# Алгоритмы

## 1 Выделение базиса из системы векторов

**Дано** Пусть $v_1, \dots, v_m \in F^n$ – вектора и $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ – их линейная оболочка.

**Задача** Среди векторов $v_1, \dots, v_m$ найти базис пространства $V$ и разложить оставшиеся вектора по этому базису.

**Алгоритм**

1. Запишем вектора $v_1, \dots, v_m$ по столбцам в матрицу $A \in \mathrm{M}_{n\,m}(F)$. Например, при $n = 3$, $m = 5$

$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} & v_{51} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} & v_{42} & v_{52} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} & v_{43} & v_{53} \end{pmatrix}$$

2. Приведем матрицу $A$ элементарными преобразованиями строк к улучшенному ступенчатому виду. Например

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{31} & 0 & a_{51} \\ 0 & 1 & a_{32} & 0 & a_{52} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{53} \end{pmatrix}$$

3. Пусть $k_1, \dots, k_r$ – номера главных позиций в матрице $A'$. Тогда вектора $v_{k_1}, \dots, v_{k_r}$ образуют базис $V$. Например, в примере выше это вектора $v_1$, $v_2$ и $v_4$.

4. Пусть $v_i$ – вектор соответствует неглавной позиции в $A'$. Тогда в $i$-ом столбце $A'$ записаны координаты разложения $v_i$ через найденный базис выше. Например, в примере выше $v_3 = a_{31}v_1 + a_{32}v_2$ и $v_5 = a_{51}v_1 + a_{52}v_2 + a_{53}v_4$.

**Пример** Пусть

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in F^3$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 12 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto$$
$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Тогда $v_1$, $v_2$ и $v_4$ – базис линейной оболочки. $v_3 = 2v_1 + 3v_2$ и $v_5 = v_1 - 2v_4$.

## 2 Нахождение какого-то базиса линейной оболочки

**Дано** Пусть $v_1, \dots, v_m \in F^n$ – вектора и $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ – их линейная оболочка.

**Задача** Найти какой-нибудь базис подпространства $V$.

**Алгоритм**

1. Уложить все вектора $v_i$ в строки матрицы $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(F)$.

2. Элементарными преобразованиями строк привести матрицу к ступенчатому виду.

3. Ненулевые строки полученной матрицы будут искомым базисом.

## 3 Дополнение линейно независимой системы до базиса всего пространства стандартными векторами

**Дано** Пусть $v_1, \ldots, v_m \in F^n$ – линейно независимая система векторов, $V = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ – их линейная оболочка и $e_i$ – стандартные базисные векторы, т.е. на $i$-ом месте стоит 1, а в остальных 0.

**Задача** Найти такие вектора $e_{k_1}, \ldots, e_{k_{n-m}}$, что система $v_1, \ldots, v_m, e_{k_1}, \ldots, e_{k_{n-m}}$ является базисом $F^n$.

**Алгоритм**

1. Уложить вектора $v_i$ в строки матрицы $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(F)$.
2. Привести матрицу $A$ к ступенчатому виду.
3. Пусть $k_1, \ldots, k_{n-m}$ – номера неглавных столбцов. Тогда $e_{k_1}, \ldots, e_{k_{n-m}}$ – искомое множество.

## 4 Найти ФСР однородной СЛУ

**Дано** Система однородных линейных уравнений $Ax = 0$, где $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(F)$ и $x \in F^n$.

**Задача** Найти ФСР системы $Ax = 0$.

**Алгоритм**

1. Привести матрицу $A$ элементарными преобразованиями строк к улучшенному ступенчатому виду. Например
$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{31} & 0 & a_{51} \\ 0 & 1 & a_{32} & 0 & a_{52} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{53} \end{pmatrix}$$
2. Пусть $k_1, \ldots, k_r$ – позиции свободных переменных. Если положить одну из этих переменных равной 1, а все остальные нулями, то существует единственное решение, которое мы обозначим через $u_i$ (всего $r$ штук). Например, для матрицы $A'$ выше свободные переменные имеют номера 3 и 5. Тогда вектора (записанные в строку)
$$u_1 = \begin{pmatrix} -a_{31} & -a_{32} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\, u_2 = \begin{pmatrix} -a_{51} & -a_{52} & 0 & -a_{53} & 1 \end{pmatrix}$$
являются ФСР.

## 5 Задать подпространство базисом, если оно задано матричным уравнением

**Дано** Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(F)$ и $V \subseteq F^n$ задано в виде $V = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$.

**Задача** Найти базис подпространства $V$.

**Алгоритм**

1. Найти ФСР системы $Ay = 0$. Векторы ФСР будут базисом $V$.

## 6 Задать подпространство матричным уравнением, если оно задано линейной оболочной

**Дано** Пусть $v_1, \ldots, v_k \in F^n$ – набор векторов и $V = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.

**Задача** Для некоторого $m$ найти матрицу $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(F)$ такую, что $V = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$.

**Алгоритм**

1. Уложить вектора $v_i$ в строки матрицы $B \in \mathrm{M}_{k\,n}(F)$.
2. Найти ФСР системы $Bz = 0$.
3. Уложить ФСР в строки матрицы $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(F)$, где $m$ – количество векторов в ФСР. Матрица $A$ и будет искомой.

## 7 Найти матрицу замены координат

**Дано** Векторное пространство $V$, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и $f = (f_1, \ldots, f_n)$ – два базиса пространства $V$. Известна матрица перехода от $e$ к $f$, т.е. $(f_1, \ldots, f_n) = (e_1, \ldots, e_n)A$, где $A \in \mathrm{M}_n(F)$. Дан вектор $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$.

**Задача** Найти разложение $v$ по базису $f$.

**Алгоритм**

1. Если $v = ex$, где $x \in F^n$, а также $v = fy$, где $y \in F^n$, то $y = A^{-1}x$.

## 8 Найти матрицу линейного отображения при замене базиса

**Дано** Векторное пространство $V$ с базисами $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$, а также векторное пространство $U$ с базисами $f = (f_1, \ldots, f_m)$ и $f' = (f'_1, \ldots, f'_m)$. Известны матрицы перехода $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$ и $(f'_1, \ldots, f'_m) = (f_1, \ldots, f_m)D$, где $C \in \mathrm{M}_n(F)$ и $D \in \mathrm{M}_m(F)$. Дано линейное отображение $\phi\colon V \to U$ заданное в базисах $e$ и $f$ матрицей $A \in \mathrm{M}_{n\,m}(F)$, т.е. $\phi e = fA$.

**Задача** Найти матрицу отображения $\phi$ в базисах $e'$ и $f'$, то есть такую $A' \in \mathrm{M}_{n\,m}(F)$, что $\phi e' = f'A'$.

**Алгоритм**

1. $A' = D^{-1}AC$.

## 9 Определить существует ли линейное отображение заданное на векторах

**Дано** Векторное пространство $V$ над полем $F$ и набор векторов $v_1, \ldots, v_k \in V$, векторное пространство $U$ и набор векторов $u_1, \ldots, u_k \in U$.

**Задача** Определить существует ли линейное отображение $\phi\colon V \to U$ такое, что $\phi(v_i) = u_i$.

**Алгоритм**

1. Среди векторов $v_1, \ldots, v_k$ выделить линейно независимые, а остальные разложить по ним.
2. Пусть на предыдущем этапе базис получился $v_1, \ldots, v_r$, а $v_{r+i} = a_{i1}v_1 + \ldots + a_{ir}v_r$.
3. Искомое линейное отображение $\phi$ существует тогда и только тогда, когда выполняются равенства $u_{r+i} = a_{i1}u_1 + \ldots + a_{ir}u_r$.[1]

## 10 Найти базис образа и ядра линейного отображения

**Дано** $\phi\colon F^n \to F^m$ задан $x \mapsto Ax$, где $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(F)$.

**Задача** Найти базис $\operatorname{Im}\phi \in F^m$ и базис $\ker\phi \in F^n$.

[1] В частности, если все $v_i$ оказались линейно независимыми, то линейное отображение $\phi$ обязательно существует.

**Алгоритм**

1. Выделить базис среди столбцов матрицы $A$. В результате получится базис $\operatorname{Im}\phi$.
2. Найти ФСР системы $Ax = 0$. Полученная ФСР будет базисом $\ker\phi$.

## 11 Найти линейное отображение с заданными ядром и образом

**Дано** Пространства $U \subseteq F^n$ и $W \subseteq F^m$ такие, что $\dim U + \dim W = n$.

**Задача** Найти матрицу линейного отображения $\varphi\colon F^n \to F^m$ такого, что $U = \ker\varphi$ и $W = \operatorname{Im}\varphi$.

**Алгоритм**

1. Задать подпространство $W$ с помощью базиса. Пусть $b_1, \ldots, b_k$ – базис $W$. Определим матрицу $B = (b_1|\ldots|b_k)$.
2. Задать подпространство $U$ системой с линейно независимыми строками $U = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$.
3. В силу условия $\dim U + \dim W = n$ матрица $A$ будет иметь столько же строк, сколько столбцов в матрице $B$. В этом случае искомое линейное отображение задается матрицей $BA$.

## 12 Найти сумму подпространств заданных линейными оболочками

**Дано** Подпространства $V, U \subseteq F^n$ заданные в виде $V = \langle v_1, \ldots, v_m\rangle$, $U = \langle u_1, \ldots, u_k\rangle$, где $v_i, u_j \in F^n$.

**Задача** Найти базис $V + U$.

**Алгоритм**

1. Надо найти базис линейной оболочки $\langle v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots, u_k\rangle$.

## 13 Найти пересечение подпространств заданных линейными оболочками

**Дано** Подпространства $V, U \subseteq F^n$ заданные в виде $V = \langle v_1, \ldots, v_m\rangle$, $U = \langle u_1, \ldots, u_k\rangle$, где $v_i, u_j \in F^n$.

**Задача** Найти базис $V \cap U$.[2]

**Алгоритм**

1. Найти ФСР системы $Dx = 0$, где $D = (v_1|\ldots|v_m|u_1|\ldots|u_k)$ и $x = \left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right)$, где $\alpha \in F^m$, $\beta \in F^k$.
2. Пусть $\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{smallmatrix}\middle|\ldots\middle|\begin{smallmatrix}\alpha_s\\ \beta_s\end{smallmatrix}\right)$ – ФСР. Далее есть две опции (из них вторая опция предпочтительнее!):
   - Множество векторов $R = (v_1|\ldots|v_m)(\alpha_1|\ldots|\alpha_s)$ порождает $V \cap U$. Среди $(\alpha_1|\ldots|\alpha_s)$ можно выкинуть те $\alpha_i$, для которых $\beta_i = 0$.[3]
   - Множество векторов $R' = (u_1|\ldots|u_k)(\beta_1|\ldots|\beta_s)$ порождает $V \cap U$. Причем можно рассматривать только ненулевые $\beta_i$.
3. Выделить базис среди столбцов $R$. Это и будет базис $V \cap U$.
   - Если векторы $u_1, \ldots, u_k$ были линейно независимы изначально и $\beta_i, \ldots, \beta_s$ – все ненулевые сегменты ФСР с прошлого шага, то $(u_1|\ldots|u_k)(\beta_i|\ldots|\beta_s)$ будет базисом $V \cap U$.

[2] В это задаче можно задать подпространства системами, потом найти пересечение в виде системы, потом задать результат базисом. Но есть куда более эффективный способ.

[3] Если ФСР построен по стандартному базису, то останутся $\alpha_i$ с нулевыми свободными переменными.

## 14 Найти пересечение подпространств заданных матричным уравнением

**Дано** Подпространства $V, U \subseteq F^n$ заданные в виде $V = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$, $U = \{y \in F^n \mid By = 0\}$, где $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(F)$ и $B \in \mathrm{M}_{k\,n}(F)$.

**Задача** Задать $V \cap U$ в виде $\{y \in F^n \mid Dy = 0\}$ для некоторого $D \in \mathrm{M}_{k\,n}(F)$, где $\operatorname{rk} D = k \leqslant n$.

**Алгоритм**

1. Рассмотреть матрицу $D' = \left(\frac{A}{B}\right)$.
2. Выделить среди строк $D'$ линейно независимую подсистему. Результат и будет искомая $D$.

## 15 Найти сумму подпространств заданных матричным уравнением

**Дано** Подпространства $V, U \subseteq F^n$ заданные в виде $V = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$, $U = \{y \in F^n \mid By = 0\}$, где $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(F)$ и $B \in \mathrm{M}_{k\,n}(F)$.

**Задача** Задать $V + U$ в виде $\{y \in F^n \mid Ry = 0\}$ для некоторого $R \in \mathrm{M}_{k\,n}(F)$, где $\operatorname{rk} R = k \leqslant n$.[4]

**Алгоритм**

1. Найти ФСР системы $Dx = 0$, где $D = (A^t|B^t)$ и $x = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$, где $\alpha \in F^m$ и $\beta \in F^k$.
2. Пусть $\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\middle|\ldots\middle|\frac{\alpha_s}{\beta_s}\right)$ – ФСР. Далее есть две опции:
   - Если определим $S = (\alpha_1|\ldots|\alpha_s)^t A$, то $V + U = \{y \in F^n \mid Sy = 0\}$. Здесь достаточно взять только те $\alpha_i$, для которых $\beta_i$ не равны нулю.
   - Если определим $T = (\beta_1|\ldots|\beta_s)^t B$, то $V + U = \{y \in F^n \mid Ty = 0\}$. Здесь достаточно взять только ненулевые $\beta_i$.
3. Выделить базис среди строк $S$ (или $T$). Это и будет искомая матрица $R$.
   - Если строки $B$ были линейно независимыми и мы выбрали только ненулевые $\beta_i$, то $T$ уже будет искомой, то есть ее строки будут линейно независимыми.

## 16 Найти пересечение подпространств заданных разными способами

**Дано** Подпространства $V, U \subseteq F^n$ заданные в виде $V = \langle v_1, \ldots, v_m\rangle$, $U = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$, где $A \in \mathrm{M}_{k\,n}(F)$.

**Задача** Найти базис $V \cap U$.

**Алгоритм**

1. Определим матрицу $B = (v_1|\ldots|v_m)$ и найдем ФСР для системы $ABx = 0$. Пусть это будет $x_1, \ldots, x_t$.
2. Тогда столбцы матрицы $R = B(x_1|\ldots|x_t)$ порождают $V \cap U$.
3. Отобрать среди столбцов $R$ линейно независимые.
   - Если $v_1, \ldots, v_m$ были линейно независимы (то есть базис $V$), то столбцы $R$ уже будут линейно независимыми.

## 17 Найти пересечение подпространств заданных разными способами

**Дано** Подпространства $V, U \subseteq F^n$ заданные в виде $V = \langle v_1, \ldots, v_m\rangle$, $U = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$, где $A \in \mathrm{M}_{k\,n}(F)$.

[4] В этой задаче можно задать подпространства базисами, потом найти сумму заданной базисом, потом задать эту сумму системой. Но есть более эффективный метод.

**Задача** Задать $V \cap U$ системой линейных уравнений.

**Алгоритм**

1. Задать подпространство $V$ системой в виде $\{x \in F^n \mid Dx = 0\}$.
2. Тогда $V \cap U$ задается объединенной системой $\left(\frac{B}{D}\right)$.

## 18 Найти сумму подпространств заданных разными способами

**Дано** Подпространства $V, U \subseteq F^n$ заданные в виде $V = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$, $U = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$, где $A \in \mathrm{M}_{k\,n}(F)$.

**Задача** Задать $V + U$ в виде $\{x \in F^n \mid Dx = 0\}$, где $D \in \mathrm{M}_{t\,n}(F)$ и $t = \operatorname{rk} D$.[5]

**Алгоритм**

1. Определим матрицу $B = (v_1|\ldots|v_m)$ и найдем ФСР для системы $B^t A^t x = 0$. Пусть это будет $x_1, \ldots, x_t$.
2. Тогда матрица $D' = (x_1|\ldots|x_t)^t A$ задает $V + U$ системой.
3. Отобрать среди строк $D'$ линейно независимые и получить $D$.
   - Если строки $A$ были линейно независимы, то строки $D'$ уже будут линейно независимыми.

## 19 Найти сумму подпространств заданных разными способами

**Дано** Подпространства $V, U \subseteq F^n$ заданные в виде $V = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$, $U = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$, где $A \in \mathrm{M}_{k\,n}(F)$.

**Задача** Задать $V + U$ в виде линейной оболочки.

**Алгоритм**

1. Задать подпространство $U$ с помощью линейной оболочки.
2. Объединить линейные оболочки для $V$ и для $U$.

## 20 Найти матрицу линейного оператора при замене базиса

**Дано** Векторное пространство $V$ над полем $F$, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и $f = (f_1, \ldots, f_n)$ – два базиса пространства $V$. Известна матрица перехода от $e$ к $f$, т.е. $(f_1, \ldots, f_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$, где $C \in \mathrm{M}_n(F)$. Дано линейное отображение $\phi\colon V \to V$ заданное в базисе $e$ матрицей $A \in \mathrm{M}_n(F)$, т.е. $\phi e = eA$.

**Задача** Найти матрицу отображения $\phi$ в базисе $f$.

**Алгоритм**

1. Пусть $\phi f = fB$, где $B$ – искомая матрица. Тогда $B = C^{-1}AC$.

## 21 Найти проекцию вектора на подпространство вдоль другого подпространства

**Дано** $F^n = V \oplus U$, где $V$ и $U$ заданы базисами $V = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$, $U = \langle u_1, \ldots, u_k \rangle$. Пусть $z \in F^n$ раскладывается $z = v + u$, где $v \in V$ и $u \in U$.

**Задача** Найти $v$ и $u$.

[5] Всегда можно задать $U$ линейной оболочкой, потом задать $V+U$ линейной оболочкой, а потом найти представление системой. Я же покажу тут другой подход.

**Алгоритм**

1. Решить СЛУ $Dx = z$, где $D = (v_1|\dots|v_m|u_1|\dots|u_k)$ и $x = \left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right)$, где $\alpha \in F^m$ и $\beta \in F^k$.
2. Тогда $v = (v_1|\dots|v_m)\alpha$ и $u = (u_1|\dots|u_k)\beta$.

## 22 Найти оператор проекции на подпространство вдоль другого подпространства

**Дано** $F^n = V \oplus U$, где $V$ задано базисом $V = \langle v_1, \dots, v_m\rangle$, $U = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$, где $A \in \mathrm{M}_{k\,n}(F)$ и $\operatorname{rk} A = k \leqslant n$.

**Задача** Найти матрицу отображения $\phi\colon V \to V$ такого, что $\phi(U) = 0$ и $\phi(v) = v$ для любого $v \in V$.[6]

**Алгоритм**

1. Положим $B = (v_1|\dots|v_m) \in \mathrm{M}_{n\,m}(F)$.
2. Обязательно получится, что $m = k$ и матрица $AB$ невырождена.
3. Искомый $\phi$ имеет матрицу $B(AB)^{-1}A$.

## 23 Поиск собственных значений и векторов

**Дано** Матрица $A \in \mathrm{M}_n(F)$.

**Задача** Найти все собственные значения $\lambda_i$ для $A$ и для каждого $\lambda_i$ найти базис пространства $V_{\lambda_i} = \{v \in F^n \mid Av = \lambda_i v\}$.

**Алгоритм**

1. Посчитать характеристический многочлен $(-1)^n\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$.
2. Найти корни многочлена $\chi_A(\lambda)$. Корни $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ будут собственным значениями $A$.
3. Для каждого $\lambda_i$ найти ФСР системы $(A - \lambda_i E)x = 0$. Тогда ФСР будет базисом $V_{\lambda_i}$.

Если дополнительно найти с каждым собственным значением $\lambda_i$ его кратность $n_i$ в характеристическом многочлене, то на последнем шаге размер ФСР для $\lambda_i$ оценивается так. Собственных векторов будет не меньше чем 1 и не больше, чем $n_i$.

## 24 Поиск корневых подпространств

**Дано** Матрица $A \in \mathrm{M}_n(F)$.

**Задача** Найти все собственные значения $\lambda_i$ для $A$ и для каждого $\lambda_i$ найти базис пространства $V^{\lambda_i} = \{v \in F^n \mid \exists n\colon (A - \lambda_i E)^n v = 0\}$.

**Алгоритм**

1. Посчитать характеристический многочлен $(-1)^n\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$.
2. Найти корни многочлена $\chi_A(\lambda)$ с кратностями. Корни $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ будут собственным значениями $A$. И пусть кратности будут $\{n_1, \dots, n_k\}$.
3. Для каждого $\lambda_i$ найти ФСР системы $(A - \lambda_i E)^{n_i} x = 0$. Тогда ФСР будет базисом $V^{\lambda_i}$. Обратите внимание, что для каждого $\lambda_i$ должно получиться ровно $n_i$ векторов.

[6] Заметим, что если $z \in F^n$ раскладывается $z = v + u$, где $v \in V$ и $u \in U$, то $\phi(z) = v$.

## 25 Поиск инвариантных подпространств

**Дано** Матрица $A \in \mathrm{M}_n(F)$.

**Задача** Найти все подпространства $U \subseteq F^n$ такие, что $AU \subseteq U$.

### Алгоритм

1. Для каждого вектора $v \in F^n$ найти главное инвариантное подпространство

$$[v]_A = \langle v, Av, A^2v, \dots, A^m v, \dots \rangle$$

   Обратите внимание, что это «творческий шаг» тут нет общего алгоритма,[7] тут придется немного догадаться.

2. Описать все инвариантные подпространства, как конечные суммы главных, а именно любое инвариантное $U$ будет иметь вид $[v_1]_A + \ldots + [v_k]_A$, где $v_1, \dots, v_k$ пробегает все возможные конечные наборы векторов.

## 26 Поиск инвариантных подпространств для диагонализуемого оператора

**Дано** Матрица $A \in \mathrm{M}_n(F)$, задающая диагонализуемый оператор.

**Задача** Найти все подпространства $U \subseteq F^n$ такие, что $AU \subseteq U$.

### Алгоритм

1. В начале надо найти все собственные значения и собственные подпространства. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – все собственные значения с кратностями $n_1, \dots, n_k$. Тогда $F^n = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$.

2. Надо выбрать произвольное подпространство $U_i \subseteq V_{\lambda_i}$ (включая нулевое и все $V_{\lambda_i}$ целиком). Тогда $U_1, \dots, U_k$ будут линейно независимыми и $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$ будут все возможные инвариантные подпространства.

## 27 Проверка на диагонализуемость

**Дано** Матрица $A \in \mathrm{M}_n(F)$, задающая линейный оператор $\varphi\colon F^n \to F^n$.

**Задача** Выяснить существует ли базис, в котором $\varphi$ задается диагональной матрицей и если задается, то какой именно. На матричном языке: существует ли невырожденная матрица $C \in \mathrm{M}_n(F)$ такая, что $C^{-1}AC$ является диагональной и найти эту диагональную матрицу.

### Алгоритм

1. Найдем характеристический многочлен $\chi(t)$ для $\varphi$, он же для $A$ по формуле $(-1)^n\chi(t) = \det(A - tE)$.

2. Проверим, раскладывается ли $\chi(t)$ на линейные множители над $F$, то есть представляется ли он в виде $\chi(t) = (t-\lambda_1)^{d_1} \dots (t-\lambda_k)^{d_k}$. Если не представляется, то $\varphi$ (или что то же самое $A$) не диагонализируется

3. Если $\chi(t) = (t - \lambda_1)^{d_1} \dots (t - \lambda_k)^{d_k}$. Найдем для каждого $\lambda_i$ базис $V_{\lambda_i}$ как ФСР системы $(A - \lambda_i E)x = 0$. Если для хотя бы одного $i$ количество элементов в ФСР меньше соответствующей кратности корня $d_i$, то $\varphi$ не диагонализируется.

4. Если для каждого $i$ мы получили, что размер ФСР совпадает с кратностью корня, то есть $\dim V_{\lambda_i} = d_i$. То $\varphi$ диагонализируется. В этом случае матрица $C$ состоит из собственных векторов. Если собственные векторы для $\lambda_i$ есть $\{v_{i1}, \dots, v_{id_i}\}$, то $C = (v_{11}|\dots|v_{1d_1}|v_{21}|\dots|v_{2d_2}|\dots|v_{k1}|\dots|v_{kd_k})$. При этом в новом базисе будет диагональная матрица $C^{-1}AC = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_k)$, где каждое $\lambda_i$ встречается $d_i$ раз.

[7] Если говорить правду, то алгоритм то есть, но он такой геморройный и требует знаний, которых пока у нас нет, так что да ну его.

Заметим, что если поле $F$ алгебраически замкнуто, то первый шаг алгоритма выполнен автоматически, а именно, над алгебраически замкнутым полем любой многочлен разлагается на линейные множители. Потому в этом случае вопрос о диагонализируемости – это лишь проверка всех равенств $\dim V_{\lambda_i} = d_i$.

## 28 Определить ЖНФ у оператора

**Дано** Матрица $A \in \mathrm{M}_n(F)$, где поле $F$ алгебраически замкнуто.

**Задача** Определить все собственные значения и размеры клеток в жордановой нормальной форме.

**Алгоритм**

1. Собственные значения совпадают со спектром их ищем, как корни характеристического многочлена $\chi_A(t) = (-1)^n \det(A - tE) = 0$. Получаем набор корней и их кратности $(\lambda_1, n_1), \ldots, (\lambda_k, n_k)$.

2. Для каждого $\lambda_i$ суммарный размер клеток равен $n_i$. Потому надо определить количество клеток для всех $k \in [1, n_i]$. Количество клеток считается по формуле

$$\text{количество клеток размера } k \ = \operatorname{rk}(A - \lambda_i E)^{k+1} + \operatorname{rk}(A - \lambda_i E)^{k-1} - 2\operatorname{rk}(A - \lambda_i E)^k$$

Обратите внимание, что если вы нашли $m$ клеток размера $k$, а кратность была $n_i$, то на оставшиеся клетки уходит $n_i - mk$ мест. Этим можно пользоваться, чтобы не считать все количества клеток подряд.

## 29 Определение ЖНФ у матриц 2 на 2

**Дано** Матрица $A \in \mathrm{M}_2(F)$, где поле $F$ алгебраически замкнутое.

**Найти** Жорданова форма может быть одной из

$$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix}$$

Определить какая форма в нашем случае и определить все числа.

**Алгоритм** Общая идея в том, чтобы подобрать инварианты, которые достаточно рассчитать для выбора из предоставленных вариантов.

1. Найдем характеристический многочлен $\chi_A(t) = \det(A - tE)$. И посчитаем его корни. Есть два варианта:

   (a) два разных корня $\lambda$ и $\mu$. В этом случае ЖНФ имеет вид

   $$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}$$

   (b) один корень $\lambda$ кратности 2. В этом случае, если $A = \lambda E$, то ЖНФ имеет вид

   $$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{pmatrix}$$

   В противном случае ЖНФ имеет вид

   $$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix}$$

## 30 Определить Жорданов базис у матриц 2 на 2

**Дано** Матрица $A \in \mathrm{M}_2(F)$, где поле $F$ алгебраически замкнутое.

**Задача** Зная ЖНФ определить жорданов базис $f_1, f_2$.

**Алгоритм**

1. Пусть ЖНФ имеет вид
$$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}$$
В этом случае оператор диагонализум, а значит базис выбирается из собственных векторов. Есть два способа найти их:
   (a) Вектор $f_1$ находим как ненулевое решение системы $(A-\lambda E)x = 0$, а вектор $f_2$ находим как ненулевое решение системы $(A - \mu E)x = 0$.
   (b) Вектор $f_1$ находим как ненулевой столбец матрицы $A - \mu E$, а вектор $f_2$ находим как ненулевой столбец матрицы $A - \lambda E$.
2. Пусть ЖНФ имеет вид
$$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{pmatrix}$$
В этом случае подходит любой базис.
3. Пусть ЖНФ имеет вид
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix}$$
В этом случае жорданов базис образует цепочку
$$\begin{tikzcd} f_2 \arrow[d, mapsto, "A-\lambda E"] \\ f_1 \arrow[d, mapsto, "A-\lambda E"] \\ 0 \end{tikzcd}$$
В этом случае векторы базиса ищутся так
   (a) Выбираем случайный вектор $f_2$. Всегда достаточно выбирать из стандартных базисных векторов.
   (b) Полагаем $f_1 = (A - \lambda E)f_2$.
   (c) Если $f_1 = 0$, то вернуться к выбору вектора $f_2$. Если $f_1 \neq 0$, то $f_1, f_2$ – искомый базис.

## 31 Определение ЖНФ у матриц 3 на 3

**Дано** Матрица $A \in \mathrm{M}_3(F)$, где поле $F$ алгебраически замкнуто.

**Найти** Жорданова форма может быть одной из
$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & \gamma \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$
Определить какая форма в нашем случае и определить все числа.

**Алгоритм** Общая идея в том, чтобы подобрать инварианты, которые достаточно рассчитать для выбора из предоставленных вариантов.

1. Найдем характеристический многочлен $\chi_A(t) = -\det(A - tE)$ и посчитаем его корни. Возможны следующие варианты:
   - три разных корня $\lambda$, $\mu$, $\gamma$.
   - один корень $\lambda$ кратности 2, один корень $\mu$ кратности 1.
   - один корень $\lambda$ кратности 3.

2. Три разных корня. В этом случае ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

3. Два разных корня, $\lambda$ кратности 2 и $\mu$ кратности 1. В этом случае, если $\mathrm{rk}(A - \lambda E) = 1$, то ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}$$

   В противном случае (то есть, если $\mathrm{rk}(A - \lambda E) = 2$) ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}$$

4. Один корень $\lambda$ кратности 3. Если $A = \lambda E$, то ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

   Если $\mathrm{rk}(A - \lambda E) = 1$, то ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

   В противном случае (то есть $\mathrm{rk}(A - \lambda E) = 2$) ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

## 32 Определить Жорданов базис у матриц 3 на 3

**Дано** Матрица $A \in \mathrm{M}_3(F)$, где поле $F$ алгебраически замкнуто.

**Задача** Зная ЖНФ определить жорданов базис $f_1, f_2, f_3$.

**Алгоритм**

1. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

   В этом случае оператор диагонализуем, а значит базис выбирается из собственных векторов. Базис можно найти следующим образом. Вектор $f_1$ – ненулевое решение системы $(A - \lambda E)x = 0$, вектор $f_2$ – ненулевое решение системы $(A - \mu E)x = 0$, вектор $f_3$ – ненулевое решение системы $(A - \gamma E)x = 0$.

2. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}$$

   В этом случае оператор диагонализуем, а значит базис выбирается из собственных векторов. Базис можно найти одним из двух способов ниже:

(a) Вектор $f_3$ берется как решение системы $(A-\mu E)x=0$, векторы $f_1, f_2$ берутся как ФСР системы $(A-\lambda E)x=0$.

(b) Вектор $f_3$ берется как ненулевой столбец матрицы $A-\lambda E$, векторы $f_1, f_2$ берутся, как линейно независимые столбцы матрицы $A-\mu E$.

3. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

В этом случае в качестве жорданова базиса годится любой базис.

4. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}$$

В этом случае вектор $f_3$ находится как решение системы $(A-\mu E)x=0$. Векторы $f_1, f_2$ можно найти одним из следующих способов:

(a) Найдем ФСР системы $(A-\lambda E)^2x=0$, пусть это будет $x_1, x_2$. Тогда в качестве $f_2$ берем один из векторов $x_i$, а $f_1=(A-\lambda E)f_2$. В итоге выбираем такое $x_i$ в качестве $f_2$, чтобы $f_1$ был не ноль.

(b) В качестве вектора $f_2$ перебираем столбцы матрицы $A-\mu E$ до тех пор, пока $f_1=(A-\lambda E)f_2$ не станет ненулевым. Как только $f_1$ будет не ноль, векторы $f_1, f_2$ – искомые.

5. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

В этом случае жорданов базис имеет конфигурацию

$$\begin{tikzcd} f_2 \arrow[d, "A-\lambda E"] & \\ f_1 \arrow[d, "A-\lambda E"] & f_3 \arrow[d, "A-\lambda E"] \\ 0 & 0 \end{tikzcd}$$

В этом случае базис ищем по следующему алгоритму

(a) Вектор $f_2$ выбираем случайно из всего пространства $F^3$. Всегда достаточно выбирать из стандартных базисных векторов.

(b) Вектор $f_1=(A-\lambda E)f_2$. Если $f_1=0$, то возвращаемся к шагу выбора вектора $f_2$.

(c) В случае когда $f_1 \neq 0$ это будет вектор из $\ker(A-\lambda E)$, надо дополнить его до базиса ядра. Это можно сделать так: находим ФСР для системы $(A-\lambda E)x=0$ и дополняем $f_1$ любым вектором из ФСР, который не пропорционален $f_1$, это и будет $f_3$.

6. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

В этом случае жорданов базис имеет конфигурацию

$$\begin{tikzcd} f_3 \arrow[d, "A-\lambda E"] \\ f_2 \arrow[d, "A-\lambda E"] \\ f_1 \arrow[d, "A-\lambda E"] \\ 0 \end{tikzcd}$$

В этом случае базис ищется по следующему алгоритму

(a) Случайно выбираем $f_3$ из $F^3$. Всегда достаточно выбирать из стандартных базисных векторов.
(b) Положим $f_2 = (A - \lambda E)f_3$ и $f_1 = (A - \lambda E)f_2$.
(c) Если вектор $f_1$ равен нулю, то возвращаемся к шагу выбора $f_3$ иначе получили нужный базис.

## 33 Определение ЖНФ у матриц 4 на 4 с одним собственным значением

**Дано** Матрица $A \in \mathrm{M}_4(F)$ с единственным собственным значением $\lambda \in F$, где поле $F$ алгебраически замкнуто.

**Найти** Жорданова форма может быть одной из

$$\begin{pmatrix}\lambda&&&\\&\lambda&&\\&&\lambda&\\&&&\lambda\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\lambda&1&&\\&\lambda&&\\&&\lambda&\\&&&\lambda\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\lambda&1&&\\&\lambda&&\\&&\lambda&1\\&&&\lambda\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\lambda&1&&\\&\lambda&1&\\&&\lambda&\\&&&\lambda\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\lambda&1&&\\&\lambda&1&\\&&\lambda&1\\&&&\lambda\end{pmatrix}$$

Определить какая форма в нашем случае и определить собственное значение.

**Алгоритм** Общая идея в том, чтобы подобрать инварианты, которые достаточно рассчитать для выбора из предоставленных вариантов.

1. Найдем характеристический многочлен $\chi_A(t) = \det(A - tE)$. Нам нужно найти его единственный корень. Так как многочлен имеет вид $(t-\lambda)^4$, то можно найти его 3-ю производную и решить $\chi_A(t)^{(3)} = 0$ для нахождения корня. Это работает, если $2 \neq 0$ и $3 \neq 0$ в поле $F$.[8, 9]

2. Если $A = \lambda E$, то ЖНФ имеет вид
$$\begin{pmatrix}\lambda&&&\\&\lambda&&\\&&\lambda&\\&&&\lambda\end{pmatrix}$$

3. Если $\mathrm{rk}(A - \lambda E) = 1$, то ЖНФ имеет вид
$$\begin{pmatrix}\lambda&1&&\\&\lambda&&\\&&\lambda&\\&&&\lambda\end{pmatrix}$$

4. Если $\mathrm{rk}(A - \lambda E) = 3$, то ЖНФ имеет вид
$$\begin{pmatrix}\lambda&1&&\\&\lambda&1&\\&&\lambda&1\\&&&\lambda\end{pmatrix}$$

5. Если $\mathrm{rk}(A - \lambda E) = 2$, то надо посмотреть на $(A - \lambda E)^2$. Если $(A - \lambda E)^2 = 0$, то ЖНФ имеет вид
$$\begin{pmatrix}\lambda&1&&\\&\lambda&&\\&&\lambda&1\\&&&\lambda\end{pmatrix}$$
иначе (если $(A - \lambda E)^2 \neq 0$) ЖНФ имеет вид
$$\begin{pmatrix}\lambda&1&&\\&\lambda&1&\\&&\lambda&\\&&&\lambda\end{pmatrix}$$

[8] Действительно, третья производная от $(t-\lambda)^4$ будет $4!(t-\lambda)$. Если 2 и 3 обратимы в $F$, то можно сократить на $4!$.
[9] Можно воспользоваться любым другим приемлемым способом по поиску корня многочлена.

## 34 Определить Жорданов базис у матриц 4 на 4 с единственным собственным значением

**Дано** Матрица $A \in \mathrm{M}_4(F)$ с единственным собственным значением $\lambda$, где поле $F$ алгебраически замкнутое.

**Задача** Зная ЖНФ определить жорданов базис $f_1, f_2, f_3, f_4$.

**Алгоритм**

1. Пусть ЖНФ имеет вид
$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$
В этом случае любой базис годится в качестве жорданова.

2. Пусть ЖНФ имеет вид
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$
В этом случае конфигурация жорданова базиса будет следующая
$$\begin{tikzcd} f_2 \arrow[d, mapsto, "A-\lambda E"] & & \\ f_1 \arrow[d, mapsto, "A-\lambda E"] & f_3 \arrow[d, mapsto, "A-\lambda E"] & f_4 \arrow[d, mapsto, "A-\lambda E"] \\ 0 & 0 & 0 \end{tikzcd}$$
В этом случае базис находится по следующему алгоритму
   (a) Вектор $f_2$ выбираем случайно из $F^4$. Всегда достаточно выбирать из стандартных базисных векторов.
   (b) Положим $f_1 = (A - \lambda E)f_2$. Если вектор $f_1 = 0$, то вернемся к шагу выбора вектора $f_2$.
   (c) Вектор $f_1$ будет лежать в $\ker(A - \lambda E)$ теперь его надо дополнить до базиса ядра двумя векторами. Это можно сделать так: находим ФСР системы $(A - \lambda E)x = 0$ и из трех векторов выберем два $f_3, f_4$, которые будут линейно независимы с $f_1$.

3. Пусть ЖНФ имеет вид
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$
В этом случае конфигурация жорданова базиса будет следующая
$$\begin{tikzcd} f_3 \arrow[d, mapsto, "A-\lambda E"] & \\ f_2 \arrow[d, mapsto, "A-\lambda E"] & \\ f_1 \arrow[d, mapsto, "A-\lambda E"] & f_4 \arrow[d, mapsto, "A-\lambda E"] \\ 0 & 0 \end{tikzcd}$$
В этом случае базис находится по следующему алгоритму

(a) Вектор $f_3$ выбираем случайно в $F^4$. Всегда достаточно выбирать из стандартных базисных векторов.

(b) Положим $f_2 = (A-\lambda E)f_3$ и $f_1 = (A-\lambda E)f_2$. Если $f_1 = 0$, то вернуться к шагу выбора вектора $f_3$.

(c) Вектор $f_1$ лежит в $\ker(A-\lambda E)$, его надо дополнить одним вектором $f_4$ до базиса ядра. Это можно сделать следующим образом. Найдем ФСР системы $(A-\lambda E)x = 0$ и дополним вектор $f_1$ одним вектором из ФСР, чтобы полученная пара была линейно независима.

4. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

В этом случае конфигурация жорданова базиса будет следующая

$$\begin{tikzcd} f_4 \arrow[d, mapsto, "A-\lambda E"] \\ f_3 \arrow[d, mapsto, "A-\lambda E"] \\ f_2 \arrow[d, mapsto, "A-\lambda E"] \\ f_1 \arrow[d, mapsto, "A-\lambda E"] \\ 0 \end{tikzcd}$$

В этом случае базис находится по следующему алгоритму

(a) Вектор $f_4$ выбираем случайно из $F^4$. Всегда достаточно выбирать из стандартных базисных векторов.

(b) Положим $f_3 = (A-\lambda E)f_4$, $f_2 = (A-\lambda E)f_3$, $f_1 = (A-\lambda E)f_2$. Если $f_1 = 0$, то вернуться к шагу перевыбора $f_4$ иначе получился искомый базис.

5. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

В этом случае конфигурация жорданова базиса будет следующая

$$\begin{tikzcd} f_2 \arrow[d, mapsto, "A-\lambda E"] & f_4 \arrow[d, mapsto, "A-\lambda E"] \\ f_1 \arrow[d, mapsto, "A-\lambda E"] & f_3 \arrow[d, mapsto, "A-\lambda E"] \\ 0 & 0 \end{tikzcd}$$

В этом случае базис можно найти по следующему алгоритму.

(a) Выбираем вектор $f_2$ случайно в $F^4$. Всегда достаточно выбирать из стандартных базисных векторов.

(b) Положим $f_1 = (A-\lambda E)f_2$. Если $f_1 = 0$, то вернуться к шагу выбора $f_2$.

(c) Выбираем вектор $f_4$ случайно в $F^4$. Всегда достаточно выбирать из стандартных базисных векторов.

(d) Положим $f_3 = (A-\lambda E)f_4$. Если векторы $f_1, f_3$ линейно зависимы, вернуться к шагу выбора $f_4$. Иначе получили искомый базис.

## 35 Найти матрицу билинейной формы при замене базиса

**Дано** Векторные пространства $V$ и $U$ над полем $F$. Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ – базисы пространства $V$, а $f = (f_1, \dots, f_m)$ и $f' = (f'_1, \dots, f'_m)$ – базисы пространства $U$. Кроме того, известны матрицы перехода от $e$ к $e'$ и от $f$ к $f'$, т.е. $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)C$ и $(f'_1, \dots, f'_m) = (f_1, \dots, f_m)D$, где $C \in \mathrm{M}_n(F)$ и $D \in \mathrm{M}_m(F)$ две обратимые матрицы. Дана билинейная форма $\beta\colon V \times U \to F$ заданная в базисах $e$ и $f$ матрицей $B \in \mathrm{M}_{n\,m}(F)$, т.е. $b_{ij} = \beta(e_i, f_j)$.

**Задача** Найти матрицу билинейной формы $\beta$ в базисах $e'$ и $f'$.

**Алгоритм**

1. Пусть в базисах $e'$ и $f'$ мы имеем $\beta(x, y) = x^t B' y$, где $B'$ – искомая матрица. Тогда $B' = C^t B D$.

## 36 Найти правое ортогональное дополнение к подпространству

**Дано** Дана билинейная форма $\beta\colon F^n \times F^m \to F$ по правилу $\beta(x, y) = x^t B y$, где $B \in \mathrm{M}_{n\,m}(F)$ и подпространство $V \subseteq F^n$, заданное образующими $V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

**Задача** Найти $V^\perp = \{y \in F^m \mid \beta(V, y) = 0\}$.

**Алгоритм**

1. Составить вектора $v_i$ в столбцы матрицы $D = (v_1 | \dots | v_k) \in \mathrm{M}_{n\,k}(F)$.
2. Найти ФСР СЛУ $D^t B y = 0$. Данная ФСР дает базис $V^\perp$.

## 37 Найти левое ортогональное дополнение к подпространству

**Дано** Дана билинейная форма $\beta\colon F^n \times F^m \to F$ по правилу $\beta(x, y) = x^t B y$, где $B \in \mathrm{M}_{n\,m}(F)$ и подпространство $V \subseteq F^m$, заданное образующими $V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

**Задача** Найти ${}^\perp V = \{x \in F^n \mid \beta(x, V) = 0\}$.

**Алгоритм**

1. Составить вектора $v_i$ в столбцы матрицы $D \in \mathrm{M}_{n\,k}(F)$.
2. Найти ФСР СЛУ $D^t B^t x = 0$. Данная ФСР дает базис ${}^\perp V$.

## 38 Симметричный Гаусс

**Дано** Симметричная билинейная форма $\beta\colon F^n \times F^n \to F$ по правилу $(x, y) \mapsto x^t B y$, где $B \in \mathrm{M}_n(F)$ – симметричная матрица и при этом $2 \neq 0$ в поле $F$.

**Задача** Диагоналзовать $\beta$, то есть найти матрицу перехода к новому базису $C$ такую, чтобы $B' = C^t B C$ была диагональная, и посчитать саму матрицу $B'$.

**Алгоритм**

1. Чтобы найти матрицу $B'$ будем приводить ее к диагональному виду симметричными элементарными преобразованиями, то есть допускаются следующие преобразования:
   - Прибавить $i$-ю строку умноженную на $\lambda$ к $j$-ой строке и сразу же прибавление $i$-го столбца умноженного на $\lambda$ к $j$-ому столбцу.
   - Поменять местами $i$-ю и $j$-ю строку и тут же поменять местами $i$-ый и $j$-ый столбец.
   - Умножить $i$-ю строку на ненулевое $\lambda$ и тут же умножить $i$-ый столбец на то же самое $\lambda$.

Получившаяся диагональная матрица будет искомая $B'$.

2. Если при этом надо восстановить матрицу $C$, то рассматриваем $(B|E)$ и делаем симметричные элементарные преобразования над ней в том смысле, что преобразования над строками выполняются над всей матрицей, а преобразования над столбцами только над часть, где лежит $B$. Тогда матрица приведется к виду $(B'|C^t)$.

## 39 Метод Якоби

**Дано** Симметричная билинейная форма $\beta\colon V\times V \to F$, базис $e_1,\ldots,e_n$ пространства $V$, такой, что $\det \beta|_{\langle e_1,\ldots,e_k\rangle} \neq 0$.

**Задача** Найти базис $e'_1,\ldots,e'_n$ такой, что $e'_i - e_i \in \langle e_1,\ldots,e_{i-1}\rangle = \langle e'_1,\ldots,e'_{i-1}\rangle$ такой, что $\beta(e'_i,e'_j)=0$ при $i\neq j$.

**Алгоритм**

1. В начале положим $e'_1 = e_1$.
2. Пусть мы нашли вектора $e'_1,\ldots,e'_{i-1}$. Тогда положим вектор $e'_i$ в виде[10]

$$e'_i = e_i - \frac{\beta(e_i,e'_1)}{\beta(e'_1,e'_1)}e'_1 - \ldots - \frac{\beta(e_i,e'_{i-1})}{\beta(e'_{i-1},e'_{i-1})}e'_{i-1}$$

## 40 Алгоритм диагонализации на основе метода Якоби

**Дано** Симметрическая матрица $B\in \mathrm{M}_n(F)$.

**Задача** Проверить, что все ее угловые подматрицы $B_k$ невырождены и если это так, то найти их значения, а также найти верхнетреугольную матрицу с единицами на диагонали $C\in \mathrm{M}_n(F)$ и диагональную матрицу $D\in \mathrm{M}_n(F)$ такие, что $B = C^tDC$.

**Алгоритм**

1. Начнем приводить матрицу $B$ к верхнетреугольному виду элементарными преобразованиями первого типа, когда нам разрешено прибавлять строку с коэффициентом только к более низкой строке. Возможны два исхода:
   - На каком-то этапе получили, что на диагонали на $k$-ом месте стоит 0, а под диагональю есть ненулевой элемент. Это значит, что $\Delta_k = 0$. Условие на матрицу не выполнено.
   - Мы привели матрицу $B$ к верхнетреугольной матрице $U$. Переходим к следующему шагу.
2. Восстановим все необходимые данные по матрице $U$ следующим образом:
   (a) $D$ – диагональ матрицы $U$.
   (b) $C = D^{-1}U$.
   (c) $\Delta_k$ – произведение первых $k$ элементов диагонали матрицы $D$.

## 41 Алгоритм диагонализации унитарного оператора

**Дано** Унитарная матрица $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

**Задача** Найти разложение вида $A = UDU^*$, где $U = (u_1|\ldots|u_n)\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ – унитарная матрица и $D\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ – диагональная матрица с числами равными по модулю 1.

[10] В силу условия $\det \beta|_{\langle e_1,\ldots,e_k\rangle} \neq 0$ выражения вида $\beta(e'_k,e'_k)$ будут всегда отличны от нуля.

**Алгоритм**

1. Найти характеристический многочлен $\chi_A(t)$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – его корни с кратностями $n_1, \ldots, n_k$.[11]
2. Для каждого $\lambda_i$ найдем ортонормированный базис собственного подпространства:
   (a) найдем базисные собственные векторы, решив систему $(A - \lambda_i E)x = 0$ в $\mathbb{C}^n$.
   (b) К полученным векторам применить применим алгоритм Грама-Шмидта используя стандартное скалярное произведение $(x, y) = \bar{x}^t y$.
   (c) Нормируем каждый вектор, поделив на его длину.
3. Тогда матрица $D$ будет $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_k)$, где каждое $\lambda_i$ встречается $n_i$ раз.
4. Матрица $U$ будет составлена из базисных векторов собственных подпространств. Сначала идут $n_1$ векторов для $\lambda_1$, потом $n_2$ для $\lambda_2$ и т.д.

## 42 Алгоритм приведения произвольного ортогонального оператора к каноническому виду

**Дано** Ортогональная матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

**Задача** Найти разложение $A = UDU^t$, где $U = (u_1|\ldots|u_n) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – ортогональная матрица и $D$ – блочно диагональная матрица, где на диагонали стоят:

$$1, \quad -1, \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

**Алгоритм**

1. Найти характеристический многочлен $\chi_A(t)$. Пусть кратность корня 1 равна $n_1$, кратность корня $-1$ равна $n_{-1}$. Остальные комплексные корни имеют вид $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ и $\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_k$, при этом кратности их будут $m_1, \ldots, m_k$ (и у сопряженных такие же).[12]
2. Надо найти ортонормированные базисы для блоков.
   (a) Блоки 1 и $-1$. Опишем процесс для 1.
      i. Найдем базисные собственные векторы, решив систему $(A - E)x = 0$.
      ii. Применим Грама-Шмидта для стандартного скалярного произведения $(x, y) = x^t y$ к базису собственных векторов.
      iii. Нормируем базисные векторы, поделив на их длину.
   (b) Блоки размера 2.
      i. За каждый такой блок отвечает пара комплексно сопряженных корней. Возьмем $\lambda_i = \cos\alpha_i + i\sin\alpha_i$.
      ii. Найдем комплексные базисные собственные векторы для $\bar{\lambda}_i$,[13] решив систему $(A - \bar{\lambda}_i E)x = 0$.
      iii. Применим к базисным векторам Грама-Шмидта для стандартного скалярного произведения $(x, y) = \bar{x}^t y$.
      iv. Пусть получилась последовательность $w_1, \ldots, w_{m_i}$. Каждый их этих векторов имеет вид $w_s = u_s + iv_s$, при этом мы знаем, что $|u_s| = |v_s|$ и $u_s \perp v_s$.
      v. Заменим каждый $w_i$ на пару векторов $u_i/|u_i|, v_i/|v_i|$. Тогда набор этих пар будет ортонормированным базисом отвечающим набору блоков вида[14]

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix}$$

[11] Должно получиться, что $|\lambda_i| = 1$ для всех $i$.
[12] Таким образом имеем $n = n_1 + n_{-1} + 2m_1 + \ldots + 2m_k$.
[13] Причина почему я беру именно $\bar{\lambda}_i$ связана с тем, где я хочу получить минус в блоке.
[14] Если бы мы решали систему для $\lambda_i$, то минус был бы в левом нижнем углу.

3. Теперь в качестве матрицы $D$ выберем матрицу такую, что она блочно диагональная. В начале идут 1 в количестве $n_1$, потом $-1$ в количестве $n_{-1}$. Потом идут блоки 2 на 2 вида
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix}$$
которые повторяются $m_i$ раз.

4. В качестве $U$ надо выбрать матрицу из построенных базисных векторов. Сначала $n_1$ векторов для 1, потом $n_{-1}$ векторов для $-1$. А потом векторы соответствующие блокам 2 на 2. Сначала $2m_1$ пар полученных из $\lambda_1$, потом $2m_2$ пар полученных из $\lambda_2$ и т.д.

## 43 Алгоритм приведения ортогонального оператора $\mathbb{R}^3$ к каноническому виду

**Дано** Ортогональная матрица $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

**Задача** Найти разложение $A = UDU^t$, где $U = (u_1|u_2|u_3) \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ – ортогональная матрица и $D$ одна из следующих матриц[15]
$$(I) \quad D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad (II) \quad D = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

**Алгоритм**

1. Ищем матрицу $U$. Начинаем с поиска образующего оси. Решаем систему $(A - E)x = 0$. Возможны следующие случаи:
   (a) ФСР пустое.
   Это значит, что у нас случай (II) и ось надо искать из уравнения $(A + E)x = 0$. Приведем матрицу $A+E$ к улучшенному ступенчатому виду $(v_1|v_2)^t$. Тогда ее ФСР будет из одного вектора, нормируем его и обозначим за $u_1$ – это образующий оси. Векторы $v_1, v_2$ образуют базис $\langle u_1\rangle^\perp$. Ортогонализуем и нормируем векторы $v_1, v_2$. Полученные векторы будут $u_2$ и $u_3$.
   (b) ФСР из одного вектора $u$. Нормируем его и обозначим через $u_1$.
   Это значит, что у нас случай (I) и вектор $u_1$ – образующий оси. Когда мы решали $(A - E)x = 0$ мы привели матрицу $A - E$ к улучшенному ступенчатому виду $(v_1|v_2)^t$. Тогда $v_1, v_2$ – базис $\langle u_1\rangle^\perp$. Ортогонализуем $v_1, v_2$ и потом нормируем. Полученные векторы будут $u_2$ и $u_3$.
   (c) ФСР из двух векторов $v_1$ и $v_2$.
   Это значит, что у нас случай (II). Пусть $v$ – любая ненулевая строка матрицы $A - E$, тогда нормируем $v$ и обозначим получившийся вектор $u_1$ – это будет образующий оси. Ортогонализуем и нормируем векторы $v_1$ и $v_2$. Полученные векторы будут $u_2$ и $u_3$.
   (d) ФСР из трех векторов.
   Это значит, что у нас случай (I). Такое возможно только если $A = E$. В этом случае $U = E$, $\alpha = 0$.

2. Теперь найдем $\cos\alpha$. Возможны два случая.
   (a) Случай (I). Тогда $\operatorname{tr} A = 1 + 2\cos\alpha$.
   (b) Случай (II). Тогда $\operatorname{tr} A = -1 + 2\cos\alpha$.

3. Теперь найдем $\sin\alpha$. Для этого заметим, что $(Au_2, u_3) = \sin\alpha$.

## 44 Алгоритм разложения симметрических матриц

**Дано** Матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ такая, что $A^t = A$.

**Задача** Найти разложение $A = C\Lambda C^t$, где $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – ортогональная матрица, $\Lambda \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – диагональная матрица.

[15] Прямая натянутая на вектор $u_1$ называется осью для $A$.

**Алгоритм**

1. Найти собственные значения матрицы $A$.

   (a) Составить характеристический многочлен $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E)$.

   (b) Найти корни $\chi(\lambda)$ с учетом кратностей: $\{(\lambda_1, n_1), \ldots, (\lambda_k, n_k)\}$, где $\lambda_i$ – корни, $n_i$ – кратности.

2. Для каждого $\lambda_i$ найти ортонормированный базис в пространстве собственных векторов отвечающему $\lambda_i$.

   (a) Найти ФСР системы $(A - \lambda_i E)x = 0$. Пусть это будет $v_1^i, \ldots, v_{n_i}^i$. Обратите внимание, что их количество будет в точности равно кратности $n_i$.

   (b) Ортогонализовать $v_1^i, \ldots, v_{n_i}^i$ методом Грама-Шмидта. Обратите внимание, после ортогонализации останется ровно $n_i$ векторов.

   (c) Сделать каждый вектор длинны один: $v_j^i \mapsto \frac{v_j^i}{|v_j^i|}$.

3. Матрица $\Lambda$ будет диагональной с числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_k$ на диагонали, где каждое $\lambda_i$ повторяется $n_i$ раз. Обратите внимание, всего получится $n$ чисел.

4. Матрица $C$ будет составлена из столбцов $v_1^1, \ldots, v_{n_1}^1, v_1^2, \ldots, v_{n_2}^2, \ldots, v_1^k, \ldots, v_{n_k}^k$. Обратите внимание, порядок собственных векторов соответствует порядку собственных значений в матрице $\Lambda$.

## 45 Алгоритм нахождения сингулярного разложения

**Дано** Матрица $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$.[16]

**Задача** Найти разложение $A = U\Lambda V^t$, где $U \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ ортогональная, $V \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ортогональная, $\Lambda \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$ содержит на диагонали элементы $\sigma_1 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_s > 0$, а все остальные нули.

**Алгоритм**

1. Составим матрицу $S = AA^t \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$. Тогда $S = U\Lambda\Lambda^t U^t$.

2. Так как $S^t = S$. То с помощью алгоритма для симметрических матриц найдем ее разложение $S = CDC^t$. Причем, обязательно получится, что диагональная матрица $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ состоит из неотрицательных элементов.

3. Тогда $U = C$, а $\Lambda\Lambda^t = D$. То есть $\sigma_i^2 = \lambda_i$. Так как $\sigma_i \geqslant 0$, то они находятся как $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$.

4. Теперь надо найти $V$ из условия $A = U\Lambda V^t$.[17] Пусть $\sigma_1 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_s > 0$. Положим $U = (u_1|\ldots|u_m)$ и $V = (v_1|\ldots|v_n)$. Тогда $A^tU = V\Lambda^t$, то есть $v_i = \frac{1}{\sigma_i}A^t u_i$ при $1 \leqslant i \leqslant s$.

5. Теперь найдем оставшиеся $v_{s+1}, \ldots, v_n$. Для этого дополним $v_1, \ldots, v_s$ до базиса $\mathbb{R}^n$ и ортонормируем полученное семейство.[18]

## 46 Алгоритм нахождения компактного сингулярного разложения

**Дано** Матрица $A \in \mathrm{M}_{m\,n}(\mathbb{R})$.[19]

**Задача** Найти разложение $A = U\Sigma V^t$, где $U \in \mathrm{M}_{m\,s}(\mathbb{R})$, $V \in \mathrm{M}_{n\,s}(\mathbb{R})$ – матрицы с ортонормированными столбцами, $\Sigma \in \mathrm{M}_s(\mathbb{R})$ – диагональная матрица с элементами $\sigma_1 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_s > 0$ на диагонали.

---

[16] Этот алгоритм рекомендуется применять при $m \leqslant n$, в противном случае, применить его к матрице $A^t$, а потом транспонировать полученное разложение.

[17] Обратите внимание $\Lambda$ не обязательно квадратная и тем более не обязательно обратимая.

[18] Можно заметить, что $v_{s+1}, \ldots, v_n$ будут базисом ядра $A$, потому можно найти ФСР для $\{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\}$ и ортонормировать его.

[19] Этот алгоритм рекомендуется применять при $m \leqslant n$, в противном случае, применить его к матрице $A^t$, а потом транспонировать полученное разложение.

**Алгоритм**

1. Составим матрицу $S = AA^t \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$. Тогда $S = U\Sigma^2 U^t$.

2. Так как $S^t = S$. То с помощью алгоритма для симметрических матриц найдем ее разложение $S = CDC^t$.[20] Причем, обязательно получится, что диагональная матрица $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ состоит из неотрицательных элементов и мы можем выбрать порядок так, чтобы $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_m \geqslant 0$.

3. Пусть $C = (C_1|\ldots|C_m)$, тогда положим $U = (C_1|\ldots|C_s) \in \mathrm{M}_{m\,s}(\mathbb{R})$. А матрица $\Sigma \in \mathrm{M}_s(\mathbb{R})$ будет диагональной с числами $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ на диагонали, то есть $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_s)$.

4. Теперь надо найти $V$ из условия $A = U\Sigma V^t$.[21] Положим $U = (u_1|\ldots|u_s)$ и $V = (v_1|\ldots|v_s)$. Тогда $A^t U \Sigma^{-t} = V$, то есть $v_i = \frac{1}{\sigma_i} A^t u_i$ при $1 \leqslant i \leqslant s$.

[20] Здесь $D$ будет диагональной матрицей, а $C$ ортогональной.

[21] Обратите внимание, что $\Sigma$ квадратная и обратимая матрица.