Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»
Кафедра информатики

Отчет по лабораторной работе №6

Интерполяционные многочлены

Вариант: 5

Выполнил: студент группы 053504
Пекутько Дмитрий Леонидович

Проверил: Анисимов Владимир
Яковлевич

Минск 2022

ЦЕЛЬ ЗАДАНИЯ

Изучить интерполяцию функции с помощью интерполяционных многочленов Лагранжа и Ньютона.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть *f(x)* – функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$. Выберем на этом отрезке точки, называемые *узлами интерполяции*:

$$a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b \ .$$

Предположим, что известны значения функции в узлах интерполяции:

$$f(x_k) = y_k, \quad k = 0,1,\ldots,n \ .$$

Ставится задача найти многочлен $P_n(x)$ такой, что

$$P_n(x_k) = y_k, \qquad \forall k = 0,1,\ldots,n. \tag{6.1}$$

Такой многочлен $P_n(x)$ называется *интерполяционным многочленом*, а задача его нахождения – *задачей интерполяции.*

Можно показать, что задача интерполяции всегда имеет решение, причем единственное.

Обозначим

$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Пусть $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$. Тогда погрешность интерполяции оценивается по формуле

$$|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(x)|, \qquad \text{где} \quad M_{n+1} = \max_{a \le x \le b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|.$$

1) Интерполяционный многочлен Лагранжа

Пусть $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdot \ldots \cdot (x - x_n)$,

$\omega_j(x) = (x - x_0)\cdot \ldots \cdot (x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\cdot \ldots \cdot (x - x_n)$.

Положим $l_j(x) = \dfrac{\omega_j(x)}{\omega_j(x_j)}$,

т. е. $$l_j(x) = \frac{(x - x_0)\cdot \ldots \cdot (x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{(x_j - x_0)\cdot \ldots \cdot (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdot \ldots \cdot (x_j - x_n)}.$$

Очевидно $l_j(x_i) = \begin{cases} 0, & при\ i \neq j \\ 1, & при\ i = j. \end{cases}$

Построим многочлен $L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} l_j(x) y_j$.

Легко видеть, что $L_n(x_i) = l_i(x_i) y_i = 1 \cdot y_i = y_i$, $i = \overline{0,n}$, т. е. это интерполяционный многочлен. Его *называют интерполяционным многочленом Лагранжа.*

2) Интерполяционный многочлен Ньютона

Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ - набор узлов интерполирования,

$y_0, y_1, \ldots, y_n$ - значения функции $f(x)$ в узлах.

Величину $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ называют конечной разностью первого порядка в $к$-ом узле.

Аналогично определяются конечные разности высших порядков.

$$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = y_{k+2} - y_{k+1} - (y_{k+1} - y_k) = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k$$

………………………………………………………………………………………

$$\Delta^i y_k = \Delta^{i-1} y_{k+1} - \Delta^{i-1} y_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i y_{k+i} \ \Delta^i y_k = \Delta^{i-1} y_{k+1} - \Delta^{i-1} y_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i y_{k+i}.$$

Конечные разности обычно считают по схеме:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
x_0	y_0			
		$\Delta y_0 = y_1 - y_0$		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$	
		$\Delta y_1 = y_2 - y_1$		$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	
		$\Delta y_2 = y_3 - y_2$		
x_3	y_3			

Разделенной разностью первого порядка называется выражение

$$f_1(x_k, x_{k+1}) = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}.$$

Разделенной разностью второго порядка называется выражение

$$f_2(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) = \frac{f_1(x_{k+1}, x_{k+2}) - f_1(x_k, x_{k+1})}{x_{k+2} - x_k}$$ и т. д.

Пусть x – любая точка отрезка, не совпадающая с узлами. Тогда

$$f_1(x, x_0) = \frac{y_0 - f(x)}{x_0 - x},$$

откуда $f(x) = y_0 + f_1(x, x_0)(x - x_0)$.

(6.2)

Далее $f_2(x, x_0, x_1) = \dfrac{f_1(x_0, x_1) - f_1(x, x_0)}{x_1 - x}$,

откуда $f_1(x, x_0) = f_1(x_0, x_1) + f_2(x, x_0, x_1)(x - x_1)$.

Подставляя в (6.2), получаем:

$$f(x) = y_0 + f_1(x_0, x_1)(x - x_0) + f_2(x, x_0, x_1)(x - x_0)(x - x_1).$$

(6.3)

Далее $f_3(x, x_0, x_1, x_2) = \dfrac{f_2(x_0, x_1, x_2) - f_2(x, x_0, x_1)}{x_2 - x}$,

откуда $f_2(x, x_0, x_1) = f_2(x_0, x_1, x_2) + f_3(x, x_0, x_1, x_2)(x - x_2)$.

Подставляя в (6.3), имеем:

$$f(x) = y_0 + f_1(x_0, x_1)(x - x_0) + f_2(x, x_0, x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ f_3(x, x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

Продолжая процесс, получим:

$$f(x) = N_n(x) + f_{n+1}(x, x_0, \dots, x_n)(x - x_0)\dots(x - x_n),$$

где $N_n(x) = y_0 + f_1(x_0, x_1)(x - x_0) + \dots + f_n(x_0, \dots, x_n)(x - x_0)\dots(x - x_{n-1})$.

Очевидно при $x = x_i$, $\forall i = \overline{0, n}$, $f(x_i) = N_n(x_i)$, $i = \overline{0, n}$,

т. е. $N_n(x)$ - интерполяционный многочлен. Его называют *интерполяционным многочленом Ньютона.*

Достоинство интерполяционного многочлена Ньютона: он удобен при расширении интерполяции и добавлении узлов.

Недостаток: в какой-то степени он сложнее в подсчете конечных разностей по сравнению с многочленом Лагранжа.

ЗАДАНИЕ

Построить интерполяционные многочлены в форме Лагранжа и Ньютона, используя номер варианта k, соответствующие значения параметров m и p_i и значения x_i, y_i из таблиц:

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
p_i	0.0	0.41	0.79	1.13	1.46	1.76	2.04	2.3	2.55	2.79	3.01

$$y_i = p_i + (-1)^k m$$

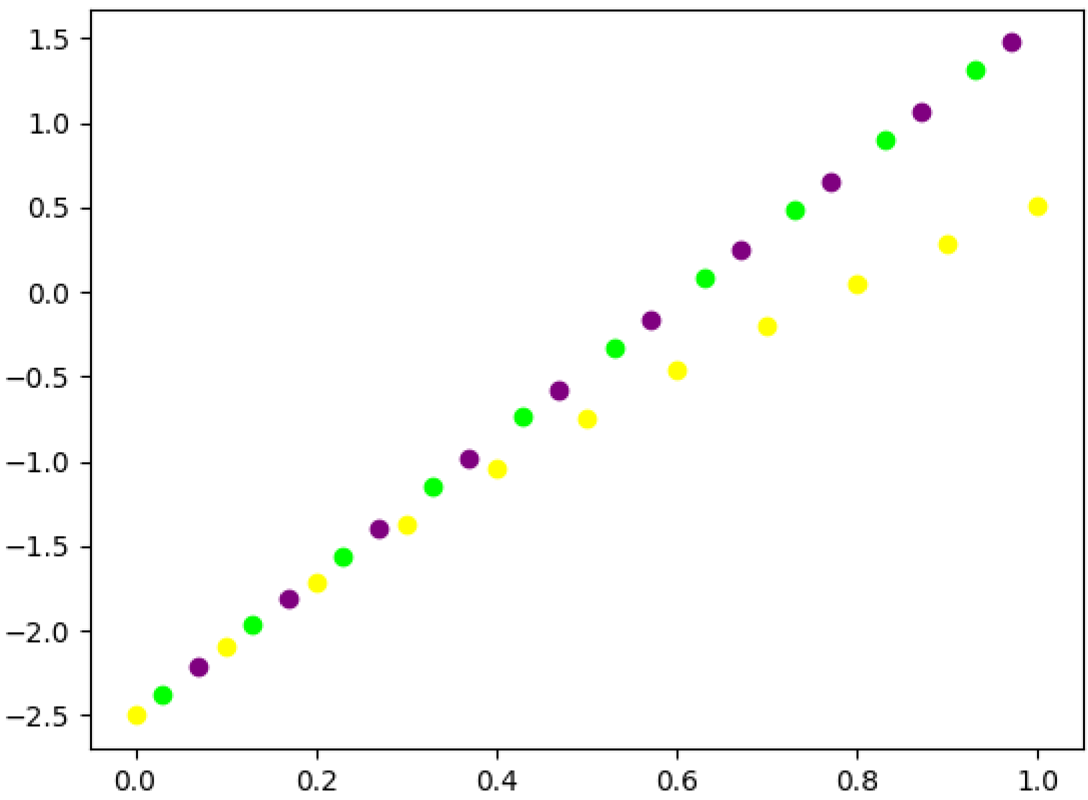
k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
m	0	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	1.8	2.53	3.96	5.33	1.96

Оценить погрешность. Вычислить значение функции в точке 0.47 с помощью интерполяционного многочлена и многочлена наилучшего приближения. Сравнить значения.

k=5

ЗАДАНИЕ

X:
[0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0]
Y:
[-2.5, -2.09, -1.71, -1.37, -1.04, -0.74, -0.46, -0.2, 0.05, 0.29, 0.51]
Lagrange interpolation:
-0.5729999999999986
Newton interpolation:
-0.5729999999999995



ВЫВОДЫ

В ходе выполнения данной лабораторной работы были применены методы для работы с интерполяционными многочленами и создана реализация соответствующей программы, выполняющей все необходимые условия данной работы на языке Python для решения поставленной задачи. Оба метода (Ньютона и Лагранжа) показали схожие результаты.
Методы были графически проиллюстрированы для демонстрации их корректности.