

Формальные языки

Домашнее задание 12

Дмитрий Орехов

1

Мы можем на каждом шаге генерировать либо 1 а и 4 b, либо 3 а и 2 b. Соответственно в итоговой строке соотношение а к b будет $n + 3m$ к $4n + 2m$. Описываемый язык:

$$\{a^n a^{3m} c b^{2m} b^{4n}\} \quad (1)$$

Поскольку тут не важно, в каком порядке применялись правила, а лишь суммарное число символов в итоговой цепочке, можно задать жесткий порядок для двух правил и ввести, например, такую грамматику:

$S \rightarrow aSb b b b \mid C$

$C \rightarrow a a a S b b \mid T$

$T \rightarrow c$

Однозначность данной грамматики следует из единственности решения системы, где q_a и q_b - число символов a и b :

$$\begin{cases} n + 3m = q_a \\ 4n + 2m = q_b \end{cases} \quad (2)$$

Решение:

$$\begin{cases} n = n_a + 3 \frac{q_b - 4q_a}{10} \\ m = - \frac{q_b - 4q_a}{10} \end{cases} \quad (3)$$

То есть по цепочке мы знаем, сколько раз какое правило прогонять.

2

Данный язык не описать компактно как некоторое множество с символами в степенях или как регулярное выражение. Кажется, без рекурсии не обойтись.

Поэтому вот некоторые его простые свойства, которые получилось найти:

1. Язык является подязыком замыкания клини на алфавите $\{a, b\}$
2. Соотношение букв a к b всегда 2 к 1.
3. Число букв a всегда четное, четность числа букв b равна четности числа применений правила $F \rightarrow aFaFb$.

1. Рассмотрим слово:

$a^n b^m c^n d^m$, $m = n$, n - константа леммы о накачке.

Докажем, что накачка этого слова выкидывает из языка:

- $yzv = a^i$. Рассмотрим накачку $k = 0$, получаем слово:
 $a^{n-|yv|} b^m c^n d^m$, число a не сходится с числом c , выпали из языка. Аналогично для $yzv = b^i, c^i, d^i$.
- $yzv = a^i b^j, i > 0, j > 0$.
 Если y лежит полностью в a , а v полностью в b , то получим при накачке $k = 2$ $a^{n+|y|} b^{m+|v|} c^n d^m$. Так как $|yv| \geq 1$, то либо a не сойдется по числу с c , либо b не соудуется с d . В любом случае, выпадаем из языка.
 Если $y = a^i b^p, v = b^l, p > 0, l \geq 0, p + l \leq j$
 Накачка $k = 2$ дает следующее слово:
 $a^{n+i} b^{m+p+l} c^n d^m$, тогда a точно не сойдется с c по количеству символов. Аналогично для зеркального случая $y = a^l, v = a^p b^j$.
 Наконец, все стыки двух различных символов можно доказать аналогичным способом. Хотя бы по какому-то из двух символов на стыке не сойдемся его новым количеством с количеством символа, который ему должен соответствовать. При этом соответствующий символ¹ никогда не попадает на рассматриваемый отрезок и его накачать мы не сможем (так как $yzv \leq n$).

2. Язык описывается как конкатенация строки, принадлежащей замыканию Клини, с самой собой.

Давайте возьмем слово $a^n b^n a^n b^n$, где n - константа леммы о накачке.

- $yzv = a^i$, не теряя общности, пусть это a из первой половины. Тогда при накачке $k = 2$ получим слово $a^{n+|yv|} b^n a^n b^n$. Такую строку не разбить на две равные половинки (ее середина внутри b , а начинается строка с a), а значит мы не в исходном языке. Аналогичные рассуждения для b^i и для второй половины.
- $yzv = a^i b^j$, не теряя общности, пусть это стык a и b из первой половины.
 Если y полностью лежит в a , а v полностью в b , то при накачке $k = 2$ получим $a^{n+|y|} b^{n+|v|} a^n b^n$, такую строку не разобьем на половинки.
 Если y лежит на $a^i b^m$, а v на b^l , то при накачке $k = 2$ получим слово $a^{n+i} b^{n+m+l} a^n b^n$. Так как все $i + m + l > 0$, то мы опять не разобьем на две половинки. Схожим образом можно рассмотреть зеркальную ситуацию, когда $y = a^l, v = a^m b^j$. Аналогичные рассуждения, для накачки правой половины.
- Наконец, предположим, что $yzv = b^i a^j$, то есть лежит на стыке строк.
 Если y полностью лежит в b , а v полностью в a , то при $k = 2$ получим $a^n b^{n+|y|} a^{n+|v|} b^n$, такую строку не разделить пополам, хотя бы из-за того, что число букв разное в двух потенциальных половинках.
 Если $y = b^i a^l$, а $v = a^m$, то при накачке $k = 2$ получим $a^{bn+i} a^{n+l+m} b^n$. Так как $i + l + m > 0$, опять получим несимметричную строку.
 Аналогично для зеркального случая.

¹Под соответствующим имею в виду пары $a - c, b - d$

3. Язык контекстно-свободный:

$$\{a^k b^m b^{(k+l)} a^m\} = \{a^k b^l b^k b^m a^m\} \quad (4)$$

Грамматика:

$S \rightarrow LR$

$L \rightarrow aLb \mid B$

$R \rightarrow bRa \mid \epsilon$

$B \rightarrow bB \mid \epsilon$