Schemă de reglare pentru un quadcopter
curs 4 - opțional SPER

Florin Stoican

15 martie 2022

Cuprins

Motivație

- Modelarea unui sistem dronă este relativ complexă deoarece consideră 6 grade de libertate:
    - 3 coordonate de poziție;
    - 3 coordonate de rotație.
- Aceste elemente pot (și sunt) privite în două sisteme de coordonate distincte:
    - sistem de coordonate inerțial: este sistemul "fix", cel în care măsurăm traiectoria dronei față de sol;
    - sistem de coordonate al corpului: este sistemul "mobil", centrat în centrul de masă al dronei.
    - Ne interesează ambele sisteme de coordonate pentru că anumite mărimi se măsoară natural într-unul din acestea iar alte mărimi, în celălalt sistem.

Cuprins

Rotații în 3D

- Pentru a putea trece dintr-un sistem de coordonate în celălalt trebuie să exprimăm rotația cadrului mobil față de cel fix:

$$
{}^{I}_{B}R = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\theta s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix}
$$

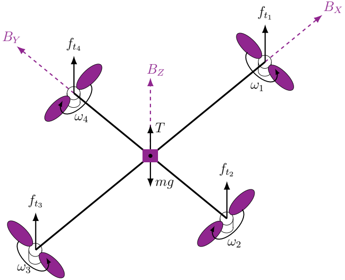
  Notațiile "$s\alpha$" și "$c\alpha$" sunt formele prescurtate ale lui "$\sin\alpha$" și "$\cos\alpha$".

- Indicii "B" și "I" arată ca matricea transformă coordonatele din cadrul "fix" în cel "mobil".

- Matricea de rotație este prin definiție ortogonală, așadar, ${}^{B}_{I}R = \left({}^{I}_{B}R\right)^{-1} = \left({}^{I}_{B}R\right)^{\top}$.

Structură mecanică

- Structura dronei este prezentată în figură:



- Se observă vitezele unghiulare și forțele de tracțiune dezvoltate de cele 4 motoare.
- Considerăm 4 motoare orientate perpendicular față de planul dronei. Turațiile acestora, ω_i, definesc mărimile de control ce afectează comportamentul dronei:
  - forța de tracțiune: T;
  - momentele de forță față de axele de rotație: $\tau_\theta, \tau_\phi, \tau_\psi$.

Forța de tracțiune

- Forța totală de tracțiune este dată de:

$$^{B}\vec{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_T \sum_{i=1}^{4} \omega_i^2 \end{bmatrix}$$

- Vectorul $^{B}\vec{T}$ are o singură componentă nenulă: motoare sunt poziționate perpendicular pe planul dronei, și prin urmare ”împing” drona perpendicular.

Momentele forțelor

- Turația fiecărui motor contribuie cu un moment de forță față de fiecare dintre axele cadrului de coordonate.

- Presupunând sensuri de rotație constante pentru fiecare dintre motoare, obținem:

$$
\begin{aligned}
\tau_\psi &= b(-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2),\\
\tau_\phi &= LK_T(-\omega_2^2 + \omega_4^2),\\
\tau_\theta &= LK_T(-\omega_1^2 + \omega_3^2).
\end{aligned}
$$

- Cu alte cuvinte, momentele unghiulare definite în raport cu cadrul mobil sunt:

$$
{}^B\tau = \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} LK_T(-\omega_2^2 + \omega_4^2) \\ LK_T(-\omega_1^2 + \omega_3^2) \\ b(-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2) \end{bmatrix}
$$

Componenta translație

- Folosind Newton-Euler, se scriu ecuațiile mișcării de translație în cadrul inerțial:

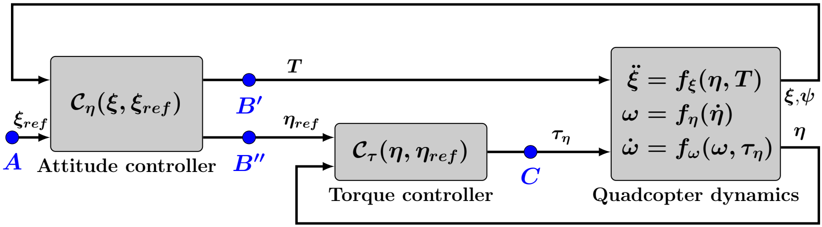
$$m \begin{bmatrix} {}^I\ddot{x} \\ {}^I\ddot{y} \\ {}^I\ddot{z} \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} + {}_B^I R \cdot {}^B\vec{T},$$

- ceea ce se poate scrie echivalent în forma

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ c\phi c\theta \end{bmatrix} T$$

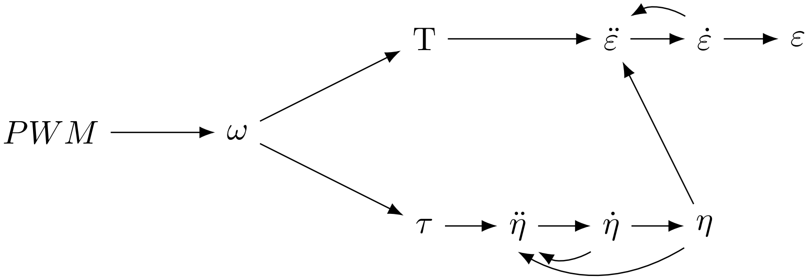
- De obicei componenta de rotație este reglată direct pe dronă și nu este luată în calcul de către utilizator.

Schemă tip de reglare



- buclă de reglare în cascadă: nivel înalt (translație) și nivel jos (rotație);
- uneori se dau doar punctele intermediare, nici măcar traiectoria de referință;
- intern, momentele de forță și forța de tracțiune se traduc în turații de motor (un alt bloc de reglare)

De la turațiile motoarelor la poziția dronei



- PWM = pulse width modulation;
- comenzile trimise motoarelor (PWM) se propagă prin dinamica dronei pentru a conduce (în cele din urmă) la poziția ϵ dorită;
- atenție: momentele de forță sunt proporționale cu $\epsilon^{(4)}$.

Cuprins

Reprezentare plată – I

- Impunând o valoare pentru ψ și o traiectorie generată offline, se pot calcula unghiurile de referință, η_{ref} și forța de tracțiune, T pe baza ecuației de translație:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} + g \end{bmatrix} = \frac{T}{m} \begin{bmatrix} c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ c\phi c\theta \end{bmatrix}$$

- Exprimăm toate mărimile în reprezentare plată, unde notăm

$$z_1 = x, \ , z_2 = y, \ z_3 = z, \ \text{și} \ z_4 = \psi.$$

Reprezentare plată – II

- Putem reprezenta cele 4 mărimi de control prin relațiile

$$
\begin{aligned}
T &= m\sqrt{\ddot{z}_1^2 + \ddot{z}_2^2 + (\ddot{z}_3 + g)^2},\\
\phi_{ref} &= \arcsin\left(\frac{\ddot{z}_1 \sin z_4 - \ddot{z}_2 \cos z_4}{\sqrt{\ddot{z}_1^2 + \ddot{z}_2^2 + (\ddot{z}_3 + g)^2}}\right),\\
\theta_{ref} &= \arctan\left(\frac{\ddot{z}_1 \cos z_4 + \ddot{z}_2 \sin z_4}{\ddot{z}_3 + g}\right),\\
\psi_{ref} &= z_4.
\end{aligned}
$$

- Presupunând că unghiurile de referință sunt urmărite ($\phi_{ref} \leftarrow \phi$ și $\theta_{ref} \leftarrow \theta$) se poate arătă că accelerațiile dronei urmăresc profilele de referință:

$$\ddot{x} \leftarrow \ddot{z}_1,\ \ddot{y} \leftarrow \ddot{z}_2,\ \ddot{z} \leftarrow \ddot{z}_3.$$

- Alegând în mod corect accelerațiile de referință, se obține un profil de traiectorie ($x \leftarrow z_1, y \leftarrow z_2, z \leftarrow z_3$) dorit.