Формальные языки

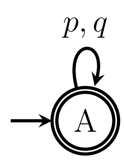
Домашнее задание 4
Дмитрий Орехов

1

Доказать или опровергнуть свойство регулярных выражений:

$$\forall p, q \text{ — регулярные выражения} : (p \mid q)^* = p^*(qp^*)^*$$

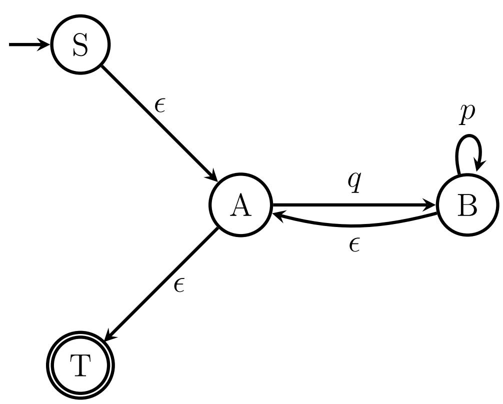
Выражению $(p|q)^*$ соответсвует такой автомат:



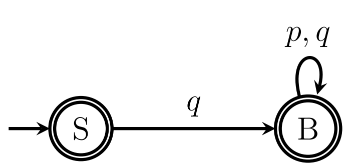
Кажется, это утверждение достаточно тривиально, чтобы не приводить пошаговое применение алгоритма перевода АРВ в автомат с удалением ϵ-переходов. Логика такая: начальное состояние является принимающим, так как выражение принимает пустую строку (звезда Клини). Любое слово, принимаемое автоматом p или q, приводит так же в принимающее состояние.

Выражение $p^*(qp^*)^*$ устроено посложнее.

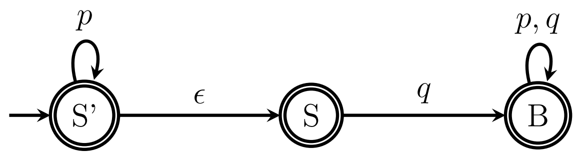
Для начала приведу автомат для подвыражения $(qp^*)^*$, а после упрощу в нем ϵ-переходы:



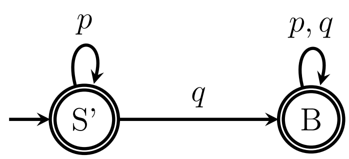
После построения ϵ-замыкания:



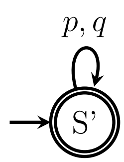
Конкатенируем с автоматом для p:



После построения ϵ-замыкания и удаления ставшего недостижимым S:



Состояния S' и B эквивалетны, упрощаем в:



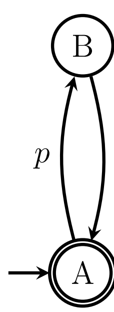
Итак, получили эквивалентные автоматы для левого и правого выражения. А значит, выражения эквивалентны, а утверждение истинно.

2

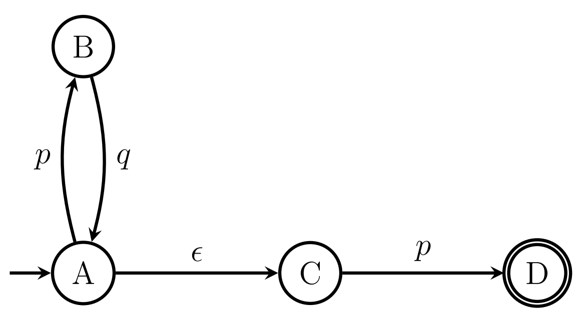
Доказать или опровергнуть свойство регулярных выражений:

$$\forall p, q \text{ — регулярные выражения} : (pq)^*p = p(qp)^*$$

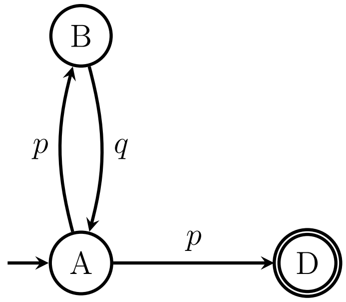
Разберем автомат для левого выражения.
Сначала рассмотрим автомат для его подвыражения $(pq)^*$, он будет выглядеть так:



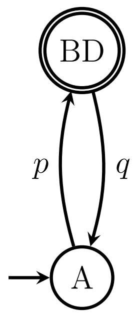
Добавим к данному автомату автомат для p по ϵ переходу:



Строя ϵ-замыкания для состояния A и отбрасывая недостижимое без ϵ-переходов состояние C, получаем:



Данный автомат можно детерминировать в:



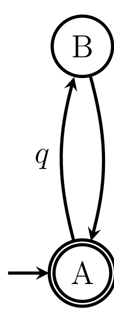
Переходы в НКА:

	p	q
A	{B,D}	$\emptyset$
B	$\emptyset$	{A}
D	$\emptyset$	$\emptyset$

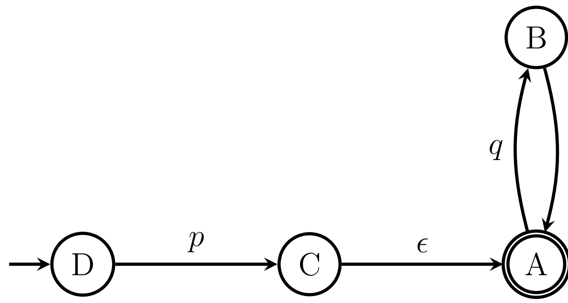
Переходы в ДКА:

	p	q
A	BD	$\emptyset$
BD	$\emptyset$	A

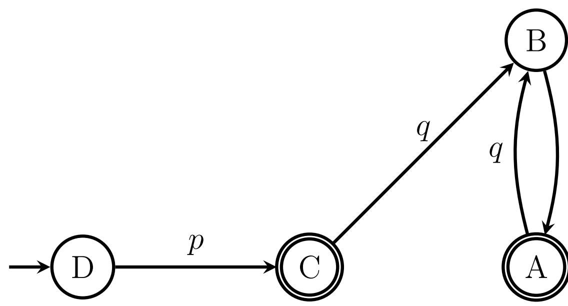
Рассмотрим теперь правое выражение, $p(qp)^*$.
Будем действовать очень похоже, рассмотрим автомат для $(qp)^*$:



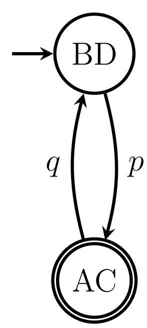
Конкатенируем с автоматом для p:



Автомат после построения ϵ-замыкания:



Данный автомат можно минимизировать в, имена состояний обозначают пары эквивалентных состояний в автомате выше:



Теперь, посмотрев на итоговые автоматы для левого и правого выражений, видим, что они идентчины (не учитвая имена состояний и их ориентацию на картинке). Таким образом, два выражения эквивалентны.

3

Доказать или опровергнуть свойство регулярных выражений:

$$\forall p, q \text{ — регулярные выражения} : (pq)^* = p^*q^*$$

Данное свойство не выполняется. Рассмотрим некоторое слово w, принимаеое выражением q, но не принимаемое выражением p. Выражение p^*q^* принимает слово w, так как мы можем полностью пропустить p. Выражение $(pq)*$ не позволяет пропустить p и не принимает слово w.
Таким образом, два выражение не эквивалентны.

4

Для регулярного выражения:

$$(a \mid b)^+(aa \mid bb \mid abab \mid baba)^*(a \mid b)^+$$

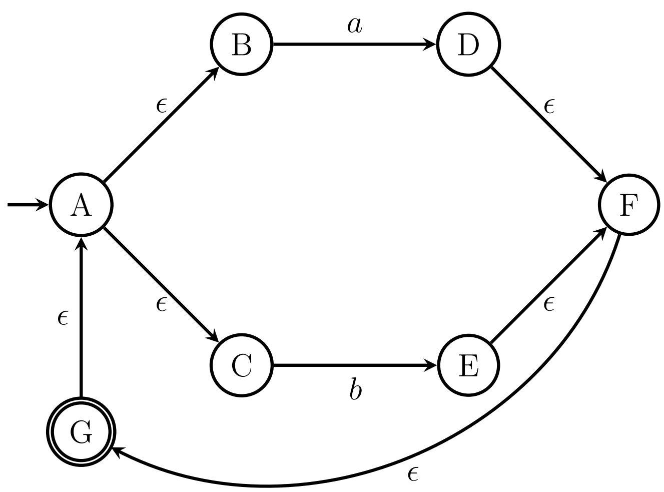
Построить эквивалентные:

1. Недетерминированный конечный автомат

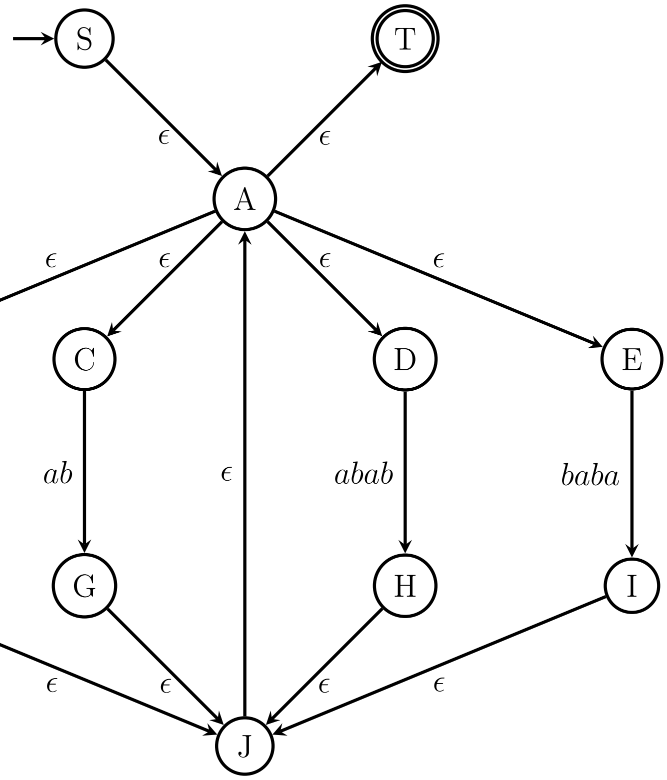
2. Недетерминированный конечный автомат без ε-переходов

3. Минимальный полный детерминированный конечный автомат

а. Нарисую отдельно автомат для выражения $(a|b)^+$, далее буду обозначать данный автомат как P:

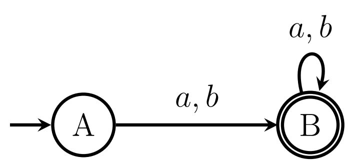


Автомат для выражения $(aa|bb|abab|baba)^*$, далее буду обозначать его как Q:

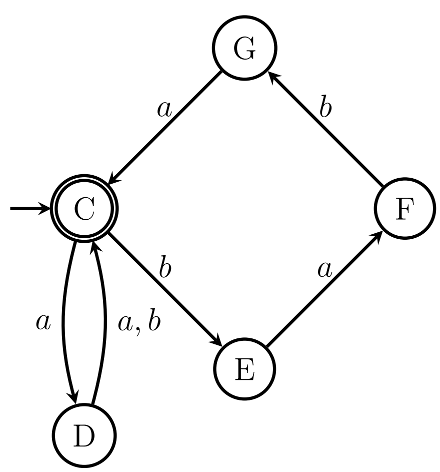


Конкатенируем PQP. Тут, кажется, все понятно. Две копии автомата P. Конкатенация по ϵ-переходам. Убираем терминальность у всех терминальных, кроме второго P.

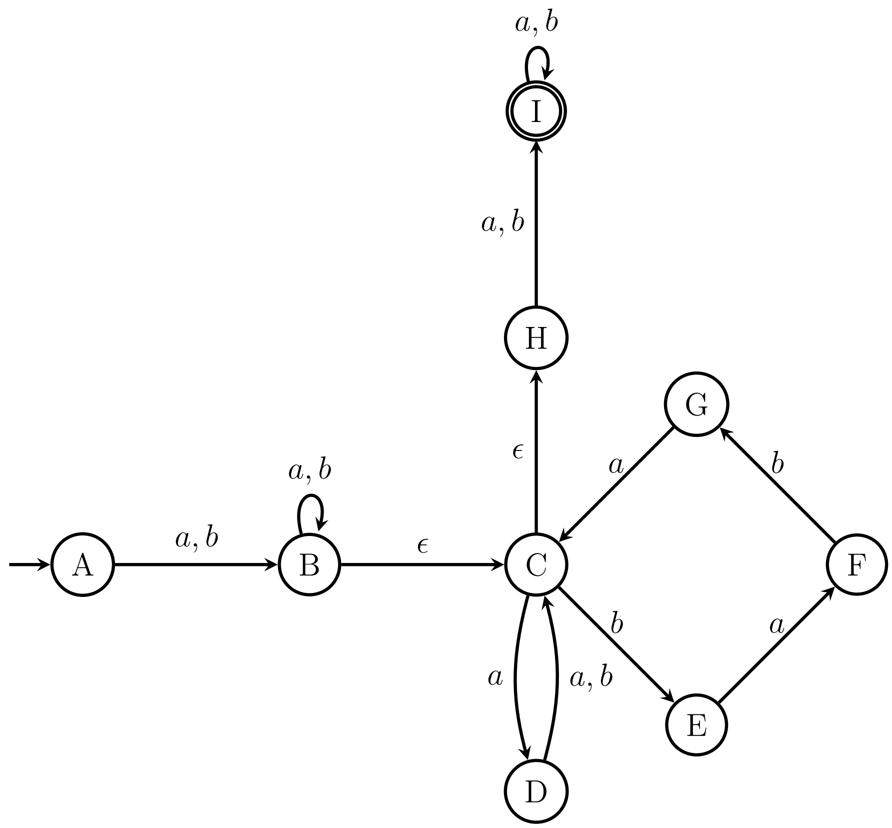
b. Уберем ϵ-переходы:
Сначала отдельно для автомата P:



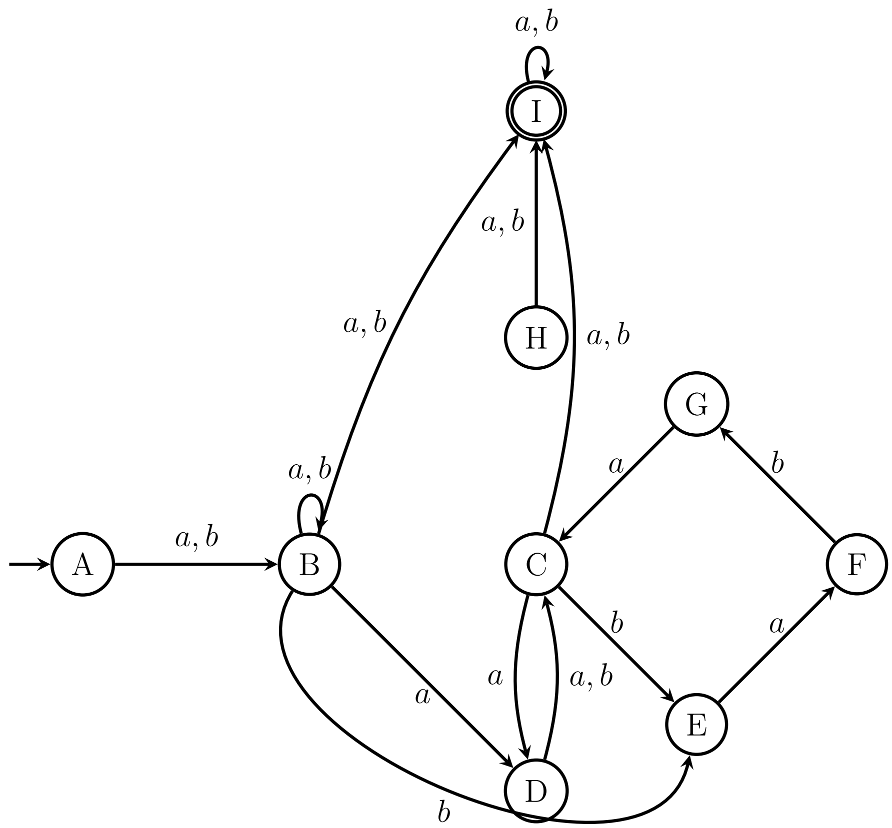
Для автомата Q:



Конкатенация автоматов по *epsilon*-переходам:



Убираем ϵ-переходы, построением ϵ-замыкания:



Также еще можно убрать недостижимое состояние H.
Но, вроде, это уже не является обязательным шагом алгоритма построения ϵ-замыкания.