

Exerciții

Arbori. Parcurgeri

# Exerciții

1. Se dă un graf neorientat conex  $G = (V, E)$ . Se consideră parcurgerile DFS și BFS care pornesc din nodul 1, iar vecinii unui nod sunt considerați în ordine crescătoare.

Ce proprietăți trebuie să respecte  $G$  pentru ca cele două parcurgeri să obțină același arbore parțial?

# Exerciții

2. Fie  $G_1$  și  $G_2$  două grafuri cu proprietatea că ordinea în care sunt parcurse vârfurile în BF este aceeași pentru ambele grafuri, la fel și în DF (vecinii unui vârf sunt parcurși în ordine crescătoare).

Sunt  $G_1$  și  $G_2$  egale?

# Exerciții

3. Fie  $G_1$  și  $G_2$  două grafuri cu proprietatea că arborii BF și DF ai celor două grafuri sunt egali (vecinii unui vârf sunt parcurși în ordine crescătoare).

Sunt  $G_1$  și  $G_2$  egale?

# Exerciții

4. Se dă un graf neorientat conex  $G = (V, E)$  și un vârf  $s$ . Care este numărul minim de muchii ale unui graf parțial al lui  $G$  care conservă distanțele de la  $s$  la celelalte vârfuri

# Exerciții

5. Fie  $T$  un graf neorientat cu  $n$  vârfuri.

Arătați că  $T$  este arbore  $\Leftrightarrow T$  este conex și are  $n-1$  muchii

# Exerciții

6. Fie  $G$  un graf conex neorientat. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate? Justificați.

- a) Extremitățile unei muchii critice în  $G$  sunt puncte critice
- b) Un punct critic în  $G$  este extremitate a unei muchii critice

# Algoritmul Reverse-Delete

```
sorteaza_descrescator (E)
```

```
T = G
```

```
for (uv ∈ E)
```

```
    if T - uv este conex
```

```
        (⇔ if uv este continuta intr-un ciclu in T)
```

```
            T = T - uv
```

```
    if (|E(T)| == n-1)
```

```
        STOP;
```



# Second best

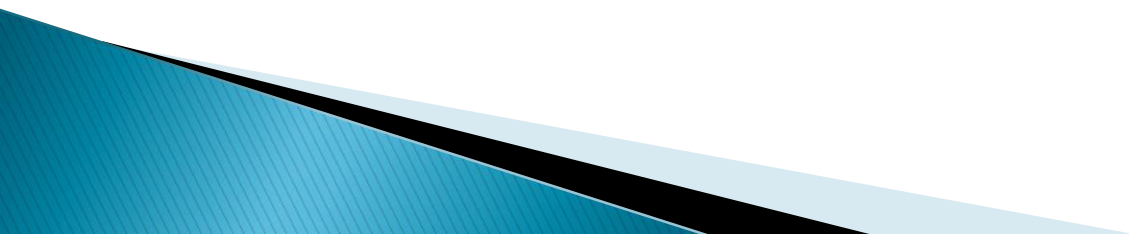
Fie  $G=(V,E,w)$  cu ponderi distincte

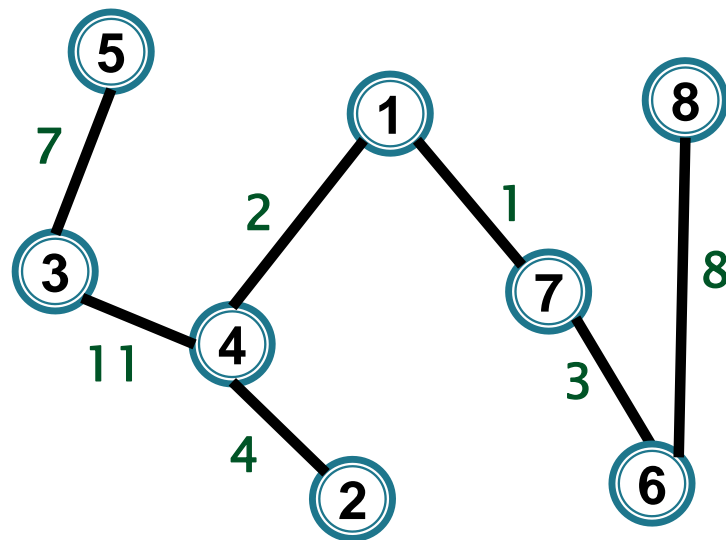
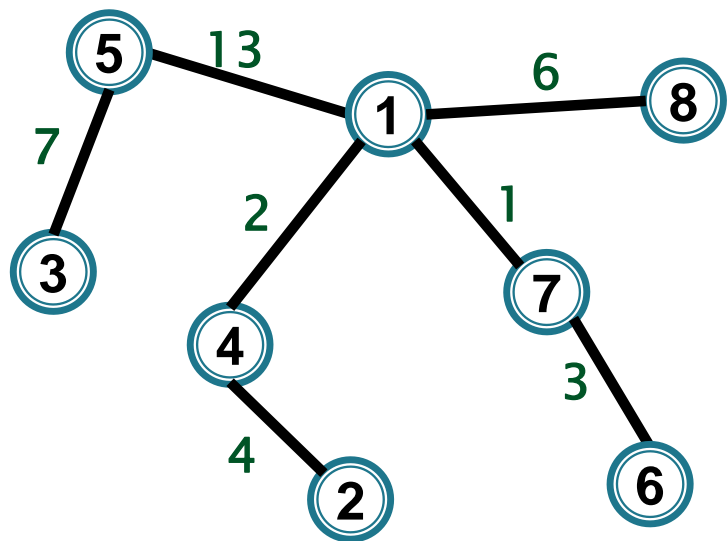
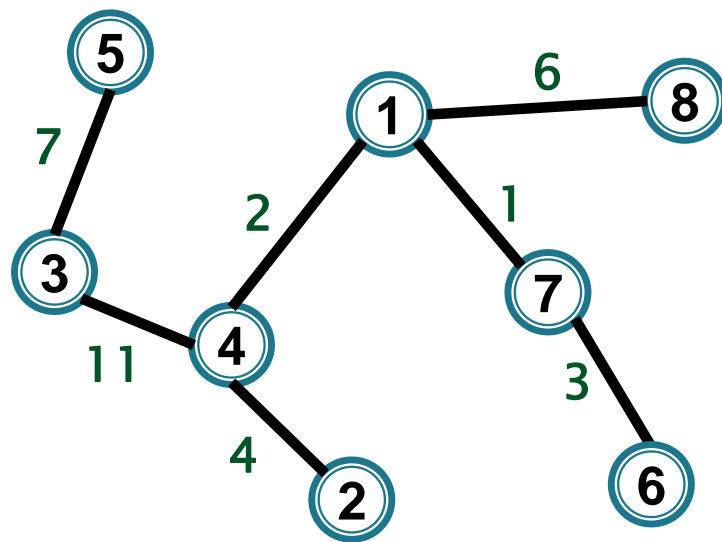
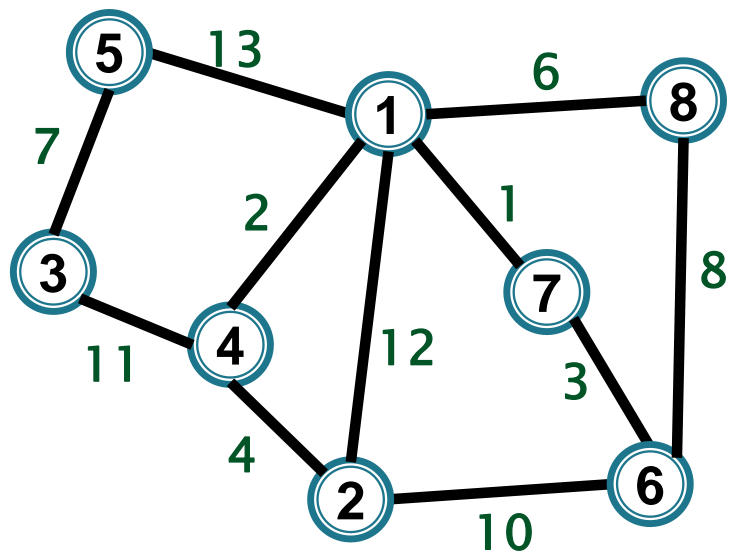
Atunci există un unic apcm  $T_{\min}$  al lui  $G$

**Second best apcm** – al doilea apcm = arbore parțial  $T_s$  cu

$$w(T_s) = \min\{w(T) \mid T \text{ arbore parțial în } G \text{ diferit de } T_{\min}\}$$

Second best – nu este neapărat unic



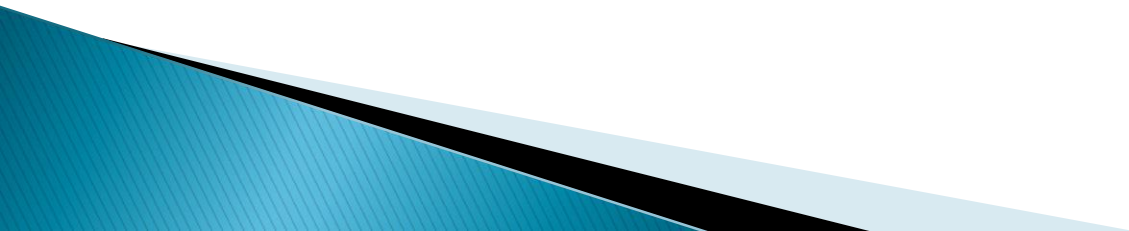


# Second best

Cum se poate obtine second best din apcm?

**Idee:**

second = apcm în care se schimbă doar o muchie



# Second best

Propoziție Fie  $G=(V,E,w)$  conex cu ponderi distincte

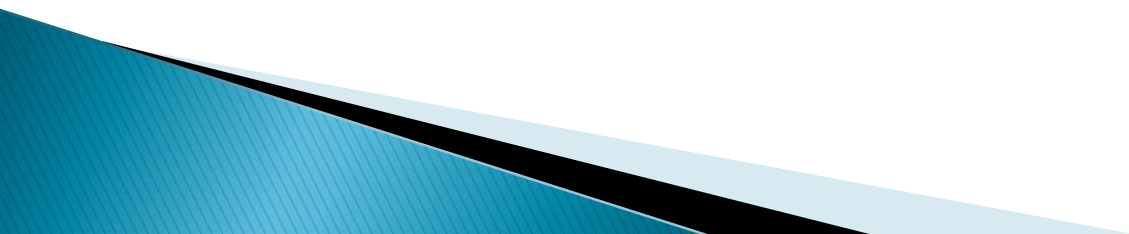
Fie  $T_{\min}$  unicul apcm al lui  $G$

Fie  $T_s$  un arbore second best

Atunci există  $uv \in T_{\min}$  și  $xy \notin T_{\min}$  astfel încât

$$T_s = T_{\min} - uv + xy$$

Demonstrație – Tema



# Second best

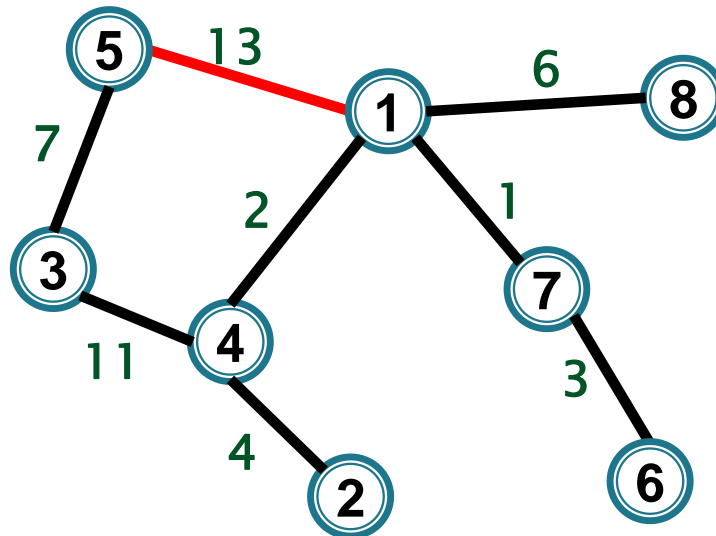
## Idee algoritm:

Fie  $T_{\min}$  apcm

Cum derminăm  $uv \in T_{\min}$  și  $xy \notin T_{\min}$  a.î

$T_{\min} - uv + xy$  să fie arbore și

$w(xy) - w(uv)$  minim cu această proprietate?



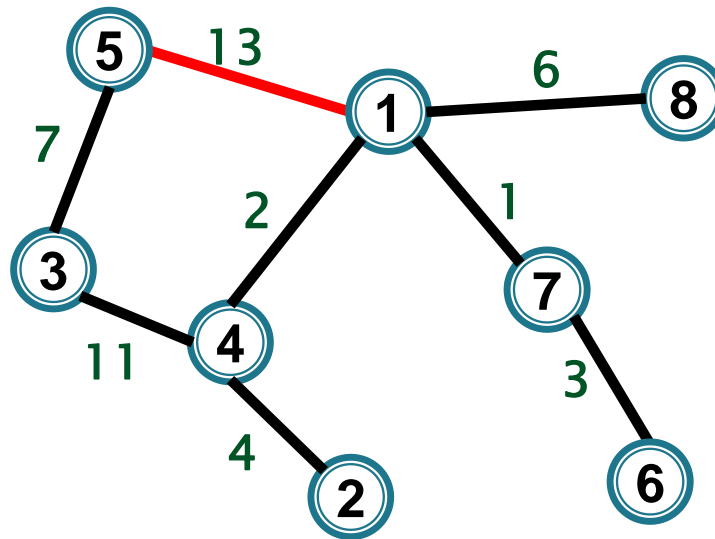
# Second best

## Idee algoritm:

Dacă fixăm un  $xy \notin T_{\min}$ , atunci cum determinăm  $uv \in T_{\min}$  a.î

$T_{\min} - uv + xy$  să fie arbore și

$w(xy) - w(uv)$  minim cu această proprietate?



# Second best

## Idee algoritm:

Dacă fixăm un  $xy \notin T_{\min}$ , atunci cum determinăm  $uv \in T_{\min}$  a.î

$T_{\min} - uv + xy$  să fie arbore și

$w(xy) - w(uv)$  minim cu această proprietate?

- ▶  $uv$  este muchia de cost maxim din ciclul închis de  $xy$  în  $T_{\min}$ , adică muchia de cost maxim din lanțul de la  $x$  la  $y$  din  $T_{\min}$

# Second best

Idee algoritm:

Fie  $T$  unicul apcm

Se determină  $xy$  pentru care se atinge minimul:

$$\min\{ w(xy) - w(\max[x,y]) \mid xy \notin T \}$$

unde

$\max[x,y]$  = muchia maximă din lanțul de la  $x$  la  $y$  din  $T$

$$T_s = T + xy - \max[x,y]$$



# Second best

## Algorithm second best

1. Determinăm  $T$  apcm în  $G$

2. Pentru orice  $x, y \in T$  determină:

$\max[x,y] = \text{muchia maximă din lanțul de la } x \text{ la } y \text{ din } T$

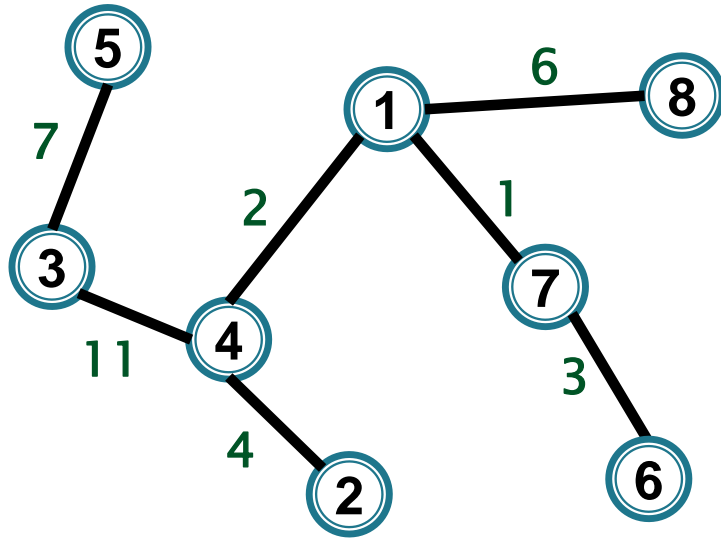
3. Determină o muchie  $xy \notin T$  cu

$w(x,y) - w(\max[x,y])$  minim

4.  $T_s = T + xy - \max[x,y]$

# Second best

Cum determinăm  $\max[s,x]$  pentru orice  $s,x$  in  $T$  ?

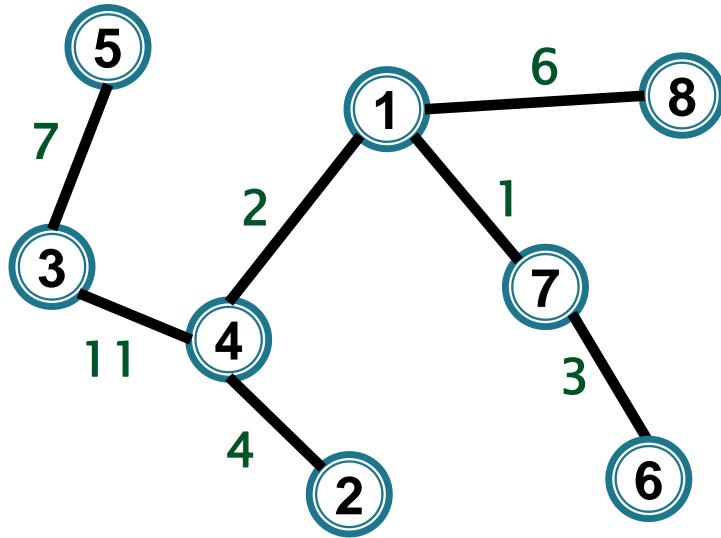


arbore parțial de cost minim

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\max[1,x]$								
$\max[2,x]$								

# Second best

Cum determinăm  $\max[s,x]$  pentru orice  $s,x$  in  $T$  ?



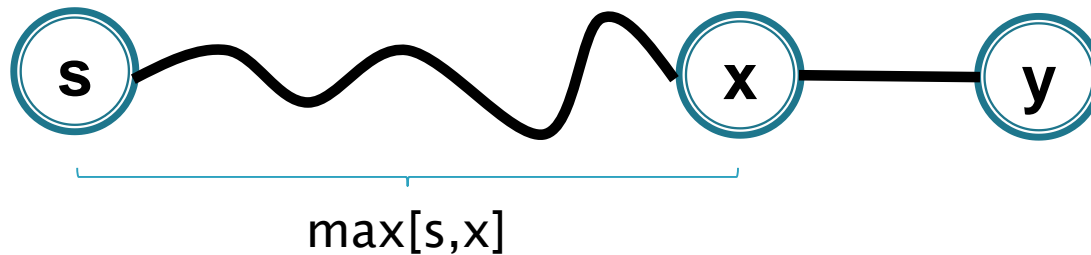
arbore parțial de cost minim

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\max[1,x]$	0	(4, 2) 4	(4, 3) 11	(1, 4) 2	(4, 3) 11	(7, 6) 3	(1, 7) 1	(1, 8) 6
$\max[2,x]$	(2, 4) 2	0	(3, 4) 11	(2, 4) 4	(3, 4) 11	(2, 4) 4	(2, 4) 4	(1, 8) 6

# Second best

Determinare  $\max[s,x]$  pentru orice  $s,x$  in  $T$

Pentru  $s$  fixat – parcurgere din  $s$

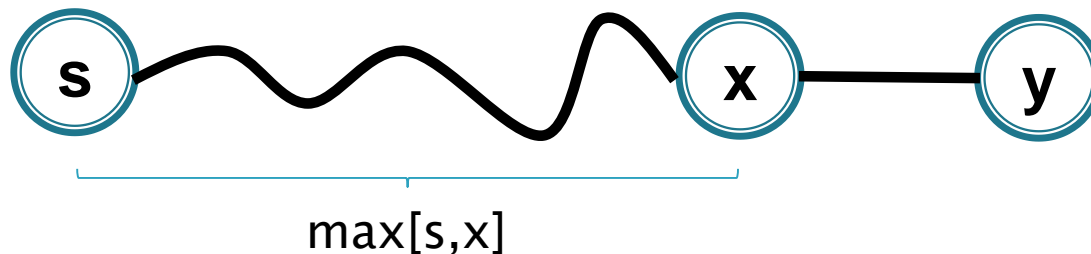


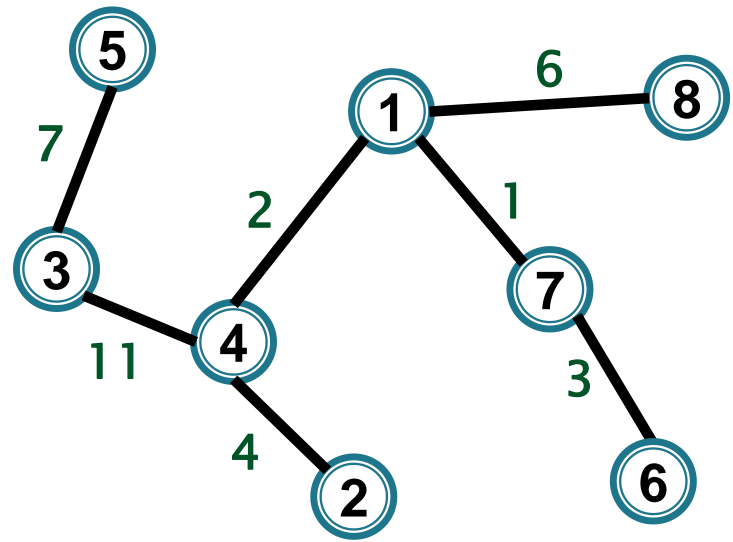
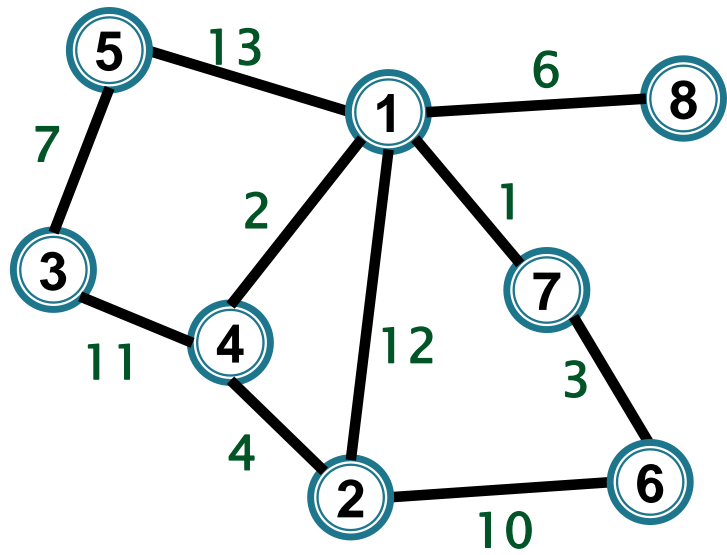
# Second best

**Determinare  $\max[s,x]$  pentru orice  $s,x$  în  $T$**

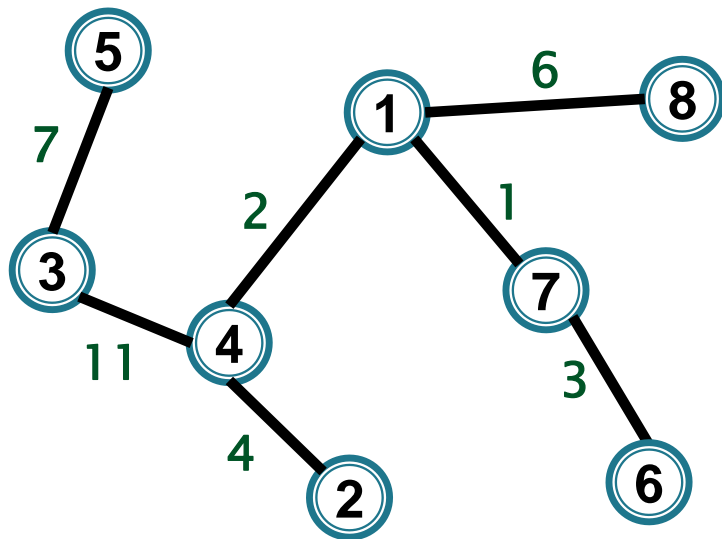
Pentru  $s$  fixat – **parcurgere din  $s$** , actualizând pentru un vârf  $y$  descoperit din  $x$   $\max[s,y]$  astfel:

$$\max[s,y] = \begin{cases} xy, & \text{dacă } w(x,y) > w(\max[s,x]) \\ \max[s,x], & \text{altfel} \end{cases}$$



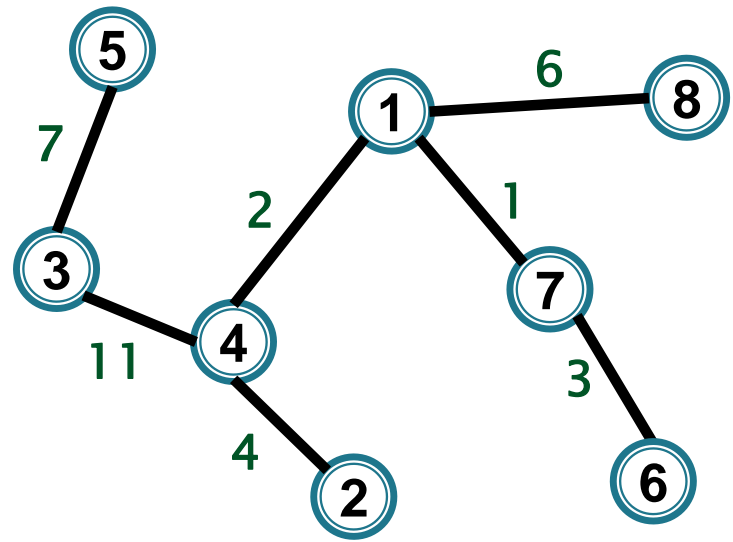
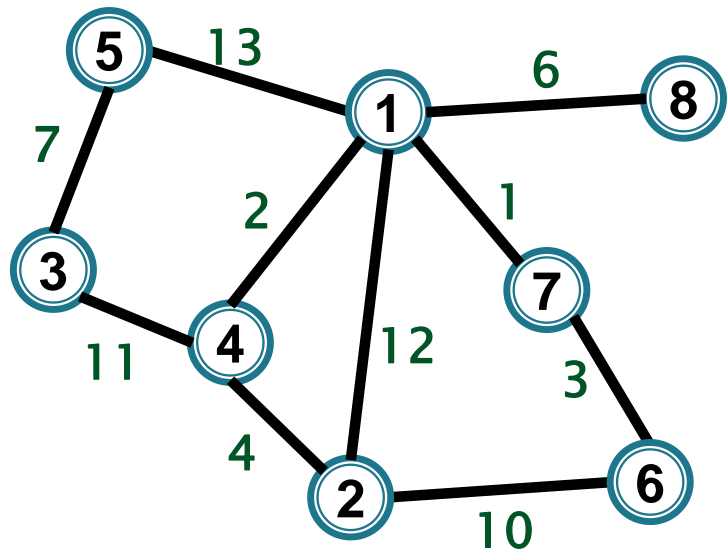


arbore parțial de cost minim



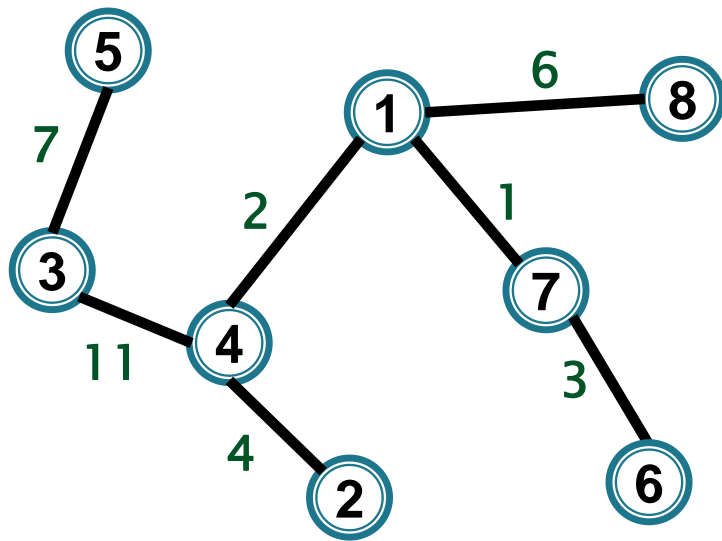
arbore parțial de cost minim

Calculăm  $\max[1, x]$  folosind  $\text{BF}(1)$



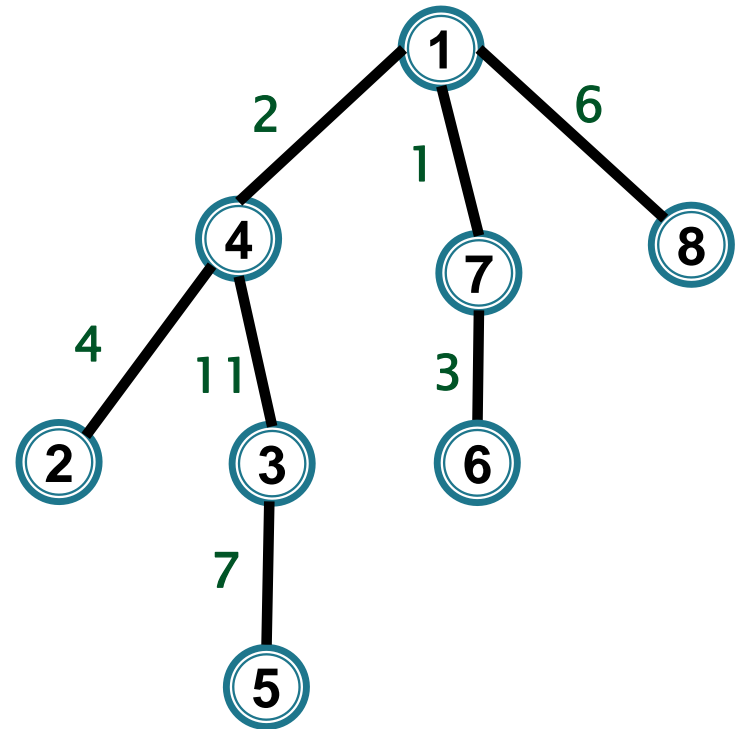
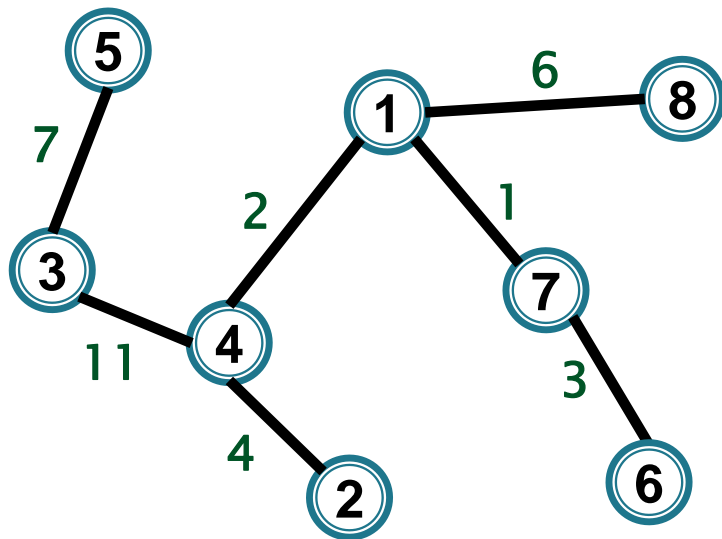
arbore parțial de cost minim



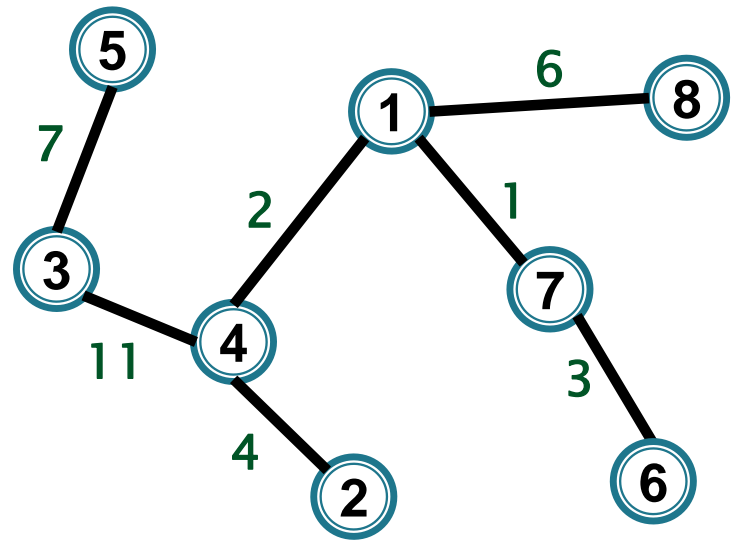
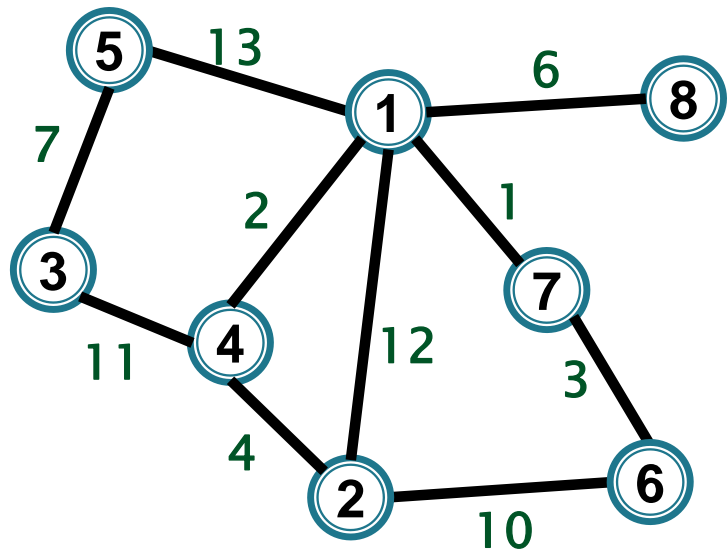


1

x	1	2	3	4	5	6	7	8
max[1,x]	0							
d								

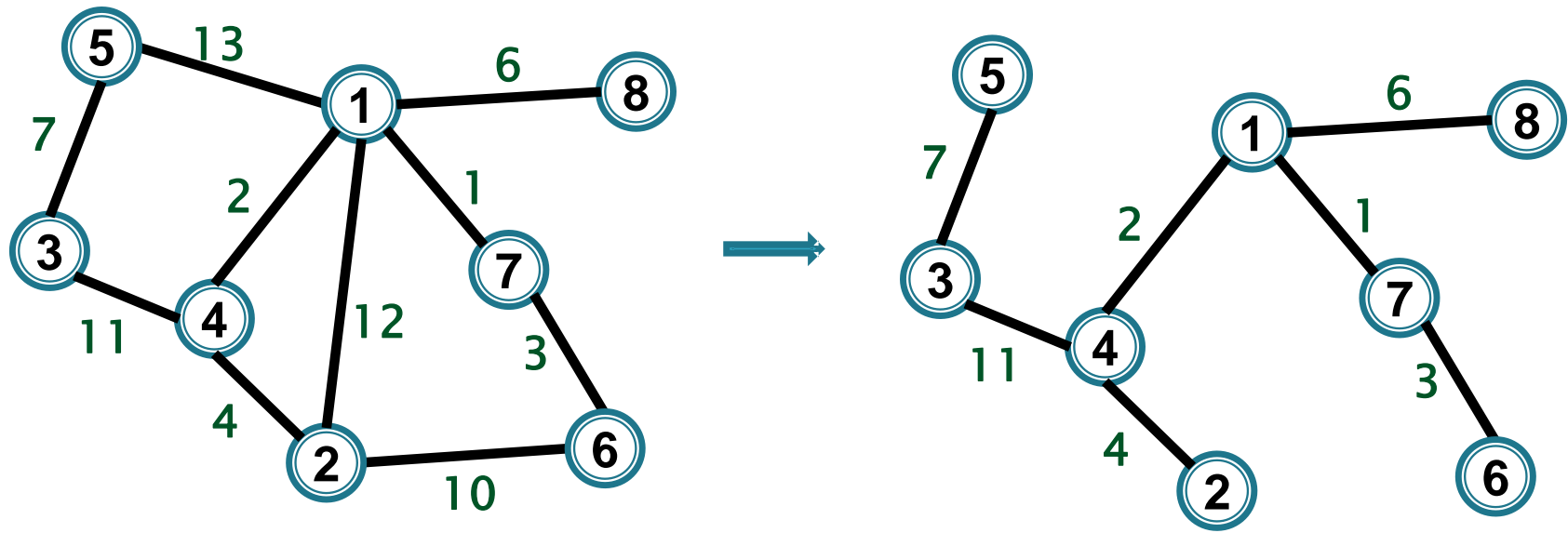


x	1	2	3	4	5	6	7	8
max[1,x]	0	(4, 2)	(4, 3)	(1, 4)	<b>(4, 3)</b>	(7, 6)	(1, 7)	(1, 8)
d		4	11	2	<b>11</b>	3	1	6



arbore parțial de cost minim

Calculăm  $\max[2, x]$  folosind BF(2)



x	1	2	3	4	5	6	7	8
max[1,x]	0	(4, 2)	(4, 3)	(1, 4)	(4, 3)	(7, 6)	(1, 7)	(1, 8)
max[2,x]	(2, 4)	0	(3, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(2, 4)	(2, 4)	(1, 8)

$$(2,6): w(2,6) - w(\max[2,6]) = w(2,6) - w(2,4) = 10 - 4 = 6$$

$$(1,2): w(1,2) - w(\max[1,2]) = w(1,2) - w(2,4) = 12 - 4 = 8$$

$$(1,5): w(1,5) - w(\max[1,5]) = w(1,5) - w(4,3) = 13 - 11 = \mathbf{2}$$

$$\Rightarrow \text{Second best} = T_{\min} - \max[1,5] + (1,5) = T_{\min} - (3,4) + (1,5)$$

# Second best

## Algorithm second best

1. Determinăm  $T$  apcm în  $G$

2. Pentru orice  $x, y \in T$  determină:

$\max[x, y] = \text{muchia maximă din lanțul de la } x \text{ la } y \text{ din } T$

3. Determină o muchie  $xy \notin T$  cu

$w(x, y) - w(\max[x, y])$  minim

4.  $T_s = T + xy - \max[x, y]$

Complexitate  $O(n^2)$  – cu varianta descrisă la pasul 3

Alte idei pentru pasul 3?