Определение

• Множество комплексных чисел состоит из упорядоченных пар вещественных чисел:

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

• Сложение: $(a, b) + (a', b') := (a + a', b + b')$.

• Умножение: $(a, b) \cdot (a', b') := (aa' - bb', ab' + ba')$.

Определение

• Пусть $z = (a, b) \in \mathbb{C}$.

• Вещественная часть z — это $\mathrm{Re}(z) := a$.

• Мнимая часть z — это $\mathrm{Im}(z) := b$.

• Комплексное с опряжение: $\overline{z} := (a, -b)$.

• Норма z — это $N(z) := a^2 + b^2$.

• Модуль z — это $|z| := \sqrt{N(z)} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

• Очевидно, $\overline{\overline{z}} = z$.

Теорема 1

$\mathbb{C}$ — поле.

Доказательство. • 1) и 2) Так как сложение в $\mathbb{C}$ — покомпонентное, ассоциативность и коммутативность наследуются из $\mathbb{R}$.

• 3) Ноль в $\mathbb{C}$ — это $0 := (0, 0)$.

• 4) Обратный элемент по $+$. Для $z = (a, b)$ положим $-z := (-a, -b)$.

• 7) Коммутативность умножения:

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba') = (a'a - b'b, a'b + b'a) = (a', b') \cdot (a, b).$$

• 5) Достаточно проверить одну дистрибутивность (так как умножение коммутативно):

$$(a, b) \cdot ((c_1, d_1) + (c_2, d_2)) = (a, b) \cdot (c_1 + c_2, d_1 + d_2) = (ac_1 + ac_2 - bd_1 - bd_2, ad_1 + ad_2 + bc_1 + bc_2) = (ac_1 - bd_1, ad_1 + bc_1) + (ac_2 - bd_2, ad_2 + bc_2) = (a, b) \cdot (c_1, d_1) + (a, b) \cdot (c_2, d_2).$$

• 6) ассоциативность умножения:

$$((a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)) \cdot (a_3, b_3) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2) \cdot (a_3, b_3) = (a_1a_2a_3 - b_1b_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3, a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3 + a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3).$$

Нетрудно проверить, что при другом порядке получится то же самое (в вещественную часть попадают сомножители с четным числом b, в мнимую — с нечетным, знак — получается там, где более одной b).

• 8) Единица: это $1 := (1, 0)$.

• 9) Обратный элемент по $\cdot$. Для $z = (a, b)$ положим $z^{-1} := (\frac{a}{N(z)}, \frac{-b}{N(z)})$. Проверяем:

$$zz^{-1} = (a, b) \cdot (\frac{a}{N(z)}, \frac{-b}{N(z)}) = (\frac{a^2 + b^2}{N(z)}, \frac{-ab + ba}{N(z)}) = (1, 0).$$

□

Геометрическая интерпретация $\mathbb{C}$ и тригонометрическая запись

• Рассмотрим декартову систему координат в $\mathbb{R}^2$, по оси абсцисс будем откладывать вещественную часть, а по оси ординат — мнимую. Тогда комплексное сопряжение — симметрия относительно оси абсцисс.

• Для числа $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ тогда $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ — расстояние от начала координат до z.

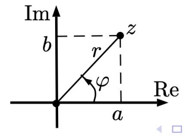
• *Аргумент* z — это направленный угол $\arg(z) = \varphi$ от оси абсцисс до луча Oz против часовой стрелки. Вычисляется с точностью до прибавления $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

• Пара (r, φ) однозначно задает точку z.

• $a = r\cos(\varphi)$, $\quad b = r\sin(\varphi)$.

• Тригонометрическая форма записи комплексного числа: $z = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$.

• Если $z = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$, то $|z| = r$, $\arg(z) = \varphi$.



Теорема 2

Пусть $x, y \in \mathbb{C}$. Тогда $|xy| = |x||y|$ и $\arg(xy) = \arg(x) + \arg(y)$.

Доказательство. • Пусть $x = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$, а $y = (p\cos(\psi), p\sin(\psi))$. Тогда

$$xy = (rp(\cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi)), rp(\cos(\varphi)\sin(\psi) + \sin(\varphi)\cos(\psi))) = (rp\cos(\varphi + \psi), rp\sin(\varphi + \psi)).$$

• Следовательно, $|xy| = rp$ и $\arg(xy) = \varphi + \psi$. □

Теорема 3

Формула Муавра. Пусть $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $|z^n| = |z|^n$ и $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$.

Доказательство. Индукция по n. База $n = 1$ очевидна.

Переход $n \to n + 1$.

• Пусть $|z| = r$, $\arg(z) = \varphi$ и утверждение доказано для n, то есть, $|z^n| = r^n$ и $\arg(z^n) = n\varphi$.

• По Теореме 2 $\quad |z^{n+1}| = |z||z^n| = r \cdot r^n = r^{n+1}$ и $\arg(z^{n+1}) = \arg(z) + \arg(z^n) = \varphi + n\varphi = (n + 1)\varphi$. □

Лемма 1

Отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, заданное формулой $f(a) = (a, 0)$ — мономорфизм.

Доказательство. • Очевидно, f — инъекция.

• Нужно проверить, что это гомоморфизм. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$.

• $f(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b)$.

• $f(ab) = (ab, 0) = (a, 0) \cdot (b, 0) = f(a)f(b)$. □

• Очевидно, $\mathrm{Im}(f) \simeq \mathbb{R}$. Таким образом, $\mathbb{C}$ имеет подполе $\mathrm{Im}(f)$, изоморфное $\mathbb{R}$. В дальнейшем мы будем отождествлять каждое вещественное число a с комплексным $(a, 0)$.

• Теперь можно сказать, что для любого $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ выполнено:

$z \cdot \overline{z} = N(z) = N(\overline{z})$ (все это равно по $a^2 + b^2$) и

$z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z) = 2\mathrm{Re}(\overline{z})$ (все это равно по $2a$).

• Сопряженные комдлексные числа $z, \overline{z} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ — корни квадратного уравнения с вещественными коэффициентами $t^2 - 2\mathrm{Re}(z) \cdot t + N(z) = 0$.

Извлечение корня из комплексного числа

- Пусть $a \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$ фиксированы, $a \neq 0$. Решим уравнение $z^n = a$.
- Будем использовать представление комплексных чисел через модуль и аргумент. Тогда $a = (r, \varphi)$ (параметры даны) и $z = (p, \psi)$ (эти параметры мы ищем).
- По формуле Муавра, $p = \sqrt[n]{r}$.
- С аргументом сложнее. По формуле Муавра, $n\psi = \varphi + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$ (напомним, что аргумент вычисляется с точностью до $2\pi k$). Поделив на n, получаем

$$\psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}. \qquad (1)$$

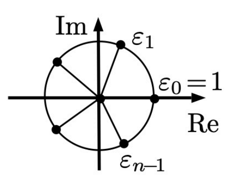
- При $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ в (1) получается n разных аргументов.
- Каждое число $k \in \mathbb{Z}$ можно представить в виде $k = qn + r$, где $0 \leq r < n$ (это теорема о делении с остатком). Тогда $\frac{2\pi k}{n} = \frac{2\pi r}{n} + 2\pi q$, а это тот же аргумент, что и $\frac{2\pi r}{n}$.
- Таким образом, корень n степени извлекается из $a \neq 0$ извлекается ровно n способами.

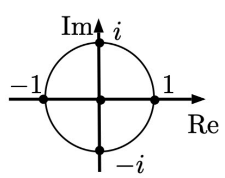
Корни из 1

- Отдельно рассмотрим корни n степени из 1 — решения уравнения $z^n = 1$.
- Из сказанного выше следует, что модуль всех корней из 1 равен 1. Так как $\arg(1) = 0$, все различные аргументы считаются по формуле

$$\psi_k = \frac{2\pi k}{n}, \quad \text{где} \quad k \in \{0, \ldots, n-1\}. \qquad (1)$$

- Обозначим их $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ (корень ε_k имеет аргумент ψ_k).
- Корни из 1 степени n лежат на окружности радиуса 1 в вершинах правильного n-угольника, одна из которых — в 1.
- По формуле Муавра $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$. Значит, все корни из 1 — это степени ε_1.





- На рисунке справа изображены корни степени 4 из 1. Один из них — это $i = (0, 1)$ ($\arg(i) = \frac{\pi}{2}$).
- Остальные корни из 1 степени 4 — это $-1 = i^2$, $-i = i^3$ и $1 = i^4$.
- Комплексное число $z = (a, b)$ может быть записано в виде $z = a + bi$, который многим из вас более привычен.
- Еще одно часто встречающееся обозначение — комплексное число z с $|z| = 1$ и $\arg(z) = \alpha$ часто записывают в виде $z = e^{\alpha i}$.
- Таким образом, $e^{\alpha i} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$.