Алгоритмы

1 Выделение базиса из системы векторов

Дано Пусть $v_1, \dots, v_m \in F^n$ – вектора и $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ – их линейная оболочка.

Задача Среди векторов $v_1, \dots, v_m$ найти базис пространства V и разложить оставшиеся вектора по этому базису.

Алгоритм

1. Запишем вектора $v_1, \dots, v_m$ по столбцам в матрицу $A \in \mathrm{M}_{\mathrm{n}\,\mathrm{m}}(F)$. Например, при $n = 3$, $m = 5$
$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} & v_{51} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} & v_{42} & v_{52} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} & v_{43} & v_{53} \end{pmatrix}$$

2. Приведем матрицу A элементарными преобразованиями строк к улучшенному ступенчатому виду. Например
$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{31} & 0 & a_{51} \\ 0 & 1 & a_{32} & 0 & a_{52} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{53} \end{pmatrix}$$

3. Пусть $k_1, \dots, k_r$ – номера главных позиций в матрице A'. Тогда вектора $v_{k_1}, \dots, v_{k_r}$ образуют базис V. Например, в примере выше это вектора v_1, v_2 и v_4.

4. Пусть v_i – вектор соответствует неглавной позиции в A'. Тогда в i-ом столбце A' записаны координаты разложения v_i через найденный базис выше. Например, в примере выше $v_3 = a_{31}v_1 + a_{32}v_2$ и $v_5 = a_{51}v_1 + a_{52}v_2 + a_{53}v_4$.

Пример Пусть
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in F^3$$

Тогда
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 12 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto$$
$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Тогда v_1, v_2 и v_4 – базис линейной оболочки и $v_3 = 2v_1 + 3v_2$ и $v_5 = v_1 - 2v_4$.

2 Нахождение какого-то базиса линейной оболочки

Дано Пусть $v_1, \dots, v_m \in F^n$ – вектора и $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ – их линейная оболочка.

Задача Найти какой-нибудь базис подпространства V.

Алгоритм

1. Уложить все вектора v_i в строки матрицы $A \in \mathrm{M}_{\mathrm{m}\,\mathrm{n}}(F)$.

2. Элементарными преобразованиями строк привести матрицу к ступенчатому виду.

3. Ненулевые строки полученной матрицы будут искомым базисом.

3 Дополнение линейно независимой системы до базиса всего пространства стандартными векторами

Дано Пусть $v_1, \ldots, v_m \in F^n$ – линейно независимая система векторов, $V = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ – их линейная оболочка и e_i – стандартные базисные векторы, т.е. на i-ом месте стоит 1, а в остальных 0.

Задача Найти такие вектора $e_{k_1}, \ldots, e_{k_{n-m}}$, что система $v_1, \ldots, v_m, e_{k_1}, \ldots, e_{k_{n-m}}$ является базисом F^n.

Алгоритм

1. Уложить вектора v_i в строки матрицы $A \in \mathrm{M}_{\mathrm{m\,n}}(F)$.
2. Привести матрицу A к ступенчатому виду.
3. Пусть $k_1, \ldots, k_{n-m}$ – номера неглавных столбцов. Тогда $e_1, \ldots, e_{k_{n-m}}$ – искомое множество.

4 Найти ФСР однородной СЛУ

Дано Система однородных линейных уравнений $Ax = 0$, где $A \in \mathrm{M}_{\mathrm{m\,n}}(F)$ и $x \in F^n$.

Задача Найти ФСР системы $Ax = 0$.

Алгоритм

1. Привести матрицу A элементарными преобразованиями строк к улучшенному ступенчатому виду. Например
$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{31} & 0 & a_{51} \\ 0 & 1 & a_{32} & 0 & a_{52} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{53} \end{pmatrix}$$
2. Пусть $k_1, \ldots, k_r$ – позиции свободных переменных. Если положить одну из этих переменных равной 1, а все остальные нулями, то существует единственное решение, которое мы обозначим через u_i (всего r штук). Например, для матрицы A' выше свободные переменные имеют номера 3 и 5. Тогда вектора (записанные в строку)
$$u_1 = \begin{pmatrix} -a_{31} & -a_{32} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -a_{51} & -a_{52} & 0 & -a_{53} & 1 \end{pmatrix}$$
являются ФСР.

5 Задать подпространство базисом, если оно задано матричным уравнением

Дано Пусть $A \in \mathrm{M}_{\mathrm{m\,n}}(F)$ и $V \subseteq F^n$ задано в виде $V = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$.

Задача Найти базис подпространства V.

Алгоритм

1. Найти ФСР системы $Ay = 0$. Векторы ФСР будут базисом V.

6 Задать подпространство матричным уравнением, если оно задано линейной оболочной

Дано Пусть $v_1, \ldots, v_k \in F^n$ – набор векторов и $V = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.

Задача Для некоторого m найти матрицу $A \in \mathrm{M}_{\mathrm{m\,n}}(F)$ такую, что $V = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$.

Алгоритм

1. Уложить вектора v_i в строки матрицы $B \in \mathrm{M}_{\mathrm{k\,n}}(F)$.
2. Найти ФСР системы $Bz = 0$.
3. Уложить ФСР в строки матрицы $A \in \mathrm{M}_{\mathrm{m\,n}}(F)$, где m – количество векторов в ФСР. Матрица A и будет искомой.

7 Найти матрицу замены координат

Дано Векторное пространство V, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и $f = (f_1, \ldots, f_n)$ – два базиса пространства V. Известна матрица перехода от e к f, т.е. $(f_1, \ldots, f_n) = (e_1, \ldots, e_n)A$, где $A \in \mathrm{M}_{\mathrm{n}}(F)$. Дан вектор $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$.

Задача Найти разложение v по базису f.

Алгоритм

1. Если $v = ex$, где $x \in F^n$, а также $v = fy$, где $y \in F^n$, то $y = A^{-1}x$.

8 Найти матрицу линейного отображения при замене базиса

Дано Векторное пространство V с базисами $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$, а также векторное пространство U с базисами $f = (f_1, \ldots, f_m)$ и $f' = (f'_1, \ldots, f'_m)$. Известны матрицы перехода $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$ и $(f'_1, \ldots, f'_m) = (f_1, \ldots, f_m)D$, где $C \in \mathrm{M}_{\mathrm{n}}(F)$ и $D \in \mathrm{M}_{\mathrm{m}}(F)$. Дано линейное отображение $\phi\colon V \to U$ заданное в базисах e и f матрицей $A \in \mathrm{M}_{\mathrm{n\,m}}(F)$, т.е. $\phi e = fA$.

Задача Найти матрицу отображения ϕ в базисах e' и f', то есть такую $A' \in \mathrm{M}_{\mathrm{n\,m}}(F)$, что $\phi e' = f'A'$.

Алгоритм

1. $A' = D^{-1}AC$.

9 Определить существует ли линейное отображение заданное на векторах

Дано Векторное пространство V над полем F и набор векторов $v_1, \ldots, v_k \in V$, векторное пространство U и набор векторов $u_1, \ldots, u_k \in U$.

Задача Определить существует ли линейное отображение $\phi\colon V \to U$ такое, что $\phi(v_i) = u_i$.

Алгоритм

1. Среди векторов $v_1, \ldots, v_k$ выделить линейно независимые, а остальные разложить по ним.
2. Пусть на предыдущем этапе базис получился $v_1, \ldots, v_r$, а $v_{r+i} = a_{i1}v_1 + \ldots + a_{ir}v_r$.
3. Искомое линейное отображение ϕ существует тогда и только тогда, когда выполняются равенства $u_{r+i} = a_{i1}u_1 + \ldots + a_{ir}u_r$.[1]

10 Найти базис образа и ядра линейного отображения

Дано $\phi\colon F^n \to F^m$ задан $x \mapsto Ax$, где $A \in \mathrm{M}_{\mathrm{m\,n}}(F)$.

Задача Найти базис $\operatorname{Im}\phi \in F^m$ и базис $\ker\phi \in F^n$.

[1] В частности, если все v_i оказались линейно независимыми, то линейное отображение ϕ обязательно существует.

Алгоритм

1. Выделить базис среди столбцов матрицы A. В результате получится базис $\operatorname{Im}\phi$.
2. Найти ФСР системы $Ax = 0$. Полученная ФСР будет базисом $\ker\phi$.

11 Найти линейное отображение с заданными ядром и образом

Дано Пространства $U \subseteq F^n$ и $W \subseteq F^m$ такие, что $\dim U + \dim W = n$.

Задача Найти матрицу линейного отображения $\varphi\colon F^n \to F^m$ такого, что $U = \ker\varphi$ и $W = \operatorname{Im}\varphi$.

Алгоритм

1. Задать подпространство W с помощью базиса. Пусть $b_1, \dots, b_k$ – базис W. Определим матрицу $B = (b_1|\dots|b_k)$.
2. Задать подпространство U системой с линейно независимыми строками $U = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$.
3. В силу условия $\dim U + \dim W = n$ матрица A будет иметь столько же строк, сколько столбцов в матрице B. В этом случае искомое линейное отображение задается матрицей BA.

12 Найти сумму подпространств заданных линейными оболочками

Дано Подпространства $V, U \subseteq F^n$ заданные в виде $V = \langle v_1, \dots, v_m\rangle$, $U = \langle u_1, \dots, u_k\rangle$, где $v_i, u_j \in F^n$.

Задача Найти базис $V + U$.

Алгоритм

1. Надо найти базис линейной оболочки $\langle v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_k\rangle$.

13 Найти пересечение подпространств заданных линейными оболочками

Дано Подпространства $V, U \subseteq F^n$ заданные в виде $V = \langle v_1, \dots, v_m\rangle$, $U = \langle u_1, \dots, u_k\rangle$, где $v_i, u_j \in F^n$.

Задача Найти базис $V \cap U$.[2]

Алгоритм

1. Найти ФСР системы $Dx = 0$, где $D = (v_1|\dots|v_m|u_1|\dots|u_k)$ и $x = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$, где $\alpha \in F^m$, $\beta \in F^k$.
2. Пусть $\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\middle|\dots\middle|\frac{\alpha_s}{\beta_s}\right)$ – ФСР. Далее есть две опции (из них вторая опция предпочтительнее!):
   - Множество векторов $R = (v_1|\dots|v_m)(\alpha_1|\dots|\alpha_s)$ порождает $V \cap U$. Среди $(\alpha_1|\dots|\alpha_s)$ можно выкинуть те α_i, для которых $\beta_i = 0$.[3]
   - Множество векторов $R' = (u_1|\dots|u_k)(\beta_1|\dots|\beta_s)$ порождает $V \cap U$. Причем можно рассматривать только ненулевые β_i.
3. Выделить базис среди столбцов R. Это и будет базис $V \cap U$.
   - Если векторы $u_1, \dots, u_k$ были линейно независимы изначально и $\beta_i, \dots, \beta_s$ – все ненулевые сегменты ФСР с прошлого шага, то $(u_1|\dots|u_k)(\beta_i|\dots|\beta_s)$ будет базисом $V \cap U$.

[2] В это задаче можно задать подпространства системами, потом найти пересечение в виде системы, потом задать результат базисом. Но есть куда более эффективный способ.

[3] Если ФСР построен по стандартному базису, то останутся α_i с нулевыми свободными переменными.

14 Найти пересечение подпространств заданных матричным уравнением

Дано Подпространства $V, U \subseteq F^n$ заданные в виде $V = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$, $U = \{y \in F^n \mid By = 0\}$, где $A \in \mathrm{M}_{\mathrm{m\,n}}(F)$ и $B \in \mathrm{M}_{\mathrm{k\,n}}(F)$.

Задача Задать $V \cap U$ в виде $\{y \in F^n \mid Dy = 0\}$ для некоторого $D \in \mathrm{M}_{\mathrm{k\,n}}(F)$, где $\operatorname{rk} D = k \leqslant n$.

Алгоритм

1. Рассмотреть матрицу $D' = \left(\frac{A}{B}\right)$.
2. Выделить среди строк D' линейно независимую подсистему. Результат и будет искомая D.