Laboratorul 4 (SPER)

Model matematic dronă și proceduri de integrare numerică

7 martie 2022

Cuprins

compilat la: 07/03/2022, 23:43

Scopul lucrării

Recapitulăm pe scurt modelul matematic (componenta "translație") al unei drone quadcopter. Folosind reprezentarea sa plată, deducem formule pentru comenzi. Pentru a calcula traiectoriile unui sistem neliniar se folosesc metode de integrare numerică. Testăm o astfel de metodă pentru oscilatorul Van der Pol.

1 Noțiuni teoretice

O dronă de tip quadcopter are un model matematic complex ce definește mișcarea acesteia în 6D (3 coordonate de poziție și 3 coordonate unghiulare).
Uzual, schemele de reglare funcționează în *cascadă* pentru a permite separarea între dinamica de "translație" (de nivel înalt) și cea de "rotație" (de nivel jos).
Controlul dinamicii de nivel jos se face de către *autopilot*, direct pe dronă (unghiuri de referință sunt trimise acesteia iar turațiile motoarelor sunt modificate pentru a le urmări). Utilizatorul controlează dinamica la nivel înalt, definită[1] de:

$$m \begin{bmatrix} {}^I\ddot{x} \\ {}^I\ddot{y} \\ {}^I\ddot{z} \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} + {}^I_B R \cdot {}^B\vec{T} \Rightarrow \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ c\phi c\theta \end{bmatrix} T, \quad (1)$$

prin alegerea corespunzătoare a unghiurilor de ruliu, tangaj și girație ("roll" – θ, "pitch" – ϕ și "yaw" – ψ) și a forței T. Alegând o reprezentare plată de forma

$$z_1 = x,\ z_2 = y,\ z_3 = z,\ z_4 = z, \quad (2)$$

putem reprezenta cele 4 mărimi de control prin relațiile

$$T = m\sqrt{\ddot{z}_1^2 + \ddot{z}_2^2 + (\ddot{z}_3 + g)^2}, \quad (3a)$$

$$\phi_{ref} = \arcsin\left(\frac{\ddot{z}_1 \sin z_4 - \ddot{z}_2 \cos z_4}{\sqrt{\ddot{z}_1^2 + \ddot{z}_2^2 + (\ddot{z}_3 + g)^2}}\right), \quad (3b)$$

$$\theta_{ref} = \arctan\left(\frac{\ddot{z}_1 \cos z_4 + \ddot{z}_2 \sin z_4}{\ddot{z}_3 + g}\right), \quad (3c)$$

$$\psi_{ref} = z_4. \quad (3d)$$

Presupunând că unghiurile de referință sunt urmărite ($\phi_{ref} \leftarrow \phi$ și $\theta_{ref} \leftarrow \theta$) se poate arătă că accelerațiile dronei urmăresc profilele de referință:

$$\ddot{x}_{ref} \leftarrow \ddot{z}_1,\ \ddot{y}_{ref} \leftarrow \ddot{z}_2,\ \ddot{z}_{ref} \leftarrow \ddot{z}_3. \quad (4)$$

Alegând în mod corect accelerațiile de referință, se obține un profil de traiectorie ($x_{ref} \leftarrow z_1, y_{ref} \leftarrow z_2, z_{ref} \leftarrow z_3$) dorit.
Merită menționat că deși adesea unghiul de girație ψ este lăsat ca parametru liber, există situații în care dorim un profil particular pentru acesta (urmărirea unei ținte, observarea unei clădiri).

[1] În lipsa spațiului, folosim notația prescurtată "$s\alpha = \sin\alpha$", "$c\alpha = \cos\alpha$".

În cursul precedent am spus că putem "ascunde" relațiile impuse de dinamica unui sistem printr-o *reformulare plată* ce ne permite să exprimăm intrările și ieșirile în funcție de o ieșire plată.
Afirmația este adevărată dar incompletă: ieșirea plată ne ajută să construim mărimi de referință. În cazul ideal, fără pertubații și surse de incertitudine, cele două seturi de mărimi (reale și de referință) vor coincide. În realitate, trebuie implementat un mecanism de *urmărire a referinței* și o procedură de calcul a traiectoriilor sistemului pentru a testa cât de "aproape" rămân acestea de referințele antecalculate.

În general, o dinamică neliniară precum cea din (1) nu poate fi integrată în mod analitic. Cu alte cuvinte, implicația

$$\dot{\xi}(t) = f\left(t, \xi(t)\right) \quad \rightarrow \quad \xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} \xi(\tau) d\tau, \tag{5}$$

nu se poate rezolva "pe hârtie" și suntem nevoiți prin urmare să folosim proceduri de integrare numerică.
Ca exemplu ilustrativ (și considerabil mai simplu decât (1)) folosim Oscilatorul Van der Pol (forţat), descris de sistemul de ecuaţii diferenţiale:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + a(1 - x(t)^2)\dot{x}(t) + x(t) = u(t)\ , \quad a \in \mathbb{R}, \\ y(t) = x(t). \end{cases} \tag{6}$$

Acestui sistem i se asociază condiţiile iniţiale: $x_0 = x(0)$ și $\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$.
Primul pas este să rescriem (6) ca o colecție de ecuații diferențiale de ordin 1. Pentru aceasta, se notează $\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} x(t) & \dot{x}(t) \end{bmatrix}^\top$ ceea ce permite să se ajungă la un sistem dinamic neliniar de ordinul I (de forma $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -a(1 - x_1(t)^2)x_2(t) - x_1(t) + u(t) \end{cases}$$

pentru $\begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} x_0 & \dot{x}_0 \end{bmatrix}^\top$.

Deoarece oscilatorul Van der Pol conține atât stări (x_1 și x_2) cât și o intrare (u), vom defini o stare extinsă $\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & u \end{bmatrix}^\top$ ceea ce conduce la o ecuație dinamică similară celei din (5):

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= -a(1 - \xi_1^2)\xi_2 - \xi_1 + \xi_3, \\ \dot{\xi}_3 &= 0. \end{cases} \tag{7}$$

Starea ξ_3 reprezintă în fapt intrarea sistemului. Făcând presupunerea că de-a lungul intervalului de integrare comanda rămâne constantă obținem relația $\dot{\xi}_3 = 0$.
Deoarece (7) a fost adus în forma (5) putem aplica proceduri de integrare numerică de-a lungul unui orizont de timp (așadar, putem calcula traiectoria sistemului).

2 Exemplu de calcul al traiectoriei prin integrare numerică

Pentru exemplul oscilatorului Van der Pol, adus în forma (7) calculăm traiectoria acestuia pentru o intrare constantă pe porțiuni:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 3), \\ 2, & t \in [3, 5), \\ 0, & t \in [5, 10]. \end{cases} \tag{8}$$

În plus, considerăm că starea inițială a sistemului este $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$.
În acest scop, folosim clasa **integrate** a pachetului **scipy**, apelând de 3 ori succesiv metodele **initial_value** și **integrate**, astfel:

i) construim starea inițială $\xi_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$ și integrăm dinamica (7) pe intervalul $t \in [0, 3)$ pentru a obține $\xi(t)$;

ii) redefinim starea inițială ca fiind $\xi_0 = \begin{bmatrix} \xi(t = 3, 0:2) & 2 \end{bmatrix}$ și integrăm dinamica (7) pe intervalul $t \in [3, 5)$ pentru a obține $\xi(t)$;

iii) redefinim starea inițială ca fiind $\xi_0 = \begin{bmatrix} \xi(t = 5, 0:2) & 0 \end{bmatrix}$ și integrăm dinamica (7) pe intervalul $t \in [5, 10]$ pentru a obține $\xi(t)$.

O astfel de procedură iterativă ne permite să obținem traiectoria sistemului, după cum este ilustrat în figura de mai jos:

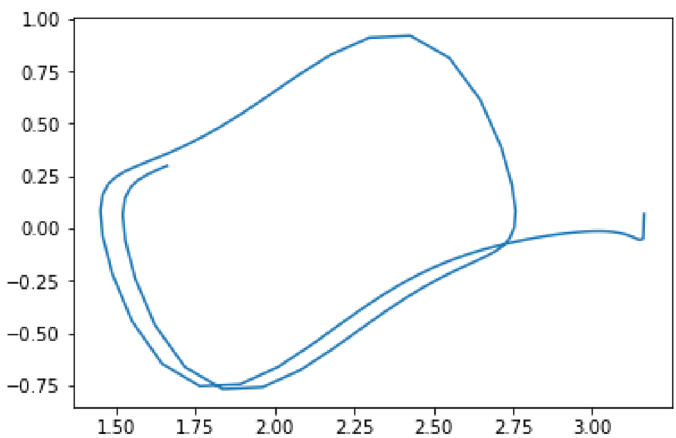

Figura 1: Traiectoria sistemului aplicând comanda (8).

3 Exerciții propuse

Exerciţiul 1. Codul asociat acestui laborator implementează integrarea numerică pentru dinamica oscilatorului Van der Pol. Modificați codul astfel încât:

i) Pentru comenzi de accelerație constante pe porțiuni, să calculați traiectoria sistemului de tip dronă, definit de relațiile (1)–(3).

ii) Cum interpretați comportamentul observat?

Exerciţiul 2. Considerați un profil de referință a cărei derivată de ordinul 4 ("jounce") este dată de formula

$$\xi_{ref}^{(4)}(t) = \begin{cases} a\sin\left(\frac{\pi t}{b}\right), 0 \leq t \leq b \\ -a\sin\left(\frac{\pi t}{2b} - \frac{\pi}{2}\right), b \leq t \leq 3b \\ a\sin\left(\frac{\pi t}{b} - 3\pi\right), 3b \leq t \leq 4b \end{cases} \tag{9}$$

i) Integrați succesiv termenul (9) pentru a obține derivatele de ordinul 3, 2, 1 și 0 ("jerk", accelerație, viteză și poziție);

ii) Aplicați profilul de accelerație $\xi_{ref}^{(2)}(t)$ și observați profilele de unghiuri și forță obținute;

iii) Adăugați o sursă de perturbație în modelul dinamic și observați comportamenul mărimilor de referință versus cele reale (obținute prin integrare).

Exerciţiul 3. Funcțiile Bezier discutate în laboratorul anterior permit construcția atât a unei traiectorii (poziție) cât și calculul eficient al derivatelor acesteia. Folosind aceste informații, refaceți exercițiul anterior.