)$  și  $X_2 \sim B(n_2, p)$  variabile aleatoare independente și  $Y = X_1 + X_2$ . Atunci  $Y \sim B(n_1 + n_2, p)$ .

## 4.2 Repartiția hipergeometrică

Fie  $Z$  variabila aleatoare care dă numărul de bile negre care sunt extrase când un eșantion de  $m$  bile este extras (fără revenire) dintr-un lot de  $n$  bile având  $n_1$  bile negre și  $n_2$  bile albe ( $n_1 + n_2 = n$ ). Funcția masă de probabilitate a variabilei aleatoare  $Z$  este

$$p_Z(k) = \frac{C_{n_1}^k \cdot C_{n-n_1}^{m-k}}{C_n^m}, k = 0, 1, \dots, \min(n_1, m).$$

Spunem că  $Z$  are *repartiție hipergeometrică*.

Se poate arăta că

$$m_Z = \frac{mn_1}{n},$$

$$\sigma_Z^2 = \frac{mn_1(n-n_1)(n-m)}{n^2(n-1)}.$$

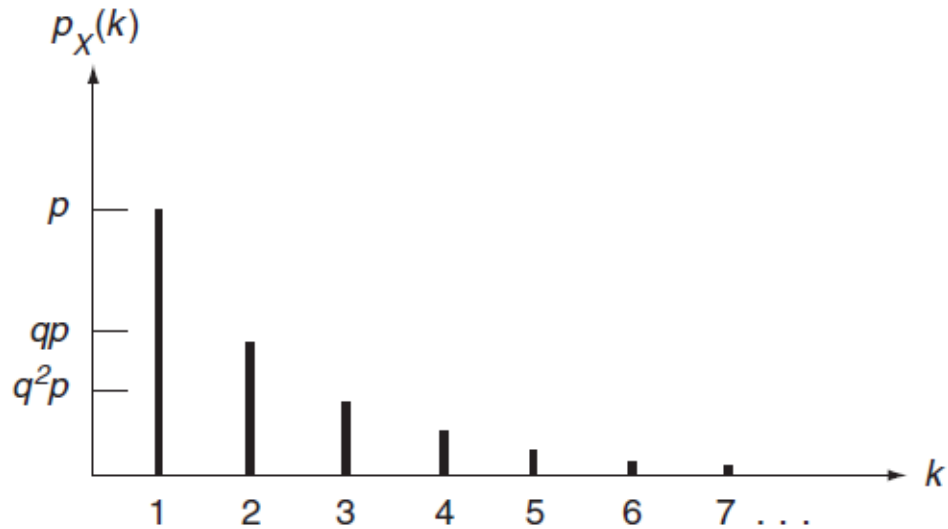
### 4.3 Repartiția geometrică

Fie  $X$  numărul de probe Bernoulli până la (și incluzând) prima apariție a succesului.  $X$  e variabilă aleatoare discretă având ca valori toate numerele naturale. Funcția ei masă de probabilitate este

$$p_X(k) = P\left(\underbrace{F \cap F \cap \dots \cap F}_{k-1} \cap S\right) = \underbrace{P(F) P(F) \dots P(F)}_{k-1} P(S) = q^{k-1} p, k =$$

1, 2, ...

Această repartiție este cunoscută ca *repartiția geometrică* cu parametrul  $p$ , unde numele provine de la similaritatea cu termenii progresiei geometrice. O reprezentare a lui  $p_X(k)$  e dată mai jos.



Funcția de repartiție corespunzătoare este

$$F_X(x) = \sum_{k=1}^{[x]} p_X(k) = \sum_{k=1}^{[x]} q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{[x]} q^{k-1} = (1-q) \sum_{k=1}^{[x]} q^{k-1} = 1 - q^{[x]},$$

dacă  $x \geq 1$

și

$F_X(x) = 0$ , dacă  $x < 1$ .

Media și dispersia lui  $X$  se calculează astfel:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dq} (q^k) = p \frac{d}{dq} \sum_{k=1}^{\infty} q^k = p \frac{d}{dq} \left( q \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n q^{k-1} \right) = \\ &= p \frac{d}{dq} \left( q \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) = p \frac{d}{dq} \left( \frac{q}{1-q} \right) = p \cdot \frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}. \\ E(X^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} p = p \left[ \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} + q \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) q^{k-2} \right] = \frac{1}{p} + p q \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d^2}{dq^2} (q^k) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p} + pq \left( \frac{d^2}{dq^2} \sum_{k=2}^{\infty} q^k \right) &= \frac{1}{p} + pq \frac{d^2}{dq^2} \left( \frac{q}{1-q} - q \right) = \frac{1}{p} + pq \frac{d^2}{dq^2} \left( \frac{q^2}{1-q} \right) = \frac{1}{p} + pq \frac{d}{dq} \left[ \frac{2q(1-q) + q^2}{(1-q)^2} \right] = \\
\frac{1}{p} + pq \frac{d}{dq} \left( \frac{2q - q^2}{(1-q)^2} \right) &= \frac{1}{p} + pq \frac{(2-2q)(1-q)^2 + (2q - q^2)2(1-q)}{(1-q)^4} = \frac{1}{p} + q \frac{2((1-q)^2 + 2q - q^2)}{(1-q)^2} = \\
\frac{1}{p} + \frac{2q}{(1-q)^2} \cdot & \\
\sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 &= \frac{1}{p} + \frac{2q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{p+2q-1}{p^2} = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.
\end{aligned}$$

#### 4.4 Repartiția binomială negativă

O generalizare a repartiției geometrice este repartiția variabilei aleatoare  $X$  reprezentând numărul de probe Bernoulli necesare pentru apariția celui de-al  $r$ -lea succes, unde  $r \in \mathbb{N}^*$  este dat.

Pentru a determina  $p_X(k)$  în acest caz, fie  $A$  evenimentul ca primele  $k-1$  probe să dea exact  $r-1$  succese, indiferent de ordinea lor, și  $B$  evenimentul ca un succes să apară la proba  $k$ . Atunci, datorită independenței,

$$p_X(k) = P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Avem

$$P(B) = p$$

și

$$P(A) = p_Z(r-1) = C_{k-1}^{r-1} p^{r-1} q^{k-r},$$

unde  $Z \sim B(k-1, p)$ .

Obținem

$$p_X(k) = C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r}, k = r, r+1, \dots \quad (4.2)$$

Repartiția definită de relația (4.2) se numește repartiție *binomială negativă* sau *Pascal* și are parametrii  $r$  și  $p$ . Este adesea notată prin  $NB(r, p)$ . Observăm că ea se reduce la repartiția geometrică când  $r = 1$ .

O variantă a acestei repartiții se obține punând  $Y = X - r$ . Variabila aleatoare  $Y$  este numărul de probe Bernoulli *dincolo* de  $r$  necesare pentru realizarea celui de-al  $r$ -lea succes, sau poate fi interpretată ca numărul de eșecuri înainte de cel de-al  $r$ -lea succes.

Funcția masă de probabilitate a lui  $Y$ ,  $p_Y(m)$ , e obținută din relația (4.2) înlocuind  $k$  prin  $m+r$ :

$$p_Y(m) = C_{m+r-1}^{r-1} p^r q^m = C_{m+r-1}^m p^r q^m, m = 0, 1, 2, \dots$$

Variabila aleatoare  $Y$  are proprietatea convenabilă că valorile ei încep de la 0 și nu de la  $r$  ca valorile lui  $X$ .

Reamintind o definiție mai generală a coeficientului binomial

$$C_a^j = \frac{a(a-1)\dots(a-j+1)}{j!}, \forall a \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{N}^*,$$

avem

$$C_{m+r-1}^m = \frac{(m+r-1)!}{m!(r-1)!} = \frac{(m+r-1)(m+r-2)\dots r}{m!} = (-1)^m \frac{(-r)(-r-1)\dots(-r-m+1)}{m!} = (-1)^m C_{-r}^m.$$

De aici,

$$p_Y(m) = C_{-r}^m p^r (-q)^m, m = 0, 1, 2, \dots,$$

acesta fiind motivul pentru numele "repartiție binomială negativă".

Media și dispersia variabilei aleatoare  $X$  pot fi determinate observând că  $X$  poate fi reprezentată prin

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_r,$$

unde  $X_j$  este numărul de probe dintre cel de-al  $(j-1)$ -lea și (inclusiv) cel de-al  $j$ -lea succes. Aceste variabile aleatoare sunt independente, fiecare având repartiție geometrică în care media este  $\frac{1}{p}$  și dispersia  $\frac{1-p}{p^2}$ . De aceea media sumei este suma mediilor și, din independență, dispersia sumei este suma dispersiilor, adică:

$$m_X = \frac{r}{p}, \sigma_X^2 = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Deoarece  $Y = X - r$ , avem:

$$m_Y = \frac{r}{p} - r, \sigma_Y^2 = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

## 4.5 Repartiția multinomială

O generalizare a probelor Bernoulli este să relaxăm cererea să fie doar două rezultate posibile pentru fiecare probă. Fie  $r$  rezultate posibile pentru fiecare probă, notate cu  $E_1, E_2, \dots, E_r$  și fie  $P(E_i) = p_i, i = 1, 2, \dots, r$  cu  $p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1$ .

Dacă variabila aleatoare  $X_i, i = 1, 2, \dots, r$ , reprezintă numărul de  $E_i$  într-o succesiune de  $n$  probe, funcția masă de probabilitate comună a lui  $X_1, X_2, \dots, X_r$  este dată de

$$p_{X_1 X_2 \dots X_r}(k_1, k_2, \dots, k_r) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}, \quad (4.3)$$

unde  $k_j = 0, 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots, r$ , și  $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$ .

**Demonstrația formulei 4.3.** Considerăm evenimentul de a avea exact  $k_1$  rezultate  $E_1, k_2$  rezultate  $E_2, \dots, k_r$  rezultate  $E_r$  în  $n$  probe. Acest eveniment poate apărea în la fel de multe moduri precum numărul de moduri de a plasa  $k_1$  litere  $E_1, k_2$  litere  $E_2, \dots, k_r$  litere  $E_r$  în  $n$  cutii a. î. fiecare cutie să aibă exact o literă. De aici, numărul de moduri căutat este produsul dintre numărul de moduri de a plasa  $k_1$  litere  $E_1$  în  $n$  cutii, numărul de moduri de a plasa  $k_2$  litere în cele  $n - k_1$  cutii rămase neocupate, ș.a.m.d., adică

$$\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!} C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} \dots C_{n-k_1-k_2-\dots-k_{r-1}}^{k_r} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} \dots \frac{(n-k_1-k_2-\dots-k_{r-1})!}{k_r! 0!} =$$

și probabilitatea asociată cu fiecare mod, datorită independenței, este  $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$ .  $\square$

Relația (4.3) definește funcția masă de probabilitate comună a *repartiției multinomiale*, numită așa deoarece are forma temenului general din expansiunea multinomială a lui  $(p_1 + p_2 + \dots + p_r)^n$ . Repartiția multinomială se reduce la repartiția binomială când  $r = 2$ , și cu  $p_1 = p, p_2 = q, k_1 = k$  și  $k_2 = n - k$ .

Deoarece  $X_i \sim B(n, p_i)$ , avem

$$m_{X_i} = np_i, \sigma_{X_i}^2 = np_i(1 - p_i),$$

și se poate arăta că avem

$$\text{cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, r, \quad i \neq j.$$



## 4.6 Repartiția Poisson

Această repartiție este folosită în modelele matematice pentru a descrie, într-un interval de timp specific, evenimente ca emisia de particule  $\alpha$  dintr-o substanță radioactivă, sosirile de pasageri la un aeroport, distribuția particulelor de praf într-un anumit spațiu, sosirile de mașini la o intersecție, și alte fenomene similare.

Pentru a fixa ideile, considerăm problema sosirii pasagerilor la o stație de autobuz într-un interval de timp specificat. Notăm  $X(0, t)$  numărul de sosiri din intervalul de timp  $[0, t]$ ;  $X(0, t)$  e o variabilă aleatoare discretă luând valori posibile  $0, 1, 2, \dots$ , iar repartiția ei depinde de  $t$ . Funcția ei masă de probabilitate se scrie

$$p_k(0, t) = P[X(0, t) = k], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.4)$$

pentru a arăta dependența ei explicită de  $t$ .

Facem următoarele ipoteze de bază:

1) Dacă  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , atunci variabilele aleatoare  $X(t_1, t_2), X(t_2, t_3), \dots, X(t_{n-1}, t_n)$  sunt independente, adică, numerele de pasageri care sosesc în intervale de timp care nu se suprapun sunt independente unul de celălalt.

2) Pentru  $\Delta t$  suficient de mic,

$$p_1(t, t + \Delta t) = \nu \Delta t + o(\Delta t), \quad (4.5)$$

unde  $o(\Delta t)$  este o funcție a. î.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0. \quad (4.6)$$

Această ipoteză spune că, pentru  $\Delta t$  suficient de mic, probabilitatea de a avea exact o sosire este proporțională cu lungimea  $\Delta t$ . Parametrul  $\nu$  din relația (4.5) este numit *densitatea medie* sau *rata medie a sosirilor*.

3) Pentru  $\Delta t$  suficient de mic,

$$\sum_{k=2}^{\infty} p_k(t, t + \Delta t) = o(\Delta t). \quad (4.7)$$

Această condiție implică faptul că probabilitatea de a avea două sau mai multe sosiri într-un interval suficient de mic este neglijabilă.

Din relațiile (4.5) și (4.7) rezultă

$$p_0(t, t + \Delta t) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t, t + \Delta t) = 1 - \nu \Delta t + o(\Delta t). \quad (4.8)$$

Determinăm  $p_0(0, t)$ . Pentru a nu avea nicio sosire în intervalul  $[0, t + \Delta t]$ , trebuie să nu avem nicio sosire în ambele subintervale  $[0, t]$  și  $[t, t + \Delta t]$ . Datorită independenței sosirilor în intervale nesuprapuse avem

$$p_0(0, t + \Delta t) = p_0(0, t) p_0(t, t + \Delta t) = p_0(0, t) [1 - \nu \Delta t + o(\Delta t)]. \quad (4.9)$$

Rearanjând relația (4.9) și împărțind ambii membri prin  $\Delta t$  obținem

$$\frac{p_0(0, t + \Delta t) - p_0(0, t)}{\Delta t} = -p_0(0, t) \left[ \nu - \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right].$$

Punând  $\Delta t \rightarrow 0$ , obținem ecuația diferențială

$$\frac{dp_0(0, t)}{dt} = -\nu p_0(0, t).$$

Soluția ei satisfăcând condiția inițială  $p_0(0, 0) = 1$  este

$$p_0(0, t) = e^{-\nu t}. \quad (4.10)$$

Determinarea lui  $p_1(0, t)$  este similară. O sosire în intervalul  $[0, t + \Delta t)$  poate fi îndeplinită doar având 0 sosiri în subintervalul  $[0, t)$  și o sosire în  $[t, t + \Delta t)$ , sau o sosire în  $[0, t)$  și nicio sosire în  $[t, t + \Delta t)$ . De aici avem

$$p_1(0, t + \Delta t) = p_0(0, t) p_1(t, t + \Delta t) + p_1(0, t) p_0(t, t + \Delta t). \quad (4.11)$$

Înlocuind relațiile (4.5), (4.8) și (4.10) în relația (4.11) obținem

$$p_1(0, t + \Delta t) = e^{-\nu t} (\nu \Delta t + o(\Delta t)) + p_1(0, t) (1 - \nu \Delta t + o(\Delta t)) \implies \frac{p_1(0, t + \Delta t) - p_1(0, t)}{\Delta t} = e^{-\nu t} \left( \nu + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right) + p_1(0, t) \left( -\nu + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right).$$

Punând  $\Delta t \rightarrow 0$ , obținem

$$\frac{dp_1(0, t)}{dt} = -\nu p_1(0, t) + \nu e^{-\nu t}, \quad p_1(0, 0) = 0, \quad (4.12)$$

ceea ce conduce la

$$p_1(0, t) = \nu t e^{-\nu t}. \quad (4.13)$$

Continuând în acest fel, găsim pentru termenul general

$$p_k(0, t) = \frac{(\nu t)^k e^{-\nu t}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.14)$$

Relația (4.14) dă funcția masă de probabilitate a lui  $X(0, t)$ , numărul de sosiri în intervalul de timp  $[0, t)$  cu condițiile de mai sus și definește o *repartiție Poisson* cu parametrii  $\nu$  și  $t$ . Parametrii  $\nu$  și  $t$  pot fi înlocuiți de un singur parametru  $\lambda = \nu t$  și astfel putem scrie

$$p_k(0, t) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.15)$$

Media lui  $X(0, t)$  este

$$E(X(0, t)) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k(0, t) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda. \quad (4.16)$$

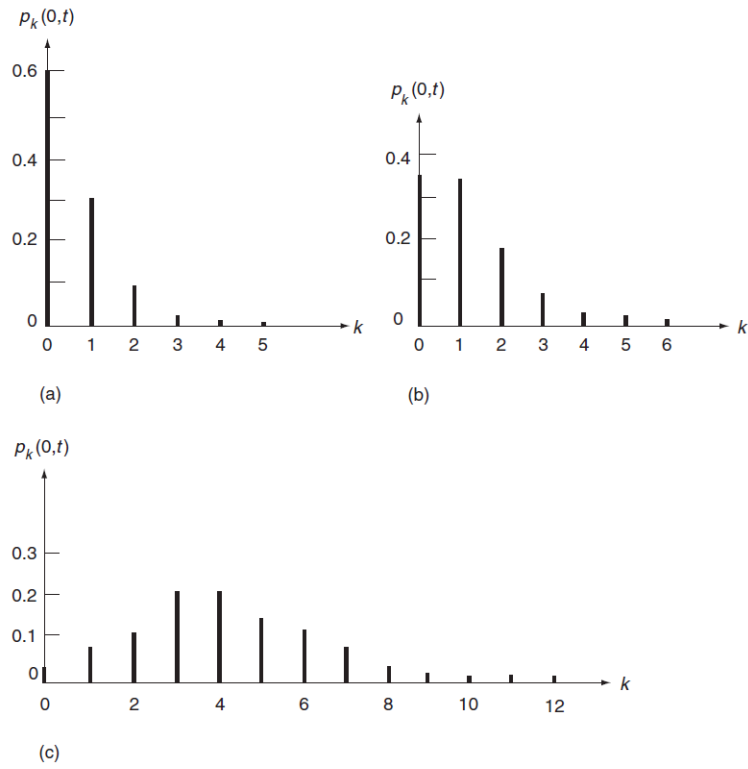
Calculăm și dispersia:

$$\begin{aligned} E(X^2(0, t)) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k(0, t) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1) \lambda^k}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \right] = \\ e^{-\lambda} \left[ \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right] &= e^{-\lambda} [\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}] = \lambda^2 + \lambda. \\ \sigma_{X(0, t)}^2 &= E(X^2(0, t)) - [E(X(0, t))]^2 = \lambda. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Din relația (4.16) se vede că parametrul  $\nu$  este egal cu media numărului de sosiri pe unitatea de timp; numele "rata medie a sosirilor" pentru  $\nu$  este astfel justificat. În determinarea valorii acestui parametru într-o problemă dată, el poate fi estimat din observații prin  $\frac{m}{n}$ , unde  $m$  este numărul observat de sosiri în  $n$  unități de timp. Similar, deoarece  $\lambda = \nu t$ ,  $\lambda$  reprezintă numărul mediu de sosiri în intervalul de timp  $[0, t]$ .

Din relațiile (4.16) și (4.17) se vede că media și dispersia cresc când rata medie crește. În figura alăturată e reprezentată funcția masă de probabilitate pentru repartiția Poisson pentru

- a)  $\lambda = 0, 5$ ,
- b)  $\lambda = 1$ ,
- c)  $\lambda = 4$ .



În general, dacă examinăm raportul  $\frac{p_k(0, t)}{p_{k-1}(0, t)}$ , cum am făcut la repartiția binomială, se arată că  $p_k(0, t)$  crește și apoi descrește când  $k$  crește, atingându-și maximum când  $k = [\lambda]$ .

Tabelul A.2 din figurile de mai jos dă funcția masă de probabilitate a repartiției Poisson pentru anumite valori ale lui  $\lambda$  dintre 0,1 și 10. Pentru  $\lambda = 10$ , avem  $p_{23}(0, t) = 0,0002$  și  $p_{24}(0, t) = 0,0001$ . În loc de " $\lambda t$ " în tabelul A.2 se va citi " $\lambda$ ".

**Table A.2** Poisson mass function: a table of

$$p_k(0, t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!},$$

for  $k = 0$  to 24,  $\lambda t = 0.1$  to 10

$\lambda t$	$k$												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.1	0.9048	0.0905	0.0045	0.0002	0.0000								
0.2	0.8187	0.1637	0.0164	0.0011	0.0001	0.0000							
0.3	0.7408	0.2222	0.0333	0.0033	0.0002	0.0000							
0.4	0.6703	0.2681	0.0536	0.0072	0.0007	0.0001	0.0000						
0.5	0.6065	0.3033	0.0758	0.0126	0.0016	0.0002	0.0000						
0.6	0.5488	0.3293	0.0988	0.0198	0.0030	0.0004	0.0000						
0.7	0.4966	0.3476	0.1217	0.0284	0.0050	0.0007	0.0001	0.0000					
0.8	0.4493	0.3595	0.1438	0.0383	0.0077	0.0012	0.0002	0.0000					
0.9	0.4066	0.3659	0.1647	0.0494	0.0111	0.0020	0.0003	0.0000					
1.0	0.3679	0.3679	0.1839	0.0613	0.0153	0.0031	0.0005	0.0001	0.0000				
1.1	0.3329	0.3662	0.2014	0.0738	0.0203	0.0045	0.0008	0.0001	0.0000				
1.2	0.3012	0.3614	0.2169	0.0867	0.0260	0.0062	0.0012	0.0002	0.0000				
1.3	0.2725	0.3543	0.2303	0.0998	0.0324	0.0084	0.0018	0.0003	0.0001	0.0000			
1.4	0.2466	0.3452	0.2417	0.1128	0.0395	0.0111	0.0026	0.0005	0.0001	0.0000			
1.5	0.2231	0.3347	0.2510	0.1255	0.0471	0.0141	0.0035	0.0008	0.0001	0.0000			
1.6	0.2019	0.3230	0.2584	0.1378	0.0551	0.0176	0.0047	0.0011	0.0002	0.0000			
1.7	0.1827	0.3106	0.2640	0.1496	0.0636	0.0216	0.0061	0.0015	0.0003	0.0001	0.0000		
1.8	0.1653	0.2975	0.2678	0.1607	0.0723	0.0260	0.0078	0.0020	0.0005	0.0001	0.0000		
1.9	0.1496	0.2842	0.2700	0.1710	0.0812	0.0309	0.0098	0.0027	0.0006	0.0001	0.0000		
2.0	0.1353	0.2707	0.2707	0.1804	0.0902	0.0361	0.0120	0.0034	0.0009	0.0002	0.0000		
2.2	0.1108	0.2438	0.2681	0.1966	0.1082	0.0476	0.0174	0.0055	0.0015	0.0004	0.0001	0.0000	
2.4	0.0907	0.2177	0.2613	0.2090	0.1254	0.0602	0.0241	0.0083	0.0025	0.0007	0.0002	0.0000	
2.6	0.0743	0.1931	0.2510	0.2176	0.1414	0.0735	0.0319	0.0118	0.0038	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000
2.8	0.0608	0.1703	0.2384	0.2225	0.1557	0.0872	0.0407	0.0163	0.0057	0.0018	0.0005	0.0001	0.0000
3.0	0.0498	0.1494	0.2240	0.2240	0.1680	0.1008	0.0504	0.0216	0.0081	0.0027	0.0008	0.0002	0.0001
3.2	0.0408	0.1304	0.2087	0.2226	0.1781	0.1140	0.0608	0.0278	0.0111	0.0040	0.0013	0.0004	0.0001
3.4	0.0334	0.1135	0.1929	0.2186	0.1858	0.1264	0.0716	0.0348	0.0148	0.0056	0.0019	0.0006	0.0002
3.6	0.0273	0.0984	0.1771	0.2125	0.1912	0.1377	0.0826	0.0425	0.0191	0.0076	0.0028	0.0009	0.0003
3.8	0.0224	0.0850	0.1615	0.2046	0.1944	0.1477	0.0936	0.0508	0.0241	0.0102	0.0039	0.0013	0.0004
4.0	0.0183	0.0733	0.1465	0.1954	0.1954	0.1563	0.1042	0.0595	0.0298	0.0132	0.0053	0.0019	0.0006
5.0	0.0067	0.0337	0.0842	0.1404	0.1755	0.1755	0.1462	0.1044	0.0653	0.0363	0.0181	0.0082	0.0034
6.0	0.0025	0.0149	0.0446	0.0892	0.1339	0.1606	0.1606	0.1377	0.1033	0.0688	0.0413	0.0225	0.0111
7.0	0.0009	0.0064	0.0223	0.0521	0.0912	0.1277	0.1490	0.1490	0.1304	0.1014	0.0710	0.0452	0.0264
8.0	0.0003	0.0027	0.0107	0.0286	0.0573	0.0916	0.1221	0.1396	0.1396	0.1241	0.0993	0.0722	0.0481
9.0	0.0001	0.0011	0.0050	0.0150	0.0337	0.0607	0.0911	0.1171	0.1318	0.1318	0.1186	0.0970	0.0728
10.0	0.0000	0.0005	0.0023	0.0076	0.0189	0.0378	0.0631	0.0901	0.1126	0.1251	0.1251	0.1137	0.0948

**Table A.2** Continued

$\lambda t$	$k$										
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
5.0	0.0013	0.0005	0.0002								
6.0	0.0052	0.0022	0.0009	0.0003	0.0001						
7.0	0.0142	0.0071	0.0033	0.0014	0.0006	0.0002	0.0001				
8.0	0.0296	0.0169	0.0090	0.0045	0.0021	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001		
9.0	0.0504	0.0324	0.0194	0.0109	0.0058	0.0029	0.0014	0.0006	0.0003	0.0001	
10.0	0.0729	0.0521	0.0347	0.0217	0.0128	0.0071	0.0037	0.0019	0.0009	0.0004	0.0001

**Teorema 4.2.** Dacă  $X$  și  $Y$  sunt variabile aleatoare independente având repartiții Poisson cu parametrii  $\lambda_1$ , respectiv  $\lambda_2$ , atunci variabila aleatoare  $Y = X_1 + X_2$  are repartiție Poisson cu parametrul  $\lambda_1 + \lambda_2$ .

**Propoziție.** Dacă o variabilă aleatoare  $X$  este repartizată Poisson cu parametrul  $\lambda$ , atunci o variabilă aleatoare  $Y$ , care este obținută din  $X$  selectând doar cu probabilitatea  $p$  fiecare din itemii numărați de  $X$ , este de asemenea repartizată Poisson cu parametrul  $p\lambda$ .

**Demonstrație.** Dat fiind că  $X = r$ , repartiția lui  $Y$  este binomială cu parametrii  $r$  și  $p$ , deci:

$$P(Y = k | X = r) = C_r^k p^k (1-p)^{r-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, r.$$

Din teorema probabilității totale avem

$$P(Y = k) = \sum_{r=k}^{\infty} P(Y = k | X = r) P(X = r) = \sum_{r=k}^{\infty} C_r^k \frac{p^k (1-p)^{r-k} \lambda^r e^{-\lambda}}{r!} \quad r=n+k$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k}^k \frac{p^k (1-p)^n \lambda^{n+k} e^{-\lambda}}{(n+k)!} = \frac{(p\lambda)^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(1-p)\lambda]^n}{n!} = \frac{(p\lambda)^k e^{-\lambda} e^{(1-p)\lambda}}{k!} = \frac{(p\lambda)^k e^{-p\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \square$$

Această propoziție poate fi folosită, de exemplu, pentru situații în care  $Y$  e numărul de urmași ai unei insecte când  $X$  e numărul de ouă depuse, sau  $Y$  e numărul de uragane dezastruoase când  $X$  e numărul total de uragane care apar într-un an dat, sau  $Y$  e numărul pasagerilor care nu pot urca la bordul unui zbor dat din cauza supraz rezervărilor, când  $X$  este numărul de sosiri de pasageri.

#### 4.6.1 Repartiții spațiale

Repartiția Poisson a fost dată pe baza sosirilor în timp, dar același argument se aplică la repartiția punctelor în spațiu. Considerăm repartiția defectelor într-un material. Numărul de defecte într-un anumit volum are o repartiție Poisson dacă ipotezele 1-3 sunt valide, cu intervalele de timp înlocuite de volume,

și este rezonabil să presupunem că probabilitatea de a găsi  $k$  defecte în orice regiune depinde numai de volum și nu de forma regiunii.

Alte situații fizice în care repartiția Poisson e folosită includ numărul de bacterii pe o placă Petri, repartiția fertilizatoarelor împrăștiate cu avionul pe un câmp și repartiția poluanților industriali într-o regiune dată.

#### 4.6.2 Aproximarea Poisson a repartiției binomiale

Fie  $X \sim B(n, p)$ .

$$p_X(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Considerăm cazul când  $n \rightarrow \infty$  și  $p \rightarrow 0$  a. i.  $np = \lambda$  rămâne fixat. Observăm că  $\lambda$  este media lui  $X$ , care e presupusă a rămâne constantă. Atunci

$$p_X(k) = C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Deoarece  $n \rightarrow \infty$ , factorialele  $n!$  și  $(n-k)!$  care apar în  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  pot fi approximate prin formula lui Stirling

$$n! \cong (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}.$$

Obținem

$$p_X(k) \cong \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}}{k!(2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-n+k} (n-k)^{n-k+\frac{1}{2}}} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k! e^k} \left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k+\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{c}{n}\right)^n = e^c,$$

avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{n-k+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n\right]^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-k+\frac{1}{2}}{n}}} = \frac{1}{e^{-k}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n\right]^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-k}{n}} = e^{-\lambda}.$$

Obținem

$$p_X(k) \cong \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Această aproximare Poisson a repartiției binomiale ușurează calculele și se folosește în practică atunci când  $n > 10$  și  $p < 0,1$ . Repartiția Poisson își găsește aplicabilitate în acest caz în probleme în care probabilitatea apariției unui eveniment este mică. De aceea, repartiția Poisson se mai numește adesea *repartiția evenimentelor rare*.

## 5 Principalele repartiții continue, cu densități de repartiție și proprietățile lor

### 5.1 Repartiția uniformă

O variabilă aleatoare continuă  $X$  are *repartiție uniformă* pe un interval de la  $a$  la  $b$  ( $b > a$ ) dacă este egal probabil să ia orice valoare din acest interval. Densitatea lui  $X$  este constantă pe intervalul  $[a, b]$  și are forma

$$f_X(x) = \begin{cases} c, & \text{dacă } x \in [a, b], \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Deoarece

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^a 0 dx + \int_a^b c dx + \int_b^{\infty} 0 dx = 0 + cx \Big|_a^b + 0 = c(b-a),$$

din condiția

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

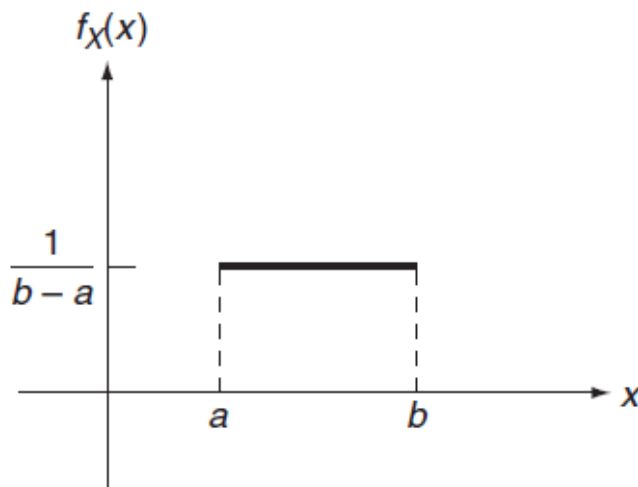
obținem

$$c = \frac{1}{b-a}.$$

Deci

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{dacă } x \in [a, b], \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \quad (5.1)$$

După cum vedem din figura de mai jos, este constantă pe  $[a, b]$  și înălțimea trebuie să fie  $\frac{1}{b-a}$  pentru ca aria de sub densitate să fie 1.



Funcția de repartiție a lui  $X$  este

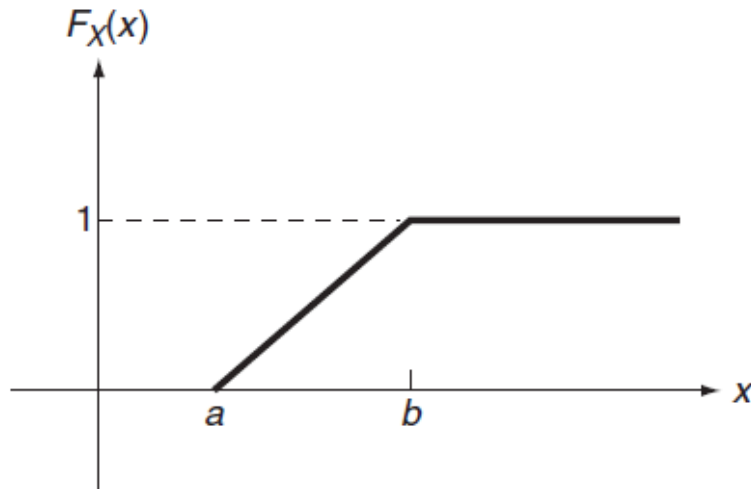


$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du = \begin{cases} \int_{-\infty}^x 0 du = 0, & \text{dacă } x < a; \\ \int_{-\infty}^a 0 du + \int_a^x \frac{1}{b-a} du = 0 + \frac{u}{b-a} \Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}, & \text{dacă } x \in [a, b], \\ \int_{-\infty}^a 0 du + \int_a^b \frac{1}{b-a} du + \int_b^x 0 du = 0 + 1 + 0 = 1, & \text{dacă } x > b. \end{cases}$$

Deci

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{dacă } x \in [a, b], \\ 1, & \text{dacă } x > b, \end{cases} \quad (5.2)$$

ceea ce este prezentat grafic în figura următoare.



Media și dispersia lui  $X$  sunt

$$\begin{aligned} m_X &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^a 0 dx + \int_a^b \frac{x}{b-a} dx + \int_b^{\infty} 0 dx = 0 + \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b + \\ 0 &= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}. \\ \sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^a 0 dx + \frac{1}{b-a} \int_a^b (x - m_X)^2 dx + \\ &\int_b^{\infty} 0 dx = 0 + \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(x - m_X)^3}{3} \Big|_a^b + 0 = \frac{(b - m_X)^3 - (a - m_X)^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)[(b - m_X)^2 + (b - m_X)(a - m_X) + (a - m_X)^2]}{3(b-a)} = \\ &\frac{1}{3} \left[ \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \right] = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

Repartiția uniformă e una dintre cele mai simple repartiții și e folosită de obicei în situații unde nu este niciun motiv de a da probabilități inegale la valori posibile luate de variabila aleatoare pe un interval dat. De exemplu, timpul de sosire a unui zbor poate fi considerat uniform repartizat pe un anumit interval de timp, sau repartiția distanței de la locul încărcăturilor vii pe un pod la un suport terminal poate fi reprezentată adecvat printr-o repartiție uniformă

pe întinderea podului. Adesea se atașează o repartiție uniformă unei anumite variabile aleatoare din cauza unei lipse de informație, dincolo de cunoașterea intervalului de valori.

### 5.1.1 Repartiția uniformă bivariată

Fie variabila aleatoare  $X$  repartizată uniform pe un interval  $[a_1, b_1]$  și variabila aleatoare  $Y$  repartizată uniform pe un interval  $[a_2, b_2]$ . Mai mult, presupunem că sunt independente. Atunci densitatea comună a lui  $X$  și  $Y$  este

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}, & \text{pentru } x \in [a_1, b_1] \text{ și } y \in [a_2, b_2], \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \quad (5.3)$$

Ia forma unei suprafețe plate mărginită de  $[a_1, b_1]$  de-a lungul axei  $Ox$  și  $[a_2, b_2]$  de-a lungul axei  $Oy$ .

## 5.2 Repartiția Gaussiană sau normală

Cea mai importantă repartiție în teorie ca și în aplicații este repartiția *Gaussiană* sau *normală*. O variabilă aleatoare  $X$  este *Gaussiană* sau *normală* dacă are densitatea de forma

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2} \right], \quad -\infty < x < \infty, \quad (5.4)$$

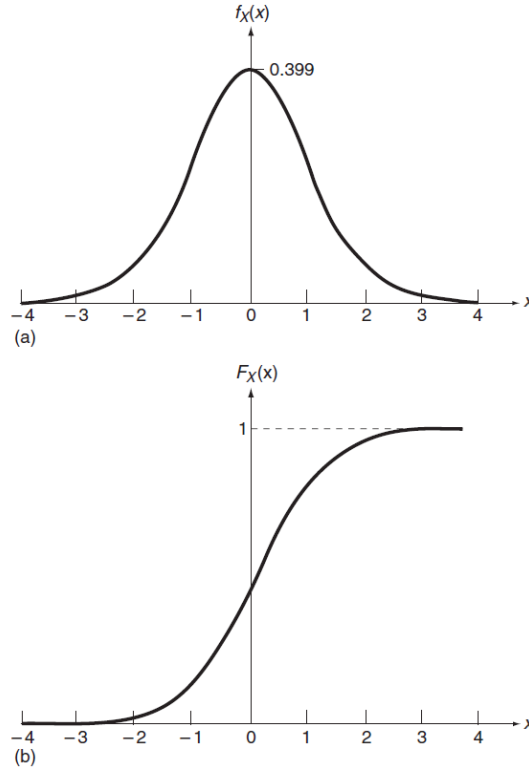
unde  $m$  și  $\sigma$  sunt doi parametri, cu  $\sigma > 0$ . Alegerea acestor simboluri particulare ca parametri va deveni clară imediat.

Funcția de repartiție corespunzătoare este

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp \left[ -\frac{(u - m)^2}{2\sigma^2} \right] du, \quad -\infty < x < \infty. \quad (5.5)$$

Ea nu poate fi exprimată analitic, dar poate fi evaluată numeric pentru orice  $x$ .

Densitatea și funcția de repartiție din relațiile (5.4) și (5.5) sunt reprezentate grafic în figurile (a), respectiv (b) următoare, pentru  $m = 0$  și  $\sigma = 1$ .



Graficul densității  $f_X$  în acest caz particular este o curbă în formă de clopot, simetrică în jurul originii.

Calculăm media și dispersia lui  $X$ .

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx \stackrel{\frac{x-m}{\sigma}=u}{=} \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma u + m) \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \cdot \sigma du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \underbrace{\sigma \int_{-\infty}^{\infty} u \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du}_{\text{impară}} + m \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \right] = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\sigma \cdot 0 + m\sqrt{2\pi}) = m. \\
 \text{var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f_X(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx \stackrel{\frac{x-m}{\sigma}=u}{=} \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 u^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \cdot \sigma du = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u \left(\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\right)' du = \\
 &= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[ u \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \right] = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} (0 - \sqrt{2\pi}) = \sigma^2.
 \end{aligned}$$

Vedem astfel că cei doi parametri  $m$  și  $\sigma$  din repartiție sunt media și respectiv deviația standard a lui  $X$ . Această observație justifică alegerea noastră a acestor simboluri speciale pentru ei și de asemenea pune în evidență o proprietate importantă a repartiției normale - cunoașterea mediei și dispersiei ei

caracterizează complet repartiția normală. Deoarece ne vom referi frecvent la repartiția normală, o notăm cu  $N(m, \sigma^2)$ . De exemplu,  $X \sim N(0, 9)$  înseamnă că  $X$  are densitatea dată de relația (5.4) cu  $m = 0$  și  $\sigma = 3$ .

Se poate arăta că momentele centrate ale lui  $X \sim N(m, \sigma^2)$  sunt

$$\mu_n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n \text{ e impar,} \\ 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \sigma^n, & \text{dacă } n \text{ e par.} \end{cases} \quad (5.6)$$

Coeficientul de exces  $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$  este 0 pentru o repartiție normală. De aceea ea este folosită ca repartiție de referință pentru  $\gamma_2$ .

### 5.2.1 Teorema limită centrală

Marea importanță practică a repartiției normale provine din teorema limită centrală.

**Teorema 5.1 (Teorema limită centrală)** (Lindberg 1922). Fie  $\{X_n\}$  un șir de variabile aleatoare independente și identic repartizate cu mediile  $m$  și dispersiile  $\sigma^2$ . Fie

$$Y = \sum_{j=1}^n X_j,$$

și fie variabila aleatoare normalizată  $Z$  definită ca

$$Z = \frac{Y - nm}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Atunci funcția de repartiție a lui  $Z$ ,  $F_Z(z)$ , converge la  $N(0, 1)$  când  $n \rightarrow \infty$  pentru orice  $z$  fixat.

Acest rezultat poate fi extins în câteva direcții, incluzând cazurile în care  $Y$  este o sumă de variabile aleatoare dependente și neidentic repartizate.

Teorema limită centrală descrie o clasă foarte generală de fenomene aleatoare pentru care repartițiile pot fi approximate cu repartiția normală. Când proprietatea de a fi aleator a unui fenomen fizic este cumulara a multor efecte aleatoare aditive mici, el tinde la o repartiție normală, indiferent de repartițiile efectelor individuale. De exemplu, consumul de combustibil la toate automobilele unei anumite mărci, presupus fabricate prin procese identice, diferă de la un automobil la altul. Această proprietate de a fi aleator provine de la o largă varietate de surse, incluzând, printre alte lucruri: inexactitățile inerente în procesele de fabricare, neuniformitățile în materialele folosite, diferențele în greutate și alte specificații, diferențe în calitatea combustibilului și diferențe în comportamentul șoferilor. Dacă se acceptă faptul că fiecare dintre aceste diferențe contribuie la proprietatea de a fi aleator a consumului de combustibil, teorema limită centrală ne spune că el tinde la o repartiție normală. Din același motiv, variațiile de temperatură dintr-o cameră, erorile de citire asociate cu un instrument, erorile de țintire ale unei anumite arme, ș.a.m.d. pot fi approximate rezonabil prin repartiții normale.

### 5.2.2 Tabele de probabilități

Datorită importanței sale, suntem adesea puși în situația să evaluăm probabilitățile asociate cu o variabilă aleatoare normală  $X \sim N(m, \sigma^2)$ , ca

$$P(a < X \leq b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx. \quad (5.7)$$

Integrala de mai sus nu poate fi calculată analitic și este în general calculată numeric. Pentru comoditate sunt date tabele care ne permit să calculăm probabilități ca cea din relația (5.7).

Tabelarea funcției de repartiție pentru repartiția normală cu  $m = 0$  și  $\sigma = 1$  este dată în tabelul A.3 din figura următoare.

**Table A.3** Standardized normal distribution function: a table of

$$F_U(u) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^u e^{-x^2/2} dx,$$

for  $u = 0.0$  to  $3.69$

$u$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9482	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9874	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

O variabilă aleatoare cu repartiția  $N(0, 1)$  se numește variabilă aleatoare normală *standardizată* și o vom nota cu  $U$ . Tabelul alăturat dă  $F_U(u)$  doar pentru punctele din partea dreaptă a repartiției (adică pentru  $u \geq 0$ ). Valorile corespunzătoare pentru  $u < 0$  sunt obținute din proprietatea de simetrie a repartiției normale standardizate, din relația

$$F_U(-u) = 1 - F_U(u). \quad (5.8)$$

Mai întâi, tabelul împreună cu relația (5.8) pot fi folosite pentru a determina  $P(a < U \leq b)$  pentru orice  $a$  și  $b$ . De exemplu,

$$P(-1,5 < U \leq 2,5) = F_U(2,5) - F_U(-1,5) \stackrel{(5.8)}{=} F_U(2,5) - [1 - F_U(1,5)] \stackrel{\text{tabel}}{=} 0,9938 - 1 + 0,9332 = 0,927.$$

Mai important, tabelul și relația (5.8) sunt de asemenea suficiente pentru a determina probabilitățile asociate cu variabilele aleatoare normale cu medii și dispersii arbitrare.

**Teorema 5.2.** Fie  $X \sim N(m, \sigma^2)$ . Atunci  $\frac{X-m}{\sigma} \sim N(0,1)$ , adică

$$U = \frac{X - m}{\sigma}. \quad (5.9)$$

Teorema 5.2 implică faptul că, dacă  $X \sim N(m, \sigma^2)$ , atunci

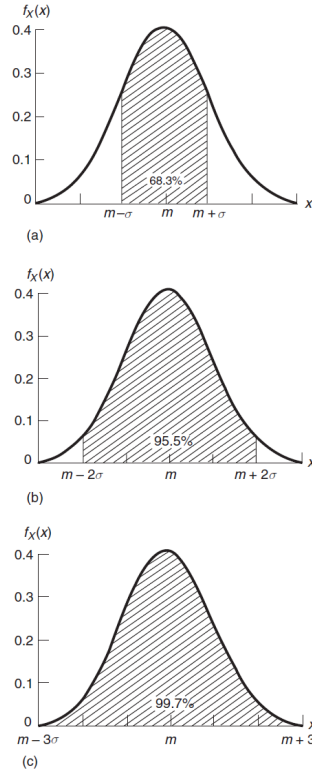
$$P(a < X \leq b) = P(a < \sigma U + m \leq b) = P\left(\frac{a-m}{\sigma} < U \leq \frac{b-m}{\sigma}\right). \quad (5.10)$$

Valoarea din membrul drept poate fi găsită acum din tabel cu ajutorul relației (5.8), dacă este necesar.

**Exemplul 5.1.** Să calculăm  $P(m - k\sigma < X \leq m + k\sigma)$ , unde  $X \sim N(m, \sigma^2)$ .

$$P(m - k\sigma < X \leq m + k\sigma) \stackrel{(5.10)}{=} P(-k < U \leq k) = F_U(k) - F_U(-k) \stackrel{(5.8)}{=} 2F_U(k) - 1. \quad (5.11)$$

Observăm că rezultatul din exemplul 5.1 este independent de  $m$  și  $\sigma$  și este funcție doar de  $k$ . Astfel, probabilitatea ca  $X$  să ia valori între  $k$  deviații standard în jurul mediei sale depinde numai de  $k$  și este dată de ecuația (5.11). Se vede din tabel că aproximativ 68,3%, 95,5% și 99,7% din aria de sub o densitate normală se află în zonele  $m \pm \sigma$ ,  $m \pm 2\sigma$ , respectiv  $m \pm 3\sigma$ , după cum se vede din figurile (a)-(c) următoare.



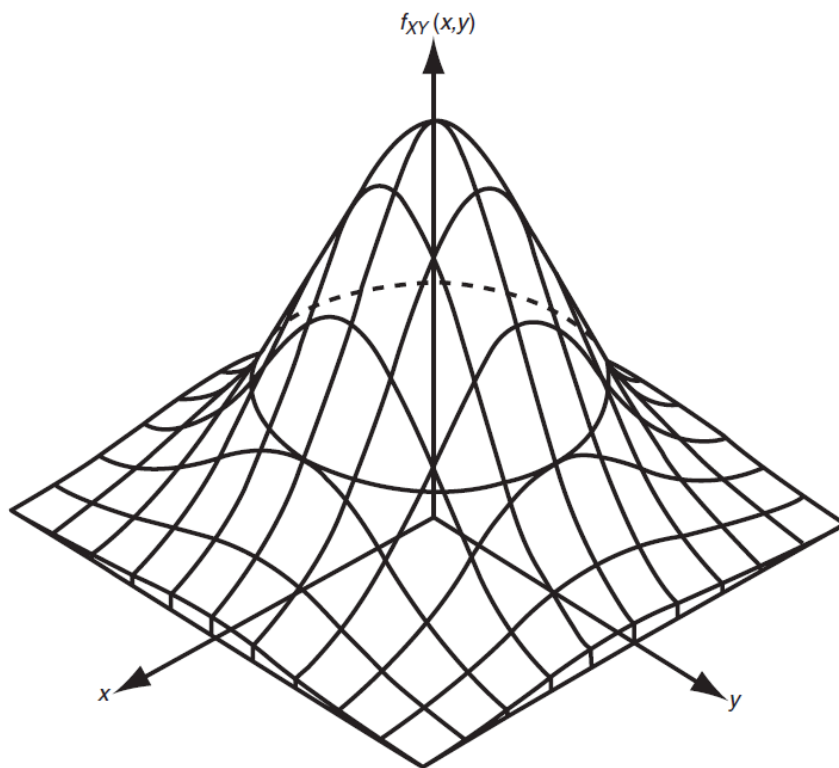
De exemplu, șansele sunt de aproximativ 99,7% ca o mostră selectată aleator dintr-o repartiție normală să fie în regiunea  $m \pm 3\sigma$  (figura (c)).

### 5.2.3 Repartiția normală multivariată

Două variabile aleatoare  $X$  și  $Y$  se numesc *comun normale* dacă densitatea comună a lor are forma

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \left( \frac{x-m_X}{\sigma_X} \right)^2 - 2\rho \frac{(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \left( \frac{y-m_Y}{\sigma_Y} \right)^2 \right] \right\}, \quad (5.12)$$

unde  $(-\infty, -\infty) < (x, y) < (\infty, \infty)$ . Relația (5.12) descrie *repartiția normală bivariată*. Sunt cinci parametri asociați cu ea:  $m_X, m_Y, \sigma_X (> 0), \sigma_Y (> 0)$ , și  $\rho$  ( $|\rho| \leq 1$ ). O reprezentare grafică tipică a acestei densități, pentru  $m_X = m_Y = 0$  și  $\sigma_X = \sigma_Y$  este în figura următoare.



Densitatea marginală a variabilei aleatoare  $X$  este

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(x - m_X)^2}{2\sigma_X^2} \right], \quad -\infty < x < \infty.$$

Astfel,  $X \sim N(m_X, \sigma_X^2)$ . Similar,  $Y \sim N(m_Y, \sigma_Y^2)$  și  $\rho = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$  este coeficientul de corelație al lui  $X$  și  $Y$ . Vedem astfel că cei cinci parametri conținuți în densitatea bivariată  $f_{XY}(x, y)$  reprezintă cinci momente importante asociate cu variabilele aleatoare. De asemenea observăm că repartiția normală bivariată este complet caracterizată de momentele comune de ordinul 1 și 2 ale lui  $X$  și  $Y$ .

**Teorema 5.3.** Corelație zero implică independență când variabilele aleatoare sunt comun normale.

**Demonstrație.** Punând  $\rho = 0$  în relația (5.12), obținem

$$f_{XY}(x, y) = \left\{ \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(x - m_X)^2}{2\sigma_X^2} \right] \right\} \left\{ \frac{1}{\sigma_Y \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(y - m_Y)^2}{2\sigma_Y^2} \right] \right\} = f_X(x) f_Y(y),$$

adică  $X$  și  $Y$  sunt independente.  $\square$



Această proprietate nu este valabilă în general.

Avem *repartiție normală multivariată* când cazul a două variabile aleatoare e extins la cel implicând  $n$  variabile aleatoare.

Fie  $n$  variabile aleatoare,  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Ele se numesc *comun normale* dacă densitatea lor comună e de forma

$$f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Lambda|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{m})^T \Lambda^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}) \right], \quad -\infty < \mathbf{x} < \infty,$$

unde  $\mathbf{m}^T = (m_1, m_2, \dots, m_n) = (E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_n))$ ,  $\Lambda = (\mu_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$  este matricea de covarianță a lui  $\mathbf{X}$ , cu

$$\mu_{ij} = E((X_i - m_i)(X_j - m_j)),$$

iar  $|\Lambda|$  este determinantul lui  $\Lambda$ . Din nou vedem că o repartiție normală comună este complet specificată de momentele comune de ordinul 1 și 2, aceste momente determinând de asemenea momentele comune de ordine mai mari ca 2. Se poate arăta că, în cazul când variabilele aleatoare  $X_1, X_2, \dots, X_n$  au mediile 0, toate momentele de ordin impar ale lor sunt 0, și, pentru  $n$  par

$$E(X_1 X_2 \dots X_n) = \sum_{m_1, \dots, m_n} E(X_{m_1} X_{m_2}) E(X_{m_2} X_{m_3}) \dots E(X_{m_{n-1}} X_{m_n}).$$

Suma de mai sus e luată după toate combinațiile posibile de  $\frac{n}{2}$  perechi de  $n$  variabile aleatoare și are  $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-3) \cdot (n-1)$  termeni.

#### 5.2.4 Sume de variabile aleatoare normale

**Teorema 5.4.** Fie  $X_1, X_2, \dots, X_n$   $n$  variabile aleatoare repartizate comun normal (nu necesar independente). Atunci variabila aleatoare

$$Y = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n$$

este repartizată normal, unde  $c_1, c_2, \dots, c_n$  sunt constante.

**Teorema 5.5.** Fie  $X_1, X_2, \dots, X_n$   $n$  variabile aleatoare repartizate normal (nu necesar independente). Atunci variabilele aleatoare  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ , unde

$$Y_j = \sum_{k=1}^n c_{jk} X_k, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

sunt repartizate comun normal.

### 5.3 Repartiția lognormală

**Definiția 5.1.** Fie

$$X \sim N(m_X, \sigma_X^2). \quad (5.13)$$

Variabila aleatoare

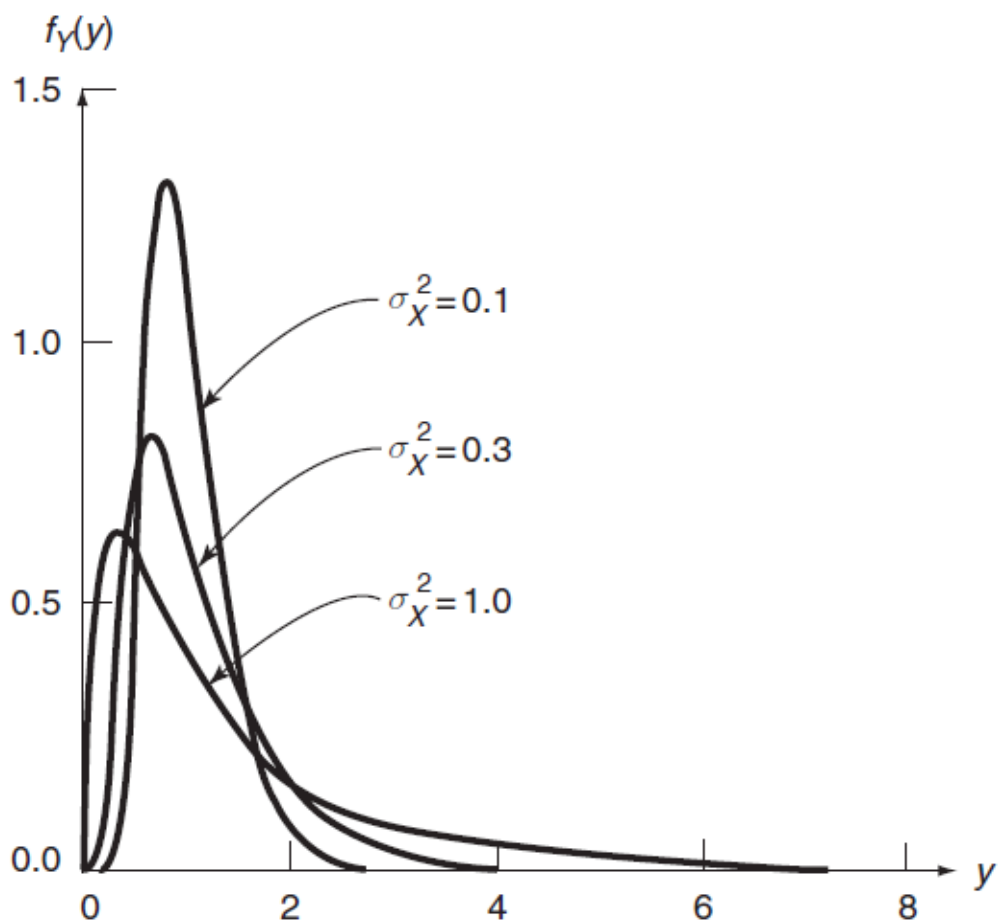
$$Y = e^X \quad (5.14)$$

se spune că are repartiție *lognormală*.

Densitatea lui  $Y$  este

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y\sigma_X\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_X^2}(\ln y - m_X)^2\right], & \text{pentru } y > 0; \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \quad (5.15)$$

Relația (5.15) arată că  $Y$  are o repartiție unilaterală (adică ia valori numai în zona pozitivă a lui  $y$ ). Această proprietate o face atractivă pentru cantități fizice care sunt restricționate să aibă doar valori pozitive. În plus,  $f_Y(y)$  ia multe forme diferite pentru valori diferite ale lui  $m_X$  și  $\sigma_X$  ( $\sigma_X > 0$ ). După cum se vede din figura următoare, care dă graficele lui  $f_Y$  pentru  $m_X = 0$  și 3 valori ale lui  $\sigma_X^2$ , densitatea lui  $Y$  este asimetrică spre dreapta, această caracteristică devenind mai pronunțată când  $\sigma_X$  crește.



Parametrii  $m_X$  și  $\sigma_X$  care apar în densitatea lui  $Y$  sunt media și deviația standard a lui  $X$ , sau  $\ln Y$ , dar nu ale lui  $Y$ . Pentru a obține o pereche mai naturală de parametri pentru  $f_Y(y)$ , observăm că, dacă medianele lui  $X$  și  $Y$  sunt notate cu  $\theta_X$ , respectiv  $\theta_Y$ , definiția medianei unei variabile aleatoare dă  $\frac{1}{2} = P(Y \leq \theta_Y) = P(X \leq \ln \theta_Y) = P(X \leq \theta_X)$ , de unde

$$\ln \theta_Y = \theta_X.$$

Deoarece, datorită simetriei repartiției normale,  $\theta_X = m_X$ , putem scrie

$$m_X = \ln \theta_Y.$$

Scriind  $\sigma_X = \sigma_{\ln Y}$ , densitatea lui  $Y$  poate fi scrisă

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y\sigma_{\ln Y}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{\ln Y}^2} \ln^2\left(\frac{y}{\theta_Y}\right)\right], & \text{pentru } y > 0; \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

În termeni de  $\theta_Y$  și  $\sigma_{\ln Y}$ , media și dispersia lui  $Y$  sunt

$$\begin{aligned} m_Y &= \theta_Y \exp\left(\frac{\sigma_{\ln Y}^2}{2}\right), \\ \sigma_Y^2 &= m_Y^2 [\exp(\sigma_{\ln Y}^2) - 1]. \end{aligned}$$

### 5.3.1 Tabele de probabilități

Datorită legăturii dintre repartiția normală și repartiția lognormală prin relația (5.14), calculele de probabilități implicând o variabilă aleatoare repartizată lognormal pot fi făcute cu ajutorul tabelului de probabilități pentru variabile aleatoare normale.

Considerăm funcția de repartiție a lui  $Y$ . Avem

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq \ln y) = F_X(\ln y), \quad y > 0.$$

Deoarece media lui  $X$  este  $\ln \theta_Y$  și dispersia lui  $X$  este  $\sigma_{\ln Y}^2$ , avem

$$F_Y(y) = F_U\left(\frac{\ln y - \ln \theta_Y}{\sigma_{\ln Y}}\right) = F_U\left[\frac{1}{\sigma_{\ln Y}} \ln\left(\frac{y}{\theta_Y}\right)\right], \quad y > 0. \quad (5.16)$$

Deoarece  $F_U$  este tabelată, relația (5.16) poate fi folosită pentru calcule de probabilități asociate cu  $Y$ , cu ajutorul tabelului probabilității normale.

## 5.4 Repartiția gamma și repartiții în legătură cu aceasta

Repartiția gamma este unilaterală și densitatea asociată cu ea este

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\eta}{\Gamma(\eta)} x^{\eta-1} e^{-\lambda x}, & \text{pentru } x > 0; \\ 0, & \text{altfel,} \end{cases} \quad (5.17)$$

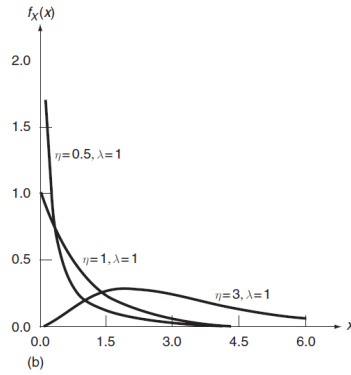
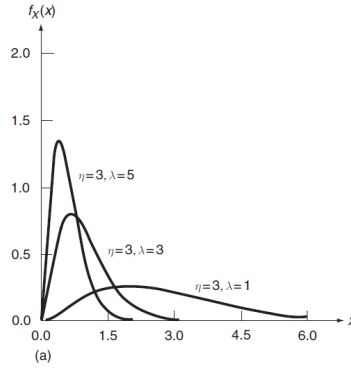
unde  $\Gamma(\eta)$  este funcția gamma:

$$\Gamma(\eta) = \int_0^\infty u^{\eta-1} e^{-u} du,$$

care este tabelată, și

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Parametrii distribuției gamma sunt  $\eta$  și  $\lambda$ ; ambii sunt pozitivi. Deoarece repartiția gamma este unilaterală, cantitățile fizice care pot lua doar valori pozitive sunt frecvent modelate de ea, servind ca model util datorită versatilității ei în sensul că o varietate largă de forme ale densității gamma poate fi obținută variind valorile lui  $\eta$  și  $\lambda$ , după cum arată figurile (a) și (b) următoare.



Observăm din aceste figuri că  $\eta$  determină forma repartiției în timp ce  $\lambda$  este un parametru de scară pentru repartiție. În general, densitatea gamma este unimodală, cu vârful în  $x = 0$  pentru  $\eta \leq 1$  și în  $x = \frac{\eta-1}{\lambda}$  pentru  $\eta > 1$ .

Se poate arăta că repartiția gamma este un model pentru timpul cerut pentru un total de exact  $\eta$  sosiri Poisson. Datorită largii aplicabilități a sosirilor Poisson, repartiția gamma are de asemenea numeroase aplicații.

Funcția de repartiție a variabilei aleatoare  $X$  având repartiția gamma este

$$F_X(x) = \begin{cases} \int_0^x f_X(u) du = \frac{\lambda^\eta}{\Gamma(\eta)} \int_0^x u^{\eta-1} e^{-\lambda u} du = \frac{\Gamma(\eta, \lambda x)}{\Gamma(\eta)}, & \text{pentru } x > 0; \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \quad (5.18)$$

$\Gamma(\eta, u)$  este funcția gamma incompletă,

$$\Gamma(\eta, u) = \int_0^u x^{\eta-1} e^{-x} dx,$$

care este de asemenea tabelată.

Media și dispersia variabilei aleatoare gamma repartizate  $X$  sunt

$$m_X = \frac{\eta}{\lambda}, \quad \sigma_X^2 = \frac{\eta}{\lambda^2}. \quad (5.19)$$

#### 5.4.1 Repartiția exponențială

Când  $\eta = 1$ , densitatea gamma dată de relația (5.17) se reduce la forma exponențială

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{pentru } x > 0; \\ 0, & \text{altfel,} \end{cases} \quad (5.20)$$

unde  $\lambda > 0$  este parametrul repartiției. Funcția de repartiție, media și dispersia ei se obțin din relațiile (5.18) și (5.19) punând  $\eta = 1$ :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{pentru } x \geq 0; \\ 0, & \text{altfel,} \end{cases} \quad (5.21)$$

$$m_X = \frac{1}{\lambda}, \quad \sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (5.22)$$

**Timpul între sosiri** Fie variabila aleatoare  $X(0, t)$ , numărul de sosiri în intervalul de timp  $[0, t)$  și presupunem că este repartizată Poisson. Fie  $T$  variabila aleatoare care dă intervalul de timp dintre 2 sosiri succesive. Funcția ei de repartiție este, din definiție

$$F_T(t) = P(T \leq t) = \begin{cases} 1 - P(T > t), & \text{pentru } t \geq 0; \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Evenimentul  $T > t$  e echivalent cu evenimentul că nu e nicio sosire în intervalul de timp  $[0, t)$ , sau  $X(0, t) = 0$ . Deoarece, din relația (4.10),  $P(X(0, t) = 0) = e^{-\nu t}$ , avem

$$F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\nu t}, & \text{pentru } t \geq 0; \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Comparând această expresie cu relația (5.21), putem stabili că timpul între 2 sosiri Poisson succesive are o repartiție exponențială; parametrul  $\nu$  din repartiția lui  $T$  este rata medie a sosirilor Poisson.

Deoarece timpurile între sosiri Poisson sunt independente, timpul cerut pentru un total de  $n$  sosiri Poisson este o sumă de  $n$  variabile aleatoare independente și repartizate exponențial. Fie  $T_j, j = 1, 2, \dots, n$ , timpul între sosirile  $j - 1$  și  $j$ . Timpul cerut pentru un total de  $n$  sosiri, notat cu  $X_n$  este

$$X_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n,$$

unde  $T_j, j = 1, 2, \dots, n$ , sunt independente și repartizate exponențial cu același parametru  $\nu$ . Se poate arăta că  $X_n$  este gamma repartizată cu  $\eta = n$  și  $\lambda = \nu$ . Astfel, repartiția gamma este potrivită pentru a descrie timpul cerut pentru un total de  $\eta$  sosiri Poisson.

**Fiabilitatea și legea de defectare exponențială** În studiile de fiabilitate, timpul până la defectarea unui component fizic sau un sistem este repartizat exponențial, dacă unitatea se defectează imediat ce un singur eveniment, ca defectarea unui component, apare, presupunând că astfel de fenomene se întâmplă independent.

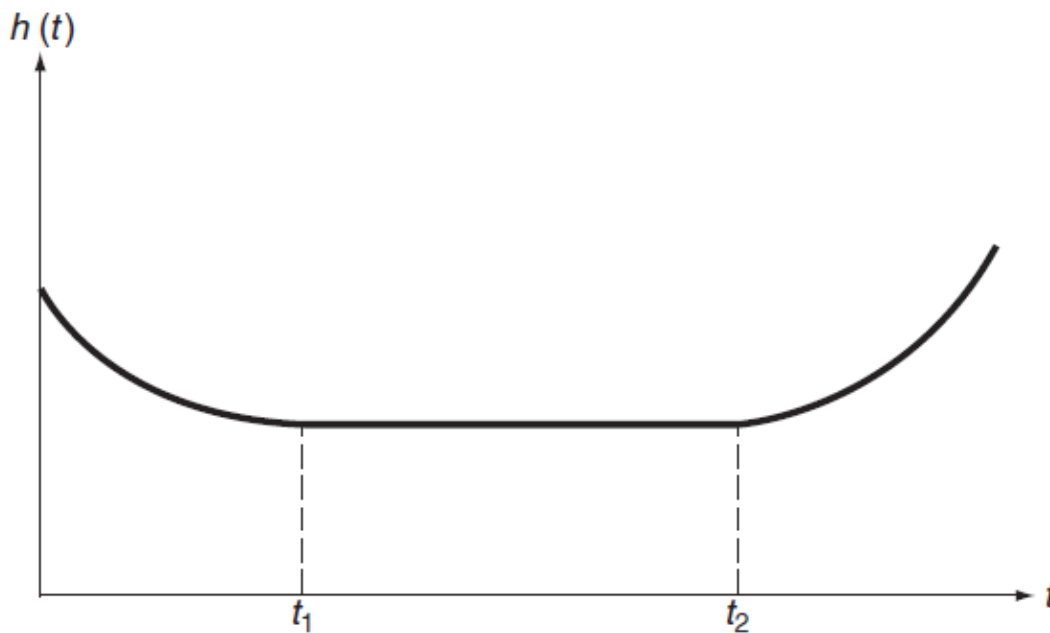
Fie variabila aleatoare  $T$ , timpul până la defectarea unui component sau sistem. Funcția care dă probabilitatea de defecțiune în timpul unei creșteri mici de timp, presupunând că nicio defecțiune nu a apărut înainte de acel timp e notată cu  $h(t)$  și se numește *funcția hazard* sau *rata defectării* și este definită de

$$h(t) dt = P(t < T \leq t + dt | T \geq t),$$

ceea ce dă

$$h(t) = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)}. \quad (5.23)$$

În studiile de fiabilitate, o funcție hazard potrivită pentru multe fenomene ia așa numita "formă de cadă", arătată în figura următoare.



Porțiunea inițială a curbei reprezintă "mortalitatea infantilă", atribuită defectorii componente și imperfecțiunilor de fabricare. Porțiunea relativ constantă a curbei  $h(t)$  reprezintă perioada "în uz", în care defecțiunea este întâmplătoare. Defecțiunea din uzură de lângă sfârșitul vieții componentului este arătată ca porțiunea crescătoare a curbei  $h(t)$ . Fiabilitatea sistemului poate fi

optimizată prin testarea inițială a defectelor, înainte punerea în funcțiune, până la timpul  $t_1$ , pentru a evita defectarea prematură, și prin înlocuirea parțială la timpul  $t_2$  pentru a evita uzura.

Arătăm că legea de defectare exponențială este potrivită în timpul perioadei "în uz" a vieții normale a unui sistem. Înlocuind

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

și

$$F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

în relația (5.23) avem

$$h(t) = \lambda.$$

Observăm că parametrul  $\lambda$  din repartiția exponențială joacă rolul unei rate de defectare constante.

Am văzut că repartiția gamma este potrivită pentru a descrie timpul pentru un total de  $\eta$  sosiri Poisson. În contextul legilor de defectare, repartiția gamma poate fi gândită ca o generalizare a legii de defectare exponențială pentru sisteme ce se defectează imediat de  $\eta$  evenimente eșuează, presupunând că evenimentele au loc în concordanță cu legea Poisson. Astfel, repartiția gamma este potrivită ca model al timpului până la defectare pentru sisteme care au o unitate care funcționează și  $\eta - 1$  unități în standby; aceste unități intră în funcționare pe rând, pe măsură ce se defectează celelalte și fiecare are o repartiție exponențială a timpului până la defectare.

#### 5.4.2 Repartiția chi-pătrat

Alt caz special important al repartiției gamma este repartiția chi-pătrat ( $\chi^2$ ), obținută punând  $\lambda = \frac{1}{2}$  și  $\eta = \frac{n}{2}$  în relația (5.17), unde  $n \in \mathbb{N}^*$ . Repartiția  $\chi^2$  conține astfel un parametru  $n$  și are densitatea de forma

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & \text{pentru } x > 0; \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \quad (5.24)$$

Parametrul  $n$  este numărul de *grade de libertate*. Utilitatea acestei repartiții provine din faptul că o sumă de pătrate de  $n$  variabile aleatoare normale standardizate are o repartiție  $\chi^2$  cu  $n$  grade de libertate; adică, dacă  $U_1, U_2, \dots, U_n$  sunt independente și repartizate  $N(0, 1)$ , atunci suma

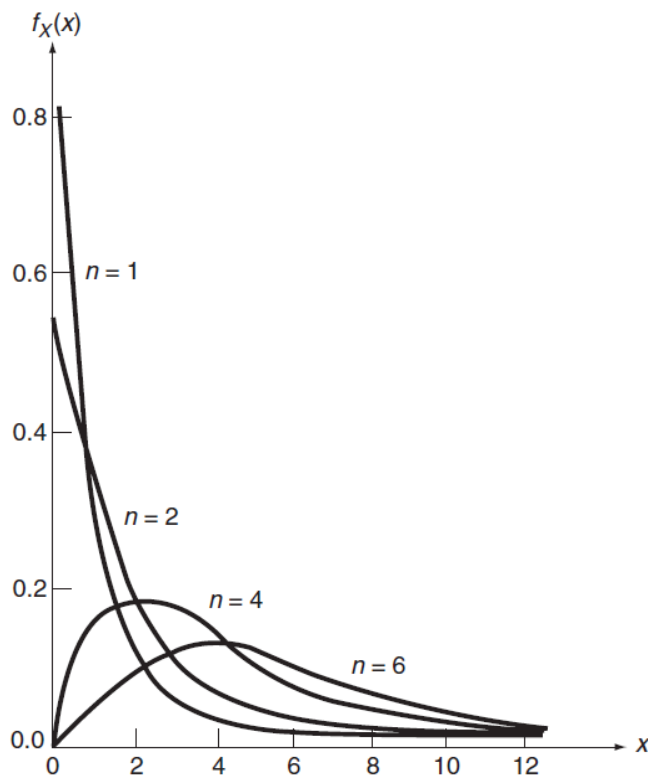
$$X = U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2 \quad (5.25)$$

are o repartiție  $\chi^2$  cu  $n$  grade de libertate.

Datorită acestei relații, repartiția  $\chi^2$  este una dintre principalele unelte în inferența statistică și testarea ipotezelor.

Densitatea din relația (5.24) este reprezentată în figura următoare pentru câteva valori ale lui  $n$ .





Se observă că, când  $n$  crește, forma lui  $f_X(x)$  devine mai simetrică. Din relația (5.25), deoarece  $X$  poate fi exprimată ca o sumă de variabile aleatoare identic repartizate, ne așteptăm ca repartiția  $\chi^2$  să tindă la o repartiție normală când  $n \rightarrow \infty$  pe baza teoremei limită centrală.

Media și dispersia unei variabile aleatoare  $X$  având o repartiție  $\chi^2$  cu  $n$  grade de libertate se obțin din relația (5.19):

$$m_X = n, \quad \sigma_X^2 = 2n.$$

## 5.5 Repartiția beta și repartiții în legătură cu aceasta

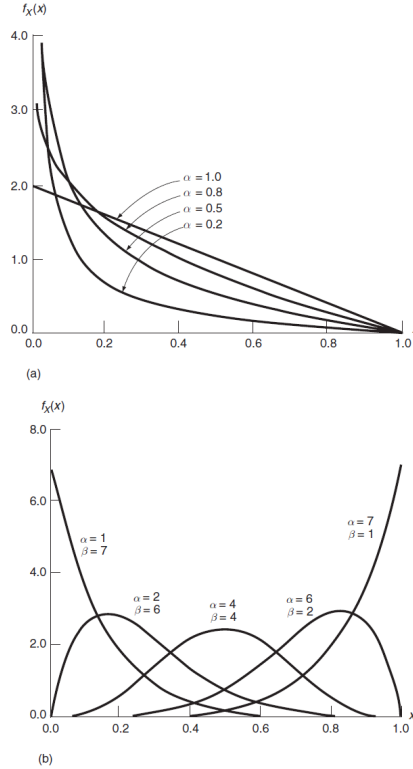
Repartiția beta este caracterizată de densitatea

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, & \text{pentru } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{altfel,} \end{cases} \quad (5.26)$$

unde parametrii  $\alpha$  și  $\beta$  sunt pozitivi. Numele repartiției vine de la funcția beta definită prin

$$\mathbf{B}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Ambii parametri  $\alpha$  și  $\beta$  dau forma repartiției; diferite combinații ale valorilor lor permit densității să ia o largă varietate de forme. Când  $\alpha, \beta > 1$ , repartiția este unimodală, cu vârful în  $x = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}$ . Devine în formă de U când  $\alpha, \beta < 1$ ; este în formă de J când  $\alpha \geq 1$  și  $\beta < 1$ ; ia forma unui J întors când  $\alpha < 1$  și  $\beta \geq 1$ . În sfârșit, ca un caz special, repartiția uniformă pe intervalul  $(0, 1)$  rezultă când  $\alpha = \beta = 1$ . Unele din aceste forme posibile sunt în figurile (a), pentru  $\beta = 2$ , și (b) următoare.



Media și dispersia unei variabile aleatoare beta repartizate  $X$  sunt

$$\begin{aligned} m_X &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \\ \sigma_X^2 &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Datorită versatilității ei ca o repartiție pe un interval finit, repartiția beta este folosită pentru a reprezenta un mare număr de cantități fizice pentru care valorile sunt restricționate la un interval identificabil. Câteva din ariile de aplicare sunt limitele de toleranță, controlul calității și fiabilitatea.

Presupunem că un fenomen aleator  $Y$  poate fi observat independent de  $n$  ori și după ce aceste  $n$  observații independente sunt ordonate crescător, fie  $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$  valorile lor. Dacă variabila aleatoare  $X$  este folosită pentru a nota proporția din  $Y$  care ia valori între  $y_r$  și  $y_{n-s+1}$ , se poate arăta că  $X$  are o repartiție beta cu  $\alpha = n - r - s + 1$  și  $\beta = r + s$ , adică

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-r-s+1)\Gamma(r+s)} x^{n-r-s} (1-x)^{r+s-1}, & \text{pentru } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

### 5.5.1 Tabele de probabilități

Funcția de repartiție asociată repartiției beta este

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } x \leq 0, \\ \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} du, & \text{pentru } 0 < x < 1, \\ 1, & \text{pentru } x \geq 1. \end{cases} \quad (5.28)$$

Are de asemenea forma unei funcții beta incomplete pentru care valorile pentru valori date ale lui  $\alpha$  și  $\beta$  pot fi găsite din tabele matematice. Funcția beta incompletă e notată de obicei cu  $\mathbf{I}_x(\alpha, \beta)$ . Notând  $F_X(x)$  cu parametrii  $\alpha$  și  $\beta$  cu  $F(x; \alpha, \beta)$ , dacă  $\alpha \geq \beta$ , atunci

$$F(x; \alpha, \beta) = \mathbf{I}_x(\alpha, \beta).$$

Dacă  $\alpha < \beta$ , atunci

$$F(x; \alpha, \beta) = 1 - \mathbf{I}_{(1-x)}(\beta, \alpha).$$

O altă metodă de evaluare a lui  $F_X(x)$  din relația (5.28) este de a observa similaritatea în formă dintre  $f_X(x)$  și  $p_Y(k)$  a unei variabile aleatoare binomiale  $Y$ , pentru cazul când  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ . Din relația (4.1),

$$p_Y(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (5.29)$$

Din relația (5.26), pentru cazul când  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ , obținem

$$f_X(x) = \frac{(\alpha + \beta - 1)!}{(\alpha - 1)!(\beta - 1)!} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, \quad 0 < x < 1,$$

și stabilim relația

$$f_X(x) = (\alpha + \beta - 1) p_Y(k), \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, \quad 0 < x < 1,$$

unde  $p_Y(k)$  este evaluată în  $k = \alpha - 1$ , cu  $n = \alpha + \beta - 2$  și  $p = x$ . De exemplu, valoarea  $f_X(0,5)$  cu  $\alpha = 2$  și  $\beta = 1$  este egală cu  $2p_Y(1)$  cu  $n = 1$  și  $p = 0,5$ ; aici  $p_Y(1) = 0,5$  din relația (5.29), deci  $f_X(0,5) = 1$ .

Similar avem

$$F_X(x) = 1 - F_Y(k), \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, \quad 0 < x < 1,$$

cu  $k = \alpha - 1$ ,  $n = \alpha + \beta - 2$  și  $p = x$ . Funcția de repartiție  $F_Y$  a unei variabile aleatoare binomiale  $Y$  este de asemenea tabelată și poate fi folosită pentru a avantaja aici evaluarea lui  $F_X(x)$  asociată cu repartiția beta.

### 5.5.2 Repartiția beta generalizată

Repartiția beta poate fi generalizată de la una restricționată la intervalul  $(0, 1)$  la una acoperind un interval arbitrar  $(a, b)$ . Fie  $Y$  o variabilă aleatoare beta generalizată. Avem

$$Y = (b - a)X + a, \quad (5.30)$$

unde  $X$  este beta repartizată în conformitate cu relația (5.26). Deoarece relația (5.30) este o transformare monotonă de la  $X$  la  $Y$ , avem

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(b-a)^{\alpha+\beta-1}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (y-a)^{\alpha-1} (b-y)^{\beta-1}, & \text{pentru } a < y < b, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \quad (5.31)$$

## 5.6 Repartiții de valori extreme

Cineva preocupat de siguranța unei structuri este adesea interesat de încărcătura *maximă* și stresul *maxim* în membrii structurii. În studiile de fiabilitate, repartiția vieții unui sistem având  $n$  componente în serie (când sistemul se defectează dacă o componentă se defectează) este o funcție de minimul timpilor până la defectarea componentelor, în timp ce pentru un sistem cu aranjament paralel (unde sistemul se defectează când *toate* componentele se defectează) e determinată de repartiția maximului timpilor până la defectarea componentelor. Aceste exemple punctează preocuparea cu repartițiile maximului sau minimului valorilor unui număr de variabile aleatoare.

Fie  $X_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , variabile aleatoare independente și identic repartizate cu funcția de repartiție  $F_X(x)$  și densitatea  $f_X(x)$  sau masa  $p_X(x)$  și

$$Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n), \\ Z_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Funcția de repartiție a lui  $Y_n$  este

$$F_{Y_n}(y) = P(Y_n \leq y) = P(X_1 \leq y \cap X_2 \leq y \cap \dots \cap X_n \leq y) \stackrel{\text{indep.}}{=} P(X_1 \leq y) P(X_2 \leq y) \dots P(X_n \leq y) = F_{X_1}(y) F_{X_2}(y) \dots F_{X_n}(y) = [F_X(y)]^n.$$

Deci

$$F_{Y_n}(y) = [F_X(y)]^n$$

Dacă  $X_j$  sunt continue, densitatea lui  $Y_n$  este

$$f_{Y_n}(y) = \frac{dF_{Y_n}(y)}{dy} = n[F_X(y)]^{n-1} f_X(y).$$

Funcția de repartiție a lui  $Z_n$  este

$$F_{Z_n}(z) = P(Z_n \leq z) = P(X_1 \leq z \cup X_2 \leq z \cup \dots \cup X_n \leq z) = 1 - P(X_1 > z \cap X_2 > z \cap \dots \cap X_n > z) \stackrel{\text{indep.}}{=} 1 - P(X_1 > z) P(X_2 > z) \dots P(X_n > z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)] [1 - F_{X_2}(z)] \dots [1 - F_{X_n}(z)] = 1 - [1 - F_X(z)]^n.$$

Deci

$$F_{Z_n}(z) = 1 - [1 - F_X(z)]^n.$$

Dacă  $X_j$  sunt continue, densitatea lui  $Z_n$  este

$$f_{Z_n}(z) = n [1 - F_X(z)]^{n-1} f_X(z).$$

### 5.6.1 Repartiții asimptotice de tip I ale valorilor extreme

Repartiția asimptotică de tip I a valorilor maxime este repartiția limitei lui  $Y_n$  (când  $n \rightarrow \infty$ ) dintr-o repartiție inițială  $F_X(x)$  a cărei coadă dreaptă este nemărginită și este de tip exponențial. Pentru acest caz, putem exprima  $F_X(x)$  în forma

$$F_X(x) = 1 - \exp[-g(x)], \quad (5.32)$$

unde  $g(x)$  este o funcție strict crescătoare de  $x$ . În această categorie intră, printre altele, repartițiile normală, lognormală și gamma.

Fie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = Y.$$

**Teorema 5.6.** Fie variabilele aleatoare  $X_1, X_2, \dots, X_n$  independente și identic repartizate cu aceeași funcție de repartiție  $F_X(x)$ . Dacă  $F_X(x)$  e de forma dată de relația (5.32), avem

$$F_Y(y) = \exp\{-\exp[-\alpha(y-u)]\}, \quad -\infty < y < \infty,$$

unde  $\alpha > 0$  și  $u$  sunt 2 parametri ai repartiției.

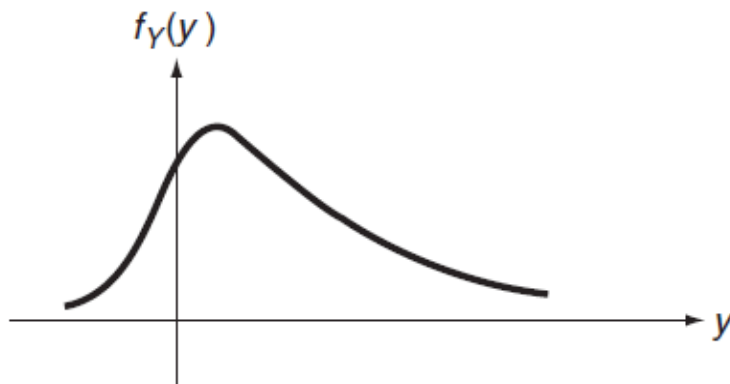
$u$  este modulul repartiției, adică valoarea lui  $y$  în care  $f_Y(y)$  este maximă. Media lui  $Y$  este

$$m_Y = u + \frac{\gamma}{\alpha},$$

unde  $\gamma \simeq 0,577$  este constanta lui Euler. Dispersia lui  $Y$  este

$$\sigma_Y^2 = \frac{\pi^2}{6\alpha^2}.$$

$u$  este parametru de locație și  $\alpha$  este parametru de scală al repartiției. Coeficientul de asimetrie este în acest caz  $\gamma_1 \simeq 1,1396$  și e independent de  $\alpha$  și  $u$ . Acest rezultat arată că repartiția valorii maxime de tip I are o formă fixă cu o coadă dominantă spre dreapta. O formă tipică pentru  $f_Y(y)$  este aratăată în figura următoare.



Repartiția asimptotică de tip I pentru valori minime este repartiția limitei lui  $Z_n$  când  $n \rightarrow \infty$  dintr-o repartiție inițială  $F_X(x)$  a cărei coadă stângă este nemărginită și este de tip exponențial când descrește la 0 spre stânga. Un exemplu de  $F_X(x)$  care aparține acestei clase este repartiția normală.

Dacă punem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = Z,$$

funcția de repartiție a lui  $Z$  are forma

$$F_Z(z) = 1 - \exp\{-\exp[\alpha(z-u)]\}, \quad -\infty < z < \infty,$$

unde  $\alpha > 0$  și  $u$  sunt din nou cei 2 parametri ai repartiției.

Repartițiile asimptotice de tip I pentru valori maxime și minime sunt imagini în oglindă una celeilalte. Modulul lui  $Z$  este  $u$  și media, dispersia și coeficientul lui de asimetrie sunt

$$\begin{aligned} m_Y &= u - \frac{\gamma}{\alpha}, \\ \sigma_Y^2 &= \frac{\pi^2}{6\alpha^2}, \\ \gamma_1 &\simeq -1,1396. \end{aligned}$$

Datorită largii aplicabilități, repartiția valorii maxime de tip I este uneori numită simplu *repartiția valorii extreme*.

### 5.6.2 Repartiții asimptotice de tip II ale valorilor extreme

Repartiția asimptotică de tip II a valorilor maxime apare ca repartiția limitei lui  $Y_n$  când  $n \rightarrow \infty$  dintr-o repartiție inițială de tip Pareto, adică,  $F_X(x)$  e limitată la stânga în 0 și coada ei dreaptă este nemărginită și se apropie de 1 conform

$$F_X(x) = 1 - ax^{-k}, \quad a, k, x > 0. \quad (5.33)$$

Pentru această clasă

$$F_Y(y) = \exp \left[ - \left( \frac{y}{v} \right)^{-k} \right], \quad v, k, y > 0.$$

Cu  $F_X(x)$  dat în relația (5.33), fiecare  $X_j$  are momente doar până la ordinul  $r$ , unde  $r$  este cel mai mare întreg mai mic decât  $k$ . Când  $k > 1$ , media lui  $Y$  este

$$m_Y = v\Gamma \left( 1 - \frac{1}{k} \right),$$

și, când  $k > 2$ , dispersia are forma

$$\sigma_Y^2 = v^2 \left[ \Gamma \left( 1 - \frac{2}{k} \right) - \Gamma^2 \left( 1 - \frac{1}{k} \right) \right].$$

Fie  $Y_I$  și  $Y_{II}$  variabile aleatoare având repartiții asimptotice de tip I, respectiv II ale valorilor maxime. Atunci ele sunt legate prin

$$F_{Y_{II}}(y) = F_{Y_I}(\ln y), \quad y > 0,$$

iar parametrii  $\alpha$  și  $u$  din  $F_{Y_I}(y)$  sunt legați de parametrii  $k$  și  $v$  din  $F_{Y_{II}}(y)$  prin

$$u = \ln v \text{ și } \alpha = k.$$

Dacă  $Y_I$  și  $Y_{II}$  sunt continue, densitățile lor sunt în relația

$$f_{Y_{II}}(y) = \frac{1}{y} f_{Y_I}(\ln y), \quad y > 0.$$

Repartiția asimptotică de tip II a valorilor minime apare în condiții analoage. Cu  $F_X(x)$  limitată la dreapta în 0 și apropiindu-se de 0 la stânga într-o manieră analoagă relației (5.33), avem

$$F_Z(z) = 1 - \exp \left[ - \left| \frac{z}{v} \right|^{-k} \right], \quad v, k > 0, \quad z < 0.$$

Nu e așa utilă ca omoloagele de tip I și III, deoarece în practică repartițiile inițiale cerute nu sunt frecvent întâlnite.

### 5.6.3 Repartiții asimptotice de tip III ale valorilor extreme

Deoarece repartiția asimptotică de tip III a valorii maxime este de interes practic limitat, discutăm doar repartiția valorilor minime.

Repartiția asimptotică de tip III a valorii minime este repartiția limitei lui  $Z_n$  când  $n \rightarrow \infty$  pentru o repartiție inițială în care coada stângă crește de la 0 lângă  $x = \varepsilon$  în maniera

$$F_X(x) = c(x - \varepsilon)^k, \quad c, k > 0, \quad x \geq \varepsilon.$$

Această clasă de repartiții este mărginită la stânga în  $x = \varepsilon$ . Repartiția gamma este o astfel de repartiție cu  $\varepsilon = 0$ .

Se poate arăta că funcția de repartiție asimptotică de tip III a valorii minime este

$$F_Z(z) = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{z - \varepsilon}{w - \varepsilon} \right)^k \right], \quad k > 0, \quad w, z > \varepsilon, \quad (5.34)$$

și, dacă  $Z$  e continuă,

$$f_Z(z) = \frac{k}{w - \varepsilon} \left( \frac{z - \varepsilon}{w - \varepsilon} \right)^{k-1} \exp \left[ - \left( \frac{z - \varepsilon}{w - \varepsilon} \right)^k \right], \quad k > 0, \quad w, z > \varepsilon. \quad (5.35)$$

Media și dispersia lui  $Z$  sunt

$$m_Z = \varepsilon + (w - \varepsilon) \Gamma \left( 1 + \frac{1}{k} \right), \\ \sigma_Z^2 = (w - \varepsilon)^2 \left[ \Gamma \left( 1 + \frac{2}{k} \right) - \Gamma^2 \left( 1 + \frac{1}{k} \right) \right].$$

Am văzut că repartiția exponențială e folosită ca o lege a defectării în studii de fiabilitate, corespunzând unei funcții hazard constante. Repartiția dată de relațiile (5.34) și (5.35) este frecvent folosită ca un model generalizat al timpului până la defectare pentru cazurile în care funcția hazard variază cu timpul. Se poate arăta că funcția hazard

$$h(t) = \frac{k}{w} \left( \frac{t}{w} \right)^{k-1}, \quad t > 0,$$

poate avea o largă varietate de forme, și densitatea asociată cu ea pentru  $T$ , timpul până la defectare, este dată de

$$f_T(t) = \frac{k}{w} \left( \frac{t}{w} \right)^{k-1} \exp \left[ - \left( \frac{t}{w} \right)^k \right], \quad w, k, t > 0. \quad (5.36)$$

Aceasta este repartiția Weibull, numită după Weibull care a descoperit-o în 1939. Relația (5.36) este un caz special al relației (5.35), cu  $\varepsilon = 0$ .

Fie  $Z_I$  și  $Z_{III}$  variabile aleatoare având repartiții asimptotice de tipul I, respectiv III, ale valorilor minime. Atunci

$$F_{Z_{III}}(z) = F_{Z_I}[\ln(z - \varepsilon)], \quad z > \varepsilon,$$

cu  $u = \ln(w - \varepsilon)$  și  $\alpha = k$ . Dacă sunt continue,

$$f_{Z_{III}}(z) = \frac{1}{z - \varepsilon} f_{Z_I}[\ln(z - \varepsilon)], \quad z > \varepsilon.$$

Repartițiile asimptotice ale valorilor maxime și minime din aceeași repartiție inițială pot să nu fie de același tip. De exemplu, pentru o repartiție inițială gamma, repartiția ei asimptotică a valorii maxime este de tipul I, în timp ce



a valorii minime este de tipul III. Un sistem având  $n$  componente în serie cu repartiții de viață gamma independente pentru componentele lui are o repartiție a timpului până la defectare aparținând repartiției asimptotice de tip III a valorii minime, când  $n$  devine mare. Modelul corespunzător pentru un sistem având  $n$  componente în paralel este repartiția asimptotică de tip I a valorii maxime.

## 6 Funcții (transformări) de variabile aleatoare

În știință și inginerie, multe fenomene sunt bazate pe relații funcționale în care una sau mai multe variabile dependente sunt exprimate în termeni de una sau mai multe variabile independente. De exemplu, distanța parcursă într-un interval de timp este o funcție de viteză, ș.a.m.d.

### 6.1 Funcții de o variabilă aleatoare

Fie

$$Y = g(X), \quad (6.1)$$

unde  $g$  este o funcție continuă. Dată fiind repartiția lui  $X$  în termeni de funcția ei de repartiție, funcția masă de probabilitate sau densitate, suntem interesați de repartiția corespunzătoare pentru  $Y$  și proprietățile momentelor lui  $Y$ .

#### 6.1.1 Repartiția

Dacă  $X$  este variabilă aleatoare, atunci  $Y$ , fiind o funcție de  $X$  definită de relația (6.1), este de asemenea o variabilă aleatoare. Fie  $R_X$ , mulțimea valorilor lui  $X$ , și  $R_Y$  mulțimea valorilor lui  $Y$ .

Pentru fiecare rezultat  $X = x$ , rezultă din relația (6.1) că  $Y = y = g(x)$ . Relația (6.1) definește și o funcție de la  $R_X$  la  $R_Y$ . Probabilitățile asociate cu fiecare punct (în cazul unei variabile aleatoare discrete  $X$ ) sau fiecare regiune (în cazul unei variabile aleatoare continue  $X$ ) din  $R_X$  sunt transportate în punctul sau regiunea corespunzătoare din  $R_Y$ . Repartiția lui  $Y$  este determinată prin completarea acestui proces de transfer pentru fiecare punct (dacă  $X$  e discretă) sau fiecare regiune de tipul  $Y \leq y$  (dacă  $X$  e continuă) din  $R_Y$ . Este posibil ca  $g$  să ducă mai multe puncte din  $R_X$  într-un singur punct din  $R_Y$ . Determinarea repartiției lui  $Y$  depinde astfel de forma lui  $g$  din relația (6.1).

**Variabile aleatoare discrete** Fie  $X$  variabilă aleatoare discretă cu funcția masă de probabilitate  $p_X$ . Funcția masă de probabilitate a lui  $Y$  este

$$p_Y(y) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} p_X(x), \forall y \in R_Y,$$

unde  $g^{-1}(y) = \{x \in R_X | g(x) = y\}$ .

**Exemplul 6.1.** Fie  $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ . Determinați repartiția lui  $Y = 2X^2 + 1$ .

Valorile lui  $Y$  sunt  $g(-1) = 2(-1)^2 + 1 = 3, g(0) = 1, g(1) = 3, g(2) = 9$ . Avem  $g^{-1}(1) = \{0\}, g^{-1}(3) = \{-1, 1\}, g^{-1}(9) = \{2\}$ , deci  $p_Y(1) = p_X(0) =$

$\frac{1}{4}, p_Y(3) = p_X(-1) + p_X(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}, p_Y(9) = p_X(2) = \frac{1}{8}$ . De aici,  
 $Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ .

Dacă  $g: R_X \rightarrow R_Y$  este injectivă, valorile posibile luate de  $X$  sunt  $x_1, x_2, \dots$ , valorile luate de  $Y$  sunt  $y_1 = g(x_1), y_2 = g(x_2), \dots$  și

$$p_X(x_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

atunci

$$p_Y(y_i) = p_Y(g(x_i)) = p_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

**Exemplul 6.2.** Fie  $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ . Determinați repartiția lui  $Y = 2X + 1$ .

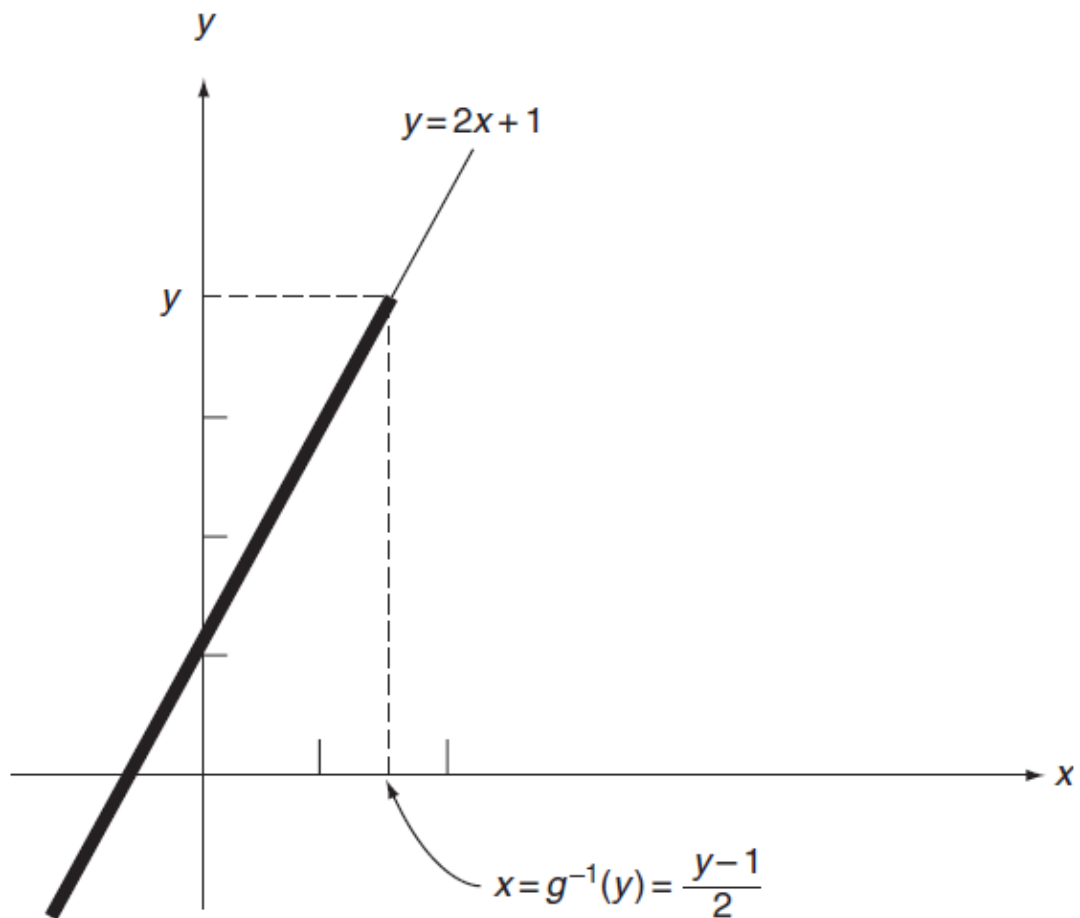
Valorile lui  $Y$  sunt  $g(-1) = 2(-1) + 1 = -1, g(0) = 1, g(1) = 3, g(2) = 5$ . Funcția  $g$  este injectivă, deci  $Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ .

**Variabile aleatoare continue** Considerăm cazul când  $X$  este o variabilă aleatoare continuă cu funcție de repartiție  $F_X(x)$  sau densitate  $f_X(x)$  cunoscute.

Începem considerând relația

$$Y = g(X) = 2X + 1. \quad (6.2)$$

Transformarea  $y = g(x)$  este prezentată grafic în figura următoare.



Funcția de repartiție a lui  $Y$  este definită de

$$F_Y(y) = P(Y \leq y).$$

Regiunea definită de  $Y \leq y$  din  $R_Y$  acoperă porțiunea îngroșată a curbei de transformare, după cum e arătat în figura alăturată, care, în  $R_X$  corespunde regiunii  $g(X) \leq y$ , sau  $X \leq g^{-1}(y)$ , unde

$$g^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$$

este funcția inversă a lui  $g$ , sau soluția  $x$  în funcție de  $y$  a ecuației (6.2). De aici,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y)). \quad (6.3)$$

(6.3) este relația dintre funcțiile de repartiție ale lui  $Y$  și  $X$ .

Relația dintre densitățile lui  $Y$  și  $X$  se obține derivând în raport cu  $y$  în (6.3):

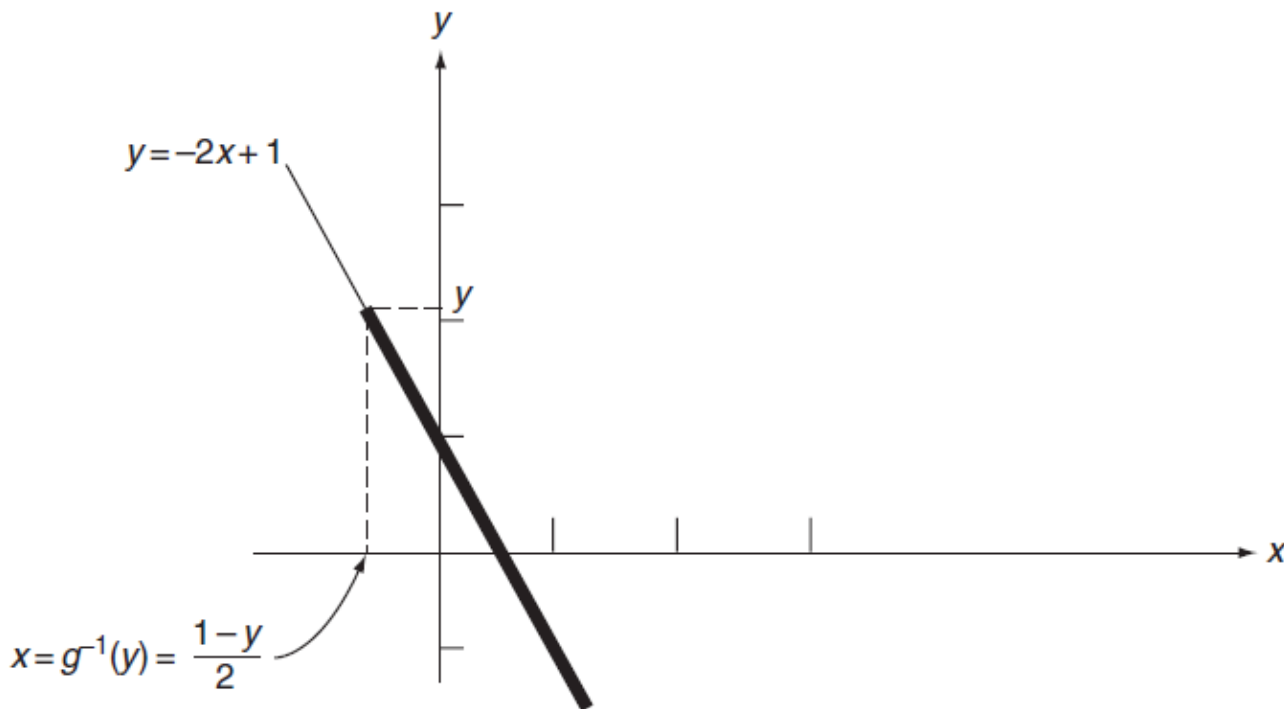
$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{d}{dy} [F_X(g^{-1}(y))] = f_X(g^{-1}(y)) \frac{dg^{-1}(y)}{dy}. \quad (6.4)$$

Relațiile (6.3) și (6.4) au loc nu doar pentru transformarea particulară dată prin relația (6.2) dar și pentru toate funcțiile continue  $g$  care sunt strict crescătoare.

Considerăm acum situația în care transformarea e dată de

$$Y = g(X) = -2X + 1. \quad (6.5)$$

Plecând din nou cu  $F_Y(y) = P(Y \leq y)$  și raționând ca mai sus, regiunea  $Y \leq y$  din  $R_Y$  corespunde regiunii  $X \geq g^{-1}(y)$ , după cum arată figura următoare.



Deoarece  $X$  este continuă, avem

$$P(X \geq g^{-1}(y)) = P(X > g^{-1}(y) \cup X = g^{-1}(y)) = P(X > g^{-1}(y)) + P(X = g^{-1}(y)) = P(X > g^{-1}(y)) + 0 = P(X > g^{-1}(y)).$$

De aici, avem în acest caz

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X > g^{-1}(y)) = 1 - P(X \leq g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y)). \quad (6.6)$$

În comparație cu relația (6.3), relația (6.6) dă o legătură diferită între funcțiile de repartiție ale lui  $X$  și  $Y$ , datorită unui  $g$  diferit.

Derivând în relația (6.6) în raport cu  $y$  obținem relația dintre densitățile lui  $X$  și  $Y$ :

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{d}{dy} [1 - F_X(g^{-1}(y))] = -f_X(g^{-1}(y)) \frac{dg^{-1}(y)}{dy}. \quad (6.7)$$

Din nou observăm că relațiile (6.6) și (6.7) au loc pentru toate funcțiile continue  $g$  care sunt strict descrescătoare.

Deoarece derivata  $\frac{dg^{-1}(y)}{dy}$  este totdeauna pozitivă în relația (6.4) (pentru că  $g$  e strict crescătoare) și este totdeauna negativă în relația (6.7) (pentru că  $g$  e strict descrescătoare), rezultatele exprimate de aceste relații pot fi combinate în următoarea teoremă:

**Teorema 6.1.** Fie  $X$  o variabilă aleatoare continuă și  $Y = g(X)$ , unde  $g$  este continuă și strict monotonă. Atunci

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|. \quad (6.8)$$

**Exemplul 6.3.** Densitatea lui  $X$  este dată de

$$f_X(x) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}, \quad -\infty < x < \infty,$$

unde  $a > 0$  (repartiția Cauchy). Determinați densitatea lui  $Y = 2X + 1$ .

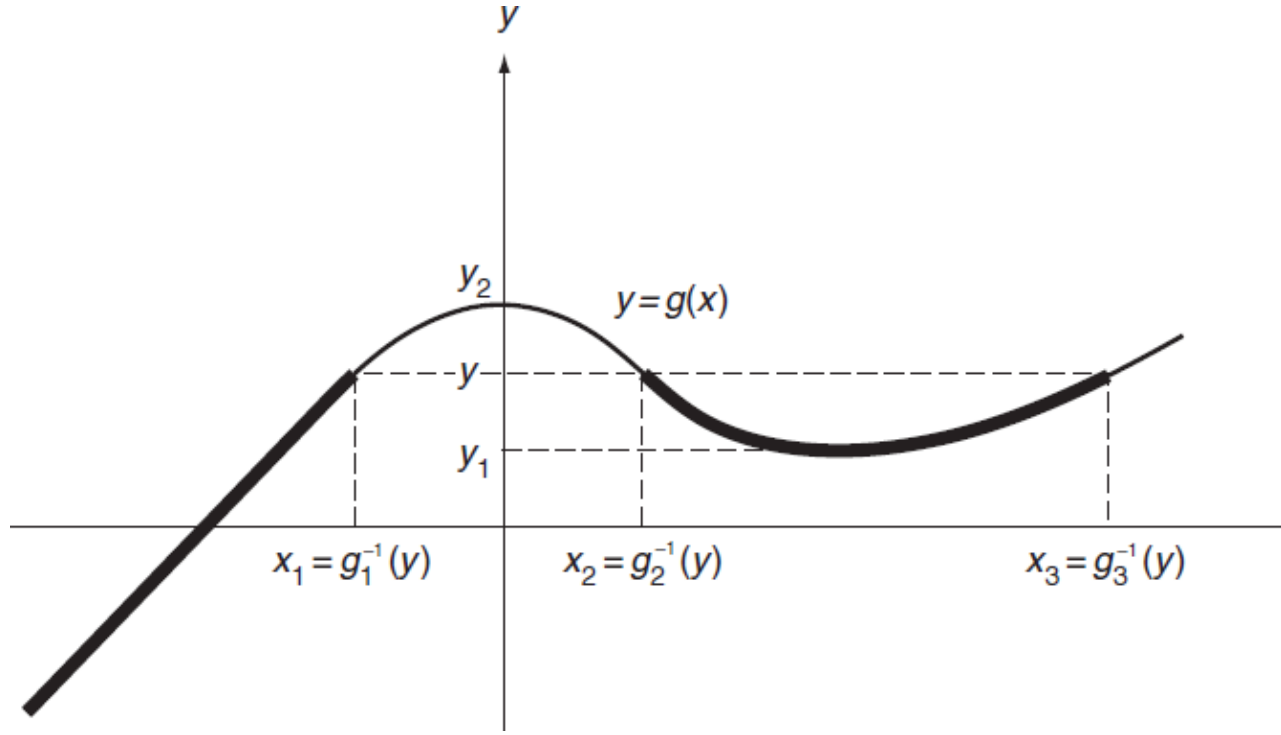
Deoarece  $g(x) = 2x + 1$  este continuă și strict monotonă, aplicăm relația (6.8).

$$y = 2x + 1 \iff x = \frac{y-1}{2} \implies g^{-1}(y) = \frac{y-1}{2} \implies \frac{dg^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{2}.$$

Din relația (6.8),

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-1}{2}\right) \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{a}{\pi\left[\left(\frac{y-1}{2}\right)^2 + a^2\right]} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2a}{\pi[(y-1)^2 + 4a^2]}, \quad -\infty < y < \infty.$$

Considerăm acum cazul când  $g$  nu este strict monotonă. În figura următoare, pentru  $y < y_1$  și  $y > y_2$ , ecuația  $g(x) = y$  are soluție unică și relația (6.8) poate fi folosită pentru a determina densitatea lui  $Y$  în aceste intervale.



Pentru  $y_1 \leq y \leq y_2$ , trebuie să plecăm de la început și considerăm  $F_Y(y) = P(Y \leq y)$ . Regiunea definită de  $Y \leq y$  în  $R_Y$  acoperă porțiunile îngroșate ale curbei  $y = g(x)$ , după cum este arătat în figură. Astfel,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X \leq g_1^{-1}(y)) + P(g_2^{-1}(y) < X \leq g_3^{-1}(y)) = \\ &= P(X \leq g_1^{-1}(y)) + P(X \leq g_3^{-1}(y)) - P(X \leq g_2^{-1}(y)) = \\ &= F_X(g_1^{-1}(y)) + F_X(g_3^{-1}(y)) - F_X(g_2^{-1}(y)), \quad y_1 < y < y_2, \end{aligned} \quad (6.9)$$

unde  $x_1 = g_1^{-1}(y)$ ,  $x_2 = g_2^{-1}(y)$ ,  $x_3 = g_3^{-1}(y)$  sunt rădăcinile ecuației  $g(x) = y$  în termeni de  $y$ .

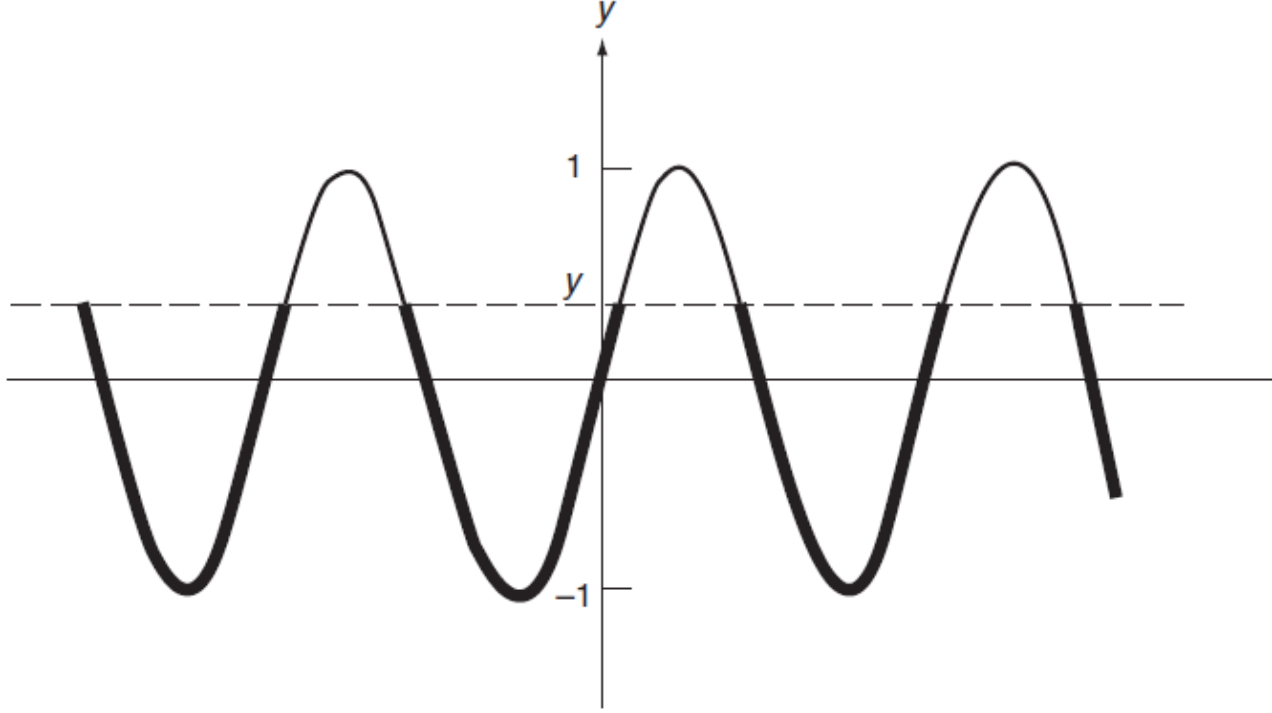
Ca mai sus, relația între densitățile lui  $X$  și  $Y$  e găsită derivând în relația (6.9) în raport cu  $y$ :

$$f_Y(y) = f_X(g_1^{-1}(y)) \frac{dg_1^{-1}(y)}{dy} + f_X(g_3^{-1}(y)) \frac{dg_3^{-1}(y)}{dy} - f_X(g_2^{-1}(y)) \frac{dg_2^{-1}(y)}{dy}, \quad y_1 < y < y_2. \quad (6.10)$$

Deoarece derivata  $\frac{dg_2^{-1}(y)}{dy}$  e negativă în timp ce celelalte sunt pozitive, relația (6.10) ia forma

$$f_Y(y) = \sum_{j=1}^3 f_X(g_j^{-1}(y)) \left| \frac{dg_j^{-1}(y)}{dy} \right|, \quad y_1 < y < y_2. \quad (6.11)$$

Figura următoare reprezintă transformarea  $y = \sin x$ ; această ecuație are o infinitate numărabilă de rădăcini,  $x_1 = g_1^{-1}(y)$ ,  $x_2 = g_2^{-1}(y)$ , ...  $\forall y \in [-1, 1]$ .



Urmând procedura de mai sus se poate stabili pentru  $F_Y(y)$  o relație similară cu (6.9) (dar cu o infinitate de termeni) și, precum în relația (6.11), densitatea lui  $Y$  are acum forma

$$f_Y(y) = \sum_{j=1}^{\infty} f_X(g_j^{-1}(y)) \left| \frac{dg_j^{-1}(y)}{dy} \right|, \quad -1 < y < 1. \quad (6.12)$$

Se observă că  $f_Y(y) = 0$  pentru  $y \notin [-1, 1]$ , deoarece  $F_Y(y) = 0$ ,  $\forall y \leq -1$  și  $F_Y(y) = 1$ ,  $\forall y \geq 1$ .

Relațiile (6.11) și (6.12) conduc la următorul rezultat:

**Teorema 6.2.** Fie  $X$  o variabilă aleatoare continuă și  $Y = g(X)$ , unde  $g$  este continuă, și  $g(x) = y$  are un număr cel mult numărabil de rădăcini  $x_1 = g_1^{-1}(y)$ ,  $x_2 = g_2^{-1}(y)$ , .... Atunci:

$$f_Y(y) = \sum_{j=1}^r f_X(g_j^{-1}(y)) \left| \frac{dg_j^{-1}(y)}{dy} \right|, \quad (6.13)$$

unde  $r$  este numărul de rădăcini ale ecuației  $g(x) = y$ .



Relația (6.8) este conținută în această teoremă ca un caz special ( $r = 1$ ).

**Exemplul 6.4.** Determinați densitatea lui  $Y = X^2$ , unde  $X \sim N(0, 1)$ .

Avem

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

$Y \geq 0 \implies F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\emptyset) = 0, \forall y < 0 \implies f_Y(y) = F'_Y(y) = 0, \forall y < 0$ . Pentru  $y > 0$ , rădăcinile lui  $x^2 = y$  sunt

$$x_{1,2} = g_{1,2}^{-1}(y) = \pm\sqrt{y}.$$

De aici, folosind relația (6.13),

$$f_Y(y) = \sum_{j=1}^2 f_X(g_j^{-1}(y)) \left| \frac{dg_j^{-1}(y)}{dy} \right| = f_X(\sqrt{y}) \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + f_X(-\sqrt{y}) \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}},$$

deci

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}, & \text{pentru } y > 0, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Am obținut repartiția  $\chi^2$  cu un grad de libertate (vezi relația (5.24)), deoarece

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} du \stackrel{u=\frac{x^2}{2}}{=} \sqrt{2} \int_0^\infty x^{-1} e^{-\frac{x^2}{2}} x dx = \sqrt{2} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\pi} = \sqrt{\pi}.$$

### 6.1.2 Momente

Fie  $Y = g(X)$  și presupunem că toate momentele dorite ale lui  $Y$  există. Momentul de ordinul  $n$  al lui  $Y$  este

$$\begin{aligned} E(Y^n) &= E(g^n(X)) = \sum g^n(x_i) p_X(x_i), \text{ dacă } X \text{ e discretă,} \\ E(Y^n) &= E(g^n(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g^n(x) f_X(x) dx, \text{ dacă } X \text{ e continuă.} \end{aligned} \quad (6.14)$$

**Exemplul 6.5.** Fie  $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ . Determinați media și dispersia lui  $Y = 2X + 1$ .

Folosim prima relație (6.14).

$$E(Y) = E(2X + 1) = \sum_i (2x_i + 1) p_X(x_i) = (-1) \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 5 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4}.$$

$$E(Y^2) = E((2X + 1)^2) = \sum_i (2x_i + 1)^2 p_X(x_i) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 9 \cdot \frac{1}{8} + 25 \cdot \frac{1}{8} =$$

5.

$$\sigma_Y^2 = E(Y^2) - E^2(Y) = 5 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{71}{16}.$$

## 6.2 Funcții de două sau mai multe variabile aleatoare

Considerăm transformarea

$$Y = g(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad (6.15)$$

unde  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sunt variabile aleatoare a căror repartiție comună se cunoaște. Vrem să determinăm repartiția lui  $Y$ .

Fie  $\mathbf{X}$  vectorul aleator  $n$ -dimensional cu componentele  $X_1, X_2, \dots, X_n$  și  $\mathbf{x}$  vectorul  $n$ -dimensional cu componentele  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Dacă  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sunt discrete cu masa comună  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ , atunci masa lui  $Y$  este

$$p_Y(y) = \sum_{\mathbf{x} \in g^{-1}(y)} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}), \quad \forall y \in R_Y,$$

unde  $g^{-1}(y) = \{\mathbf{x} \in R_{\mathbf{X}} | g(\mathbf{x}) = y\}$ , iar  $R_{\mathbf{X}}$  este mulțimea valorilor lui  $\mathbf{X}$ .

Presupunem acum că  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sunt continue și cunoaștem densitatea comună  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  sau funcția de repartiție comună  $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ . Avem

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(\mathbf{X}) \leq y) = F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) \leq y). \quad (6.16)$$

Ultima expresie din relația (6.16) reprezintă funcția de repartiție comună a lui  $\mathbf{X}$  pentru care argumentul  $\mathbf{x}$  satisface  $g(\mathbf{x}) \leq y$ . În termeni de  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  este dată de

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) \leq y) = \int \cdots \int_{(R^n : g(\mathbf{x}) \leq y)} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (6.17)$$

unde  $R^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | g(\mathbf{x}) \leq y\}$ .  $F_Y(y)$  poate fi determinată evaluând integrala din relația (6.17).

### 6.2.1 Sume de variabile aleatoare

Considerăm suma

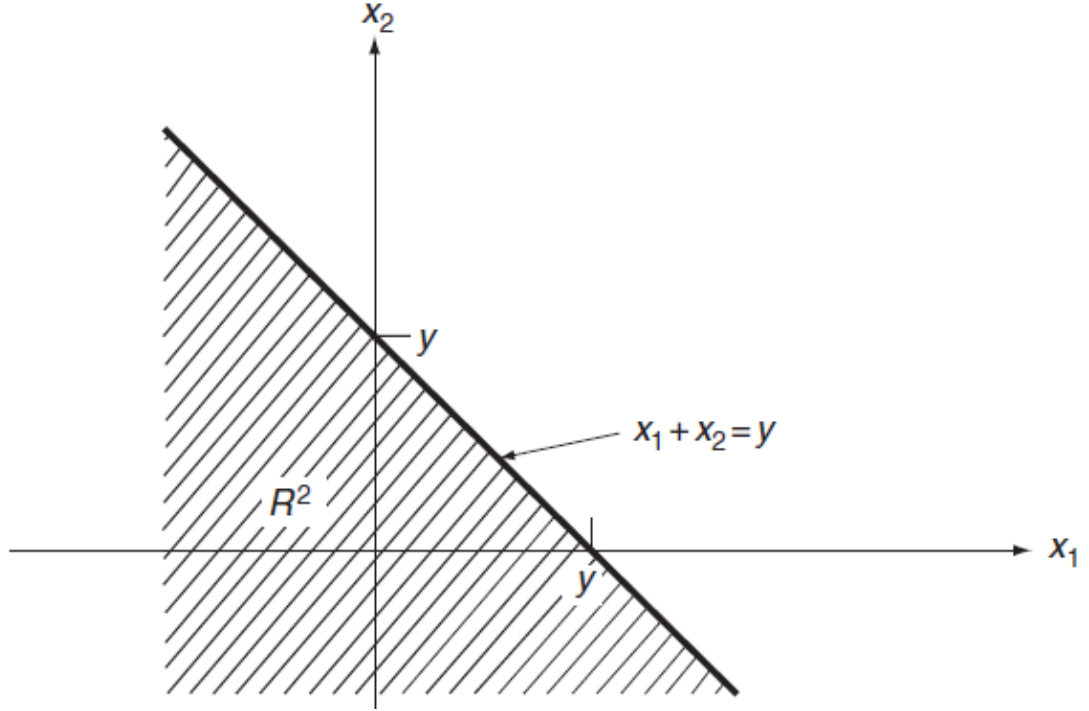
$$Y = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

E suficient să determinăm  $f_Y(y)$  pentru  $n = 2$ . Rezultatul pentru acest caz poate fi apoi aplicat succesiv pentru a da repartiția sumei oricărui număr de variabile aleatoare. Pentru  $Y = X_1 + X_2$ , relațiile (6.16) și (6.17) dau

$$F_Y(y) = \iint_{(R^2 : x_1 + x_2 \leq y)} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

și, după cum se observă din figura următoare, în care este reprezentată  $R^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | x_1 + x_2 \leq y\}$ , avem

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{y-x_2} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (6.18)$$



Derivând în relația (6.18) în raport cu  $y$ , obținem

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 X_2}(y - x_2, x_2) dx_2. \quad (6.19)$$

Când  $X_1$  și  $X_2$  sunt independente, relația (6.19) devine

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y - x_2) f_{X_2}(x_2) dx_2. \quad (6.20)$$

Integrala din relația (6.20) se numește *convoluția* funcțiilor  $f_{X_1}(x_1)$  și  $f_{X_2}(x_2)$ .

**Teorema 6.3.** Fie  $X_1$  și  $X_2$  variabile aleatoare continue independente și  $Y = X_1 + X_2$ . Atunci densitatea lui  $Y$  este convoluția densităților lui  $X_1$  și  $X_2$ , adică

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y - x_2) f_{X_2}(x_2) dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_2}(y - x_1) f_{X_1}(x_1) dx_1. \quad (6.21)$$

### 6.3 $m$ funcții de $n$ variabile aleatoare

Fie

$$Y_j = g_j(X_1, \dots, X_n), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad m \leq n. \quad (6.22)$$

Vrem să obținem repartiția comună a variabilelor aleatoare  $Y_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , știind repartiția comună a variabilelor aleatoare  $X_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Dacă  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sunt discrete cu masa comună  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ , atunci masa comună a variabilelor aleatoare  $Y_1, \dots, Y_m$  este

$$p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{y})} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{y} \in R_{\mathbf{Y}},$$

unde  $\mathbf{g}$  are componentele  $g_1, g_2, \dots, g_m$ ,  $\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \in R_{\mathbf{X}} | \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\}$ , iar  $R_{\mathbf{X}}$  și  $R_{\mathbf{Y}}$  sunt mulțimile valorilor lui  $\mathbf{X}$ , respectiv  $\mathbf{Y}$ .

Presupunem acum că  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sunt continue.

Considerăm mai întâi cazul  $m = n$ .

Fie  $\mathbf{X}$  și  $\mathbf{Y}$  vectori aleatori  $n$ -dimensionali cu componentele  $X_1, \dots, X_n$ , respectiv  $Y_1, \dots, Y_n$ . Relația (6.22) se scrie vectorial

$$\mathbf{Y} = \mathbf{g}(\mathbf{X}), \quad (6.23)$$

unde  $\mathbf{g}(\mathbf{X})$  are componentele  $g_1(\mathbf{X}), g_2(\mathbf{X}), \dots, g_n(\mathbf{X})$ . Considerăm întâi cazul în care funcțiile  $g_j$  din  $\mathbf{g}$  sunt continue în raport cu fiecare argument, au derivate parțiale continue și sunt bijective. Atunci rezultă că funcțiile inverse  $g_j^{-1}$  din  $\mathbf{g}^{-1}$  definite de

$$\mathbf{X} = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{Y}),$$

există și sunt unice. Au de asemenea derivate parțiale continue.

Pentru a determina  $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$  în termeni de  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ , observăm că, dacă o regiune închisă  $R_{\mathbf{X}}^n$  din mulțimea valorilor lui  $\mathbf{X}$  este dusă într-o regiune închisă  $R_{\mathbf{Y}}^n$  din mulțimea valorilor lui  $\mathbf{Y}$  prin transformarea  $\mathbf{g}$ , conservarea probabilității dă

$$\int \cdots \int_{R_{\mathbf{Y}}^n} f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int \cdots \int_{R_{\mathbf{X}}^n} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (6.24)$$

unde integralele reprezintă  $n$  integrale în raport cu componentele lui  $\mathbf{x}$ , respectiv  $\mathbf{y}$ . Urmând regula uzuală de schimbare de variabile în integrale multiple, putem scrie

$$\int \cdots \int_{R_{\mathbf{X}}^n} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \cdots \int_{R_{\mathbf{Y}}^n} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{y})) |J| d\mathbf{y}, \quad (6.25)$$

unde  $J$  este Jacobianul transformării, definit ca determinantul

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n^{-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial g_n^{-1}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_n^{-1}}{\partial y_n} \end{vmatrix}. \quad (6.26)$$

Relațiile (6.24) și (6.25) conduc la următorul rezultat.

**Teorema 6.4.** Pentru transformarea dată de relația (6.23), unde  $\mathbf{X}$  este un vector aleator continuu și  $\mathbf{g}$  este continuă cu derivate parțiale continue și bijectivă, densitatea comună a lui  $\mathbf{Y}$  este

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{y})) |J|, \quad (6.27)$$

unde  $J$  este definit de relația (6.26).

**Exemplul 6.6.** Fie  $X_1$  și  $X_2$  variabile aleatoare independente identic repartizate  $N(0, 1)$ . Să se determine densitatea comună a lui  $Y_1 = X_1 + X_2$  și  $Y_2 = X_1 - X_2$ .

Deoarece sistemul  $\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_1 - x_2 = y_2 \end{cases}$  are soluția unică

$$x_1 = g_1^{-1}(y) = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad x_2 = g_2^{-1}(y) = \frac{y_1 - y_2}{2},$$

$\mathbf{g}$  este bijectivă și se poate aplica teorema 6.4. Jacobianul este

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial y_2} \\ \frac{\partial g_2^{-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2^{-1}}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Datorită independenței, relația (6.27) conduce la

$$f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1}(g_1^{-1}(y)) f_{X_2}(g_2^{-1}(y)) |J| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2}{2} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{\left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right)^2}{2} \right] \cdot \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{4\pi} \exp \left[ -\frac{(y_1 + y_2)^2}{8} \right] \exp \left[ -\frac{(y_1 - y_2)^2}{8} \right] = \frac{1}{4\pi} \exp \left( -\frac{y_1^2 + y_2^2}{4} \right), \quad y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

Observăm că rezultatul poate fi scris sub forma

$$f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2) = f_{Y_1}(y_1) f_{Y_2}(y_2),$$

unde

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp \left( -\frac{y_1^2}{4} \right), \quad y_1 \in \mathbb{R},$$

$$f_{Y_2}(y_2) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp \left( -\frac{y_2^2}{4} \right), \quad y_2 \in \mathbb{R},$$

implicând că, deși  $Y_1$  și  $Y_2$  sunt ambele funcții de  $X_1$  și  $X_2$ , ele sunt independente și identic repartizate  $N(0, 2)$ .

Relația (6.27) este o extindere a relației (6.8), care este pentru cazul special  $n = 1$ . Similar, o extindere este de asemenea posibilă pentru relația (6.13) pentru cazul  $n = 1$  când ecuația are mai mult de o rădăcină.

**Teorema 6.5.** În transformarea dată de relația (6.23), presupunem că ecuația  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$  are un număr cel mult numărabil de rădăcini  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{g}_1^{-1}(\mathbf{y})$ ,  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{g}_2^{-1}(\mathbf{y})$ , .... Atunci

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^r f_{\mathbf{X}}(\mathbf{g}_j^{-1}(\mathbf{y})) |J_j|, \quad (6.28)$$

unde  $r$  este numărul de rădăcini ale ecuației  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$  și

$$J_j = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_{j1}^{-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial g_{j1}^{-1}}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_{j1}^{-1}}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_{jn}^{-1}}{\partial y_1} & \frac{\partial g_{jn}^{-1}}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_{jn}^{-1}}{\partial y_n} \end{vmatrix}.$$

Aici  $g_{j1}^{-1}, g_{j2}^{-1}, \dots, g_{jn}^{-1}$  sunt componentele lui  $\mathbf{g}_j^{-1}$ .

Rezultatele prezentate mai sus pot fi de asemenea aplicate în cazul când dimensiunea lui  $\mathbf{Y}$  este mai mică decât cea a lui  $\mathbf{X}$ . Considerăm transformarea (6.22) în care  $m < n$ . Pentru a folosi formulele de mai sus, întâi completăm vectorul aleator  $m$ -dimensional  $\mathbf{Y}$  cu un alt vector aleator  $(n - m)$ -dimensional  $\mathbf{Z}$ . Vectorul  $\mathbf{Z}$  poate fi construit ca o funcție simplă de  $\mathbf{X}$ , în forma

$$\mathbf{Z} = \mathbf{h}(\mathbf{X}), \quad (6.29)$$

unde  $\mathbf{h}$  este continuă și are derivate parțiale continue. Combinând relațiile (6.22) și (6.29), avem o transformare de la  $n$  variabile aleatoare la  $n$  variabile aleatoare, și densitatea comună a lui  $\mathbf{Y}$  și  $\mathbf{Z}$  poate fi obținută cu relația (6.27) sau relația (6.28). Densitatea comună a lui  $\mathbf{Y}$  singur se găsește apoi prin integrare în raport cu componentele lui  $\mathbf{Z}$ .

## Part II

# Statistică

## 7 Statistică descriptivă pentru date unidimensionale (reprezentări grafice, funcție de repartiție de selecție, momente de selecție)

### 7.1 Histograme și diagrame de frecvențe

Fiind dat un set de observații independente  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , ale unei variabile aleatoare  $X$ , un prim pas util este organizarea și prezentarea lor adecvată astfel încât ele să poată fi ușor interpretate și evaluate. Când există un număr mare de date observate, o *histogramă* este o reprezentare grafică excelentă a datelor, facilitând

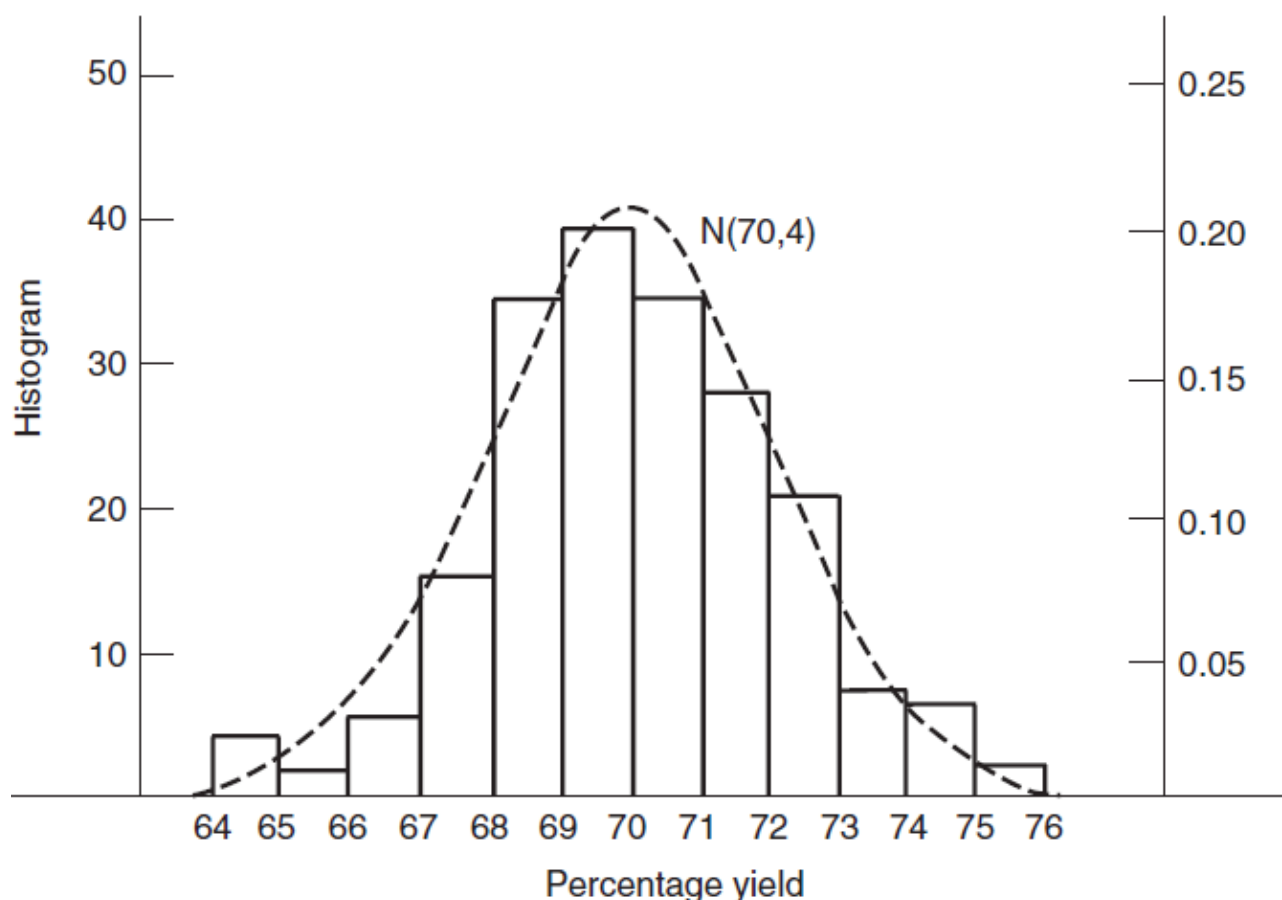
- a) o evaluare a adecvării modelului presupus,
- b) estimarea percentilelor repartiției,
- c) estimarea parametrilor repartiției.

Considerăm, de exemplu, un proces chimic care este producerea de loturi (batches) dintr-un material; 200 de valori observate ale randamentului procentual (percentage yield),  $X$ , reprezentând un eșantion relativ mare sunt date în tabelul următor.

Batch no.	Yield (%)	Batch no.	Yield (%)	Batch no.	Yield (%)	Batch no.	Yield (%)	Batch no.	Yield (%)
1	68.4	41	68.7	81	68.5	121	73.3	161	70.5
2	69.1	42	69.1	82	71.4	122	75.8	162	68.8
3	71.0	43	69.3	83	68.9	123	70.4	163	72.9
4	69.3	44	69.4	84	67.6	124	69.0	164	69.0
5	72.9	45	71.1	85	72.2	125	72.2	165	68.1
6	72.5	46	69.4	86	69.0	126	69.8	166	67.7
7	71.1	47	75.6	87	69.4	127	68.3	167	67.1
8	68.6	48	70.1	88	73.0	128	68.4	168	68.1
9	70.6	49	69.0	89	71.9	129	70.0	169	71.7
10	70.9	50	71.8	90	70.7	130	70.9	170	69.0
11	68.7	51	70.1	91	67.0	131	72.6	171	72.0
12	69.5	52	64.7	92	71.1	132	70.1	172	71.5
13	72.6	53	68.2	93	71.8	133	68.9	173	74.9
14	70.5	54	71.3	94	67.3	134	64.6	174	78.7
15	68.5	55	71.6	95	71.9	135	72.5	175	69.0
16	71.0	56	70.1	96	70.3	136	73.5	176	70.8
17	74.4	57	71.8	97	70.0	137	68.6	177	70.0
18	68.8	58	72.5	98	70.3	138	68.6	178	70.3
19	72.4	59	71.1	99	72.9	139	64.7	179	67.5
20	69.2	60	67.1	100	68.5	140	65.9	180	71.7
21	69.5	61	70.6	101	69.8	141	69.3	181	74.0
22	69.8	62	68.0	102	67.9	142	70.3	182	67.6
23	70.3	63	69.1	103	69.8	143	70.7	183	71.1
24	69.0	64	71.7	104	66.5	144	65.7	184	64.6
25	66.4	65	72.2	105	67.5	145	71.1	185	74.0
26	72.3	66	69.7	106	71.0	146	70.4	186	67.9
27	74.4	67	68.3	107	72.8	147	69.2	187	68.5
28	69.2	68	68.7	108	68.1	148	73.7	188	73.4
29	71.0	69	73.1	109	73.6	149	68.5	189	70.4
30	66.5	70	69.0	110	68.0	150	68.5	190	70.7
31	69.2	71	69.8	111	69.6	151	70.7	191	71.6
32	69.0	72	69.6	112	70.6	152	72.3	192	66.9
33	69.4	73	70.2	113	70.0	153	71.4	193	72.6
34	71.5	74	68.4	114	68.5	154	69.2	194	72.2
35	68.0	75	68.7	115	68.0	155	73.9	195	69.1
36	68.2	76	72.0	116	70.0	156	70.2	196	71.3
37	71.1	77	71.9	117	69.2	157	69.6	197	67.9
38	72.0	78	74.1	118	70.3	158	71.6	198	66.1
39	68.3	79	69.3	119	67.2	159	69.7	199	70.8
40	70.6	80	69.0	120	70.7	160	71.2	200	69.5

Valorile eșantionului variază de la 64 la 76. Împărțind acest interval în 12 intervale egale și reprezentând numărul total de randamente observate în fiecare interval ca înălțimea dreptunghiului de deasupra intervalului rezultă histograma după cum e arătat în figura următoare.

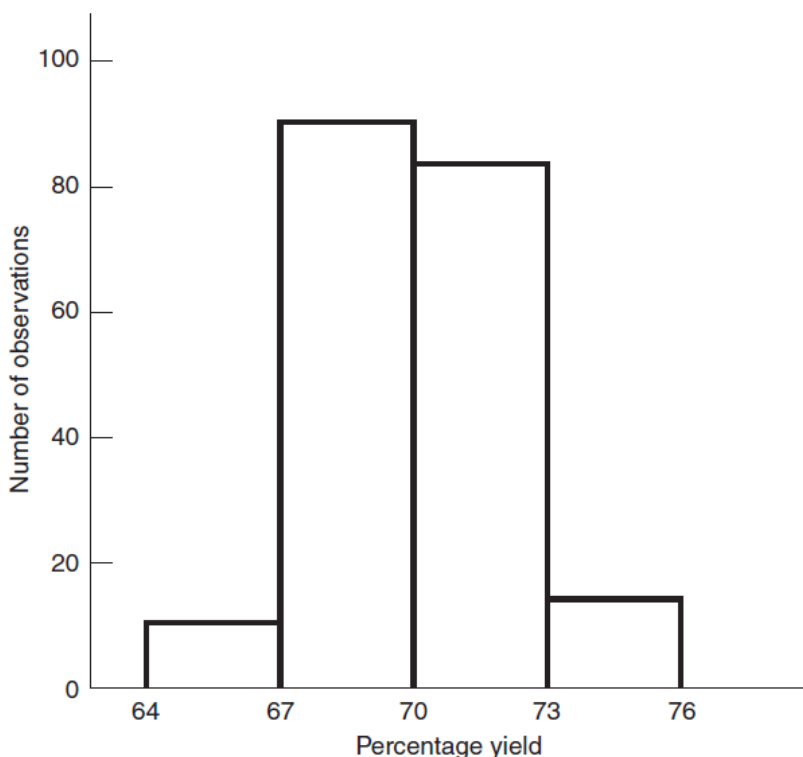




O *diagramă de frecvențe* este obținută dacă ordonata histogramei este împărțită la numărul total de observații, 200 în acest caz, și la lățimea intervalului  $\Delta$  (care se întâmplă să fie 1 în acest exemplu). În dreapta figurii este reprezentată ordonata diagramei de frecvențe. Vedem că histograma sau diagrama frecvențelor dă o impresie imediată asupra valorilor, frecvenței relative și împrăstierii asociate datelor.

Diagrama frecvențelor din figură are proprietățile unei densități (suma ariilor dreptunghiurilor este 1). De aici pot fi estimate probabilitățile asociate cu diverse evenimente. De exemplu, probabilitatea unui lot având randament mai mic decât 68% poate fi calculată din diagrama frecvențelor adunând ariile de la stânga lui 68% și obținând 0,13 ( $0,02 + 0,01 + 0,025 + 0,075$ ). Similar, probabilitatea unui lot având un randament mai mare de 72% este 0,18 ( $0,105 + 0,035 + 0,03 + 0,01$ ). Acestea sunt probabilități calculate pe baza datelor observate. Un set diferit de date obținute din același proces chimic ar conduce în general la o diagramă de frecvențe diferită și deci la valori diferite pentru aceste probabilități. În consecință, ele sunt estimări ale probabilităților  $P(X < 68)$  și  $P(X > 72)$  asociate cu variabila aleatoare  $X$ .

Pentru acest exemplu, alegerea a 12 intervale este convenabilă datorită intervalului de valori luate de observații și faptului că rezoluția rezultată este adecvată pentru calculele de probabilități de mai sus. În figura următoare este construită o histogramă folosind 4 intervale în loc de 12 pentru același exemplu.



Se observă că proiectează o impresie vizuală mult diferită și cu o mai mică acuratețe a comportamentului datelor. Astfel, e important să fie ales numărul de intervale în concordanță cu informația care se vrea extrasă din modelul matematic. Ca un ghid practic, Sturges a sugerat în 1926 ca o valoare aproximativă pentru numărul de intervale  $k$  să fie dată de

$$k \simeq 1 + 3,3 \lg n,$$

unde  $n$  este numărul de date.

Din punctul de vedere al modelării, este rezonabil să alegem o repartiție normală ca model probabilistic pentru randamentul procentual  $X$  observând că variațiile aleatoare ale ei sunt rezultanta a numeroase surse aleatoare independente în procesul chimic de fabricare. Dacă aceasta este sau nu o alegere rezonabilă poate fi evaluat într-un mod subiectiv folosind diagrama frecvențelor din figura alăturată. Densitatea repartiției normale de medie 70 și dispersie 4 este trasată punctat pe diagrama frecvențelor, arătând o potrivire rezonabilă. Bazându-ne pe această repartiție normală, putem calcula probabilitățile de mai

sus, dând o altă evaluare a adecvării modelului. De exemplu, cu ajutorul tabelului valorilor repartiției  $N(0, 1)$ ,

$$P(X < 68) = F_U\left(\frac{68-70}{2}\right) = F_U(-1) = 1 - F_U(1) = 1 - 0,8413 = 0,1587,$$

care se compară cu 0,13 obținută folosind diagrama frecvențelor.

În cele de mai sus, alegerile lui 70 și 4 ca estimări pentru media, respectiv dispersia lui  $X$ , sunt făcute observând că media repartiției ar trebui să fie aproape de media aritmetică a selecției, adică

$$m_X \simeq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j,$$

și dispersia poate fi aproximată prin

$$\sigma_X^2 \simeq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - m_X)^2.$$

În cazul unei variabile aleatoare discrete, histograma și diagrama de frecvențe obținute din datele observate iau forma unei reprezentări în batoane, spre deosebire de dreptunghiurile conectate din cazul continuu. Considerăm, de exemplu, repartiția numărului de accidente pe șofer de-a lungul unei perioade de timp de 6 ani în California. Datele din tabelul următor sunt înregistrările accidentelor pe 6 ani ale 7842 de șoferi californieni.

Number of accidents	Number of drivers
0	5147
1	1859
2	595
3	167
4	54
5	14
> 5	<u>6</u>
	Total = 7842

Bazată pe acest set de observații, histograma are forma dată în figura următoare.

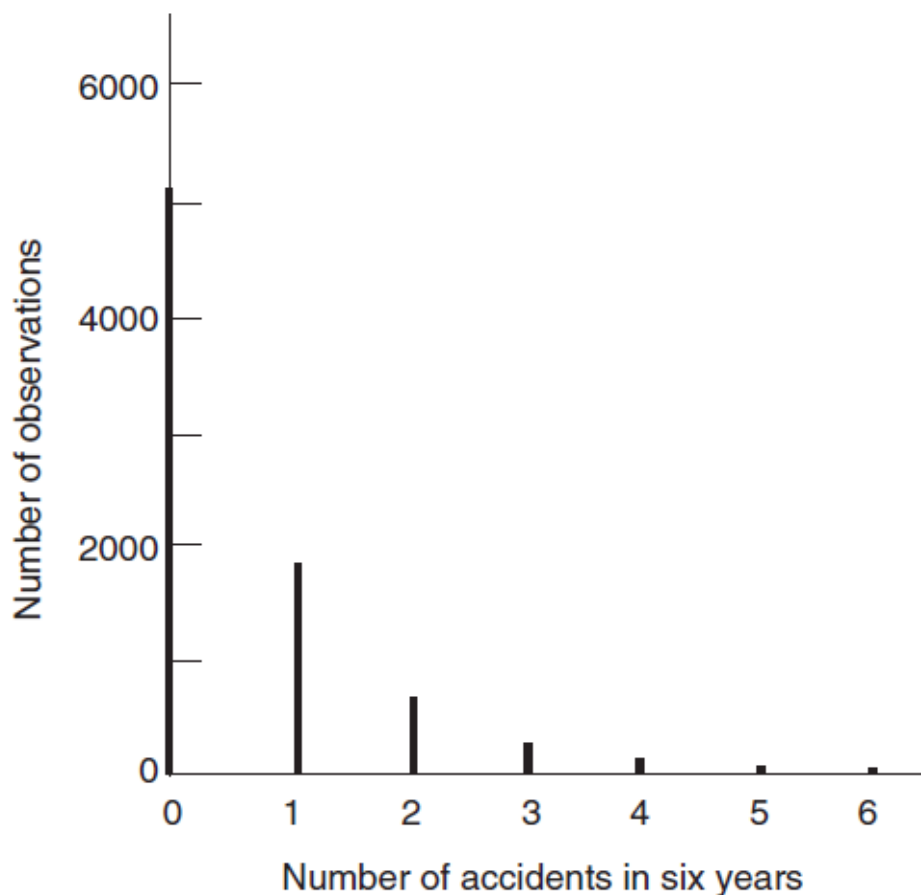


Diagrama frecvențelor este obținută în acest caz prin împărțirea ordonatei histogramei la numărul total de observații, care este 7842.

## 7.2 Selecții și statistici

În cele mai multe cazuri este imposibil sau nerealist să se observe întreaga populație. Unele populații au membri care încă nu există (de exemplu, loturile viitoare din producția de ciment), sau populația este prea mare (de exemplu, toate femeile însărcinate). De aceea cercetătorii măsoară doar o parte a populației țintă, numită selecție sau eșantion. Dacă facem deducții despre populație folosind informația obținută dintr-o selecție, atunci este important ca selecția să fie reprezentativă pentru populație, ceea ce poate fi atins dacă toate selecțiile posibile sunt egal probabil să fie alese.

Uneori scopul statisticii este utilizarea selecției pentru a estima sau a face unele afirmații despre un parametru al populației. Un *parametru* este o măsură descriptivă pentru o populație sau pentru o repartiție a variabilelor aleatoare.

De exemplu, parametrii populației care pot fi de interes includ media, deviația standard, cuantile, proporții, coeficienți de corelație, etc.

Presupunem că un model probabilistic, reprezentat de densitatea  $f(x)$ , a fost ales pentru un fenomen fizic sau natural pentru care parametrii  $\theta_1, \theta_2, \dots$  trebuie estimați din datele observate independente  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Considerăm pentru moment un singur parametru  $\theta$  pentru simplitate și scriem  $f(x; \theta)$  pentru o densitate specificată unde  $\theta$  este parametrul necunoscut care trebuie estimat. Problema estimării parametrului este atunci una de determinări a unei funcții corespunzătoare de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , să spunem  $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , care dă "cea mai bună" estimare a lui  $\theta$ .

Fiind dat un set de date independente  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , fie

$$\hat{\theta} = h(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

o estimare a parametrului  $\theta$ . Dacă experimentul care a dat setul de date s-ar repeta, am obține valori diferite pentru  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Funcția  $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$  aplicată la noul set de date ar da o valoare diferită pentru  $\hat{\theta}$ . Vedem astfel că estimarea  $\hat{\theta}$  este ea însăși o variabilă aleatoare având o densitate, care depinde atât de forma funcției  $h$  cât și de densitatea variabilei aleatoare  $X$ . Reprezentarea corespunzătoare a lui  $\hat{\theta}$  e astfel

$$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad (7.1)$$

unde  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sunt variabile aleatoare reprezentând o *selecție* din variabila aleatoare  $X$ , care este numită în acest context *populație*.

Presupunem că selecția  $X_1, X_2, \dots, X_n$  are următoarele proprietăți:

Proprietatea 1:  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sunt independente.

Proprietatea 2:  $f_{X_j}(x) = f_X(x)$ ,  $\forall x, j = 1, 2, \dots, n$ .

Variabilele aleatoare  $X_1, X_2, \dots, X_n$  satisfăcând aceste condiții se numesc o *selecție aleatoare* de mărime  $n$ . Cuvântul "aleatoare" din această definiție este de obicei omis pentru scurtime. Dacă  $X$  este o variabilă aleatoare discretă cu masa  $p_X(x)$ , atunci  $p_{X_j}(x) = p_X(x)$ ,  $\forall j$ .

Un set specific de valori observate  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  este un set de *valori ale selecției*.

Datorită proprietăților 1 și 2, densitatea comună este dată de

$$f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_X(x_1) f_X(x_2) \dots f_X(x_n).$$

O *statistică* este o funcție de o selecție dată  $X_1, X_2, \dots, X_n$  care nu depinde de parametrul necunoscut. Funcția  $h(X_1, X_2, \dots, X_n)$  din (7.1) este o statistică pentru care valoarea poate fi determinată odată ce valorile selecției au fost observate. O statistică, fiind o funcție de variabile aleatoare, este o variabilă aleatoare. Adesea o statistică este folosită pentru următoarele scopuri

- ca o estimare punctuală pentru un parametru al populației,
- pentru a obține o estimare a intervalului de încredere pentru un parametru, sau,
- ca un test statistic în testarea ipotezelor.

### 7.2.1 Media de selecție

Statistica

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

e numită *media de selecție* a populației  $X$ . Fie media și dispersia populației

$$\begin{aligned} E(X) &= m, \\ var(X) &= \sigma^2. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Media mediei de selecție  $\bar{X}$  este

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n}(nm) = m.$$

Dispersia mediei de selecție  $\bar{X}$  este

$$\begin{aligned} var(\bar{X}) &= E((\bar{X} - m)^2) = E\left(\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)\right]^2\right) = \\ &= \frac{1}{n^2} E\left(\left[\sum_{i=1}^n (X_i - m)\right]^2\right) = \\ &= \frac{1}{n^2} E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - m)(X_j - m)\right) = \\ &= \frac{1}{n^2} \left[ \sum_{i=1}^n E((X_i - m)^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} E((X_i - m)(X_j - m)) \right] = \\ &= \frac{1}{n^2} \left[ \sum_{i=1}^n \sigma^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} E((X_i - m)(X_j - m)) \right] \stackrel{\text{independență}}{=} \\ &= \frac{1}{n^2} \left[ \underbrace{\sum_{i=1}^n \sigma^2}_{=n\sigma^2} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \underbrace{E((X_i - m))}_{=0} \underbrace{E((X_j - m))}_{=0} \right] = \frac{1}{n^2} (n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}, \end{aligned}$$

deci

$$var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n},$$

care este invers proporțională cu mărimea selecției  $n$ . Când  $n$  crește, dispersia lui  $\bar{X}$  descrește și repartiția lui  $\bar{X}$  devine ascuțită cu vârful în  $E(\bar{X}) = m$ . De aici, este clar intuitiv că statistica  $\bar{X}$  dă o bună procedură de estimare a mediei populației  $m$ .

Deoarece  $\bar{X}$  este o sumă de variabile aleatoare independente, pe baza teoremei limită centrală, media de selecție  $\bar{X}$  tinde la o repartiție normală când

$n \rightarrow \infty$ . Mai precis, variabila aleatoare  $(\bar{X} - m) \left( \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)^{-1}$  tinde la  $N(0, 1)$  când  $n \rightarrow \infty$ .

### 7.2.2 Dispersia de selecție

Statistica

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (7.3)$$

se numește *dispersia de selecție* a populației  $X$ .

(7.3)  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(X_i - m) - (\bar{X} - m)]^2 = \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left[ (X_i - m) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - m) \right]^2 = \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left\{ (X_i - m)^2 - \frac{2}{n} (X_i - m) \sum_{j=1}^n (X_j - m) + \frac{1}{n^2} \left[ \sum_{j=1}^n (X_j - m) \right]^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 - \frac{2}{n} \left[ \sum_{i=1}^n (X_i - m) \right] \sum_{j=1}^n (X_j - m) + \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^n (X_i - m) \right]^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 - \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^n (X_i - m) \right]^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 - \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - m)(X_j - m) \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - m)(X_j - m). \end{aligned}$$

De aici, media lui  $S^2$  este

$$\begin{aligned} E(S^2) &= \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E((X_i - m)^2) - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} E((X_i - m)(X_j - m)) \stackrel{\text{independență}}{=} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{E((X_i - m)^2)}_{=\sigma^2} - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \underbrace{E(X_i - m)E(X_j - m)}_{=0} = \sigma^2. \end{aligned}$$

Deci

$$E(S^2) = \sigma^2,$$

unde  $m$  și  $\sigma^2$  sunt definite de (7.2). Motivul folosirii lui  $\frac{1}{n-1}$  în loc de  $\frac{1}{n}$  în (7.3) este de a face media lui  $S^2$  egală cu  $\sigma^2$ . Aceasta este o proprietate de dorit pentru  $S^2$  dacă aceasta este folosită la estimarea lui  $\sigma^2$ , adevărata dispersie a lui  $X$ .

Dispersia lui  $S^2$  este aflată din

$$\text{var}(S^2) = E\left((S^2 - \sigma^2)^2\right).$$

Se obține

$$\text{var}(S^2) = \frac{1}{n} \left( \mu_4 - \frac{n-3}{n-1} \sigma^4 \right),$$

unde  $\mu_4$  este momentul centrat de ordinul 4 al lui  $X$ , adică

$$\mu_4 = E\left((X - m)^4\right).$$

**Teorema 7.1.** Dacă  $S^2$  este dispersia de selecție de mărime  $n$  a unei populații  $X \sim N(m, \sigma^2)$ , atunci  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$  are o repartiție  $\chi^2$  cu  $(n-1)$  grade de libertate.

### 7.2.3 Momente de selecție

Momentul de selecție de ordinul  $k$  este

$$M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k.$$

Observăm că media de selecție se obține pentru  $k = 1$ .

Se poate arăta că

$$\begin{aligned} E(M_k) &= \alpha_k, \\ \text{var}(M_k) &= \frac{1}{n} (\alpha_{2k} - \alpha_k^2), \end{aligned}$$

unde  $\alpha_k$  este momentul de ordinul  $k$  al lui  $X$ .

Momentul centrat de selecție de ordinul  $k$  este

$$M_k^c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k.$$

### 7.2.4 Statistici de ordine și funcția de repartiție de selecție

O selecție  $X_1, X_2, \dots, X_n$  poate fi pusă în ordine crescătoare. Astfel, pentru această selecție, statisticile de ordine sunt definite ca

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)},$$

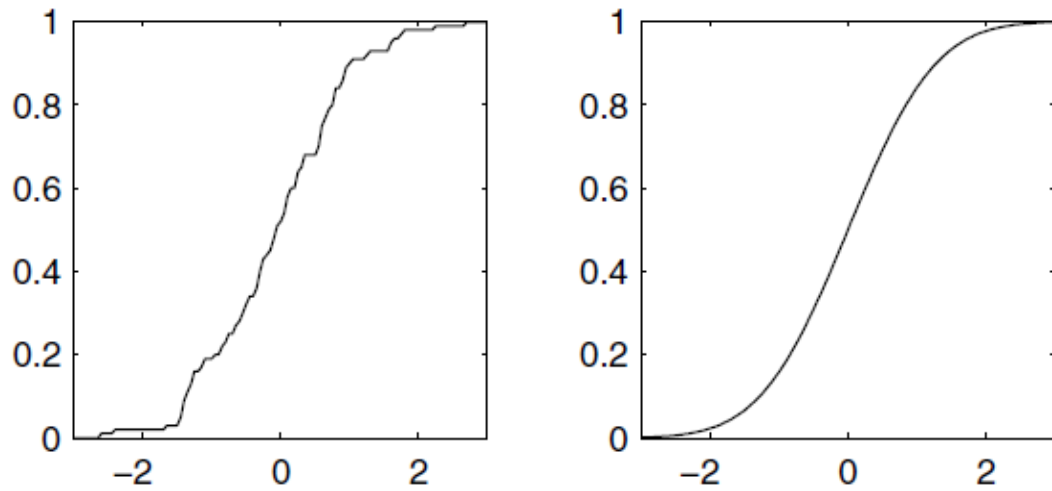
cu  $X_{(i)}$  fiind a  $i$ -a statistică de ordine.

Funcția de repartiție de selecție  $\hat{F}_n(x)$  este definită ca numărul de date mai mic sau egal cu  $x$  împărțit la mărimea selecției  $n$ . Ea poate fi exprimată în termeni de statistici de ordine astfel:



$$\hat{F}_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < X_{(1)}, \\ \frac{j}{n}, & \text{dacă } X_{(j)} \leq x < X_{(j+1)}, \\ 1, & \text{dacă } x \geq X_{(n)}. \end{cases}$$

Funcția de repartiție de selecție estimează neparametric funcția de repartiție a populației  $X$ . În figura următoare sunt reprezentate o funcție de repartiție de selecție și funcția de repartiție pentru normala standard.



## 8 Estimarea parametrilor unor repartiții prin metoda verosimilității maxime

### 8.1 Criterii de calitate pentru estimări

Statistica

$$\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

se numește un *estimator* pentru  $\theta$ .

Odată ce am observat valorile selecției  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , estimatorul observat,

$$\hat{\theta} = h(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

are o valoare numerică și va fi numit o *estimare* a parametrului  $\theta$ .

#### 8.1.1 Nedeplasare

**Definiție.** Un estimator  $\hat{\Theta}$  se numește estimator *nedeplasat* pentru  $\theta$  dacă

$$E(\hat{\Theta}) = \theta,$$

și *deplasat* în caz contrar.

*Deplasarea* estimatorului  $\hat{\Theta}$  este definită ca

$$bias(\hat{\Theta}) = E(\hat{\Theta}) - \theta.$$

**Exemple.** 1) Media de selecție  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  este estimator nedeplasat pentru media populației  $m$  deoarece  $E(\bar{X}) = m$ .

2) Dispersia de selecție  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  este estimator nedeplasat pentru dispersia populației  $\sigma^2$  deoarece  $E(S^2) = \sigma^2$ .

3) Estimatorul  $S^{2*} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  este estimator deplasat pentru  $\sigma^2$  deoarece  $E(S^{2*}) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$ . De aceea pentru definirea dispersiei de selecție se preferă coeficientul  $\frac{1}{n-1}$  în locul alegerii mai naturale  $\frac{1}{n}$ . Deplasarea lui  $S^{2*}$  este

$$bias(S^{2*}) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 - \sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n}.$$

#### 8.1.2 Dispersie minimă

**Definiție.** Fie  $\hat{\Theta}$  un estimator nedeplasat pentru  $\theta$ . El este un estimator *nedeplasat de dispersie minimă* dacă pentru toți ceilalți estimatori nedeplasați  $\Theta^*$  pentru  $\theta$  din aceeași selecție avem

$$\text{var}(\hat{\Theta}) \leq \text{var}(\Theta^*).$$

Fiind dați 2 estimatori nedeplasați pentru un parametru dat, cel cu dispersie mai mică este preferat deoarece dispersia mai mică implică faptul că valorile observate ale estimatorului tind să fie mai aproape de media lui, valoarea adevărată a parametrului.

**Exemplu.** Am văzut că  $\bar{X}$  obținut dintr-o selecție de mărime  $n$  este un estimator nedeplasat pentru media populației  $m$ . Crește calitatea lui  $\bar{X}$  când  $n$  crește?

$E(\bar{X}) = m$  și este independentă de volumul eșantionului. Deci  $\bar{X}$  rămâne nedeplasat când  $n$  crește. Pe de altă parte

$$\text{var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n},$$

și descrește când  $n$  crește. Pe baza criteriului dispersiei minime, calitatea lui  $\bar{X}$  ca estimator pentru  $m$  crește când  $n$  crește.  $\square$

**Teorema 8.1 (inegalitatea Rao-Cramer).** Fie  $X_1, X_2, \dots, X_n$  o selecție de mărime  $n$  din o populație  $X$  cu densitatea  $f(x; \theta)$ , unde  $\theta$  este parametrul necunoscut, și fie  $\hat{\Theta} = h(X_1, X_2, \dots, X_n)$  un estimator nedeplasat pentru  $\theta$ . Atunci, dispersia lui  $\hat{\Theta}$  satisface inegalitatea

$$\text{var}(\hat{\Theta}) \geq \left( n E \left( \left[ \frac{\partial \ln f(X; \theta)}{\partial \theta} \right]^2 \right) \right)^{-1}, \quad (\text{R.C.})$$

dacă media și derivata parțială scrise există. Presupunem că se poate deriva în raport cu  $\theta$  sub integrală. Un rezultat analog se obține dacă  $X$  este discretă înlocuind  $f(X; \theta)$  cu  $p(X; \theta)$ , unde  $p(x; \theta)$  este masa populației  $X$ .

**Demonstrație.**  $\theta \stackrel{\text{nedeplasare}}{=} E(\hat{\Theta}) = E(h(X_1, X_2, \dots, X_n)) \stackrel{X_1, \dots, X_n \text{ independente}}{=}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h(x_1, \dots, x_n) f(x_1; \theta) \dots f(x_n; \theta) dx_1 \dots dx_n \stackrel{\frac{\partial}{\partial \theta}}{\longrightarrow}$$

$$1 =$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h(x_1, \dots, x_n) \left[ \sum_{j=1}^n \frac{1}{f(x_j; \theta)} \frac{\partial f(x_j; \theta)}{\partial \theta} \right] f(x_1; \theta) \dots f(x_n; \theta) dx_1 \dots dx_n = \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h(x_1, \dots, x_n) \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial \ln f(x_j; \theta)}{\partial \theta} \right] f(x_1; \theta) \dots f(x_n; \theta) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (8.1)$$

$$f(x; \theta) \text{ densitate} \Rightarrow 1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_i; \theta) dx_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \stackrel{\frac{\partial}{\partial \theta}}{\longrightarrow}$$

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x_i; \theta)}{\partial \theta} dx_i = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \ln f(x_i; \theta)}{\partial \theta} f(x_i; \theta) dx_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$\text{Fie } Y = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \ln f(X_j; \theta)}{\partial \theta} \Rightarrow$$

$$E(Y) = \sum_{j=1}^n E\left(\frac{\partial \ln f(X_j; \theta)}{\partial \theta}\right) = \sum_{j=1}^n \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \ln f(x_j; \theta)}{\partial \theta} f(x_j; \theta) dx_j}_{=0} = 0.$$

$$X_1, \dots, X_n \text{ independente} \Rightarrow \frac{\partial \ln f(X_1; \theta)}{\partial \theta}, \dots, \frac{\partial \ln f(X_n; \theta)}{\partial \theta} \text{ independente} \Rightarrow$$

$$\sigma_Y^2 = \sum_{j=1}^n \text{var}\left(\frac{\partial \ln f(X_j; \theta)}{\partial \theta}\right) =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n E\left(\left[\frac{\partial \ln f(X_j; \theta)}{\partial \theta} - \underbrace{E\left(\frac{\partial \ln f(X_j; \theta)}{\partial \theta}\right)}_{=0}\right]^2\right) = \sum_{j=1}^n E\left(\left[\frac{\partial \ln f(X_j; \theta)}{\partial \theta}\right]^2\right) \\ & = \sum_{j=1}^n E\left(\left[\frac{\partial \ln f(X; \theta)}{\partial \theta}\right]^2\right) = nE\left(\left[\frac{\partial \ln f(X; \theta)}{\partial \theta}\right]^2\right). \end{aligned}$$

$$1 \stackrel{(8.1)}{=} E(\hat{\Theta}Y) = E(\hat{\Theta}) \underbrace{E(Y)}_{=0} + \rho_{\hat{\Theta}Y} \sigma_{\hat{\Theta}} \sigma_Y = \rho_{\hat{\Theta}Y} \sigma_{\hat{\Theta}} \sigma_Y \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sigma_{\hat{\Theta}}^2 \sigma_Y^2} = \rho_{\hat{\Theta}Y}^2 \leq 1 \Rightarrow$$

$$\sigma_{\hat{\Theta}}^2 \geq \frac{1}{\sigma_Y^2} = \left(nE\left(\left[\frac{\partial \ln f(X; \theta)}{\partial \theta}\right]^2\right)\right)^{-1}. \square$$

**Definiție.** Marginea inferioară a dispersiei oricărui estimator nedeplasat dată de inegalitatea (RC) este în general o funcție de  $\theta$  și o numim *marginea inferioară Rao-Cramer*. Notăție

$$\text{MIRC} = \left(nE\left(\left[\frac{\partial \ln f(X; \theta)}{\partial \theta}\right]^2\right)\right)^{-1}.$$

$$\text{Observație. } \text{MIRC} = -\left(nE\left(\frac{\partial^2 \ln f(X; \theta)}{\partial \theta^2}\right)\right)^{-1}.$$

$$\text{Demonstrație. } f(x; \theta) \text{ densitate} \Rightarrow 1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x; \theta) dx \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial \theta}}$$

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta} f(x; \theta) dx \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial \theta}}$$

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial^2 \ln f(x; \theta)}{\partial \theta^2} f(x; \theta) + \frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta} \cdot \underbrace{\frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta}}_{= \frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta} f(x; \theta)} \right] dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^2 \ln f(x; \theta)}{\partial \theta^2} f(x; \theta) + \left[\frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta}\right]^2 f(x; \theta) \right\} dx \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta}\right]^2 f(x; \theta) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \ln f(x; \theta)}{\partial \theta^2} f(x; \theta) dx \Rightarrow$$

$$E\left(\left[\frac{\partial \ln f(X; \theta)}{\partial \theta}\right]^2\right) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln f(X; \theta)}{\partial \theta^2}\right) \Rightarrow$$

$$\text{MIRC} = \left( nE \left( \left[ \frac{\partial \ln f(X; \theta)}{\partial \theta} \right]^2 \right) \right)^{-1} = - \left( nE \left( \frac{\partial^2 \ln f(X; \theta)}{\partial \theta^2} \right) \right)^{-1}. \square$$

**Definiție.** Fie  $\hat{\Theta}$  estimator nedeplasat pentru parametrul  $\theta$ . *Eficiența* lui  $\hat{\Theta}$  este  $e(\hat{\Theta}) = \frac{\text{MIRC}}{\text{var}(\hat{\Theta})}$ .

**Observație.** Eficiența oricărui estimator nedeplasat este  $\leq 1$ .

**Definiție.** Un estimator nedeplasat cu eficiența 1 se numește estimator *eficient*.

**Observație.** Din inegalitatea Rao-Cramer rezultă că orice estimator eficient este estimator nedeplasat de dispersie minimă.

Reciproc este adevărat doar dacă există un estimator eficient.

**Exemple.** 1) Fie  $X \sim N(m, \sigma^2)$ . Pe baza unei selecții fixate de mărime  $n$ , este  $\bar{X}$  estimator eficient pentru  $m$ ?

Am văzut că  $\bar{X}$  este estimator nedeplasat pentru  $m$ . Calculăm MIRC pentru dispersia oricărui estimator nedeplasat pentru  $m$ .

$$f(X; m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[ -\frac{(X-m)^2}{2\sigma^2} \right] \Rightarrow \ln f(X; m) = \ln \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right) - \frac{(X-m)^2}{2\sigma^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \ln f(X; m)}{\partial m} = \frac{X-m}{\sigma^2} \Rightarrow$$

$$E \left( \left[ \frac{\partial \ln f(X; m)}{\partial m} \right]^2 \right) = \frac{1}{\sigma^4} E \left( (X-m)^2 \right) = \frac{\sigma^2}{\sigma^4} = \frac{1}{\sigma^2} \Rightarrow$$

$$\text{MIRC} = \left( nE \left( \left[ \frac{\partial \ln f(X; \theta)}{\partial \theta} \right]^2 \right) \right)^{-1} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Dar  $\text{var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow \text{var}(\bar{X}) = \text{MIRC} \Rightarrow \bar{X}$  estimator eficient pentru  $m$ .

2) Fie  $X \sim N(0, \sigma^2)$ , unde  $\sigma^2$  este un parametru necunoscut ce trebuie estimat dintr-o selecție de mărime  $n > 1$ .

a) Să se determine MIRC pentru dispersia oricărui estimator nedeplasat pentru  $\sigma^2$ .

b) Este dispersia de selecție  $S^2$  un estimator eficient pentru  $\sigma^2$ ?

$$\text{R. a) Notăm } \theta = \sigma^2 \Rightarrow f(X; \theta) = \frac{1}{(2\pi\theta)^{\frac{1}{2}}} \exp \left( -\frac{X^2}{2\theta} \right) \Rightarrow$$

$$\ln f(X; \theta) = -\frac{X^2}{2\theta} - \frac{1}{2} \ln 2\pi\theta \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \ln f(X; \theta)}{\partial \theta} = \frac{X^2}{2\theta^2} - \frac{1}{2\theta} \Rightarrow \frac{\partial^2 \ln f(X; \theta)}{\partial \theta^2} = -\frac{X^2}{\theta^3} + \frac{1}{2\theta^2} \Rightarrow$$

$$E \left( \frac{\partial^2 \ln f(X; \theta)}{\partial \theta^2} \right) = -\frac{1}{\theta^3} E \left( X^2 \right) + \frac{1}{2\theta^2} = -\frac{\theta}{\theta^3} + \frac{1}{2\theta^2} = -\frac{1}{2\theta^2} \Rightarrow$$

$$\text{MIRC} = - \left( nE \left( \frac{\partial^2 \ln f(X; \theta)}{\partial \theta^2} \right) \right)^{-1} = \frac{2\theta^2}{n}.$$

b) Am văzut că  $S^2$  este un estimator nedeplasat pentru  $\theta$  și

$$\left. \begin{aligned} \text{var}(S^2) &= \frac{1}{n} \left( \mu_4 - \frac{n-3}{n-1} \sigma^4 \right) \\ X &\sim N(0, \sigma^2) \Rightarrow \mu_4 = 3\sigma^4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\text{var}(S^2) = \frac{1}{n} \left( 3\sigma^4 - \frac{n-3}{n-1} \sigma^4 \right) = \frac{2\sigma^4}{n-1} = \frac{2\theta^2}{n-1} \Rightarrow$$

$$e(S^2) = \frac{\text{MIRC}}{\text{var}(S^2)} = \frac{n-1}{n}.$$

Observăm că  $S^2$  nu este un estimator eficient pentru  $\theta$  în acest caz, dar este *asimptotic eficient* în sensul că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{MIRC}}{\text{var}(S^2)} = 1$ .

### 8.1.3 Consistență

**Definiție.** Un estimator  $\hat{\Theta}$  bazat pe o selecție de mărime  $n$  este estimator *consistent* pentru  $\theta$  dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\hat{\Theta} - \theta\right| \geq \varepsilon\right) = 0, \forall \varepsilon > 0.$$

**Teorema 8.2.** Fie  $\hat{\Theta}$  un estimator bazat pe o selecție de mărime  $n$ . Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\hat{\Theta}\right) = \theta \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}\left(\hat{\Theta}\right) = 0,$$

atunci  $\hat{\Theta}$  este un estimator consistent pentru  $\theta$ .

**Demonstrație.** Fie  $\varepsilon > 0$ . Din inegalitatea lui Cebîșev (vezi teorema 2.1), obținem

$$P\left(\left|\hat{\Theta} - E\left(\hat{\Theta}\right)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \frac{4\text{var}\left(\hat{\Theta}\right)}{\varepsilon^2}.$$

Deoarece

$$\left|\hat{\Theta} - \theta\right| = \left|\hat{\Theta} - E\left(\hat{\Theta}\right) + E\left(\hat{\Theta}\right) - \theta\right| \leq \left|\hat{\Theta} - E\left(\hat{\Theta}\right)\right| + \left|E\left(\hat{\Theta}\right) - \theta\right|,$$

și, din  $\lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\hat{\Theta}\right) = \theta$  rezultă că  $\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  a.î.

$$\left|E\left(\hat{\Theta}\right) - \theta\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n(\varepsilon),$$

avem pentru  $n \geq n(\varepsilon)$

$$P\left(\left|\hat{\Theta} - \theta\right| \geq \varepsilon\right) \leq P\left(\left|\hat{\Theta} - E\left(\hat{\Theta}\right)\right| + \left|E\left(\hat{\Theta}\right) - \theta\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\left|\hat{\Theta} - E\left(\hat{\Theta}\right)\right| \geq \varepsilon - \left|E\left(\hat{\Theta}\right) - \theta\right|\right) \leq P\left(\left|\hat{\Theta} - E\left(\hat{\Theta}\right)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Obținem, pentru  $n \geq n(\varepsilon)$

$$0 \leq P\left(\left|\hat{\Theta} - \theta\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{4\text{var}\left(\hat{\Theta}\right)}{\varepsilon^2},$$

de unde, trecând la limită rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\hat{\Theta} - \theta\right| \geq \varepsilon\right) = 0. \square$

### 8.1.4 Suficiență

Fie  $X_1, X_2, \dots, X_n$  o selecție a populației  $X$  a cărei repartiție depinde de parametrul necunoscut  $\theta$ . Dacă  $Y = h(X_1, X_2, \dots, X_n)$  este o statistică a. î., pentru orice altă statistică

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

repartiția condiționată a lui  $Z$ , dat fiind că  $Y = y$ , nu depinde de  $\theta$ , atunci  $Y$  e numită *statistică suficientă* pentru  $\theta$ . Dacă în plus  $E(Y) = \theta$ , atunci  $Y$  se numește *estimator suficient* pentru  $\theta$ .

**Teorema 8.3. (criteriul de factorizare Fisher-Neymann).** Fie

$$Y = h(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

o statistică bazată pe o selecție de mărime  $n$  a populației continue  $X$ . Atunci  $Y$  este o statistică suficientă pentru  $\theta$  dacă și numai dacă densitatea comună a lui  $X_1, X_2, \dots, X_n$  poate fi factorizată sub forma

$$\prod_{j=1}^n f_X(x_j; \theta) = g_1(h(x_1, \dots, x_n), \theta) g_2(x_1, \dots, x_n).$$

Dacă  $X$  este discretă, condiția este

$$\prod_{j=1}^n p_X(x_j; \theta) = g_1(h(x_1, \dots, x_n), \theta) g_2(x_1, \dots, x_n).$$

Suficiența a fost demonstrată de Fisher în 1922, iar necesitatea de Neymann în 1935.

## 8.2 Metoda verosimilității maxime

Introdusă de Fischer în 1922 a devenit cea mai importantă metodă generală de estimare din punct de vedere teoretic.

Fie  $f(x; \theta)$  densitatea populației  $X$ , unde  $\theta$  este unicul parametru care trebuie estimat dintr-un set de valori de selecție  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

**Definiție.** *Funcția de verosimilitate* a unui set de  $n$  valori de selecție din populație este

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) f(x_2; \theta) \dots f(x_n; \theta).$$

În cazul în care  $X$  este discretă cu masa  $p(x; \theta)$ , avem

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = p(x_1; \theta) p(x_2; \theta) \dots p(x_n; \theta).$$

Când valorile de selecție sunt date, funcția de verosimilitate  $L$  devine o funcție de o singură variabilă  $\theta$ . Procedura de estimare pentru  $\theta$  bazată pe metoda verosimilității maxime constă în alegerea, ca o estimare pentru  $\theta$ , a valorii particulare care maximizează  $L$ . Maximul lui  $L(\theta)$  apare în cele mai multe cazuri la valoarea lui  $\theta$  unde  $\frac{dL(\theta)}{d\theta} = 0$ . De aici, într-un mare număr de cazuri, *estimarea de verosimilitate maximă* (EVM)  $\hat{\theta}$  a lui  $\theta$  bazată pe valorile de selecție  $x_1, x_2, \dots, x_n$  poate fi determinată din

$$\frac{dL(x_1, x_2, \dots, x_n; \hat{\theta})}{d\hat{\theta}} = 0.$$

După cum am văzut mai sus, funcția  $L$  este în forma unui produs de funcții de  $\theta$ . Deoarece  $L$  este întotdeauna nenegativă și își atinge maximum pentru aceeași valoare a lui  $\hat{\theta}$  ca  $\ln L$ , iar  $\ln L$  este în formă de sumă, este în general mai ușor să obținem EVM  $\hat{\theta}$  rezolvând

$$\frac{d \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \hat{\theta})}{d \hat{\theta}} = 0,$$

numită *ecuația de verosimilitate*.

Soluția dorită este una unde rădăcina  $\hat{\theta}$  este o funcție de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , dacă astfel de rădăcină există. Când există mai multe rădăcini ale ecuației de verosimilitate, EVM este rădăcina corespunzătoare maximumului global al lui  $L$  sau  $\ln L$ .

În cazul a  $m$  parametri, funcția de verosimilitate devine

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_1, \dots, \theta_m),$$

și EVM pentru  $\theta_1, \dots, \theta_m$  sunt obținuți rezolvând sistemul de ecuații de verosimilitate

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_j} = 0, j = 1, 2, \dots, m.$$

Revenind la cazul unui singur parametru, să reprezentăm soluția ecuației de verosimilitate prin

$$\hat{\theta} = h(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Atunci *estimatorul de verosimilitate maximă* (EVM)  $\hat{\theta}$  pentru  $\theta$  este

$$\hat{\theta} = h(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

**Proprietatea 1:** *consistența și eficiența asimptotică.* Fie  $\hat{\theta}$  EVM pentru  $\theta$  din densitatea  $f(x; \theta)$  pe baza unei selecții de mărime  $n$ . Atunci EVM  $\hat{\theta}$  este consistent și asimptotic eficient.

Un rezultat analog se obține când populația  $X$  este discretă. Mai mult, repartitia lui  $\hat{\theta}$  tinde la o repartitie normală când  $n \rightarrow \infty$ .

**Proprietatea 2:** *proprietatea de invarianță.* Dacă  $\hat{\theta}$  este EVM pentru  $\theta$ , atunci EVM pentru  $g(\theta)$  este  $g(\hat{\theta})$ , unde  $g$  este presupusă bijectivă și derivabilă în raport cu  $\theta$ .

De exemplu, dacă  $\hat{\sigma}$  este EVM pentru deviația standard  $\sigma$  în o repartitie, atunci EVM pentru dispersia  $\sigma^2$  este  $\hat{\sigma}^2$ .

**Exemplu.** Pentru repartitia  $N(m, \sigma^2)$ , să se determine EVM pentru  $\theta_1 = m$  și  $\theta_2 = \sigma^2$ .

**R.** Avem

$$f(x; m, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \sigma} \exp \left[ -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right], x \in \mathbb{R}.$$

Funcția de verosimilitate este

$$L(x_1, \dots, x_n; m, \sigma^2) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \sigma} \exp \left[ -\frac{(x_j-m)^2}{2\sigma^2} \right] =$$



$$\left[ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sigma} \right]^n \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n (x_j - m)^2 \right] \Rightarrow$$

$$\ln L = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n (x_j - m)^2 - \frac{1}{2}n \ln \sigma^2 - \frac{1}{2}n \ln 2\pi.$$

$$\text{Fie } \theta_1 = m, \theta_2 = \sigma^2 \Rightarrow$$

$$\ln L = -\frac{1}{2\theta_2} \sum_{j=1}^n (x_j - \theta_1)^2 - \frac{1}{2}n \ln \theta_2 - \frac{1}{2}n \ln 2\pi,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_1} = \frac{1}{\theta_2} \sum_{j=1}^n (x_j - \theta_1),$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_2} = \frac{1}{2\theta_2^2} \sum_{j=1}^n (x_j - \theta_1)^2 - \frac{n}{2\theta_2}.$$

Sistemul de verosimilitate este

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_2} = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\theta_2} \sum_{j=1}^n (x_j - \hat{\theta}_1) = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j, \\ \frac{1}{2\theta_2^2} \sum_{j=1}^n (x_j - \hat{\theta}_1)^2 - \frac{n}{2\theta_2} = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \hat{\theta}_1)^2. \end{array} \right.$$

EVM pentru  $m$  si  $\sigma^2$  sunt

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j = \bar{X},$$

$$\hat{\Theta}_2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2 = \frac{n-1}{n} S^2.$$

$\bar{X}$  estimator eficient pentru  $m \Rightarrow \hat{\Theta}_1$  estimator eficient pentru  $m \Rightarrow \hat{\Theta}_1$  asimptotic eficient pentru  $m$ .

$$\left. \begin{array}{l} E(\hat{\Theta}_1) = E(\bar{X}) = m \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m \\ var(\hat{\Theta}_1) = var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{teorema 8.2}} \hat{\Theta}_1 \text{ estimator consistent pentru } m.$$

$E(\hat{\Theta}_2) = \frac{n-1}{n} E(S^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \neq \sigma^2 \Rightarrow \hat{\Theta}_2$  este estimator deplasat pentru  $\sigma^2$ .

$$\left. \begin{array}{l} E(\hat{\Theta}_2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma^2 \\ var(\hat{\Theta}_2) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 var(S^2) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{2\sigma^4}{n-1} = \frac{2\sigma^4(n-1)}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{teorema 8.2}}$$

$\hat{\Theta}_2$  estimator consistent pentru  $\sigma^2$ .

$$\left. \begin{array}{l} E(\hat{\Theta}_2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma^2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{MIRC}}{var(\hat{\Theta}_2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2\sigma^4}{n}}{\frac{2\sigma^4(n-1)}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-1} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\Theta}_2 \text{ estimator asimptotic eficient pentru } \sigma^2.$$

**Exemplu.** Presupunem că populația  $X$  are o repartiție uniformă pe intervalul  $(0, \theta)$ . Vrem să determinăm EVM pentru  $\theta$ .

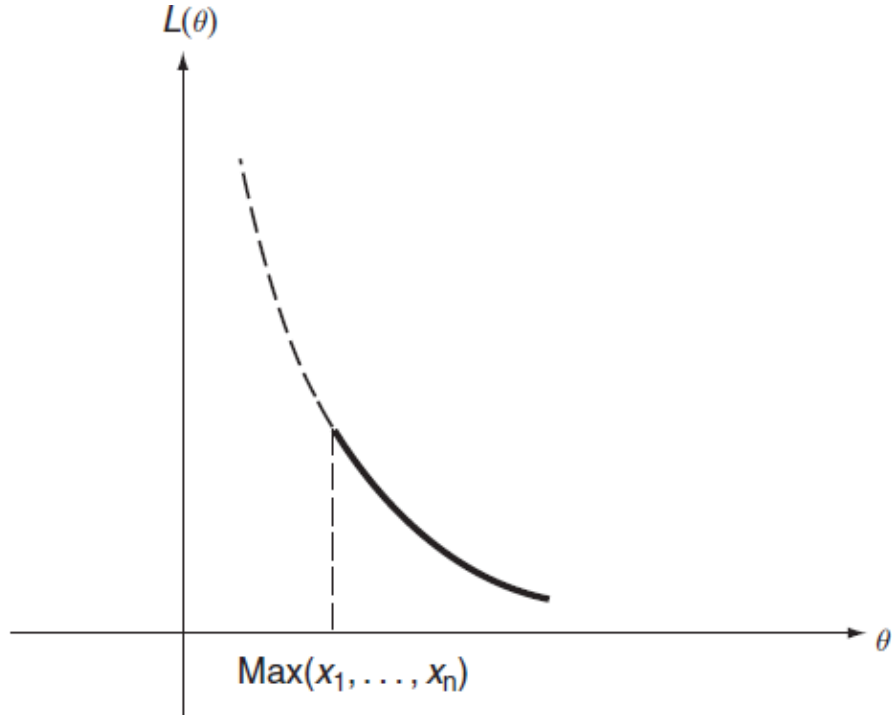
Avem

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & \text{pentru } 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \quad (8.2)$$

Funcția de verosimilitate devine

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n, \quad 0 \leq x_i \leq \theta, \forall i. \quad (8.3)$$

Graficul lui  $L$  este dat în figura următoare.



Observăm că toate valorile selecției  $x_i$  trebuie să fie mai mici sau egale cu  $\theta$ , implicând că doar porțiunea curbei de la dreapta lui  $\max(x_1, x_2, \dots, x_n)$  este aplicabilă. De aici, maximumul lui  $L$  apare în  $\theta = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , sau EVM pentru  $\theta$  este

$$\hat{\theta} = \max(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (8.4)$$

și estimatorul de verosimilitate maximă pentru  $\theta$  este

$$\hat{\Theta} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) = X_{(n)}. \quad (8.5)$$

Observăm că nu am obținut relația (8.4) rezolvând ecuația de verosimilitate. Ecuația de verosimilitate nu se aplică în acest caz deoarece maximumul lui  $L$  apare la frontieră și derivata nu este 0 acolo.

Studiem unele proprietăți ale lui  $\hat{\Theta}$  dat de relația (8.5). Densitatea lui  $\hat{\Theta}$  este (vezi subsecțiunea 5.6)

$$f_{\hat{\Theta}}(x) = nF_X^{n-1}(x)f_X(x).$$

Cu  $f_X(x)$  din relația (8.2) și (din relația (5.2), pentru  $a = 0$  și  $b = \theta$ )

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } x < 0; \\ \frac{x}{\theta}, & \text{pentru } 0 \leq x \leq \theta; \\ 1, & \text{pentru } x > \theta, \end{cases}$$

avem

$$f_{\hat{\Theta}}(x) = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & \text{pentru } 0 \leq x \leq \theta; \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Media și dispersia lui  $\hat{\Theta}$  sunt

$$\begin{aligned} E(\hat{\Theta}) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf_{\hat{\Theta}}(x)dx = \int_0^{\theta} x \cdot \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} dx = \frac{n}{\theta^n} \int_0^{\theta} x^n dx = \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^{\theta} = \\ &= \frac{n}{n+1}\theta, \\ \text{var}(\hat{\Theta}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - E(\hat{\Theta})\right)^2 f_{\hat{\Theta}}(x) dx = \int_0^{\theta} \left(x - \frac{n}{n+1}\theta\right)^2 \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} dx = \\ &= \frac{n}{\theta^n} \int_0^{\theta} \left[x^2 - 2\frac{n}{n+1}\theta x + \left(\frac{n}{n+1}\theta\right)^2\right] x^{n-1} dx = \frac{n}{\theta^n} \left[ \frac{x^{n+2}}{n+2} - 2\frac{n}{n+1}\theta \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + \left(\frac{n}{n+1}\theta\right)^2 \frac{x^n}{n} \right] \Big|_0^{\theta} = \\ &= n \left[ \frac{\theta^2}{n+2} - \frac{2n\theta^2}{(n+1)^2} + \frac{n\theta^2}{(n+1)^2} \right] = n\theta^2 \left[ \frac{1}{n+2} - \frac{n}{(n+1)^2} \right] = \left[ \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} \right] \theta^2. \end{aligned}$$

$$E(\hat{\Theta}) = \frac{n}{n+1}\theta \neq \theta \implies \hat{\Theta} \text{ este deplasat.}$$

$$\left. \begin{aligned} E(\hat{\Theta}) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta \\ \text{var}(\hat{\Theta}) &= \left[ \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} \right] \theta^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{teorema 8.2}} \hat{\Theta} \text{ estimator consistent.}$$

## 9 Estimarea parametrilor repartiției normale $N(m, \sigma^2)$ : estimatori punctuali, intervale de estimare (de încredere)

### 9.1 Estimatori punctuali

În secțiunea precedentă am considerat estimarea parametrilor repartiției normale prin metoda verosimilității maxime.

#### 9.1.1 Metoda momentelor

Metoda momentelor a fost propusă de Pearson în 1894.

Considerăm o densitate  $f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$  pentru care parametrii  $\theta_j, j = 1, 2, \dots, m$  sunt de estimat pe baza unei selecții  $X_1, X_2, \dots, X_n$  a lui  $X$ . Momentele teoretice ale populației  $X$  sunt

$$\alpha_i = \int_{-\infty}^{\infty} x^i f(x; \theta_1, \dots, \theta_m) dx, \quad i = 1, 2, \dots$$

Ele sunt, în general, funcții de parametri necunoscuți, adică

$$\alpha_i = \alpha_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m).$$

Momentele de selecție sunt

$$M_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^i, \quad i = 1, 2, \dots$$

Metoda momentelor sugerează că, pentru a determina estimatorii  $\hat{\Theta}_1, \dots, \hat{\Theta}_m$  din selecție, egalăm un număr suficient de momente de selecție cu momentele corespunzătoare ale populației. Procedura determinării lui  $\hat{\Theta}_1, \dots, \hat{\Theta}_m$  constă în următorii pași:

- Pasul 1: fie

$$\alpha_i(\hat{\Theta}_1, \dots, \hat{\Theta}_m) = M_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (9.1)$$

Acestea sunt  $m$  ecuații de moment cu  $m$  necunoscute  $\hat{\Theta}_1, \dots, \hat{\Theta}_m$ .

- Pasul 2: rezolvă acest sistem de ecuații, determinând  $\hat{\Theta}_1, \dots, \hat{\Theta}_m$ , numiți *estimatorii de moment* pentru  $\theta_1, \dots, \theta_m$ .

Nu este necesar să considerăm  $m$  ecuații de moment *consecutive* ca în relația (9.1); orice  $m$  ecuații de moment convenabile care conduc la  $\hat{\Theta}_1, \dots, \hat{\Theta}_m$  sunt suficiente. Ecuațiile momentelor de ordin mai mic sunt totuși preferate deoarece cer o mai mică manipulare a datelor observate.

**Exemplul 9.1.** Alegem repartiția normală ca model pentru randamentul procentual discutat în capitolul 7, adică

$$f(x; m, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Estimăm parametrii  $\theta_1 = m$  și  $\theta_2 = \sigma^2$  pe baza celor 200 de valori ale selecției date în tabel.

Urmând metoda momentelor, avem nevoie de 2 ecuații de moment, și cele mai convenabile sunt

$$\alpha_1 = M_1 = \overline{X},$$

și

$$\alpha_2 = M_2.$$

Avem

$$\alpha_1 = \theta_1.$$

De aici, prima dintre aceste ecuații de moment dă

$$\hat{\Theta}_1 = \overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j. \quad (9.2)$$

Proprietățile acestui estimator au fost discutate în capitolul precedent. El este nedeplasat și are dispersie minimă între toți estimatorii nedeplasați pentru  $m$ .

Ecuția momentului de ordinul 2 dă

$$\hat{\Theta}_1^2 + \hat{\Theta}_2 = M_2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2,$$

sau

$$\hat{\Theta}_2 = M_2 - M_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2 - \overline{X}^2.$$

Pe de altă parte

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \overline{X})^2 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j^2 - 2X_j\overline{X} + \overline{X}^2) = \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n X_j^2 - 2\overline{X} \sum_{j=1}^n X_j + n\overline{X}^2 \right) = \\ &= \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n X_j^2 - 2\overline{X}n\overline{X} + n\overline{X}^2 \right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^2 - \overline{X}^2. \end{aligned}$$

Deci

$$\hat{\Theta}_2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (X_j - \overline{X})^2. \quad (9.3)$$

Acesta, după cum am arătat, este un estimator deplasat pentru  $\sigma^2$ .

Estimările  $\hat{\theta}_1$  și  $\hat{\theta}_2$  ale lui  $\theta_1 = m$  și  $\theta_2 = \sigma^2$  pe baza valorilor selecției date de tabel sunt, urmând relațiile (9.2) și (9.3)

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_1 &= \frac{1}{200} \sum_{j=1}^{200} x_j \simeq 70, \\ \hat{\theta}_2 &= \frac{1}{200} \sum_{j=1}^{200} (x_j - \hat{\theta}_1)^2 \simeq 4,\end{aligned}$$

unde  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 200$  sunt valorile de selecție din tabelul din capitolul 7.

## 9.2 Intervale de încredere

**Exemplul 9.2.** 5 valori de selecție 3; 2; 1, 5; 0, 5; 2, 1 sunt observate dintr-o repartiție normală având o medie necunoscută  $m$  și o dispersie cunoscută  $\sigma^2 = 9$ .

EVM al lui  $m$  este media de selecție  $\bar{X}$  și deci,

$$\hat{m} = \frac{1}{5} (3 + 2 + 1, 5 + 0, 5 + 2, 1) = 1, 82. \quad (9.4)$$

Vrem să determinăm margini ale unui interval astfel încât, cu un nivel de încredere specificat, media adevărată  $m$  să fie în acest interval.  $\bar{X}$ , fiind sumă de variabile aleatoare normale, este normală cu

$$\begin{aligned}E(\bar{X}) &= m, \\ var(\bar{X}) &= \frac{\sigma^2}{n} = \frac{9}{5}.\end{aligned}$$

Variabila aleatoare standardizată

$$U = \frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{var(\bar{X})}} = \frac{\sqrt{5}(\bar{X} - m)}{3} \quad (9.5)$$

este  $N(0, 1)$  și are densitatea

$$f_U(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (9.6)$$

Presupunem că cerem ca  $P(-u_1 < U < u_1) = 0, 95$ . Determinăm  $u_1$ .

$$0, 95 = P(-u_1 < U < u_1) = \int_{-u_1}^{u_1} f_U(x) dx = \int_{-\infty}^{u_1} f_U(x) dx - \int_{-\infty}^{-u_1} f_U(x) dx =$$

$$\begin{aligned}\Phi(u_1) - \Phi(-u_1) &= \\ \Phi(u_1) - (1 - \Phi(u_1)) &= 2\Phi(u_1) - 1 \Rightarrow \\ \Phi(u_1) &= \frac{0,95+1}{2} = 0,975.\end{aligned}$$

Din tabelul valorilor funcției  $\Phi$  rezultă  $u_1 = 1,96$  și

$$P(-1,96 < U < 1,96) = \int_{-1,96}^{1,96} f_U(x) dx = 0,95 \quad (9.7)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow P\left(-1,96 < \frac{\sqrt{5}(\bar{X}-m)}{3} < 1,96\right) = 0,95 \Rightarrow P\left(-5,88 < \sqrt{5}(\bar{X}-m) < 5,88\right) = \\
&0,95 \Rightarrow \\
&P\left(-2,63 < \bar{X}-m < 2,63\right) = 0,95 \Rightarrow P\left(-2,63 < m-\bar{X} < 2,63\right) = 0,95 \Rightarrow \\
&P\left(\bar{X}-2,63 < m < \bar{X}+2,63\right) = 0,95. \tag{9.8}
\end{aligned}$$

Intervalul de 95% încredere pentru  $m$  este  $(\bar{X}-2,63; \bar{X}+2,63)$ . Folosind relația (9.4), intervalul de 95% încredere pentru  $m$  estimat pe baza observațiilor este  $(\hat{m}-2,63; \hat{m}+2,63) = (1,82-2,63; 1,82+2,63) = (-0,81; 4,45)$ , adică

$$P(-0,81 < m < 4,45) = 0,95. \tag{9.9}$$

Probabilitatea ca *intervalul aleator*  $(\bar{X}-2,63; \bar{X}+2,63)$  să conțină adevărata medie  $m$  a repartiției este 0,95, iar relația (9.9) dă intervalul observat bazat pe valorile date ale selecției.

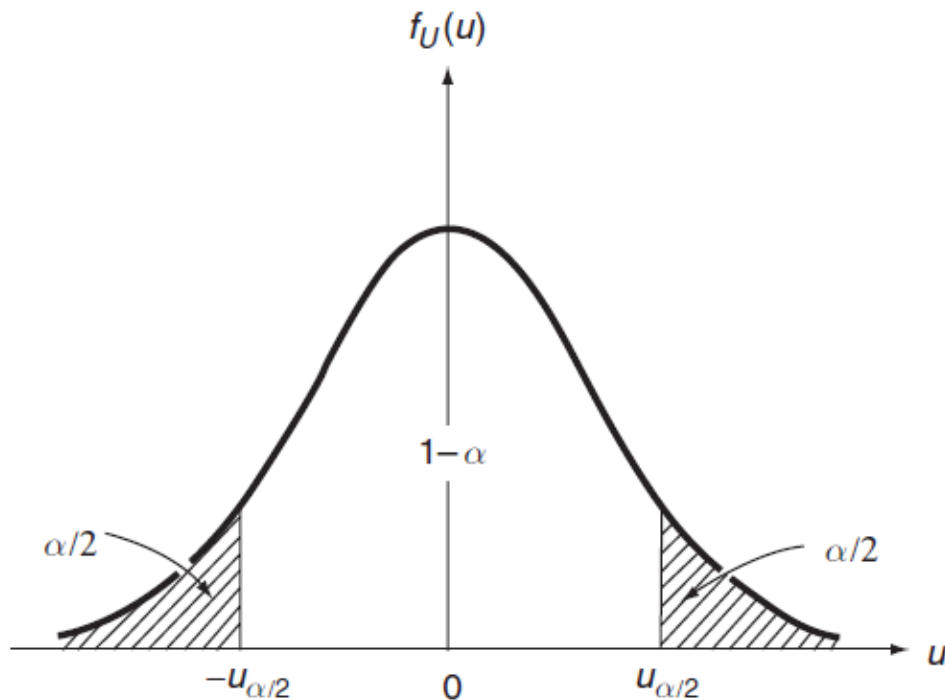
**Definiție.** Presupunem că o selecție  $X_1, X_2, \dots, X_n$  este extrasă dintr-o populație având densitatea  $f(x; \theta)$ ,  $\theta$  fiind parametrul de estimat. Mai departe presupunem că  $L_1(X_1, \dots, X_n)$  și  $L_2(X_1, \dots, X_n)$  sunt două statistici astfel încât  $L_1 < L_2$  cu probabilitatea 1. Intervalul  $(L_1, L_2)$  este numit un *interval de încredere*  $[100(1-\alpha)]\%$  pentru  $\theta$  dacă  $L_1$  și  $L_2$  pot fi alese astfel încât

$$P(L_1 < \theta < L_2) = 1 - \alpha. \tag{9.10}$$

Limitele  $L_1$  și  $L_2$  sunt numite, respectiv, *limitele inferioară* și *superioară de încredere* pentru  $\theta$ , și  $1 - \alpha$  este numit *coeficientul de încredere*. Valoarea lui  $1 - \alpha$  este luată în general 0,9; 0,95; 0,99; 0,995 sau 0,999.

**Interval de încredere pentru  $m$  în  $N(m, \sigma^2)$  cu  $\sigma^2$  cunoscut** Intervalul de încredere dat de relația (9.8) estimează media unei populații normale cu dispersie cunoscută. În termeni generali, procedura arată că întâi determinăm un interval simetric în  $U$  pentru a obține un coeficient de încredere de  $1 - \alpha$ . Notând cu  $u_{\alpha/2}$  valoarea lui  $U$  de la care aria de sub  $f_U(u)$  este  $\alpha/2$ , adică  $P(U > u_{\alpha/2}) = \alpha/2$  (vezi figura următoare), avem

$$P(-u_{\alpha/2} < U < u_{\alpha/2}) = 1 - \alpha. \tag{9.11}$$



De aici, folosind transformarea dată de relația (9.5), avem rezultatul general

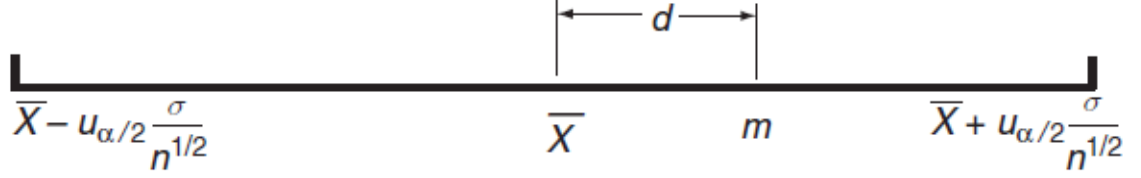
$$P\left(\bar{X} - \frac{\sigma u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} < m < \bar{X} + \frac{\sigma u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha. \quad (9.12)$$

Acest rezultat poate fi de asemenea folosit pentru a estima medii ale populațiilor nenormale cu dispersii cunoscute dacă mărimea selecției este suficient de mare pentru a justifica folosirea teoremei limită centrală.

În acest caz, poziția intervalului este o funcție de  $\bar{X}$  și de aceea este o funcție de selecție. În contrast, mărimea intervalului, este o funcție doar de mărimea selecției  $n$ , fiind invers proporțională cu  $\sqrt{n}$ .

Intervalul de încredere  $[100(1 - \alpha)]\%$  pentru  $m$  dat de relația (9.12) dă de asemenea o estimare a acurateții estimatorului punctual  $\bar{X}$  pentru  $m$ . După cum vedem din figura următoare, adevărata medie  $m$  se află în intervalul indicat cu  $[100(1 - \alpha)]\%$  încredere.





Deoarece  $\bar{X}$  este centrul intervalului, distanța dintre  $\bar{X}$  și  $m$  poate fi cel mult egală cu jumătate din mărimea intervalului.

**Teorema 9.1.** Cu  $[100(1 - \alpha)]\%$  încredere, eroarea folosirii estimatorului  $\bar{X}$  pentru  $m$  este mai mică decât

$$\frac{\sigma u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}.$$

**Exemplul 9.3.** Fie populația  $X$  repartizată normal cu dispersia cunoscută  $\sigma^2$ . Determinați mărimea minimă  $n$  a selecției de care e nevoie, astfel încât eroarea estimării mediei  $m$  prin  $\bar{X}$  să fie mai mică decât o cantitate specificată  $\varepsilon$  cu  $[100(1 - \alpha)]\%$  încredere.

Folosind teorema 9.1, mărimea minimă a selecției trebuie să satisfacă

$$\varepsilon = \frac{\sigma u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}.$$

De aici, soluția este

$$n = \left( \frac{\sigma u_{\alpha/2}}{\varepsilon} \right)^2. \quad (9.13)$$

**Interval de încredere pentru  $m$  în  $N(m, \sigma^2)$  cu  $\sigma^2$  necunoscut** Diferența dintre această problemă și precedenta este că, deoarece  $\sigma$  nu este cunoscut, nu mai putem folosi

$$U = (\bar{X} - m) \left( \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)^{-1}$$

ca variabila aleatoare pentru calculul limitelor de încredere privind media  $m$ . Folosim dispersia de selecție  $S^2$  ca un estimator nedeplasat pentru  $\sigma^2$  și considerăm variabila aleatoare

$$Y = (\bar{X} - m) \left( \frac{S}{\sqrt{n}} \right)^{-1}. \quad (9.14)$$

Variabila aleatoare  $Y$  este acum o funcție de variabilele aleatoare  $\bar{X}$  și  $S$ . Determinăm repartiția lui  $Y$ .

**Teorema 9.2. (Repartiția  $t$  a lui Student)** Considerăm o variabilă aleatoare  $T$  definită prin

$$T = U \left( \frac{V}{n} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (9.15)$$

Dacă  $U \sim N(0, 1)$ ,  $V$  este repartizată  $\chi^2$  cu  $n$  grade de libertate, iar  $U$  și  $V$  sunt independente, atunci densitatea lui  $T$  are forma

$$f_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (9.16)$$

Această repartiție este cunoscută ca *repartiția  $t$  a lui Student* cu  $n$  grade de libertate; este numită după W. S. Gosset, care a folosit pseudonimul "Student" în publicațiile sale de cercetare.

După cum se vede din relația (9.16), repartiția  $t$  este simetrică în jurul originii. Când  $n$  crește, ea tinde la o repartiție normală standard.

Întorcându-ne la variabila aleatoare  $Y$  definită de relația (9.14), fie

$$U = (\bar{X} - m) \left( \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)^{-1}$$

și

$$V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}.$$

Atunci

$$Y = U \left( \frac{V}{n-1} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (9.17)$$

unde  $U \sim N(0, 1)$ , iar  $V$  are repartiția  $\chi^2$  cu  $(n-1)$  grade de libertate (vezi teorema 7.1). Mai departe, se poate arăta că  $\bar{X}$  și  $S^2$  sunt independente, deci și  $U$  și  $V$  sunt independente. Din teorema 9.2, variabila aleatoare  $Y$  are astfel o repartiție  $t$  cu  $(n-1)$  grade de libertate.

Variabila aleatoare  $Y$  poate fi folosită pentru a stabili intervale de încredere pentru media  $m$ . Valoarea lui  $Y$  depinde de media necunoscută  $m$ , dar repartiția lui  $Y$  nu depinde de  $m$ .

Repartiția  $t$  este tabelată în tabelul A.4 următor.

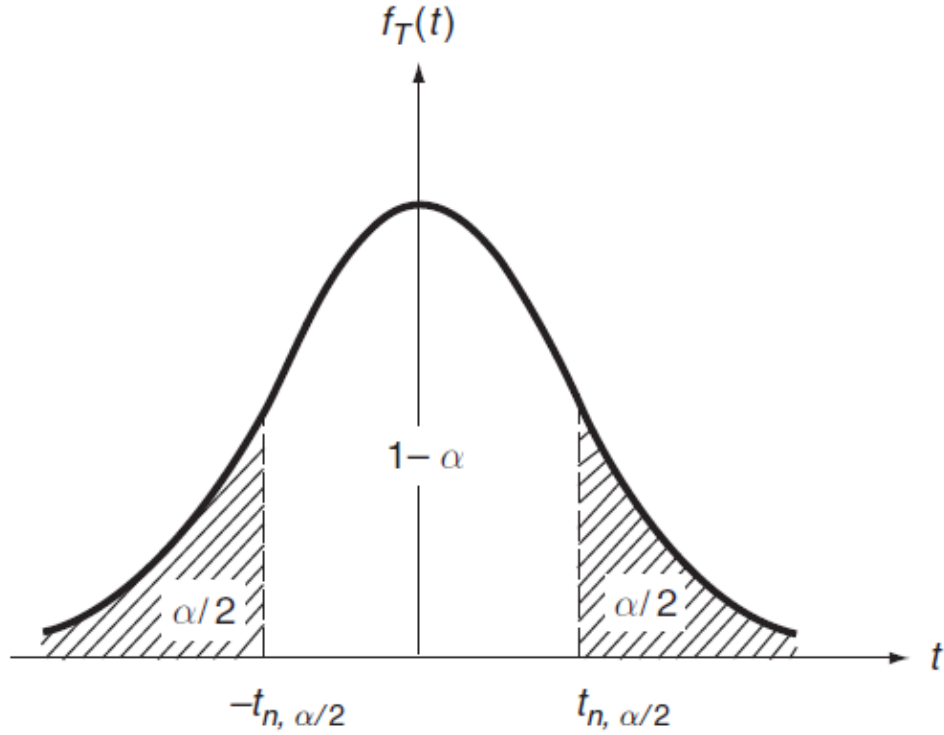
**Table A.4** Student's distribution with  $n$  degrees of Freedom: a table of  $t_{n,\alpha}$  in  $P(T > t_{n,\alpha}) = \alpha$ , for  $\alpha = 0.005$  to  $0.10$ ,  $n = 1, 2, \dots$

$n$	$\alpha$				
	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.799
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
$\infty$	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Fie  $t_{n,\alpha/2}$  valoarea astfel încât

$$P(T > t_{n,\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2},$$

cu  $n$  reprezentând numărul de grade de libertate (vezi figura următoare).



Avem

$$P(-t_{n-1, \alpha/2} < Y < t_{n-1, \alpha/2}) = 1 - \alpha. \quad (9.18)$$

Înlocuind  $Y$  din relația (9.14) în relația (9.18), un interval de încredere  $[100(1 - \alpha)]\%$  pentru media  $m$  este dat de

$$P\left(\bar{X} - \frac{t_{n-1, \alpha/2} S}{\sqrt{n}} < m < \bar{X} + \frac{t_{n-1, \alpha/2} S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha. \quad (9.19)$$

Deoarece  $\bar{X}$  și  $S$  sunt funcții de selecție, atât poziția cât și mărimea intervalului dat mai sus variază de la selecție la selecție.

**Exemplul 9.4.** Presupunem că nivelul anual al căderilor de zăpadă în zona Buffalo este repartizat normal. Folosind înregistrările căderilor de zăpadă din 1969-1970 până în 1978-1979 din tabelul următor, să se determine un interval de încredere 95% pentru media  $m$ .

Year	Snowfall
1969–1970	120.5
1970–1971	97.0
1971–1972	109.9
1972–1973	78.8
1973–1974	88.7
1974–1975	95.6
1975–1976	82.5
1976–1977	199.4
1977–1978	154.3
1978–1979	97.3

În acest exemplu  $\alpha = 0.05$ ,  $n = 10$ , media de selecție observată este

$$\bar{x} = \frac{1}{10} (120.5 + 97 + \dots + 97.3) = 112.4,$$

și dispersia de selecție observată este

$$s^2 = \frac{1}{9} \left[ (120.5 - 112.4)^2 + (97 - 112.4)^2 + \dots + (97.3 - 112.4)^2 \right] = 1414.3.$$

Din tabelul A.4 găsim  $t_{9,0.025} = 2.262$ . Înlocuind aceste valori în relația (9.19), obținem

$$P(85.5 < m < 139.3) = 0.95.$$

**Interval de încredere pentru  $\sigma^2$  în  $N(m, \sigma^2)$**  Un estimator punctual nedepășat pentru dispersia  $\sigma^2$  a populației este  $S^2$ . Pentru construirea intervalelor de încredere pentru  $\sigma^2$ , folosim variabila aleatoare

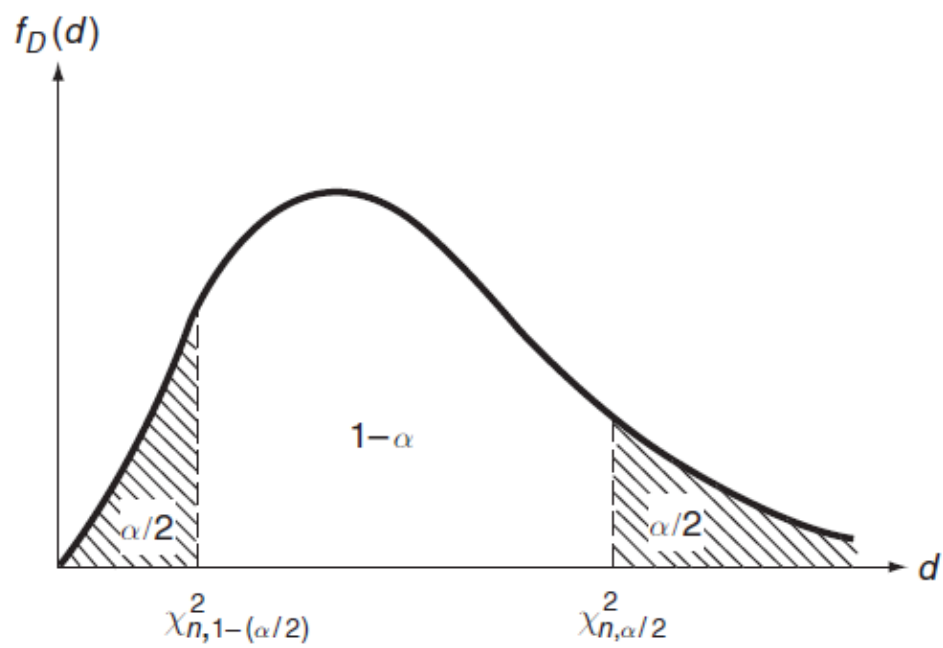
$$D = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}, \quad (9.20)$$

care are repartiție chi-pătrat cu  $(n-1)$  grade de libertate (teorema 7.1). Notând  $\chi_{n,\alpha/2}^2$  valoarea astfel încât  $P(D > \chi_{n,\alpha/2}^2) = \alpha/2$  cu  $n$  grade de libertate, putem scrie (vezi figura următoare)

$$P\left(\chi_{n-1,1-(\alpha/2)}^2 < D < \chi_{n-1,\alpha/2}^2\right) = 1 - \alpha, \quad (9.21)$$

care dă, înlocuind  $D$  din relația (9.20),

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1,\alpha/2}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1,1-(\alpha/2)}^2}\right) = 1 - \alpha. \quad (9.22)$$



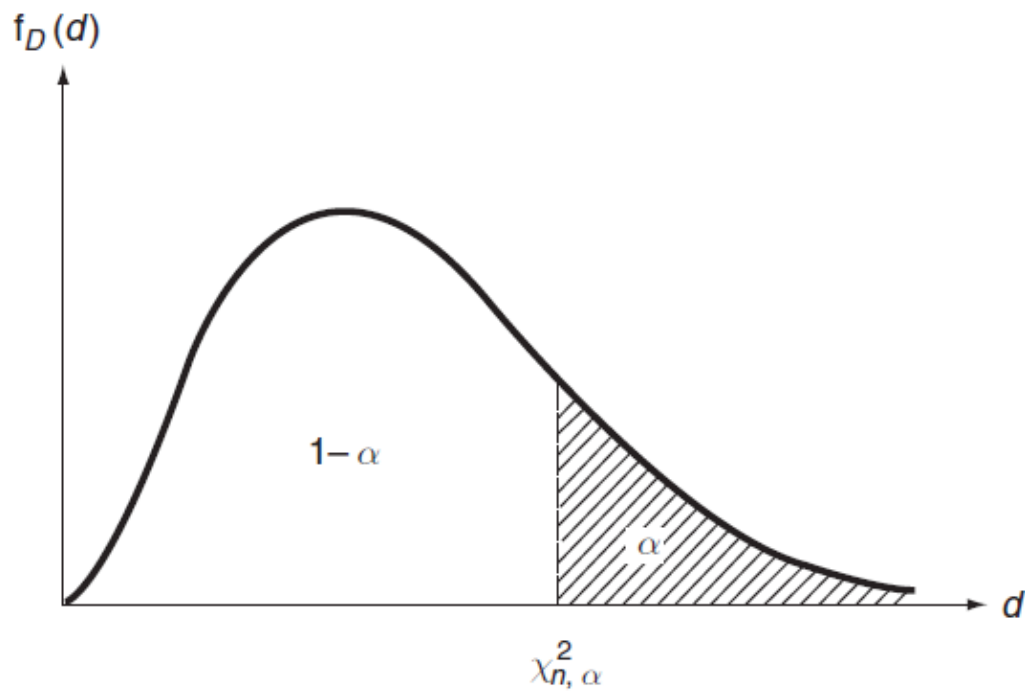
Tabelul A.5 dă valori ale lui  $\chi^2_{n,\alpha}$  pentru diferite valori ale lui  $n$  și  $\alpha$ .

**Table A.5** Chi-squared distribution with  $n$  degrees of freedom: a table of  $\chi^2_{n,\alpha}$  in  $P(D > \chi^2_{n,\alpha}) = \alpha$ , for  $\alpha = 0.005$  to  $0.995$ ,  $n = 1$  to  $30$

$n$	$\alpha$							
	0.995	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.0 <sup>4</sup> 393	0.0 <sup>3</sup> 157	0.0 <sup>3</sup> 982	0.0 <sup>2</sup> 393	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.717	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.346	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	11.070	12.832	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.628	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	40.113	43.194	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672

Relația (9.22) este folosită pentru construirea intervalelor de încredere pentru  $\sigma^2$  cu ambele margini finite pentru o populație normală. Un interval de încredere pentru  $\sigma^2$  cu o singură margine finită este dat de (vezi figura următoare)

$$P\left(\sigma^2 > \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\alpha}}\right) = 1 - \alpha. \quad (9.23)$$



**Exemplul 9.5.** Determinăm intervalele de încredere 95% pentru  $\sigma^2$  pentru datele din exemplul 9.4.

Am văzut în exemplul 9.4 că dispersia de selecție observată este

$$s^2 = 1414.3.$$

Din tabelul A.5 obținem

$$\chi^2_{9,0.975} = 2.7, \quad \chi^2_{9,0.025} = 19.023, \quad \chi^2_{9,0.05} = 16.919.$$

Relațiile (9.22) și (9.23) cu  $n = 10$  și  $\alpha = 0.05$  conduc la

$$P(669.12 < \sigma^2 < 4714.33) = 0.95$$

și

$$P(\sigma^2 > 752.3) = 0.95.$$



## 10 Modele liniare. Estimarea parametrilor prin metoda celor mai mici pătrate. Elemente de analiză discriminantă liniară

### 10.1 Regresie liniară

Presupunem că variabila aleatoare  $Y$  este o funcție de o variabilă independentă și relația lor este liniară, adică

$$E(Y) = \alpha + \beta x. \quad (10.1)$$

Constantele  $\alpha$  și  $\beta$  sunt necunoscute și trebuie estimate dintr-o selecție de valori ale lui  $Y$  cu valorile asociate lor ale lui  $x$ . Într-un singur experiment,  $x$  va avea o anumită valoare  $x_i$  și media lui  $Y$  va lua valoarea

$$E(Y_i) = \alpha + \beta x_i. \quad (10.2)$$

Definim variabila aleatoare  $E$  prin

$$E = Y - (\alpha + \beta x). \quad (10.3)$$

*Modelul de regresie liniară simplă* este

$$Y = \alpha + \beta x + E, \quad (10.4)$$

unde  $E$  are media 0 și dispersia  $\sigma^2$ , care coincide cu dispersia lui  $Y$ . Valoarea lui  $\sigma^2$  este necunoscută în general, dar este presupusă a fi constantă și nu o funcție de  $x$ .

Parametrii necunoscuți  $\alpha$  și  $\beta$  sunt numiți *coeficienți de regresie*, iar variabila aleatoare  $E$  reprezintă deviația lui  $Y$  în jurul mediei.

#### 10.1.1 Estimarea prin metoda celor mai mici pătrate

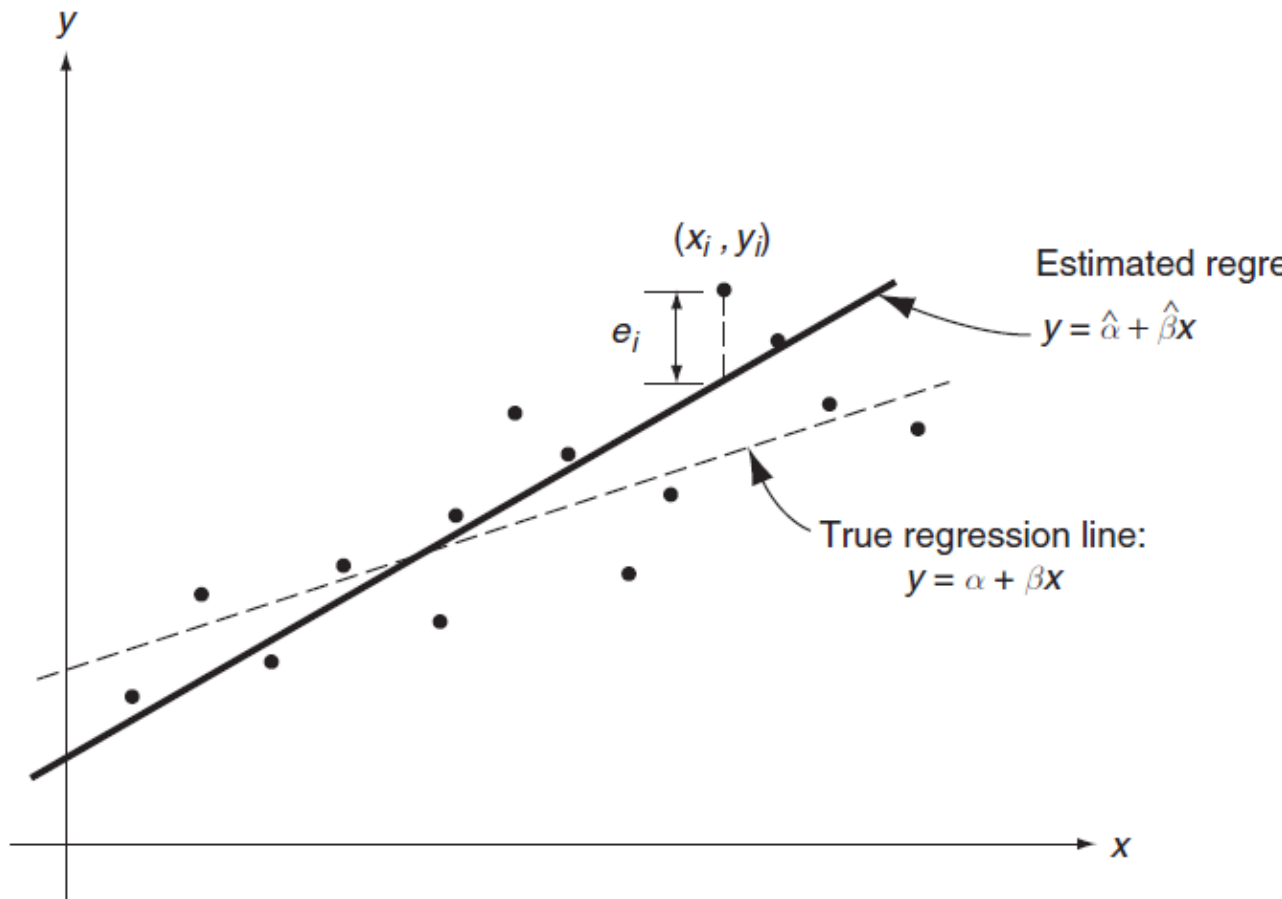
Estimările  $\hat{\alpha}$  și  $\hat{\beta}$  prin metoda celor mai mici pătrate pentru parametrii de regresie  $\alpha$  și  $\beta$  sunt alese astfel încât suma pătratelor diferențelor dintre valorile de selecție observate  $y_i$  și  $\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i$ , valoarea medie estimată a lui  $Y$ , este minimă. Fie

$$e_i = y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i), i = \overline{1, n}. \quad (10.5)$$

Estimările  $\hat{\alpha}$  și  $\hat{\beta}$  sunt găsite minimizând

$$Q = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n \left[ y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i) \right]^2. \quad (10.6)$$

Perechile valorilor de selecție sunt  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , iar  $e_i, i = 1, 2, \dots, n$  se numesc *reziduuri*. Figura următoare dă o prezentare grafică a acestei proceduri.



Vedem că reziduurile sunt distanțele verticale dintre  $y_i$ , valorile observate ale lui  $Y$ , și estimarea  $\hat{\alpha} + \hat{\beta}x$  a adevăratei drepte de regresie  $\alpha + \beta x$ .

**Teorema 10.1.** Fie modelul de regresie liniară simplă dat de relația (10.4). Fie  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  valorile de selecție observate ale lui  $Y$  cu valorile asociate ale lui  $x$ . Presupunem că cel puțin 2 dintre  $x_1, \dots, x_n$  sunt distincte. Atunci estimările prin metoda celor mai mici pătrate ale lui  $\alpha$  și  $\beta$  sunt

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}, \quad (10.7)$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (10.8)$$

unde

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

și

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i.$$

**Demonstrație.** Fie

$$\begin{aligned} Q(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) &= \sum_{i=1}^n \left[ y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i) \right]^2 \implies \\ \frac{\partial Q}{\partial \hat{\alpha}} &= \sum_{i=1}^n -2 \left[ y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i) \right], \\ \frac{\partial Q}{\partial \hat{\beta}} &= \sum_{i=1}^n -2x_i \left[ y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i) \right], \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial \hat{\alpha}^2} &= \sum_{i=1}^n -2(-1) = 2n > 0, \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial \hat{\alpha} \partial \hat{\beta}} &= \sum_{i=1}^n -2x_i(-1) = 2 \sum_{i=1}^n x_i = 2n\bar{x}, \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial \hat{\beta}^2} &= \sum_{i=1}^n -2x_i(-x_i) = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2, \\ D &= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Q}{\partial \hat{\alpha}^2} & \frac{\partial^2 Q}{\partial \hat{\alpha} \partial \hat{\beta}} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial \hat{\alpha} \partial \hat{\beta}} & \frac{\partial^2 Q}{\partial \hat{\beta}^2} \end{vmatrix} = 4n \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) = 4n \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 \right) = \\ &= 4n \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n\bar{x} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 \right) = 4n \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2) = \\ &= 4n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 > 0 \xrightarrow{\frac{\partial^2 Q}{\partial \hat{\alpha}^2} > 0} \\ HQ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 Q}{\partial \hat{\alpha}^2} & \frac{\partial^2 Q}{\partial \hat{\alpha} \partial \hat{\beta}} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial \hat{\alpha} \partial \hat{\beta}} & \frac{\partial^2 Q}{\partial \hat{\beta}^2} \end{pmatrix} \text{ pozitiv definită } \implies Q \text{ (strict) convexă } \implies \hat{\alpha} \text{ și } \hat{\beta} \end{aligned}$$

care minimizează pe  $Q$  sunt soluția sistemului

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial \hat{\alpha}} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial \hat{\beta}} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} n\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ \hat{\alpha} \sum_{i=1}^n x_i + \hat{\beta} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases} \iff$$

$$n\hat{\alpha} + n\bar{x}\hat{\beta} = n\bar{y} \quad (10.9)$$

$$n\bar{x}\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (10.10)$$

Ecuatiile din ultimul sistem se numesc ecuații normale. Înmulțind (10.9) cu  $\bar{x}$  și scăzând-o din (10.10)  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\widehat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} \text{ vezi calculul lui } D = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \sum_{i=1}^n y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n [y_i (x_i - \bar{x}) - \bar{y} (x_i - \bar{x})]}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.\end{aligned}$$

Din (10.9)  $\Rightarrow$

$$\widehat{\alpha} = \bar{y} - \bar{x} \widehat{\beta}. \square$$

Restabilim rezultatele de mai sus folosind o notație matriceală care ușurează calculele și permite generalizări când considerăm modele mai generale de regresie.

În termeni de valori de selecție observate  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , avem sistemul de ecuații de regresie observate

$$y_i = \alpha + \beta x_i + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10.11)$$

Fie

$$C = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix},$$

și

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Ecuatiile (10.11) se scriu echivalent

$$\mathbf{y} = C\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}. \quad (10.12)$$

Suma pătratelor reziduurilor dată de relația (10.6) este acum

$$Q(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{e}^T \mathbf{e} = (\mathbf{y} - C\boldsymbol{\theta})^T (\mathbf{y} - C\boldsymbol{\theta}). \quad (10.13)$$

Estimarea prin metoda celor mai mici pătrate a lui  $\boldsymbol{\theta}$ ,  $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ , este găsită minimizând  $Q$ . Deoarece

$$\nabla Q(\boldsymbol{\theta}) = -2C^T (\mathbf{y} - C\boldsymbol{\theta})$$

și

$$HQ(\boldsymbol{\theta}) = 2C^T C$$

este pozitiv definită, soluția  $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$  este obținută din

$$\nabla Q(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) = 0,$$

deci din ecuația normală

$$C^T (\mathbf{y} - C\hat{\boldsymbol{\theta}}) = 0, \quad (10.14)$$

sau

$$C^T C\hat{\boldsymbol{\theta}} = C^T \mathbf{y},$$

care dă

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (C^T C)^{-1} C^T \mathbf{y}. \quad (10.15)$$

În cele de mai sus, matricea  $HQ(\boldsymbol{\theta})$  este pozitiv definită și inversa matricei  $C^T C$  există dacă sunt cel puțin 2 valori distincte  $x_i$  în selecție.

Verificăm că relația (10.15) este identică cu relațiile (10.7) și (10.8) observând că

$$C^T C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & n\bar{x} \\ n\bar{x} & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{pmatrix},$$

$$(C^T C)^{-1} = \frac{1}{\det C^T C} (C^T C)^* = \frac{1}{n \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right)} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & -n\bar{x} \\ -n\bar{x} & n \end{pmatrix},$$

$$C^T \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\bar{y} \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{pmatrix}$$

și

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (C^T C)^{-1} C^T \mathbf{y} = \frac{1}{n \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right)} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & -n\bar{x} \\ -n\bar{x} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n\bar{y} \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\bar{y} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x} \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \\ \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \bar{y} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} \bar{x} \\ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} \\ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \end{pmatrix}.$$

**Exemplul 10.1.** Este de așteptat ca randamentul procentual mediu,  $Y$ , dintr-un proces chimic să fie legat liniar de temperatura procesului,  $x$ , în  $^{\circ}C$ . Determinați prin metoda celor mai mici pătrate dreapta de regresie pentru  $E(Y)$  pe baza a 10 observații date în tabelul

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x (^{\circ}C)$	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
$y$	43	45	48	51	55	57	59	63	66	68

**R.** Pentru a folosi relațiile (10.7) și (10.8) avem nevoie de următoarele cantități

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{10} (45 + 50 + \dots + 90) = \frac{5 \cdot 135}{10} = 67,5,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{10} (43 + 45 + \dots + 68) = 55,5,$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 2062,5,$$

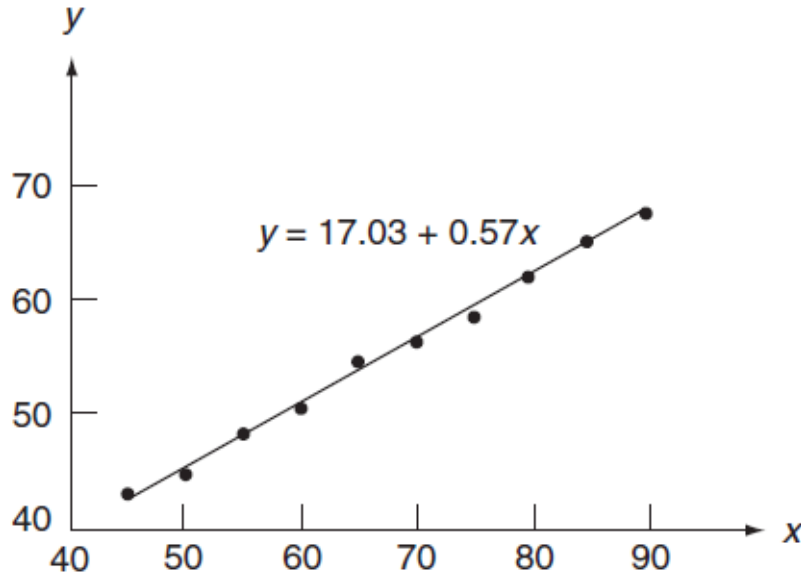
$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 1182,5.$$

Înlocuirea acestor valori în relațiile (10.7) și (10.8) dă

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{1182,5}{2062,5} \simeq 0,57,$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} \simeq 55,5 - 0,57 \cdot 67,5 \simeq 17,03.$$

Deci dreapta de regresie estimată are ecuația  $y = 17,03 + 0,57x$  și este arătată împreună cu valorile selecției observate în figura următoare.



Relațiile de regresie sunt valabile doar pentru intervalul valorilor  $x$  reprezentate de date. Astfel, dreapta de regresie estimată în exemplul 10.1 e valabilă doar pentru temperaturi între  $45^{\circ}\text{C}$  și  $90^{\circ}\text{C}$ . Extrapolarea rezultatului în afara acestui interval poate conduce la greșeli și nu este valabilă în general.

Analiza regresiei liniare ca cea făcută în exemplul 10.1 este bazată pe presupunerea că adevărata relație între  $E(Y)$  și  $x$  este liniară. Dacă relația este neliniară sau inexistentă, regresia liniară produce rezultate fără sens, chiar dacă o linie dreaptă pare să dea o bună potrivire a datelor.

### 10.1.2 Proprietățile estimatorilor prin metoda celor mai mici pătrate

Fie  $\hat{A}$  și  $\hat{B}$ , estimatorii prin metoda celor mai mici pătrate pentru  $\alpha$ , respectiv  $\beta$  și fie

$$\hat{\Theta} = \begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{pmatrix}. \quad (10.16)$$

Din relația (10.15) avem

$$\hat{\Theta} = (C^T C)^{-1} C^T \mathbf{Y}, \quad (10.17)$$

unde

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \quad (10.18)$$

și  $Y_j, j = 1, 2, \dots, n$ , sunt independente și identic repartizate în concordanță cu relația (10.4). Astfel, dacă scriem

$$\mathbf{Y} = C\theta + \mathbf{E}, \quad (10.19)$$

atunci  $\mathbf{E}$  este un vector aleator cu media 0 și matricea de covarianță  $\mathbf{\Lambda} = \sigma^2 \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{I}$  fiind matricea unitate de ordinul  $n$ .

Din relațiile (10.17) și (10.19), avem

$$E(\hat{\boldsymbol{\Theta}}) = (C^T C)^{-1} C^T E(\mathbf{Y}) = (C^T C)^{-1} C^T [C\boldsymbol{\theta} + E(\mathbf{E})] = (C^T C)^{-1} C^T C\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} \quad (10.20)$$

De aici, estimatorii  $\hat{A}$  și  $\hat{B}$  pentru  $\alpha$ , respectiv  $\beta$ , sunt nedeplasați.

Matricea de covarianță asociată cu  $\hat{\boldsymbol{\Theta}}$  este dată de, după cum rezultă din relația (10.17) și lema 3.1, deoarece  $(C^T C)^{-1}$  este simetrică,

$$\text{cov}(\hat{\boldsymbol{\Theta}}) = E\left((\hat{\boldsymbol{\Theta}} - \boldsymbol{\theta})(\hat{\boldsymbol{\Theta}} - \boldsymbol{\theta})^T\right) = (C^T C)^{-1} C^T \text{cov}(\mathbf{Y}) C (C^T C)^{-1}.$$

Dar  $\text{cov}(\mathbf{Y}) = \sigma^2 \mathbf{I}$ ; astfel, avem

$$\text{cov}(\hat{\boldsymbol{\Theta}}) = \sigma^2 (C^T C)^{-1} C^T C (C^T C)^{-1} = \sigma^2 (C^T C)^{-1}. \quad (10.21)$$

Elementele de pe diagonala matricei din relația (10.21) dau dispersiile lui  $\hat{A}$  și  $\hat{B}$ . În termeni de elementele lui  $C$ , putem scrie

$$\text{var}(\hat{A}) = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (10.22)$$

$$\text{var}(\hat{B}) = \frac{\sigma^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (10.23)$$

Se vede că aceste dispersii descresc când mărimea selecției  $n$  crește. Astfel, rezultă din capitolul 8 că acești estimatori sunt consistenti. Pentru un  $n$  fixat, dispersia lui  $\hat{B}$  poate fi redusă selectând  $x_i$ -urile astfel încât numitorul relației (10.23) este maximizat; asta poate fi făcut împrăștiind  $x_i$ -urile cât mai departe posibil. În exemplul 10.1, presupunând că suntem liberi să alegem valorile lui  $x_i$ , calitatea lui  $\hat{\beta}$  este îmbunătățită dacă jumătate din citirile  $x$  sunt luate la o extremă a intervalului temperaturii și cealaltă jumătate la cealaltă extremă. Strategia de selecție pentru minimizarea  $\text{var}(\hat{A})$  pentru un  $n$  fixat este de a face  $\bar{x}$  pe cât posibil cât mai aproape de 0.

Sunt dispersiile date de relațiile (10.22) și (10.23) dispersii minime între dispersiile estimatorilor nedeplasați pentru  $\alpha$  și  $\beta$ ? Un răspuns la această întrebare poate fi aflat comparând rezultatele date de relațiile (10.22) și (10.23) cu marginile inferioare Rao-Cramer definite în secțiunea 8.1.2. Pentru a evalua aceste margini, repartiția lui  $Y$  trebuie să fie cunoscută. Totuși, fără a cunoaște repartiția lui  $Y$ , se poate arăta că tehnica celor mai mici pătrate conduce la



*estimatori liniari nedeplasați de dispersie minimă*, adică, dintre toți estimatorii nedeplasați care sunt *liniari* în  $\mathbf{Y}$ , estimatorii prin metoda celor mai mici pătrate au dispersie minimă.

**Teorema 10.2.** Fie variabila aleatoare  $Y$  definită în relația (10.4). Fiind dată o selecție  $(x_1, Y_1), (x_2, Y_2), \dots, (x_n, Y_n)$  a lui  $Y$  cu valorile  $x$  asociate, estimatorii prin metoda celor mai mici pătrate  $\hat{A}$  și  $\hat{B}$  dați de relația (10.17) sunt *estimatori liniari nedeplasați de dispersie minimă* pentru  $\alpha$ , respectiv  $\beta$ .

**Demonstrație.** Considerăm un estimator liniar nedeplasat de forma

$$\Theta^* = \left[ (C^T C)^{-1} C^T + G \right] \mathbf{Y}. \quad (10.24)$$

Vrem să arătăm că dacă  $\Theta^*$  are dispersie minimă, atunci  $G = 0$ .

Datorită relației (10.19), cerința de nedeplasare conduce la

$$GC = 0. \quad (10.25)$$

Considerăm acum matricea de covarianță

$$\text{cov}(\Theta^*) = E \left( (\Theta^* - \theta) (\Theta^* - \theta)^T \right). \quad (10.26)$$

Folosind relațiile (10.19), (10.24), (10.25) și lema 3.1, avem

$$\text{cov}(\Theta^*) = \sigma^2 \left[ (C^T C)^{-1} + GG^T \right].$$

Pentru a minimiza dispersiile asociate cu componentele lui  $\Theta^*$ , trebuie să minimizăm fiecare element diagonal al lui  $GG^T$ . Deoarece elementul diagonal  $ii$  al lui  $GG^T$  este dat de

$$(GG^T)_{ii} = \sum_{j=1}^n g_{ij}^2,$$

unde  $g_{ij}$  este elementul  $ij$  al lui  $G$ , trebuie să avem

$$g_{ij} = 0, \forall i, j$$

și obținem

$$G = 0. \quad (10.27)$$

□

Teorema de mai sus este un caz special al *teoremei Gauss-Markov*.

Altă comparație interesantă este cea dintre estimatorii prin metoda celor mai mici pătrate pentru  $\alpha$  și  $\beta$  și estimatorii lor de verosimilitate maximă cu o repartiție cunoscută pentru variabila aleatoare  $Y$ . Se poate arăta că estimatorii de verosimilitate maximă pentru  $\alpha$  și  $\beta$  sunt identici cu cei prin metoda celor mai mici pătrate sub ipoteza suplimentară că  $Y$  este repartizată normal.

## 11 Regresie liniară simplă. Estimarea parametrilor prin metoda celor mai mici pătrate. Intervaale de încredere pentru parametrii de regresie

### 11.1 Estimator nedeplasat pentru $\sigma^2$

Metoda celor mai mici pătrate nu conduce la un estimator pentru dispersia  $\sigma^2$  a lui  $Y$ , care este în general de asemenea o cantitate necunoscută în modelele de regresie liniară. O alegere intuitivă pentru un estimator pentru  $\sigma^2$  este

$$\widehat{\Sigma}^2 = k \sum_{i=1}^n \left[ Y_i - (\widehat{A} + \widehat{B}x_i) \right]^2, \quad (11.1)$$

unde coeficientul  $k$  este ales astfel încât  $\widehat{\Sigma}^2$  este nedeplasat. Pentru a calcula media lui  $\widehat{\Sigma}^2$ , observăm că (vezi relația (10.7))

$$Y_i - \widehat{A} - \widehat{B}x_i = Y_i - (\bar{Y} - \widehat{B}\bar{x}) - \widehat{B}x_i = (Y_i - \bar{Y}) - \widehat{B}(x_i - \bar{x}). \quad (11.2)$$

De aici rezultă

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \widehat{A} - \widehat{B}x_i)^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 - \widehat{B}^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad (11.3)$$

deoarece (vezi relația (10.8))

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y}) = \widehat{B} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (11.4)$$

Se poate arăta că

$$E(\widehat{\Sigma}^2) = kE\left(\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 - \widehat{B}^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right) = k(n-2)\sigma^2.$$

De aici,  $\widehat{\Sigma}^2$  este nedeplasat pentru  $k = \frac{1}{n-2}$ , fiind dat de

$$\widehat{\Sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \left[ Y_i - (\widehat{A} + \widehat{B}x_i) \right]^2, \quad (11.5)$$

sau, datorită relației (11.3),

$$\widehat{\Sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \left[ \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 - \widehat{B}^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]. \quad (11.6)$$

**Exemplul 11.1.** Pentru datele din exemplul 10.1, să se determine o estimare nedeplasată pentru  $\sigma^2$ .

Am obținut în exemplul 10.1

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 2062,5,$$

$$\hat{\beta} = 0,57.$$

În plus, obținem

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = 680,5.$$

Relația (11.6) dă

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{8} [680,5 - 0,57^2 \cdot 2062,5] = 1,3.$$

**Exemplul 11.2.** Se face un experiment pe elasticitatea țesutului plămânului ca o funcție de proprietățile de extindere ale plămânului și măsurătorile din tabelul următor sunt cele ale modulului lui Young al țesutului ( $Y$ ), în  $g/cm^2$ , la diferite valori ale extinderii plămânului în termeni de tensiune ( $x$ ), în  $g/cm^2$ .

$x$	2	2.5	3	5	7	9	10	12	15	16
$y$	9.1	19.2	18.0	31.3	40.9	32.0	54.3	49.1	73.0	91.0
			17	18	19	20				
			79.0	68.0	110.5	130.8				

Presupunând că  $E(Y)$  este legată liniar de  $x$  și că  $\sigma_Y^2 = \sigma^2$  (o constantă), determinați estimările prin metoda celor mai mici pătrate pentru coeficienții de regresie și o estimare nedeplasată pentru  $\sigma^2$ .

În acest caz avem  $n = 14$ . Cantitățile care ne interesează sunt

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{14} (2 + 2,5 + \dots + 20) = 11,11,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{14} (9,1 + 19,2 + \dots + 130,8) = 57,59,$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 546,09,$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = 17179,54,$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 2862,12.$$

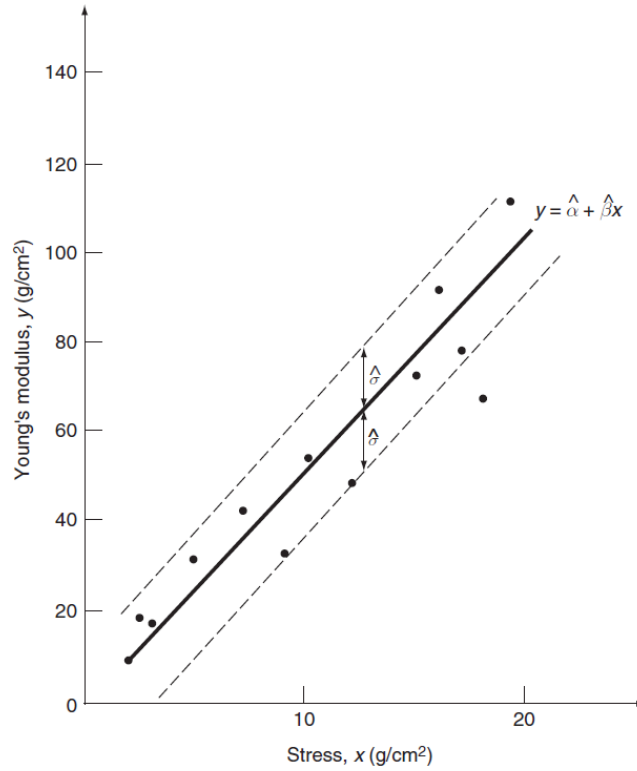
Înlocuirea acestor valori în relațiile (10.8), (10.7) și (11.6) dă

$$\hat{\beta} = \frac{2862,12}{546,09} = 5,24,$$

$$\hat{\alpha} = 57,59 - 5,24 \cdot 11,11 = -0,63$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{12} [17179,54 - 5,24^2 \cdot 546,09] = 182,1.$$

Dreapta de regresie estimată împreună cu datele sunt arătate în figura următoare.



Deviația standard estimată este  $\hat{\sigma} = \sqrt{182,1} = 13,49 \text{ g/cm}^2$  și  $\sigma$ -banda este de asemenea arătată în figură.

## 11.2 Intervale de încredere pentru coeficienții de regresie

Presupunem că  $Y \sim N(\alpha + \beta x, \sigma^2)$ . Deoarece estimatorii  $\hat{A}, \hat{B}$  și  $\hat{A} + \hat{B}x$  sunt funcții liniare de selecția  $Y$ , ei sunt de asemenea variabile aleatoare normale.

Când mărimea selecției  $n$  este mare,  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  și  $\hat{A} + \hat{B}x$  au o repartiție normală pe baza teoremei limită centrală, indiferent de repartiția lui  $Y$ .

Urmăm calea din secțiunea 9.2 pentru a stabili limite de încredere. Se pot verifica următoarele rezultate:

i) Fie  $\widehat{\Sigma}^2$  estimatorul nedeplasat pentru  $\sigma^2$  definit de relația (11.6) și fie

$$D = \frac{(n-2)\widehat{\Sigma}^2}{\sigma^2}. \quad (11.7)$$

Rezultă din secțiunea 9.2 că  $D$  este o variabilă aleatoare repartizată  $\chi^2$  cu  $n-2$  grade de libertate.

ii) Considerăm variabilele aleatoare

$$\frac{\hat{A} - \alpha}{\sqrt{\frac{\widehat{\Sigma}^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}} \quad (11.8)$$

și

$$\frac{\hat{B} - \beta}{\sqrt{\frac{\widehat{\Sigma}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}}, \quad (11.9)$$

unde, după cum se observă din relațiile (10.20), (10.22) și (10.23),  $\alpha$  și  $\beta$  sunt mediile lui  $\hat{A}$ , respectiv  $\hat{B}$ , iar numitorii sunt deviațiile standard ale lui  $\hat{A}$ , respectiv  $\hat{B}$ , cu  $\sigma^2$  estimat de  $\widehat{\Sigma}^2$ . Din secțiunea 9.2 rezultă că fiecare dintre aceste variabile aleatoare are o repartiție  $t$  cu  $n-2$  grade de libertate.

iii) Estimatorul  $\widehat{E(Y)}$  pentru media lui  $Y$  este repartizat normal cu media  $\alpha + \beta x$  și dispersia

$$\begin{aligned} \text{var}(\widehat{E(Y)}) &= \text{var}(\hat{A} + \hat{B}x) = \text{var}(\hat{A}) + x^2 \text{var}(\hat{B}) + 2xcov(\hat{A}, \hat{B}) = \sigma^2 \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 + x^2 - 2x\bar{x}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \\ &= \sigma^2 \left[ \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right]. \quad (11.10) \end{aligned}$$

De aici, urmând argumentarea din secțiunea 9.2, variabila aleatoare

$$\frac{\widehat{E(Y)} - (\alpha + \beta x)}{\sqrt{\widehat{\Sigma^2} \left[ \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right]}} \quad (11.11)$$

este de asemenea  $t$ -repartizată cu  $n - 2$  grade de libertate.

Pe baza rezultatelor prezentate mai sus putem stabili limite de încredere pentru toți parametrii de interes. Rezultatele de mai jos sunt o consecință directă a celor din secțiunea 9.2.

1) Un interval de  $[100(1 - \gamma)]\%$  încredere pentru  $\alpha$  este determinat de (vezi relația (9.19))

$$L_{1,2} = \widehat{A} \mp t_{n-2, \gamma/2} \sqrt{\frac{\widehat{\Sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}. \quad (11.12)$$

2) Un interval de  $[100(1 - \gamma)]\%$  încredere pentru  $\beta$  este determinat de (vezi relația (9.19))

$$L_{1,2} = \widehat{B} \mp t_{n-2, \gamma/2} \sqrt{\frac{\widehat{\Sigma^2}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}. \quad (11.13)$$

3) Un interval de  $[100(1 - \gamma)]\%$  încredere pentru  $E(Y) = \alpha + \beta x$  este determinat de (vezi relația (9.19))

$$L_{1,2} = \widehat{E(Y)} \mp t_{n-2, \gamma/2} \sqrt{\widehat{\Sigma^2} \left[ \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right]} \quad (11.14)$$

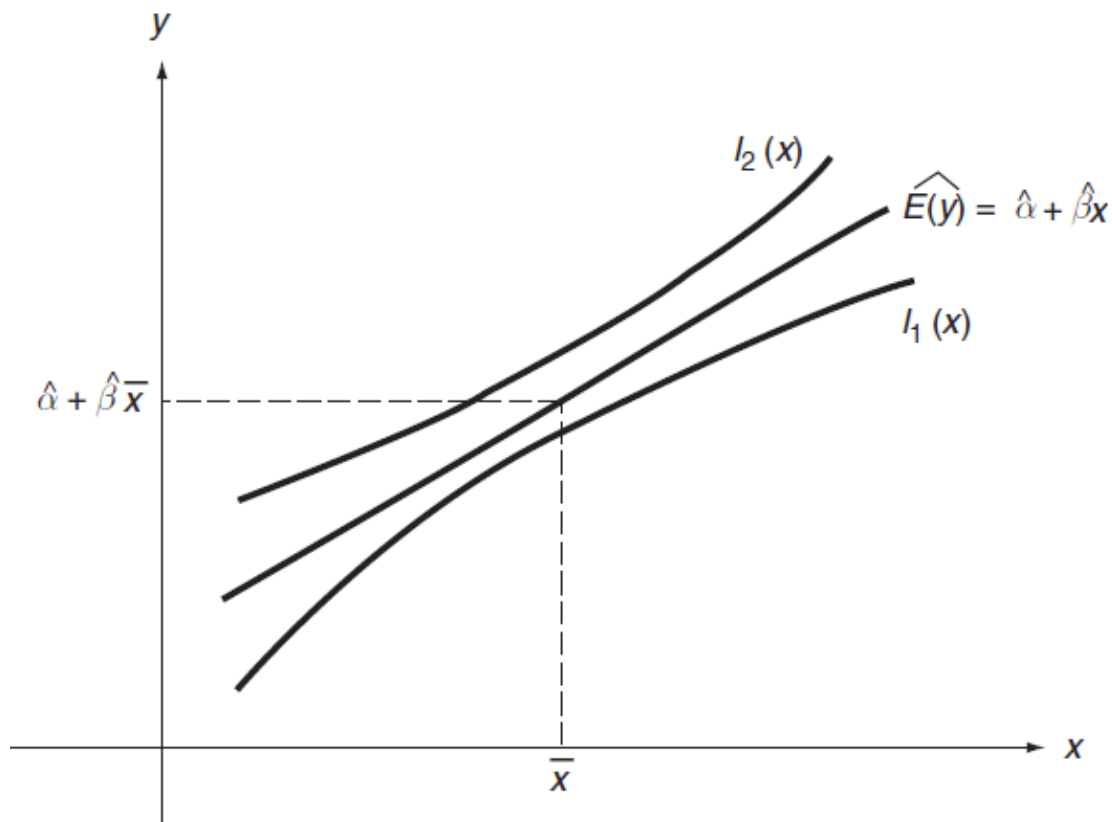
4) Un interval de  $[100(1 - \gamma)]\%$  încredere pentru  $\sigma^2$  cu ambele margini finite este determinat de (vezi relația (9.22))

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{(n-2)\widehat{\Sigma^2}}{\chi_{n-2, \gamma/2}^2}, \\ L_2 &= \frac{(n-2)\widehat{\Sigma^2}}{\chi_{n-2, 1-\gamma/2}^2}. \end{aligned} \quad (11.15)$$

Un interval de  $[100(1 - \gamma)]\%$  încredere pentru  $\sigma^2$  cu o margine finită este determinat de (vezi relația (9.23))

$$L_1 = \frac{(n-2)\widehat{\Sigma^2}}{\chi_{n-1, \gamma}^2}. \quad (11.16)$$

În fiecare caz, atât poziția cât și mărimea intervalului variază de la selecție la selecție. În plus, intervalul de încredere pentru  $\alpha + \beta x$  este o funcție de  $x$ . Dacă se reprezintă valorile observate ale lui  $L_1$  și  $L_2$ , ele formează o *bandă de încredere* în jurul dreptei de regresie estimate, după cum este arătat în figura următoare.



Relația (11.14) arată că cea mai îngustă lățime a bandei apare în  $x = \bar{x}$ . Banda devine mai largă când  $x$  de mișcă din  $\bar{x}$  în orice direcție.

**Exemplul 11.3.** În exemplul 11.2, presupunând că  $Y$  este repartizată normal, să se determine o bandă de 95% încredere pentru  $\alpha + \beta x$ .

Relația (11.14) dă limitele de încredere dorite, cu  $n = 14, \gamma = 0,05$  și

$$\widehat{E(Y)} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x = -0,63 + 5,24x,$$

$$t_{n-2, \gamma/2} = t_{12, 0.025} = 2,179, \text{ din tabelul A.4,}$$

$$\bar{x} = 11,11,$$

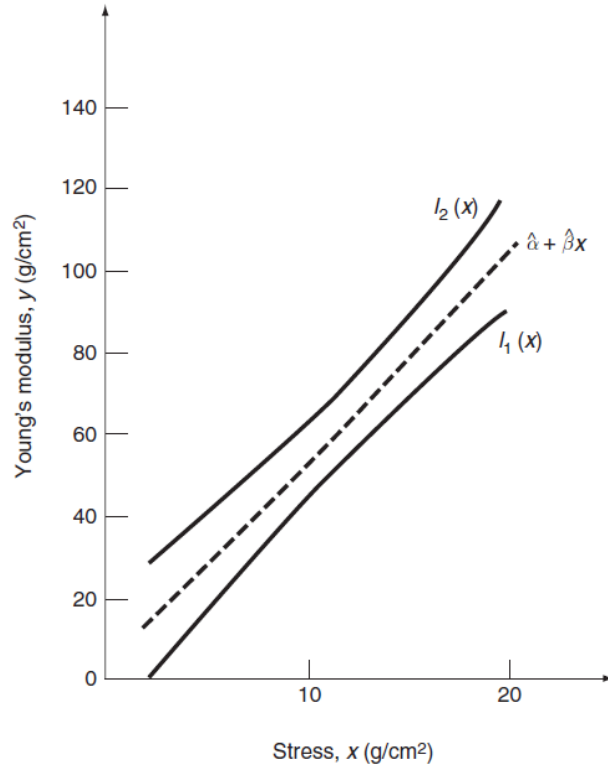
$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 546,09,$$

$$\widehat{\sigma^2} = 182,1.$$

Limitele de încredere observate sunt date de

$$l_{1,2} = -0,63 + 5,24x \mp 2,179 \sqrt{182,1 \left[ \frac{1}{14} + \frac{(x - 11,11)^2}{546,09} \right]}.$$

Rezultatul este arătat grafic în figura următoare.





## 12 Regresie liniară multiplă. Alte modele de regresie

### 12.1 Regresie liniară multiplă

În regresia liniară multiplă, modelul ia forma

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m. \quad (12.1)$$

Din nou, presupunem că dispersia lui  $Y$  este  $\sigma^2$  și este independentă de  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . Ca la regresia liniară simplă suntem interesați să estimăm cei  $m + 1$  coeficienți de regresie  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$  pe baza unei selecții a valorilor lui  $Y$  cu valorile lor asociate ale lui  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ . O selecție de mărime  $n$  în acest caz ia forma  $(x_{11}, x_{21}, \dots, x_{m1}, Y_1), (x_{12}, x_{22}, \dots, x_{m2}, Y_2), \dots, (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{mn}, Y_n)$ . Pentru fiecare set de valori  $x_{ki}, k = 1, 2, \dots, m, Y_i$  este o observație independentă din populația  $Y$  definită prin

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m + E. \quad (12.2)$$

Ca mai înainte,  $E$  este eroarea aleatoare, cu media 0 și dispersia  $\sigma^2$ .

#### 12.1.1 Estimarea prin metoda celor mai mici pătrate

Fiind date seturile de valori de selecție observate  $(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{mi}, y_i), i = 1, 2, \dots, n$ , sistemul de ecuații de regresie observate este

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_m x_{mi} + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12.3)$$

Dacă notăm

$$C = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{m1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

și

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix},$$

relația (12.3) poate fi scrisă

$$\mathbf{y} = C\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}. \quad (12.4)$$

Comparând relația (12.4) cu relația (10.12) din regresia liniară simplă, ecuațiile de regresie observate în ambele cazuri sunt identice cu excepția faptului că  $C$  este acum o matrice  $n \times (m + 1)$  și  $\boldsymbol{\theta}$  este un vector  $(m + 1)$ -dimensional. Păstrând această diferență de dimensiune în minte, rezultatele obținute în cazul

regresiei liniare simple bazate pe relația (10.12) sunt din nou valabile în cazul regresiei liniare multiple. Astfel, fără altă demonstrație, avem pentru soluția estimării prin metoda celor mai mici pătrate  $\hat{\theta}$  a lui  $\theta$  (vezi relația (10.15))

$$\hat{\theta} = (C^T C)^{-1} C^T \mathbf{y}. \quad (12.5)$$

Existența matricei  $(C^T C)^{-1}$  cere ca să existe cel puțin  $(m+1)$  seturi distincte de valori  $(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{mi})$  în selecție.  $C^T C$  este o matrice  $(m+1) \times (m+1)$  simetrică.

**Exemplul 12.1.** Consumul lunar mediu de putere electrică ( $Y$ ) într-o anumită fabrică este considerat a fi liniar dependent de temperatura mediului ambiant ( $x_1$ , în  $^{\circ}F$ ) și numărul de zile lucrătoare din lună ( $x_2$ ). Considerăm datele lunare pe un an din tabelul următor.

$x_1$	20	26	41	55	60	67	75	79	70	55
$x_2$	23	21	24	25	24	26	25	25	24	25
$y$	210	206	260	244	271	285	270	265	234	241
			45	33						
			25	23						
			258	230						

Determinați estimările prin metoda celor mai mici pătrate ai coeficienților de regresie liniară asociați.

În acest caz,  $C$  este o matrice  $12 \times 3$  și

$$C^T C = \begin{pmatrix} 12 & 626 & 290 \\ 626 & 36776 & 15336 \\ 290 & 15336 & 7028 \end{pmatrix},$$

$$C^T \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2974 \\ 159011 \\ 72166 \end{pmatrix}.$$

Astfel avem

$$\hat{\theta} = (C^T C)^{-1} C^T \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -33,84 \\ 0,39 \\ 10,80 \end{pmatrix},$$

sau

$$\hat{\beta}_0 = -33,84, \quad \hat{\beta}_1 = 0,39, \quad \hat{\beta}_2 = 10,8.$$

Ecuția de regresie estimată bazată pe date este astfel

$$\widehat{E(y)} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 = -33,84 + 0,39x_1 + 10,8x_2.$$

Deoarece relația (12.4) coincide cu cea din cazul regresiei liniare simple, multe din rezultatele obținute acolo privind proprietățile estimatorilor prin metoda celor mai mici pătrate pot fi duplicate aici ținând cont doar de noile definiții ale matricei  $C$  și vectorului  $\theta$ .

Scriem estimatorul  $\hat{\Theta}$  pentru  $\theta$  în forma

$$\hat{\Theta} = (C^T C)^{-1} C^T \mathbf{Y}. \quad (12.6)$$

Observăm că

$$E(\hat{\Theta}) = (C^T C)^{-1} C^T E(\mathbf{Y}) = \theta. \quad (12.7)$$

De aici, estimatorul prin metoda celor mai mici pătrate  $\hat{\Theta}$  este din nou nedepășat. De asemenea, din relația (10.21) rezultă că matricea de covarianță pentru  $\hat{\Theta}$  este

$$\text{cov}(\hat{\Theta}) = \sigma^2 (C^T C)^{-1}. \quad (12.8)$$

Intervale de încredere pentru parametrii de regresie în acest caz pot fi de asemenea stabilite urmând proceduri similare celor din cazul regresiei liniare simple.

## 12.2 Alte modele de regresie

În știință și inginerie e adesea necesar să se considere modele de regresie care sunt neliniare în variabilele independente. Exemple de aceste clase de modele sunt

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + E, \quad (12.9)$$

$$Y = \beta_0 \exp(\beta_1 x + E), \quad (12.10)$$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \beta_{12} x_1 x_2 + E, \quad (12.11)$$

$$Y = \beta_0 \beta_1^x + E. \quad (12.12)$$

Modele polinomiale ca relațiile (12.9) sau (12.11) sunt încă modele de regresie liniară, deoarece sunt liniare în parametri necunoscuți  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots$ . De aceea, parametrii pot fi estimați folosind tehnici de regresie liniară multiplă. Într-adevăr, punând  $x_1 = x$  și  $x_2 = x^2$  în relația (12.9), aceasta ia forma unui model de regresie liniară multiplă cu 2 variabile independente și poate fi analizat ca atare. O echivalență similară poate fi stabilită între relația (12.11) și un model de regresie liniară multiplă cu 5 variabile independente.

Considerăm modelul exponențial dat de relația (12.10). Logaritmând ambii membri, avem

$$\ln Y = \ln \beta_0 + \beta_1 x + E. \quad (12.13)$$

În termeni de variabila aleatoare  $\ln Y$ , relația (12.13) reprezintă o ecuație de regresie liniară cu coeficienții de regresie  $\ln \beta_0$  și  $\beta_1$ . Tehnici de regresie liniară se aplică din nou în acest caz. Relația (12.12) nu poate fi pusă convenabil într-o formă de regresie liniară.

**Exemplul 12.2.** În medie, rata creșterii populației ( $Y$ ) asociată cu un oraș dat variază cu  $x$ , numărul de ani după 1970. Presupunând că

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2,$$

calculați estimările prin metoda celor mai mici pătrate pentru  $\beta_0, \beta_1$  și  $\beta_2$  pe baza datelor din tabelul următor.

$x$	0	1	2	3	4	5
$y(\%)$	1.03	1.32	1.57	1.75	1.83	2.33

Fie  $x_1 = x$ ,  $x_2 = x^2$  și

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Estimarea prin metoda celor mai mici pătrate pentru  $\boldsymbol{\theta}$  este dată de relația (12.5) cu

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix}$$

și

$$y = \begin{pmatrix} 1,03 \\ 1,32 \\ 1,57 \\ 1,75 \\ 1,83 \\ 2,33 \end{pmatrix}.$$

Astfel,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (C^T C)^{-1} C^T y = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 9,83 \\ 28,68 \\ 110,88 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,07 \\ 0,2 \\ 0,01 \end{pmatrix},$$

sau

$$\hat{\beta}_0 = 1,07, \quad \hat{\beta}_1 = 0,2 \text{ și } \hat{\beta}_2 = 0,01.$$

Observăm în acest exemplu că, deoarece  $x_2 = x_1^2$ , în matricea  $C$  elementele de pe coloana a treia sunt pătratele elementelor corespunzătoare de pe coloana a doua. Pentru modele de regresie polinomială de ordin superior, situații de acest tip pot conduce la dificultăți în inversarea matricei  $C^T C$ .

## 13 Estimatori neparametrici ai unei densități de repartiție

### 13.1 Preliminarii

Fie  $X_1, X_2, \dots, X_n$  o selecție independentă de mărime  $n$  dintr-o populație  $X$  cu o presupusă densitate  $f(x; \theta)$  sau masă  $p(x; \theta)$ , unde  $\theta$  poate fi specificat sau nu. Notăm cu *ipoteza  $H$*  ipoteza că selecția reprezintă  $n$  valori ale unei variabile aleatoare cu densitatea  $f(x; \theta)$  sau masa  $p(x; \theta)$ . Această ipoteză este numită *ipoteză simplă* când repartiția este complet specificată, adică valorile parametrelor sunt specificate împreună cu forma funcțională a densității sau masei; altfel este o *ipoteză compusă*. Pentru a construi un criteriu pentru testarea ipotezelor este necesar să fie stabilită o ipoteză alternativă împotriva căreia ipoteza  $H$  poate fi testată. Un exemplu de ipoteză alternativă este altă repartiție presupusă sau, ca alt exemplu, ipoteza  $H$  poate fi testată împotriva ipotezei alternative că ipoteza  $H$  nu este adevărată. Vom considera în continuare ultima alegere.

#### 13.1.1 Erori de tipul I și de tipul II

Ca și în estimarea parametrilor, erorile sau riscurile sunt inerente în decizia dacă o ipoteză  $H$  ar trebui să fie acceptată sau respinsă pe baza informației dată de selecție.

**Definiția 13.1.** În testarea ipotezei  $H$ , o eroare de tipul I e comisă când  $H$  este respinsă când de fapt  $H$  este adevărată; o eroare de tipul II este comisă când  $H$  este acceptată când de fapt  $H$  este falsă.

În cele ce urmează, metodele de testare a ipotezelor sunt discutate doar pe baza erorilor de tipul I.

### 13.2 Testul chi-pătrat al bunătații de potrivire

Problema este testarea ipotezei  $H$  care specifică repartiția unei populații  $X$  comparată cu alternativa că repartiția lui  $X$  nu este de tipul specificat pe baza unei selecții de mărime  $n$  din populația  $X$ . Testul chi-pătrat ( $\chi^2$ ) al bunătații de potrivire a fost elaborat pentru acest scop de Pearson în 1900.

#### 13.2.1 Cazul parametrilor cunoscuți

Presupunem mai întâi că repartiția presupusă este complet specificată, fără parametri necunoscuți. Pentru a testa ipoteza  $H$  este folosită o statistică  $h(X_1, X_2, \dots, X_n)$  a selecției, care dă o măsură a deviației repartiției observate construită din selecție de la repartiția presupusă.

În testul  $\chi^2$ , statistica utilizată este legată de diferența dintre diagrama frecvențelor construită din selecție și o diagramă corespunzătoare construită din repartiția presupusă. Se împarte spațiul valorilor lui  $X$  în  $k$  intervale disjuncte

2 câte 2  $A_1, A_2, \dots, A_k$  și fie  $N_i$  numărul  $X_j$ -urilor din  $A_i, i = 1, 2, \dots, k$ . Atunci probabilitățile *observate*  $P(A_i)$  sunt date de

$$P(A_i) \text{ observată} = \frac{N_i}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (13.1)$$

Probabilitățile *teoretice*  $P(A_i)$  pot fi obținute din repartiția presupusă a populației. Le notăm cu

$$P(A_i) \text{ teoretică} = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (13.2)$$

O alegere logică a statisticii dând o măsură a deviației este

$$\sum_{i=1}^k c_i \left( \frac{N_i}{n} - p_i \right)^2, \quad (13.3)$$

care este o măsură naturală a deviației de tipul celor mai mici pătrate. Pearson (1900) a arătat că, dacă luăm coeficientul  $c_i = \frac{n}{p_i}$ , statistica definită prin expresia (13.3) are proprietăți convenabile. De aici, alegem ca măsura deviației

$$D = \sum_{i=1}^k \frac{n}{p_i} \left( \frac{N_i}{n} - p_i \right)^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^k \frac{N_i^2}{np_i} - n. \quad (13.4)$$

$D$  este o statistică deoarece este o funcție de  $N_i$ , care sunt, la rândul lor, funcții de selecția  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Repartiția statisticii  $D$  este dată în teorema următoare, datorată lui Pearson (1900).

**Teorema 13.1.** Presupunând că ipoteza  $H$  este adevărată, repartiția lui  $D$  definită de relația (13.4) tinde la o repartiție chi-pătrat cu  $(k-1)$  grade de libertate când  $n \rightarrow \infty$ . Densitatea ei este dată de (vezi relația (5.24))

$$f_D(d) = \begin{cases} \frac{d^{\frac{k-3}{2}} e^{-\frac{d}{2}}}{2^{\frac{k-1}{2}} \Gamma(\frac{k-1}{2})}, & \text{pentru } d \geq 0; \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \quad (13.5)$$

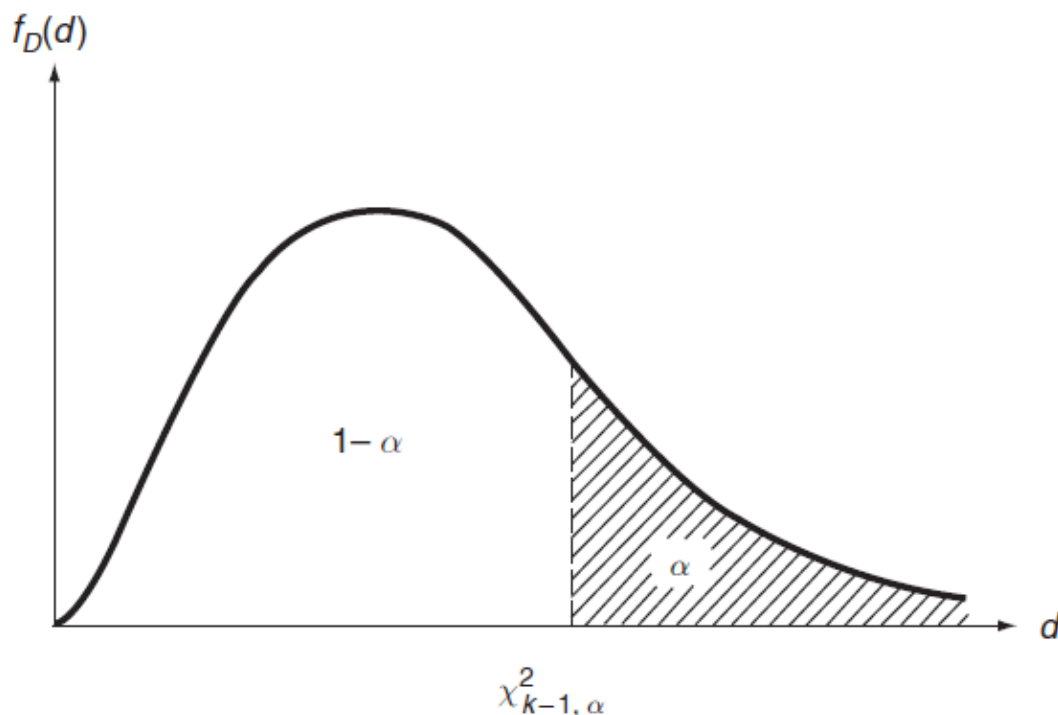
Această repartiție este independentă de repartiția presupusă.  $\square$

Cu ajutorul teoremei 13.1 poate fi construit un test al ipotezei  $H$  considerată mai sus pe baza atribuirii unei probabilități erorii de tipul I. Presupunem că vrem să obținem probabilitatea  $\alpha$  pentru eroarea de tipul I. Testul  $\chi^2$  sugerează că ipoteza  $H$  este respinsă ori de câte ori

$$d = \sum_{i=1}^k \frac{n_i^2}{np_i} - n > \chi_{k-1, \alpha}^2, \quad (13.6)$$

și este acceptată altfel, unde  $d$  este valoarea de selecție a lui  $D$  bazată pe valorile de selecție  $x_i, i = 1, \dots, n$  și  $\chi_{k-1, \alpha}^2$  este valoarea astfel încât (vezi figura următoare)

$$P(D > \chi_{k-1, \alpha}^2) = \alpha. \quad (13.7)$$



Deoarece  $D$  are o repartiție chi-pătrat cu  $(k - 1)$  grade de libertate pentru  $n$  mare, o valoare aproximativă pentru  $\chi^2_{k-1, \alpha}$  poate fi găsită din tabelul A.5 din cursul 9 pentru repartiția  $\chi^2$  când  $\alpha$  este specificat.

Probabilitatea  $\alpha$  a erorii de tipul I se numește *nivel de semnificație* în acest context. După cum vedem din figura de mai sus, reprezintă aria de sub  $f_D$  de la dreapta lui  $\chi^2_{k-1, \alpha}$ . Punând  $\alpha = 0,05$ , de exemplu, criteriul dat de relația (13.6) implică faptul că respingem ipoteza  $H$  ori de câte ori măsura deviației  $d$  calculată dintr-un set dat de valori de selecție pică în regiunea de 5%. Cu alte cuvinte, ne așteptăm să respingem  $H$  în aproximativ 5% din timpul când de fapt  $H$  este adevărată. Ce nivel de semnificație trebuie adoptat într-o situație dată depinde de cazul particular implicat. În practică, valori obișnuite pentru  $\alpha$  sunt 0,001, 0,01 și 0,05; o valoare a lui  $\alpha$  între 1% și 5% este *aproape semnificativă*; o valoare între 0,1% și 1% este *semnificativă*, iar o valoare sub 0,1% este *înalt semnificativă*.

Dăm acum procedura pas cu pas pentru efectuarea testului  $\chi^2$  când repartiția unei populații  $X$  este complet specificată.

- Pasul 1: împarte spațiul de valori ale lui  $X$  în  $k$  intervale convenabile numeric și disjuncte 2 câte 2  $A_i, i = 1, 2, \dots, k$ . Fie  $n_i$ , numărul de valori ale selecției din  $A_i$ . De regulă, dacă  $n_i < 5$ , combină intervalul  $A_i$  cu  $A_{i-1}$  sau  $A_{i+1}$ .

- Pasul 2: calculează probabilitățile teoretice  $P(A_i) = p_i, i = 1, 2, \dots, k$ , cu ajutorul repartiției presupuse.
- Pasul 3: construiește  $d$  dat de relația (13.6).
- Pasul 4: alege o valoare a lui  $\alpha$  și determină din tabelul A.5 pentru repartiția  $\chi^2$  cu  $(k - 1)$  grade de libertate valoarea lui  $\chi_{k-1, \alpha}^2$ .
- Pasul 5: respinge ipoteza  $H$  dacă  $d > \chi_{k-1, \alpha}^2$ . Altfel, acceptă  $H$ .

**Exemplul 13.1.** 300 de becuri sunt testate pentru timpul de ardere  $t$  (în ore) și rezultatul este arătat în tabelul următor.

Burning time, $t$	Number
$t < 100$	121
$100 \leq t < 200$	78
$200 \leq t < 300$	43
$300 \leq t$	58
	<hr/> $n = 300$

Presupunem că timpul aleator de ardere este repartizat exponențial cu timpul mediu de ardere  $\frac{1}{\lambda} = 200$  de ore, adică  $\lambda = 0,005$  pe oră și

$$f_T(t) = 0,005e^{-0,005t}, \quad t \geq 0. \quad (13.8)$$

Testați această ipoteză folosind testul  $\chi^2$  la nivelul de semnificație de 5%.

Pașii necesari în efectuarea testului  $\chi^2$  sunt indicați în tabelul următor.

Interval, $A_i$	$n_i$	$p_i$	$np_i$	$n_i^2/np_i$
$t < 100$	121	0.39	117	125.1
$100 \leq t < 200$	78	0.24	72	84.5
$200 \leq t < 300$	43	0.15	45	41.1
$300 \leq t$	58	0.22	66	51.0
	<hr/> 300	<hr/> 1.00	<hr/> 300	<hr/> 301.7

Prima coloană dă intervalele  $A_i$ , care sunt alese în acest caz să fie intervalele pentru  $t$  date în tabelul anterior. Probabilitățile teoretice  $P(A_i) = p_i$  din coloana a treia sunt calculate folosind relația (13.8). De exemplu,

$$p_1 = P(A_1) = \int_0^{100} 0,005e^{-0,005t} dt = -e^{-0,005t} \Big|_0^{100} = 1 - e^{-0,5} = 0,39;$$



$$p_2 = P(A_2) = \int_{100}^{200} 0,005e^{-0,005t} dt = -e^{-0,005t} \Big|_{100}^{200} = e^{-0,5} - e^{-1} = 0,24.$$

Numerele teoretice de apariții prezise de model sunt date în coloana a patra a tabelului, care, când este comparată cu coloana a doua, dă o măsură a bunătații de potrivire a modelului cu datele. Coloana 5 ( $\frac{n_i^2}{np_i}$ ) este inclusă pentru a facilita calcularea lui  $d$ . Astfel, din relația (13.6) avem

$$d = \sum_{i=1}^k \frac{n_i^2}{np_i} - n = 301,7 - 300 = 1,7.$$

$k = 4$ . Din tabelul A.5 pentru repartiția  $\chi^2$  cu 3 grade de libertate (vezi cursul 9) găsim

$$\chi_{3,0.05}^2 = 7,815.$$

Deoarece  $d < \chi_{3,0.05}^2$ , acceptăm la un nivel de semnificație de 5% ipoteza că datele observate reprezintă o selecție dintr-o repartiție exponențială cu  $\lambda = 0,005$ .

**Exemplul 13.2.** Înregistrarea numărului de accidente din 6 ani ale 7842 de șoferi californieni este dată în tabelul următor.

Number of accidents	Number of drivers
0	5147
1	1859
2	595
3	167
4	54
5	14
> 5	6
	<hr/>
	Total = 7842

Pe baza acestor valori de selecție, testați ipoteza că  $X$ , numărul de accidente din 6 ani pe șofer, este repartizat Poisson cu rata medie  $\nu = 0,08$  pe an la nivelul de semnificație de 1%.

Deoarece  $X$  este discretă, alegem intervalele  $A_i$  ca în prima coloană a tabelului următor.

Interval, $A_i$	$n_i$	$p_i$	$np_i$	$n_i^2/np_i$
$x \leq 0$	5147	0.6188	4853	5459
$0 < x \leq 1$	1859	0.2970	2329	1484
$1 < x \leq 2$	595	0.0713	559	633
$2 < x \leq 3$	167	0.0114	89	313
$3 < x \leq 4$	54	0.0013	10	292
$4 < x \leq 5$	14	0.0001	1	196
$5 < x$	6	0.0001	1	36
	7842	1.0	7842	8413

Intervalul  $x > 5$  ar fi fost combinat cu  $4 < x \leq 5$  dacă numărul  $n_7$  ar fi fost mai mic decât 5.

Repartiția presupusă pentru  $X$  este

$$p_X(x) = \frac{(\nu t)^x e^{-\nu t}}{x!} = \frac{(0,48)^x e^{-0,48}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (13.9)$$

Astfel avem

$$p_i = P(A_i) = \frac{(0,48)^{i-1} e^{-0,48}}{(i-1)!}, \quad i = 1, 2, \dots, 6.$$

$$p_7 = P(A_7) = 1 - \sum_{i=1}^6 p_i.$$

Aceste valori sunt indicate în coloana a treia a tabelului.

Coloana 5 a tabelului dă

$$d = \sum_{i=1}^k \frac{n_i^2}{np_i} - n = 8413 - 7842 = 571.$$

Cu  $k = 7$ , valoarea lui  $\chi_{k-1,\alpha}^2 = \chi_{6,0.01}^2$  este găsită din tabelul A.5

$$\chi_{6,0.01}^2 = 16,812.$$

Deoarece  $d > \chi_{6,0.01}^2$ , ipoteza este respinsă la nivelul de semnificație 1%.

### 13.2.2 Cazul parametrilor estimați

Considerăm acum situația în care parametrii din repartiția presupusă trebuie de asemenea estimați din date. O procedură pentru un test de bunătațe potrivirii

în acest caz este întâi estimarea parametrilor și apoi efectuarea testului  $\chi^2$  pentru parametri cunoscuți. Apare o complicație în aceea că probabilitățile teoretice  $p_i$  definite de relația (13.2) sunt, fiind funcții de parametri repartiției, funcții de selecție. Statistica  $D$  ia acum forma

$$D = \sum_{i=1}^k \frac{n}{\widehat{P}_i} \left( \frac{N_i}{n} - \widehat{P}_i \right)^2 = \sum_{i=1}^k \frac{N_i^2}{n\widehat{P}_i} - n, \quad (13.10)$$

unde  $\widehat{P}_i$  este un estimator pentru  $p_i$  și astfel o statistică.  $D$  este acum o funcție mult mai complicată de  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Care este noua repartiție a lui  $D$ ?

Problema determinării repartiției limită a lui  $D$  în această situație a fost mai întâi considerată de Fischer (1922, 1924), care a arătat că, când  $n \rightarrow \infty$ , repartiția lui  $D$  trebuie modificată, și modificarea depinde de metoda de estimare a parametrilor folosită. Din fericire, pentru o clasă de metode importante de estimare, ca metoda verosimilității maxime, modificarea cerută este simplă, și anume, statistica  $D$  tinde la o repartiție chi pătrat când  $n \rightarrow \infty$ , dar acum cu  $(k - r - 1)$  grade de libertate, unde  $r$  este numărul de parametri de estimat din repartiția presupusă. Cu alte cuvinte, este doar necesar de a reduce numărul de grade de libertate în repartiția limită definită de relația (13.5) cu unu pentru fiecare parametru estimat din selecție.

Dăm acum procedura pas cu pas pentru cazul când  $r$  parametri din repartiție trebuie estimați din date.

- Pasul 1: împarte spațiul de valori ale lui  $X$  în  $k$  intervale convenabile numeric și disjuncte 2 câte 2  $A_i, i = 1, 2, \dots, k$ . Fie  $n_i$ , numărul de valori ale selecției din  $A_i$ . De regulă, dacă  $n_i < 5$ , combină intervalul  $A_i$  cu  $A_{i-1}$  sau  $A_{i+1}$ .
- Pasul 2: estimează cei  $r$  parametri prin metoda verosimilității maxime din date.
- Pasul 3: calculează probabilitățile teoretice  $P(A_i) = p_i, i = 1, 2, \dots, k$ , cu ajutorul repartiției presupuse cu valorile parametrilor estimate.
- Pasul 4: construiește  $d$  dat de relația (13.6).
- Pasul 5: alege o valoare a lui  $\alpha$  și determină din tabelul A.5 pentru repartiția  $\chi^2$  cu  $(k - r - 1)$  grade de libertate valoarea lui  $\chi_{k-r-1, \alpha}^2$ . Se presupune că  $k - r - 1 > 0$ .
- Pasul 6: respinge ipoteza  $H$  dacă  $d > \chi_{k-r-1, \alpha}^2$ . Altfel, acceptă  $H$ .

**Exemplul 13.3.** Sosirile vehiculelor într-un anumit punct au fost înregistrate. Numerele de vehicule sosite în interval de un minut au fost luate pentru 106 minute și sunt date în tabelul următor.

Vehicles per minute (No.)	Number of occurrences
0	0
1	0
2	1
3	3
4	5
5	7
6	13
7	12
8	8
9	9
10	13
11	10
12	5
13	6
14	4
15	5
16	4
17	0
18	1
<hr/>	
$n = 106$	

Pe baza acestor observații, determinați dacă o repartiție Poisson este potrivită pentru  $X$ , numărul de sosiri pe minut, la nivelul de semnificație de 5%.

Repartiția presupusă este

$$p_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad (13.11)$$

unde parametrul  $\lambda$  trebuie să fie estimat din date. Astfel,  $r = 1$ .

Întâi determinăm intervale corespunzătoare  $A_i$  astfel încât  $n_i \geq 5, \forall i$ ; acestea sunt arătate în prima coloană a tabelului următor.

Interval, $A_i$	$n_i$	$p_i$	$np_i$	$n_i^2/np_i$
$0 \leq x < 5$	9	0.052	5.51	14.70
$5 \leq x < 6$	7	0.058	6.15	7.97
$6 \leq x < 7$	13	0.088	9.33	18.11
$7 \leq x < 8$	12	0.115	12.19	11.81
$8 \leq x < 9$	8	0.131	13.89	4.61
$9 \leq x < 10$	9	0.132	13.99	5.79
$10 \leq x < 11$	13	0.120	12.72	13.29
$11 \leq x < 12$	10	0.099	10.49	9.53
$12 \leq x < 13$	5	0.075	7.95	3.14
$13 \leq x < 14$	6	0.054	5.72	6.29
$14 \leq x$	14	0.076	8.06	24.32
	106	1.0	106	119.56

De aici  $k = 11$ .

Estimarea de verosimilitate maximă pentru  $\lambda$  este dată de

$$\hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j = 9,09.$$

Înlocuirea acestei valori pentru parametrul  $\lambda$  în relația (13.11) ne permite să calculăm probabilitățile  $P(A_i) = p_i$ . De exemplu,

$$p_1 = \sum_{j=0}^4 p_X(j) = 0,052,$$

$$p_2 = p_X(5) = 0,058.$$

Aceste probabilități teoretice sunt date în a treia coloană a tabelului.

Din coloana 5 a tabelului obținem

$$d = \sum_{i=1}^k \frac{n_i^2}{np_i} - n = 119,56 - 106 = 13,56.$$

Tabelul A.5 cu  $\alpha = 0,05$  și  $k - r - 1 = 9$  grade de libertate dă

$$\chi_{9,0.05}^2 = 16,919.$$

Deoarece  $d < \chi_{9,0.05}^2$ , repartitia presupusă cu  $\lambda = 9,09$  este acceptată la nivelul de semnificație de 5%.

**Exemplul 13.4.** Pe baza datelor căderilor de zăpadă dintre 1909 și 1979 din tabelul următor, testați ipoteza: căderea anuală de zăpadă poate fi modelată printr-o repartiție normală la nivelul de semnificație de 5%.

Year	Snowfall	Year	Snowfall	Year	Snowfall
1909–1910	126.4	1939–1940	77.8	1969–1970	120.5
1910–1911	82.4	1940–1941	79.3	1970–1971	97.0
1911–1912	78.1	1941–1942	89.6	1971–1972	109.9
1912–1913	51.1	1942–1943	85.5	1972–1973	78.8
1913–1914	90.9	1943–1944	58.0	1973–1974	88.7
1914–1915	76.2	1944–1945	120.7	1974–1975	95.6
1915–1916	104.5	1945–1946	110.5	1975–1976	82.5
1916–1917	87.4	1946–1947	65.4	1976–1977	199.4
1917–1918	110.5	1947–1948	39.9	1977–1978	154.3
1918–1919	25.0	1948–1949	40.1	1978–1979	97.3
1919–1920	69.3	1949–1950	88.7	1979–1980	68.4
1920–1921	53.5	1950–1951	71.4	1980–1981	60.9
1921–1922	39.8	1951–1952	83.0	1981–1982	112.4
1922–1923	63.6	1952–1953	55.9	1982–1983	52.4
1923–1924	46.7	1953–1954	89.9	1983–1984	132.5
1924–1925	72.9	1954–1955	84.6	1984–1985	107.2
1925–1926	74.6	1955–1956	105.2	1985–1986	114.7
1926–1927	83.6	1956–1957	113.7	1986–1987	67.5
1927–1928	80.7	1957–1958	124.7	1987–1988	56.4
1928–1929	60.3	1958–1959	114.5	1988–1989	67.4
1929–1930	79.0	1959–1960	115.6	1989–1990	93.7
1930–1931	74.4	1960–1961	102.4	1990–1991	57.5
1931–1932	49.6	1961–1962	101.4	1991–1992	92.8
1932–1933	54.7	1962–1963	89.8	1992–1993	93.2
1933–1934	71.8	1963–1964	71.5	1993–1994	112.7
1934–1935	49.1	1964–1965	70.9	1994–1995	74.6
1935–1936	103.9	1965–1966	98.3	1995–1996	141.4
1936–1937	51.6	1966–1967	55.5	1996–1997	97.6
1937–1938	82.4	1967–1968	66.1	1997–1998	75.6
1938–1939	83.6	1968–1969	78.4	1998–1999	100.5

Repartiția asumată pentru  $X$ , căderea anuală de zăpadă, este  $N(m, \sigma^2)$  unde  $m$  și  $\sigma^2$  trebuie să fie esimate din date. Doarece estimatorii de verosimilitate maximă pentru  $m$  și  $\sigma^2$  sunt  $\widehat{M} = \bar{X}$ , respectiv  $\widehat{\Sigma}^2 = \frac{n-1}{n}S^2$ , avem

$$\widehat{m} = \bar{x} = \frac{1}{70} \sum_{j=1}^{70} x_j = 83,6,$$

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{69}{70}s^2 = \frac{1}{70} \sum_{j=1}^{70} (x_j - 83,6)^2 = 777,4.$$

Cu intervalele  $A_i$  definite după cum se arată în prima coloană a tabelului următor, probabilitățile teoretice  $P(A_i)$  pot fi calculate cu ajutorul tabelului A.3.

Interval, $A_i$	$n_i$	$p_i$	$np_i$	$n_i^2/np_i$
$x \leq 56$	13	0.161	11.27	15.00
$56 < x \leq 72$	10	0.178	12.46	8.03
$72 < x \leq 88$	20	0.224	15.68	25.51
$88 < x \leq 104$	13	0.205	14.35	11.78
$104 < x \leq 120$	8	0.136	9.52	6.72
$120 < x$	6	0.096	6.72	5.36
	70	1.0	70	72.40

De exemplu, primele două dintre aceste probabilități sunt

$$P(A_1) = P(X \leq 56) = P\left(U \leq \frac{56-83.6}{\sqrt{777.4}}\right) = F_U(-0.99) = 1 - F_U(0.99) = 1 - 0.8389 \simeq 0.161;$$

$$P(A_2) = P(56 < X \leq 72) = P(-0.99 < U \leq -0.416) = [1 - F_U(0.416)] - [1 - F_U(0.99)] = 0.339 - 0.161 = 0.178.$$

Informația dată mai sus ne permite să construim restul tabelului. De aici, avem

$$d = \sum_{i=1}^k \frac{n_i^2}{np_i} - n = 72.4 - 70 = 2.4.$$

Numărul de grade de libertate în acest caz este  $k - r - 1 = 6 - 2 - 1 = 3$ . Tabelul A.5 dă astfel

$$\chi_{3,0.05}^2 = 7.815.$$

Deoarece  $d < \chi_{3,0.05}^2$  repartiția normală  $N(83.6, 777.4)$  este acceptabilă la nivelul de semnificație de 5%.

Statistica  $D$  din testul  $\chi^2$  este repartizată  $\chi^2$  doar când  $n \rightarrow \infty$ . Astfel, testul  $\chi^2$  este un test de *selecție mare*. Ca regulă,  $n > 50$  este considerat satisfăcător pentru a îndeplini cerința de selecție mare.

### 13.3 Testul Kolmogorov-Smirnov

Așa-numitul *test de bunătatea potrivirii Kolmogorov-Smirnov*, prescurtat testul K-S, este bazat pe o statistică măsurând deviația *histogramei cumulative* observate de la funcția de repartiție cumulativă presupusă.

Fiind dat un set de valori de selecție  $x_1, x_2, \dots, x_n$  observate dintr-o populație  $X$ , o histogramă cumulativă poate fi construită prin

- aranjarea valorilor de selecție în ordine crescătoare, notate cu  $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ ,
- determinarea funcției de repartiție observată a lui  $X$  în  $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots$ , notate prin  $F^0(x_{(1)}), F^0(x_{(2)}), \dots$ , din relațiile  $F^0(x_{(i)}) = \frac{i}{n}$  și
- conectarea valorilor lui  $F^0(x_{(i)})$  prin segmente de dreaptă.

Statistica test folosită în acest caz este

$$D_2 = \max_{i=1}^n \{ |F^0(X_{(i)}) - F_X(X_{(i)})| \} = \max_{i=1}^n \left\{ \left| \frac{i}{n} - F_X(X_{(i)}) \right| \right\}, \quad (13.12)$$

unde  $X_{(i)}$  este a  $i$ -a statistică de ordine a selecției. Statistica  $D_2$  măsoară astfel maximul valorilor absolute ale celor  $n$  diferențe dintre funcția de repartiție observată și funcția de repartiție presupusă evaluată pentru selecția observată. În cazul când trebuie estimați parametri din repartiția presupusă, valorile  $F_X(X_{(i)})$  sunt obținute folosind estimările.

În timp ce repartiția lui  $D_2$  este dificil de obținut analitic, funcția ei de repartiție poate fi calculată numeric și tabelată. Se poate arăta că repartiția lui  $D_2$  este independentă de repartiția presupusă și este o funcție doar de  $n$ , mărimea selecției.

Efectuarea testului K-S este asemănătoare cu cea a testului  $\chi^2$ . La un nivel de semnificație specificat  $\alpha$ , regula este să se respingă ipoteza  $H$  dacă  $d_2 > c_{n,\alpha}$ ; altfel, se acceptă  $H$ . Aici,  $d_2$  este valoarea de selecție a lui  $D_2$ , și valoarea  $c_{n,\alpha}$  este definită prin

$$P(D_2 > c_{n,\alpha}) = \alpha. \quad (13.13)$$

Valorile  $c_{n,\alpha}$  pentru  $\alpha = 0.01, 0.05$  și  $0.1$  sunt date în tabelul A.6 următor ca funcții de  $n$ .

**Table A.6**  $D_2$  distribution with sample size  $n$ : a table of  $c_{n,\alpha}$  in  $P(D_2 > c_{n,\alpha}) = \alpha$ , for  $\alpha = 0.01$  to  $0.10$ ,  $n = 5, 10, \dots$

$n$	$\alpha$		
	0.10	0.05	0.01
5	0.51	0.56	0.67
10	0.37	0.41	0.49
15	0.30	0.34	0.40
20	0.26	0.29	0.35
25	0.24	0.26	0.32
30	0.22	0.24	0.29
40	0.19	0.21	0.25
Large $n$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$



Sunt și diferențe importante între acest test și testul  $\chi^2$ . În timp ce testul  $\chi^2$  este un test de selecție mare, testul K-S este valabil pentru toate valorile lui  $n$ . Mai departe, testul K-S folosește valorile selecției în forma lor nealterată și neagregată, în timp ce prelucrarea datelor este necesară în efectuarea testului  $\chi^2$ . Ca dezavantaje, testul K-S este valabil doar pentru repartiții continue. De asemenea, valorile lui  $c_{n,\alpha}$  din tabelul A.6 sunt bazate pe o repartiție presupusă specificată complet. Când valorile parametrilor trebuie estimate, nu este disponibilă o metodă riguroasă de ajustare. În aceste cazuri poate fi specificat doar că valorile lui  $c_{n,\alpha}$  trebuie reduse puțin.

Procedura pas cu pas pentru efectuarea testului K-S este:

- Pasul 1: rearanjează valorile selecției  $x_1, x_2, \dots, x_n$  în ordine crescătoare și notează-le  $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ .
- Pasul 2: determină funcția de repartiție observată  $F^0(x)$  în fiecare  $x_{(i)}$  folosind  $F^0(x_{(i)}) = \frac{i}{n}$ .
- Pasul 3: determină funcția de repartiție teoretică  $F_X(x)$  în fiecare  $x_{(i)}$  folosind repartiția presupusă. Parametrii repartiției sunt estimați din date dacă este necesar.
- Pasul 4: formează diferențele  $|F^0(x_{(i)}) - F_X(x_{(i)})|$  pentru  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- Pasul 5: calculează

$$d_2 = \max_{i=1}^n \{|F^0(x_{(i)}) - F_X(x_{(i)})|\}.$$

Determinarea acestei valori maxime cere enumerarea a  $n$  cantități. Această muncă poate fi redusă puțin reprezentând grafic  $F^0(x)$  și  $F_X(x)$  ca funcții de  $x$  și notând locația maximului prin inspecție.

- Pasul 6: alege valoarea lui  $\alpha$  și determină din tabelul A.6 valoarea lui  $c_{n,\alpha}$ .
- Pasul 7: respinge ipoteza  $H$  dacă  $d_2 > c_{n,\alpha}$ . Altfel, acceptă  $H$ .

**Exemplul 13.5.** Se fac 10 măsurători ale rezistenței la întindere a unui material. Ele sunt 30.1, 30.5, 28.7, 31.6, 32.5, 29, 27.4, 29.1, 33.5 și 31. Pe baza acestui set de date, testați ipoteza că rezistența la întindere are o repartiție normală la nivelul de semnificație de 5%.

Reordonarea datelor dă  $x_{(1)} = 27.4, x_{(2)} = 28.7, \dots, x_{(10)} = 33.5$ . Avem

$$F^0(27.4) = 0.1, F^0(28.7) = 0.2, \dots, F^0(33.5) = 1.$$

Cu privire la funcția de repartiție teoretică, sunt mai întâi obținute estimările mediei și dispersiei

$$\hat{m} = \bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} x_j = 30.3.$$

$$\widehat{\sigma^2} = \left( \frac{n-1}{n} \right) s^2 = \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} (x_j - 30.3)^2 = 3.14.$$

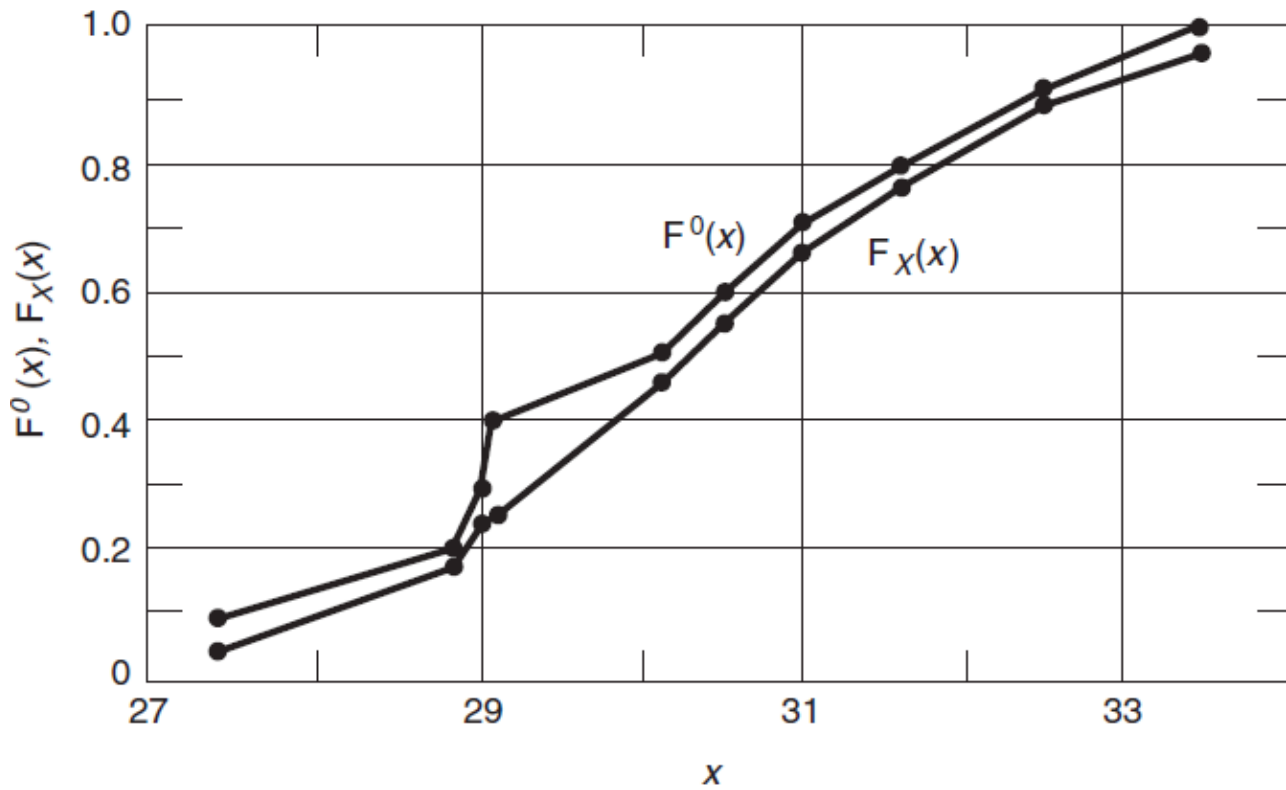
Valorile lui  $F_X(x_{(i)})$  pot fi găsite acum pe baza repartiției  $N(30.3, 3.14)$  pentru  $X$ . De exemplu, cu ajutorul tabelului A.3 pentru variabila aleatoare normală standardizată  $U$ , avem

$$F_X(27.4) = F_U\left(\frac{27.4 - 30.3}{\sqrt{3.14}}\right) = F_U(-1.64) = 1 - F_U(1.64) = 1 - 0.9495 = 0.0505,$$

$$F_X(28.7) = F_U\left(\frac{28.7 - 30.3}{\sqrt{3.14}}\right) = F_U(-0.9) = 1 - F_U(0.9) = 1 - 0.8159 = 0.1841,$$

și așa mai departe.

Pentru a determina  $d_2$  este constructiv să reprezentăm grafic  $F^0(x)$  și  $F_X(x)$  ca funcții de  $x$ , ca în figura următoare.



Se vede din figură că maximum diferențelor dintre  $F^0(x)$  și  $F_X(x)$  apare în  $x = x_{(4)} = 29.1$ . De aici,

$$d_2 = |F^0(x_{(4)}) - F_X(x_{(4)})| = 0.4 - 0.2483 = 0.1517.$$

Cu  $\alpha = 0.05$  și  $n = 10$ , tabelul A.6 dă

$$c_{10,0.05} = 0.41.$$

Deoarece  $d_2 < c_{10,0.05}$ , acceptăm repartiția normală  $N(30.3, 3.14)$  la nivelul de semnificație de 5%.

Deoarece valorile parametrilor au fost de asemenea estimate din date, este mai adecvat să comparăm  $d_2$  cu o valoare puțin mai mică decât 0.41. Datorită faptului că valoarea lui  $d_2$  este mult sub 0.41, concluzia de mai sus este sigură.

## 14 Introducere în metoda MCMC

În multe aplicații ale modelării statistice, analistul de date vrea să folosească un model mai complex pentru un set de date, dar este forțat să recurgă la un model suprasimplificat pentru a folosi tehnicile disponibile. Metoda MCMC (prescurtare de la Markov chain Monte Carlo) este bazată pe simulare și permite statisticianului sau inginerului să examineze datele folosind modele statistice realiste.

### 14.1 Inferență bayesiană

Incertitudinea despre valorile parametrilor necunoscuți se poate reprezenta prin repartiții de probabilitate și se poate proceda ca și cum parametrii ar fi cantități aleatoare. Dacă  $D$  reprezintă datele care sunt observate și  $\theta$  parametrii modelului, atunci, pentru a face orice inferență, trebuie să știm repartiția de probabilitate comună  $P(D, \theta)$  peste toate cantitățile aleatoare. Permiteți lui  $\theta$  să fie multidimensional. Repartiția comună poate fi scrisă

$$P(D, \theta) = P(\theta) P(D|\theta),$$

unde  $P(\theta)$  este numită *a priori* și  $P(D|\theta)$  este numită *verosimilitate*. O dată ce observăm datele  $D$ , putem utiliza teorema lui Bayes pentru a obține *repartiția a posteriori* după cum urmează

$$P(\theta|D) = \frac{P(\theta) P(D|\theta)}{\int P(\theta) P(D|\theta) d\theta}. \quad (14.1)$$

Relația (14.1) dă repartiția lui  $\theta$  condiționată de datele observate  $D$ . Deoarece numitorul relației (14.1) nu este o funcție de  $\theta$  (pentru că integrăm în raport cu  $\theta$ ), putem scrie proporționalitatea

$$P(\theta|D) \propto P(\theta) P(D|\theta) = P(\theta) L(\theta; D).$$

Înțelegerea și folosirea repartiției a posteriori este inima inferenței bayesiene, unde este de interes a face deducții folosind diferite trăsături caracteristice ale repartiției a posteriori (de exemplu momente, quantile, etc.). Aceste cantități pot fi scrise ca medii a posteriori ale funcțiilor de parametrii modelului după cum urmează

$$E(f(\theta)|D) = \frac{\int f(\theta) P(\theta) P(D|\theta) d\theta}{\int P(\theta) P(D|\theta) d\theta}. \quad (14.2)$$

Numitorul din relațiile (14.1) și (14.2) este o constantă de proporționalitate. Uneori, acesta poate fi foarte dificil, dacă nu imposibil, de obținut. Aceasta este adevărat în special când problema este înalt dimensională, deoarece trebuie integrat în raport cu o mulțime de parametri. Integrarea analitică în aceste expresii a fost o sursă de dificultate în aplicațiile inferenței bayesiene, și adesea au fost folosite modele mai simple pentru a face posibilă analiza. Integrarea Monte Carlo folosind MCMC este un răspuns la această problemă.

Schimbăm notația pentru a o face mai generală. Fie  $\mathbf{X}$  un vector de  $d$  variabile aleatoare, cu repartiția notată  $\pi(\mathbf{x})$ . Scopul este de a obține media

$$E(f(\mathbf{X})) = \frac{\int f(\mathbf{x}) \pi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\int \pi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}. \quad (14.3)$$

Cu metoda MCMC trebuie să știm doar repartiția lui  $\mathbf{X}$  până la constanta de normalizare. Aceasta înseamnă că numitorul din relația (14.3) poate fi necunoscut. În cele ce urmează presupunem că  $\mathbf{X}$  ia valori în  $\mathbb{R}^d$ . Metoda poate fi aplicată la variabile aleatoare discrete cu schimbări corespunzătoare.

## 14.2 Integrarea Monte Carlo

Cele mai multe metode din inferența statistică care folosesc simularea pot fi reduse la problema aflării integralelor. Aceasta este o parte fundamentală a metodologiei MCMC.

Integrarea Monte Carlo estimează integrala  $E(f(\mathbf{X}))$  din relația (14.3) obținând selecția  $\mathbf{X}_t, t = 1, \dots, n$  din repartiția  $\pi(\mathbf{x})$  și calculând

$$E(f(\mathbf{X})) \approx \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n f(\mathbf{X}_t). \quad (14.4)$$

Când  $\mathbf{X}_t$  sunt independente, aproximarea poate fi făcută oricât de bună crescând pe  $n$ . În metoda MCMC, selecția nu este independentă în cele mai multe cazuri. Aceasta nu limitează utilizarea ei în aflarea integralelor folosind aproximari ca cea din relația (14.4). Totuși, trebuie avută grijă din cauza dependenței când se determină dispersia estimării din relația (14.4).

**Exemplul 14.1.** Pentru o repartiție exponențială cu  $\lambda = 1$  aflăm  $E(\sqrt{X})$  folosind relația (14.4). Generăm 500 de variabile aleatoare din repartiția dată, luăm radical din fiecare și apoi aflăm media acestor valori. S-a obținut o estimare de 0,889. Valoarea obținută folosind integrarea numerică este 0,886, destul de aproape de cea obținută prin metoda Monte Carlo.

$\mathbf{X}_t$  nu trebuie să fie independente atât timp cât sunt generate din "intregul" domeniu al lui  $\pi(\mathbf{x})$  în proporțiile corecte. Acest proces de generare poate fi făcut construind un lanț Markov care are  $\pi(\mathbf{x})$  ca repartiție staționară.

## 14.3 Lanțuri Markov

Un lanț Markov este un șir de variabile aleatoare astfel încât următoarea valoare sau stare a șirului depinde doar de precedentă. Astfel, generăm un șir de variabile aleatoare  $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \dots$  astfel încât următoarea stare  $\mathbf{X}_{t+1}$  cu  $t \geq 0$  este repartizată conform cu  $P(\mathbf{X}_{t+1}|\mathbf{X}_t)$ , care este numit *nucleul de tranziție*. O realizare a acestui șir este numită de asemenea un lanț Markov. Presupunem că nucleul de tranziție nu depinde de  $t$ , făcând lanțul omogen în raport cu timpul.

O chestiune care trebuie abordată este cât de sensibil este lanțul față de starea sa de start  $\mathbf{X}_0$ . În anumite condiții, lanțul va uita starea sa inițială și

va converge la o repartiție staționară, care este notată cu  $\psi$ . Când  $t$  crește,  $\mathbf{X}_t$  devin dependente de  $\psi$ .

Să presupunem că  $\mathbf{X}_t, t = m + 1, \dots, n$ , au repartiția staționară  $\psi$ . Putem îndepărta primele  $m$  iterate și folosi pe cele  $n - m$  rămase împreună cu relația (14.4) pentru a obține o estimare a mediei după cum urmează

$$E(f(\mathbf{X})) \approx \frac{1}{n-m} \sum_{t=m+1}^n f(\mathbf{X}_t). \quad (14.5)$$

Geyer a sugerat în 1992 că  $m$  poate fi între 1% și 2% din  $n$ , unde  $n$  este suficient de mare pentru a obține precizie adecvată în estimarea dată de relația (14.5).

Cât de mare ar trebui să fie  $n$  pentru a obține precizia cerută în estimare? Calculul dispersiei estimării date de relația (14.5) este dificil, deoarece  $\mathbf{X}_t$  nu sunt independente. Un mod de a determina  $n$  prin simulare este de a genera câteva lanțuri Markov în paralel, fiecare cu o valoare de start diferită. Estimările din relația (14.5) sunt comparate și dacă diferența dintre ele este prea mare, atunci lungimea lanțurilor trebuie crescută.

## 14.4 Analiza rezultatelor

Un analist poate fi interesat în calculul mediilor, dispersiilor marginale, etc. pentru componentele lui  $\mathbf{X}$ . Dacă  $X_{t,j}$  reprezintă componenta  $j$  a lui  $\mathbf{X}_t$  la pasul  $t$  al lanțului, atunci, folosind relația (14.5), putem obține mediile și dispersiile marginale din

$$\bar{X}_{\cdot,j} = \frac{1}{n-m} \sum_{t=m+1}^n X_{t,j},$$

și

$$S_{\cdot,j}^2 = \frac{1}{n-m-1} \sum_{t=m+1}^n (X_{t,j} - \bar{X}_{\cdot,j})^2.$$

Se pot construi lanțuri Markov cu o anumită repartiție staționară de care suntem interesați  $\pi(\mathbf{x})$ , numită adesea *repartiție țintă*.

## BIBLIOGRAFIE

1. Dumitrescu M., Bătătorescu A., Applied statistics using the R System, Editura Universitatii Bucuresti, 2006.
2. Martinez W.L., Martinez A.R., Computational Statistics Handbook with MATLAB, Chapman & Hall, 2002.
3. Saporta G., Probabilité, analyse des données et statistique, Edition Technip, Paris, 1990.
4. Soong, T.T., Fundamentals of probability and statistics for engineers, Wiley, 2004.
5. Tudor C., Teoria Probabilităților, Editura Universității București, 2004.