~ Seminar 1 ~

(recapitulare LFA)

~ Seminar 2 ~

Problema 1

Se dă un număr natural x (în baza 1). Să se deplaseze cu patru poziții spre dreapta.

Fie x = 5 (reprezentat prin 6 de 1). Inițial banda mașinii Turing arată așa:

...	B	1	1	1	1	1	1	B	...

La final, banda va arăta astfel:

...	B	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	B	...

<u>Ideea de rezolvare:</u>
Pas 1. Parcurgem tot numărul deplasându-ne dreapta până la B (blank).

(Adică cât timp citim 1 pe bandă, scriem 1 în loc și facem pas dreapta.)
$\delta(q_0,1)=(q_0,1,\rightarrow)$ // păstrăm aceeași stare pentru că vrem ca mașina să poată aplica această tranziție de oricâte ori (pentru toți 1 din număr).

Pas 2. Când ajungem la B, scriem 4 de 1, făcând de trei ori câte un pas dreapta, iar la final unul spre stânga.

(Avem nevoie de câte o stare diferită pentru fiecare din cei 4 de 1 pe care trebuie să-i scriem. De fiecare dată când ne deplasăm spre dreapta vom citi de pe bandă B pentru că suntem la finalul datelor de intrare și vom scrie 1 în loc.)
$\delta(q_0,B)=(q_1,1,\rightarrow)$
$\delta(q_1,B)=(q_2,1,\rightarrow)$
$\delta(q_2,B)=(q_3,1,\rightarrow)$
$\delta(q_3,B)=(q_4,1,\leftarrow)$

Pas 3. Parcurgem tot numărul (cei 4 de 1 adăugați și apoi numărul inițial) deplasându-ne stânga până la B.

(La fel ca la primul pas, trebuie să păstrăm aceeași stare pentru a putea parcurge toți de 1 de pe bandă.)
$\delta(q_4,1)=(q_4,1,\leftarrow)$

Pas 4. Când ajungem la B, facem un pas dreapta (pentru a ne poziționa pe primul 1), apoi transformăm primii 4 de 1 în 0 făcând de fiecare dată câte un pas dreapta.

(Vom folosi câte o stare nouă pentru fiecare din cele 4 transformări de 1 în 0.
Ultima stare în care ajungem va fi starea finală.)

$\delta(q_4, B) = (q_5, B, \rightarrow)$

$\delta(q_5, 1) = (q_6, 0, \rightarrow)$

$\delta(q_6, 1) = (q_7, 0, \rightarrow)$

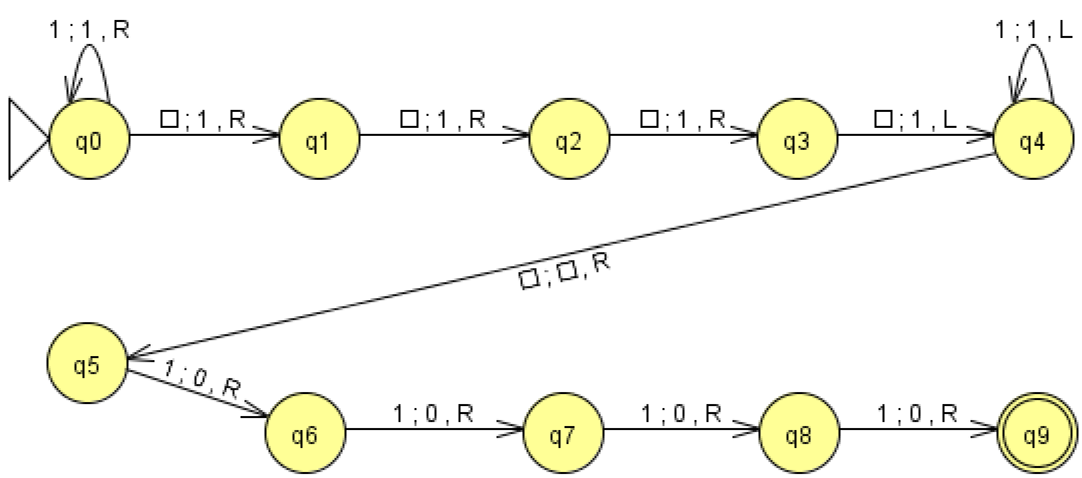
$\delta(q_7, 1) = (q_8, 0, \rightarrow)$

$\delta(q_8, 1) = (q_9, 0, \rightarrow), F = \{q_9\}$

Complexitatea spațiu:
În plus față de numărul dat adăugăm pe bandă (unde erau blank-uri) 4 caractere (la pasul 2). Rezultă C.S. = x+4.

Complexitatea timp:
Pas 1: Parcurgem tot numărul inițial, deci x pași pe bandă.
Pas 2: Scriem cei 4 de 1, deci 4 pași.
Pas 3: Parcurgem ce am scris plus numărul inițial, deci 4+x pași.
Pas 4: Scriem cei 4 de 0, deci 4 pași.
Total: x+4+4+x+4 = 2x+12, rezultă C.T. = O(x).

Aceeași soluție, sub formă de graf:



Problema 2

Se dau două numere naturale x și y. Să se calculeze suma lor.

Fie x = 2, y = 3 (reprezentate prin 3, respectiv 4 de 1). Inițial banda arată așa:

...	B	1	1	1	0	1	1	1	1	B	...

La final, banda va arăta astfel:

...	B	1	1	1	0	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	B	...

<u>Ideea de rezolvare:</u>
Pas 1. Marcăm primul 1 din x, ne deplasăm dreapta până la 0 *(unde schimbăm starea ca să știm că am ajuns pe y)*, marcăm primul 1 din y, ne deplasăm dreapta până la B, scriem 2, pas dreapta, scriem 1, pas stânga.

$\delta(q_0,1) = (q_1,1',\rightarrow) \text{ // } marcam din\ x$

$\delta(q_1,1) = (q_1,1,\rightarrow) \text{ // } parcurgem tot\ x$

$\delta(q_1,0) = (q_2,0,\rightarrow)$

$\delta(q_2,1) = (q_3,1',\rightarrow) \text{ // } marcam din\ y$

$\delta(q_3,1) = (q_3,1,\rightarrow) \text{ // } parcurgem tot\ y$

$\delta(q_3,B) = (q_4,2,\rightarrow)$

$\delta(q_4,B) = (q_5,1,\leftarrow)$

Pas 2. Ne deplasăm stânga până la 1’ din x, apoi pas dreapta.

(Inițial parcurgem în aceeași stare 2-ul și toți de 1 din y și 1’ din y, apoi pentru 0 schimbăm starea ca să știm că am ajuns pe x, apoi parcurgem toți 1 din x cu aceeași stare, iar pentru 1’ din x schimbăm starea și facem pas dreapta.)

$\delta(q_5,2) = (q_5,2,\leftarrow)$

$\delta(q_5,1) = (q_5,1,\leftarrow) \text{ // } parcurgem y$

$\delta(q_5,1') = (q_5,1',\leftarrow)$

$\delta(q_5,0) = (q_6,0,\leftarrow)$

$\delta(q_6,1) = (q_6,1,\leftarrow) \text{ // } parcurgem x$

$\delta(q_6,1') = (q_7,1',\rightarrow)$

Pas 3. Pentru fiecare 1 nemarcat din x, îl marcăm, ne deplasăm dreapta până la B, scriem 1, ne deplasăm stânga până la 1’ din x, pas dreapta și reluăm pasul 3.
Când întâlnim 0 (adică toți de 1 din x sunt marcați), facem doi pași dreapta pentru a sări 0-ul și 1’-ul din y.

$\delta(q_7, 1) = (q_8, 1', \rightarrow)$ // *marcam din x*
$\delta(q_8, a) = (q_8, a, \rightarrow), a \in \{1, 0, 1', 2\}$ // *parcurgem tot pana la B*
$\delta(q_8, B) = (q_9, 1, \leftarrow)$ // *scriem pt x*
$\delta(q_9, b) = (q_9, b, \leftarrow), b \in \{1, 2, 1'\}$ // *parcurgem tot pana la 0*
$\delta(q_9, 0) = (q_{10}, 0, \leftarrow)$
$\delta(q_{10}, 1) = (q_{10}, 1, \leftarrow)$ // *parcurgem x nemarcat*
$\delta(q_{10}, 1') = (q_7, 1', \rightarrow)$ // *reluam pas 3*
$\delta(q_7, 0) = (q_{11}, 0, \rightarrow)$ // *x complet marcat*
$\delta(q_{11}, 1') = (q_{12}, 1', \rightarrow)$

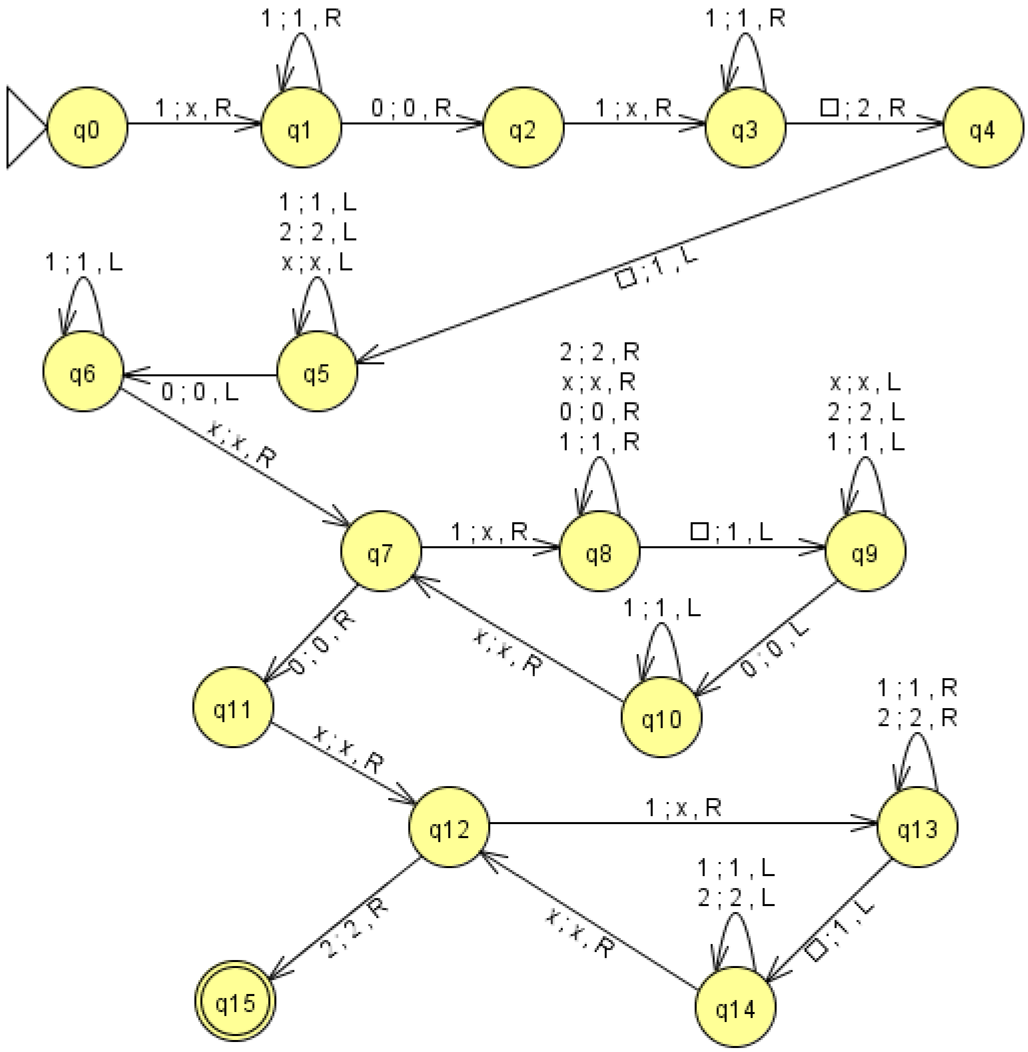
Pas 4. Pentru fiecare 1 nemarcat din y, îl marcăm, ne deplasăm dreapta până la B, scriem 1, ne deplasăm stânga până la 1’ din y, pas dreapta și reluăm pasul 4.
Când întâlnim 2 (adică toți de 1 din y sunt marcați), trecem în starea finală.

$\delta(q_{12}, 1) = (q_{13}, 1', \rightarrow)$ // *marcam din y*
$\delta(q_{13}, c) = (q_{13}, c), c \in \{1, 2\}$ // *parcurgem tot pana la B*
$\delta(q_{13}, B) = (q_{14}, 1, \leftarrow)$ // *scriem pt y*
$\delta(q_{14}, c) = (q_{14}, c, \leftarrow)$ // *parcurgem tot pana la 1' din y*
$\delta(q_{14}, 1') = (q_{12}, 1', \rightarrow)$ // *reluam pas 4*
$\delta(q_{12}, 2) = (q_{15}, 2, \rightarrow), F = \{q_{15}\}$ // *y complet marcat*

<u>Complexitatea spațiu:</u>
Avem datele inițiale x și y, plus rezultatul pe care l-am scris, adică x+y. Rezultă C.S. = 2(x+y) (+2 pt. delimitatori)

<u>Complexitatea timp:</u>
Pas 1: Parcurgem numerele inițiale plus scriem la final două caractere, rezultă x+1+y+2 pași.
Pas 2: Parcurgem banda înapoi spre stânga până la primul caracter, rezultă aproximativ y+x pași.
Pas 3: Se repetă de x ori (”pentru fiecare 1 din x”) și de fiecare dată parcurgem dus-întors o distanță egală cu aproximativ x+y, apoi doi pași la dreapta, rezultă x*2(x+y)+2 pași.
Pas 3: Se repetă de y ori (”pentru fiecare 1 din y”) și de fiecare dată parcurgem dus-întors o distanță egală cu aproximativ y+x (x-ul copiat la pasul 3), rezultă y*2(y+x) pași.
Total: x+1+y+2+y+x+x*2(x+y)+2+y*2(y+x), rezultă $O((x+y)^2)$.

Aceeași soluție, sub formă de graf:
(pentru marcare am folosit x în loc de 1’ pentru că softul permite doar introducerea unui singur caracter)



Obs.: Stările q9 și q10 fac exact ce fac și q5 respectiv q6, deci mai eficient ar fi fost ca tranziția din q8 să o ducem spre q5 și să nu avem stările q9 și q10. E posibil ca la unele grupe să fi făcut varianta mai eficientă și la altele pe aceasta, nu mai știu exact. Oricum, puteți să le testați pe amândouă.

Problema 3

Se dau două numere naturale x și y. Să se calculeze modulul diferenței lor.

Fie x = 5, y = 2 (reprezentate prin 6, respectiv 3 de 1). Inițial banda arată așa:

...	B	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	B	...

La final, banda va arăta astfel:

...	B	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	2	1	1	1	1	B	...

<u>Ideea de rezolvare:</u>
Pas 1. Marcăm primul 1 din x, ne deplasăm dreapta până la 0 *(unde schimbăm starea ca să știm că am ajuns pe y)*, marcăm primul 1 din y, ne deplasăm dreapta până la B, scriem 2, pas dreapta, scriem 1, pas stânga.

$$\delta(q_0,1) = (q_1,1',\rightarrow) \, // \, marcam din\ x$$
$$\delta(q_1,1) = (q_1,1,\rightarrow) \, // \, parcurgem tot\ x$$
$$\delta(q_1,0) = (q_2,0,\rightarrow)$$
$$\delta(q_2,1) = (q_3,1',\rightarrow) \, // \, marcam din\ y$$
$$\delta(q_3,1) = (q_3,1,\rightarrow) \, // \, parcurgem tot\ y$$
$$\delta(q_3,B) = (q_4,2,\rightarrow)$$
$$\delta(q_4,B) = (q_5,1,\leftarrow)$$

Pas 2. Ne deplasăm stânga până la 1’ din x, apoi pas dreapta.

(Inițial parcurgem în aceeași stare 2-ul și toți de 1 din y și 1’ din y, apoi pentru 0 schimbăm starea ca să știm că am ajuns pe x, apoi parcurgem toți 1 din x cu aceeași stare, iar pentru 1’ din x schimbăm starea și facem pas dreapta.)

$$\delta(q_5,2) = (q_5,2,\leftarrow)$$
$$\delta(q_5,1) = (q_5,1,\leftarrow) \, // \, parcurgem y$$
$$\delta(q_5,1') = (q_5,1',\leftarrow)$$
$$\delta(q_5,0) = (q_6,0,\leftarrow)$$
$$\delta(q_6,1) = (q_6,1,\leftarrow) \, // \, parcurgem x$$
$$\delta(q_6,1') = (q_7,1',\rightarrow)$$

Pas 3. Marcăm alternativ câte un 1 din x și un 1 din y cât timp este posibil.
Dacă întâlnim 0 (adică toți de 1 din x sunt marcați), înseamnă că avem x≤y, deci mergem la pasul 4a.
Dacă întâlnim 2 (adică toți de 1 din y sunt marcați), înseamnă că avem y<x, deci mergem la pasul 4b.

$\delta(q_7,1) = (q_8,1',\rightarrow) // marcam din\ x$
$\delta(q_8,1) = (q_8,1,\rightarrow) // parcurgem x\ nemarcat$
$\delta(q_8,0) = (q_9,0,\rightarrow)$
$\delta(q_9,1') = (q_9,1',\rightarrow) // parcurgem y\ marcat$
$\delta(q_9,1) = (q_{10},1',\leftarrow) // marcam din\ y$
$\delta(q_{10},1') = (q_{10},1',\leftarrow) // parcurgem y\ marcat$
$\delta(q_{10},0) = (q_6,0,\leftarrow)$
(Am definit anterior în q6 parcurgerea lui x nemarcat, iar la citirea lui 1' mutarea in q7, deci reluarea pasului 3.)

Pas 4a. Capul de citire e poziţionat pe 0 şi trebuie să copiem rezultatul de la finalul lui y. Parcurgem spre dreapta toţi de 1' din y.
Apoi pentru fiecare 1 nemarcat din y, îl marcăm, ne deplasăm dreapta până la B, scriem 1, ne deplasăm stânga până la 1' din y, pas dreapta şi reluăm copierea.

$\delta(q_7,0) = (q_{11},0,\rightarrow) // x\ complet marcat, x \le y$
$\delta(q_{11},1') = (q_{11},1',\rightarrow) // parcurgem y\ marcat$
$\delta(q_{11},1) = (q_{12},1',\rightarrow) // marcam din\ y - x$
$\delta(q_{12},a) = (q_{12},a,\rightarrow), a \in \{1,2\} // parcurgem tot\ pana la\ B$
$\delta(q_{12},B) = (q_{13},1,\leftarrow)$
$\delta(q_{13},a) = (q_{13},a,\leftarrow) // parcurgem tot\ pana la\ 1'\ din\ y$
$\delta(q_{13},1') = (q_{11},1',\rightarrow) // reluam copierea din\ y - x$
$\delta(q_{11},2) = (q_{14},2,\rightarrow), F = \{q_{14}\} // si\ y\ complet marcat$

Pas 4b. Capul de citire e poziţionat pe 2. Mergem la finalul benzii şi scriem un 1 (pentru 1-ul din x pe care îl marcasem deja şi pentru care nu am mai găsit corespondent în y) şi trebuie să copiem rezultatul de la finalul lui x, deci ne deplasăm stânga până la 1' din x şi facem un pas dreapta.
Apoi pentru fiecare 1 nemarcat din x, îl marcăm, ne deplasăm dreapta până la B, scriem 1, ne deplasăm stânga până la 1' din x, pas dreapta şi reluăm copierea.

$\delta(q_9,2)=(q_{15},2,\rightarrow)$ // *y completmarcat, y < x*

$\delta(q_{15},1)=(q_{15},1,\rightarrow)$

$\delta(q_{15},B)=(q_{16},1,\leftarrow)$ // *pt ce marcasemdeja in x*

$\delta(q_{16},b)=(q_{16},b),b\in\{1,2,1'\}$ // *parcurgemtot panala* 0

$\delta(q_{16},0)=(q_{17},0,\leftarrow)$

$\delta(q_{17},1)=(q_{17},1,\leftarrow)$ // *parcurgemx nemarcat*

$\delta(q_{17},1')=(q_{18},1',\rightarrow)$

$\delta(q_{18},1)=(q_{19},1',\rightarrow)$ // *marcamdin x − y*

$\delta(q_{19},c)=(q_{19},c,\rightarrow),c\in\{1,0,1',2\}$ // *parcurgemtot panala B*

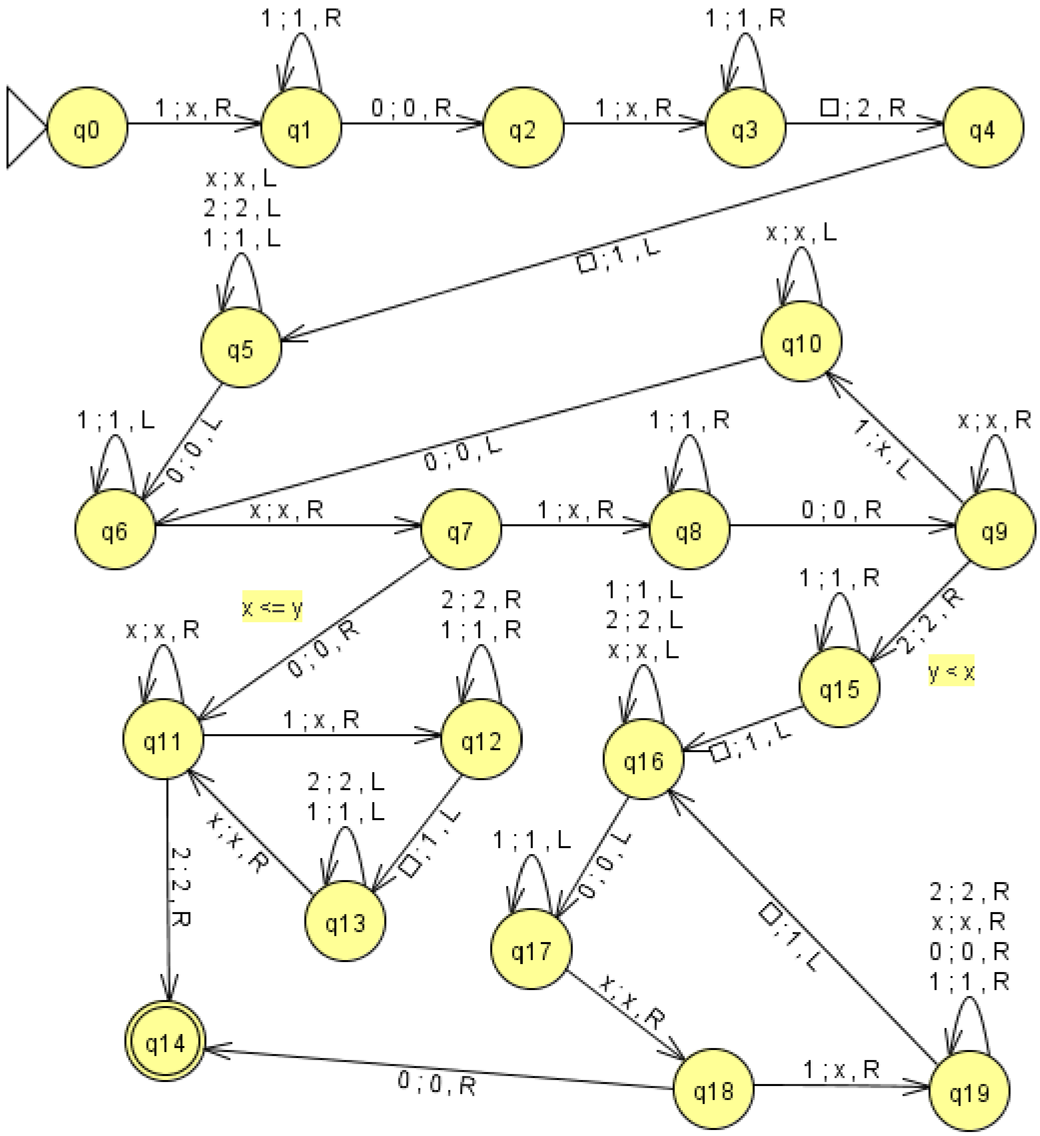
$\delta(q_{19},B)=(q_{16},1,\leftarrow)$ // *reluamcopiereadin x − y*

$\delta(q_{18},0)=(q_{14},0,\rightarrow)$ // *si x completmarcat,* q_{14} *stare finala*

<u>Complexitatea spațiu:</u>
Avem datele inițiale x și y, plus rezultatul pe care l-am scris, adica |x-y|. Rezultă C.S. = x+y+|x-y| = 2 * max{x, y}.

<u>Complexitatea timp:</u>
Pas 1: Parcurgem numerele inițiale plus scriem la final două caractere, rezultă x+1+y+2 pași.
Pas 2: Parcurgem banda înapoi spre stânga până la primul caracter, rezultă aproximativ y+x pași.
Pas 3: Se repetă de min{x,y} ori (până ce este complet marcat unul dintre numere, adică cel mai mic dintre ele) și de fiecare dată parcurgem dus-întors distanța x, rezultă aproximativ min{x,y} * x pași.
Pas 4a: Parcurgem min{x,y} (pentru ca suntem pe 0 și parcurgem toată partea marcată din y). Apoi de |x-y| ori parcurgem dus-întors distanța de |x-y| (pentru a copia diferența aflată la finalul lui y la finalul benzii). Rezultă min{x,y} + |x-y| * |x-y| pași.
Pas 4b: Parcurgem y+|x-y|=max{x,y} (de la finalul benzii până la 1’ din x). Apoi de |x-y| ori parcurgem dus-întors distanța y+|x-y|=max{x,y}. Rezultă max{x,y} + |x-y| * max{x,y} pași.
Total: pas1 + pas2 + pas3 + max{pas4a, pas4b} ≤ $(\max\{x,y\})^2$. Rezultă C.T. = $(\max\{x,y\})^2$.

Aceeași soluție, sub formă de graf:


q0
q1
q2
q3
q4
q5
q6
q7
q8
q9
q10
q11
q12
q13
q14
q15
q16
q17
q18
q19
1 ; x , R
1 ; 1 , R
0 ; 0 , R
1 ; x , R
1 ; 1 , R
□ ; 2 , R
□ ; 1 , L
x ; x , L
2 ; 2 , L
1 ; 1 , L
x ; x , L
0 ; 0 , L
1 ; 1 , L
0 ; 0 , L
1 ; x , L
x ; x , R
x ; x , R
1 ; x , R
1 ; 1 , R
0 ; 0 , R
x <= y
0 ; 0 , R
2 ; 2 , R
1 ; 1 , R
1 ; 1 , L
2 ; 2 , L
x ; x , L
1 ; 1 , R
2 ; 2 , R
y < x
x ; x , R
1 ; x , R
□ ; 1 , L
2 ; 2 , L
1 ; 1 , L
□ ; 1 , L
x ; x , R
2 ; 2 , R
1 ; 1 , L
0 ; 0 , L
□ ; 1 , L
2 ; 2 , R
x ; x , R
0 ; 0 , R
1 ; 1 , R
x ; x , R
1 ; x , R
0 ; 0 , R

~ Seminar 3 ~

Problema 4

Să se accepte cuvintele din limbajul $L = \{a^{2n}b^n \mid n \geq 1\}$**.**

Fie n = 2. Inițial banda mașinii Turing arată așa:

...	B	a	a	a	a	b	b	B	...

La final, banda va arăta astfel:

...	B	a'	a'	a'	a'	b'	b'	B	...

Ideea de rezolvare:

Pas 1. Marcăm doi de a, ne deplasăm dreapta (sărind a-urile nemarcate și b-urile marcate) până la b, marcăm un b, ne deplasăm stânga (sărind b-urile marcate și a-urile nemarcate) până la a', pas dreapta și reluăm acest pas.

$\delta(q_0, a) = (q_1, a', \rightarrow) // \, marcam\, primul\, a$

$\delta(q_1, a) = (q_2, a', \rightarrow) // \, marcam\, al\, doilea\, a$

$\delta(q_2, a) = (q_2, a, \rightarrow) // \, parcurgem\, a-urile\, nemarcate$

$\delta(q_2, b') = (q_2, b', \rightarrow) // \, parcurgem\, b-urile\, marcate$

$\delta(q_2, b) = (q_3, b', \leftarrow) // \, marcam\, un\, b$

$\delta(q_3, b') = (q_3, b', \leftarrow) // \, parcurgem\, b-urile\, marcate$

$\delta(q_3, a) = (q_3, a, \leftarrow) // \, parcurgem\, a-urile\, nemarcate$

$\delta(q_3, a') = (q_0, a', \rightarrow) // \, reluam\, pasul\, 1$

Pas 2. Când toți de a sunt marcați, verificăm ca toți de b să fie marcați. Dacă da, acceptăm intrarea.

$\delta(q_0, b') = (q_4, b', \rightarrow) // \, toate\, a-urile\, sunt\, marcate$

$\delta(q_4, b') = (q_4, b', \rightarrow) // \, parcurgem\, b-urile\, marcate$

$\delta(q_4, B) = (q_5, B, \leftarrow), F = \{q_5\} // \, toate\, b-urile\, sunt\, marcate$

Complexitatea spațiu:

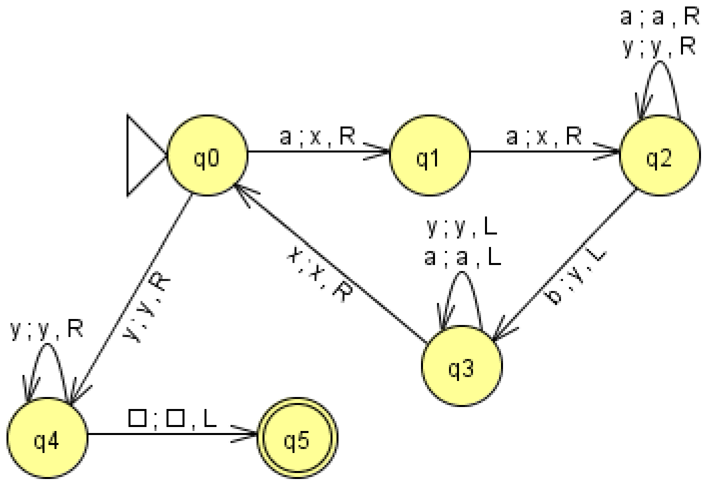
Avem cuvântul inițial și nu scriem nimic în plus. Rezultă C.S. = $|w|_a + |w|_b = |w|$.

Complexitatea timp:

Pas 1: Se repetă până terminăm de marcat toate a-urile (marcând câte două la fiecare pas) sau toate b-urile (marcând câte unul la fiecare pas), deci de $\min\{|w|_a:2, |w|_b\}$ ori. Iar distanța parcursă dus-întors de fiecare dată (pentru a marca doi de a și un b) scade cu câte o unitate la fiecare aplicare a pasului (capătul din stânga se deplasează spre dreapta cu

două poziții pentru că marcăm două a-uri, dar capătul din dreapta se deplasează spre dreapta doar cu o poziție pentru că marcăm un singur b), deci cea mai mare distanță parcursă este la prima aplicare a pasului și este de $|w|_a$ căsuțe (distața de la primul a la primul b). Rezultă $\min\{|w|_a:2, |w|_b\} * 2 * |w|_a$.
Pas 2: Pentru a verifica dacă intrarea trebuie acceptată, parcurgem toate b-urile marcate, adică $|w|_a:2$ (= $|w|_b$ dacă intrarea era corectă).
Rezultă C.T. = $\min\{|w|_a : 2, |w|_b\} * 2 * |w|_a + |w|_a : 2 \Rightarrow O(|w|^2)$.

Aceeași soluție, sub formă de graf:
(pentru marcarea a-urilor am folosit x, iar pentru marcarea b-urilor am folosit y)



Problema 5

Să se accepte cuvintele din limbajul $L = \{a^n b^m c^{2n} \mid n > m \geq 1\}$**.**

Fie n = 3, m = 2. Inițial banda mașinii Turing arată așa:

...	B	a	a	a	b	b	c	c	c	c	c	c	B	...

La final, banda va arăta astfel:

...	B	a'	a'	a'	b'	b'	c'	c'	c'	c'	c'	c'	B	...

<u>Ideea de rezolvare:</u>
Pas 1. Marcăm un a, ne deplasăm dreapta (sărind a-urile nemarcate și b-urile marcate) până la b, marcăm un b, ne deplasăm dreapta (sărind b-urile nemarcate și c-urile marcate) până la c, marcăm doi de c, ne deplasăm stânga (sărind c-urile marcate, b-urile nemarcate, b-urile marcate și a-urile nemarcate) până la a', pas dreapta și reluăm acest pas.

$\delta(q_0, a) = (q_1, a', \rightarrow) // marcam\,un\,a$
$\delta(q_1, a) = (q_1, a, \rightarrow) // parcurgem\,a-urile\,nemarcate$
$\delta(q_1, b') = (q_1, b', \rightarrow) // parcurgem\,b-urile\,marcate$
$\delta(q_1, b) = (q_2, b', \rightarrow) // marcam\,un\,b$
$\delta(q_2, b) = (q_2, b, \rightarrow) // parcurgem\,b-urile\,nemarcate$
$\delta(q_2, c') = (q_2, c', \rightarrow) // parcurgem\,c-urile\,marcate$
$\delta(q_2, c) = (q_3, c', \rightarrow) // marcam\,primul\,c$
$\delta(q_3, c) = (q_4, c', \leftarrow) // marcam\,al\,doilea\,c$
$\delta(q_4, c') = (q_4, c', \leftarrow) // parcurgem\,c-urile\,marcate$
$\delta(q_4, b) = (q_4, b, \leftarrow) // parcurgem\,b-urile\,nemarcate$
$\delta(q_4, b') = (q_4, b', \leftarrow) // parcurgem\,b-urile\,marcate$
$\delta(q_4, a) = (q_4, a, \leftarrow) // parcurgem\,a-urile\,nemarcate$
$\delta(q_4, a') = (q_0, a', \rightarrow) // reluam\,pasul\,1$

Pas 2. Când toate b-urile sunt marcate, trebuie să marcăm două c-uri (corespunzătoare a-ului marcat deja înainte de a nu mai găsi un b pe care să-l marcăm). Deci suntem pe primul c’ de pe bandă (la finalul b-urilor marcate complet), parcurgem spre dreapta toate c-urile marcate, până ajungem la c, apoi marcăm două c-uri, ne deplasăm stânga (sărind c-urile marcate, b-urile marcate și a-urile nemarcate) până la a’ și facem un pas dreapta.

$\delta(q_1, c') = (q_5, c', \rightarrow) // toate\,b-urile\,sunt\,marcate$
$\delta(q_5, c') = (q_5, c', \rightarrow) // parcurgem\,c-urile\,marcate$
$\delta(q_5, c) = (q_6, c', \rightarrow) // marcam\,un\,c$
$\delta(q_6, c) = (q_7, c', \leftarrow) // marcam\,al\,doilea\,c$
$\delta(q_7, c') = (q_7, c', \leftarrow) // parcurgem\,c-urile\,marcate$
$\delta(q_7, b') = (q_7, b', \leftarrow) // parcurgem\,b-urile\,marcate$
$\delta(q_7, a) = (q_7, a, \leftarrow) // parcurgem\,a-urile\,nemarcate$
$\delta(q_7, a') = (q_8, a', \rightarrow)$

Pas 3. Marcăm un a, ne deplasăm dreapta (sărind a-urile nemarcate, b-urile marcate și c-urile marcate) până la c, marcăm doi de c, ne deplasăm stânga (sărind c-urile marcate, b-urile marcate și a-urile nemarcate) până la a’, facem un pas dreapta și reluăm acest pas.

$\delta(q_8, a) = (q_9, a', \rightarrow) // marcam un a$

$\delta(q_9, a) = (q_9, a, \rightarrow) // parcurgem a-urile nemarcate$

$\delta(q_9, b') = (q_9, b', \rightarrow) // parcurgem b-urile marcate$

$\delta(q_9, c') = (q_9, c', \rightarrow) // parcurgem c-urile marcate$

$\delta(q_9, c) = (q_{10}, c', \rightarrow) // marcam un c$

$\delta(q_{10}, c) = (q_{11}, c', \leftarrow) // marcam al doilea c$

$\delta(q_{11}, c') = (q_{11}, c', \leftarrow) // parcurgem c-urile marcate$

$\delta(q_{11}, b') = (q_{11}, b', \leftarrow) // parcurgem b-urile marcate$

$\delta(q_{11}, a) = (q_{11}, a, \leftarrow) // parcurgem a-urile nemarcate$

$\delta(q_{11}, a') = (q_8, a', \rightarrow) // reluam pasul 3$

Pas 4. Când toate a-urile sunt marcate, verificăm ca toate c-urile să fie marcate. Dacă da, acceptăm intrarea. Deci suntem pe primul b' de pe bandă (la finalul a-urilor complet marcate), parcurgem spre dreapta toate b-urile marcate și c-urile marcate, iar apoi trebuie să întâlnim B și să mergem în starea finală.

$\delta(q_8, b') = (q_{12}, b', \rightarrow) // toate a-urile sunt marcate$

$\delta(q_{12}, b') = (q_{12}, b', \rightarrow) // parcurgem b-urile marcate$

$\delta(q_{12}, c') = (q_{12}, c', \rightarrow) // parcurgem c-urile marcate$

$\delta(q_{12}, B) = (q_{13}, B, \leftarrow), F = \{q_{13}\} // toate c-urile sunt marcate, acceptam cuvantul$

Obs: Pasul 2 testează condiția n > m (să avem mai multe a-uri decât b-uri), iar pasul 4 verifică să avem de două ori mai multe c-uri decât a-uri.

<u>Complexitatea spațiu:</u>
Avem cuvântul inițial și nu scriem nimic în plus. Rezultă C.S. = $|w|_a+|w|_b+|w|_c = |w|$.

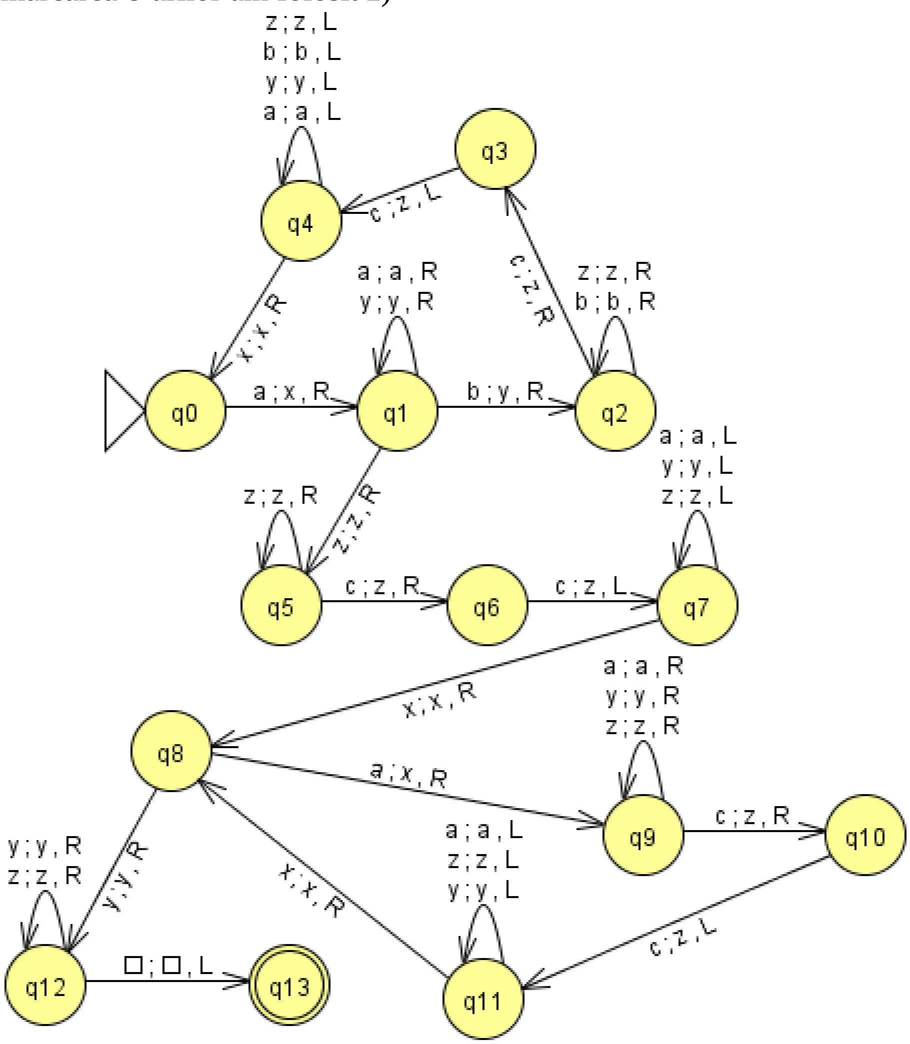
<u>Complexitatea timp:</u>
Pas 1: Se repetă de maxim $|w|_b$ ori. Iar pentru a marca un a, un b și doi de c parcurgem dus-întors o distanța mai mică decât lungimea benzii (Deplasarea cea mai mare este la ultima aplicare a pasului, pentru că la fiecare aplicare distanța crește cu o unitate. La ultima aplicare se parcurg a-urile nemarcate, adică $|w|_a-|w|_b$, b-urile marcate, adică $|w|_b$, și c-urile marcate, adică $2*|w|_b$, deci în total aproximativ $|w|_a+2*|w|_b$). Rezultă $|w|_b * 2 * (|w|_a+2*|w|_b)$.
Pas 2: Se execută o singură dată. Parcurgem spre dreapta toate c-urile marcate și marcăm încă două, adică $2*|w|_b+2$, apoi parcurgem spre stânga până la a marcat, adică c-urile marcate ($2*|w|_b$), b-urile marcate ($|w|_b$) și a-urile nemarcate ($|w|_a-|w|_b$). Rezultă aproximativ $|w|_a+4*|w|_b$.
Pas 3: Se repetă de $|w|_a-|w|_b$ ori. La fel ca la pasul 1, distanța crește cu câte o unitate de fiecare dată și este aceeași ca la pasul 1 (de la primul a nemarcat până la primul c nemarcat). Rezultă $(|w|_a-|w|_b) * 2 * (|w|_a+2*|w|_b)$.

Pas 4: Se execută o singură dată. Suntem la finalul a-urilor marcate și parcurgem banda pentru b-urile marcate ($|w|_b$) și c-urile marcate ($2*|w|_a$). Rezultă $|w|_b+2*|w|_a$.

Total:

$|w|_b * 2 * (|w|_a+2*|w|_b)$
$+ |w|_a+4*|w|_b$
$+ (|w|_a-|w|_b) * 2 * (|w|_a+2*|w|_b)$
$+ |w|_b+2*|w|_a \leq |w|^2 \Rightarrow O(|w|^2)$.

Aceeași soluție, sub formă de graf:
(pentru marcarea a-urilor am folosit x, pentru marcarea b-urilor am folosit y, iar pentru marcarea c-urilor am folosit z)



Problema 6

Se dau două numere naturale x și y. Să se calculeze produsul lor (x*y).

Fie x = 2, y = 3 (reprezentate prin 3, respectiv 4 de 1). Inițial banda arată așa:

...	B	1	1	1	0	1	1	1	1	B	...

La final, banda va arăta astfel:

...	B	1	1	1	0	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	B	...

<u>Ideea de rezolvare:</u>
Pas 1. Marcăm primul 1 din x cu 1’, ne deplasăm dreapta (sărind toți de 1 nemarcați din x și delimitatorul 0), marcăm primul 1 din y cu 1’’, ne deplasăm dreapta (sărind toți de 1 nemarcați din y) pană la B, scriem 2, facem un pas dreapta, scriem 1 (cel în plus pentru rezultat), facem un pas stânga.
Ne deplasăm stânga (sărind 1-urile din rezultat, delimitatorul 2, 1-urile nemarcate din y, 1’’ din y, iar pentru 0 schimbăm starea ca să știm că am ajuns pe x, apoi sărim și 1-urile nemarcate din x) până la 1’ din x, facem un pas dreapta.

$\delta(q_0,1)=(q_1,1',\rightarrow) // \, marcam 1-ul \, in \, plus \, din \, x$

$\delta(q_1,1)=(q_1,1,\rightarrow) // \, parcurgem x \, nemarcat$

$\delta(q_1,0)=(q_2,0,\rightarrow)$

$\delta(q_2,1)=(q_3,1'',\rightarrow) // \, marcam 1-ul \, in \, plus \, din \, y$

$\delta(q_3,1)=(q_3,1,\rightarrow) // \, parcurgem y \, nemarcat$

$\delta(q_3,B)=(q_4,2,\rightarrow)$

$\delta(q_4,B)=(q_5,1,\leftarrow) // \, scriem 1-ul \, in \, plus \, pt \, rezultat$

$\delta(q_5,2)=(q_5,2,\leftarrow)$

$\delta(q_5,1)=(q_5,1,\leftarrow) // \, parcurgem y \, nemarcat$

$\delta(q_5,1'')=(q_5,1'',\leftarrow)$

$\delta(q_5,0)=(q_6,0,\leftarrow)$

$\delta(q_6,1)=(q_6,1,\leftarrow) // \, parcurgem x \, nemarcat$

$\delta(q_6,1')=(q_7,1',\rightarrow)$

Pas 2. (a) Pentru fiecare 1 nemarcat din x, îl marcăm cu 1’, ne deplasăm dreapta (sărind 1-urile nemarcate din x, delimitatorul 0 și 1’’ din y) până la 1 nemarcat din y și mergem la pasul 3(i) (unde îl copiem pe y, în afară de 1’’, la finalul benzii).

$\delta(q_7,1)=(q_8,1',\rightarrow)$ // $marcam din\ x$
$\delta(q_8,1)=(q_8,1,\rightarrow)$ // $parcurgem x\ nemarcat$
$\delta(q_8,0)=(q_9,0,\rightarrow)$
$\delta(q_9,1'')=(q_{10},1'',\rightarrow)$

Pas 3. (i) Pentru fiecare 1 nemarcat din y, îl marcăm cu 1’, ne deplasăm dreapta (sărind 1-urile nemarcate din y, delimitatorul 2 și 1-urile din rezultat) până la B, scriem 1, ne deplasăm stânga (sărind 1-urile din rezultat, delimitatorul 2 și 1-urile nemarcate din y) până la 1’ din y, facem un pas dreapta și reluăm pasul 3(i).

$\delta(q_{10},1)=(q_{11},1',\rightarrow)$ // $marcam din\ y$
$\delta(q_{11},1)=(q_{11},1,\rightarrow)$ // $parcurgem y\ nemarcat si\ rezultatul$
$\delta(q_{11},2)=(q_{11},2,\rightarrow)$
$\delta(q_{11},B)=(q_{12},1,\leftarrow)$ // $scriem\ pt\ rezultat$
$\delta(q_{12},1)=(q_{12},1,\leftarrow)$ // $parcurgem rezultatul si\ y\ nemarcat$
$\delta(q_{12},2)=(q_{12},2,\leftarrow)$
$\delta(q_{12},1')=(q_{10},1',\rightarrow)$ // $reluam\ pasul 3(i)$

Pas 3. (ii) Când toți de 1 din y sunt marcați (am ajuns pe delimitatorul 2), ne deplasăm stânga și demarcăm y, transformând toți de 1’ în 1 (1’’ rămâne marcat). Apoi ne deplasăm stânga (sărind 1’’ din y, schimbăm starea pentru delimitatorul 0, apoi sărin 1-urile nemarcate din x) până la 1’ din x, facem pas dreapta și reluăm pasul 2(a).

$\delta(q_{10},2)=(q_{13},2,\leftarrow)$ // $y\ complet marcat, deci copiat$
$\delta(q_{13},1')=(q_{13},1,\leftarrow)$ // $demarcam y\ (\ fara 1''-ul\ initial)$
$\delta(q_{13},1'')=(q_{14},1'',\leftarrow)$
$\delta(q_{14},0)=(q_6,0,\leftarrow)$ // $parcurgem in\ q_6\ \ x-ul\ nemarcat apoi reluam\ pasul 2(a)$

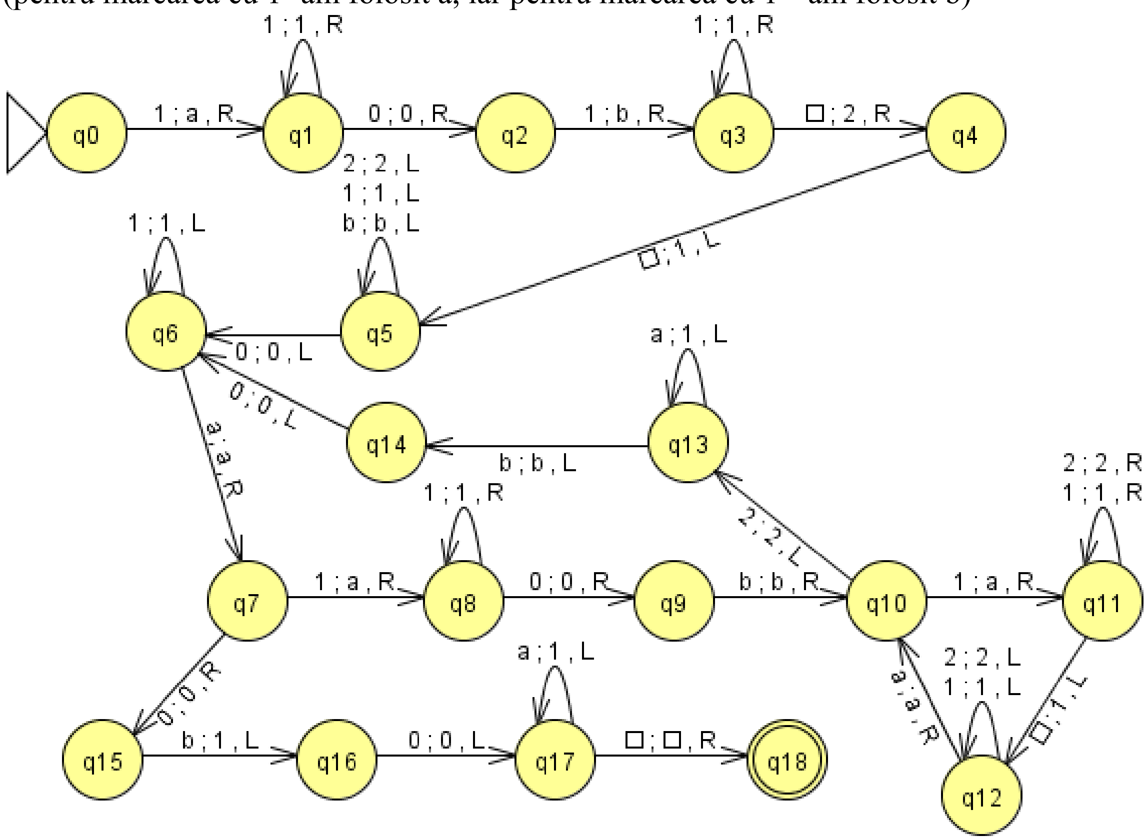
Pas 2. (b) Când toți de 1 din x sunt marcați, *eventual demarcăm tot ce e marcat pe bandă (pentru ca într-adevăr banda să rămână ca în desen, fără marcaje)*, apoi mergem în starea finală.

$\delta(q_7,0)=(q_{15},0,\rightarrow)$ // $x\ complet marcat$
$\delta(q_{15},1'')=(q_{16},1,\leftarrow)$ // $demarcam 1''-ul\ din\ y\ (restul\ din\ y\ e\ deja\ demarcat)$
$\delta(q_{16},0)=(q_{17},0,\leftarrow)$
$\delta(q_{17},1')=(q_{17},1,\leftarrow)$ // $demarcam tot\ x-ul$
$\delta(q_{17},B)=(q_{18},B,\rightarrow), F=\{q_{18}\}$

<u>Complexitatea spațiu:</u>
Avem numerele inițiale, doi delimitatori și rezultatul. Rezultă C.S. = x+y+2 + x*y.

Complexitatea timp:
Pas 1: Se execută o singură dată. Parcurgem dus-întors toată banda inițială și cele două caractere pe care le adăugăm. Rezultă aproximativ 2*(x+y+3).
Pas 2(a): Se repetă de x ori. Parcurgem maxim x căsuțe și aplicăm pasul 3. Rezultă x * (x + pasul_3i + pasul_3ii).
Pas 3(i): Se repetă de y ori *(dar pentru fiecare 1 din x)*. Cea mai mare distanță parcursă este la ultima copiere a lui y, când trebuie să parcurgem dus-întors tot rezultatul final, adică x*y. Rezultă y * 2 * x*y.
Pas 3(ii): Se execută o singură dată *(dar pentru fiecare 1 din x)*. Parcurgem maxim y+x.
Pas 2(b): Se execută o singură dată. Parcurgem aproximativ x+3 căsuțe.
Total: 2*(x+y+3) + x * [x + (y * 2 * x*y) + (y+x)] + x+3 => O(x^2y^2).

Aceeași soluție, sub formă de graf:
(pentru marcarea cu 1' am folosit a, iar pentru marcarea cu 1'' am folosit b)



~ Seminar 4 ~

Problema 7

Să se accepte cuvintele din limbajul $L=\{w\in\{a,b,c\}^*, |w|_a=|w|_b=|w|_c>0\}$ **.**

De exemplu iniţial banda maşinii Turing arată aşa:

...	B	a	c	b	c	c	a	b	a	b	B	...

La final, banda va arăta astfel:

...	B	a'	c'	b'	c'	c'	a'	b'	a'	b'	B	...

<u>Ideea de rezolvare:</u>
Cât timp este posibil, căutăm în această ordine un a, un b şi un c pe care să-i marcăm, iar dacă atunci când toţi de a sunt marcaţi şi toţi de b şi toţi de c sunt marcaţi, acceptăm intrarea.

Pas 1. Ne deplasăm dreapta (sărind a', b', b, c' şi c) până la primul a, îl marcăm cu a', ne deplasăm stânga (sărind a', b, c şi c') până la b' sau B, pas dreapta.

$$\delta(q_0,x)=(q_0,x,\rightarrow), x\in\{a',b',b,c',c\} \text{ // } sarim\ orice\ in\ afara\ de\ a$$
$$\delta(q_0,a)=(q_1,a',\leftarrow) \text{ // } marcam\ un\ a$$
$$\delta(q_1,y)=(q_1,y,\leftarrow), y\in\{a',b,c,c'\} \text{ // } sarim\ orice\ in\ afara\ de\ a\ si\ de\ b'$$
$$\delta(q_1,b')=(q_2,b',\rightarrow) \quad ; \quad \delta(q_1,B)=(q_2,B,\rightarrow)$$

Pas 2. Ne deplasăm dreapta (sărind a', a, b', c' şi c) până la primul b, îl marcăm cu b', ne deplasăm stânga (sărind a, a', b' şi c) până la c' sau B, pas dreapta.

$$\delta(q_2,z)=(q_2,z,\rightarrow), z\in\{a',a,b',c',c\} \text{ // } sarim\ orice\ in\ afara\ de\ b$$
$$\delta(q_2,b)=(q_3,b',\leftarrow) \text{ // } marcam\ un\ b$$
$$\delta(q_3,t)=(q_3,t,\leftarrow), t\in\{a',a,b',c\} \text{ // } sarim\ orice\ in\ afara\ de\ b\ si\ de\ c'$$
$$\delta(q_3,c')=(q_4,c',\rightarrow) \quad ; \quad \delta(q_3,B)=(q_4,B,\rightarrow)$$

Pas 3. Ne deplasăm dreapta (sărind a', a, b', b şi c') până la primul c, îl marcăm cu c', ne deplasăm stânga (sărind a, b, b' şi c') până la a' sau B, pas dreapta şi reluăm pasul 1.

$\delta(q_4, p) = (q_4, p, \rightarrow), p \in \{a', a, b', b, c'\} // sarim\ orice\ in\ afara\ de\ c$
$\delta(q_4, c) = (q_5, c', \leftarrow) // marcam\ un\ c$
$\delta(q_5, r) = (q_5, r, \leftarrow), r \in \{a, b', b, c'\} // sarim\ orice\ in\ afara\ de\ c\ si\ de\ a'$
$\delta(q_5, a') = (q_6, a', \rightarrow) \quad ; \quad \delta(q_5, B) = (q_6, B, \rightarrow)$

$\delta(q_6, x) = (q_6, x, \rightarrow) // exact\ ce\ faceam\ si\ in\ q_0, \quad reluam\ pasul\ 1$
$\delta(q_6, a) = (q_1, a', \leftarrow) // marcam\ un\ a$

Pas 4. Dacă toți de a sunt marcați (adică suntem la pasul 1, căutăm a, dar nu găsim și ajungem pe B-ul din dreapta cuvântului), atunci parcurgem toată banda spre stânga. Dacă întâlnim doar caractere marcate (a', b' și c') iar apoi dăm de B-ul din stânga cuvântului, atunci acceptăm intrarea.

$\delta(q_6, B) = (q_7, B, \leftarrow) // toate\ a-urile\ sunt\ marcate$
$\delta(q_7, s) = (q_7, s, \leftarrow), s \in \{a', b', c'\} // sarim\ tot\ ce\ este\ marcat$
$\delta(q_7, B) = (q_8, B, \rightarrow), F = \{q_8\} // toate\ b-urile\ si\ c-urile\ sunt\ marcate, acceptam\ cuvantul$

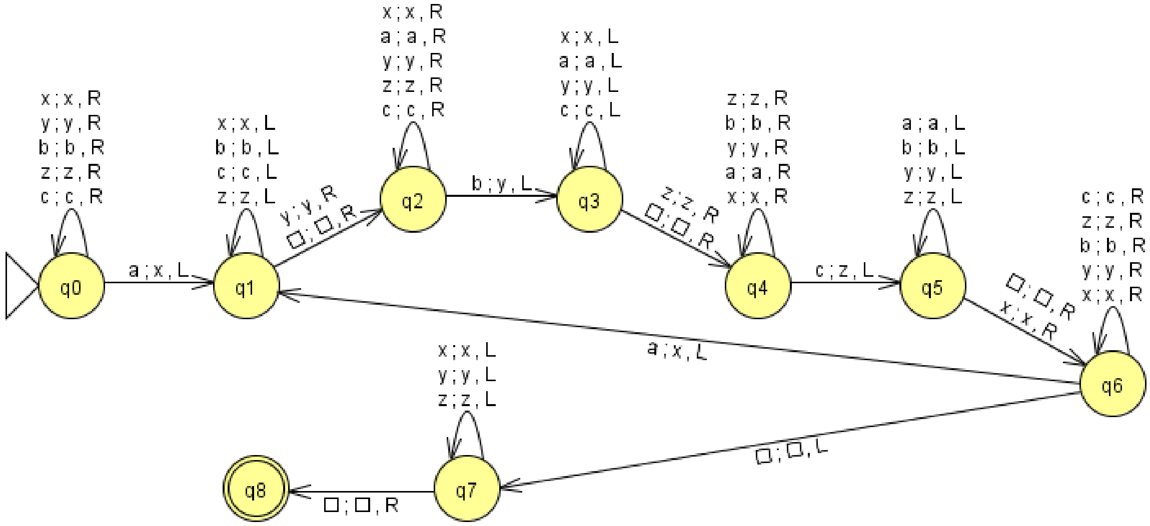
Obs.: - Având în vedere poziționarea aleatoare a literelor în cuvânt, la parcurgerile spre dreapta avem 5 caractere pe care le putem întâlni și pe care trebuie să le sărim, toate în afară de cel nemarcat pe care îl căutăm pentru a-l marca.
- La parcurgerile spre stânga avem 4 caractere pe care le putem întâlni și pe care trebuie să le sărim. Îl excludem pe cel marcat în perechea anterioară de același tip cu cel pe care urmează să-l marcăm la pasul următor (de exemplu la pasul 2 urmează să marcăm un b, deci la parcurgerea spre stânga din cadrul pasului 1 îl excludem pe b', pentru că vrem să începem căutarea lui b din dreapta ultimului b' marcat, deci vrem să schimbăm starea și sensul de parcurgere atunci când îl întâlnim). De asemenea, excludem și caracterul nemarcat ne același tip cu cel pe care tocmai l-am marcat în acel pas (de exemplu la pasul 1 am marcat un a și apoi mergând spre stânga vom întâlni doar a-uri marcate pentru că cele nemarcate vor fi la dreapta față de locul de unde am plecat, având în vedere că marcările unei litere se fac la rând, adică primul a, apoi al doilea a, apoi al treilea, etc.)

Obs.: La seminar, dacă am spus că din q_5 atunci când întâlnim a' sau B mergem în q_0 (pentru a relua pasul 1), iar din q_0 cu B mergem în q_6 (avem toți de a marcați), apoi avem din q_6 cu B mergem în stare finală (pentru că bucla din q_6 poate să nu o aplice niciodată), înseamnă că se acceptă și cuvântul vid, ceea ce contrazice condiția din enunț (că numărul de apariții ale fiecărei litele trebuie să fie strict pozitiv).
Soluția prezentată aici mai sus respectă condiția, cuvântul minim acceptat este de lungime 3 și conține un a, un b și un c.

<u>Complexitatea spațiu:</u>
Avem cuvântul inițial și nu scriem nimic în plus. Rezultă C.S. = $|w|_a+|w|_b+|w|_c = |w|$.

<u>Complexitatea timp:</u>
Pas1 + Pas2 + Pas3: Se revine la pasul 1 de min{$|w|_a$, $|w|_b$, $|w|_c$} ori, iar pentru a aplica o dată fiecare dintre cei trei pași (pentru a marca un a, un b și un c) ne deplasăm lungimea benzii înmulțită cu o constantă. Rezultă min{$|w|_a$, $|w|_b$, $|w|_c$} * const. * |w|.
Pas 4: Parcurgem maxim întreaga bandă de la dreapta spre stânga. Rezultă maxim |w|.
Total: C.T. = min{$|w|_a$, $|w|_b$, $|w|_c$} * const. * |w| + |w| => $O(|w|^2)$.

Aceeași soluție, sub formă de graf:
(pentru marcarea a-urilor am folosit x, pentru marcarea b-urilor am folosit y, iar pentru marcarea c-urilor am folosit z)



Problema 8

Să se accepte numerele x de forma 2^k, k număr natural.

Fie x = 8 (reprezentat prin 9 de 1). Inițial banda mașinii Turing arată așa:

...	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	B	...

La final, banda va arăta astfel:

...	B	1'	1'	1'	1'	1'	1'	1'	1'	1'	B	...

<u>Ideea de rezolvare:</u>
Exceptând 1-ul în plus, la fiecare pas vom marca jumătate din număr, deci practic vom face împărțire repetată la 2, partea nemarcată rămasă fiind câtul împărțirii. Dacă la fiecare pas avem un număr par (deci putem să continuăm împărțirea exactă la 2), iar la final avem câtul 1, atunci numărul este acceptat.

Pas 1. Marcăm primul 1 din număr (cel în plus) și facem un pas dreapta.
$\delta(q_0,1) = (1_1, 1', \rightarrow)$

Pas 2. Parcurgem toată banda de la stânga la dreapta (sărind 1-urile deja marcate), iar pentru fiecare doi de 1 nemarcați, pe primul îl marcăm pe al doilea îl sărim.

$\delta(q_1,1') = (q_1,1',\rightarrow) // \textit{sarim ce era marcat}$

$\delta(q_1,1) = (q_2,1',\rightarrow) // \textit{marcam primul} 1$

$\delta(q_2,1') = (q_2,1',\rightarrow) // \textit{sarim ce era marcat}$

$\delta(q_2,1) = (q_1,1,\rightarrow) // \textit{sarim al doilea} 1 \textit{ si reluam}$

- Dacă la aplicările intermediare (toate în afară de ultima) ale pasului 2 întâlnim B în starea în care trebuia să marcăm un 1 este bine (numărul curent este par) și trecem la pasul 3.

$\delta(q_1,B) = (q_3,B,\leftarrow) // \textit{ok, nr curent par}$

- La ultima aplicare a pasului 2, dacă întâlnim B în starea în care trebuia să sărim un 1 este bine (înseamnă că aveam numărul 2^0=1), dar trebuie să verificăm dacă tot numărul este complet marcat și doar dacă da, atunci acceptăm intrarea (altfel înseamnă că am ajuns la un număr curent care este impar dar diferit de 1, deci nu respectă condiția).

$\delta(q_2,B) = (q_4,B,\leftarrow) // \textit{nr curent impar}$

$\delta(q_4,1') = (q_4,1',\leftarrow)$

$\delta(q_4,B) = (q_5,B,\rightarrow), F = \{q_5\} // \textit{ok, tot nr marcat, acceptam}$

Pas 3. Parcurgem toată banda spre stânga (sărim 1-urile și 1'-urile fără să modificăm nimic) până la B, facem un pas dreapta și reluăm pasul 2.

$\delta(q_3,1) = (q_3,1,\leftarrow)$

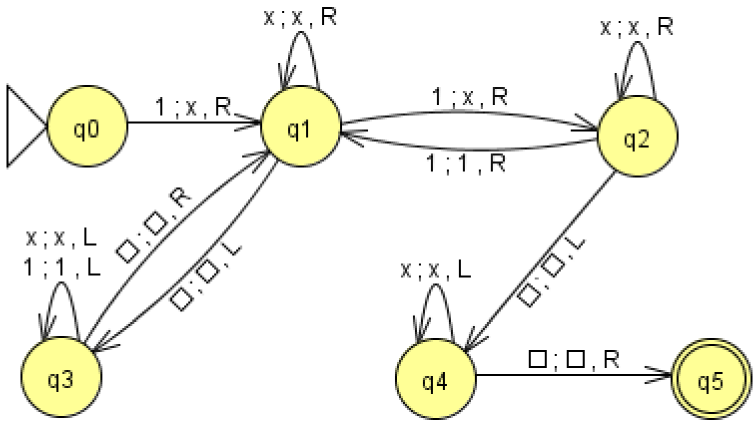
$\delta(q_3,1') = (q_3,1',\leftarrow)$

$\delta(q_3,B) = (q_1,B,\rightarrow) // \textit{reluam pasul } 2$

<u>Complexitatea spațiu:</u>
Avem numărul inițial și nu scriem nimic în plus. Rezultă C.S. = x.

<u>Complexitatea timp:</u>
Pas 1: Ne mutăm cu o poziție.
Pas 2 + Pas 3: La fiecare aplicare a pasului 2 facem o împărțire a numărului curent la 2, deci numărul de reveniri la pasul 2 este maxim k, adică $\log_2 x$. Pasul 2 face o parcurgere completă a benzii de la stânga la dreapta, iar pasul 3 parcurge total banda de la dreapta spre stânga. Rezultă $\log_2 x$ * (2*x).
Total: C.T. = 1 + $\log_2 x$ * (2*x) => O(x * log x).

Aceeași soluție, sub formă de graf:
(pentru marcarea am folosit x)



Problema 9

Se dau două numere naturale x și y. Să se calculeze ridicarea la putere (y^x).

Fie x = 3, y = 2 (reprezentate prin 4, respectiv 3 de 1). Inițial banda arată așa:

...	B	1	1	1	1	0	1	1	1	B	...

La final, banda va arăta astfel:

...	B	1	1	1	1	0	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	B	...

<u>Ideea de rezolvare:</u>
După delimitatotul 2, vom calcula pe rând, pe măsură ce marcăm câte un 1 din x, produsul dintre y și rezultatul parțial calculat anterior (y la o putere mai mică). Nu vrem să concatenăm rezultatele intermediare, ci vrem să scriem noul rezultat parțial astfel încât să folosim și 1-urile scrise deja pentru rezultatul parțial calculat la pasul anterior și să adăugăm doar atâtea câte sunt necesare până la rezultatul curent.
Deci la un pas oarecare vrem să calculăm y^k, dar avem deja scris y^{k-1}, deci trebuie să adăugăm doar diferența dintre ele, adică $y^k - y^{k-1} = y^{k-1} * (y-1)$. Deci practic trebuie să înmulțim fostul rezultat parțial (y^{k-1}) aflat după delimitatorul 2 cu numărul y-1 pe care îl găsim între delimitatorii 0 și 2 (dar la înmulțire eliminăm un 1 pentru scrierea specială în baza 1 și încă un 1 pentru că trebuie să înmulțim doar cu y-1, nu cu tot y, deci vom marca cu 1'' primii doi de 1 din y).

Pas 1. Marcăm doi de 1 din x cu 1' (unul pentru scrierea specială în baza 1 și celălalt pentru că la finalul pasului vom fi calculat deja y^1), ne deplasăm la dreapta (sărim x-ul nemarcat, schimbăm starea pentru 0), copiem tot y-ul dintre 0 și 2 la finalul benzii (deci am calculat y^1) după ce scriem delimitatorul 2. Pas dreapta și marcăm cu 1'' primul 1 din rezultatul parțial (copia lui y din dreapta lui 2), acesta fiind 1-ul în plus pentru rezultatul final și nu trebuie folosit la înmulțiri. Ne deplasăm stânga și demarcăm tot y-ul dintre 0 și 2 (care era marcat în urma copierii) și marcăm cu 1'' primii doi de 1 din y din dreapta lui 0 (cei doi care nu trebuie să participe la înmulțire, după cum am explicat mai sus), apoi de deplasăm stânga până la 1' din x și facem un pas dreapta.

$\delta(q_0,1)=(q_1,1',\rightarrow)$ // *marcam 1-ul in plus din x*

$\delta(q_1,1)=(q_2,1',\rightarrow)$ // *marcam un 1 din x pt copierea lui y*

$\delta(q_2,1)=(q_2,1,\rightarrow)$ // *parcurgem x nemarcat*

$\delta(q_2,0)=(q_3,0,\rightarrow)$

$\delta(q_3,1)=(q_4,1',\rightarrow)$ // *marcam din y pentru a-l copia*

$\delta(q_4,1)=(q_4,1,\rightarrow)$ // *parcurgem y nemarcat*

$\delta(q_4,B)=(q_5,2,\rightarrow)$; $\delta(q_4,2)=(q_5,2,\rightarrow)$

$\delta(q_5,1)=(q_5,1,\rightarrow)$ // *parcurgem partea scrisa deja din copia lui y*

$\delta(q_5,B)=(q_6,1,\leftarrow)$ // *scriem pt copia lui y*

$\delta(q_6,1)=(q_6,1,\leftarrow), \delta(q_6,2)=(q_6,2,\leftarrow)$ // *parcurgem ce am scris si y-ul necopiat inca*

$\delta(q_6,1')=(q_3,1',\rightarrow)$ // *reluam copierea lui y*

$\delta(q_3,2)=(q_7,2,\rightarrow)$ // *y este complet marcat, deci copiat*

$\delta(q_7,1)=(q_8,1'',\leftarrow)$ // *marcam 1-ul in plus de la rezultat final*

$\delta(q_8,2)=(q_9,2,\leftarrow)$

$\delta(q_9,1')=(q_9,1,\leftarrow)$ // *demarcam tot y*

$\delta(q_9,0)=(q_{10},0,\rightarrow)$

$\delta(q_{10},1)=(q_{11},1'',\rightarrow), \delta(q_{11},1)=(q_{12},1'',\leftarrow)$ // *marcam primii doi de 1 din y*

$\delta(q_{12},1'')=(q_{12},1'',\leftarrow)$

$\delta(q_{12},0)=(q_{12},0,\leftarrow)$

$\delta(q_{12},1)=(q_{12},1,\leftarrow)$ // *parcurgem x nemarcat*

$\delta(q_{12},1')=(q_{13},1',\rightarrow)$

Pas 2(i). Pentru fiecare 1 nemarcat din x, îl marcăm cu 1’, ne deplasăm dreapta, sărim 1-urile nemarcate din x, 0-ul și cei doi de 1’’ din y și mergem la pasul 3.

$\delta(q_{13},1)=(q_{14},1',\rightarrow)$ // *marcam din x*

$\delta(q_{14},1)=(q_{14},1,\rightarrow)$ // *parcurgem x nemarca*

$\delta(q_{14},0)=(q_{15},0,\rightarrow)$

$\delta(q_{15},1'')=(q_{15},1'',\rightarrow)$

Pas 3(a). Pentru fiecare 1 nemarcat din y (dintre 0 și 2), îl marcăm cu 1’, ne deplasăm dreapta, sărim 1-urile nemarcate din y, 2-ul și 1’’-ul din fostul rezultat parțial și mergem la pasul 4.

$\delta(q_{15},1)=(q_{16},1',\rightarrow)$ // *marcam din y*

$\delta(q_{16},1)=(q_{16},1,\rightarrow)$ // *parcurgem y nemarca*

$\delta(q_{16},2)=(q_{16},2,\rightarrow)$

$\delta(q_{16},1'')=(q_{17},1'',\rightarrow)$

Pas 4. - (Vrem să copiem fostul rezultat parțial la finalul benzii, concatenat cu el însuși sau cu ultima lui copie.) Pentru fiecare 1 nemarcat din y^{x-1} (sau generic din y^{k-1} la aplicarea nr k a pasului) din dreapta lui 2, îl marcăm cu 1', ne deplasăm dreapta până la B (sărim 1-urile necopiate încă și 1'-urile scrise la pasul curent), scriem 1'' (nu putem scrie 1 pentru a nu-i încurca cu cei necopiați încă și nu putem scrie 1' pentru a nu-i încurca cu cei care trebuie re-copiați pentru un alt 1 din y). (Vom face copierea de la stânga la dreapta.) Apoi ne deplasăm stânga, sărim toate 1''-urile (ce am scris), apoi toate 1-urile (ce urmează a fi copiat), iar când întâlnim 1' facem un pas dreapta și reluăm pasul 4.

$\delta(q_{17},1) = (q_{18},1',\rightarrow) // \, marcam din \; y^{x-1}$

$\delta(q_{18},1) = (q_{18},1,\rightarrow) // \, parcurgem ce \; e \; necopiat inca$

$\delta(q_{18},1'') = (q_{18},1'',\rightarrow) // \, parcurgem ce \; am \; scris \; deja$

$\delta(q_{18},B) = (q_{19},1'',\leftarrow)$

$\delta(q_{19},1'') = (q_{19},1'',\leftarrow) // \, parcurgem ce \; am \; scris \; deja$

$\delta(q_{19},1) = (q_{19},1,\leftarrow) // \, parcurgem ce \; e \; necopiat inca$

$\delta(q_{19},1') = (q_{17},1',\rightarrow) // \, reluam \; pasul \, 4$

- Când am terminat copierea rezultatului parțial anterior suntem pe 1'' din dreapta 1'-urilor, ne deplasăm stânga și demarcăm toți de 1', apoi sărim un 1'' (cel în plus pt scrierea în unar) din noul rezultat parțial, 2-ul și toți de 1 din y) până la 1' din y, facem un pas dreapta și reluăm pasul 3(a).

$\delta(q_{17},1'') = (q_{20},1''\leftarrow) // \, y^{x-1} \; complet marcat si \; copiat$

$\delta(q_{20},1') = (q_{20},1,\leftarrow) // \, demarcam y^{x-1}$

$\delta(q_{20},1'') = (q_{21},1'',\leftarrow)$

$\delta(q_{21},2) = (q_{22},2,\leftarrow)$

$\delta(q_{22},1) = (q_{22},1,\leftarrow) // \, parcurgem y \; nemarcat$

$\delta(q_{22},1') = (q_{15},1',\rightarrow) // \, reluam \; pasul 3(a)$

Pas 3(b). Când toți de 1 din y (dintre 0 și 2) sunt marcați (suntem pe 2), ne deplasăm dreapta, sărim un 1'', sărim toți de 1 (demarcați anterior, după terminarea copierii), demarcăm toți de 1'', ajungem la B, facem un pas stânga. Parcurgem spre stânga, sărim toți de 1 din noul rezultat parțial, sărim un 1'', un 2, demarcăm pe toți de 1' din y, apoi sărim spre stânga cei doi de 1'' din y, 0-ul și toți de 1 din x, iar când ajungem la 1' din x facem un pas dreapta și reluăm pasul 2(i).

$\delta(q_{15},2)=(q_{23},2,\rightarrow)$ // y *complet marcat, inmultirea* $y * y^{x-1}$ *efectuata*
$\delta(q_{23},1'')=(q_{24},1'',\rightarrow)$
$\delta(q_{24},1)=(q_{24},1,\rightarrow)$ // *parcurgem fostul rezultat (demarcat anterior la pasul* 4)
$\delta(q_{24},1'')=(q_{24},1,\rightarrow)$ // *demarcam ce am scris pt* $y^x - y^{x-1}$
$\delta(q_{24},B)=(q_{25},B,\leftarrow)$
$\delta(q_{25},1)=(q_{25},1,\leftarrow)$ // *parcurgem tot* y^x
$\delta(q_{25},1'')=(q_{25},1'',\leftarrow)$
$\delta(q_{25},2)=(q_{26},2,\leftarrow)$
$\delta(q_{26},1')=(q_{26},1,\leftarrow)$ // *demarcam y*
$\delta(q_{26},1'')=(q_{26},1'',\leftarrow)$
$\delta(q_{26},0)=(q_{27},0,\leftarrow)$
$\delta(q_{27},1)=(q_{27},1,\leftarrow)$ // *parcurgem x nemarcat*
$\delta(q_{27},1')=(q_{13},1',\rightarrow)$ // *reluam pasul* 2(*i*)

Pas 2(ii). Când toți de 1 din x sunt marcați am terminat calculul. Suntem pe 0 (la finalul lui x), ne deplasăm stânga și demarcăm toți de 1’ din x, apoi ajungem la B, parcurgem spre dreapta sărind 0, 2 și 1-urile, iar 1’’-urile de la y și de la rezultat le demarcăm, apoi când ajungem la B din dreapta mergem în starea finală.
$\delta(q_{13},0)=(q_{28},0,\leftarrow)$ // x *complet marcat, gata calculul lui* y^x
$\delta(q_{28},1')=(q_{28},1,\leftarrow)$ // *demarcam x*
$\delta(q_{28},B)=(q_{29},B,\rightarrow)$
$\delta(q_{29},1)=(q_{29},1,\rightarrow)$; $\delta(q_{29},0)=(q_{29},0,\rightarrow)$; $\delta(q_{29},2)=(q_{29},2,\rightarrow)$
$\delta(q_{29},1'')=(q_{29},1,\rightarrow)$ // *demarcam* 1 *– urile speciale din y si din rezultat*
$\delta(q_{29},B)=(q_{30},B,\leftarrow), F=\{q_{30}\}$

Obs: *Ce am scris cu albastru la pasul 1 am greșit la grupele de marți, n-ar fi trebuit să folosim la înmulțire și 1-ul în plus copiat din y.*
Ce am scris cu albastru la pasul 4 am greșit la toate grupele, noi dublam de fiecare dată rezultatul, dar de fapt trebuia să copiem doar o anumită porțiune mai mică. Deci practic ar trebui să corectați tot de la pasul 4 în jos (și la pași, și la funcție).

<u>Complexitatea spațiu:</u>
Avem numerele inițiale și rezultatul calculat. Rezultă C.S. = x + y + x*y.

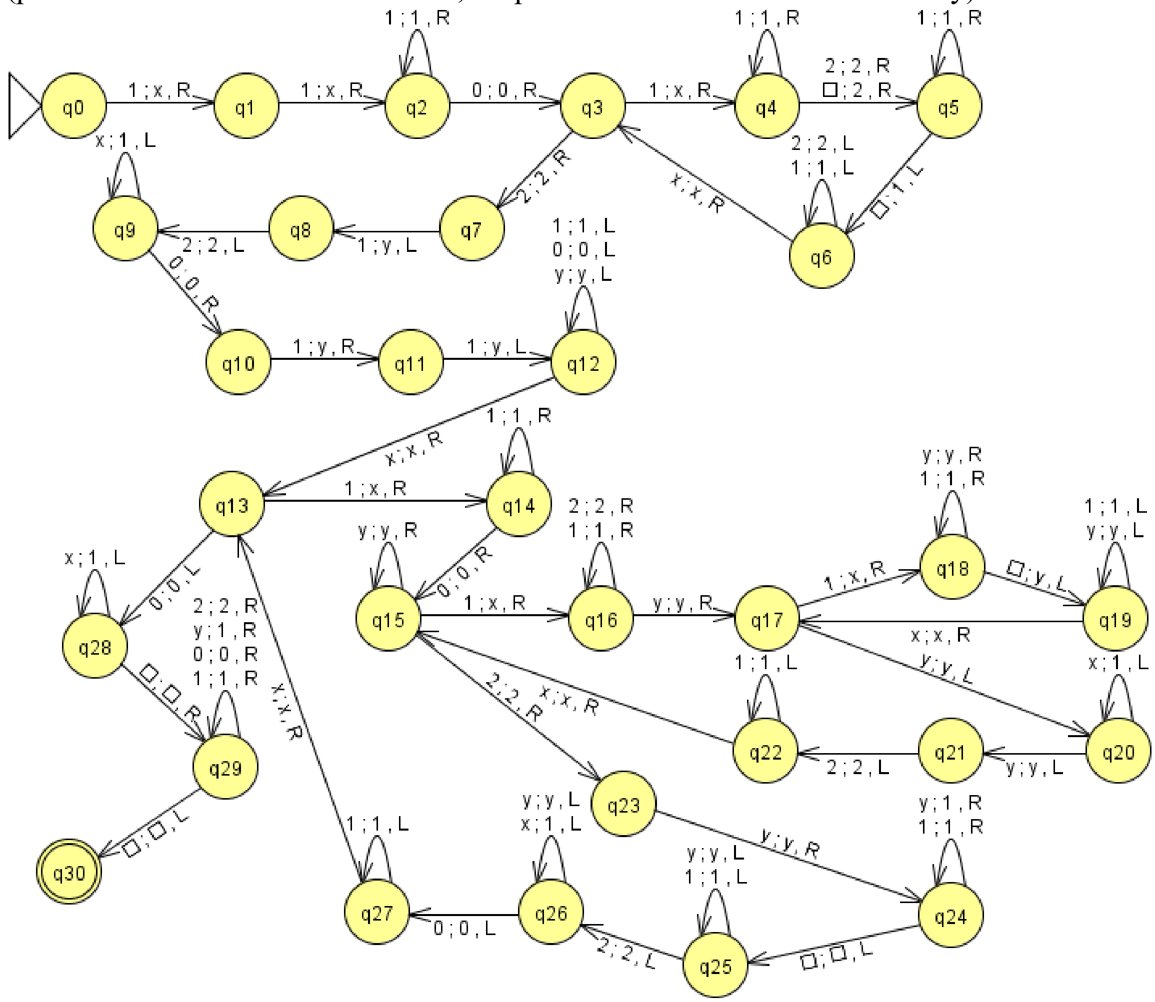
<u>Complexitatea timp:</u>
Pas 1: Se execută o singură dată. Ne deplasăm x+y pentru a scrie delimitatoul și încă y*y pentru a copia y-ul la finalul benzii. Rezultă $x+y+y^2$.
Pas 2: Se repetă de x ori și ne deplasăm maxim x căsuțe, apoi executăm pasul 3, apoi pentru demarcările finale de la pasul 2(ii) ne deplasăm toată banda $x+y+y^x$.

Pas 3. Se repetă de y ori și ne deplasăm maxim y căsuțe, apoi executăm pasul 4, apoi pentru demarcarea de la pasul 3(b) ne deplasăm y.
Pas 4: Se repetă de y^{x-1} ori și ne deplasăm dus-întors maxim $2*(y^x - y^{x-1})$ căsuțe. Apoi pentru demarcare ne deplasăm y^x.

$$Total:\ C.T. = \underbrace{(x+y+y^2)}_{pas1} + x * \underbrace{\{x + \underbrace{y*[y + \underbrace{y^{x-1}*(y^x - y^{x-1}) + y^x}_{pas4} + y]}_{pas3} + x + y + y^x\}}_{pas2}$$

=> $O(x * y^{2x})$ (pentru că paranteza de la pasul 4 < y^x)

Aceeași soluție, sub formă de graf:
(pentru marcarea cu 1’ am folosit x, iar pentru marcarea cu 1’’ am folosit y)



~ Seminar 5 ~

Problema 10

Se dă un număr în baza 1. Să se transforme în baza 2. *[rezolvări pe 2 benzi]*

Obs: Aveți mai jos ambele soluții pe care le-am discutat la seminar (cu resturi și cu adunarea modulo 2), dar voi face rezolvarea pe mai multe benzi (două).

Rezolvarea (A)
Fie x = $10_{(10)} = 1010_{(2)}$. Inițial prima bandă a mașinii Turing conține numărul x în baza 1 (10 reprezentat prin 11 de 1), iar a doua bandă este vidă (are doar blank-uri):

...	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	B	...
...	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	...

La final, benzile vor arăta astfel:

...	B	1''	1'	1'	1'	1'	1'	1'	1'	1'	1'	1'	B	...
...	B	1	0	1	0	B	B	B	B	B	B	B	B	...

<u>Ideea de rezolvare:</u>
Marcând numărul dat din doi în doi, aflăm restul împărțirii numărului la 2 și îl scriem pe a doua bandă. Apoi împărțim câtul anterior (partea nemarcată din număr) la doi și obținem un nou rest pe care îl scriem pe banda a doua la început (în stânga a ceea ce am scris anterior).

Pas 1. Marcăm primul 1 din x cu 1'' și facem un pas dreapta pe prima bandă.
(Pe a doua bandă citim B, scriem tot B în loc și staționăm.)

$$\delta\left(q_0, \begin{matrix} 1 \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_1, \begin{matrix} 1'' \\ B \end{matrix}, \begin{matrix} \rightarrow \\ \bullet \end{matrix}\right)$$

Pas 2. Pe a doua bandă staționăm, iar pe prima o parcurgem integral sărind 1-urile marcate, iar pentru fiecare doi de 1 nemarcați, pe primul îl marcăm, iar pe al doilea îl sărim.

$$\delta\left(q_1, \begin{matrix} 1' \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_1, \begin{matrix} 1' \\ B \end{matrix}, \begin{matrix} \rightarrow \\ \bullet \end{matrix}\right) // \, sarim\, 1-urile\, marcate anterior$$

$$\delta\left(q_1, \begin{matrix} 1 \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_2, \begin{matrix} 1' \\ B \end{matrix}, \begin{matrix} \rightarrow \\ \bullet \end{matrix}\right) // \, marcam primul 1$$

$$\delta\left(q_2, \begin{matrix} 1' \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_2, \begin{matrix} 1' \\ B \end{matrix}, \begin{matrix} \rightarrow \\ \bullet \end{matrix}\right) // \, sarim\, 1-urile\, marcate anterior$$

$$\delta\left(q_2, \begin{matrix} 1 \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_1, \begin{matrix} 1 \\ B \end{matrix}, \begin{matrix} \rightarrow \\ \bullet \end{matrix}\right) // \, sarim\, al\, doilea 1\, si\, reluam$$

Pas 3(a). Dacă pe prima bandă citim B în starea în care trebuia să marcăm primul 1, înseamnă că am obținut restul 0, deci pe a doua bandă scriem 0 și facem un pas stânga (pentru a scrie următorul rest pe care îl vom obține), iar pe prima bandă facem un pas stânga pentru a ne poziționa pe ultima cifră din număr (1 marcat sau nemarcat). Mergem la pas 4.

$$\delta\left(q_1, \begin{matrix} B \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_3, \begin{matrix} B \\ 0 \end{matrix}, \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}\right)$$

Pas 3(b). Dacă pe prima bandă citim B în starea în care trebuia să sărim al doilea 1, înseamnă că am obținut restul 1, deci pe a doua bandă scriem 1 și facem un pas stânga (pentru a scrie următorul rest pe care îl vom obține), iar pe prima bandă facem un pas stânga pentru a ne poziționa pe ultima cifră din număr (1 marcat sau nemarcat). Mergem la pas 4.

$$\delta\left(q_2, \begin{matrix} B \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_3, \begin{matrix} B \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}\right)$$

Pas 4. Pe a doua bandă staționăm (citim B, scriem B în loc), iar pe prima bandă vrem să ne întoarcem stânga până la începutul numărului (până la 1'') apoi să facem un pas dreapta. Cât timp parcurgem 1-uri marcate păstrăm starea, iar la primul 1 nemarcat întâlnit schimbăm starea (pentru a ști că nu s-a terminat calculul), apoi în noua stare parcurgem în continuare spre stânga toate 1-urile marcate și nemarcate, apoi reluăm pasul 2. Dacă tot numărul este marcat (ajungem la 1'' fără să fi găsit vreun 1 nemarcat), înseamnă că s-a terminat calculul și mergem în starea finală.

$$\delta\left(q_3, \begin{matrix} 1' \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_3, \begin{matrix} 1' \\ B \end{matrix}, \begin{matrix} \leftarrow \\ \bullet \end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_3, \begin{matrix} 1 \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_4, \begin{matrix} 1 \\ B \end{matrix}, \begin{matrix} \leftarrow \\ \bullet \end{matrix}\right) // \textit{am gasit } 1 \textit{ nemarcat}$$

$$\delta\left(q_4, \begin{matrix} 1 \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_4, \begin{matrix} 1 \\ B \end{matrix}, \begin{matrix} \leftarrow \\ \bullet \end{matrix}\right) \quad ; \quad \delta\left(q_4, \begin{matrix} 1' \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_4, \begin{matrix} 1' \\ B \end{matrix}, \begin{matrix} \leftarrow \\ \bullet \end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_4, \begin{matrix} 1'' \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_1, \begin{matrix} 1'' \\ B \end{matrix}, \begin{matrix} \rightarrow \\ \bullet \end{matrix}\right) // \textit{reluam pasul } 2$$

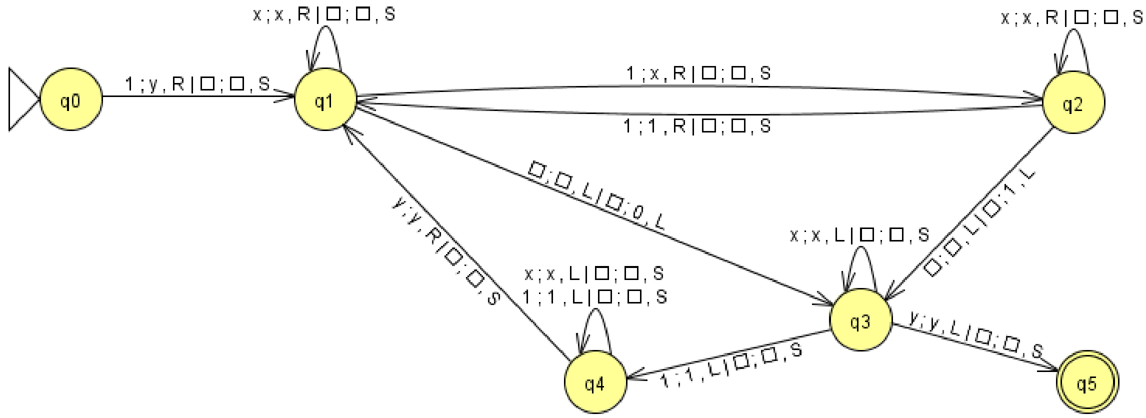
$$\delta\left(q_3, \begin{matrix} 1'' \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_5, \begin{matrix} 1'' \\ B \end{matrix}, \begin{matrix} \leftarrow \\ \bullet \end{matrix}\right), F = \{q_5\} // \textit{tot numarul marcat}$$

<u>Complexitatea spațiu:</u>
Avem numărul inițial x și scriem rezultatul care ocupă maxim $\log_2 x$.
Rezultă C.S. = $x + \log_2 x$.

<u>Complexitatea timp:</u>
Pas 1: Se execută o singură dată și ne deplasăm o poziție. Rezultă 1.
Pas 2: Se repetă pentru fiecare caracter scris pe a doua bandă, deci de maxim $\log_2 x$ ori. De fiecare dată parcurgem de la stânga la dreapta tot numărul x. Rezultă $x * \log_2 x$.

Pas 3: Se repetă tot de $\log_2 x$ ori, dar ne deplasăm cu o singură poziție. Rezultă $\log_2 x$.
Pas 4: Se repetă de $\log_2 x$ ori și de fiecare dată parcurgem de la dreapta spre stânga tot numărul x. Rezultă $x * \log_2 x$.
Total: C.T. = $O(x * \log x)$.

Aceeași soluție, sub formă de graf:
(pentru marcarea cu 1’ am folosit x, iar pentru marcarea cu 1’’ am folosit y)



Rezolvarea (B)
Fie $x = 10_{(10)} = 1010_{(2)}$. Inițial prima bandă a mașinii Turing conține numărul x în baza 1 (10 reprezentat prin 11 de 1), iar a doua bandă este vidă (are doar blank-uri):

...	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	B	...
...	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	...

La final, benzile vor arăta astfel:

...	B	1"	1'	1'	1'	1'	1'	1'	1'	1'	1'	1'	B	...
...	B	B	B	B	B	B	B	B	1	0	1	0	B	...

<u>Ideea de rezolvare:</u>
Pentru fiecare 1 din x cu excepția primului, vom face adunarea modulo 2 la rezultat cu o unitate.

Pas 1. Marcăm cu 1’’ primul 1 din număr și facem un pas dreapta pe prima bandă. Pe banda a doua scriem un 0 (rezultatul inițial, ca să putem face adunarea) și facem un pas dreapta.

$$\delta\left(q_0, \begin{matrix} 1 \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_1, \begin{matrix} 1'' & \rightarrow \\ 0 & \rightarrow \end{matrix}\right)$$

Pas 2(i). Pentru fiecare 1 nemarcat din x, pe prima bandă îl marcăm și apoi staționăm, iar pe banda a doua facem un pas stânga (eram pe B, iar acum vom fi pe ultimul caracter din rezultat) și mergem la pasul 3.

$$\delta\left(q_1, \begin{matrix} 1 \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_2, \begin{matrix} 1' & \bullet \\ B & \leftarrow \end{matrix}\right)$$

Pas 3(a). Cât timp citim 1 pe banda a doua, îl transformăm în 0 și facem un pas stânga.

$$\delta\left(q_2, \begin{matrix}1'\\1\end{matrix}\right) = \left(q_2, \begin{matrix}1'\\0\end{matrix}, \begin{matrix}\bullet\\\leftarrow\end{matrix}\right)$$

Pas 3(b,c). Dacă citim 0 sau B pe banda a doua, îl transformăm în 1 și mergem la pasul 4.

$$\delta\left(q_2, \begin{matrix}1'\\0\end{matrix}\right) = \left(q_3, \begin{matrix}1'\\1\end{matrix}, \begin{matrix}\bullet\\\rightarrow\end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_2, \begin{matrix}1'\\B\end{matrix}\right) = \left(q_3, \begin{matrix}1'\\1\end{matrix}, \begin{matrix}\bullet\\\rightarrow\end{matrix}\right)$$

Pas 4. Pe banda a doua ne deplasăm dreapta sărind toți de 0. Când citim B pe banda a doua, scriem B și staționăm, iar pe prima bandă citim și scriem 1'-ul pe care staționasem și facem un pas dreapta, apoi reluăm pasul 2.

$$\delta\left(q_3, \begin{matrix}1'\\0\end{matrix}\right) = \left(q_3, \begin{matrix}1'\\0\end{matrix}, \begin{matrix}\bullet\\\rightarrow\end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_3, \begin{matrix}1'\\B\end{matrix}\right) = \left(q_1, \begin{matrix}1'\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\rightarrow\\\bullet\end{matrix}\right) // reluam\, pasul 2$$

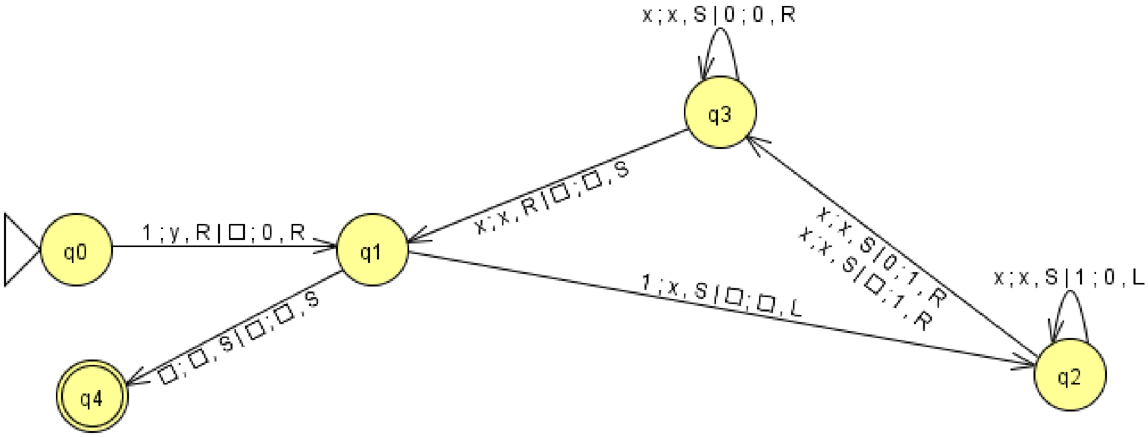
Pas 2(ii). Când tot numărul e marcat (citim B pe prima bandă), mergem în starea finală.

$$\delta\left(q_1, \begin{matrix}B\\B\end{matrix}\right) = \left(q_4, \begin{matrix}B\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\bullet\\\bullet\end{matrix}\right), F = \{q_4\}$$

<u>Complexitatea spațiu:</u>
Avem numărul inițial x și scriem rezultatul care ocupă maxim $\log_2 x$.
Rezultă C.S. = $x + \log_2 x$.

<u>Complexitatea timp:</u>
Pas 1: Se execută o singură dată și ne deplasăm o poziție. Rezultă 1.
Pas 2. Se repetă de x ori și ne deplasăm câte o poziție. Rezultă x.
Pas 3. Se repetă de x ori și parcurgem de la dreapta la stânga maxim tot rezultatul. Rezultă $x * \log_2 x$.
Pas 4. Se repetă de x ori și parcurgem de la stânga la dreapta maxim tot rezultatul. Rezultă $x * \log_2 x$.
Total: C.T. = $O(x * \log x)$.

Aceeași soluție, sub formă de graf:
(pentru marcarea cu 1' am folosit x, iar pentru marcarea cu 1'' am folosit y)


x ; x , S | 0 ; 0 , R
q3
x ; x , R | □ ; □ , S
q0
1 ; y , R | □ ; 0 , R
q1
x ; x , S | 0 ; 1 , R
x ; x , S | □ ; 1 , R
x ; x , S | 1 ; 0 , L
1 ; x , S | □ ; □ , L
q2
□ ; □ , S | □ ; □ , S
q4