Programare cu variabile mixte în probleme de planificare a mișcării
curs 5 - opțional SPER

Florin Stoican

15 martie 2022

Cuprins

Cuprins

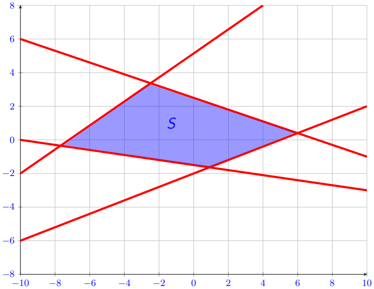
Motivație

- Model matematic flexibil pentru formularea problemelor de decizie și reglare bazate pe optimizare
  - problemă de alocare combinatorială ("task assignment", "unit commitment")
  - problemă de rutare multi-cast
- Model matematic flexibil pentru formularea problemelor de evitare a coliziunilor care implică reglarea de sisteme multi-agenți
  - urmărirea traseului cu evitarea obstacolelor și a coliziunilor
  - controlul formațiunii cu evitarea coliziunilor
- Solver-e puternice și disponibile academic/comercial
  - CPLEX, OSL, etc.
- Baze teoretice puternice:
  - caracterizări speciale pentru cazuri particulare ("tight representations")
  - NP-hard în general, dar poate rezolva și multe probleme mari în practică

MIP pentru un obstacol poliedral

Considerăm un obstacol poliedral

$$S = \left\{x \in \mathbb{R}^n : h_i x \leq k_i,\ i = 1 : N\right\}$$



Oricare dintre regiunile $\mathcal{R}^-(\mathcal{H}_i)$ ce definesc $\mathcal{C}(S)$ se poate obține printr-o alegere corectă a variabilelor binare

$$\mathcal{R}^-(\mathcal{H}_i) \longleftrightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)^i \triangleq (1, \ldots, 1, \underbrace{0}_{i}, 1, \ldots, 1)$$

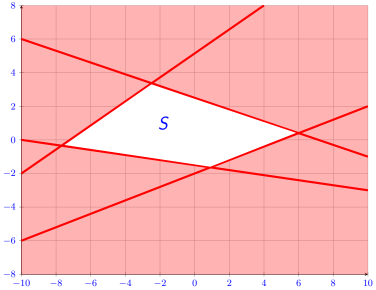
MIP pentru un obstacol poliedral

Considerăm un obstacol poliedral

$$S = \left\{x \in \mathbb{R}^n : h_i x \leq k_i,\ i = 1 : N\right\}$$

și complementul lui S

$$\mathcal{C}(S) \triangleq cl(\mathbb{R}^n \setminus S) = \bigcup_i \mathcal{R}^-(\mathcal{H}_i), \quad i = 1 : N$$



Oricare dintre regiunile $\mathcal{R}^-(\mathcal{H}_i)$ ce definesc $\mathcal{C}(S)$ se poate obține printr-o alegere corectă a variabilelor binare

$$\mathcal{R}^-(\mathcal{H}_i) \longleftrightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_N)^i \triangleq (1, \dots, 1, \underbrace{0}_{i}, 1, \dots, 1)$$

MIP pentru un obstacol poliedral

Considerăm un obstacol poliedral

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : h_i x \leq k_i,\ i = 1 : N \right\}$$

și complementul lui S

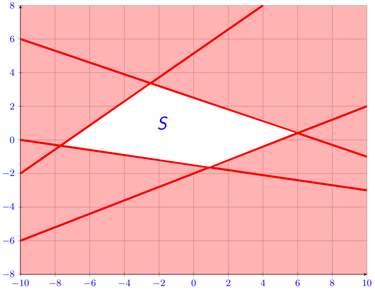
$$\mathcal{C}(S) \triangleq cl(\mathbb{R}^n \setminus S) = \bigcup_i \mathcal{R}^-(\mathcal{H}_i), \quad i = 1 : N$$

Definim $\mathcal{C}(S)$ într-o formă pseudo-liniară

$$-h_i x \leq -k_i + M\alpha_i, \quad i = 1 :\ N$$

$$\sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i \leq N - 1$$

cu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \{0, 1\}^N$



Oricare dintre regiunile $\mathcal{R}^-(\mathcal{H}_i)$ ce definesc $\mathcal{C}(S)$ se poate obține printr-o alegere corectă a variabilelor binare

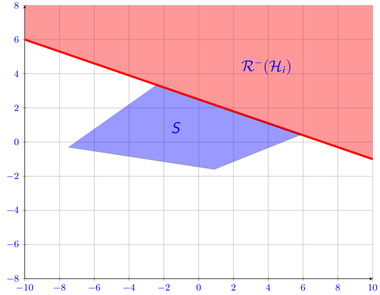
MIP pentru un obstacol poliedral

Considerăm un obstacol poliedral

$$S = \left\{x \in \mathbb{R}^n : h_i x \leq k_i,\ i = 1 : N\right\}$$

și complementul lui S

$$\mathcal{C}(S) \triangleq cl(\mathbb{R}^n \setminus S) = \bigcup_i \mathcal{R}^-(\mathcal{H}_i), \quad i = 1 : N$$



Definim $\mathcal{C}(S)$ într-o formă pseudo-liniară

$$-h_i x \leq -k_i + M\alpha_i, \quad i = 1 : N$$

$$\sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i \leq N - 1$$

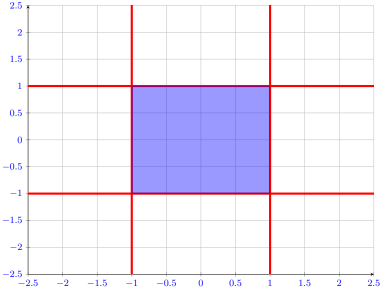
cu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \{0, 1\}^N$

Oricare dintre regiunile $\mathcal{R}^-(\mathcal{H}_i)$ ce definesc $\mathcal{C}(S)$ se poate obține printr-o alegere corectă a variabilelor binare

Exemplu ilustrativ (pătrat)

Considerăm poliedrul $P \subset \mathbb{R}^2$ dat de

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

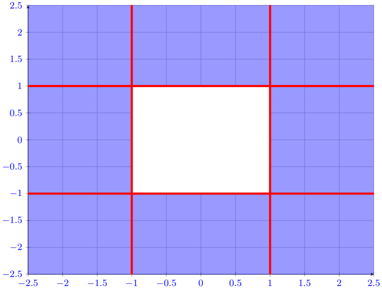


Exemplu ilustrativ (pătrat)

și complementul său $\mathcal{C}(P)$, dat de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} -1 + M\alpha_1 \\ -1 + M\alpha_2 \\ -1 + M\alpha_3 \\ -1 + M\alpha_4 \end{bmatrix}$$

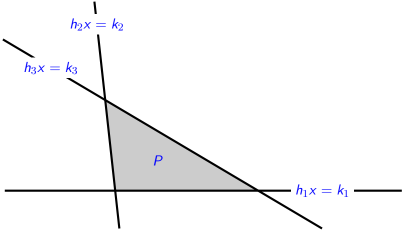
în formularea cu variabile mixte clasică.



Exemplu ilustrativ (triunghi)

Considerăm un triunghi în $\mathbb{R}^2$ dat de

$$\begin{aligned} h_1 x &\leq k_1 \\ h_2 x &\leq k_2 \\ h_3 x &\leq k_3 \end{aligned}$$

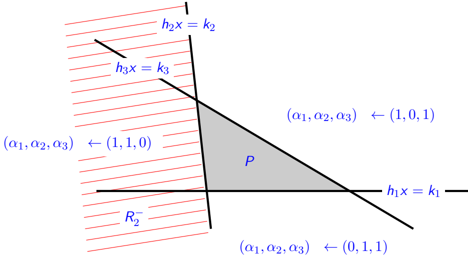


Exemplu ilustrativ (triunghi)

și complementul său

$$
\begin{aligned}
-h_1 x &\leq -k_1 + M\alpha_1\\
-h_2 x &\leq -k_2 + M\alpha_2\\
-h_3 x &\leq -k_3 + M\alpha_3\\
\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 &\leq 2
\end{aligned}
$$

în formularea clasică cu variabile mixte.



Formularea logaritmică – idee

Chiar avem nevoie de N variabile binare pentru
a reprezenta complementul unei regiuni convexe?

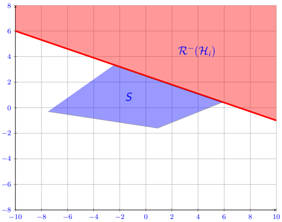
Reprezentare logaritmică

Pentru fiecare regiune $\mathcal{R}^-(\mathcal{H}_i)$ o combinație unică de variabile binare $\lambda^i \in \{0,1\}^{\lceil log_2 N \rceil}$ este asociată. Apoi, funcțiile afine $\alpha_i : \{0,1\}^{\lceil log_2 N \rceil} \to \{0\} \cup [1,\infty)$ sunt construite:

$$\alpha_i(\lambda) = \sum_{k=0}^{\lceil log_2 N \rceil} \left(\lambda_k^i + (1-2\lambda_k^i)\cdot \lambda_k\right).$$

λ_k denotă a k-a componentă a lui λ și λ_k^i este valoarea asociată regiunii $\mathcal{R}^-(\mathcal{H}_i)$:

$$\alpha_i(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{doar dacă } \lambda = \lambda^i \\ \geq 1, & \text{pentru oricare } \lambda \neq \lambda^i \end{cases}$$



ceea ce conduce la formularea compactă

$$-h_i x \leq -k_i + M\alpha_i(\lambda), \quad i = 1:N,$$
$$0 \leq \beta_l(\lambda).$$

Tupluri interzise

În reprezentarea mixtă interzicem tuplurile care descriu obstacolul:

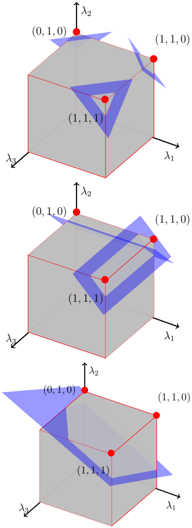
- în formularea clasică forțăm ca cel puțin o constrângere să fie activă:

$$\sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i \leq N-1$$

- în formularea logaritmică
  - constrângeri multiple pentru a interzice tupluri Prodan, Stoican, Olaru și Niculescu 2012

$$0 < \beta_l(\lambda)$$

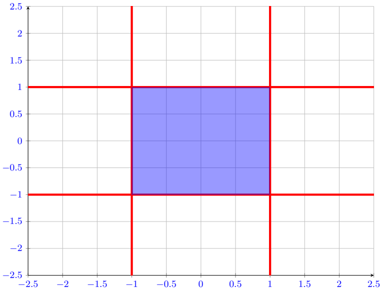
  - dacă tuplurile alocate sunt ordonate consecutiv este suficientă o singură constrângere Afonso și Galvão 2013



Exxemplu ilustrativ (pătrat)

Considerăm poliedrul $P \subset \mathbb{R}^2$ dat de

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

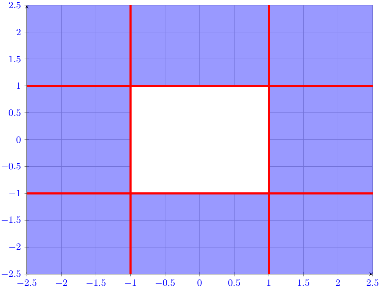


Exxemplu ilustrativ (pătrat)

și complementul său $\mathcal{C}(P)$, dat de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} -1 + M\alpha_1 \\ -1 + M\alpha_2 \\ -1 + M\alpha_3 \\ -1 + M\alpha_4 \end{bmatrix}$$

în formularea MI clasică.

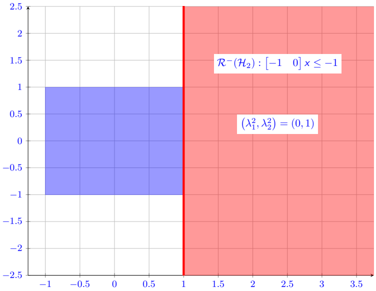


Exxemplu ilustrativ (pătrat)

și complementul său $\mathcal{C}(P)$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} -1 + M(\quad \lambda_1 + \lambda_2) \\ -1 + M(1 - \lambda_1 + \lambda_2) \\ -1 + M(1 + \lambda_1 - \lambda_2) \\ -1 + M(2 - \lambda_1 - \lambda_2) \end{bmatrix}$$

în formularea MI redusă.



În reprezentarea redusă (logaritmică) doar $N_0 = \lceil \log_2 4 \rceil = 2$ sunt necesare.

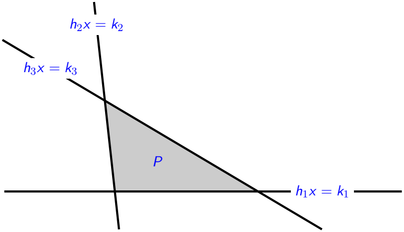
Pentru regiunea $\mathcal{R}^-(\mathcal{H}_2)$ asociem tuplul $(\lambda_1^2, \lambda_2^2) = (0, 1)$ ce conduce la relația

$$\alpha_2 = 1 + \lambda_1 - \lambda_2$$

Exemplu ilustrativ (triunghi)

Considerăm un triunghi $\mathbb{R}^2$ dat de

$$\begin{aligned} h_1 x &\leq k_1 \\ h_2 x &\leq k_2 \\ h_3 x &\leq k_3 \end{aligned}$$

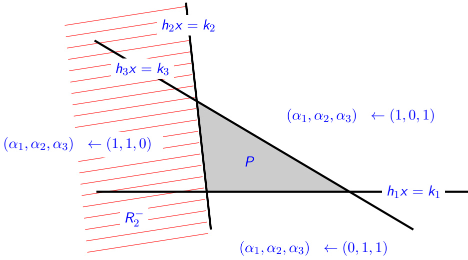


Exemplu ilustrativ (triunghi)

și complementul său

$$\begin{aligned} -h_1 x &\leq -k_1 + M\alpha_1 \\ -h_2 x &\leq -k_2 + M\alpha_2 \\ -h_3 x &\leq -k_3 + M\alpha_3 \end{aligned}$$

în formularea MI clasică.

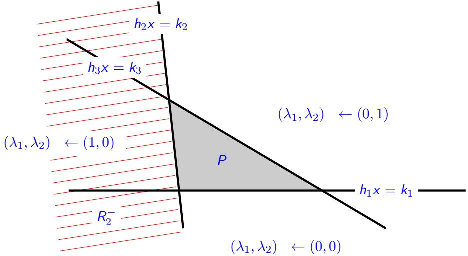


Exemplu ilustrativ (triunghi)

și complementul său

$$\begin{aligned} -h_1 x &\leq -k_1 + M(\phantom{1 -{}} \lambda_1 + \lambda_2) \\ -h_2 x &\leq -k_2 + M(1 - \lambda_1 + \lambda_2) \\ -h_3 x &\leq -k_3 + M(1 + \lambda_1 - \lambda_2) \end{aligned}$$

în formularea MI redusă.



În reprezentarea redusă, doar $N_0 = \lceil \log_2 3 \rceil = 2$ variabile binare sunt necesare.

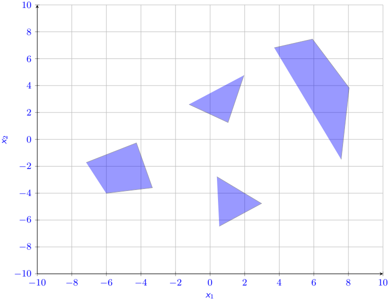
Pentru regiunea $\mathcal{R}^-(\mathcal{H}_2)$ asociem tuplul $(\lambda_1^2, \lambda_2^2) = (1, 0)$ ce conduce la relația

$$\alpha_2(\lambda) = 1 - \lambda_1 + \lambda_2$$

Regiuni ne-conectate și neconvexe

Considerăm complementul $\mathcal{C}(\mathbb{S}) = cl(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{S})$ unei uniuni de regiuni poliedrale $\mathbb{S} = \bigcup_l S_l$

$$\mathcal{A}(\mathbb{H}) = \bigcup_{l=1,\dots,\gamma(N)} \underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^{N} R^{\sigma_l(i)}(\mathcal{H}_i)\right)}_{A_l}$$

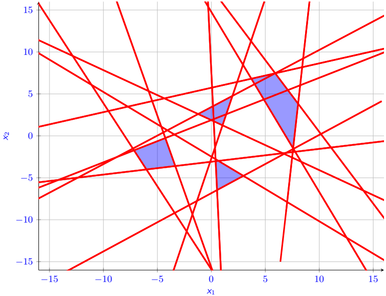


[0] Prodan I., Stoican F., Olaru S. and Niculescu S-I. (2016): Mixed-Integer Representations in Control Design, SpringerBriefs in Control, Automation and Robotics Series, Springer.

Regiuni ne-conectate și neconvexe

Considerăm complementul $\mathcal{C}(\mathbb{S}) = cl(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{S})$ unei uniuni de regiuni poliedrale $\mathbb{S} = \bigcup_l S_l$

$$A_l \begin{cases} \vdots & \\ \sigma_l(1)h_1 x & \leq \sigma_l(1)k_1 + M\alpha_l(\lambda) \\ \vdots & \\ \sigma_l(N)h_N x & \leq \sigma_l(N)k_N + M\alpha_l(\lambda) \\ \vdots & \\ 0 \leq \beta_l(\lambda) \end{cases}$$



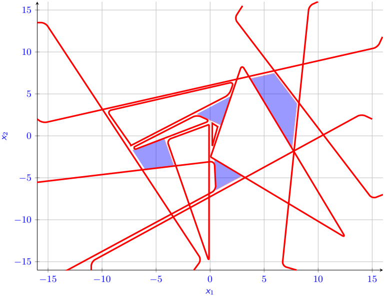
Folosind hiperplanele $\mathcal{H}_i$ partiționăm spațiul în celule distincte A_l cărora le asociem o combinație liniară de variabile binare $\alpha_l(\lambda)$.

[0] Prodan I., Stoican F., Olaru S. and Niculescu S-I. (2016): Mixed-Integer Representations in Control Design, SpringerBriefs in Control, Automation and Robotics Series, Springer.

Regiuni ne-conectate și neconvexe

Considerăm complementul $\mathcal{C}(\mathbb{S}) = cl(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{S})$ unei uniuni de regiuni poliedrale $\mathbb{S} = \bigcup_l S_l$

$$
\begin{array}{c}
\vdots \\
A_l \begin{cases} \sigma_l(1) h_1 x & \leq \sigma_l(1) k_1 + M\alpha_l(\lambda) \\ & \vdots \\ \sigma_l(N) h_N x & \leq \sigma_l(N) k_N + M\alpha_l(\lambda) \end{cases} \\
\vdots \\
0 \leq \beta_l(\lambda)
\end{array}
$$



Numărul de celule poate fi redus prin operații de uniune ("merging").

[0]Prodan I., Stoican F., Olaru S. and Niculescu S-I. (2016): Mixed-Integer Representations in Control Design, SpringerBriefs in Control, Automation and Robotics Series, Springer.

Problema evitării obstacolelor

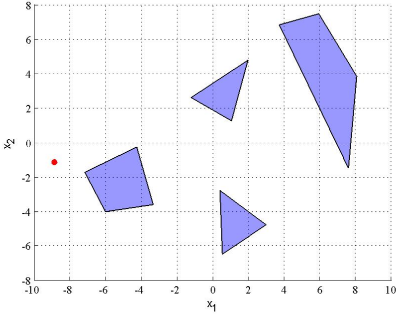
Considerăm un agent al cărui model este dat de:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad y(k) = Cx(k),$$

cu $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ și $y(k) \in \mathbb{R}^p$, starea, intrarea și ieșirea agentului.

Condiția de evitare a coliziunii:
Pentru orice obstacol S_l și un agent caracterizat de starea sa dinamică $x(k)$, avem:

$$\{x(k)\} \cap S_l = \emptyset, \quad \forall l = 1 \ldots N_o.$$



[0] (Stoican et al., ECC'13)

Problema evitării obstacolelor

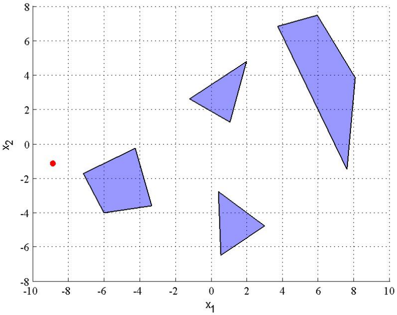
Considerăm un agent al cărui model este dat de:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad y(k) = Cx(k),$$

cu $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ și $y(k) \in \mathbb{R}^p$, starea, intrarea și ieșirea agentului.

Reprezentare MI a spațiului:

- 14 hiperplane
- 106 regiuni obținute prin partiționarea spațiului
- 10 celule ce descriu regiunile interzise
- 96 celule ce descriu regiunile permise
- $N_0 = 12$ numărul de variabile binare



[0](Stoican et al., ECC'13)

Problema evitării obstacolelor

Considerăm un agent al cărui model este dat de:

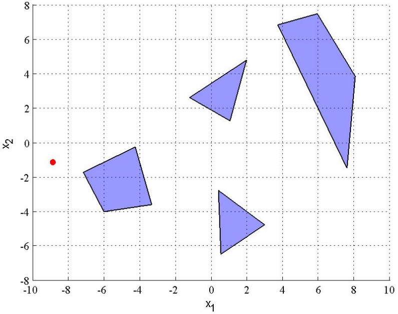
$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad y(k) = Cx(k),$$

cu $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ și $y(k) \in \mathbb{R}^p$, starea, intrarea și ieșirea agentului.

Rezolvă o problemă MIQP cu orizont de predicție finit:

$$u^* = \arg \min_{u(k),\dots u(k+N_p-1)} \sum_{i=0}^{N_p-1} \|x(k+i+1)\|_Q + \|u(k+i)\|_R,$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t. } & x(k+i+1) = Ax(k+i) + Bu(k+i),\\
& y(k+i) \in \mathcal{Y},\ u(k+i) \in \mathcal{U},\\
& x(k+i+1) \notin \mathbb{S}, \quad l = 1\dots N_o.
\end{aligned}$$



[0](Stoican et al., ECC'13)

Exemplu de evitare a obstacolelor și a coliziunii

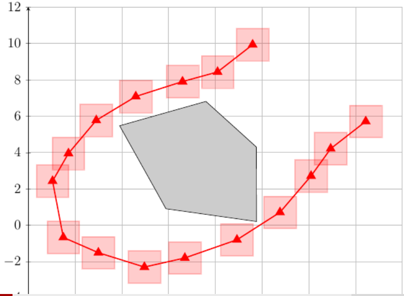
Condiții de evitare a coliziunii:

1. pentru orice obstacol S_l și orice agent caracterizat prin starea sa dinamică $x_i(k)$ și regiunea de siguranță asociată S_i^a, condițiile de evitare a coliziunii sunt:

$$(\{x_i(k)\} \oplus S_i^a) \cap S_l = \emptyset, \quad \forall i = 1 \dots N_a, \ \forall l = 1 \dots N_o.$$

2. pentru oricare doi agenți caracterizați prin stările lor dinamice $x_i(k)$, $x_j(k)$ și regiunile lor de siguranță asociate S_i^a, S_j^a, condițiile de evitare a coliziunii sunt:

$$(\{x_i(k)\} \oplus S_i^a) \cap \left(\{x_j(k)\} \oplus S_j^a\right) = \emptyset, \quad \forall i, j = 1 \dots N_a, \ i \neq j.$$



Exemplu de evitare a obstacolelor și a coliziunii

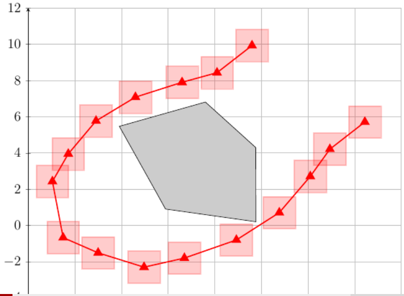
Condiții de evitare a coliziunii:

1. pentru orice obstacol S_l și orice agent caracterizat prin starea sa dinamică $x_i(k)$ și regiunea de siguranță asociată S_i^a, condițiile de evitare a coliziunii sunt:

$$x_i(k) \notin (\{-S_i^a\} \oplus S_l), \quad \forall i = 1 \dots N_a, \ \forall l = 1 \dots N_o,$$

2. pentru oricare doi agenți caracterizați prin stările lor dinamice $x_i(k)$, $x_j(k)$ și regiunile lor de siguranță asociate S_i^a, S_j^a, condițiile de evitare a coliziunii sunt:

$$x_i(k) - x_j(k) \notin \left(\{-S_i^a\} \oplus S_j^a\right), \quad \forall i, j = 1 \dots N_a, \ i \neq j.$$



Cuprins

Despre MPC

Pros & cons pentru problema cu orizont finit (MPC – model predictive control):[1]

Pros

- Suportă diverse clase de modele: e.g., (ne)liniar, stocastic, multi-variabil;
- Permite impunerea de constrângeri asupra stării/intrarilor/ieșirilor: de exemplu, constrângeri pe comandă;
- Conduce la o soluție optimă;
- Multe resurse...

Cons

- Poate necesita optimizare online;
- Poate necesita calcule complexe $\Longrightarrow$ complicații în aplicații cu constrângeri de timp dificile.

[1] Cannon, M. „C21 Model Predictive Control". În: *Lecture Notes, Oxford University, Oxford* (2016)
.

Formularea generală, ca o problemă de optimizare discretă

Având:

- costul $J(x_0, u) = \sum_{k=0}^{N} \ell(x_k, u_k), \quad N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$;
- modelul $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$ cu punct de plecare inițial x_0;
- constrângerile $x_k \in \mathcal{X}$ și $u_k \in \mathcal{U}$, pentru $k \in \mathbb{N}$, $x_N \in \mathcal{X}_N$;

Problema cu orizont finit (MPC) este[2]:

$$
\begin{aligned}
u^\star = \arg\min_u \; & J(x_0, u) \\
\text{s.t. } & x_{k+1} = f(x_k, u_k) \\
& x_k \in \mathcal{X}, u_k \in \mathcal{U}, x_N \in \mathcal{X}_N
\end{aligned}
$$

[2] Levine, W. S. „The essentials of model predictive control”. În: *Handbook of model predictive control*. 2019, pp. 3–27, 2019.

.

Implementare pentru planificarea mișcării

$$\min_{u_k \dots u_{k+N-1}} \sum_{i=1}^{N} \left(x_{k+i} - \bar{x}\right)^\top \left(x_{k+i} - \bar{x}\right) + \sum_{i=0}^{N-1} u_{k+i}^\top u_{k+i}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad x_{k+i+1} &= A x_{k+i} + B u_{k+i}, \\
|u_{k+i}| &\leq \bar{u}, \\
|x_{k+i+1}| &\leq \bar{x}, \\
x_{k+i+1} &\notin P, \qquad \forall i = 1 : N.
\end{aligned}$$

- se definesc costuri ce se doresc minimizate (efortul de-a lungul traiectoriei: $u_{k+i}^\top u_{k+i}$, distanța față de destinație $\left(x_{k+i} - \bar{x}\right)^\top \left(x_{k+i} - \bar{x}\right)$, etc.);
- se forțează respectarea constrângerilor (pe intrare: $|u_{k+i}| \leq \bar{u}$, pe stare: $|x_{k+i+1}| \leq \bar{x}$, de evitarea a obstacolelor: $x_{k+i+1} \notin P$);
- se aplică constrângerile și costul pe un orizont de predicție finit (de lungime N) iar din secvența de comenzi obținute $\{u_k, \dots, u_{n+N-1}\}$ se aplică doar prima, u_k;
- se repetă pași anteriori incrementând indexul $k \mapsto k+1$.

Referințe

[1] Afonso, R. J. și R. K. Galvão.„Comments on Enhancements on the Hyperplanes Arrangements in Mixed-Integer Programming Techniques”.În: *Journal of Optimization Theory and Applications* (2013), pp. 1–8, 2013.

[2] Cannon, M.„C21 Model Predictive Control”.În: *Lecture Notes, Oxford University, Oxford* (2016).

[3] Levine, W. S.„The essentials of model predictive control”.În: *Handbook of model predictive control*. 2019,pp. 3–27, 2019.

[4] Prodan, I., F. Stoican, S. Olaru și S. Niculescu.„Enhancements on the Hyperplanes Arrangements in Mixed-Integer Techniques”.În: *Journal of Optimization Theory and Applications* 154.2 (2012), pp. 549–572, 2012.ISSN: 0022-3239.