Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»
Кафедра информатики

Отчет по лабораторной работе №7

Интерполяция сплайнами

Вариант: 20

Выполнил: студент группы 053504

Пекутько Дмитрий Леонидович

Проверил: Анисимов Владимир Яковлевич

Минск 2022

ЦЕЛЬ ЗАДАНИЯ

Изучить построение кубических интерполяционных сплайнов.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим задачу интерполяции функции *f(x)* на отрезке *[a, b]*. Пусть мы имеем узлы $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ и значения функции $y_0, ..., y_n$ в данных узлах. Отрезок разбивается узлами на *n* элементарных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, где $h_i = x_i - x_{i-1}$ - длина элементарного отрезка, $i = \overline{1, n}$.

Сплайном называется функция *S(x)*, которая на каждом элементарном отрезке является многочленом и непрерывна на всем отрезке [*a, b*], вместе со своими производными до некоторого порядка.

Степенью сплайна называется наивысший порядок степени многочлена.

Дефектом сплайна называется разность между его степенью и наивысшим порядком непрерывной на [a, b] производной.

Пример. Рассмотрим функцию

$$S(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2, & 1 \le x < 2 \\ 2, & 2 \le x < 3 \\ \dfrac{x^3}{27} - x + 4, & 3 \le x < 4. \end{cases}$$

Очевидно, функция $S(x)$ является кубическим сплайном на отрезке [0, 4], так как она непрерывна в узловых точках.

Действительно,

$$S(1-0) = S(1+0) = 1,\ S(2-0) = S(2+0) = 2,\ S(3-0) = S(3+0) = 2.$$

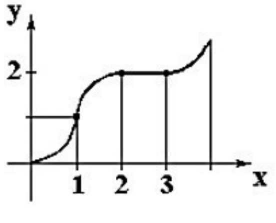


Рис. 7.1.

Найдем дефект сплайна.

$S'(1-0)=S'(1+0)=2,\ S'(2-0)=S'(2+0)=0,\ S'(3-0)=S'(3+0)=0.$

В то же время $S''(2-0)=-2,\ \ S''(2+0)=0.$

Таким образом, наибольший порядок непрерывной производной функции S на отрезке [0,4] равен 1 и, следовательно, дефект сплайна равен 2. Смотри рисунок 7.1.

Отметим, что в общем случае сам сплайн многочленом не является. Чтобы он был многочленом, необходимо и достаточно, чтобы его дефект равнялся нулю.

Будем рассматривать кубические сплайны, у которых непрерывны первая и вторая производные.

Тогда на отрезке $[x_{i-1},x_i]$ сплайн *S(x)* имеет вид

$$S(x)=a_i+b_i(x-x_{i-1})+c_i(x-x_{i-1})^2+d_i(x-x_{i-1})^3, \quad i=\overline{1,n}. \tag{7.1}$$

Таким образом, для построения кубического сплайна необходимо найти $4n$ неизвестных коэффициентов многочленов (7.1).

Очевидно $S(x_i)=y_i$, $i=\overline{0,n}$. Найдем *S(x)*. Для этого требуется определить значения *4n* неизвестных коэффициентов. Очевидно для этого необходимо иметь *4n* уравнений для определения коэффициентов.

Подставим левый конец отрезка (x_{i-1}) в уравнение:

$$S(x_{i-1})=y_{i-1}=a_i\ , \qquad i=\overline{1,n}$$

$$S(x_{i+1})=y_i=a_i+b_ih_i+c_ih_i^2+d_ih_i^3, \qquad i=\overline{1,n}.$$

В итоге получаем *2n* уравнений:

$$\begin{cases} y_{i-1}=a_i & i=\overline{1,n} \\ a_i+b_ih_i+c_ih_i^2+d_ih_i^3=y_i & i=\overline{1,n}. \end{cases}$$

Далее во всех внутренних узлах должны совпадать первая и вторая производные *S(x)*. Имеем

$$S'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2,$$

$$S''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}), \qquad i = \overline{1, n-1}.$$

Приравниваем во внутренних узлах значения левых и правых производных. Получим:

$$\begin{cases} b_i + 2c_ih_i + 3d_ih_i^2 = b_{i+1} & i = \overline{1,n}, \\ c_i + 3d_ih_i = c_{i+1}, \end{cases}$$

т. е. *(2n-2)* уравнений.

Недостающие 2 уравнения можно задать разными способами. Обычно берут $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$.

Отсюда

$$2c_1 = 0, \quad 2c_n + 6d_nh_n = 0.$$

Для удобства положим еще $c_{n+1} = 0$.

Объединяя все уравнения, получим систему

$$\begin{cases} y_{i-1} = a_i & i = \overline{1,n} \\ a_i + b_ih_i + c_ih_i^2 + d_ih_i^3 \quad y_i \quad = & i \quad \overline{1,n} \quad = \\ b_i + 2c_ih_i + 3d_ih_i^2 \quad b_{i+1} & i \quad \overline{1,n-1} \\ c_i + 3d_ih_i \quad c_{i+1} & i \quad \overline{1,n-1} \\ c_n + 3d_nh_k = 0 \\ c_1 = 0 \\ c_{n+1} = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получим

Решая систему, получим

$$\begin{cases} b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 \quad y_i - y_{i-1} \quad = & i = \overline{1,n} \\ 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 \quad b_{i+1} - b_i \quad = & i \quad \overline{1,n-1} \\ d =_i \dfrac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} & \\ c_1 = c_{n+1} = 0, & \end{cases}$$

далее

$$\begin{cases} a_i = y_{i-1} & i = \overline{1,n} \\ b_i h_i + c_i h_i^2 + \left(\dfrac{(c_{i+1} - c_i) h_i^2}{3} \right) = y_i - y_{i-1} & i = \overline{1,n} \\ 2c_i h_i + (c_{i+1} - c_i) h_i = b_{i+1} - b_i & i = \overline{1,n-1} \\ d =_i \dfrac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} & i = \overline{1,n} \\ c_1 = c_{n+1} = 0. & \end{cases}$$

Откуда

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - c_i h_i - \frac{(c_{i+1} - c_i) h_i}{3}, \qquad i = \overline{1,n}.$$

$$2c_i h_i + (c_{i+1} - c_i) h_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - c_{i+1} h_{i+1} - \frac{(c_{i+2} - c_{i+1}) h_{i+1}}{3} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + c_i h_i + \frac{(c_{i+1} - c_i) h_i}{3}.$$

Таким образом, задача определения коэффициентов сплайна свелась к решению системы

ЗАДАНИЕ

Произвести интерполирование кубическими сплайнами приведённых в таблице функций. Вычислить значение сплайна в точке $x = 0.5*(b-a)$

Значение сплайна в точке $x = 0.5*(b-a)$ записать в качестве ответа. Сравнить со значением функции в соответствующей точке.

№ варианта	Функция $f(x)$	Интервал $[a,b]$ 50	Число узлов	Значение в точке $x = 0.5*(b-a)$
1.	e^{-x}	[0,4]	5	0,1372
2.	$\ln(x)$	[1,3]	6	0
3.	$\sqrt{x}$	[0,4]	5	1,4065
4.	$1/x$	[1,2]	6	1
5.	$sh(x)$	[0,2]	6	1,1752
6.	$arctg(x)$	[0,2]	6	0,7854
7.	$ch(x)$	[0,2]	6	1,5431
8.	$th(x)$	[0,2]	6	0,7616
9.	$1/\sqrt{x}$	[1,3]	6	1
10.	$tg(x)$	[0,1.5]	6	0,9316

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

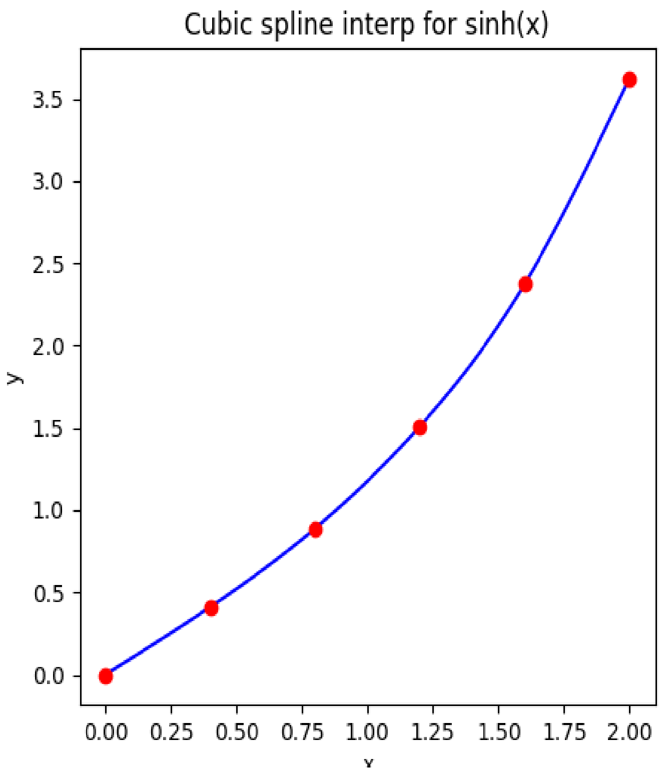
Вариант 5

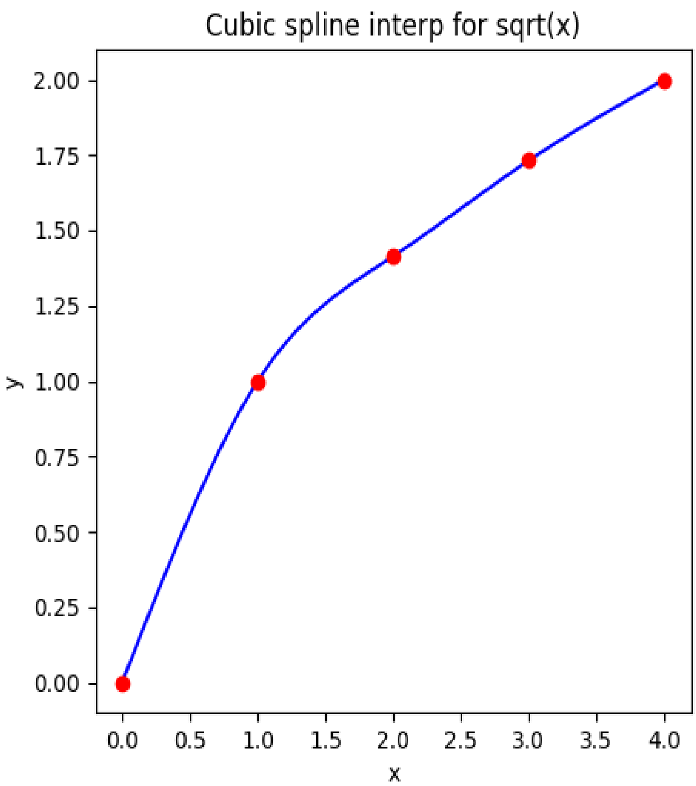
Для sinh(x) на отрезке [0,2]:

```
┌─dkefir03@debian ~/labs/mcha ‹main●›
└─$ python3 lab7.py
Cubic spline interp for sinh(x) y((b-a)/2) = 1.177
x = [0.0, 0.4, 0.8, 1.2000000000000002, 1.6, 2.0]
y = [0.0, 0.4107523258028155, 0.888105982187623, 1.509461355412173, 2.37556795320023, 3.626860407847019]
```

Для sqrt(x) на отрезке [0,4]:

```
Cubic spline interp for sqrt(x) y((b-a)/2) = 1.4142
x =  [0, 1, 2, 3, 4]
y =  [0.0, 1.0, 1.4142135623730951, 1.7320508075688772, 2.0]
```





ВЫВОДЫ

Таким образом, в ходе выполнения лабораторной работы были применены методы для работы с интерполяционными сплайнами и создана реализация соответствующей программы, выполняющей все необходимые условия данной работы на языке Python для решения поставленной задачи. Полученный результат в точке 1 близок к описанному в условии .