Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ»
Кафедра информатики

Отчет по лабораторной работе №10

Метод Адамса

Выполнил: студент группы 953502
Потейчук Вероника Михайловна

Проверил: Анисимов Владимир
Яковлевич

Минск 2021

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Изучить численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом Адамса.

2. ТЕОРИТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1. Неявная схема метода Адамса.

Пусть есть дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y),$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0 .$$

Разбиваем отрезок $[a,b]$ с шагом h на n частей. То есть, получаем узлы $x_k = x_0 + kh$, $k = \overline{0,n}$, где $x_0 = a$.

Пусть $y = y(x)$ − решение. Тогда на $[x_k, x_{k+1}]$ справедливо равенство

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_K}^{x_{K+1}} f(x, y(x))dx .$$

Применим формулу левых прямоугольников для вычисления интеграла. Получим

$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$, то есть формулу Эйлера.

Очевидно это не самый точный метод вычисления интеграла.

Применим формулу трапеций для вычисления интеграла. Получим

$$y_{k+1} = y_k + h\frac{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})}{2}, \qquad k = 0,1\dots .$$

Вычисление более точно, но мы не можем найти y_{k+1} из полученной формулы. Однако в частном случае, когда дифференциальное уравнение линейно, т. е. имеет вид

$$y' = -p(x)y + q(x),$$

мы получим:

$$y_{k+1} = y_k + h\frac{-p_k y_k + q_k - p_{k+1}y_{k+1} + q_{k+1}}{2},$$

где

$p_k = p(x_k)$, $q_k = q(x_k)$.

Отсюда легко находится значение

$$y_{k+1} = \frac{(2 - hp_k)y_k + h(q_k + q_{k+1})}{2 + hp_{k+1}}.$$

2. Явная схема Адамса

Используем интерполяционную квадратурную формулу Лагранжа для вычисления интеграла, т.е.

$$\int_{x_K}^{x_{K+1}} f(x, y(x))dx = A_0 f(x_k, y_k) + A_1 f(x_{k-1}, y_{k-1}),$$ где

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{m} f(x_i)A_i, \quad A_i = \int_a^b l_i(x)dx; \quad l_i(x) = \frac{\varpi_i(x)}{\varpi_i(x_i)}.$$

Найдем коэффициенты A_i методом неопределенных коэффициентов:

$$\int_{x_K}^{x_{K+1}} dx = A_0 + A_1;$$

$$\int_{x_K}^{x_{K+1}} xdx = A_0 x_k + A_1 x_{k-1}.$$

Получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} A_0 = h - A_1 \\ \dfrac{h(x_{k+1} + x_k)}{2} = A_0 x_k + A_1 x_{k-1}. \end{cases}$$

Откуда

$$\frac{h(x_{k+1} + x_k)}{2} = (h - A_1)x_k + A_1 x_{k-1};$$

$$\frac{h(x_{k+1} + x_k)}{2} = hx_k - A_1(x_k - x_{k-1});$$

$$\frac{h(x_{k+1} + x_k)}{2} = hx_k - A_1 h;$$

$$A_1 h = hx_k - \frac{h(x_{k+1} + x_k)}{2} = \frac{h(x_k - x_{k+1})}{2}.$$

В итоге получим:

$$A_1 = -\frac{h}{2};$$

$$A_0 = h - A_1 = \frac{3h}{2}.$$

Откуда

$$\int_{x_K}^{x_{K+1}} f(x, y(x))dx = \frac{3}{2}hf_k - \frac{h}{2}f_{k-1}, \quad \text{где} \quad f_k = f(x_k, y_k).$$

Следовательно, получим

$$y_{k+1} = y_k + h\left(\frac{3}{2}f(x_k, y_k) - \frac{1}{2}f(x_{k-1}, y_{k-1})\right) \qquad k = \overline{1,n}..$$

Это формула Адамса второго порядка.

Существенным недостатком метода Адамса второго порядка является то обстоятельство, что для его применения надо знать дополнительно к начальному условию еще

$y_{-1} = y(x_0 - h)$ или $y_1 = y(x_0 + h)$.

Достоинством метода является то, что значение функции f в каждой точке (x_k, y_k) вычисляется только один раз.

3. ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

С помощью метода Адамса найти с заданной точностью решение заданного уравнения на заданном отрезке.

ЗАДАНИЕ

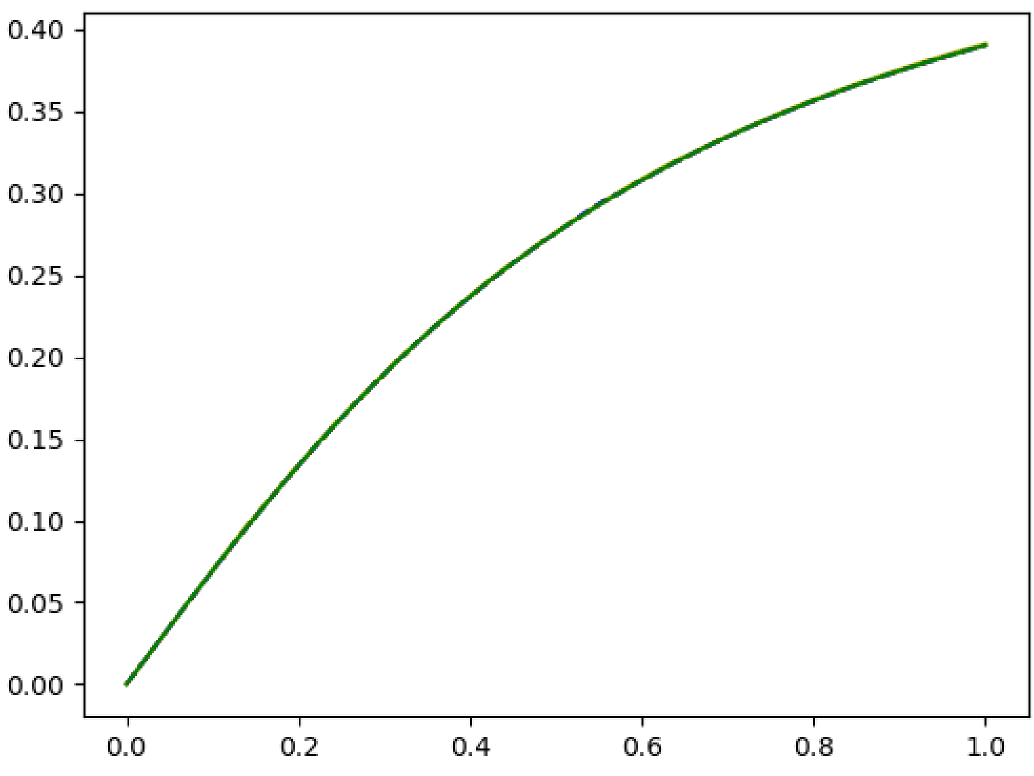
С помощью метода Адамса найти с точностью до 0.001 решение заданного уравнения на отрезке [0; 1].

$$y' = \frac{a(1-y^2)}{(1+m)x^2+y^2+1}, y(0) = 0,$$

$$\text{где}, m = 2.0, a = 0.7$$

Ответ:

Количество точек для вычисления = 10 ^ 3	
Количества отрезков	
Среднее	Максимальное
$2^{4.7}$	2^{6}



КОД ПРОГРАММЫ

```
import numpy as np
import sympy as sp
import math
import matplotlib.pyplot as plt

m = 1.5
a = 1.3

target_function = lambda x, y : (a*(1 - y**2))/((1 + m)*x**2 + y**2 + 1)
function = lambda x, y: y

initial_value = (0, 0)
solution_range = [0, 1]

def calculate_iterations(left_border, right_border, accuracy):
    h = np.power(accuracy, 0.25)
    return (right_border - left_border)/h

def calculate_additional_points(function, initial_value, h):
    points = [
        [initial_value[0]],
        [initial_value[1]]
    ]
    points[0].append(points[0][0] + h)
    k = []
    k.append(h*function(points[0][0], points[1][0]))
    k.append(h*function(points[0][0] + h/2, points[1][0] + k[0]/2))
    k.append(h*function(points[0][0] + h/2, points[1][0] + k[1]/2))
    k.append(h*function(points[0][0] + h, points[1][0] + k[2]))
    points[1].append(points[1][0] + (1/6)*(k[0] + k[3] + 2*(k[1]+k[2])))
    return points
def get_diff(data_new, data_old):
    size = len(data_old)
    if size == 1:
        return 100
    dY = np.array([data_new[2*i] - data_old[i] for i in range(2, si
    return (dY @ dY)/(size - 1)

def adams_method(function, _range_, initial_value, accuracy):
    n = np.ceil(calculate_iterations(_range_[0], _range_[1], accura
    accuracy_sequence = [
        [],
        []
    ]
    h = (_range_[1] - _range_[0])/n
    points = calculate_additional_points(function, initial_value, h
    for i in range(int(n) - 1):
        points[0].append(points[0][i + 1] + h)
        points[1].append(points[1][i + 1] +
        h*((3/2)*function(points[0][i + 1], points[1][i + 1]) -
        (1/2)*function(points[0][i], points[1][i])))
    diff = accuracy*4
    counter = 0
    while diff > accuracy*accuracy:
        points_temp = points.copy()
        n *= 2
        h /= 2
        points = calculate_additional_points(function, initial_valu
        for i in range(int(n) - 1):
            points[0].append(points[0][i + 1] + h)
            points[1].append(points[1][i + 1] +
            h*((3/2)*function(points[0][i + 1], points[1][i + 1]) -
            1/2)*function(points[0][i], points[1][i])))
        diff = get_diff(points[1], points_temp[1])
        accuracy_sequence[0].append(counter)
        accuracy_sequence[1].append(math.log10(math.sqrt(diff)))
        counter += 1
    print("Method - adams : " + str(n))
    plt.scatter(points[0], points[1])
    return None

adams_method(target_function, solution_range, initial_value, 1e-6)
```

4. ВЫВОДЫ

Таким образом, в ходе выполнения лабораторной работы был освоен метод Адамса для решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Составлена компьютерная программа, на тестовых примерах проверена правильность её работы, с заданной точностью построен график решения дифференциального уравнения заданного варианта, по количеству необходимых для этого отрезков оценена трудоёмкость метода.