1 **Поступательное движ** – движ., при кот. все малые части движ. по одинак. ||-ым траекториям.

Траектория движ – линия, кот. описывает мат. точка в процессе своего движ.

Мат. точка – тело, размеры кот. << мин. размеров траектории

Радиус вектор – век-р, соед. начало коорд. с мат. точкой в процессе движ.

Скорость – изм. радиус вектора за ед. времени

$$\boxed{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}}$$

ускорение – изм. скорости за ед. времени.

$$\boxed{\lim \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt}}$$

$$\bar{v}_{ср} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} \qquad v_{ср} = \frac{S}{\Delta t}$$

перемещение – разница 2ух рад. век. $\Delta \bar{r} = \bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)$

Примеры:

1) $V = const$ $\quad t=0 \quad \bar{r}(t=0) = \bar{r}_0$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} \qquad \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}(t)} d\bar{r} = \bar{v}\int_0^t dt \qquad \boxed{\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + \bar{v}t}$$

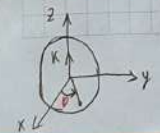
2) $a = const$ $\quad v \neq const \quad t=0 \quad \bar{r}(t=0) = \bar{r}_0 \quad v(t=0) = \bar{v}_0$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} \qquad \int_{v_0}^{\bar{v}(t)} d\bar{v} = \bar{a}\int_0^t dt \qquad \bar{v}(t) = \bar{a}t + \bar{v}_0$$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} \qquad \int dr = \bar{v}\,dt \Rightarrow \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}(t)} dr = \int_0^t (\bar{a}t + \bar{v}_0)\,dt \Rightarrow \boxed{\bar{r}(t) = \frac{\bar{a}t^2}{2} + \bar{v}_0 t + \bar{r}_0}$$

2 **Вращ. движ. вокруг оси** – такое движ., при кот. все малые части движ. по окр., плоскости кот. ||-ы, а центры окружн. лежат на одной прямой. – ось вращ.

Угол поворота – это ∠ на кот. поворачивается радиус вектор за t.



Угловая скорость $\boxed{\omega = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}}$ $\boxed{\bar\omega = \frac{d\varphi}{dt}\bar k}$

угловое ускорение $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar\omega}{\Delta t} = \frac{d\bar\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\bar k$

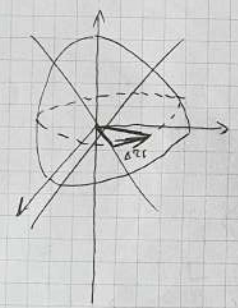
частота $\boxed{\nu = \frac{1}{T}}$ [Гц]

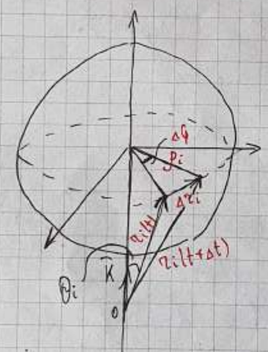
циклическая частота $\boxed{\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}}$ $[\frac{1}{c}]$

1) $\omega = const \to \boxed{\varphi(t) = \varphi_0 \pm \omega t}$ равномерн. движ. по окр

2) $\begin{cases}\varphi(t) = \varphi_0 \pm \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}\\ \omega(t) = \omega_0 \pm \varepsilon t\end{cases}$, $\varepsilon = const$ равноускор./равнозамед. движ.

Связь между лин. и угловыми хар-ками.





$\bar v = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar r}{\Delta t}$

$\Delta r_i = \rho_i\Delta\varphi = r_i\sin\theta_i\Delta\varphi \to v_i = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r_i}{\Delta t} =$

$= r_i\sin\theta_i\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = r_i\sin\theta_i\,\omega = \rho_i\omega$

$\boxed{v_i = [\bar\omega\ \bar r_i]}$ Эйлера

$\bar a_i = \frac{d\bar v_i}{dt} = \frac{d}{dt}[\bar\omega\ \bar r_i] = [\underbrace{\frac{d\bar\omega}{dt}}_{\varepsilon}\ r_i] + [\bar\omega\ \underbrace{\frac{dr_i}{dt}}_{v_i}] = [\bar\varepsilon\ \bar r_i] + [\bar\omega\,[\bar\omega\ \bar r_i]]$

$a = a_\tau\bar\tau + a_n\bar n$, $a_\tau = \varepsilon\rho_i = \varepsilon r_i\sin\theta_i$

$a_n = \omega^2\rho_i = \omega^2 r_i\sin\theta_i = \frac{v_i^2}{\rho_i}$

$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\varepsilon^2\rho_i^2 + \omega^4\rho_i^2}$

3

Сила – импульс, передаваемый телу A телом B за ед. времени

$$\boxed{\overline{F}_{AB} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{p}_A}{\Delta t}}$$

Импульс – мера воздействия силы на тело за промеж. времени.

$$\boxed{\Delta \overline{p}_A = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{F}_{AB} \Delta t}$$

Хар.-ки силы: 1. Величина 2. Направление 3. Точка приложения.

Законы Ньютона:

I Во всех ИСО если на тело не действ. другие тела или действ. других тел скомпенсировано, то тело находится в сост. покоя или равномерного прямолин. движ.

II $\frac{d\overline{p}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{F}_i$

III $\Delta \overline{p}_A = \overline{F}_{AB} \Delta t = -\overline{F}_{BA} \Delta t \rightarrow \overline{F}_{AB} = -\overline{F}_{BA}$

4

ЗСИ связан с однородностью простр-ва (при ∥-ом переносе коорд. св-ва простр-ва не меняются)

~~Суммарный импульс постоянен, тела могут передавать импульс друг другу.~~

~~Если сумма внеш. сил = 0, то импульс сис-мы – величина пост.~~

(*) Если на сис-му не действ. внеш. силы либо действ. сил скомпенсир., либо происходит за беск. малый промежуток времени, то импульс такой сис-мы остается величиной постоянной.

Т об изм. импульса мех. сис-мы

Пусть сис-ма – 1 тело. Разбиваем его на малые части, такие, что каждое движ. поступательно. Заменим действ. малых частей друг на друга силами и опред. <u>внут.</u> силы (это силы со стороны 1ой малой части на другую), <u>внеш</u> (силы, действ на тело со стороны других сил не вход. в сис-му)

$$\frac{d\overline{p}_i}{dt} = \overrightarrow{F}_i + \sum_{\substack{j \\ i\neq j}} \overrightarrow{F}_{ij} \rightarrow \sum \frac{d\overline{p}_i}{dt} = \sum_i \overline{F}_i + \sum_{\substack{ij \\ i\neq j}} \overline{F}_{ij} \rightarrow \frac{d\overline{p}}{dt} = \sum_i \overline{F}_i + \sum_{\substack{ij \\ i\neq j}} \overline{F}_{ij}$$

$$\sum_{ij} \overline{F}_{ij} = \sum_{i>j} \overline{F}_{ij} + \sum_{i<j} \overline{F}_{ij} = [i \rightleftarrows j] = \sum_{i>j} \overline{F}_{ij} + \sum_{i<j} \overline{F}_{ji} = \sum \underbrace{(\overline{F}_{ij} + \overline{F}_{ji})}_{=0 \text{ III ЗН}} = 0 \rightarrow \boxed{\frac{d\overline{p}}{dt} = \sum_i \overline{F}_i}$$

3

Изм. импульса мех. сис-мы = сумме внеш. сил, действ. на сис-му., т.е внут. силы не могут изм. имп.

$$d\bar{p} = \sum_i \bar{F}_i \, dt$$

(*) if $F_i = 0$ or $\sum_i F_i = 0$ or $dt \to 0 \Rightarrow$

$d\bar{p} = 0 \Rightarrow p = const$

ЧТД

5

(Т) О движении центра масс. мех. сис-мы.

Вводим понятие центра масс: $\bar{r}_c = \frac{m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\sum_i m_i \bar{r}_i}{\sum_i m_i}$

⇒ Тогда скор. центра масс:

$$\bar{v}_c = \frac{d\bar{r}_c}{dt} = \frac{\sum m_i \bar{v}_i}{\sum_i m_i}$$

ускорение: $\bar{a}_c = \frac{d\bar{v}_c}{dt} = \frac{\sum m_i \bar{a}_i}{\sum_i m_i}$

Возьмём $\frac{d\bar{v}_c}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_i m_i \bar{v}_i}{\sum_i m_i}\right) = \frac{d\bar{p}}{dt}\frac{1}{\sum_i m_i} \Rightarrow \sum_i m_i \frac{d\bar{v}_c}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \bar{p}_i\right) =$

$= \frac{d\bar{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$, т.к. $\sum_i m_i = M \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{M \frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} = \sum_i \bar{F}_i}$$

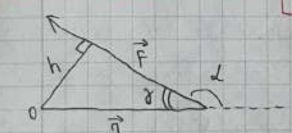
⇒ Центр масс движ. поступательно и только под действ. внеш. сил. Внут. силы не могут изм. центра масс.

6

мгновенн. Момент силы $\boxed{\bar{M} = [\bar{r}\ \bar{F}]}$

мгновенный момент импульса $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$

$L_i = [\bar{r}_i\ \bar{p}_i] = [\bar{r}_i\ m_i \bar{v}_i] \Rightarrow \boxed{L = [\bar{r}\ m\bar{v}]}$

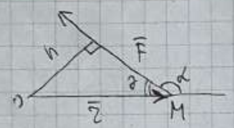


$|\bar{M}| = |[\bar{r}\ \bar{F}]| = |\bar{r}||\bar{F}|\sin\alpha = |\bar{r}||\bar{F}|\sin(\pi - \gamma) =$

$= |\bar{F}| \underbrace{|\bar{r}| \sin\gamma}_{=h} \Rightarrow \boxed{M = Fh}$

6

1) Момент сил:



$$\vec{M} = [\bar{r}\ \bar{F}]\ ;\ |\bar{M}| = \left|[\bar{r}\ \bar{F}]\right| = |\bar{r}|\,|\bar{F}|\sin(\pi-\gamma) =$$

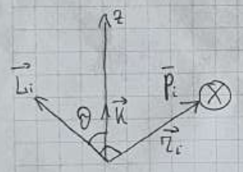
$$= |\bar{F}|\underbrace{|\bar{r}|\sin\gamma}_{=h} \Rightarrow \boxed{M = Fh}$$

2) Момент импульса

$L = [\bar{r}\ \bar{p}] = [\bar{r}\ \ m\bar{V}]$ – момент импульса

$\bar{L} = \sum_i \bar{L}_i\ ;\ \boxed{L_i = [\vec{r}_i\ \ m\vec{v}_i]}$ – момент импульса сис-мы

3) Проекция момента импульса на ось



$L_i = [\bar{r}_i\ \bar{p}_i]$ $\qquad L_{iz} = L_i\cos\theta = (\bar{L}_i\ \bar{k}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_i L_{iz} = L_z = \sum_i\left([\bar{r}_i\ m_i\bar{v}_i],\ \bar{k}\right) =$$

$$= \sum_i\left([\bar{k}\ \bar{r}_i],\ m_i\vec{v}_i\right) = \frac{1}{w}\sum_i\left(\underbrace{[w\bar{k},\ \bar{r}_i]}_{v_i},\ m_i\bar{v}_i\right) =$$

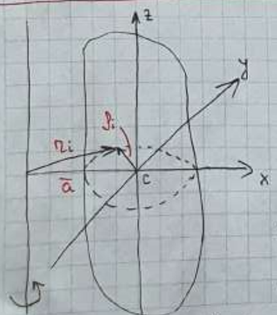
$$= \frac{1}{w}\sum_i(\bar{v}_i,\ m\bar{v}_i) = \frac{1}{w}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{w}\sum_i m_i(w\rho_i)^2 =$$

$$= w\boxed{\sum_i m_i\rho_i^2} = J$$ – момент инерции данного тела относит оси.

4) $J = \int r^2 dm = \int r^2 \rho\, dV$

5) Т Гюйгенса – Штейнера

Момент инерции тела относит. оси, не проход. через центр масс = сумме мом. инерц., относит. осей, прох. через центр масс и ||-ей данной и произв. масса тела на квадрат расстояния между осями.



Д $\quad dJ = dm\, r^2\ ,\ \ r^2 = \rho^2 + a^2 - 2\rho a\cos\alpha$

$dJ = dm\,\rho^2 + dm\, a^2 - dm\, 2\rho a\cos\alpha$

$\Rightarrow J = \int dm\rho^2 + \int a^2 dm - \underline{\int dm\ 2\rho a\cos\alpha}$

для $\int dm\ 2a\rho\cos\alpha = 2a\int dm\ \rho\cos\alpha$

$\int dm\underbrace{\rho\cos\alpha}_{x} = \int dm\, x = \left[x_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}\right] = \overset{=0\ (\text{т.к. нач. коорд})}{x_c}\cdot m = 0 \Rightarrow$

$J = J_c + a^2\int dm \qquad \boxed{J = J_c + a^2 m}$

ч.т.д.

T7

Т об изм. мех. момента импульса сис-мы

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i [\vec{r}_i \, \vec{F}_i] + \vec{M}_{внут}$$

② (Для одного тела)

$$r_i = \Big| \frac{d\bar{p}_i}{dt} = \sum_{\substack{j \\ i\neq j}} \bar{F}_{ij} + \bar{F}_i \rightarrow \quad [\bar{r}_i \, \frac{d\bar{p}_i}{dt}] = [\bar{r}_i \, \bar{F}_i] + \sum_j [\bar{r}_i \, \bar{F}_{ij}]$$

$$\frac{d}{dt}[\bar{r}_i \, \bar{p}_i] = [\underbrace{\frac{d\bar{r}_i}{dt}}_{v_i}, \bar{p}_i]_{\to 0} + [\bar{r}_i \, \frac{d\bar{p}_i}{dt}] \Rightarrow$$

$v_i \uparrow\uparrow p_i$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\sum_i [\bar{r}_i \, \bar{p}_i]}_{= \bar{L}_i} = \sum_i [\bar{r}_i \, \bar{F}_i] + \sum_{\substack{ij \\ i\neq j}} [\bar{r}_i \, \bar{F}_{ij}] \Rightarrow$$

$$\sum_{ij} [\bar{r}_i \, \vec{F}_{ij}] = \frac{1}{2} \sum_{ij} [\bar{r}_i \, \vec{F}_{ij}] + \frac{1}{2} \sum_{ij} [\bar{r}_i \, \bar{F}_{ij}] = [i \rightleftarrows j] =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{ij} [\bar{r}_i \, \bar{F}_{ij}] + \sum_{ji} [\bar{r}_j \, \bar{F}_{ji}] \right) \overset{\text{III зн: } F_{ji} = -F_{ij}}{=}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum [\bar{r}_i \, \bar{F}_{ij}] - \sum [\bar{r}_j \, \bar{F}_{ij}] \right) = \frac{1}{2} \sum [(\bar{r}_i - \bar{r}_j) \, \bar{F}_{ij}] = M_{внут}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i [\bar{r}_i \, \bar{F}_i] + \bar{M}_{внут}} \qquad \frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M}_{внеш} + \bar{M}_{внут}.$$

ЧТД

1) Момент внут. сил не зависит от выбора сис-мы отсчёта.

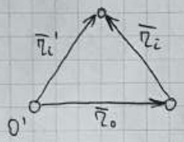
2) if $F_{ij} \parallel (r_i - r_j) \rightarrow M_{внут} = 0 \rightarrow \frac{dL}{dt} = M_{внеш}$

$\boxed{8}$

1) Т О независимости ур-я изм. мех. момента импульса.

Изм. мех. момента импульса имеет один и тот же вид во всех сис-мах отсчёта, кот. покоятся относит. друг друга.

Д



$$\vec{L}' = \sum_i [\bar{r}_i' \, \bar{p}_i'] = \sum_i [(\bar{r}_i + \bar{r}_0) \, \bar{p}_i] =$$

$$= \sum_i \underbrace{[\bar{r}_i \, \bar{p}_i]}_{\bar{L}_i} + \sum_i [\bar{r}_0 \, \bar{p}_i] = \vec{L} + \sum_i [\bar{r}_0 \, \bar{p}_i] \;\Big|\cdot \frac{d}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}'}{dt}} = \frac{d\bar{L}}{dt} + \frac{d}{dt}\sum_i [\bar{r}_0 \, \bar{p}_i] = \frac{d\bar{L}}{dt} + \left[\bar{r}_0 \, \frac{d\bar{p}}{dt}\right] =$$

$$= \boxed{\frac{d\bar{L}}{dt} + [\bar{r}_0 \, \bar{F}]} \quad (1)$$

$$\bar{M}' = \sum_i [\bar{r}_i' \, \bar{F}_i] = \sum_i [(\bar{r}_i + \bar{r}_0) \, \bar{F}_i] = \sum_i \underbrace{[\bar{r}_i \, \bar{F}_i]}_{M_i} + \sum_i [\bar{r}_0 \, \bar{F}_i] =$$

$$= M + \sum_i [\bar{r}_0 \, \bar{F}_i] = \bar{M} + [\bar{r}_0 \, \bar{F}]$$

$$\rightarrow \underbrace{[\bar{r}_0 \, \bar{F}]}_{(2)} = \bar{M}' - \bar{M} \quad \rightarrow \quad \frac{d\bar{L}'}{dt} = \frac{d\bar{L}}{dt} + \bar{M}' - \bar{M}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{d\bar{L}'}{dt} - \bar{M}' = \frac{d\vec{L}}{dt} - \bar{M}}$$ ⇒ изм. мех. имп. имеет один и тот же вид.

ЧТД

2) Если сис-ма твердое тело и вращ. вокруг оси:

$$L_z = J\omega = J\dot{\varphi} = (\bar{L} \, \bar{k}) \quad ; \quad M_z = ([\bar{r} \, \bar{F}], \bar{k}) = (\bar{M} \, \bar{k})$$

if внут. силы – центральные, то $\bar{M}_{внут} = 0 \rightarrow \frac{dL_z}{dt} = M_z \rightarrow J\frac{d\omega}{dt} = M_z \rightarrow$

$$\rightarrow \boxed{J_z \varepsilon = M_z = \sum_{i=1} M_{iz}}$$ основное ур-е динамики вращ. движ. тв. тела относит. оси z.

9

1) Кинетич. энергия сис-мы

$$K=\sum_i K_i=\sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} \qquad [Дж]=[Н\cdot м]$$

при поступат. движ: $K=\frac{v^2}{2}\sum_i m_i=\frac{mv^2}{2}$

Кин. энергия тела, вращ. вокруг неподвиж. оси:

$$\boxed{K=\frac{Jw^2}{2}} \qquad \left[K=\sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}=\sum \frac{m_i(w\rho_i)^2}{2}=\frac{w^2}{2}\underbrace{\sum_i m_i\rho_i^2}_{J}=\frac{w^2}{2}J\right]$$

Т Кёнига

Ек = кин. энергии центра масс и Эк вращ. тела вокруг центра масс

$$\boxed{K=K_{ц.м}+K_{вр.отн.ц.м}} \qquad K=K_{ц.м}+\frac{Jw^2}{2}\Big|_{отн.ц.м.}$$

2) Элемент. работа и мощность силы

Энергия передается за счёт работы. Если тело $Б$ дейст. на A с $\bar F_{AB}$ и если точка прилож. за время dt сместится на dr, то вместе с передачей импульса от B к A, тело B передаёт телу A энергию в виде элемен. работа $=$ $\boxed{\delta A=(\bar F_{AB}, d\bar r)}$ $\quad [A]=[Н\cdot м]=[Дж]$

3) Мощность

$$\boxed{N=\frac{A}{t}} \qquad \left[\frac{Дж}{с}\right]=[Вт]$$

Т (об изм. кинетич. энергии)

$$dK=\sum_i(\bar F_i, d\bar r_i)+\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}(\bar F_{ij}, d\bar r_i) \qquad где \; dr_i=v_i\,dt$$

Д разобьём тело на мал. части и заменим действ. малых частей др. на др силой.

$$\frac{dp_i}{dt}=\bar F_i+\sum_j \bar F_{ij} \;\Big|\cdot v_i \;\rightarrow\; \left(v_i\,\frac{dp_i}{dt}\right)=(\bar F_i\,\bar v_i)+\sum_j(\bar F_{ij}\,\bar v_i) \Leftrightarrow$$

$$\left(\bar v_i\,\frac{dp_i}{dt}\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\bar v_i, m_i\bar v_i)=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_i\bar v_i^2}{2}\right)=\frac{m_i}{2}\frac{d}{dt}(\bar v_i)^2=\frac{m_i}{\cancel{2}}\cancel{2}\bar v_i\,\frac{d\bar v_i}{dt}=\left(\bar v_i\,\frac{dp_i}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum_i\frac{m_i\bar v_i^2}{2}\right)=\sum_i(\bar v_i\,\bar F_i)+\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}(\bar v_i\,\bar F_{ij}) \;\Big|\cdot dt$$

$$\boxed{dK=\sum_i(\underbrace{d\bar r_i}_{v_i dt}\,\bar F_i)+\sum_{ij}(dr_i\,F_{ij})}$$

10

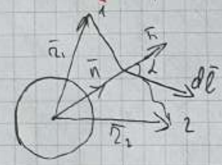
1) работа
- ↗ потенциальная (консервативная) – зависит от нач. и конеч. полож. точки
- ↘ непотенц. (диссипативные) – $F_{тр}$, сопротивл.

! это упругость и гравит.

$$\boxed{\delta A = -dU}$$

dU – потенц. энерг.

2) Вывод ф-лы потенциальной энергии в гравит. точки тяжести Земли:



$$\bar{F} = -G\frac{mM}{r^2}\bar{n}$$

$$\delta A = (\vec{F}\,d\vec{l}) = -G\frac{mM}{r^2}(\vec{n}\,d\vec{l}) = -G\frac{mM}{r^2}\,dl\cos\alpha =$$

$$= [\,dl\cos\alpha = dr\,] \rightarrow \delta A = -G\frac{mM}{r^2}dr$$

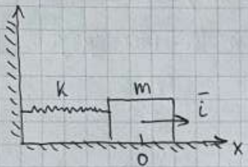
$$A_{12} = \int_1^2 \delta A = -GMm\int_1^2 \frac{dr}{r^2} = G\frac{mM}{r_2} - G\frac{mM}{r_1}$$

$$\Delta K_{12} = A_{12} \rightarrow \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = G\frac{mM}{r_2} - G\frac{mM}{r_1}$$

$$\frac{mv_1^2}{2} \underbrace{- G\frac{mM}{r_1}}_{U_2} = \frac{mv_2^2}{2} \underbrace{- G\frac{mM}{r_2}}_{U_1} \rightarrow \boxed{U = -G\frac{mM}{r}}$$

11

1) Потенц. энергия упругой деформации пружины



$$\bar{F} = -kx\cdot\bar{i} \rightarrow \delta A = (\bar{F}, d\bar{r}) = -kx\,dx$$

$$A_{12} = \int_1^2 -kx\,dx = -\frac{kx_2^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2}$$

$$\Delta K_{12} = A_{12} \rightarrow \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = -\frac{kx_2^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} \rightarrow$$

$$\frac{mV_1^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} = \frac{mV_2^2}{2} + \frac{kx_2^2}{2} \rightarrow \boxed{U = \frac{kx^2}{2}}$$

2) Связь между потенц. энергией и силой.

$$\delta A = -dU(r) \quad \begin{cases} \delta A = (\bar{F}\ d\bar{r}) = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \\ dU(r) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \end{cases}$$

$$\rightarrow F_x = -U'_x \quad F_y = -U'_y \quad F_z = -U'_z$$

$$\bar{F} = -U'_x\,\bar{i} - U'_y\,\bar{j} - U'_z\,\bar{k} = -\Big(\underbrace{\bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{z}\frac{\partial}{\partial z}}_{\text{оператор Набла}}\Big)U(r) = -\vec{\nabla}U(r) =$$

$$= -\operatorname{grad} U(r)$$

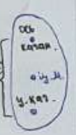
$$\boxed{\bar{F} = -\bar{\nabla}U}$$

ЧТД

12

1) Физ. маятник – ∀ тв. тело, подвеш. на гориз. оси, не проход. через центр масс, относит. которой тело может свободно колебаться.

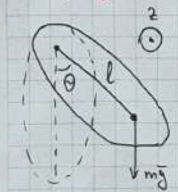
2) Ось качаний – за кот. подвесили физ. маятник.



3) Центр качаний – точка, наход. на расстоянии привед. длины от оси подвеса. Особенность в том, если подвесим за центр качания, T не изм.

4) Приведенная длина ($l_{пр}$) – длина матем. маятника, T колеб. кот. совпадает с T колеб. физ. маят.

5) Период колеб. физ. маятника.



$$J\varepsilon_z = \sum_i M_{iz}$$

$$M_z = -mgl\sin\theta \rightarrow J\varepsilon = -mgl\sin\theta \rightarrow [\,\varepsilon = \ddot{\theta}\,] \rightarrow$$

$$J\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \rightarrow [\sin\theta \sim \theta] \rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{mgl}{J}\theta = 0}$$ – диф. ур гармонич. колеб. с частот ω_0

$$\rightarrow \omega_0^2 = \frac{mgl}{J}\ ; \ \omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}} \rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}}$$

$$\theta(t) = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = B\sin(\omega_0 t + \varphi_0')$$

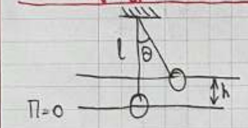
13

1) Гармонические колебания. - колебан. по закону sin / cos

2) Хар-ки: A - амплит., ω_0 - частота незатух. колеб, φ_0 - нач. фаза

$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ - период $\qquad \omega_0^2 = \frac{g}{l} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \to T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

3) Диф. ур. гармон. колеб.



$$E = \frac{mV^2}{2} + mgh = \frac{m(\dot\theta l)^2}{2} + mgl\underbrace{(1-\cos\theta)}_{2\sin^2\frac{\theta}{2} \approx \frac{\theta^2}{2}} \to$$

$$\to \boxed{\frac{ml^2\dot\theta^2}{2} + mgl\frac{\theta^2}{2} = E_0}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{ml^2\dot\theta^2}{2} + mgl\frac{\theta^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}E_0 \to \frac{ml^2}{\cancel{2}}\cancel{2}\dot\theta\cdot\ddot\theta + \frac{mgl}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\theta\cdot\dot\theta = 0 \;\Big|: ml^2\dot\theta$$

диф. ур.

$$\to \boxed{\ddot\theta + \frac{g}{l}\theta = 0} \to \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

$$T_м = T_ф \to 2\pi\sqrt{\frac{l_{пр}}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} \to \boxed{l_{пр} = \frac{J}{ml}}$$

4) реш. ДУ: $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ или $A\sin(\omega_0 t + \varphi_0')$

5) Энергия колеб. гармонич.

$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

$\dot\theta = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$

$$\to E = \frac{ml^2\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2} + \frac{mgl}{2}A^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

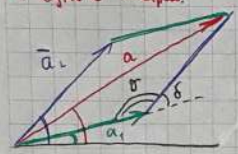
$$= \left[\omega_0^2 = \frac{g}{l}\right] = \frac{ml^2 A^2 g \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2l} + \frac{mgl}{2}A^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

1

$$= \frac{mglA^2}{2} \qquad \boxed{E \sim A^2}$$

14 Сложение гармонич. колебаний одного направ. один. и близких частот.

1) одного направ.



• φ_2 • φ_1 • φ

$\delta = \varphi_2 - \varphi_1$

$$
\begin{aligned}
&x_1(t) = a_1 \cos(wt + \varphi_1) \\
+\;&x_2(t) = a_2 \cos(wt + \varphi_2) \\
\hline
&x(t) = a \cos(wt + \varphi)
\end{aligned}
$$

$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2$; $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$; $\gamma = \pi - \delta$

$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos\delta =$

$= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_1 \sin\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_2}{a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2}$$

2) Близких частот.

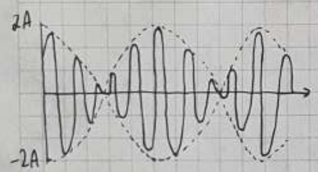
$w_1 \quad w_2 \quad \dfrac{|w_1 - w_2|}{w_1} \cdot 100\% \approx 5-6\%$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\left[\cos(w_1 t) + \cos(w_2 t)\right] = 2A \cos\left(\frac{w_1 + w_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{w_1 - w_2}{2} t\right)$$

$w_{cp} = \dfrac{w_1 + w_2}{2} \qquad w_M = \dfrac{w_1 - w_2}{2}$ – частота модуляции

$\rightarrow x(t) = 2A \cos(w_{cp} t) \cos(w_M t)$

$x(t) = A_M(t) \cos(w_{cp} t)$ где $A_M(t) = 2A \cos(w_M t)$



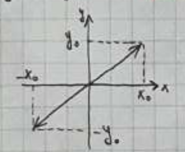
15 Слож. взаимоперпед. колеб. $x(t) = x_0 \cos(w_0 t)$ $y(t) = y_0 \cos(w_0 t + \delta)$

1) $\delta = 0$ – разность фаз $= 0$

$x(t) = x_0 \cos(w_0 t)$

$y(t) = y_0 \cos(w_0 t)$

$\dfrac{x}{y} = \dfrac{x_0}{y_0} \rightarrow \boxed{y = \dfrac{y_0}{x_0} x}$

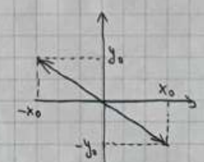


2) $\delta = \pi$

$x(t) = x_0 \cos(w_0 t)$

$y(t) = -y_0 \cos(w_0 t)$

$\dfrac{x}{y} = -\dfrac{x_0}{y_0} \rightarrow \boxed{y = -\dfrac{y_0}{x_0} x}$



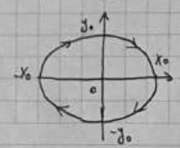
3) $\delta = \dfrac{\pi}{2}$

$x(t) = x_0 \cos(w_0 t)$

$y(t) = -y_0 \sin(w_0 t)$

$\rightarrow \cos(w_0 t) = \dfrac{x}{x_0} \qquad \sin(w_0 t) = \dfrac{-y}{y_0}$

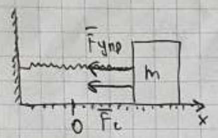
$\left(\dfrac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{y_0}\right)^2 = 1$



Фигуры Лиссажу: траектория, прочерчиваемая точкой, соверш. одновременно 2 мех. колебания в 2ух взаимоперпед. направ.

16 17

Затухающие колеб. ДУ колеб. и его реш.



$$\bar F_c = -b\bar v \rightarrow (\text{II ЗН}): \; ma = -kx - bv \rightarrow a + \underbrace{\frac{b}{m}}_{2\beta} v + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} x = 0$$

$$\ddot x + 2\beta\dot x + \omega_0^2 x = 0 \quad , \; x = Ce^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

1) $\beta < \omega_0$

$$\lambda_{12} = -\beta \pm \underbrace{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}_{\omega}$$

$$x(t) = e^{-\beta t}\left[C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right]$$

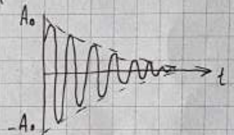
$\rightarrow$ ф-ла Эйлера: $e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi \rightarrow x(t) = e^{-\beta t}\left[C_1\cos\omega t + C_1 i\sin\omega t +\right.$

$$\left. + C_2\cos\omega t - C_2 i\sin\omega t\right] = e^{-\beta t}\left[(C_1+C_2)\cos\omega t + i(C_1 - C_2)\sin\omega t\right] =$$

$$= e^{-\beta t}\left[(C_1+C_2)\cos\omega t - i(C_2 - C_1)\sin\omega t\right] \rightarrow \left|\begin{array}{l} C_1 + C_2 = A_0\cos\varphi_0 \\ i(C_2 - C_1) = A_0\sin\varphi_0 \end{array}\right| \rightarrow$$

$$\rightarrow x(t) = e^{-\beta t}\left[A_0\cos\omega t\cos\varphi_0 - A_0\sin\omega t\sin\varphi_0\right] =$$

$$= A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0)$$ – ур-е затух. колеб.



17.2

18 хар-ки (билет 17):

$$\boxed{A(t) = A_0 e^{-\beta t}}$$

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\beta}} \quad \left\{A_0 e^{-\beta t} = \frac{A_0}{e} \rightarrow e^{-\beta t} = e^{-1}\right\}$$

$$\boxed{D} = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \boxed{e^{\beta T}}$$

логарифм. декрем.

$$\boxed{\lambda = \ln D = \beta T}$$

$$\boxed{Q = 2\pi\frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)}}$$ – добротность

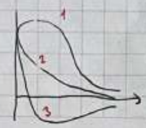
$$\boxed{N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T} = \frac{1}{\lambda}}$$ число колеб. за кот $A\downarrow$ в e раз

• $(\beta \ll \omega_0)$: $$Q = 2\pi\frac{A_0^2 e^{-2\beta t}}{A_0^2 e^{-2\beta t} - A_0^2 e^{-2\beta(t+T)}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}} \; ; \; e^{-2\beta T} = 1 - 2\beta T ....$$

$$\rightarrow Q = \frac{2\pi}{1 - 1 + 2\beta T} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\lambda} = \boxed{\pi \cdot N_e}$$

• $\beta = \omega_0 \rightarrow T \rightarrow \infty \rightarrow$ колеб исчезают.

• $\beta > \omega_0 \rightarrow (x(t) = e^{-\beta t}(C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t})$



1 $V_0 > 0$
2 $V_0 \leq 0$
3 $V_0 \ll 0$

19 Вынужденные колеб. ДУ, реш, анализ.

$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t$ — ДУ вынужд. колеб.

$x(t) = A e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0) + x_0\cos(\omega t + \varphi)$ — реш. 1-ого уравне

но через некот. время $t \to 0 \Rightarrow \boxed{x(t) = x_0\cos(\omega t + \varphi)}$

$\dot{x} = -x_0 \sin(\omega t + \varphi)\,\omega \qquad \ddot{x} = -x_0\cos(\omega t + \varphi)\,\omega^2$

$\to -x_0\cos(\omega t+\varphi)\omega^2 + 2\beta x_0 \sin(\omega t+\varphi)\omega + \omega_0^2 x_0\cos(\omega t+\varphi) = f_0\cos\omega t$

$x_0\cos(\omega t+\varphi)(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\beta x_0 \sin(\omega t+\varphi)\omega = f_0\cos\omega t$

$x_0(\omega_0^2-\omega^2)\cos\omega t\cos\varphi - x_0(\omega_0^2-\omega^2)\sin\omega t\sin\varphi - 2\beta x_0\omega\sin\omega t\cos\varphi -$

$- 2\beta x_0\omega\cos\omega t\sin\varphi = f_0\cos\omega t$

$[x_0(\omega_0^2-\omega^2)\cos\varphi - 2\beta x_0\omega\sin\varphi]\cos\omega t - [x_0(\omega_0^2-\omega^2)\sin\varphi + 2\beta x_0\omega\cos\varphi]\cdot$

$\cdot \sin\omega t = f_0\cos\omega t$

$$\begin{cases} x_0[(\omega_0^2-\omega^2)\cos\varphi - 2\beta\omega\sin\varphi] = f_0 \\ (\omega_0^2-\omega^2)\sin\varphi + 2\beta\omega\cos\varphi = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = \dfrac{f_0}{(\omega_0^2-\omega^2)\cos\varphi - 2\beta\omega\sin\varphi} \\ \operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \end{cases}$$

$$\left\{\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}\right\} \to \cos\varphi = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = [\text{замена}] = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{z}$$

$$\left\{\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}\right\} \to \sin\varphi = \frac{-2\beta\omega}{z} \to x_0 = \frac{f_0}{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{z} + \frac{4\beta^2\omega^2}{z}} = \frac{f_0 z}{z^2} =$$

$$= \frac{f_0}{z} \to \text{подставим } z: \quad \boxed{x_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}}$$ амплитуда вынужд. колеб.

Анализ:

1) $\omega \ll \omega_0$, $z \simeq \omega_0^2$, $\begin{matrix}\sin\varphi = 0 \\ \cos\varphi \to 1\end{matrix} \to \varphi = 0$; $x_0 = \dfrac{f_0}{\omega_0^2} = \dfrac{f_0 m}{k} = \dfrac{F_0}{k} = x_{ст}$ — стат. реш.

2) $\omega \approx \omega_0 \to \begin{matrix}\sin\varphi \to -1 \\ \cos\varphi \to 0\end{matrix} \to \varphi = -\frac{\pi}{2}$

$\dfrac{dz}{d\omega} = 0 \to -4(\omega_0^2-\omega^2)\omega + 8\beta^2\omega = 0 \to \omega_0^2 - 2\beta^2 = \omega^2 \to \boxed{\omega_р = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$

резонанс. частота.

3) $\omega \gg \omega_0$, $z \to \omega^2$; $\begin{matrix}\sin\varphi \to 0 \\ \cos\varphi \to -1\end{matrix} \to \varphi \to -\pi$; $x_0 = \dfrac{f_0}{\omega^2}$

20

1) Механич. волна — распространение возмущ. в упр. среде.

Упругая среда — при внеш. воздействии деформируется, при прекращении воздействия деформац. исчезает. Среды обладают упр. по объему и форме.

2) Продольные — колеб. малых частиц вдоль распростр. волны

Поперечные — $\perp$ распростр. волны

3) Ур-е плоской волны

$$\boxed{\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)}$$ ур-е плоской волны

$$\boxed{\xi(x,t) = A\cos\left(\omega t \mp \frac{\omega}{v}x + \varphi_0\right)}$$ урав.-е волны, распрост. в $\ominus$ направ. Ox; $\oplus$ — в отриц.

$$\boxed{\xi(\bar r, t) = \frac{A_0}{r}\cos(\omega t - (\bar k \bar r) + \varphi_0)}$$ — сферич. волна.

$\bar k$ — волновой век-р; $|\bar k| = k$ — волновое число $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ — длина волны

$\lambda = vT \to k = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v} \to \boxed{v = \frac{\omega}{k}}$ фазовая скор.

5) Диф. волн. ур-е.

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t \mp kx + \varphi_0) = f\left(t \mp \frac{x}{v}\right), \quad \lambda = t \mp \frac{x}{v} \to \xi = f(\lambda)$$

$$\left.\begin{aligned} \xi'_t &= \frac{d\xi}{d\lambda}\cdot\lambda'_t = \frac{d\xi}{d\lambda} \\ \xi'_x &= \frac{d\xi}{d\lambda}\cdot\lambda'_x = \frac{d\xi}{d\lambda}\left(\mp\frac{1}{v}\right)\end{aligned}\right\} \quad \boxed{\xi'_x = \mp\frac{1}{v}\xi'_t}$$

волновое ур-е 1 пор.

$$\left.\begin{aligned} \xi''_{tt} &= \frac{d^2\xi}{dt^2}\cdot\lambda'_t = \frac{d^2\xi}{dt^2} \\ \xi''_{xx} &= \left(\mp\frac{1}{v}\right)\frac{d^2\xi}{d\lambda^2}\cdot\lambda'_x = \frac{1}{v^2}\frac{d^2\xi}{dt^2}\end{aligned}\right\} \quad \boxed{\xi''_{xx} = \frac{1}{v^2}\xi''_{tt}}$$

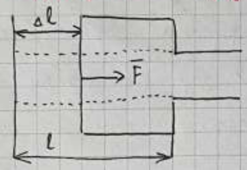
волн. ур 2 пор.

$$\underbrace{\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}}_{\Delta \text{ (опер. Лапласа)}} = \frac{1}{v^2}\xi''_{tt}$$

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} \to \boxed{\nabla^2\xi = \frac{1}{v^2}\xi''_{tt}}$$

21

1) Распространение продольной волны в тв. теле.



$\bar F$ – пост. сила

$u = \frac{\Delta l}{t}$ – скорость малых частиц

$V = \frac{l}{t}$ – фазовая скорость

$M = \rho\Delta V = \rho S l = \rho S V t$ – масса стержня

Импульс силы: $Ft = Mu$, $F = \rho S V u \to$ по зак. Гука $F = \sigma S$, σ – напряж.,

$u\rho \cancel{S} V = \sigma \cancel{S} \to \sigma = \rho V u$, т.к. $\sigma = E\frac{\Delta l}{l} \to E\frac{\cancel{u}}{V} = \rho V \cancel{u} \to V^2 = \frac{E}{\rho}$

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}}$$ скорость распрост. продольной волны в тв. теле

2) Энергия волны.

$A = F\Delta l = \rho S V u \cdot ut = \rho S V u^2 t = \rho u^2 \Delta V$

$K = \frac{Mu^2}{2} = \frac{\rho S V t u^2}{2} = \frac{\rho u^2}{2}\Delta V$

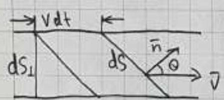
$\Pi = \frac{K\Delta l^2}{2} = \left[F = \sigma S = E\frac{\Delta l}{l} S = \frac{ES}{l}\Delta l = K\Delta l \right] = \frac{ES}{l}\frac{\Delta l^2}{2} =$

$= \frac{\rho}{2}\underbrace{\frac{E}{\rho}}_{V^2}\frac{S\Delta l^2 \cdot l}{l^2} = \frac{\rho \cancel{V^2} S l \Delta l^2}{2\cancel{V^2} t^2} = \frac{\rho \overbrace{S l}^{\Delta V} u^2 \cancel{t^2}}{2\cancel{t^2}} = \frac{\rho u^2}{2}\Delta V$

$$\boxed{E_{полн} = K + \Pi = \rho u^2 \Delta V}$$

3) Вектор Умова

$\Phi_S = \frac{dE}{dt}$ – поток волны



$d\bar S = dS \cdot \bar n$, $dE = w\, dS_\perp \cdot V dt = wV dt \cdot \cos\theta \cdot dS =$

$= w\, dt\, (d\bar S, \bar V)$; $\quad j = \frac{dE}{dS_\perp dt} = w \cdot V$

$$\boxed{\bar j = w \cdot \bar V}$$ вектор Умова

(22)

1) Стоячие волны — явление интерференции волн, распрод. в противополож. направлениях

Мех. волны явл когерентными если один. частота.

отлич. от бег.
1. $A_б = 0$ $A_{ст} = 2A_б \cos kx \neq const$
2. $\lambda_{ст} = \frac{\lambda_б}{2}$
3. бег. перен. эн., стоят. нет

2) Ур-е ст. волны.

$$\left.\begin{aligned} \xi_1(x,t) &= A_0 \cos(\omega t - kx) \\ \xi_2(x,t) &= A_0 \cos(\omega t + kx) \end{aligned}\right\} \xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A_0 \cos kx \cos \omega t$$ ур-е ст. волны

$A = 2A_0 \cos kx$ — амплитуда.

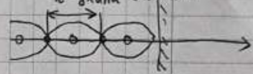
$\cos kx = 0$ — усл. узлов

$kx = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n = 0, 1 \ldots$

$|\cos kx| = 1$ — усл. пучностей

$kx = \pi n$, $n = 0, 1 \ldots$

λ — длина ст. волны



$u = \xi'_t = -2A\omega \cos kx \sin \omega t$ — скорость малых частей струны

$\sin \omega t = \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$

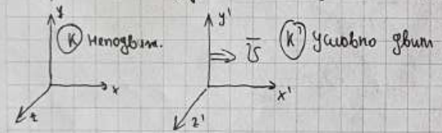
$\varepsilon = \xi'_x = -2Ak \sin kx \cos \omega t$ — деформац. малых частей струн.

4) Ст. волна не переносит энергию. Когда $u = 0$ ⇒ вся E — энер. упр. деформации и наоборот, когда $E_{упр.\ деформ}$ отсутст., E — кинет. энер. струны → энергия переходит $\circ \leftrightarrow \bullet$ ⇒ 0.

(23) Преобраз. Галилея

1) — в ИСО расстояние между 2-мя точками один.

— промеж. времени между событ. один.   — if какая-то велич. не зависит от выбора СО — инвариантной



$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v'_x = v_x - v \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases} \rightarrow \boxed{\bar{a}' = \bar{a} = inv}$$

Вывод:

- II ЗН имеет один и тот же вид во всех ИСО (inv) ⇒

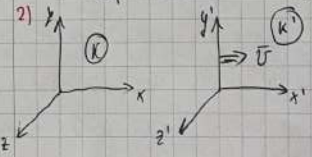
⇒ Мех. принцип относит.: ни какими мех. экспер. нельзя обнаружить движ. или покоить С.О.

24

1) Постулаты СТО. 2) Преобраз. Лоренца

1) Все физ. законы протекают один. во всех ИСО

2) Скор. света в пустоте один. во всех ИСО

2) 

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \frac{xV}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x' + vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t' + \frac{x'V}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \quad \beta = \frac{V}{c}$$

3) **Интервал** — интервал между 2-мя событиями.

Рассм. вспышку света в момент 1, 2 в точках (x_1, y_1, z_1) $(x_2 y_2 z_2)$, S_{12} – интерв.

K: $S_{12}^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$, где $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta z = z_2 - z_1$

K' $S'^2_{12} = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2$

Д:

$$c^2(t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 = \frac{c^2\left(t_2 - \frac{x_2V}{c^2} - t_1 + \frac{x_1V}{c^2}\right)^2}{1-\beta^2} - \frac{(x_2 - vt_2 - x_1 + vt_1)^2}{1-\beta^2} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} t_{21} = t_2 - t_1 \\ x_{21} = x_2 - x_1 \end{array} \right\} = \frac{c^2}{1-\beta^2}\left(t_{21} - \frac{V}{c^2}x_{21}\right)^2 - \frac{(x_{21} - vt_{21})^2}{1-\beta^2} =$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2}\left[c^2t_{21}^2 - 2V\cancel{x_{21}}t_{21} + \frac{v^2x_{21}^2}{c^2} - x_{21}^2 + 2\cancel{x_{21}}vt_{21} - v^2t_{21}^2\right] =$$

$$= \frac{1}{1-\beta^2}\left[c^2t_{21}^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - x_{21}^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right] = c^2t_{21}^2 - x_{21}^2$$

$$\rightarrow \boxed{S_{12} = S_{12}'}$$

Сокращ. длины.

K x_1 x_2 K' x_1' x_2'

$$l_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}} \rightarrow \boxed{l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

25

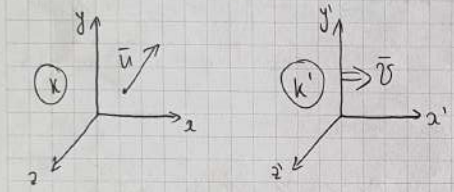
Замедление времени.

$$\tau_0 = t_2' - t_1' = \frac{t_2 - \frac{x_2 V}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{t_1 - \frac{x_1 V}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t_2 - t_1 - \frac{V}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} =$$

$$= \frac{(t_2 - t_1)\left[1 - \frac{V}{c^2}\overbrace{\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}^{v}\right]}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\overbrace{(t_2 - t_1)}^{\tau}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \boxed{\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

Преобраз. комп. скорости:

(k') движ. относит (k) со скор. v. В сис-ме (k) движ. со скоростью u.



(k) $u_x = \frac{dx}{dt}$ $\quad u_y = \frac{dy}{dt}$ $\quad u_z = \frac{dz}{dt}$

(k') $u_x' = \frac{dx'}{dt'}$ $\quad u_y' = \frac{dy'}{dt'}$ $\quad u_z' = \frac{dz'}{dt'}$

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - v\,dt}{\sqrt{1-\beta^2}} : \frac{dt - \frac{V dx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{dx - v\,dt}{dt - \frac{v\,dx}{c^2}} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v\,dx}{c^2 dt}} =$$

$$= \boxed{\frac{u_x - V}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}} \; ; \quad \boxed{u_y' = \frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}}$$

Вывод:

$$u_y' = \frac{dy}{dt'} = \frac{dy\sqrt{1-\beta^2}}{dt - \frac{V dx}{c^2}} = \frac{dy}{dt}\,\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{V dx}{c^2 dt}}$$

26

2) $\boxed{E = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}}$ полная энергия частицы

m_0 – масса покоя частицы

m – масса движ. (релятивистская масса)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

3) $\boxed{E_0 = m_0 c^2}$ Энергия покоя

4) $\boxed{p = \dfrac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}}$ импульс

$$\rightarrow p^2 = \frac{m_0^2 c^2 - m_0^2 c^2 + m_0^2 c^2}{1-\beta^2} = \frac{m_0^2 c^2 - m_0^2 c^2 (1-\beta^2)}{1-\beta^2} = \frac{m_0^2 c^2}{1-\beta^2} - m_0^2 c^2 \Big| \cdot c^2$$

$$p^2 c^2 = \underbrace{\frac{m_0^2 c^4}{1-\beta^2}}_{E^2} - m_0^2 c^4 \rightarrow \boxed{E^2 - p^2 c^2 = m_0 c^4 = \mathrm{inv}} \quad (8)$$

связь полной энерг. и импульсом

5) $\boxed{K = E - E_0 = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0 c^2}$ кинетическая энергия

$$(8): (K + E_0)^2 - c^2 p^2 = m_0^2 c^4 \rightarrow K^2 + 2K m_0 c^2 + \cancel{m_0^2 c^4} - c^2 p^2 = \cancel{m_0^2 c^4}$$

$$\boxed{p^2 c^2 = K^2 + 2 m_0 c^2 K}$$

связь кинетич. энерг. и импульсом

27

1) Термодин. сис-ма (ТС)

- простые / сложные
- открытые / закрытые — по взаимод. с др.
- однофаз. (газообр.) / двухфаз. (жидкие) / трехфаз. (тверд) — по фазному сост.

<u>Простые</u> – состоят из 1-ого хим. стабильного в-ва [вода в стакане]

<u>Открытые</u> – if может обмениваться с окр. массами в-ва, вход. в сис-му [вода и водяной пар]

2) Равновесное состояние простой тс.

Разобьём сис-му на малые части, кот. непрерывно примыкают др к др. кажд. характериз. $p_i \; v_i \; T_i$. Равновесное сост. простой ТС характ. усл:

1) $v_1 = v_2 \ldots = v_i = 0$ 2) $p_1 = \ldots = p_i = p$ 3) $T_1 = \ldots = T_i = T$

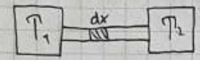
Внут. равновесие – ✓ 3 усл.

Внеш. равнов. – давление сис-мы = давлению окруж, $T = T_{окр}$

$\boxed{PV = \dfrac{m}{\mu} RT}$ (1) = ур-е простой ТС

Стационарные сост. – не меняются с течением времени, но не явл. равновес.

Пр.



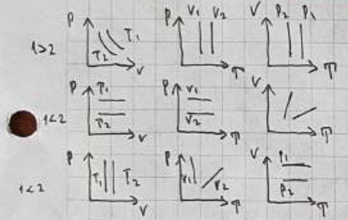
$T_1 = const$
$T_2 = const$

Тепло передаётся по стержню. мы не можем назвать это сост. равнов., но при малом промеж. эл-те будет своя T, но нет равновесия между малыми частями.

сис-ма неравновесна – принцип локального равновесия, $\sum$ малых част. равновесных сост. но нет между ними.

3) Ур-е Менделеева – Клапейрона

$$\boxed{pV = \frac{m}{\mu} RT}$$



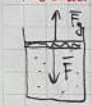
Бойля – Мариотта изотермич. $T = const$ $pV = const$

Гей – Люссака изобарный $p = const$ $V/T = const$

Шарля изохорный $V = const$ $p/T = const$

5) Идеальный газ – $T_{конденсации} \gg T_{при\ кот.\ наблюдаем}$.

Работа газа:



$\delta A = F_g\, dh = pS\, dh = p\, dV$

Р.Т.
Первое начало терм.
второе начало
Карно цикл
Мех эквив.
Экспер. Джоуля

29 Т[2] Карно – Клаузиуса. $k = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$

3) В продолжении этой теоремы Томсон доказал:

$$\boxed{\eta = \frac{A}{Q_н} \cdot 100\%}$$

КПД тепл. маш.

; для цикла Карно: $A = Q_н - Q_x \rightarrow$

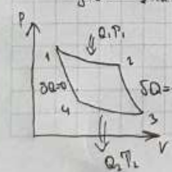
$$\boxed{\eta = \frac{Q_н - Q_x}{Q_н} = 1 - \frac{Q_x}{Q_н} = 1 - \frac{T_x}{T_н}}$$

4 $\boxed{T1}$ для квазиравновес. цикл. процесса:

$$\oint(\delta A' + \delta Q) = 0$$

Д

- для цикла Карно

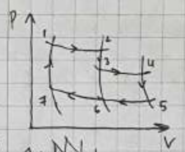


$\oint \delta A' = A' = -A$; $\oint \delta Q = \int_1^2 \delta Q + \int_2^3 \cancel{\delta Q}^{\,0} + \int_3^4 \delta Q + \int_4^1 \cancel{\delta Q}^{\,0} = Q_1 - Q_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \oint(\delta A' + \delta Q) = -A + Q_1 - Q_2 \rightarrow$ [по теор. о мех. эквив. тепла] $\rightarrow$

$A = Q_1 - Q_2 \rightarrow \oint(\delta A' + \delta Q) = 0$ //

• 2ух циклов Карно



$$\oint \delta A' = -A_1 - A_2$$

$$\oint \delta Q = Q_{12} + Q_{34} - Q_{56} - Q_{67}$$

$$\left.\begin{matrix} \oint \delta A' = -A_1 - A_2 \\ \oint \delta Q = Q_{12} + Q_{34} - Q_{56} - Q_{67} \end{matrix}\right\} \oint (\delta A' + \delta Q) = 0$$

• на ∞ циклов:

$$\oint (\delta A' + \delta Q) = \sum_{k=1}^{n} \oint (\delta A' + \delta Q) = 0$$

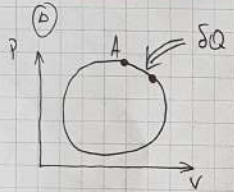
при $n \to \infty$ Ми доказали теор.

ЧТО

30

Т2 (квазиравновесного цикл. процесса)

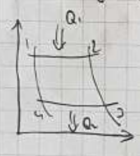
$$\boxed{\oint \frac{\delta Q}{T} = 0}$$



δQ – тепло, получ. сис-мой на беск. малом эл-те этого процесса

T – темп. сис-ма на этом участке процесса

• Для цикла Карно.



$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + \int_3^4 \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T_1} \underbrace{\int_1^2 \delta Q}_{Q_1} + \frac{1}{T_2} \underbrace{\int_3^4 \delta Q}_{-Q_2} = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} =$$

$$= \frac{Q_1}{T_2} \Big(\underbrace{\frac{T_2}{T_1} - \frac{Q_2}{Q_1}}_{=0} \Big) = 0$$

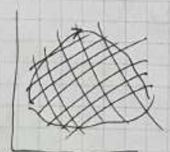
• Для 2ух:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + \int_3^4 \frac{\delta Q}{T} + \int_5^6 \frac{\delta Q}{T} + \int_6^7 \frac{\delta Q}{T} =$$

$$= \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} - \frac{Q_4}{T_4} = \frac{Q_1}{T_4} \left(\frac{T_4}{T_1} - \frac{Q_4}{Q_1} \right) +$$

$$+ \frac{Q_2}{T_3} \left(\frac{T_3}{T_2} - \frac{Q_3}{Q_2} \right) = 0$$

• На ∞

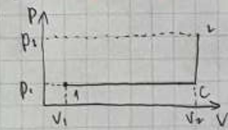


$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta Q}{T} = 0$$

Доказали при $n \to \infty$

ЧТО

31 Внут. энергия идеал. газа.



$$U_2 - U_1 = \int_1^2 (\delta A' + \delta Q) = -p_1(V_2 - V_1) + \nu c_p \int_1^c dT + \nu c_v \int_c^2 dT =$$

$$= -p_1 V_2 + p_1 V_1 + \nu c_p (T_c - T_1) + \nu c_v (T_2 - T_c) =$$

$$= \underbrace{-p_1 V_2}_{\nu R T_c} + \underbrace{p_1 V_1}_{\nu R T_1} + \nu c_p T_c - \nu c_p T_1 + \nu c_v T - \nu c_v T_c = \nu T_c \underbrace{(-R + c_p - c_v)}_{0} + \nu T_1 \underbrace{(R - c_p)}_{-c_v} +$$

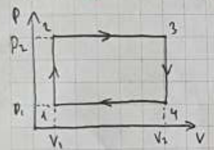
$$+ \nu c_v T_2 = \nu c_v (T_2 - T_1) \to \boxed{U = \nu c_v \Delta T}$$

ур-е Майера

т.к. $c_v = \frac{i R}{2} \to U = \frac{i}{2} R \nu T$ – для МКТ

! Внут. энер. газа зависит тол от темп.

32 Ур-е Майера для идеального газа.



$$\oint (\delta A' + \delta Q) = 0$$

$$\oint \delta Q = \int_1^2 \delta Q + \int_2^3 \delta Q + \int_3^4 \delta Q + \int_4^1 \delta Q = \nu c_v \int_1^2 dT + \nu c_p \int_2^3 dT +$$

$$+ \nu c_v \int_3^4 dT + \nu c_p \int_4^1 dT =$$

$$= \nu c_v (T_2 - T_1) + \nu c_p (T_3 - T_2) + \nu c_v (T_4 - T_3) + \nu c_p (T_1 - T_4) = \nu (c_p - c_v)(T_3 - T_2 + T_1 - T_4)$$

$$\oint \delta A' = -(p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = -p_2 V_2 + p_2 V_1 + p_1 V_2 - p_1 V_1 =$$

$$= -\nu R T_3 + \nu R T_2 + \nu R T_4 - \nu R T_1 = -\nu R (T_3 - T_2 - T_4 + T_1)$$

$$\to \oint (\delta A' + \delta Q) = \nu (c_p - c_v - R)(T_3 - T_2 - T_4 + T_1) = 0$$

$$c_p - c_v - R = 0 \qquad \boxed{c_p = c_v + R}$$

33 $\boxed{T3}$ о $\exists$ внут. энергии

$$\boxed{dU = \delta A' + \delta Q}$$

$$U_B^{(1)} = U_A + \int_{L_1} (\delta A' + \delta Q) \quad ; \quad U_B^{(2)} = U_A + \int_{L_2} (\delta A' + \delta Q)$$

Д-ть: $U_B^{(1)} = U_B^{(2)}$

по $\boxed{T1}$: $\oint (\delta A' + \delta Q) = 0 \to \int_{L_1} (\delta A' + \delta Q) \pm \int_{\tilde{L}_2} (\delta A' + \delta Q) = 0$ $\{\tilde{L}_2$ – от B к A$\}$

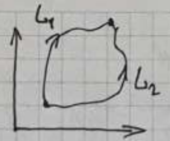
$$\to \int_{L_1} (\delta A' + \delta Q) - \int_{L_2} (\delta A' + \delta Q) = 0 \to U_B^{(1)} = U_B^{(2)}$$

$\to U_B = U_A + \int (\delta A' + \delta Q)$ if A и B близки: $\delta A' + \delta Q = dU$ или $\delta U + \delta A = \delta Q$

Эта теор может явл. формулировкой 1-ого начала термодин.

34 T4 (о ∃ энтропии)

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$



Д:

$$S_B^{(1)} = S_A + \int\limits_{L_1} \frac{\delta Q}{T} \qquad S_B^{(2)} = S_A + \int\limits_{L_2} \frac{\delta Q}{T}$$

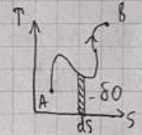
д-ть: $S_B^{(1)} = S_B^{(2)}$

по T2: $\oint \frac{\delta Q}{T} = 0 \to \int\limits_{L_1} \frac{\delta Q}{T} + \int\limits_{\tilde{L}_2} \frac{\delta Q}{T} = 0 \to \int\limits_{L_1} \frac{\delta Q}{T} - \int\limits_{L_2} \frac{\delta Q}{T} = 0$

$$\int\limits_{L_1} \frac{\delta Q}{T} = \int\limits_{L_2} \frac{\delta Q}{T} \to S_B^{(1)} = S_B^{(2)}$$

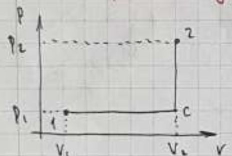
if A и B близки, то $dS = \frac{\delta Q}{T}$ //

Данная теор мб явл. 2-м началом термодин.



35

Энтропия идеального газа.



$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^c \frac{\delta Q}{T} + \int_c^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^c \frac{\nu c_p\, dT}{T} + \int_c^2 \frac{\nu c_v\, dT}{T} =$$

$$= \nu c_p \ln \frac{T_c}{T_1} + \nu c_v \ln \frac{T_2}{T_c}$$

$$\frac{T_c}{T_1} = \frac{V_2}{V_1} \qquad \frac{T_2}{T_c} = \frac{p_2}{p_1} \to \boxed{S_2 - S_1 = \nu c_p \ln \frac{V_2}{V_1} + \nu c_v \ln \frac{p_2}{p_1}}$$

36

Адиабатный процесс – процесс без теплообмена сис-мы с окр. средой

2) Ур-е Пуассона для адиабатного процесса:

$\delta Q = 0 \to$ ~~...~~ $\delta S = 0$

$\to \nu c_p \ln \frac{V_2}{V_1} + \nu c_v \ln \frac{p_2}{p_1} = 0 \to \frac{c_p}{c_v} \ln \frac{V_2}{V_1} + \ln \frac{p_2}{p_1} = 0 \to \left[\frac{c_p}{c_v} = \gamma \right] \to$

показат. адиаб.

$\ln \frac{V_2^\gamma}{V_1^\gamma} + \ln \frac{p_2}{p_1} = 0 \to \ln \frac{p_2 V_2^\gamma}{p_1 V_1^\gamma} = 0 \to p_2 V_2^\gamma = p_1 V_1^\gamma \to \boxed{pV^\gamma = \text{const}}$

Политропический процесс – процесс с постоянной теплоёмкостью

$pV^n = \text{const}$, n – показатель политропы

$n = 1$	$n = 0$	$n = \gamma$	$n = \pm\infty$ $[p^{\frac{1}{n}} V \to V = \text{const}]$
изотерма	изобара	адиабата	изохора

$\boxed{37}$ НВ

1) **Равновесное состояние** состоит из множ-ва равновесных состояний её малых частей, но нет равновесия между малыми частями.

2) **Виртуальные перемещения** – перемещ. на ∞ малое расстояние

3) **Принцип Гиббса для нахожд. усл. равновесия.**

Для того, чтобы изолированная сис-ма находилась в равновесии $\Leftrightarrow$ чтобы для $\forall$ виртуального перемещения, удовлетв. усл. связи:

$$\sum_i \delta V_i = 0 \; ; \; \sum_i \delta S_i = 0 \rightarrow \delta U = 0$$

Пусть у нас есть двухфазная сис-ма – жидкость и пар в цилиндре под поршнем.

У пара: T m. жидкости: T', m'.

$U = mu + m'u' \rightarrow \delta U = \delta m u + m\delta u + dm' u' + m'\delta u' = [\delta m = -\delta m'] =$

$= \delta m (u - u') + m\delta u + m'\delta u'$; $\delta V = 0$ $\delta S = 0$

, где: s, s' – удельная энтропия пара и воды

v, v' – объём пара и воды

$V = mv + m'v'$, $S = ms + m's'$

$\delta V = \delta m v + m\delta v + \delta m' v' + m'\delta v' = \delta m (v - v') + m\delta v + m'\delta v'$

$\delta S = \delta m s + m\delta s + \delta m' s' + m'\delta s' = \delta m (s - s') + m\delta s + m'\delta s'$

Чтобы найти условный extr, use метод Лагранжа.

1) $\boxed{\delta U + \beta \delta V - \alpha \delta S = 0}$, α и β – неопр. множ.

~~$dm(u - u') + m\delta u + m'\delta u' - \alpha \delta m s - \alpha m'\delta s$~~

$\delta m (u - u') + m\delta u + m'\delta u' - \alpha \delta m (s - s') - \alpha m\delta s - \alpha m'\delta s' +$

$+ \beta \delta m (v - v') + \beta m \delta v + \beta m'\delta v' = 0$

из $\boxed{TI}$: $\delta u = \delta A' + \delta Q$, где $\delta A' = -p dv$, $\delta Q = T\delta s$

$\delta u = T\delta s - p dv$, $du' = T'\delta s' - p' dv'$

$\delta m (u - u') + mT\delta s - mp dv + m'T'\delta s' - m'p' dv' - \alpha \delta m (s - s') - \alpha m\delta s - \alpha m'\delta s' +$

$+ \beta \delta m (v - v') + \beta m \delta v + \beta m'\delta v' = 0$

$\delta m [u - u' - \alpha (s - s') + \beta (v - v')] + \delta s\, m [T - \alpha] - m dv [p - \beta] +$

$+ m'\delta s' [T' - \alpha] - m'\delta v' [p' - \beta] = 0$ – должно быть для $\forall$ вариац.

$T' - \alpha = 0$, $T - \alpha = 0$ $\rightarrow \boxed{T = T'}$; $p - \beta = 0$, $p' - \beta = 0$ $\rightarrow \boxed{p = p'} \rightarrow u - u' - \alpha (s - s') + \beta (v - v') = 0 \rightarrow u - \alpha s + \beta v = u' - \alpha s' + \beta v'$

$\rightarrow \boxed{u - Ts + pv = const}$ хим. потенциал

38 Неравенство Клаузиуса для сис-мы в термостате

Пусть сис-ма неравновесна и находится в термостате при T_0.

Сис-ма может обмениваться теплом с окруж.

Разобьём сис-му на малые части, каждая из кот. характ.

S_i, V_i. $\Rightarrow$ Общая энтропия = сумме малых частей. Общ. объём

= сумма объёмов малых частей

δQ_{12} – тепло, кот. получает 1 от 2ого.

$$\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\delta Q_{12} \geq 0$$

$\boxed{TG} \rightarrow S = \sum_i S_i \rightarrow dS = \sum_i dS_i \quad ; \quad \delta S_i = \frac{\delta Q_i}{T_i}$

$$\delta Q_i = \delta Q_{i0} + \sum_j \delta Q_{ij}$$

подставим:

$$\longrightarrow dS_i = \frac{\delta Q_{i0}}{T_i} + \sum_j \frac{\delta Q_{ij}}{T_i}$$

$$\rightarrow dS = \sum_i \frac{\delta Q_{i0}}{T_i} + \underbrace{\sum_{ij} \frac{\delta Q_{ij}}{T_i}}_{(*)}$$

(*) $[i \rightleftarrows j]$

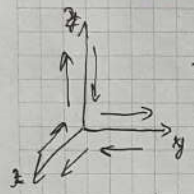
$$\sum_{\substack{ij \\ i<j}} \frac{\delta Q_{ij}}{T_i} + \sum_{\substack{ij \\ i<j}} \frac{\delta Q_{ji}}{T_j} = [\delta Q_{ij} = -\delta Q_{ji}] =$$

$$= \sum_{\substack{ij \\ i<j}} \frac{\delta Q_{ij}}{T_i} - \sum_{\substack{ij \\ i<j}} \frac{\delta Q_{ij}}{T_j} = \overbrace{\sum_{\substack{ij \\ i<j}} \left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_j}\right)\delta Q_{ij}}^{\geq 0}$$

$$\rightarrow dS \geq \sum_i \frac{\delta Q_{i0}}{T_i} \rightarrow \left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_0}\right)\delta Q_{i0} \geq 0$$

$$\rightarrow \frac{\delta Q_{i0}}{T_i} \geq \frac{\delta Q_{i0}}{T_0} \rightarrow dS \geq \sum \frac{\delta Q_{i0}}{T_0} = \frac{\delta Q_0}{T_0} \rightarrow \boxed{\delta S \geq \frac{\delta Q}{T_0}}$$

39 Осн. ур-е МКТ



N_i - число молекул имеющ. v_i скорости

т.к. молекулы движ. хаотич., будем считать, что они движ. по 3-ём взаимно ⊥ направ. => в 1-у сторону $\frac{1}{6}$ часть от всех

При столкновении со стенкой 1-а молекула передаёт $\underline{\Delta p_i = 2 m_0 v_i}$

За Δt: до стенки долетает $\underline{\Delta N_i = n_i \Delta V_i \frac{1}{6}}$, где $\Delta V_i = \Delta S v_i \Delta t$

$$\Rightarrow \Delta N_i = n_i \Delta S \Delta t v_i \frac{1}{6} \quad ; \quad \Delta P_i = \Delta N_i \cdot \Delta p_i = \frac{1}{3} n_i m_0 \Delta S \Delta t v_i^2$$

$$\Delta P = \sum_i \Delta P_i = \frac{1}{3} m_0 \Delta S \Delta t \underbrace{\sum_i n_i v_i^2}_{(*)}$$

(*)
$$\sum_i n_i v_i^2 = \frac{1}{V} \sum_i N_i v_i^2 = \frac{N}{V} v_{ср.кв}^2 = n \cdot v_{ср.кв.}^2$$

$$\Delta P = \frac{1}{3} m_0 \Delta S \Delta t \cdot n\, v_{ср.кв}^2$$

$$\Delta P = F \Delta t \qquad \boxed{p = \frac{F}{\Delta S} = \frac{1}{3} m_0 n v_{ср.кв.}^2}$$

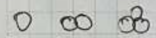
Основное ур-е МКТ

40 Т. Больцмана о равновесном распределении энергии по степ. свободы.

$$K_{пост} = \frac{m_0 v_{ср.кв.}^2}{2} \rightarrow v_{ср.кв}^2 = \frac{2K_{пост}}{m_0}$$

$$\left.\begin{aligned} &p = \frac{1}{3} m_0 n v_{ср.кв}^2 \rightarrow \underline{p = \frac{2}{3} n K_{пост}} \\ &pV = \nu RT \rightarrow p = \frac{m}{V\mu} RT = \frac{\rho}{\mu} RT = \frac{m_0 n}{m_0 N_A} R T = nKT \rightarrow \underline{p = nKT} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{2}{3} K_{пост} = KT$$

$$\Rightarrow K_{пост} = \frac{3}{2} KT \qquad \left\{ K_{пост} = \frac{m_0 v_x^2}{2} + \frac{m_0 v_y^2}{2} + \frac{m_0 v_z^2}{2} \right\} \Rightarrow$$ На каждую степень свободы приход. $\frac{1}{2} KT$



$i=3$ $\quad i=5 \quad i=3+3=6$

$$K_{полн} = K_{пост} + K_{вращ} = \frac{i}{2} KT$$

$$\left.\begin{aligned} &\underline{U = \nu C_V T} \\ &U = N \cdot K_п = N \cdot \frac{i}{2} KT = \frac{N}{N_A} \frac{i}{2} K N_A T = \underline{\frac{i}{2} \nu RT} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{C_V = \frac{i}{2} R \rightarrow C_p = \frac{i+2}{2} R} \quad \boxed{\gamma = \frac{i+2}{2}}$$

45 1) Длина свободного пробега

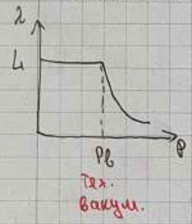
$$l = v_\Delta t$$

$$\Delta V = \pi d^2 l = \pi d^2 v_\Delta t \rightarrow \Delta N = n \Delta V = n \pi d^2 v_\Delta t$$

$$\lambda = \frac{l}{\Delta N} = \frac{1}{\pi n d^2} \rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n d^2}} \qquad \lambda \sim 0{,}1 \text{ мкм}$$

2) тех. вакум

Выкачиваем газ $\Rightarrow p\downarrow \rightarrow \lambda\uparrow$



Пр: $T = const$

$$p = nkT \rightarrow \lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} \rightarrow \lambda \sim \frac{1}{p}$$