Точки сочленения и блоки в связном графе

В этом разделе G — связный граф.

Определение

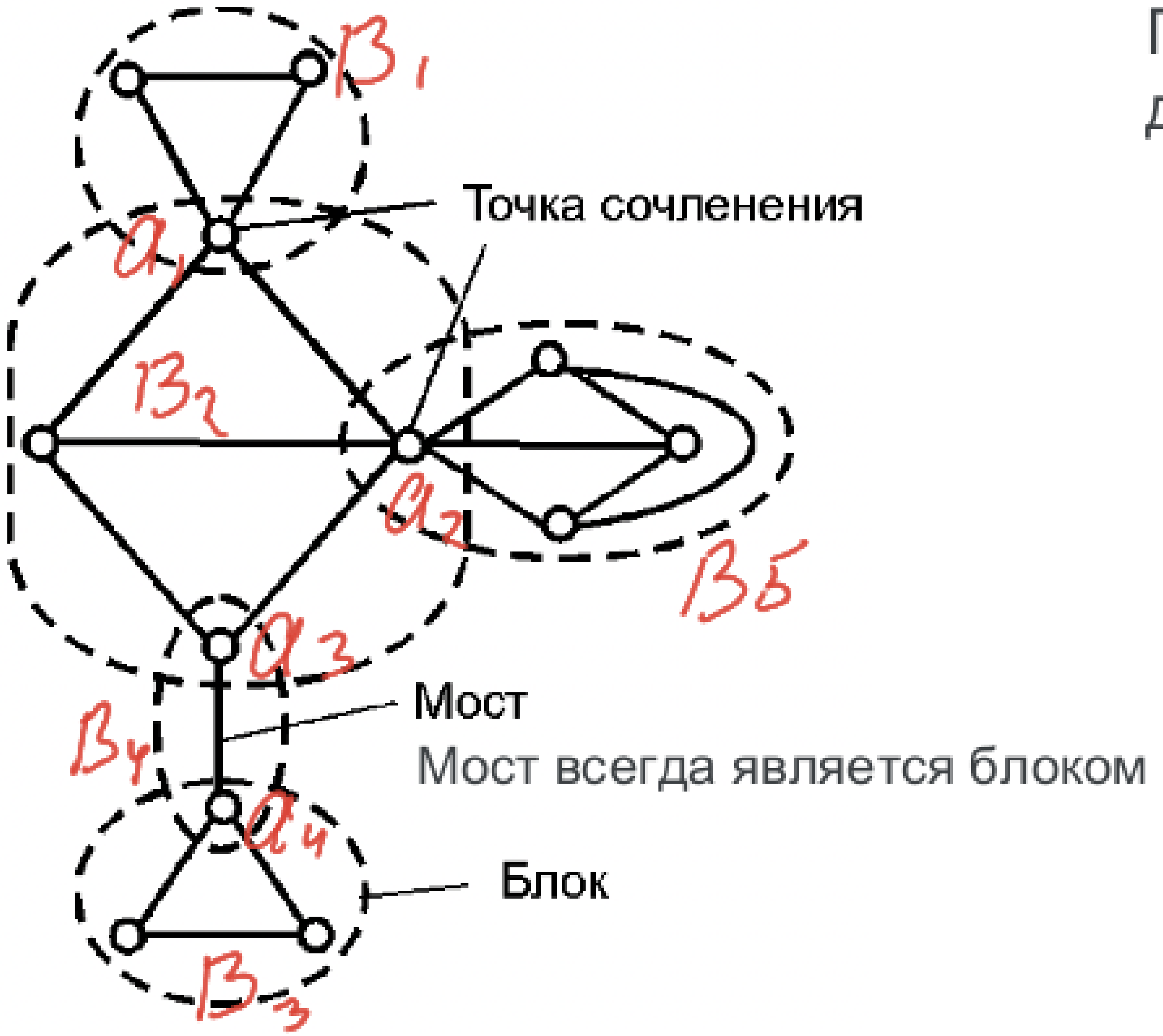
1) Вершина $a \in V(G)$ называется *точкой сочленения*, если граф $G - a$ несвязен.
2) *Блоком* называется любой максимальный по включению подграф графа G, не имеющий точек сочленения.

- В силу максимальности, блок графа G является индуцированным подграфом графа G на своем множестве вершин.
- Любой подграф без точек сочленения H графа G входит хотя бы в один блок (так как H можно дополнить до максимального подграфа без точек сочленения).

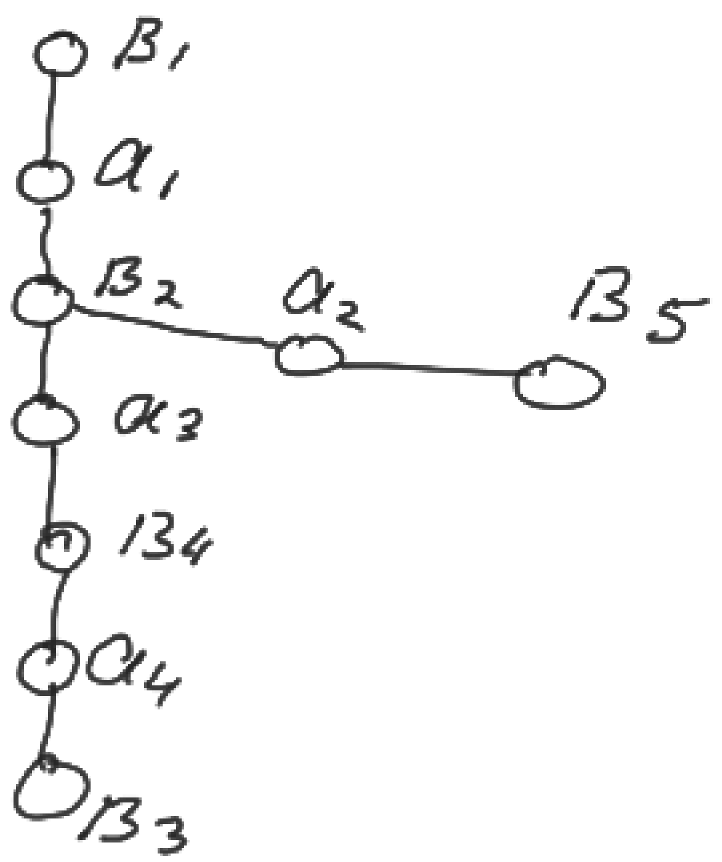
Определение

Блоки и *точки сочленения* несвязного графа — это блоки и точки сочленения его компонент.

- Далее мы будем рассматривать только связные графы.



Пример дерева блоков и точек сочленения для графа слева



Лемма 1

Пусть B_1 и B_2 — два разных блока графа G, причём $V(B_1) \cap V(B_2) \neq \varnothing$. Тогда $V(B_1) \cap V(B_2)$ состоит из точки сочленения a графа G, причем a — единственная точка сочленения, отделяющая B_1 от B_2.

Доказательство. • Пусть $|V(B_1) \cap V(B_2)| \geq 2$. Тогда для любой вершины $x \in V(B_1 \cup B_2)$ граф $B_1 \cup B_2 - x$ связен (см. рис. a). Следовательно, $B_1 \cup B_2$ содержится в блоке B графа G, а B_1 является собственным подграфом B, что противоречит максимальности B_1.

a b

- Далее пусть $V(B_1) \cap V(B_2) = \{a\}$. Так как a — общая вершина блоков B_1 и B_2, отделить B_1 от B_2 в графе G может только a.

a b

- Если a не отделяет B_1 от B_2 в графе G, то в $G - a$ есть $V(B_1)V(B_2)$-путь P (см. рис. b).
- Пусть $H = B_1 \cup B_2 \cup P$. Граф $H - x$ связен для любой вершины $x \in V(H)$. Поэтому H содержится в одном блоке B графа G, а блок B_1 — собственный подграф B, противоречие.
- Итак, a — единственная вершина, которая отделяет B_1 от B_2 в графе G. Следовательно, граф $G - a$ несвязен, то есть a — точка сочленения G. □

- По Лемме 1 любой подграф без точек сочленения H графа G с $v(H) > 1$ входит ровно в один блок. В частности, любое ребро графа входит ровно в один блок.
- Если у связного графа G хотя бы две вершины, то каждая его вершина смежна хотя бы с одной другой вершиной. Следовательно, любой блок графа G содержит хотя бы две вершины.

Определение

- Построим граф $B(G)$, вершины которого соответствуют всем точкам сочленения $a_1, \ldots, a_n$ графа G и всем его блокам $B_1, \ldots, B_m$ (мы будем обозначать эти вершины так же, как и блоки). Вершины a_i и B_j будут смежны, если $a_i \in V(B_j)$. Других рёбер в этом графе нет.
- Граф $B(G)$ называется *деревом блоков и точек сочленения* графа G.

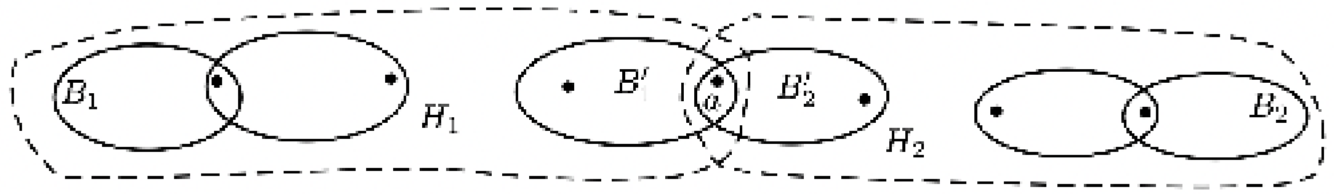
Лемма 2

Пусть B_1 и B_2 — два разных блока графа G, а P — путь между ними в графе $B(G)$. Тогда точки сочленения графа G, отделяющие B_1 от B_2 — это в точности те точки сочленения, что лежат на пути P. Остальные точки сочленения не разделяют даже объединение блоков пути P.

https://youtu.be/BSvj5IhVHgk?t=1196

Доказательство. • Пусть x — точка сочленения графа G, не лежащая на пути P, а H — объединение всех блоков пути P.

• Для любого блока B пути P граф $B - x$ связен. Если B — не B_1 и не B_2, то в нем можно пройти между двумя точками сочленения, входящими в P (эти точки отличны от x). Поэтому $H - x$ — связный граф.



• Пусть a — точка сочленения, лежащая на P, и она входит в блоки B_1' и B_2' пути P (см. рисунок).

• Обозначим через H_1 объединение всех блоков, лежащих на пути P от B_1 до a, а через H_2 — объединение всех блоков, лежащих на пути P от a до B_2.

• По доказанному выше, a не разделяет ни один из графов H_1 и H_2.

• С другой стороны, по Лемме 1 точка сочленения a отделяет блок B_1' от блока B_2', а значит, a отделяет H_1 от H_2 и, в частности, B_1 от B_2. $\square$

Теорема 1

1) *Дерево блоков и точек сочленения связного графа G — это действительно дерево, все листья которого соответствуют блокам.*
2) *Точка сочленения a разделяет два блока B_1 и B_2 в графе G, если и только если a разделяет B_1 и B_2 в $B(G)$.*

Доказательство. 1)
$B(G)$ — связный граф.

• Для любых двух вершин $B(G)$ (не важно, блоков или точек сочленения) рассмотрим путь Q в G между ними.

• Путь Q перестраивается в путь в $B(G)$ так:

— участок пути Q, проходящий по одному блоку графа G, заменяем на соответствующую блоку вершину в $B(G)$;

— переход Q между различными блоками по лемме 1 осуществляется через их общую точку сочленения — вершину $B(G)$.

• Предположим, что в $B(G)$ есть простой цикл Z и рассмотрим подграф H — объединение всех блоков этого цикла.

• Между любыми двумя входящими в Z блоками есть два независимых пути в $B(G)$.

• По Лемме 2 граф H не имеет точек сочленения (они должны бы были лежать на двух путях без общих внутренних точек).

• Следовательно, существует блок B, содержащий H, а все (хотя бы два) блока цикла Z — собственные подграфы B, что невозможно.

• Таким образом, $B(G)$ — дерево.

• Если лист $B(G)$ соответствует точке сочленения a, то по Лемме 2 граф $G - a$ связен, противоречие.

2) В дереве $B(G)$ есть единственный путь между B_1 и B_2. По лемме 2 в точности точки сочленения с этого пути отделяют B_1 от B_2 в графе G. □

Крайние блоки

Определение

1) Назовем блок B *крайним*, если он соответствует висячей вершине дерева блоков и точек сочленения.
2) *Внутренность* $\mathrm{Int}(B)$ блока B — это множество всех его вершин, не являющихся точками сочленения в графе G.

• Нетрудно понять, что блок недвусвязного графа G является крайним тогда и только тогда, когда он содержит ровно одну точку сочленения.

• Внутренность некрайнего блока может быть пустой. Внутренность крайнего блока всегда непуста.

• Если у связного графа G есть точки сочленения, то он имеет хотя бы два крайних блока. Т.к. у дерева хотя бы 2 листа

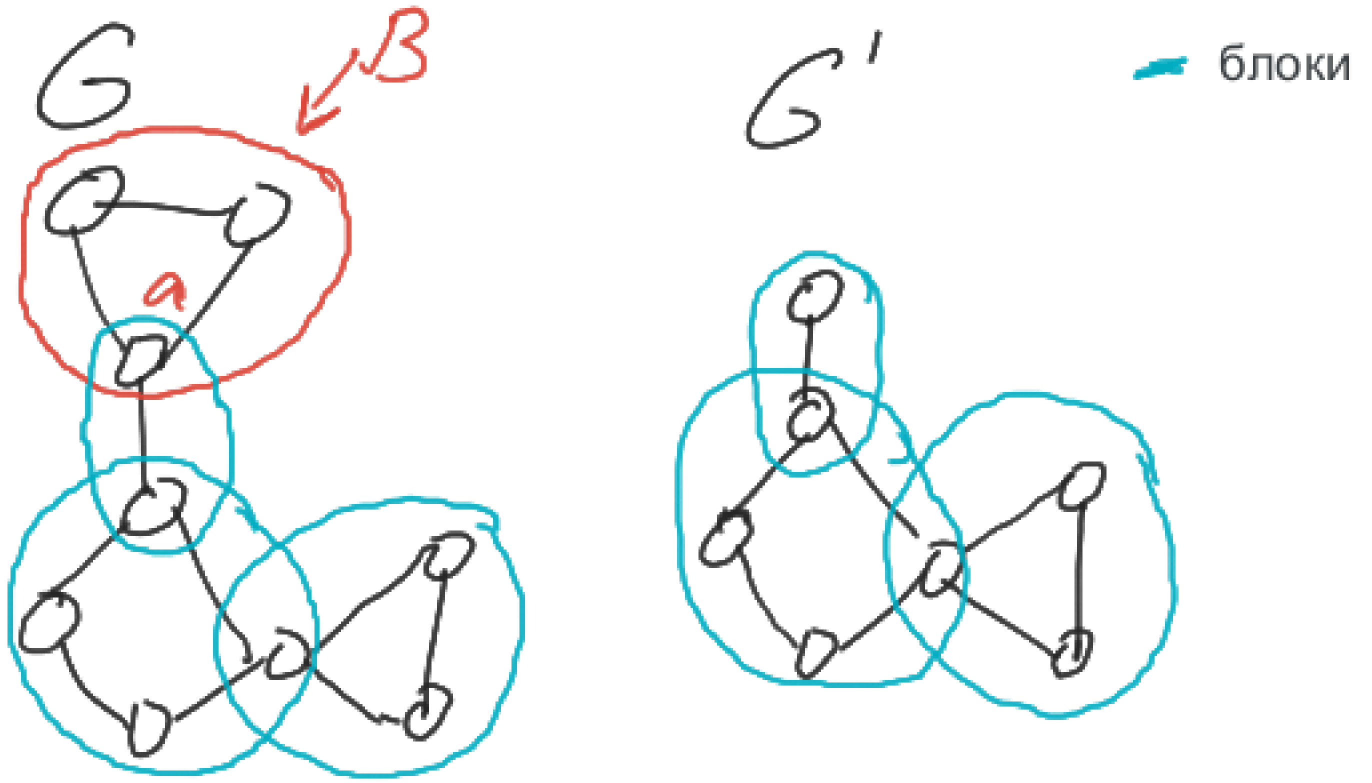
• Если B — блок графа G, а $x \in \mathrm{Int}(B)$, то граф $G - x$ связен.

Лемма 3

Пусть B — крайний блок связного графа G, а $G' = G - \mathrm{Int}(B)$. Тогда граф G' связен, а блоки G' — это все блоки G, кроме B.

Доказательство.

- Пусть $a \in V(B)$ — точка сочленения, отрезающая крайний блок B от остального графа. Тогда $\mathrm{Int}(B)$ — это одна из компонент связности графа $G - a$, откуда очевидно следует связность графа G'.
- Все отличные от B блоки графа G являются подграфами G', не имеют точек сочленения и являются максимальными подграфами G' с таким свойством (они были максимальными даже в G). Следовательно, все они — блоки графа G'.
- Пусть B' — блок графа G'. Очевидно, $v(G') \geq 2$, поэтому B' содержит хотя бы одно ребро e, которое в графе G лежит в некотором блоке $B^* \neq B$. Теперь очевидно, что $B^* = B'$.

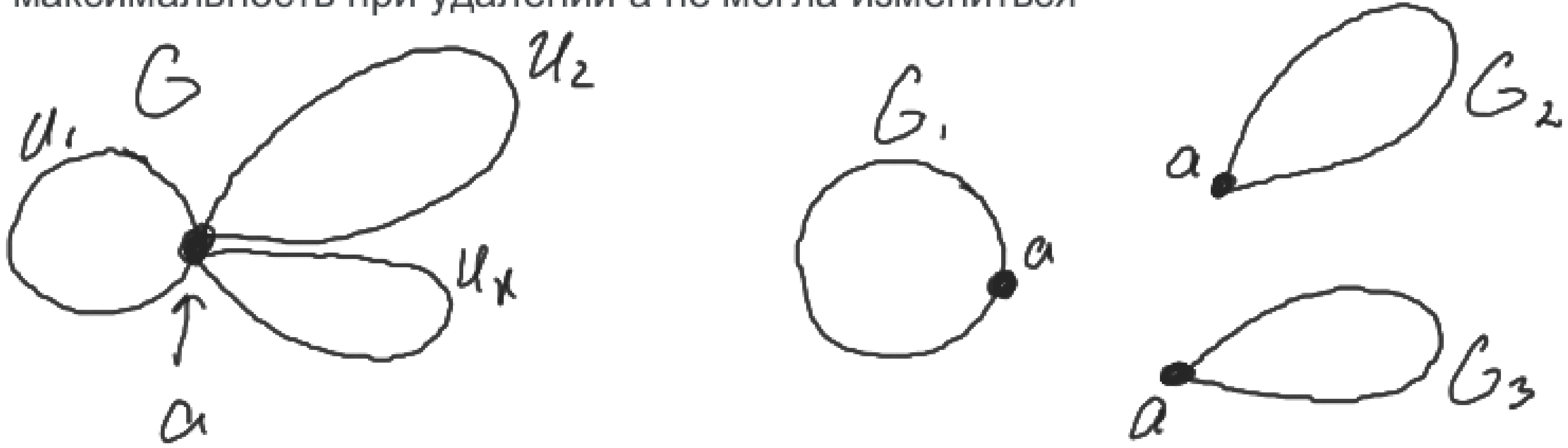


Т.к. кроме как по точке а, блоки графа не пересекаются

Прибавиться точек сочленения не могло и их максимальность при удалении а не могла измениться

Разрез графа G по точке сочленения a.

- Пусть $U_1, \ldots, U_k$ — все компоненты связности графа $G - a$, а $G_i = G(U_i \cup \{a\})$. Разрежем граф G на графы $G_1, \ldots, G_k$.



Разрез графа по точке сочленения (а обязательно принадлежит каждому графу)

Лемма 4

1) *Пусть $b \in U_i$. Тогда b разделяет вершины $x, y \in U_i$ в G_i, если и только если b разделяет их в G.*
2) *Все точки сочленения графов $G_1, \ldots, G_k$ — это в точности все точки сочленения графа G, кроме a.*

Доказательство. 1) $\Leftarrow$. Если в $G - b$ нет xy-пути, то его, очевидно, нет и в $G_i - b$. Т.к. Gi - b - это его подграф

$\Rightarrow$. Наоборот, пусть x и y лежат в разных компонентах связности графа $G_i - b$. Не умаляя общности можно считать, что компонента связности $W \ni x$ не содержит a. Тогда W — компонента связности графа $G - b$, то есть, и в этом графе нет xy-пути.

Доказательство пункта 2 леммы 4

• Так как $G_i - a$ — компонента графа $G - a$, вершина a не является точкой сочленения ни в одном из графов $G_1, \dots, G_k$.

• Любая другая точка сочленения графа G лежит ровно в одном из графов $G_1, \dots, G_k$ и является в нем точкой сочленения по пункту 1.

• Также из пункта 1 следует, что других точек сочленения в графах $G_1, \dots, G_k$ нет. □

Алгоритм разбиения связного графа на блоки

• Выберем точку сочленения a и разрежем по ней G — заменим граф G на полученные при этом графы $G_1, \dots, G_k$.

• Каждым следующим шагом мы будем брать один из имеющихся графов, выбирать в нем точку сочленения и разрезать его по ней.

• И так далее, пока хотя бы один из полученных графов имеет точку сочленения.

Теорема 2

В результате описанного выше алгоритма разрезания графа по точкам сочленения вне зависимости от порядка действий получатся блоки графа G.

Доказательство.

• По Лемме 4 мы вне зависимости от порядка действий проведем разрезы по всем точкам сочленения графа G и только по ним.

• Пусть B — блок графа G. Тогда в графе G множество $V(B)$ не было разделено ни одной из точек сочленения. Значит, по пункту 1 Леммы 4 множество $V(B)$ не было разрезано при нашем алгоритме.

• Так как в результате алгоритма получились индуцированные подграфы графа G, один из них — скажем, H — является надграфом B.

• Если $H \neq B$, то рассмотрим вершину $c \in V(H) \setminus V(B)$. В графе G существует точка сочленения a, отделяющая c от $V(B)$. Тогда в силу Леммы 4 при разрезе по a вершина c была отделена от блока B, противоречие. □

Определение

Граф G является **двусвязным**, если $v(G) \geq 3$ и граф не имеет точек сочленения.

• Блок связного графа, имеющий более двух вершин — двусвязный граф.

Теорема 3

Пусть G — двусвязный граф, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $v(G) = n_1 + n_2$. Тогда $G = G_1 \cup G_2$, где $v(G_1) = n_1$, $v(G_2) = n_2$ и оба графа G_1 и G_2 связные.

Доказательство. • Индукция по n_1.

• **База** $n_1 = 1$ очевидна: пусть G_1 состоит из одной вершины v_1, тогда граф $G_2 := G - v_1$ связен, так как G не имеет точек сочленения.

• **Переход $n_1 \to n_1 + 1$.** В этом случае $n_2 := v(G_2) \geq 2$.

• Пусть B — крайний блок G_2, а a — единственная входящая в B точка сочленения. (если G_2 не имеет точек сочленения, то $B = G_2$, a — любая вершина B).

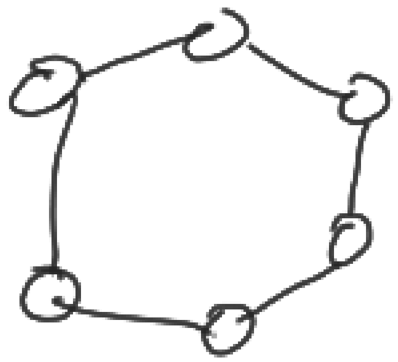
• В $B - a$ есть вершина x, смежная с $V(G_1)$ (иначе a отделяет G_1 от $B - a$ в графе G, то есть, является точкой сочленения, которых нет).

• Тогда x — не точка сочленения графа G_2. Значит, $G_2' := G_2 - x$ связен и $v(G_2') = n_2 - 1$.

• Так как x смежна с G_1, граф G_1', полученный из G_1 добавлением x и всех ребер графа G от x к G_1, связен.

• $v(G_1') - n_1 + 1$. □

Пример двусвязного графа



Разделяющие множества

Определение. Пусть $X, Y \subset V(G)$, $R \subset V(G) \cup E(G)$.

1) Назовем множество R *разделяющим*, если граф $G - R$ несвязен.

2) Пусть $X \not\subset R$, $Y \not\subset R$. Будем говорить, что R *разделяет* множества X и Y (или, что то же самое, *отделяет* множества X и Y друг от друга), если никакие две вершины $v_x \in X$ и $v_y \in Y$ не лежат в одной компоненте связности графа $G - R$.

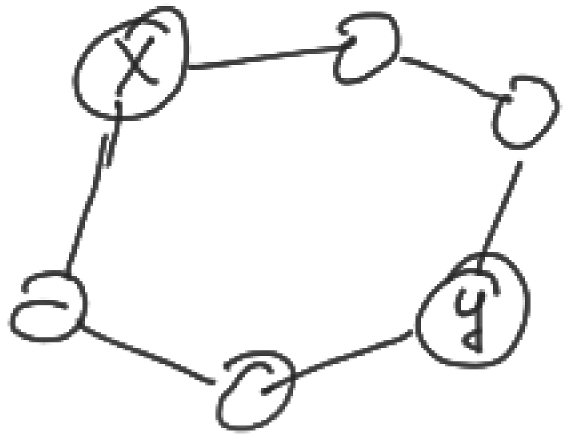
- Любой неполный граф имеет *вершинное* разделяющее множество (состоящее только из вершин).
- Любой граф более чем из одной вершины имеет *реберное* разделяющее множество (состоящее только из ребер).

Определение. Граф G является *k-связным*, если $v(G) \geq k + 1$ и минимальное вершинное разделяющее множество в графе G содержит хотя бы k вершин.

- Блок связного графа, имеющий более двух вершин — двусвязный граф.

Если множества X и Y пересекаются, то чтобы их разделить, нужно удалить их пересечение

Пример:



$K(x,y) = 2$

Вершинная связность

Определение

1) Пусть $x, y \in V(G)$ — несмежные вершины. Обозначим через $\kappa_G(x, y)$ размер минимального множества $R \subset V(G)$ такого, что R разделяет x и y. Если x и y смежны, то положим $\kappa_G(x, y) = +\infty$. Назовем $\kappa_G(x, y)$ *связностью* вершин x и y.

2) Пусть $X, Y \subset V(G)$. Обозначим через $\kappa_G(X, Y)$ размер минимального множества $R \subset V(G)$ такого, что R разделяет X и Y. Если такого множества нет, то положим $\kappa_G(X, Y) = +\infty$.

- В k-связном графе G для любых двух множеств вершин $X, Y \subset V(G)$ выполнено $\kappa_G(X, Y) \geq k$.

Вершинная связность

Определение

1) Пусть $x, y \in V(G)$ — несмежные вершины. Обозначим через $\kappa_G(x, y)$ размер минимального множества $R \subset V(G)$ такого, что R разделяет x и y. Если x и y смежны, то положим $\kappa_G(x, y) = +\infty$. Назовем $\kappa_G(x, y)$ *связностью* вершин x и y.

2) Пусть $X, Y \subset V(G)$. Обозначим через $\kappa_G(X, Y)$ размер минимального множества $R \subset V(G)$ такого, что R разделяет X и Y. Если такого множества нет, то положим $\kappa_G(X, Y) = +\infty$.

- В k-связном графе G для любых двух множеств вершин $X, Y \subset V(G)$ выполнено $\kappa_G(X, Y) \geq k$.

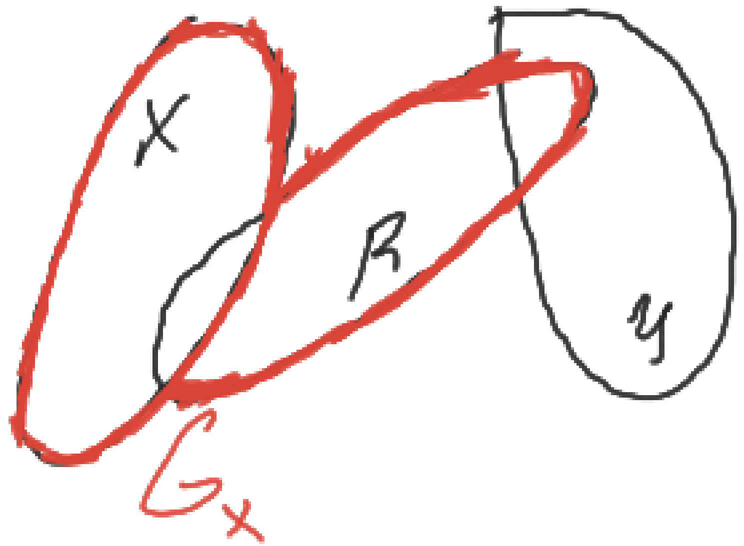
Т.к. чтобы хоть как-то разделить k-связный граф нужно удалить хотя бы k вершин

Теорема 3

(K. Menger, 1927.) *Пусть* $X, Y \subset V(G)$, $\varkappa_G(X, Y) \geq k$, $|X| \geq k$, $|Y| \geq k$. *Тогда в графе* G *существуют* k *непересекающихся* XY*-путей.*

Доказательство. • Индукция по количеству вершин в графе. Доказывая утверждение для графа G и пары множеств X, Y, мы будем считать утверждение уже доказанным для всех меньших графов.

• Рассмотрим два случая.



База индукции: связный граф. Между любыми двумя вершинами существует ровно один путь

Случай 1: существует множество R из k вершин, разделяющее X и Y

• Никакой XR-путь не содержит вершины из $Y \setminus R$ (иначе существовал бы XY-путь, не содержащий ни одной вершины множества R, см. рис a). Тогда R не было бы разделяющим множеством

• Следовательно, любое множество S, отделяющее X от R в графе $G_x = G - (Y \setminus R)$, отделяет X от R и в графе G. Но тогда S отделяет X от Y в графе G, следовательно, $|S| \geq k$. Т.к. ни один путь не проходил через вершины которые мы удалили

a b c

• По индукционному предположению существует k непересекающихся XR-путей в графе G_x, а следовательно, и в графе G.

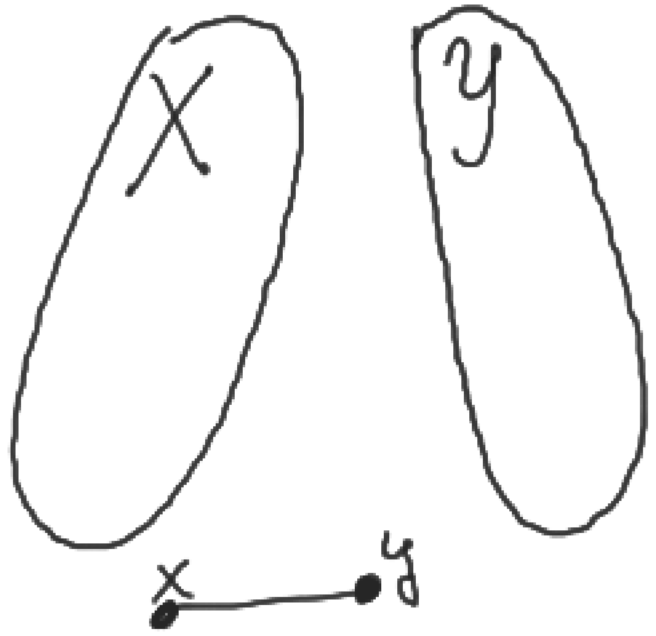
• Аналогично, существует k непересекающихся RY-путей в графе G. Также рассмотрим граф Gy = G - (X \ R)

• Никакой XR-путь не пересекает никакой RY-путь (иначе существовал бы XY-путь, не содержащий ни одной вершины множества R, см. рис. b).

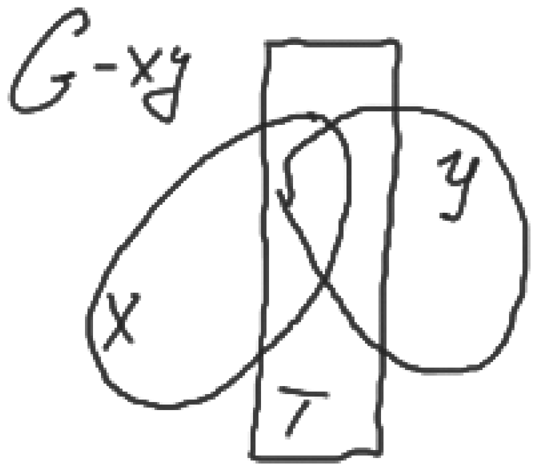
• Так как $|R| = k$, то мы можем состыковать XR-пути и RY-пути по вершинам множества R, получив k непересекающихся XY-путей (см. рис. c).

Случай 2: Нет множества из k вершин, разделяющего X и Y

- Случай, когда в графе G нет рёбер, очевиден.
- Далее $E(G) \neq \varnothing$. Пусть $xy \in E(G)$. Если условие теоремы выполняется в меньшем графе $G - xy$, то по индукционному предположению выполняется утверждение теоремы для графа $G - xy$, а следовательно, и для графа G.
- Остается рассмотреть случай, когда существует множество $T \subset V(G)$, $|T| \leq k - 1$, разделяющее X и Y в графе $G - xy$.
- Множества $X' = X \setminus T$ и $Y' = Y \setminus T$ непусты. Как мы знаем, $T^* = T \cup \{xy\}$ разделяет X и Y в графе G, а $T_x = T \cup \{x\}$ — не разделяет (так как $|T_x| \leq k$)*. Отсюда следует, что одно из множеств X' и Y' лежит в T_x.
- НУО $X' \subset T_x$. Тогда $X' = \{x\}$. Аналогично, $Y' = \{y\}$.
- Таким образом, $T \supset X \setminus \{x\}$ и $T \supset Y \setminus \{y\}$.
- Учитывая $|T| \leq k - 1$, $|X| \geq k$ и $|Y| \geq k$, мы получаем $X \setminus \{x\} = Y \setminus \{y\} = T$ и $|T| = k - 1$.
- В этом случае легко увидеть искомые пути — это ребро xy и $k - 1$ вершина из $T = X \cap Y$.



В этом случае условие теоремы для G - xy выполнено



* |Tx| <= k, следовательно Tx не может быть разделяющим множеством, т.к. из условия теоремы разделяющее множество состоит хотя бы из k вершин, а случай 2 говорит, что разделяющего множества ровно из k вершин нет

В итоге получаем, что картинка выглядит так:

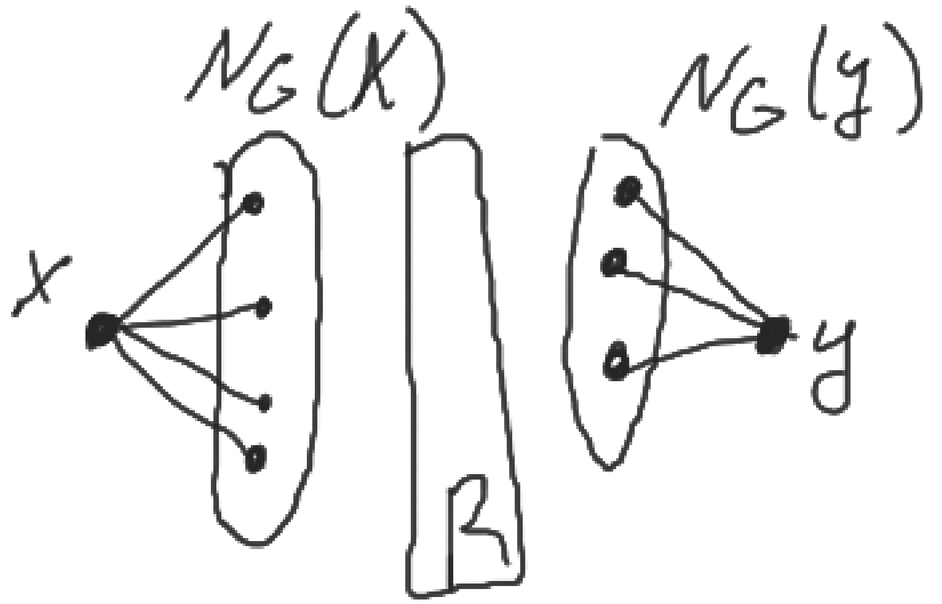
Т.е. в данном случае X и Y совпадают во всех вершинах, кроме двух.

Следствие 1

Пусть вершины $x, y \in V(G)$ несмежны, $\kappa_G(x, y) \geq k$. Тогда существует k независимых путей из x в y.

Доказательство.

- Пусть $X = \mathrm{N}_G(x)$ и $Y = \mathrm{N}_G(y)$.
- Так как x и y несмежны, множество X отделяет вершину x от вершины y. Значит, $|X| \geq k$ и (аналогично) $|Y|| \geq k$.
- Любой xy-путь идёт из x в X, далее в Y и затем в y. Поэтому, множество вершин R, отделяющее X от Y, отделяет вершину x от вершины y. Следовательно, $|R| \geq k$.
- По теореме 3 существует k непересекающихся XY-путей. Значит, есть и k независимых xy-путей. □



Следствие 2

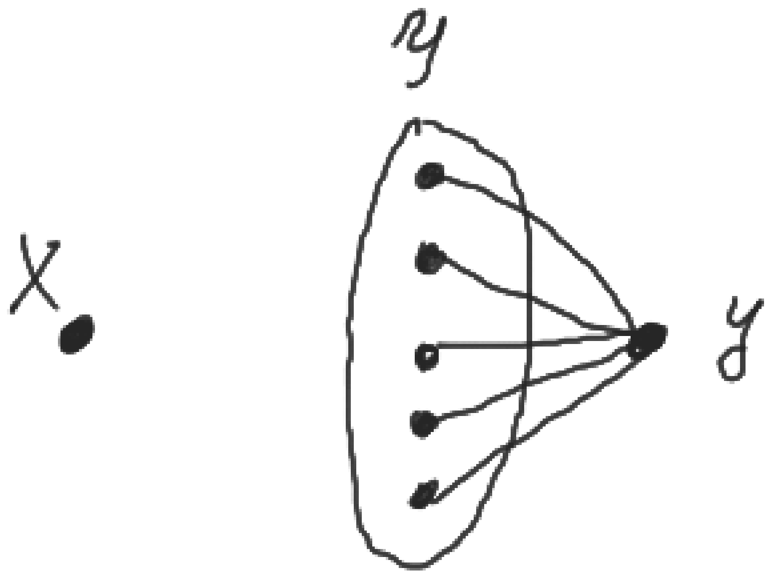
Пусть $x \in V(G)$, $Y \subset V(G)$, $x \notin Y$, $k = \min(|Y|, \kappa_G(x, Y))$. Тогда существуют k путей от x до различных вершин множества Y, не имеющих общих внутренних вершин.

Доказательство.

- Пусть $X = \mathrm{N}_G(x)$. Очевидно, $|\mathrm{N}_G(x)| \geq k$.
- Так как $x \notin Y$, любое множество вершин R, отделяющее X от Y, отделяет вершину x от множества Y. Следовательно, $|R| \geq k$.
- Так как и $|Y| \geq k$, по теореме 3 существует k непересекающихся XY-путей в графе G, а следовательно, и k непересекающихся путей от x до различных вершин множества Y. □

Следствие 2. Доказательство 2

Добавим в граф G вершину y, смежную только со всеми вершинами из множества Y. Тогда из следствия 2, в графе G + y существует k независимых xy путей. Удалив из каждого пути последнее ребро (ведущее в добавленную вершину y), получим искомые пути.



Теорема 4

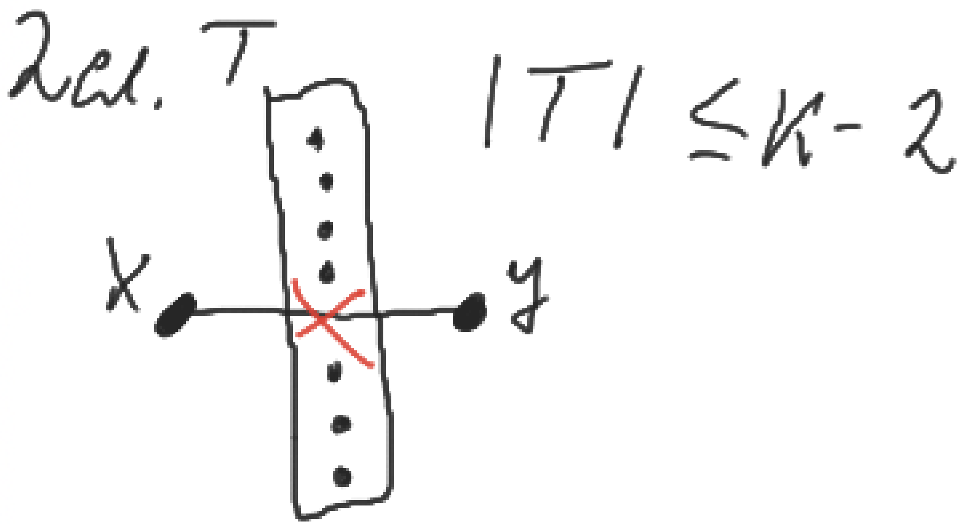
(H. Whitney, 1932.) *Пусть G — k-связный граф. Тогда для любых двух вершин $x, y \in V(G)$ существует k независимых xy-путей.*

Доказательство. • Индукция по k, база для $k = 1$ очевидна. Докажем утверждение для k-связного графа, считая, что оно доказано для графов меньшей связности.

База: в связном графе между любыми двумя вершинами есть путь

• Если вершины x и y несмежны, то утверждение следует из Следствия 1. Далее вершины x и y смежны.

• Если $G - xy$ — $(k-1)$-связный граф, то по индукционному предположению существует $k-1$ независимых xy-путей в графе $G - xy$, а еще один путь — это ребро xy.



• Пусть в $G - xy$ существует разделяющее множество T, $|T| \le k-2$. Так как T не является разделяющим множеством в G, легко понять, что в графе $G - (T \cup \{xy\})$ ровно две компоненты связности: $U_x \ni x$ и $U_y \ni y$ (возвращение ребра xy дает связный граф $G - T$).

T ∪ {xy}) - отделяет x от y в графе G

В графе G - (T ∪ {xy}) ровно две компоненты связности, т.к. он становится связным при добавлении всего одного ребра

• Пусть $T_x = T \cup \{x\}$. Если $U_x \neq \{x\}$, то T_x отделяет $U_x \setminus \{x\}$ от U_y в G,* что невозможно (так как $|T_x| \le k-1$).

* Т.к. любой путь из Ux в Uy проходит либо через T, либо через ребро xy

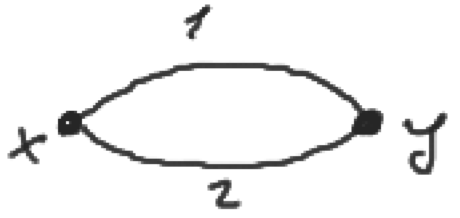
• Тогда $U_x = \{x\}$.* Аналогично, $U_y = \{y\}$. Таким образом, в графе G не более k вершин: это вершины множества T, x и y. Противоречие с определением k-связного графа. (по определению k-связного графа, в нем хотя бы k + 1вершина, а мы получили k.

* Ux = {x}, т.к. если отделение Ux от Uy множеством Tx противоречит условию => отделять просто нечего => Ux = {x}. Аналогично и Uy = {y}

Теорема 5

(G. A. Dirac.) *Пусть $k \geq 2$. В k-связном графе для любых k вершин существует простой цикл, содержащий все эти вершины.*

Доказательство. • Докажем теорему индукцией по k. База для $k = 2$ следует из теоремы Уитни (Теоремы 4).



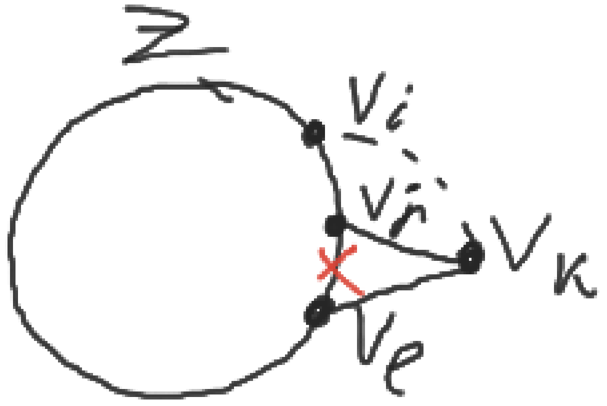
Т.к. между вершинами x и y d 2-связном графе существуют 2 не пересекующихся пути, которые образуют цикл.

Переход $k-1 \to k$. • Пусть $k > 2$. Рассмотрим k-связный граф G и его вершины $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k$. Так как G является $(k-1)$-связным графом*, по индукционному предположению существует простой цикл Z, содержащий вершины $v_1, \ldots, v_{k-1}$.

* k-связный граф является также и (k - 1)-связным ... и т.д. и (k - n)-связным.

• Рассмотрим два случая.

Случай 1. $v(Z) < k$.
Тогда $V(Z) = \{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ и по Следствию 2 существуют непересекающиеся пути от v_k до всех вершин цикла Z. В этом случае легко вставить v_k в цикл Z между его соседними вершинами и получить искомый цикл.

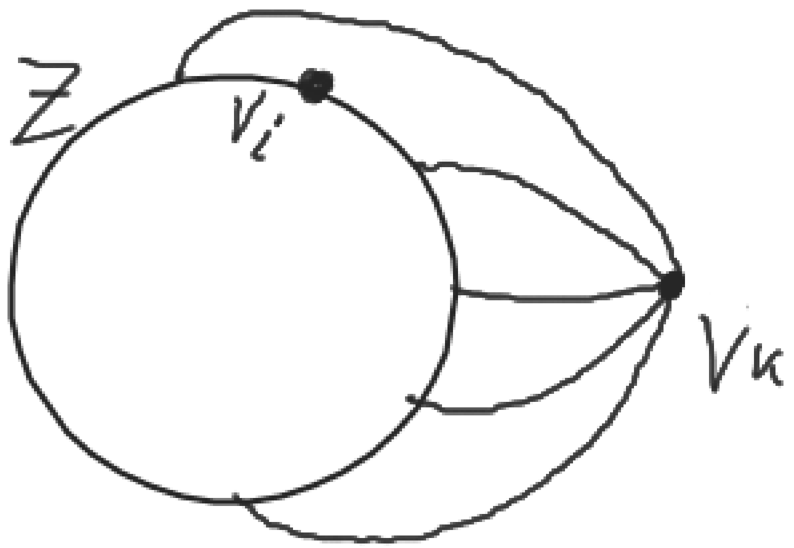


По следствию 2 из vx существует k - 1 путей в вершины цикла Z, но в Z всего k - 1 вершина

Случай 2. $v(Z) \geq k$.
• По Следствию 2 существует k непересекающихся путей от v_k до цикла Z.

• Пусть $x_1, \ldots, x_k \in V(Z)$ — концы этих путей в порядке их следования по циклу (нумерация — циклическая). Они делят цикл на k дуг и внутренность одной из этих дуг.

• Одна их этих дуг (скажем, дуга L с концами x_i и x_{i+1}) не содержит ни одной из вершин $v_1, \ldots, v_{k-1}$. Тогда заменим дугу L на путь от x_i до v_k и путь от v_k до x_{i+1}, в результате получится искомый цикл. □



Из vk идет k путей в вершины цикла Z. Концы путей разделяют цикл на дуги. Наша цель - перерезать какую-то дугу и поменять ее на путь из xi в vk + путь из vk в xi+1. Тогда помешять нам это сделать может только какая-то вершина vi, лежащая на дуге, которую мы хотим отрезеать. k путей делят цикл на k дуг, а вершин v в этом цикле k - 1. Тогда всегда существует такая дуга, в которой не лежит ни одна vi.