

Алгоритмы

1 Выделение базиса из системы векторов

Дано Пусть $v_1, \dots, v_m \in F^n$ – вектора и $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ – их линейная оболочка.

Задача Среди векторов v_1, \dots, v_m найти базис пространства V и разложить оставшиеся вектора по этому базису.

Алгоритм

1. Запишем вектора v_1, \dots, v_m по столбцам в матрицу $A \in M_{nm}(F)$. Например, при $n = 3, m = 5$

$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} & v_{51} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} & v_{42} & v_{52} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} & v_{43} & v_{53} \end{pmatrix}$$

2. Приведем матрицу A элементарными преобразованиями строк к улучшенному ступенчатому виду. Например

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{31} & 0 & a_{51} \\ 0 & 1 & a_{32} & 0 & a_{52} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{53} \end{pmatrix}$$

3. Пусть k_1, \dots, k_r – номера главных позиций в матрице A' . Тогда вектора v_{k_1}, \dots, v_{k_r} образуют базис V . Например, в примере выше это вектора v_1, v_2 и v_4 .
4. Пусть v_i – вектор соответствует неглавной позиции в A' . Тогда в i -ом столбце A' записаны координаты разложения v_i через найденный базис выше. Например, в примере выше $v_3 = a_{31}v_1 + a_{32}v_2$ и $v_5 = a_{51}v_1 + a_{52}v_2 + a_{53}v_4$.

Пример Пусть

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in F^3$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 12 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \\ \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Тогда v_1, v_2 и v_4 – базис линейной оболочки и $v_3 = 2v_1 + 3v_2$ и $v_5 = v_1 - 2v_4$.

2 Нахождение какого-то базиса линейной оболочки

Дано Пусть $v_1, \dots, v_m \in F^n$ – вектора и $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ – их линейная оболочка.

Задача Найти какой-нибудь базис подпространства V .

Алгоритм

1. Уложить все вектора v_i в строки матрицы $A \in M_{mn}(F)$.
2. Элементарными преобразованиями строк привести матрицу к ступенчатому виду.
3. Ненулевые строки полученной матрицы будут искомым базисом.

3 Дополнение линейно независимой системы до базиса всего пространства стандартными векторами

Дано Пусть $v_1, \dots, v_m \in F^n$ – линейно независимая система векторов, $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ – их линейная оболочка и e_i – стандартные базисные векторы, т.е. на i -ом месте стоит 1, а в остальных 0.

Задача Найти такие вектора $e_{k_1}, \dots, e_{k_{n-m}}$, что система $v_1, \dots, v_m, e_{k_1}, \dots, e_{k_{n-m}}$ является базисом F^n .

Алгоритм

1. Уложить вектора v_i в строки матрицы $A \in M_{m \times n}(F)$.
2. Привести матрицу A к ступенчатому виду.
3. Пусть k_1, \dots, k_{n-m} – номера неглавных столбцов. Тогда $e_1, \dots, e_{k_{n-m}}$ – искомое множество.

4 Найти ФСР однородной СЛУ

Дано Система однородных линейных уравнений $Ax = 0$, где $A \in M_{m \times n}(F)$ и $x \in F^n$.

Задача Найти ФСР системы $Ax = 0$.

Алгоритм

1. Привести матрицу A элементарными преобразованиями строк к улучшенному ступенчатому виду. Например

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{31} & 0 & a_{51} \\ 0 & 1 & a_{32} & 0 & a_{52} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{53} \end{pmatrix}$$

2. Пусть k_1, \dots, k_r – позиции свободных переменных. Если положить одну из этих переменных равной 1, а все остальные нулями, то существует единственное решение, которое мы обозначим через u_i (всего r штук). Например, для матрицы A' выше свободные переменные имеют номера 3 и 5. Тогда вектора (записанные в строку)

$$u_1 = (-a_{31} \quad -a_{32} \quad 1 \quad 0 \quad 0), u_2 = (-a_{51} \quad -a_{52} \quad 0 \quad -a_{53} \quad 1)$$

являются ФСР.

5 Задать подпространство базисом, если оно задано матричным уравнением

Дано Пусть $A \in M_{m \times n}(F)$ и $V \subseteq F^n$ задано в виде $V = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$.

Задача Найти базис подпространства V .

Алгоритм

1. Найти ФСР системы $Ay = 0$. Векторы ФСР будут базисом V .

6 Задать подпространство матричным уравнением, если оно задано линейной оболочкой

Дано Пусть $v_1, \dots, v_k \in F^n$ – набор векторов и $V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

Задача Для некоторого m найти матрицу $A \in M_{m \times n}(F)$ такую, что $V = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$.

Алгоритм

1. Уложить вектора v_i в строки матрицы $B \in M_{kn}(F)$.
2. Найти ФСР системы $Bz = 0$.
3. Уложить ФСР в строки матрицы $A \in M_{mn}(F)$, где m – количество векторов в ФСР. Матрица A и будет искомой.

7 Найти матрицу замены координат

Дано Векторное пространство V , $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_n)$ – два базиса пространства V . Известна матрица перехода от e к f , т.е. $(f_1, \dots, f_n) = (e_1, \dots, e_n)A$, где $A \in M_n(F)$. Дан вектор $v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$.

Задача Найти разложение v по базису f .

Алгоритм

1. Если $v = ex$, где $x \in F^n$, а также $v = fy$, где $y \in F^n$, то $y = A^{-1}x$.

8 Найти матрицу линейного отображения при замене базиса

Дано Векторное пространство V с базисами $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$, а также векторное пространство U с базисами $f = (f_1, \dots, f_m)$ и $f' = (f'_1, \dots, f'_m)$. Известны матрицы перехода $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)C$ и $(f'_1, \dots, f'_m) = (f_1, \dots, f_m)D$, где $C \in M_n(F)$ и $D \in M_m(F)$. Дано линейное отображение $\phi: V \rightarrow U$ заданное в базисах e и f матрицей $A \in M_{nm}(F)$, т.е. $\phi e = fA$.

Задача Найти матрицу отображения ϕ в базисах e' и f' , то есть такую $A' \in M_{nm}(F)$, что $\phi e' = f'A'$.

Алгоритм

1. $A' = D^{-1}AC$.

9 Определить существует ли линейное отображение заданное на векторах

Дано Векторное пространство V над полем F и набор векторов $v_1, \dots, v_k \in V$, векторное пространство U и набор векторов $u_1, \dots, u_k \in U$.

Задача Определить существует ли линейное отображение $\phi: V \rightarrow U$ такое, что $\phi(v_i) = u_i$.

Алгоритм

1. Среди векторов v_1, \dots, v_k выделить линейно независимые, а остальные разложить по ним.
2. Пусть на предыдущем этапе базис получился v_1, \dots, v_r , а $v_{r+i} = a_{i1}v_1 + \dots + a_{ir}v_r$.
3. Искомое линейное отображение ϕ существует тогда и только тогда, когда выполняются равенства $u_{r+i} = a_{i1}u_1 + \dots + a_{ir}u_r$.¹

10 Найти базис образа и ядра линейного отображения

Дано $\phi: F^n \rightarrow F^m$ задан $x \mapsto Ax$, где $A \in M_{mn}(F)$.

Задача Найти базис $\text{Im } \phi \in F^m$ и базис $\ker \phi \in F^n$.

¹В частности, если все v_i оказались линейно независимыми, то линейное отображение ϕ обязательно существует.

Алгоритм

1. Выделить базис среди столбцов матрицы A . В результате получится базис $\text{Im } \phi$.
2. Найти ФСР системы $Ax = 0$. Полученная ФСР будет базисом $\ker \phi$.

11 Найти линейное отображение с заданными ядром и образом

Дано Пространства $U \subseteq F^n$ и $W \subseteq F^m$ такие, что $\dim U + \dim W = n$.

Задача Найти матрицу линейного отображения $\varphi: F^n \rightarrow F^m$ такого, что $U = \ker \varphi$ и $W = \text{Im } \varphi$.

Алгоритм

1. Задать подпространство W с помощью базиса. Пусть b_1, \dots, b_k – базис W . Определим матрицу $B = (b_1 | \dots | b_k)$.
2. Задать подпространство U системой с линейно независимыми строками $U = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$.
3. В силу условия $\dim U + \dim W = n$ матрица A будет иметь столько же строк, сколько столбцов в матрице B . В этом случае искомое линейное отображение задается матрицей BA .

12 Найти сумму подпространств заданных линейными оболочками

Дано Подпространства $V, U \subseteq F^n$ заданные в виде $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$, $U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$, где $v_i, u_j \in F^n$.

Задача Найти базис $V + U$.

Алгоритм

1. Надо найти базис линейной оболочки $\langle v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_k \rangle$.

13 Найти пересечение подпространств заданных линейными оболочками

Дано Подпространства $V, U \subseteq F^n$ заданные в виде $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$, $U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$, где $v_i, u_j \in F^n$.

Задача Найти базис $V \cap U$.²

Алгоритм

1. Найти ФСР системы $Dx = 0$, где $D = (v_1 | \dots | v_m | u_1 | \dots | u_k)$ и $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, где $\alpha \in F^m$, $\beta \in F^k$.
2. Пусть $\left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \alpha_s \\ \beta_1 & \beta_s \end{array} \right)$ – ФСР. Далее есть две опции (из них вторая опция предпочтительнее!):
 - Множество векторов $R = (v_1 | \dots | v_m)(\alpha_1 | \dots | \alpha_s)$ порождает $V \cap U$. Среди $(\alpha_1 | \dots | \alpha_s)$ можно выкинуть те α_i , для которых $\beta_i = 0$.³
 - Множество векторов $R' = (u_1 | \dots | u_k)(\beta_1 | \dots | \beta_s)$ порождает $V \cap U$. Причем можно рассматривать только ненулевые β_i .
3. Выделить базис среди столбцов R . Это и будет базис $V \cap U$.
 - Если векторы u_1, \dots, u_k были линейно независимы изначально и β_i, \dots, β_s – все ненулевые сегменты ФСР с прошлого шага, то $(u_1 | \dots | u_k)(\beta_i | \dots | \beta_s)$ будет базисом $V \cap U$.

²В это задаче можно задать подпространства системами, потом найти пересечение в виде системы, потом задать результат базисом. Но есть куда более эффективный способ.

³Если ФСР построен по стандартному базису, то останутся α_i с нулевыми свободными переменными.

14 Найти пересечение подпространств заданных матричным уравнением

Дано Подпространства $V, U \subseteq F^n$ заданные в виде $V = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$, $U = \{y \in F^n \mid By = 0\}$, где $A \in M_{m \times n}(F)$ и $B \in M_{k \times n}(F)$.

Задача Задать $V \cap U$ в виде $\{y \in F^n \mid Dy = 0\}$ для некоторого $D \in M_{kn}(F)$, где $\text{rk } D = k \leq n$.

Алгоритм

1. Рассмотреть матрицу $D' = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$.
2. Выделить среди строк D' линейно независимую подсистему. Результат и будет искомая D .

15 Найти пересечение подпространств заданных разными способами

Дано Подпространства $V, U \subseteq F^n$ заданные в виде $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$, $U = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$, где $A \in M_{kn}(F)$.

Задача Задать $V \cap U$ системой линейных уравнений.

Алгоритм

1. Задать подпространство V системой в виде $\{x \in F^n \mid Dx = 0\}$.
2. Тогда $V \cap U$ задается объединенной системой $\begin{pmatrix} D \\ A \end{pmatrix}$.

16 Найти сумму подпространств заданных разными способами

Дано Подпространства $V, U \subseteq F^n$ заданные в виде $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$, $U = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$, где $A \in M_{kn}(F)$.

Задача Задать $V + U$ в виде $\{x \in F^n \mid Dx = 0\}$, где $D \in M_{tn}(F)$ и $t = \text{rk } D$.⁴

Алгоритм

1. Определим матрицу $B = (v_1 \mid \dots \mid v_m)$ и найдем ФСР для системы $B^t A^t x = 0$. Пусть это будет x_1, \dots, x_t .
2. Тогда матрица $D' = (x_1 \mid \dots \mid x_t)^t A$ задает $V + U$ системой.
3. Отобрать среди строк D' линейно независимые и получить D .
 - Если строки A были линейно независимы, то строки D' уже будут линейно независимыми.

17 Найти сумму подпространств заданных разными способами

Дано Подпространства $V, U \subseteq F^n$ заданные в виде $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$, $U = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$, где $A \in M_{kn}(F)$.

Задача Задать $V + U$ в виде линейной оболочки.

Алгоритм

1. Задать подпространство U с помощью линейной оболочки.
2. Объединить линейные оболочки для V и для U .

18 Найти матрицу линейного оператора при замене базиса

Дано Векторное пространство V над полем F , $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_n)$ – два базиса пространства V . Известна матрица перехода от e к f , т.е. $(f_1, \dots, f_n) = (e_1, \dots, e_n)C$, где $C \in M_n(F)$. Дано линейное отображение $\phi: V \rightarrow V$ заданное в базисе e матрицей $A \in M_n(F)$, т.е. $\phi e = eA$.

⁴Всегда можно задать U линейной оболочкой, потом задать $V + U$ линейной оболочкой, а потом найти представление системой. Я же покажу тут другой подход.

Задача Найти матрицу отображения ϕ в базисе f .

Алгоритм

1. Пусть $\phi f = fB$, где B – искомая матрица. Тогда $B = C^{-1}AC$.

19 Найти проекцию вектора на подпространство вдоль другого подпространства

Дано $F^n = V \oplus U$, где V и U заданы базисами $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$, $U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$. Пусть $z \in F^n$ раскладывается $z = v + u$, где $v \in V$ и $u \in U$.

Задача Найти v и u .

Алгоритм

1. Решить СЛУ $Dx = z$, где $D = (v_1 | \dots | v_m | u_1 | \dots | u_k)$ и $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, где $\alpha \in F^m$ и $\beta \in F^k$.
2. Тогда $v = (v_1 | \dots | v_m)\alpha$ и $u = (u_1 | \dots | u_k)\beta$.

20 Найти оператор проекции на подпространство вдоль другого подпространства

Дано $F^n = V \oplus U$, где V задано базисом $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$, $U = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$, где $A \in M_{kn}(F)$ и $\text{rk } A = k \leq n$.

Задача Найти матрицу отображения $\phi: V \rightarrow V$ такого, что $\phi(U) = 0$ и $\phi(v) = v$ для любого $v \in V$.⁵

Алгоритм

1. Положим $B = (v_1 | \dots | v_m) \in M_{nm}(F)$.
2. Обязательно получится, что $m = k$ и матрица AB невырождена.
3. Искомый ϕ имеет матрицу $B(AB)^{-1}A$.

21 Поиск собственных значений и векторов

Дано Матрица $A \in M_n(F)$.

Задача Найти все собственные значения λ_i для A и для каждого λ_i найти базис пространства $V_{\lambda_i} = \{v \in F^n \mid Av = \lambda_i v\}$.

Алгоритм

1. Посчитать характеристический многочлен $(-1)^n \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$.
2. Найти корни многочлена $\chi_A(\lambda)$. Корни $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ будут собственными значениями A .
3. Для каждого λ_i найти ФСР системы $(A - \lambda_i E)x = 0$. Тогда ФСР будет базисом V_{λ_i} .

Если дополнительно найти с каждым собственным значением λ_i его кратность n_i в характеристическом многочлене, то на последнем шаге размер ФСР для λ_i оценивается так. Собственных векторов будет не меньше чем 1 и не больше, чем n_i .

22 Поиск корневых подпространств

Дано Матрица $A \in M_n(F)$.

⁵Заметим, что если $z \in F^n$ раскладывается $z = v + u$, где $v \in V$ и $u \in U$, то $\phi(z) = v$.

Задача Найти все собственные значения λ_i для A и для каждого λ_i найти базис пространства $V^{\lambda_i} = \{v \in F^n \mid \exists n: (A - \lambda_i E)^n v = 0\}$.

Алгоритм

1. Посчитать характеристический многочлен $(-1)^n \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$.
2. Найти корни многочлена $\chi_A(\lambda)$ с кратностями. Корни $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ будут собственными значениями A . И пусть кратности будут $\{n_1, \dots, n_k\}$.
3. Для каждого λ_i найти ФСР системы $(A - \lambda_i E)^{n_i} x = 0$. Тогда ФСР будет базисом V^{λ_i} . Обратите внимание, что для каждого λ_i должно получиться ровно n_i векторов.

23 Поиск инвариантных подпространств

Дано Матрица $A \in M_n(F)$.

Задача Найти все подпространства $U \subseteq F^n$ такие, что $AU \subseteq U$.

Алгоритм

1. Для каждого вектора $v \in F^n$ найти главное инвариантное подпространство

$$[v]_A = \langle v, Av, A^2v, \dots, A^m v, \dots \rangle$$

Обратите внимание, что это «творческий шаг» тут нет общего алгоритма,⁶ тут придется немного догадаться.

2. Описать все инвариантные подпространства, как конечные суммы главных, а именно любое инвариантное U будет иметь вид $[v_1]_A + \dots + [v_k]_A$, где v_1, \dots, v_k пробегает все возможные конечные наборы векторов.

24 Поиск инвариантных подпространств для диагонализуемого оператора

Дано Матрица $A \in M_n(F)$, задающая диагонализуемый оператор.

Задача Найти все подпространства $U \subseteq F^n$ такие, что $AU \subseteq U$.

Алгоритм

1. В начале надо найти все собственные значения и собственные подпространства. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – все собственные значения с кратностями n_1, \dots, n_k . Тогда $F^n = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$.
2. Надо выбрать произвольное подпространство $U_i \subseteq V_{\lambda_i}$ (включая нулевое и все V_{λ_i} целиком). Тогда U_1, \dots, U_k будут линейно независимыми и $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ будут все возможные инвариантные подпространства.

25 Проверка на диагонализуемость

Дано Матрица $A \in M_n(F)$, задающая линейный оператор $\varphi: F^n \rightarrow F^n$.

Задача Выяснить существует ли базис, в котором φ задается диагональной матрицей и если задается, то какой именно. На матричном языке: существует ли невырожденная матрица $C \in M_n(F)$ такая, что $C^{-1}AC$ является диагональной и найти эту диагональную матрицу.

⁶Если говорить правду, то алгоритм то есть, но он такой геморройный и требует знаний, которых пока у нас нет, так что да ну его.

Алгоритм

1. Найдем характеристический многочлен $\chi(t)$ для φ , он же для A по формуле $(-1)^n \chi(t) = \det(A - tE)$.
2. Проверим, раскладывается ли $\chi(t)$ на линейные множители над F , то есть представляется ли он в виде $\chi(t) = (t - \lambda_1)^{d_1} \dots (t - \lambda_k)^{d_k}$. Если не представляется, то φ (или что то же самое A) не диагонализируется.
3. Если $\chi(t) = (t - \lambda_1)^{d_1} \dots (t - \lambda_k)^{d_k}$. Найдем для каждого λ_i базис V_{λ_i} как ФСР системы $(A - \lambda_i E)x = 0$. Если для хотя бы одного i количество элементов в ФСР меньше соответствующей кратности корня d_i , то φ не диагонализируется.
4. Если для каждого i мы получили, что размер ФСР совпадает с кратностью корня, то есть $\dim V_{\lambda_i} = d_i$. То φ диагонализируется. В этом случае матрица C состоит из собственных векторов. Если собственные векторы для λ_i есть $\{v_{i1}, \dots, v_{id_i}\}$, то $C = (v_{11} | \dots | v_{1d_1} | v_{21} | \dots | v_{2d_2} | \dots | v_{k1} | \dots | v_{kd_k})$. При этом в новом базисе будет диагональная матрица $C^{-1}AC = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_k)$, где каждое λ_i встречается d_i раз.

Заметим, что если поле F алгебраически замкнуто, то первый шаг алгоритма выполнен автоматически, а именно, над алгебраически замкнутым полем любой многочлен разлагается на линейные множители. Потому в этом случае вопрос о диагонализуемости – это лишь проверка всех равенств $\dim V_{\lambda_i} = d_i$.