Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»
Кафедра информатики

Отчет по лабораторной работе №8

Численное дифференцирование и интегрирование функций

Вариант: 20

Выполнил: студент группы 953502

Пекутько Дмитрий Леонидович

Проверил: Анисимов Владимир Яковлевич

Минск 2022

ЦЕЛЬ ЗАДАНИЯ

1. Изучить методы численного вычисления производных и методы численного интегрирования.
2. Сравнить методы по трудоёмкости, точности.
3. Выполнить тестовое задание по численному дифференцированию и интегрированию.

ТЕОРИТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1) Численное дифференцирование. Для получения формул вычисления производной разобьем отрезок *[a, b]* на n частей следующим образом:

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Тогда $y_k = f(x_k)$, $y_k' = f'(x_k)$, и по формуле Тейлора (считая функцию дважды непрерывно дифференцируемой) получаем

$$y_{k+1} = y_k + y_k' h + f''(\xi) h^2 \frac{1}{2},$$

или

$$y'_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h} - \frac{f''(\xi) h}{2} \;;$$

где ξ – некоторая точка на $[x_k, x_{k+1}]$.

Таким образом получаем формулу для приближенного вычисления производной : $\boxed{y'_k \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{h}, \text{ с погрешностью } R \le \frac{M_2 h}{2}}$,

где $M_2 = \max\limits_{a \le x \le b} |f''(x)|$.

Таким образом, обеспечивается точность $O(h)$.

Далее воспользуемся следующей теоремой.

Теорема(о среднем).

Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$. Тогда ∃ точка $\xi \in [a, b]$ такая, что $\dfrac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n} = f(\xi)$.

Считая функцию трижды непрерывно дифференцируемой, получим:

$$y_{k+1} = y_k + y'_k h + \frac{y''_k}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi_1)}{6}h^3;$$

$$y_{k-1} = y_k - y'_k h + \frac{y''_k}{2}h^2 - \frac{f'''(\xi_2)}{6}h^3.$$

Отсюда можем определить производную как

$y'_k = \dfrac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + \dfrac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{12}h^2$ и, применяя теорему о среднем, получаем:

$$y'_k = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + \frac{f'''(\xi_k)}{6}h^2.$$

Т.е. имеет место формула для приближенного вычисления производной:

$\boxed{y'_k \approx \dfrac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}, \ R \le \dfrac{M_3 h^2}{6}}$, где $M_3 = \max\limits_{a \le x \le b} |f'''(x)|$.

Точность вычисления производной в этом случае имеет порядок $O(h^2)$.

Для того чтобы найти формулу для вычисления второй производной будем считать функцию f(x) четырежды непрерывно дифференцируемой, тогда:

$$y_{k+1} = y_k + y'_k h + \frac{y''_k}{2}h^2 + \frac{y'''_k}{6}h^3 + \frac{f^{IV}(\xi_1)}{24}h^4;$$

$$y_{k-1} = y_k - y'_k h + \frac{y''_k}{2}h^2 - \frac{y'''_k}{6}h^3 + \frac{f^{IV}(\xi_2)}{24}h^4,$$

отсюда $\frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2}=y''_k+\frac{f^{IV}(\xi_1)+f^{IV}(\xi_2)}{24}h^2$,

значит $\boxed{y''_k \approx \frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2}\ ,\ R=\frac{\left|f^{IV}(\xi_k)\right|}{12}h^2 \le \frac{M_4 h^2}{12}}$

При этом обеспечивается точность $O(h^2)$.

2) Интегрирование функций. Пусть дана функция $f(x)$, которую необходимо проинтегрировать на отрезке $[a,b]$. Разобьем этот отрезок на n частей следующим образом:

$h=\frac{b-a}{n}$, $a=x_0<x_1<...<x_n=b$, и зафиксируем значения функции в точках разбиения $y_0, y_1, ..., y_n$.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx=\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$ и, полагая $\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx y_{k-1}h$,

можно получить формулы:

$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h(y_1+y_2+...+y_n)$ *(правых прямоугольников)*;

$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h(y_0+y_1+...+y_{n-1})$ *(левых прямоугольников)*;

$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h(f(x_0+h/2)+...+f(x_{n+1}+h/2))$ *(средних прямоугольников)*.

Проанализируем точность наиболее точной из них формулы средних прямоугольников.

Пусть $\Phi(x)=\int\limits_{x_{k-1}+h/2}^{x_k} f(x)dx \Rightarrow \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx=\Phi(x_k)-\Phi(x_{k-1})$. (*)

Считая исходную функцию дважды непрерывно дифференцируемой, получаем

$$\Phi(x_k)=\Phi(x_{k-1}+h/2)+\Phi'(x_{k-1}+h/2)\frac{h}{2}+\Phi''(x_{k-1}+h/2)\frac{h^2}{8}+\frac{\Phi'''(\xi_1)}{6}\frac{h^3}{8}=$$
$$=f(x_{k-1}+h/2)\frac{h}{2}+f'(x_{k-1}+h/2)\frac{h^2}{8}+f'''(\xi_1)\frac{h^3}{48}$$

Значит $\Phi(x_{k-1})=-f(x_{k-1}+h/2)\frac{h}{2}+f'(x_{k-1}+h/2)\frac{h^2}{8}-f'''(\xi_2)\frac{h^3}{48}$

Полученные значения подставим в (*) и приведем подобные:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx=\Phi(x_k)-\Phi(x_{k-1})=f(x_{k-1}+h/2)h+\frac{f''(\xi_1)+f(\xi_2)}{48}h^3;$$

Таким образом $\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}+h/2)h+\sum_{k=1}^{n} f''(\xi_k)\frac{h^3}{24}=h\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}+h/2)+\frac{f''(\xi)nh^3}{24},\ R\le\frac{M_2nh^3}{24};$

То есть оценка точности для данного метода $O(h^2)$.

Используя формулы правых и левых прямоугольников (взяв их среднее арифметическое) получим *формулу трапеций*:

$$\int_a^b f(x)dx\approx h(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+\ldots+y_{n-1}),R\le\frac{M_2nh^2}{12}.$$

Можно показать, что ее точность тоже $O(h^2)$.

Формула Симпсона.

Дана функция $f(x)$, которую необходимо проинтегрировать на отрезке $[a,b]$. Разобьем этот отрезок на 2n частей следующим образом:

$$h=\frac{b-a}{2n},\quad a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b.\ \int_a^b f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx$$

Будем аппроксимировать элементарную трапецию некоторой параболической трапецией (например $y = ax^2 + bx + c$) через точки вида

A(x_{2k}, y_{2k}), B(x_{2k+1}, y_{2k+1}), C(x_{2k+2}, y_{2k+2});

Составим систему: $\begin{cases} y_{2k} = ax_{2k}^2 + bx_{2k} + c \\ y_{2k+1} = ax_{2k+1}^2 + bx_{2k+1} + c \quad (**) \\ y_{2k+2} = ax_{2k+2}^2 + bx_{2k+2} + c \end{cases}$

Посчитаем определитель: $\Delta = \begin{vmatrix} x_{2k}^2 & x_{2k} & 1 \\ x_{2k+1}^2 & x_{2k+1} & 1 \\ x_{2k+2}^2 & x_{2k+2} & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, значит данная система имеет решение a,b,c и причем единственное.

Решая ее мы получим так называемую малую формулу Симпсона:

$\int\limits_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} (ax^2 + bx + c)dx = ... = \frac{h}{3}(y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2})$, где a, b и c берутся из системы (**).

По сдвоенному элементарному промежутку запишем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{3}(y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2}) =$$
$$= \frac{h}{3}(y_0 + 2(y_2 + ... + y_{2n-2}) + 4(y_1 + ... + y_{2n-1}) + y_{2n})$$

Таким образом, получается формула Симпсона:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2n}) + 2(y_2 + ... + y_{2n-2}) + 4(y_1 + ... + y_{2n-1})], \; R \le \frac{(b-a)^4 h^4 M_4}{180};$$

Данная формула обеспечивает точность вычислений $O(h^4)$.

Анализируя рассмотренные методы численного интегрирования мы можем сделать вывод, что расчет по формуле Симпсона является наиболее точным.

ЗАДАНИЕ

В каждом варианте найти численное значение первой и второй производной в точке, являющейся серединой заданного интервала, с точностью до 0,01. Вычислить с заданной точностью интегралы по формулам прямоугольников, трапеций, Симсона. Сравнить методы по точности.

№ варианта	Функция $f(x)$	Интервал	Метод	Точность	Значение интеграла
1.	$lg\, x$	[1 ; 3]	Трапеций	0,000001	**0,5627743**
2.	$arctg\, x$	[0 ; 2]	Симпсона	0,000001	**1,4095786**
3.	$ch\, x$	[0 ; 2]	Средних	0,000001	**0,4995949**
4.	$\sqrt{x}$	[0 ; 4]	Симпсона	0,000001	**5,3333335**
5.	$\sqrt{tg\, x}$	[0 ; 1.5]	Трапеций	0,000001	**1,6893633**
6.	$\sqrt{1-lg^2 x}$	[1 ; 10]	Средних	0,000001	**5,7980142**
7.	$arctg\sqrt{x}$	[0 ; 2]	Симпсона	0,000001	**1,4517355**
8.	$\frac{\sin x}{x}$	[1 ; 2]	Трапеций	0,000001	**0,6593294**
9.	$\frac{\cos x}{x}$	[1 ; 2]	Симпсона	0,000001	**0,0855770**
10.	$sh\,(1/x)$	[1 ; 2]	Средних	0,000001	**0,7576327**

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Вариант 5

Вычисление интегралов:

```
Calculation results:
left_rect method: (result, steps)
(1.6893779133975855, 11)
right_rect method: (result, steps)
(1.6893797469843728, 11)
central_rect method: (result, steps)
(1.6893792338304485, 1)
trapezium method: (result, steps)
(1.6893785743798342, 3)
simpson method: (result, steps)
(1.6893785205670355, 7)
```

Значение первой производной:

```
(0.9676164526499065, 5)
```

Значение второй производной:

```
(0.20820244026253928, 5)
```

ВЫВОДЫ

В ходе выполнения лабораторной работы № 8 были применены методы для работы с численным интегрированием и дифференцированием функций и создана реализация соответствующей программы, выполняющей заданные условия данной работы на языке Python. Алгоритмы левого и правого треугольников были наиболее медленные при расчётах с заданной точностью. Точнее всего оказался мето Сипсона.