Noțiuni introductive despre sisteme dinamice și operații cu mulțimi
curs 2 - opțional SPER

Florin Stoican

1 martie 2022

Cuprins

Cuprins

Sisteme dinamice

Analizăm comportamentul sistemelor dinamice autonome

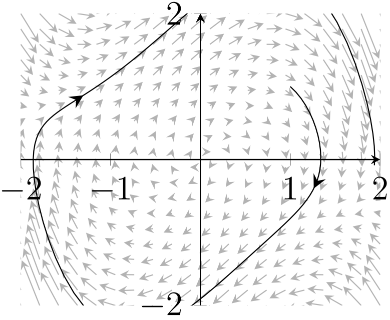
$$\dot{x} = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Putem analiza următoarele noțiuni:

- traiectoriile sistemului (portretul de fază)
- punct(e) de echilibru
- stabilitate

Oscilatorul Van der Pol:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0$$



Sisteme dinamice

Analizăm comportamentul sistemelor dinamice autonome

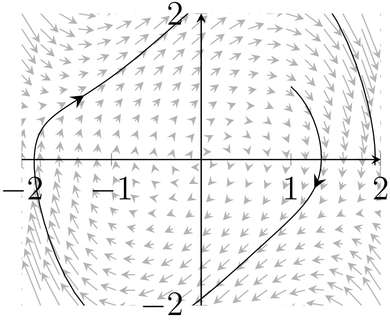
$$\dot{x} = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Putem analiza următoarele noțiuni:

- traiectoriile sistemului (portretul de fază)
- punct(e) de echilibru
- stabilitate

Oscilatorul Van der Pol:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0$$



Ne vom rezuma la sisteme dinamice liniare și autonome:

Sisteme dinamice liniare

Sistemele dinamice liniare modelează un număr larg de situații întâlnite în practică (circuite electrice de exemplu).
Au proprietăți ce permit o manipulare relativ ușoară:

- liniaritate

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad x, y \in \mathbb{R}^n$$

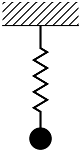
- scalare

$$f(\alpha x) = \alpha f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$$

Exemplu: oscilatorul mecanic

- notăm $y = \dot{x}$, deci $\dot{y} = \ddot{x}$
- scriem

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m}x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



$$m\ddot{x} = -kx$$

Cuprins

Vectori și valori proprii

Un vector $v \in \mathbb{R}^n$ este un vector propriu al lui A dacă există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$$Av = \lambda v.$$

λ este o valoare proprie a lui A.
Pentru a obține un vector propriu trebuie găsită o soluție nenulă a lui

$$(A - \lambda I)v = 0$$

Un astfel de sistem permite soluții nenule doar dacă $A - \lambda I$ este singulară $\Leftrightarrow$ trebuie găsiți λ pentru care:

$$det(A - \lambda I) = 0. \text{ (ecuația caracteristică)}$$

Strategie de lucru:

- găsim rădăcinile ecuației caracteristice (valorile proprii)
- folosim fiecare dintre valorile proprii pentru a calcula vectorul propriu asociat

Vectori și valori proprii – cazul $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Putem distinge mai multe situații în funcție de structura matricei A. Analizăm pentru $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

- valori proprii reale și distincte ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$):
  - vectori proprii reali și liniar independenți
  - $Av_1 = \lambda_1 v_1,\ Av_2 = \lambda_2 v_2$
  - sistemul se poate diagonaliza $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$
- valori proprii complexe și distincte ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$):
  - vectori proprii complecși și liniar independenți ($v \pm ju$)
  - $A(v+ju) = (\alpha + j\beta)(v+ju),\ A(v-ju) = (\alpha - j\beta)(v-ju)$ (unde $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$)
  - formă diagonală numai dacă matricea de multiplicare este complexă; cu o matrice reală se obține un bloc 2×2: $\begin{bmatrix} v & u \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} v & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$
- o valoare proprie comună ($\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$) și vectori proprii independenți:
  - vectori proprii generalizați
  - $Av_1 = \lambda v_1,\ (A - \lambda I)v_2 = v_1$
  - descompunere în bloc(uri) Jordan în formă reală: $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

Cuprins

Traiectoriile unui sistem dinamic

În cazul liniar traiectoria sistemului se poate întotdeauna determina analitic:

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

Traiectoria ($x(t)$) unui sistem dinamic liniar depinde de

- valoarea inițială a stării: $x(0)$
- dinamica sistemului: A

Pentru orice matrice nesingulară V, facem o schimbare de variabilă $x = Vy$:

$$\dot{x} = Ax \Leftrightarrow \dot{y} = \Lambda y, \qquad \text{unde } y = V^{-1}x, \Lambda = VAV^{-1}$$

Dacă V, Λ descriu vectorii și valorile proprii ale matricei A atunci sistemul este canonic (are o formă (pseudo-)diagonală) și putem caracteriza comportamentul sistemului (traiectoriile) analizând vectorii și valorile proprii.

Echilibrul într-un sistem dinamic liniar

Pentru un sistem de forma

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

Un punct de echilibru x^* este o constantă a ecuației diferențiale (adică o soluție a egalității $\dot{x}(t) = 0$), ceea ce înseamnă că

$$Ax(t) = Ax^* = 0$$

Distingem următoarele situații:

- $rangA = n$: punct unic de echilibru în $x^* = 0$
- $rangA < n$: o mulțime de puncte de echilibru definite de spatiul nul ($kerA$):
$$x^* = \{x|\, x \in kerA\}$$

Clasificăm punctele de echilibru în:

- echilibru stabil
- echilibru instabil
- echilibru indiferent

Echilibrul într-un sistem dinamic liniar

Pentru un sistem de forma

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

Un punct de echilibru x^* este o constantă a ecuației diferențiale (adică o soluție a egalității $\dot{x}(t) = 0$), ceea ce înseamnă că

$$Ax(t) = Ax^* = 0$$

Distingem următoarele situații:

- $rangA = n$: punct unic de echilibru în $x^* = 0$
- $rangA < n$: o mulțime de puncte de echilibru definite de spatiul nul ($kerA$):
$$x^* = \{x |\ x \in kerA\}$$

Clasificăm punctele de echilibru în:

- echilibru stabil
- echilibru instabil
- echilibru indiferent

Suntem interesați de cazul $rangA = n$, căruia îi corespunde $x^* = 0$.

Stabilitatea traiectoriilor intr-un sistem dinamic liniar

Un sistem dinamic liniar autonom $\dot{x} = Ax,\ x \in \mathbb{R}^n$ cu A invertibilă este stabil dacă:

$$x(t) \to 0 \text{ atunci când } t \to 0$$

Stabilitatea sistemului depinde de valorile proprii ale matricii de stare:

$$x(t) = e^{At}x(0) \xrightarrow{x=Vy} y(t) = e^{\Lambda t}y(0)$$

deci sistemul este stabil dacă și nu mai dacă partea reală a valorilor proprii este strict negativă ($Re(\Lambda) < 0$).

Exemplu pentru $A \in \mathbb{R}^2$ cu valori proprii reale și distincte:
Avem

$$e^{\Lambda t} = e^{\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}$$

ceea ce conduce la:

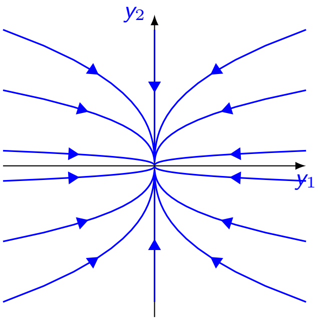
$$y(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix} y(0) = e^{\lambda_1 t}y_1(0)\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + e^{\lambda_2 t}y_2(0)\cdot\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

În consecință, $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t} \to 0$ pentru $t \to 0$ doar dacă $Re(\lambda_{1,2}) < 0$.

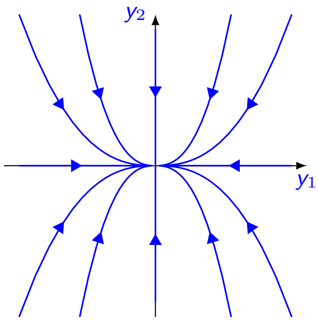
Cazul $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ și $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

Soluțiile în forma canonică: $y_1(t) = y_1(0)e^{\lambda_1 t}$, $\quad y_2(t) = y_2(0)e^{\lambda_2 t}$

- atât $y_1(t)$ cât și $y_2(t)$ converg către zero
- argumentul $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ este pozitiv $\Rightarrow$ obținem curbe parabolice
- punctul de echilibru este stabil



$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

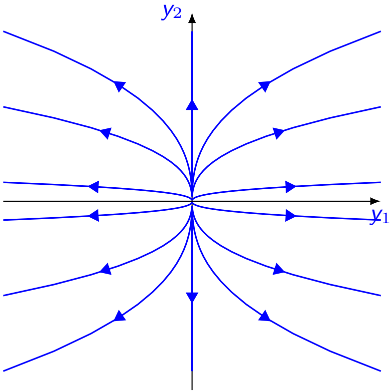


$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

Cazul $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ și $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

În cazul în care $\lambda_1, \lambda_2 > 0$:

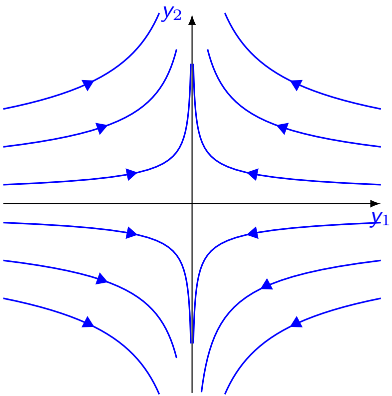
- avem un sistem instabil (punctul de echilibru este instabil de tip sursă)
- grafic, curbele arată similar cu cazul $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ (pentru că $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{-\lambda_1}{-\lambda_2}$)
- traiectoriile sunt parcurse în sens invers



Cazul $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ și $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

În cazul în care $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$:

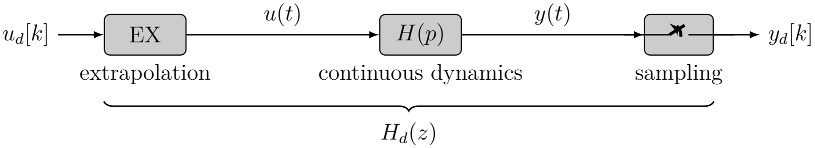
- avem un sistem instabil (punctul de echilibru este instabil de tip șa)
- componenta $y_1(t)$ descrește către zero iar componenta $y_2(t)$ crește către ∞
- exponentul $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ este negativ deci vom avea curbe hiperbolice



Cuprins

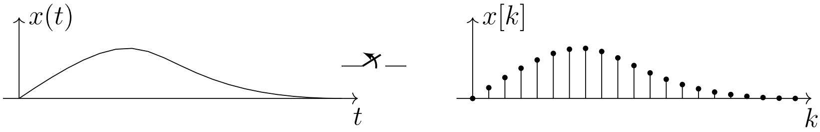
Eșantionarea unui semnal

- Adesea un sistem continuu este discretizat prin eșantionarea ieșirii și extrapolarea intrării (primită ca semnal discret de la un controller):



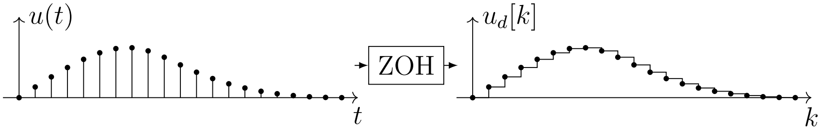
- Eșantionarea unui semnal continuu se face luând valoarea sa la un pas de eșantionare T_e (pași ne-uniformi sunt posibili dar ne-uzuali!):

$$x[k] = x(kT_e)$$

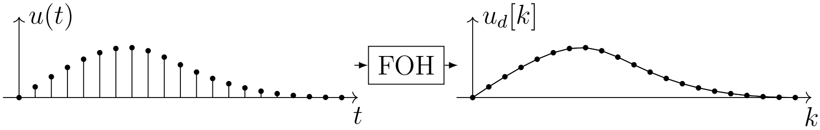


Extrapolarea unui semnal

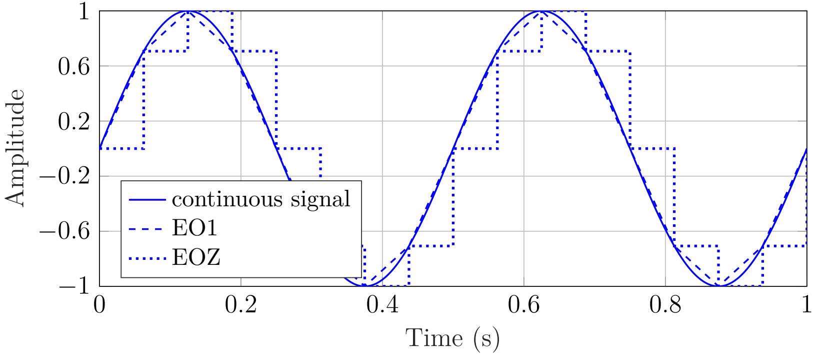
- extrapolatorul completează valorile unui semnal discret prin completarea intervalelor de eșantionare; de obicei, extrapolatoare de ordin zero (ZOH) sau unu (FOH) sunt folosite:
- ordin zero (folosește informația dată de eșantionul curent)



- ordin unu (folosește informația dată de două eșantione consecutive)



Extrapolarea unui semnal - exemplul unui semnal sinusoidal



Discretizarea în reprezentare pe stare

- Să ne aducem aminte modelul dinamic liniar

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases}$$

- varianta discretizată printr-un extrapolator de ordin zero și un eșantionor de pas T_e este dată de:

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k, \\ y_k = C_d x_k, \end{cases}$$

unde

$$A_d = \mathrm{e}^{AT_e}, \quad B_d = \int_0^{T_e} \mathrm{e}^{At} B\, dt, \quad C_d = C.$$

Ideea din spatele acestor relații este că presupunem $\dot{u} = u(k)$ pentru un pas de eșantionare $t \in [kT_e, (k+1)T_e)$ și utilizăm formula de calcul a traiectoriei pentru cazul continuu:

$$x(k+1) = x((k+1)T_e) = \mathrm{e}^{AT_e} x(kT_e) + \int_{kT_e}^{(k+1)T_e} \mathrm{e}^{A((k+1)T_e - \tau)} Bu(\tau) d\tau.$$

Aproximări ale termenului exponențial $\exp(sT_e)$

- ideal, când trecem din continuu în discret, echivalăm $e^{sT_e} = z$;
- sunt câteva metode clasice pentru a aproxima (liniar!) e^{sT_e}

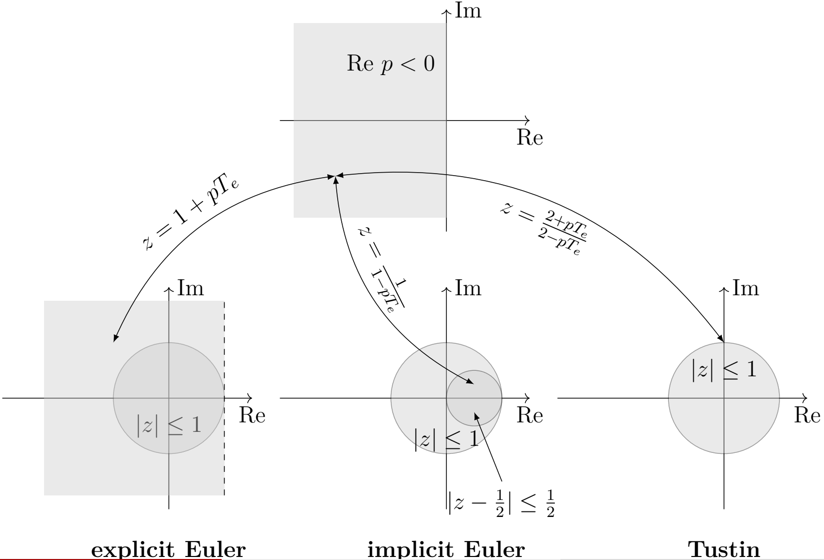
$$z = e^{sT_e} \approx \begin{cases} 1 + pT_e, & \leftarrow \text{Euler explicit} \\ \dfrac{1}{1 - sT_e}, & \leftarrow \text{Euler implicit} \\ \dfrac{2 + sT_e}{2 - sT_e}, & \leftarrow \text{Tustin} \end{cases}$$

- ceea ce permite să aproximăm s în funcție de z:

$$s \approx \begin{cases} \dfrac{z-1}{T_e}, & \leftarrow \text{Euler explicit} \\ \dfrac{z-1}{zT_e}, & \leftarrow \text{Euler implicit} \\ \dfrac{2}{T_e}\dfrac{z-1}{z+1}, & \leftarrow \text{Tustin} \end{cases}$$

- aceste operații se pot interpreta ca o aproximare a operațiilor de derivare/integrare prin relații de recurență.

Transformări ale planului complex

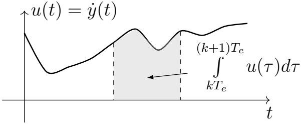


Aproximări ale operațiilor de derivare/integrare

- aproximarea operației de integrare are o interpretare geometrică (aria de sub grafic)

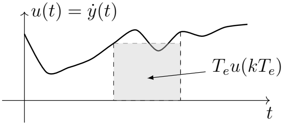
Derivare / integrare:

$$\dot{y}(t) = u(t), \quad y(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau$$



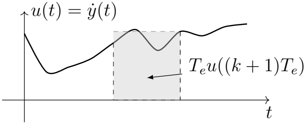
- Euler explicit:

$$u(kT_e) = \dot{y}(kT_e) \approx \frac{y((k+1)T_e) - y(kT_e)}{T_e}$$



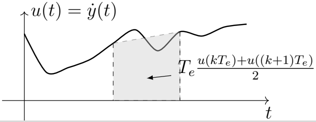
- Euler implicit:

$$u((k+1)T_e) = \dot{y}((k+1)T_e) \approx \frac{y((k+1)T_e) - y(kT_e)}{T_e}$$



- Tustin:

$$\frac{u(kT_e) + u((k+1)T_e)}{2} = \dot{y}((k+1)T_e) \approx \frac{y((k+1)T_e) - y(kT_e)}{T_e}$$



Cuprins

Aplicarea noțiunii de mulțime

Mulțimile au fost și sunt adesea folosite în domeniul reglării/planificării mișcării:

- calcul regiuni "reachable" (e.g., evitare adversarului în contextul "zero-sum game" [1], verificări formale [2], soluții pentru ecuații cu derivate parțiale de ordinul 1 Hamilton-Jacobi [3])
- invarianță pentru dinamici liniare în prezența incertitudinilor (necunoscute dar mărginite) [4],[5]
- metode de programare dinamică [6]
- caracterizări de dinamici incerte [7]

[1] Mitchell, I., A. Bayen **and** C. Tomlin. "A time-dependent Hamilton-Jacobi formulation of reachable sets for continuous dynamic games". **in**IEEE Transactions on Automatic Control: 50.7 (2005), pp. 947–957, 2005.

[2] Asarin, E., O. Bournez, T. Dang **and** O. Maler. "Approximate reachability analysis of piecewise-linear dynamical systems". **in**Hybrid Systems: Computation and Control: (2000), pp. 20–31, 2000.

[3] Frankowska, H. "Lower semicontinuous solutions to Hamilton-Jacobi-Bellman equations". **in**Decision and Control, 1991., Proceedings of the 30th IEEE Conference on: IEEE. 1993, pp. 265–270, 1993.

[4] Kurzhanski, A. **and** P. Varaiya. "Reachability under uncertainty". **in**Decision and Control, 2002, Proceedings of the 41st IEEE Conference on: **volume** 2. IEEE. 2003, pp. 1982–1987, 2003.

[5] Varaiya, P. "Reach set computation using optimal control". **in**NATO ASI SERIES F COMPUTER AND SYSTEMS SCIENCES: 170 (2000), pp. 323–331, 2000.

[6] Bertsekas, D. Dynamic programming and optimal control, vol. II. 2007

[7] Lygeros, J. "On reachability and minimum cost optimal control". **in**Automatica: 40.6 (2004), pp. 917–927, 2004.

Operații cu mulțimi

- proiecție de-a lungul unui sub-spațiu
- suma Minkowski între două mulțimi $P, Q \subseteq \mathbb{R}^n$ este dată de

$$P \oplus Q = \{x + y : \; x \in P, y \in Q\}$$

- diferența Pontryagin este dată de

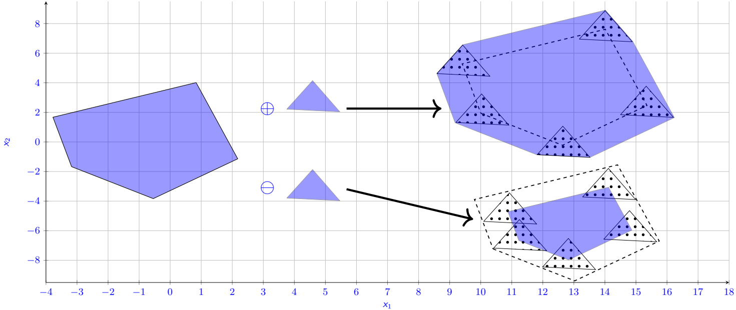
$$P \ominus Q = \{x \in P : \; x + y \in P, \forall y \in Q\}\,.$$

- pentru două mulțimi convexe P, Q, distanța Hausdorff este dată de

$$d_H(P, Q) = \max\left\{\bar{d}_H(P, Q), \bar{d}_H(Q, P)\right\}$$

unde $\bar{d}_H(P, Q) = \max_{x \in P} \min_{y \in Q} d(x, y)$, și $d(x, y)$ este o distanță măsurată într-o normă din spațiul $\mathbb{R}^n$.

Operații cu mulțimi – exemplificări



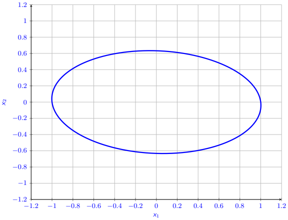
Familii de mulțimi – generalități

Diverse familii de mulțimi:

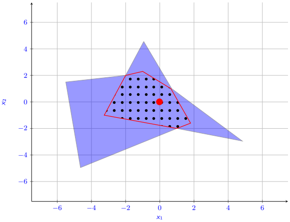
- elipsoizi
- politopi/zonotopi
- (B)LMI-uri
- mulțimi stelate

Limitări ce trebuie considerate:

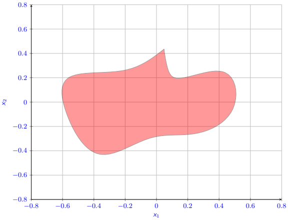
- flexibilitatea reprezentării
- implementarea numerică



$x^T Qx \leq \gamma$



$Kern(S) \neq \emptyset$



$G(x) \leq 0$

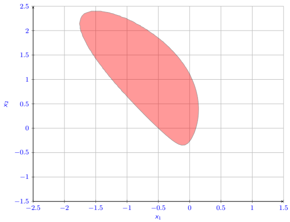
Familii de mulțimi – generalități

Diverse familii de mulțimi:

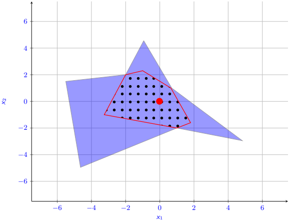
- elipsoizi
- politopi/zonotopi
- (B)LMI-uri
- mulțimi stelate

Limitări ce trebuie considerate:

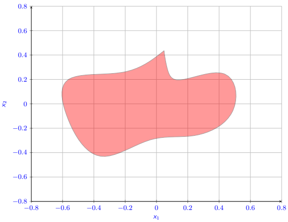
- flexibilitatea reprezentării
- implementarea numerică



$A_0 + \sum x_i A_i \succ 0$



$Kern(S) \neq \emptyset$



$G(x) \leq 0$

Familii de mulțimi – poliedre

Un compromis bun: mulțimi poliedrale

Mulțimi poliedrale:

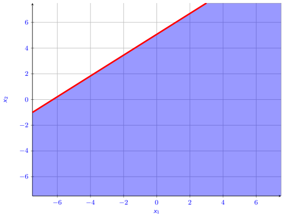
- au reprezentare duală
  - half-space:

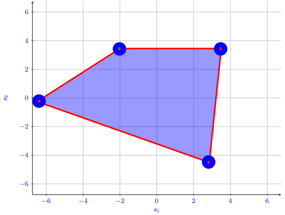
$$h_i x \leq k_i,\ i = 1 \ldots N_h$$

  - vertex:

$$\sum_i \alpha_i v_i,\ \alpha_i \geq 0,\ \sum_i \alpha_i = 1,\ i = 1 \ldots N_v$$

- algoritmi eficienți pentru probleme de caracterize/mărginire a unei dinamici [8]
- pot aproxima arbitrar de bine orice regiune convexă [9]





[8] Gritzmann, P. **and** V. Klee. “On the complexity of some basic problems in computational convexity: I. Containment problems”. **in**Discrete Mathematics: 136.1-3 (1994), pp. 129–174, 1994.

[9] Bronstein, E. “Approximation of convex sets by polytopes”. **in**Journal of Mathematical Sciences: 153.6 (2008), pp. 727–762, 2008.

Noțiuni de invarianță

Considerăm în $\mathbb{R}^n$

$$x^+ = f(x, \delta)$$

cu perturbații mărginite de mulțimea $\Delta \subset \mathbb{R}^n$.

Definiție (RPI)

O mulțime Ω este mumită “robust positive invariant (RPI)” dacă și numai dacă

$$f(\Omega, \Delta) \subseteq \Omega.$$

Mulțimea RPI minimală (conținută în toate mulțimile RPI) se definește ca:

$$\Omega_\infty = \underbrace{f(f(\ldots, \Delta), \Delta)}_{\infty \text{ iterations}} = \lim_{k \to \infty} f^{(k)}(0, \Delta).$$

Noțiuni de invarianță

Considerăm un sistem LTI în $\mathbb{R}^n$

$$x^+ = Ax + B\delta$$

cu A o matrice Schurși perturbații mărginite de mulțimea $\Delta \subset \mathbb{R}^n$.

Definiție (RPI)

O mulțime Ω este mumită "robust positive invariant (RPI)" dacă și numai dacă

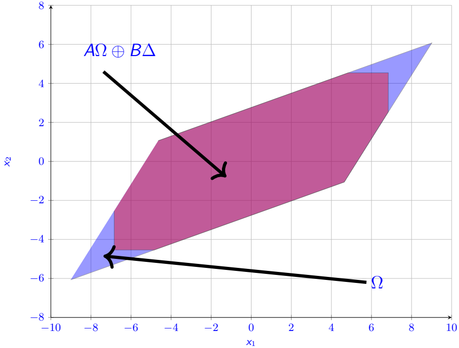
$$A\Omega \oplus B\Delta \subseteq \Omega.$$

Mulțimea RPI minimală (conținută în toate mulțimile RPI) se definește ca:

$$\Omega_\infty = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A^i B\Delta.$$

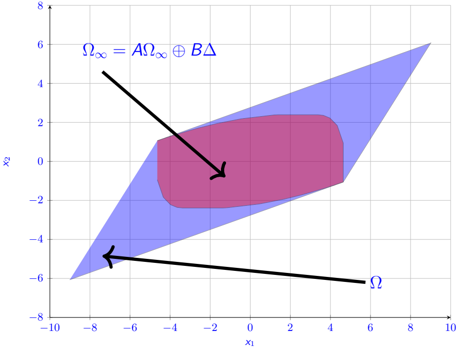
Noțiuni de invarianță – exemplificări

RPI set



$$A\Omega \oplus B\Delta \subseteq \Omega$$

mRPI set



$$\Omega_\infty = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A^i B\Delta$$

[1] Asarin, E., O. Bournez, T. Dang **and** O. Maler.“Approximate reachability analysis of piecewise-linear dynamical systems”.**in**Hybrid Systems: Computation and Control: (2000), pp. 20–31, 2000.

[2] Bertsekas, D.Dynamic programming and optimal control, vol. II. 2007.

[3] Bronstein, E.“Approximation of convex sets by polytopes”.**in**Journal of Mathematical Sciences: 153.6 (2008), pp. 727–762, 2008.

[4] Frankowska, H.“Lower semicontinuous solutions to Hamilton-Jacobi-Bellman equations”.**in**Decision and Control, 1991., Proceedings of the 30th IEEE Conference on:IEEE 1993,pp. 265–270, 1993.

[5] Gritzmann, P. **and** V. Klee.“On the complexity of some basic problems in computational convexity: I. Containment problems”.**in**Discrete Mathematics: 136.1-3 (1994), pp. 129–174, 1994.

[6] Kurzhanski, A. **and** P. Varaiya.“Reachability under uncertainty”.**in**Decision and Control, 2002, Proceedings of the 41st IEEE Conference on:**volu** 2003,pp. 1982–1987, 2003.

[7] Lygeros, J.“On reachability and minimum cost optimal control”.**in**Automatica: 40.6 (2004), pp. 917–927, 2004.

Referințe II

[8] Mitchell, I., A. Bayen **and** C. Tomlin.“A time-dependent Hamilton-Jacobi formulation of reachable sets for continuous dynamic games”.**in**IEEE Transactions on Automatic Control: 50.7 (2005), pp. 947–957, 2005.

[9] Varaiya, P.“Reach set computation using optimal control”.**in**NATO ASI SERIES F COMPUTER AND SYSTEMS SCIENCES: 170 (2000), pp. 323–331, 2000.