

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»
Кафедра информатики

Отчет по лабораторной работе №5
Вычисление собственных значений и векторов

Студент: гр. 053504
Пекутько Дмитрий
Леонидович
Руководитель: доцент
Анисимов В.Я.

Минск 2022

Содержание

Цель работы	3
Теоретические сведения	3
Программная реализация	5
ЗАДАНИЕ	7
Вывод	7

1. Цель работы

Освоить методы вычисления собственных значений и векторов

2. Теоретические сведения

Итеративные алгоритмы решают задачу вычисления собственных значений путём построения последовательностей, сходящихся к собственным значениям. Некоторые алгоритмы дают также последовательности векторов, сходящихся к собственным векторам.

Метод Якоби (вращений) использует итерационный процесс, который приводит исходную симметрическую матрицу A к диагональному виду с помощью последовательности элементарных ортогональных преобразований (в дальнейшем называемых вращениями Якоби или плоскими вращениями). Процедура построена таким образом, что на $(k+1)$ -ом шаге осуществляется преобразование вида

$$A^{(k)} \rightarrow A^{(k+1)} = V^{(k)*} A^{(k)} V^{(k)} = V^{(k)*} \dots V^{(0)*} A^{(0)} V^{(0)} \dots V^{(k)}, \quad k=0,1,2,\dots, \quad (5.1)$$

где $A^{(0)} = A$, $V^{(k)} = V^{(k)}_{ij}(\varphi)$ — ортогональная матрица, отличающаяся от единичной матрицы только элементами

$$v_{ii} = v_{jj} = \cos \varphi, \quad v_{ij} = -v_{ji} = -\sin \varphi, \quad (5.2)$$

значение φ выбирается при этом таким образом, чтобы обратить в 0 наибольший по модулю недиагональный элемент матрицы $A^{(k)}$. Итерационный процесс постепенно приводит к матрице со значениями недиагональных элементов, которыми можно пренебречь, т.е. матрица $A^{(k)}$ все более похожа на диагональную, а диагональная матрица A является пределом последовательности $A^{(k)}$ при $k \rightarrow \infty$.

Алгоритм метода вращений.

- 1) В матрице $A^{(k)}$ ($k=0,1,2,\dots$) среди всех недиагональных элементов выбираем максимальный по абсолютной величине элемент, стоящий выше главной диагонали; определяем его номера i и j строки и столбца, в которых он стоит (если максимальных элементов несколько, можно взять любой из них);

2) По формулам

$$\cos \varphi_k = \cos \left(\frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} P_k \right),$$

$$\sin \varphi_k = \sin \left(\frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} P_k \right),$$

$$\operatorname{ctg} P_k = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & \text{если } a_{ii}^{(k)} = a_{jj}^{(k)} \\ \frac{2 a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}}, & \text{иначе} \end{cases}$$

вычисляем $\cos \varphi_k$ и $\sin \varphi_k$, получаем матрицу $V^{(k)} = V^{(k)}_{ij}(\varphi_k)$

$$V^{(k)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} i & j \end{matrix} \\ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \cos \varphi_k & \dots & \dots & \dots & -\sin \varphi_k & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \sin \varphi_k & \dots & \dots & \dots & \cos \varphi_k & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

3) По формуле

$$A^{(k+1)} = V^{(k)T} \cdot A^{(k)} \cdot V^{(k)}$$

находим матрицу $A^{(k+1)}$.

4) Итерационный процесс останавливаем, когда в пределах принятой точности суммой квадратов всех недиагональных элементов матрицы $A^{(k+1)}$ можно пренебречь.

5) В качестве собственных значений матрицы A берем диагональные элементы матрицы $A^{(k+1)}$, в качестве собственных векторов – соответствующие столбцы матрицы

$$V = V^{(0)} V^{(1)} \dots V^{(k)}.$$

Основное достоинство метода Якоби заключается в том, что при выполнении каждого плоского вращения уменьшается сумма квадратов недиагональных элементов; сходимость этой суммы к нулю по мере увеличения числа шагов гарантирует сходимость процесса диагонализации.

3. Программная реализация

С точностью до 0,0001 вычислить собственные значения и собственные векторы матрицы A , где $A = kC + D$, A – исходная матрица для расчёта, k – номер варианта,

$$C = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,2 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0,2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2,33 & 0,81 & 0,67 & 0,92 & -0,53 \\ 0,81 & 2,33 & 0,81 & 0,67 & 0,92 \\ 0,67 & 0,81 & 2,33 & 0,81 & 0,92 \\ 0,92 & 0,67 & 0,81 & 2,33 & -0,53 \\ -0,53 & 0,92 & 0,92 & -0,53 & 2,33 \end{bmatrix}.$$

Тестовый пример 1

Пусть $A = 10 * C + D$, где C, D взяты из задания. Решение :

A :

```
[[ 4.3300  0.8100  2.6700  0.9200 -0.5300]
 [ 0.8100  4.3300  0.8100  2.6700  0.9200]
 [ 2.6700  0.8100  4.3300  0.8100  2.9200]
```

```
[ 0.9200 2.6700 0.8100 4.3300 -0.5300]
[-0.5300 0.9200 2.9200 -0.5300 4.3300]]
```

Result:

Eigen vector

```
[ 4.6669 6.2374 9.1894 1.6199 -0.0636]
```

Eigen values

```
[[ 0.7282 0.0661 0.4315 -0.2836 0.4458]
[-0.4217 0.3958 0.4484 -0.6466 -0.2152]
[ 0.1800 -0.3908 0.5848 0.2607 -0.6363]
[-0.1621 0.5837 0.3879 0.6583 0.2217]
[-0.4829 -0.5877 0.3469 0.0131 0.5485]]
```

Тестовый пример 2

Пусть $A = 18 * C + D$, где C, D взяты из задания. Решение :

A:

```
[[ 5.9300 0.8100 4.2700 0.9200 -0.5300]
[ 0.8100 5.9300 0.8100 4.2700 0.9200]
[ 4.2700 0.8100 5.9300 0.8100 4.5200]
[ 0.9200 4.2700 0.8100 5.9300 -0.5300]
[-0.5300 0.9200 4.5200 -0.5300 5.9300]]
```

Result:

Eigen vector

```
[ 6.4219 9.4292 12.8376 1.6305 -0.6693]
```

Eigen values

```
[[ 0.7303 -0.0922 0.4423 -0.1984 0.4725]
[-0.2518 0.5508 0.3876 -0.6783 -0.1511]
[ 0.0628 -0.3643 0.6177 0.1829 -0.6695]
[-0.0430 0.6251 0.3405 0.6833 0.1566]
[-0.6305 -0.4057 0.3958 0.0127 0.5302]]
```

ЗАДАНИЕ

Вариант 5

$A = 5 * C + D$ Решение:

A:

```
[[ 3.3300 0.8100 1.6700 0.9200 -0.5300]
 [ 0.8100 3.3300 0.8100 1.6700 0.9200]
 [ 1.6700 0.8100 3.3300 0.8100 1.9200]
 [ 0.9200 1.6700 0.8100 3.3300 -0.5300]
 [-0.5300 0.9200 1.9200 -0.5300 3.3300]]
```

Result:

Eigen vector

```
[3.2236 6.9481 4.5916 1.6099 0.2769]
```

Eigen values

```
[[ 0.6333 0.4303 -0.3208 -0.3808 0.4072]
 [-0.5622 0.4897 -0.1108 -0.5925 -0.2843]
 [ 0.3605 0.5594 0.3154 0.3414 -0.5840]
 [-0.3420 0.4171 -0.4886 0.6223 0.2882]
 [-0.1893 0.2971 0.7393 0.0116 0.5737]]
```

4. Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы был изучен метод вращений (метод Якоби) для решения полной проблемы собственных значений вещественной симметричной матрицы. Также опытным путем были вычислены собственные значения и векторы различных для различных матриц.