

# Формальные языки

## Домашнее задание 12

Дмитрий Орехов

### 1

Мы можем на каждом шаге генерировать либо 1 а и 4 b, либо 3 а и 2 b. Соответственно в итоговой строке соотношение а к b будет  $n + 3m$  к  $4n + 2m$ . Описываемый язык:

$$\{a^n a^{3m} c b^{2m} b^{4n}\} \quad (1)$$

Поскольку тут не важно, в каком порядке применялись правила, а лишь суммарное число символов в итоговой цепочке, можно задать жесткий порядок для двух правил и ввести, например, такую грамматику:

$S \rightarrow aSb b b b \mid C$

$C \rightarrow a a a S b b \mid T$

$T \rightarrow c$

Однозначность данной грамматики следует из единственности решения системы, где  $q_a$  и  $q_b$  - число символов  $a$  и  $b$ :

$$\begin{cases} n + 3m = q_a \\ 4n + 2m = q_b \end{cases} \quad (2)$$

Решение:

$$\begin{cases} n = n_a + 3 \frac{q_b - 4q_a}{10} \\ m = - \frac{q_b - 4q_a}{10} \end{cases} \quad (3)$$

То есть по цепочке мы знаем, сколько раз какое правило прогонять.

### 2

Данный язык не описать компактно как некоторое множество с символами в степенях или как регулярное выражение. Кажется, без рекурсии не обойтись.

Поэтому вот некоторые его простые свойства, которые получилось найти:

1. Язык является подязыком замыкания клини на алфавите  $\{a, b\}$
2. Соотношение букв  $a$  к  $b$  всегда 2 к 1.
3. Число букв  $a$  всегда четное, четность числа букв  $b$  равна четности числа применений правила  $F \rightarrow aFaFb$ .

### 3

1. Рассмотрим слово:

$$a^n b^m c^n d^m, m = n$$

Но на паре мы уже доказали на примере точно такого же слова, что для него лемма о накачке не выполняется. Значит и рассматриваемый язык не КС

2. Язык описывается как конкатенация строки, принадлежащей замыканию Клини, с самой собой.

Давайте рассмотрим слова данного языка, являющиеся так же и словами языка, похожего на язык из предыдущего пункта:

$$a^n b^m a^n b^m, m = n, \text{ где } n - \text{ константа Леммы о накачке.}$$

Для таких слов мы уже выяснили в предыдущем пункте<sup>1</sup>, что они не принадлежат КС языку. А поскольку лемма о накачке должна выполняться для всех слов языка длины больше  $n$ , то мы можем свести доказательство к предыдущему пункту. Соответственно, язык из текущего пункта не КС.

3. Язык контекстно-свободный:

$$\{a^k b^m b^{(k+l)} a^m\} = \{a^k b^l b^k b^m a^m\} \quad (4)$$

Грамматика:

$$S \rightarrow LR$$

$$L \rightarrow aLb \mid B$$

$$R \rightarrow bRa \mid \epsilon$$

$$B \rightarrow bB \mid \epsilon$$

---

<sup>1</sup>Там только вместо вторых  $a$  и  $b$  были  $c$  и  $d$ , но это не сильно влияет на ход доказательства, ведь мы никак не пользуемся тем, что  $a \neq c$  или  $b \neq d$