

Алгоритмы

1 Выделение базиса из системы векторов

Дано Пусть $v_1, \dots, v_m \in F^n$ – вектора и $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ – их линейная оболочка.

Задача Среди векторов v_1, \dots, v_m найти базис пространства V и разложить оставшиеся вектора по этому базису.

Алгоритм

1. Запишем вектора v_1, \dots, v_m по столбцам в матрицу $A \in M_{n \times m}(F)$. Например, при $n = 3, m = 5$

$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} & v_{51} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} & v_{42} & v_{52} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} & v_{43} & v_{53} \end{pmatrix}$$

2. Приведем матрицу A элементарными преобразованиями строк к улучшенному ступенчатому виду. Например

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{31} & 0 & a_{51} \\ 0 & 1 & a_{32} & 0 & a_{52} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{53} \end{pmatrix}$$

3. Пусть k_1, \dots, k_r – номера главных позиций в матрице A' . Тогда вектора v_{k_1}, \dots, v_{k_r} образуют базис V . Например, в примере выше это вектора v_1, v_2 и v_4 .
4. Пусть v_i – вектор соответствует неглавной позиции в A' . Тогда в i -ом столбце A' записаны координаты разложения v_i через найденный базис выше. Например, в примере выше $v_3 = a_{31}v_1 + a_{32}v_2$ и $v_5 = a_{51}v_1 + a_{52}v_2 + a_{53}v_4$.

Пример Пусть

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in F^3$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 12 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \\ \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Тогда v_1, v_2 и v_4 – базис линейной оболочки. $v_3 = 2v_1 + 3v_2$ и $v_5 = v_1 - 2v_4$.

2 Нахождение какого-то базиса линейной оболочки

Дано Пусть $v_1, \dots, v_m \in F^n$ – вектора и $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ – их линейная оболочка.

Задача Найти какой-нибудь базис подпространства V .

Алгоритм

1. Уложить все вектора v_i в строки матрицы $A \in M_{m \times n}(F)$.
2. Элементарными преобразованиями строк привести матрицу к ступенчатому виду.
3. Ненулевые строки полученной матрицы будут искомым базисом.

3 Дополнение линейно независимой системы до базиса всего пространства стандартными векторами

Дано Пусть $v_1, \dots, v_m \in F^n$ – линейно независимая система векторов, $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ – их линейная оболочка и e_i – стандартные базисные векторы, т.е. на i -ом месте стоит 1, а в остальных 0.

Задача Найти такие вектора $e_{k_1}, \dots, e_{k_{n-m}}$, что система $v_1, \dots, v_m, e_{k_1}, \dots, e_{k_{n-m}}$ является базисом F^n .

Алгоритм

1. Уложить вектора v_i в строки матрицы $A \in M_{m \times n}(F)$.
2. Привести матрицу A к ступенчатому виду.
3. Пусть k_1, \dots, k_{n-m} – номера неглавных столбцов. Тогда $e_1, \dots, e_{k_{n-m}}$ – искомое множество.

4 Найти ФСР однородной СЛУ

Дано Система однородных линейных уравнений $Ax = 0$, где $A \in M_{m \times n}(F)$ и $x \in F^n$.

Задача Найти ФСР системы $Ax = 0$.

Алгоритм

1. Привести матрицу A элементарными преобразованиями строк к улучшенному ступенчатому виду. Например

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{31} & 0 & a_{51} \\ 0 & 1 & a_{32} & 0 & a_{52} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{53} \end{pmatrix}$$

2. Пусть k_1, \dots, k_r – позиции свободных переменных. Если положить одну из этих переменных равной 1, а все остальные нулями, то существует единственное решение, которое мы обозначим через u_i (всего r штук). Например, для матрицы A' выше свободные переменные имеют номера 3 и 5. Тогда вектора (записанные в строку)

$$u_1 = (-a_{31} \quad -a_{32} \quad 1 \quad 0 \quad 0), u_2 = (-a_{51} \quad -a_{52} \quad 0 \quad -a_{53} \quad 1)$$

являются ФСР.

5 Задать подпространство базисом, если оно задано матричным уравнением

Дано Пусть $A \in M_{m \times n}(F)$ и $V \subseteq F^n$ задано в виде $V = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$.

Задача Найти базис подпространства V .

Алгоритм

1. Найти ФСР системы $Ay = 0$. Векторы ФСР будут базисом V .

6 Задать подпространство матричным уравнением, если оно задано линейной оболочкой

Дано Пусть $v_1, \dots, v_k \in F^n$ – набор векторов и $V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

Задача Для некоторого m найти матрицу $A \in M_{m \times n}(F)$ такую, что $V = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$.

Алгоритм

1. Уложить вектора v_i в строки матрицы $B \in M_{k \times n}(F)$.
2. Найти ФСР системы $Bz = 0$.
3. Уложить ФСР в строки матрицы $A \in M_{m \times n}(F)$, где m – количество векторов в ФСР. Матрица A и будет искомой.

7 Найти матрицу замены координат

Дано Векторное пространство V , $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_n)$ – два базиса пространства V . Известна матрица перехода от e к f , т.е. $(f_1, \dots, f_n) = (e_1, \dots, e_n)A$, где $A \in M_n(F)$. Дан вектор $v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$.

Задача Найти разложение v по базису f .

Алгоритм

1. Если $v = ex$, где $x \in F^n$, а также $v = fy$, где $y \in F^n$, то $y = A^{-1}x$.

8 Найти матрицу линейного отображения при замене базиса

Дано Векторное пространство V с базисами $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$, а также векторное пространство U с базисами $f = (f_1, \dots, f_m)$ и $f' = (f'_1, \dots, f'_m)$. Известны матрицы перехода $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)C$ и $(f'_1, \dots, f'_m) = (f_1, \dots, f_m)D$, где $C \in M_n(F)$ и $D \in M_m(F)$. Дано линейное отображение $\phi: V \rightarrow U$ заданное в базисах e и f матрицей $A \in M_{n \times m}(F)$, т.е. $\phi e = fA$.

Задача Найти матрицу отображения ϕ в базисах e' и f' , то есть такую $A' \in M_{n \times m}(F)$, что $\phi e' = f' A'$.

Алгоритм

1. $A' = D^{-1}AC$.

9 Определить существует ли линейное отображение заданное на векторах

Дано Векторное пространство V над полем F и набор векторов $v_1, \dots, v_k \in V$, векторное пространство U и набор векторов $u_1, \dots, u_k \in U$.

Задача Определить существует ли линейное отображение $\phi: V \rightarrow U$ такое, что $\phi(v_i) = u_i$.

Алгоритм

1. Среди векторов v_1, \dots, v_k выделить линейно независимые, а остальные разложить по ним.
2. Пусть на предыдущем этапе базис получился v_1, \dots, v_r , а $v_{r+i} = a_{i1}v_1 + \dots + a_{ir}v_r$.
3. Искомое линейное отображение ϕ существует тогда и только тогда, когда выполняются равенства $u_{r+i} = a_{i1}u_1 + \dots + a_{ir}u_r$.¹

10 Найти базис образа и ядра линейного отображения

Дано $\phi: F^n \rightarrow F^m$ задан $x \mapsto Ax$, где $A \in M_{m \times n}(F)$.

Задача Найти базис $\text{Im } \phi \in F^m$ и базис $\ker \phi \in F^n$.

¹В частности, если все v_i оказались линейно независимыми, то линейное отображение ϕ обязательно существует.

Алгоритм

1. Выделить базис среди столбцов матрицы A . В результате получится базис $\text{Im } \phi$.
2. Найти ФСР системы $Ax = 0$. Полученная ФСР будет базисом $\ker \phi$.

11 Найти линейное отображение с заданными ядром и образом

Дано Пространства $U \subseteq F^n$ и $W \subseteq F^m$ такие, что $\dim U + \dim W = n$.

Задача Найти матрицу линейного отображения $\varphi: F^n \rightarrow F^m$ такого, что $U = \ker \varphi$ и $W = \text{Im } \varphi$.

Алгоритм

1. Задать подпространство W с помощью базиса. Пусть b_1, \dots, b_k – базис W . Определим матрицу $B = (b_1 | \dots | b_k)$.
2. Задать подпространство U системой с линейно независимыми строками $U = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$.
3. В силу условия $\dim U + \dim W = n$ матрица A будет иметь столько же строк, сколько столбцов в матрице B . В этом случае искомое линейное отображение задается матрицей BA .

12 Найти сумму подпространств заданных линейными оболочками

Дано Подпространства $V, U \subseteq F^n$ заданные в виде $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$, $U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$, где $v_i, u_j \in F^n$.

Задача Найти базис $V + U$.

Алгоритм

1. Надо найти базис линейной оболочки $\langle v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_k \rangle$.

13 Найти пересечение подпространств заданных линейными оболочками

Дано Подпространства $V, U \subseteq F^n$ заданные в виде $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$, $U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$, где $v_i, u_j \in F^n$.

Задача Найти базис $V \cap U$.²

Алгоритм

1. Найти ФСР системы $Dx = 0$, где $D = (v_1 | \dots | v_m | u_1 | \dots | u_k)$ и $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, где $\alpha \in F^m$, $\beta \in F^k$.
2. Пусть $\left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \alpha_s \\ \beta_1 & \beta_s \end{array} \right)$ – ФСР. Далее есть две опции (из них вторая опция предпочтительнее!):
 - Множество векторов $R = (v_1 | \dots | v_m)(\alpha_1 | \dots | \alpha_s)$ порождает $V \cap U$. Среди $(\alpha_1 | \dots | \alpha_s)$ можно выкинуть те α_i , для которых $\beta_i = 0$.³
 - Множество векторов $R' = (u_1 | \dots | u_k)(\beta_1 | \dots | \beta_s)$ порождает $V \cap U$. Причем можно рассматривать только ненулевые β_i .
3. Выделить базис среди столбцов R . Это и будет базис $V \cap U$.
 - Если векторы u_1, \dots, u_k были линейно независимы изначально и β_i, \dots, β_s – все ненулевые сегменты ФСР с прошлого шага, то $(u_1 | \dots | u_k)(\beta_i | \dots | \beta_s)$ будет базисом $V \cap U$.

²В это задаче можно задать подпространства системами, потом найти пересечение в виде системы, потом задать результат базисом. Но есть куда более эффективный способ.

³Если ФСР построен по стандартному базису, то останутся α_i с нулевыми свободными переменными.

14 Найти пересечение подпространств заданных матричным уравнением

Дано Подпространства $V, U \subseteq F^n$ заданные в виде $V = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$, $U = \{y \in F^n \mid By = 0\}$, где $A \in M_{m \times n}(F)$ и $B \in M_{k \times n}(F)$.

Задача Задать $V \cap U$ в виде $\{y \in F^n \mid Dy = 0\}$ для некоторого $D \in M_{k \times n}(F)$, где $\text{rk } D = k \leq n$.

Алгоритм

1. Рассмотреть матрицу $D' = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$.
2. Выделить среди строк D' линейно независимую подсистему. Результат и будет искомая D .

15 Найти сумму подпространств заданных матричным уравнением

Дано Подпространства $V, U \subseteq F^n$ заданные в виде $V = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$, $U = \{y \in F^n \mid By = 0\}$, где $A \in M_{m \times n}(F)$ и $B \in M_{k \times n}(F)$.

Задача Задать $V + U$ в виде $\{y \in F^n \mid Ry = 0\}$ для некоторого $R \in M_{k \times n}(F)$, где $\text{rk } R = k \leq n$.⁴

Алгоритм

1. Найти ФСР системы $Dx = 0$, где $D = (A^t \mid B^t)$ и $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, где $\alpha \in F^m$ и $\beta \in F^k$.
2. Пусть $\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} \mid \dots \mid \frac{\alpha_s}{\beta_s} \right)$ – ФСР. Далее есть две опции:
 - Если определим $S = (\alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_s)^t A$, то $V + U = \{y \in F^n \mid Sy = 0\}$. Здесь достаточно взять только те α_i , для которых β_i не равны нулю.
 - Если определим $T = (\beta_1 \mid \dots \mid \beta_s)^t B$, то $V + U = \{y \in F^n \mid Ty = 0\}$. Здесь достаточно взять только ненулевые β_i .
3. Выделить базис среди строк S (или T). Это и будет искомая матрица R .
 - Если строки B были линейно независимыми и мы выбрали только ненулевые β_i , то T уже будет искомой, то есть ее строки будут линейно независимыми.

16 Найти пересечение подпространств заданных разными способами

Дано Подпространства $V, U \subseteq F^n$ заданные в виде $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$, $U = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$, где $A \in M_{k \times n}(F)$.

Задача Найти базис $V \cap U$.

Алгоритм

1. Определим матрицу $B = (v_1 \mid \dots \mid v_m)$ и найдем ФСР для системы $ABx = 0$. Пусть это будет x_1, \dots, x_t .
2. Тогда столбцы матрицы $R = B(x_1 \mid \dots \mid x_t)$ порождают $V \cap U$.
3. Отобрать среди столбцов R линейно независимые.
 - Если v_1, \dots, v_m были линейно независимы (то есть базис V), то столбцы R уже будут линейно независимыми.

17 Найти пересечение подпространств заданных разными способами

Дано Подпространства $V, U \subseteq F^n$ заданные в виде $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$, $U = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$, где $A \in M_{k \times n}(F)$.

⁴В этой задаче можно задать подпространства базисами, потом найти сумму заданной базисом, потом задать эту сумму системой. Но есть более эффективный метод.

Задача Задать $V \cap U$ системой линейных уравнений.

Алгоритм

1. Задать подпространство V системой в виде $\{x \in F^n \mid Dx = 0\}$.
2. Тогда $V \cap U$ задается объединенной системой $\left(\frac{B}{D}\right)$.

18 Найти сумму подпространств заданных разными способами

Дано Подпространства $V, U \subseteq F^n$ заданные в виде $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle, U = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$, где $A \in M_{k \times n}(F)$.

Задача Задать $V + U$ в виде $\{x \in F^n \mid Dx = 0\}$, где $D \in M_{t \times n}(F)$ и $t = \text{rk } D$.⁵

Алгоритм

1. Определим матрицу $B = (v_1 \mid \dots \mid v_m)$ и найдем ФСР для системы $B^t A^t x = 0$. Пусть это будет x_1, \dots, x_t .
2. Тогда матрица $D' = (x_1 \mid \dots \mid x_t)^t A$ задает $V + U$ системой.
3. Отобрать среди строк D' линейно независимые и получить D .
 - Если строки A были линейно независимы, то строки D' уже будут линейно независимыми.

19 Найти сумму подпространств заданных разными способами

Дано Подпространства $V, U \subseteq F^n$ заданные в виде $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle, U = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$, где $A \in M_{k \times n}(F)$.

Задача Задать $V + U$ в виде линейной оболочки.

Алгоритм

1. Задать подпространство U с помощью линейной оболочки.
2. Объединить линейные оболочки для V и для U .

20 Найти матрицу линейного оператора при замене базиса

Дано Векторное пространство V над полем F , $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_n)$ — два базиса пространства V . Известна матрица перехода от e к f , т.е. $(f_1, \dots, f_n) = (e_1, \dots, e_n)C$, где $C \in M_n(F)$. Дано линейное отображение $\phi: V \rightarrow V$ заданное в базисе e матрицей $A \in M_n(F)$, т.е. $\phi e = eA$.

Задача Найти матрицу отображения ϕ в базисе f .

Алгоритм

1. Пусть $\phi f = fB$, где B — искомая матрица. Тогда $B = C^{-1}AC$.

21 Найти проекцию вектора на подпространство вдоль другого подпространства

Дано $F^n = V \oplus U$, где V и U заданы базисами $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle, U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$. Пусть $z \in F^n$ раскладывается $z = v + u$, где $v \in V$ и $u \in U$.

Задача Найти v и u .

⁵Всегда можно задать U линейной оболочкой, потом задать $V+U$ линейной оболочкой, а потом найти представление системой. Я же покажу тут другой подход.

Алгоритм

1. Решить СЛУ $Dx = z$, где $D = (v_1 | \dots | v_m | u_1 | \dots | u_k)$ и $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, где $\alpha \in F^m$ и $\beta \in F^k$.
2. Тогда $v = (v_1 | \dots | v_m)\alpha$ и $u = (u_1 | \dots | u_k)\beta$.

22 Найти оператор проекции на подпространство вдоль другого подпространства

Дано $F^n = V \oplus U$, где V задано базисом $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$, $U = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$, где $A \in M_{k \times n}(F)$ и $\text{rk } A = k \leq n$.

Задача Найти матрицу отображения $\phi: V \rightarrow V$ такого, что $\phi(U) = 0$ и $\phi(v) = v$ для любого $v \in V$.⁶

Алгоритм

1. Положим $B = (v_1 | \dots | v_m) \in M_{n \times m}(F)$.
2. Обязательно получится, что $m = k$ и матрица AB невырождена.
3. Искомый ϕ имеет матрицу $B(AB)^{-1}A$.

23 Поиск собственных значений и векторов

Дано Матрица $A \in M_n(F)$.

Задача Найти все собственные значения λ_i для A и для каждого λ_i найти базис пространства $V_{\lambda_i} = \{v \in F^n \mid Av = \lambda_i v\}$.

Алгоритм

1. Посчитать характеристический многочлен $(-1)^n \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$.
2. Найти корни многочлена $\chi_A(\lambda)$. Корни $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ будут собственными значениями A .
3. Для каждого λ_i найти ФСР системы $(A - \lambda_i E)x = 0$. Тогда ФСР будет базисом V_{λ_i} .

Если дополнительно найти с каждым собственным значением λ_i его кратность n_i в характеристическом многочлене, то на последнем шаге размер ФСР для λ_i оценивается так. Собственных векторов будет не меньше чем 1 и не больше, чем n_i .

24 Поиск корневых подпространств

Дано Матрица $A \in M_n(F)$.

Задача Найти все собственные значения λ_i для A и для каждого λ_i найти базис пространства $V^{\lambda_i} = \{v \in F^n \mid \exists n: (A - \lambda_i E)^n v = 0\}$.

Алгоритм

1. Посчитать характеристический многочлен $(-1)^n \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$.
2. Найти корни многочлена $\chi_A(\lambda)$ с кратностями. Корни $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ будут собственными значениями A . И пусть кратности будут $\{n_1, \dots, n_k\}$.
3. Для каждого λ_i найти ФСР системы $(A - \lambda_i E)^{n_i} x = 0$. Тогда ФСР будет базисом V^{λ_i} . Обратите внимание, что для каждого λ_i должно получиться ровно n_i векторов.

⁶Заметим, что если $z \in F^n$ раскладывается $z = v + u$, где $v \in V$ и $u \in U$, то $\phi(z) = v$.

25 Поиск инвариантных подпространств

Дано Матрица $A \in M_n(F)$.

Задача Найти все подпространства $U \subseteq F^n$ такие, что $AU \subseteq U$.

Алгоритм

1. Для каждого вектора $v \in F^n$ найти главное инвариантное подпространство

$$[v]_A = \langle v, Av, A^2v, \dots, A^mv, \dots \rangle$$

Обратите внимание, что это «творческий шаг» тут нет общего алгоритма,⁷ тут придется немного догадаться.

2. Описать все инвариантные подпространства, как конечные суммы главных, а именно любое инвариантное U будет иметь вид $[v_1]_A + \dots + [v_k]_A$, где v_1, \dots, v_k пробегает все возможные конечные наборы векторов.

26 Поиск инвариантных подпространств для диагонализуемого оператора

Дано Матрица $A \in M_n(F)$, задающая диагонализуемый оператор.

Задача Найти все подпространства $U \subseteq F^n$ такие, что $AU \subseteq U$.

Алгоритм

1. В начале надо найти все собственные значения и собственные подпространства. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – все собственные значения с кратностями n_1, \dots, n_k . Тогда $F^n = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$.
2. Надо выбрать произвольное подпространство $U_i \subseteq V_{\lambda_i}$ (включая нулевое и все V_{λ_i} целиком). Тогда U_1, \dots, U_k будут линейно независимыми и $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ будут все возможные инвариантные подпространства.

27 Проверка на диагонализуемость

Дано Матрица $A \in M_n(F)$, задающая линейный оператор $\varphi: F^n \rightarrow F^n$.

Задача Выяснить существует ли базис, в котором φ задается диагональной матрицей и если задается, то какой именно. На матричном языке: существует ли невырожденная матрица $C \in M_n(F)$ такая, что $C^{-1}AC$ является диагональной и найти эту диагональную матрицу.

Алгоритм

1. Найдем характеристический многочлен $\chi(t)$ для φ , он же для A по формуле $(-1)^n \chi(t) = \det(A - tE)$.
2. Проверим, раскладывается ли $\chi(t)$ на линейные множители над F , то есть представляется ли он в виде $\chi(t) = (t - \lambda_1)^{d_1} \dots (t - \lambda_k)^{d_k}$. Если не представляется, то φ (или что то же самое A) не диагонализуется.
3. Если $\chi(t) = (t - \lambda_1)^{d_1} \dots (t - \lambda_k)^{d_k}$. Найдем для каждого λ_i базис V_{λ_i} как ФСР системы $(A - \lambda_i E)x = 0$. Если для хотя бы одного i количество элементов в ФСР меньше соответствующей кратности корня d_i , то φ не диагонализуется.
4. Если для каждого i мы получили, что размер ФСР совпадает с кратностью корня, то есть $\dim V_{\lambda_i} = d_i$. То φ диагонализуется. В этом случае матрица C состоит из собственных векторов. Если собственные векторы для λ_i есть $\{v_{i1}, \dots, v_{id_i}\}$, то $C = (v_{11} | \dots | v_{1d_1} | v_{21} | \dots | v_{2d_2} | \dots | v_{k1} | \dots | v_{kd_k})$. При этом в новом базисе будет диагональная матрица $C^{-1}AC = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_k)$, где каждое λ_i встречается d_i раз.

⁷Если говорить правду, то алгоритм то есть, но он такой геморройный и требует знаний, которых пока у нас нет, так что да ну его.

Заметим, что если поле F алгебраически замкнуто, то первый шаг алгоритма выполнен автоматически, а именно, над алгебраически замкнутым полем любой многочлен разлагается на линейные множители. Потому в этом случае вопрос о диагонализированности – это лишь проверка всех равенств $\dim V_{\lambda_i} = d_i$.

28 Определить ЖНФ у оператора

Дано Матрица $A \in M_n(F)$, где поле F алгебраически замкнуто.

Задача Определить все собственные значения и размеры клеток в жордановой нормальной форме.

Алгоритм

1. Собственные значения совпадают со спектром их ищем, как корни характеристического многочлена $\chi_A(t) = (-1)^n \det(A - tE) = 0$. Получаем набор корней и их кратности $(\lambda_1, n_1), \dots, (\lambda_k, n_k)$.
2. Для каждого λ_i суммарный размер клеток равен n_i . Потому надо определить количество клеток для всех $k \in [1, n_i]$. Количество клеток считается по формуле

$$\text{количество клеток размера } k = \text{rk}(A - \lambda_i E)^{k+1} + \text{rk}(A - \lambda_i E)^{k-1} - 2 \text{rk}(A - \lambda_i E)^k$$

Обратите внимание, что если вы нашли m клеток размера k , а кратность была n_i , то на оставшиеся клетки уходит $n_i - mk$ мест. Этим можно пользоваться, чтобы не считать все количества клеток подряд.

29 Определение ЖНФ у матриц 2 на 2

Дано Матрица $A \in M_2(F)$, где поле F алгебраически замкнутое.

Найти Жорданова форма может быть одной из

$$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix}$$

Определить какая форма в нашем случае и определить все числа.

Алгоритм Общая идея в том, чтобы подобрать инварианты, которые достаточно рассчитать для выбора из предоставленных вариантов.

1. Найдем характеристический многочлен $\chi_A(t) = \det(A - tE)$. И посчитаем его корни. Есть два варианта:
 - (а) два разных корня λ и μ . В этом случае ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}$$

- (b) один корень λ кратности 2. В этом случае, если $A = \lambda E$, то ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{pmatrix}$$

В противном случае ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix}$$

30 Определить Жорданов базис у матриц 2 на 2

Дано Матрица $A \in M_2(F)$, где поле F алгебраически замкнутое.

Задача Зная ЖНФ определить жорданов базис f_1, f_2 .

Алгоритм

1. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}$$

В этом случае оператор диагонализум, а значит базис выбирается из собственных векторов. Есть два способа найти их:

- (а) Вектор f_1 находим как ненулевое решение системы $(A - \lambda E)x = 0$, а вектор f_2 находим как ненулевое решение системы $(A - \mu E)x = 0$.
- (б) Вектор f_1 находим как ненулевой столбец матрицы $A - \mu E$, а вектор f_2 находим как ненулевой столбец матрицы $A - \lambda E$.

2. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{pmatrix}$$

В этом случае подходит любой базис.

3. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix}$$

В этом случае жорданов базис образует цепочку

$$\begin{array}{c} f_2 \\ \downarrow A - \lambda E \\ f_1 \\ \downarrow A - \lambda E \\ 0 \end{array}$$

В этом случае векторы базиса ищутся так

- (а) Выбираем случайный вектор f_2 . Всегда достаточно выбирать из стандартных базисных векторов.
- (б) Полагаем $f_1 = (A - \lambda E)f_2$.
- (с) Если $f_1 = 0$, то вернуться к выбору вектора f_2 . Если $f_1 \neq 0$, то f_1, f_2 – искомый базис.

31 Определение ЖНФ у матриц 3 на 3

Дано Матрица $A \in M_3(F)$, где поле F алгебраически замкнуто.

Найти Жорданова форма может быть одной из

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & \gamma \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

Определить какая форма в нашем случае и определить все числа.

Алгоритм Общая идея в том, чтобы подобрать инварианты, которые достаточно рассчитать для выбора из предоставленных вариантов.

1. Найдем характеристический многочлен $\chi_A(t) = -\det(A - tE)$ и посчитаем его корни. Возможны следующие варианты:
 - три разных корня λ, μ, γ .
 - один корень λ кратности 2, один корень μ кратности 1.
 - один корень λ кратности 3.

2. Три разных корня. В этом случае ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

3. Два разных корня, λ кратности 2 и μ кратности 1. В этом случае, если $\text{rk}(A - \lambda E) = 1$, то ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}$$

В противном случае (то есть, если $\text{rk}(A - \lambda E) = 2$) ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}$$

4. Один корень λ кратности 3. Если $A = \lambda E$, то ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

Если $\text{rk}(A - \lambda E) = 1$, то ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

В противном случае (то есть $\text{rk}(A - \lambda E) = 2$) ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

32 Определить Жорданов базис у матриц 3 на 3

Дано Матрица $A \in M_3(F)$, где поле F алгебраически замкнуто.

Задача Зная ЖНФ определить жорданов базис f_1, f_2, f_3 .

Алгоритм

1. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

В этом случае оператор диагонализуем, а значит базис выбирается из собственных векторов. Базис можно найти следующим образом. Вектор f_1 – ненулевое решение системы $(A - \lambda E)x = 0$, вектор f_2 – ненулевое решение системы $(A - \mu E)x = 0$, вектор f_3 – ненулевое решение системы $(A - \gamma E)x = 0$.

2. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}$$

В этом случае оператор диагонализуем, а значит базис выбирается из собственных векторов. Базис можно найти одним из двух способов ниже:

- (a) Вектор f_3 берется как решение системы $(A - \mu E)x = 0$, векторы f_1, f_2 берутся как ФСР системы $(A - \lambda E)x = 0$.
- (b) Вектор f_3 берется как ненулевой столбец матрицы $A - \lambda E$, векторы f_1, f_2 берутся, как линейно независимые столбцы матрицы $A - \mu E$.

3. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

В этом случае в качестве жорданова базиса годится любой базис.

4. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}$$

В этом случае вектор f_3 находится как решение системы $(A - \mu E)x = 0$. Векторы f_1, f_2 можно найти одним из следующих способов:

- (a) Найдем ФСР системы $(A - \lambda E)^2 x = 0$, пусть это будет x_1, x_2 . Тогда в качестве f_2 берем один из векторов x_i , а $f_1 = (A - \lambda E)f_2$. В итоге выбираем такое x_i в качестве f_2 , чтобы f_1 был не ноль.
- (b) В качестве вектора f_2 перебираем столбцы матрицы $A - \mu E$ до тех пор, пока $f_1 = (A - \lambda E)f_2$ не станет ненулевым. Как только f_1 будет не ноль, векторы f_1, f_2 – искомые.

5. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

В этом случае жорданов базис имеет конфигурацию

$$\begin{array}{ccc} f_2 & & \\ \downarrow A - \lambda E & & \\ f_1 & & f_3 \\ \downarrow A - \lambda E & & \downarrow A - \lambda E \\ 0 & & 0 \end{array}$$

В этом случае базис ищем по следующему алгоритму

- (a) Вектор f_2 выбираем случайно из всего пространства F^3 . Всегда достаточно выбирать из стандартных базисных векторов.
- (b) Вектор $f_1 = (A - \lambda E)f_2$. Если $f_1 = 0$, то возвращаемся к шагу выбора вектора f_2 .
- (c) В случае когда $f_1 \neq 0$ это будет вектор из $\ker(A - \lambda E)$, надо дополнить его до базиса ядра. Это можно сделать так: находим ФСР для системы $(A - \lambda E)x = 0$ и дополняем f_1 любым вектором из ФСР, который не пропорционален f_1 , это и будет f_3 .

6. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

В этом случае жорданов базис имеет конфигурацию

$$\begin{array}{ccc} f_3 & & \\ \downarrow A - \lambda E & & \\ f_2 & & \\ \downarrow A - \lambda E & & \\ f_1 & & \\ \downarrow A - \lambda E & & \\ 0 & & \end{array}$$

В этом случае базис ищется по следующему алгоритму

- (а) Случайно выбираем f_3 из F^3 . Всегда достаточно выбирать из стандартных базисных векторов.
- (б) Положим $f_2 = (A - \lambda E)f_3$ и $f_1 = (A - \lambda E)f_2$.
- (с) Если вектор f_1 равен нулю, то возвращаемся к шагу выбора f_3 иначе получили нужный базис.

33 Определение ЖНФ у матриц 4 на 4 с одним собственным значением

Дано Матрица $A \in M_4(F)$ с единственным собственным значением $\lambda \in F$, где поле F алгебраически замкнуто.

Найти Жорданова форма может быть одной из

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & 1 \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Определить какая форма в нашем случае и определить собственное значение.

Алгоритм Общая идея в том, чтобы подобрать инварианты, которые достаточно рассчитать для выбора из предоставленных вариантов.

1. Найдем характеристический многочлен $\chi_A(t) = \det(A - tE)$. Нам нужно найти его единственный корень. Так как многочлен имеет вид $(t - \lambda)^4$, то можно найти его 3-ю производную и решить $\chi_A(t)^{(3)} = 0$ для нахождения корня. Это работает, если $2 \neq 0$ и $3 \neq 0$ в поле F .^{8,9}
2. Если $A = \lambda E$, то ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

3. Если $\text{rk}(A - \lambda E) = 1$, то ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

4. Если $\text{rk}(A - \lambda E) = 3$, то ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

5. Если $\text{rk}(A - \lambda E) = 2$, то надо посмотреть на $(A - \lambda E)^2$. Если $(A - \lambda E)^2 = 0$, то ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

иначе (если $(A - \lambda E)^2 \neq 0$) ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

⁸Действительно, третья производная от $(t - \lambda)^4$ будет $4!(t - \lambda)$. Если 2 и 3 обратимы в F , то можно сократить на $4!$.

⁹Можно воспользоваться любым другим приемлемым способом по поиску корня многочлена.

34 Определить Жорданов базис у матриц 4 на 4 с единственным собственным значением

Дано Матрица $A \in M_4(F)$ с единственным собственным значением λ , где поле F алгебраически замкнутое.

Задача Зная ЖНФ определить жорданов базис f_1, f_2, f_3, f_4 .

Алгоритм

1. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

В этом случае любой базис годится в качестве жорданова.

2. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

В этом случае конфигурация жорданова базиса будет следующая

$$\begin{array}{ccc} f_2 & & \\ \downarrow A-\lambda E & & \\ f_1 & f_3 & f_4 \\ \downarrow A-\lambda E & \downarrow A-\lambda E & \downarrow A-\lambda E \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

В этом случае базис находится по следующему алгоритму

- Вектор f_2 выбираем случайно из F^4 . Всегда достаточно выбирать из стандартных базисных векторов.
 - Положим $f_1 = (A - \lambda E)f_2$. Если вектор $f_1 = 0$, то вернемся к шагу выбора вектора f_2 .
 - Вектор f_1 будет лежать в $\ker(A - \lambda E)$ теперь его надо дополнить до базиса ядра двумя векторами. Это можно сделать так: находим ФСР системы $(A - \lambda E)x = 0$ и из трех векторов выберем два f_3, f_4 , которые будут линейно независимы с f_1 .
3. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

В этом случае конфигурация жорданова базиса будет следующая

$$\begin{array}{ccc} f_3 & & \\ \downarrow A-\lambda E & & \\ f_2 & & \\ \downarrow A-\lambda E & & \\ f_1 & f_4 & \\ \downarrow A-\lambda E & \downarrow A-\lambda E & \\ 0 & 0 & \end{array}$$

В этом случае базис находится по следующему алгоритму

- (a) Вектор f_3 выбираем случайно в F^4 . Всегда достаточно выбрать из стандартных базисных векторов.
- (b) Положим $f_2 = (A - \lambda E)f_3$ и $f_1 = (A - \lambda E)f_2$. Если $f_1 = 0$, то вернуться к шагу выбора вектора f_3 .
- (c) Вектор f_1 лежит в $\ker(A - \lambda E)$, его надо дополнить одним вектором f_4 до базиса ядра. Это можно сделать следующим образом. Найдем ФСР системы $(A - \lambda E)x = 0$ и дополним вектор f_1 одним вектором из ФСР, чтобы полученная пара была линейно независима.

4. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

В этом случае конфигурация жорданова базиса будет следующая

$$\begin{array}{c} f_4 \\ \downarrow A - \lambda E \\ f_3 \\ \downarrow A - \lambda E \\ f_2 \\ \downarrow A - \lambda E \\ f_1 \\ \downarrow A - \lambda E \\ 0 \end{array}$$

В этом случае базис находится по следующему алгоритму

- (a) Вектор f_4 выбираем случайно из F^4 . Всегда достаточно выбрать из стандартных базисных векторов.
- (b) Положим $f_3 = (A - \lambda E)f_4$, $f_2 = (A - \lambda E)f_3$, $f_1 = (A - \lambda E)f_2$. Если $f_1 = 0$, то вернуться к шагу перебора f_4 иначе получился искомый базис.

5. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

В этом случае конфигурация жорданова базиса будет следующая

$$\begin{array}{cc} f_2 & f_4 \\ \downarrow A - \lambda E & \downarrow A - \lambda E \\ f_1 & f_3 \\ \downarrow A - \lambda E & \downarrow A - \lambda E \\ 0 & 0 \end{array}$$

В этом случае базис можно найти по следующему алгоритму.

- (a) Выбираем вектор f_2 случайно в F^4 . Всегда достаточно выбирать из стандартных базисных векторов.
- (b) Положим $f_1 = (A - \lambda E)f_2$. Если $f_1 = 0$, то вернуться к шагу выбора f_2 .
- (c) Выбираем вектор f_4 случайно в F^4 . Всегда достаточно выбирать из стандартных базисных векторов.
- (d) Положим $f_3 = (A - \lambda E)f_4$. Если векторы f_1, f_3 линейно зависимы, вернуться к шагу выбора f_4 . Иначе получили искомый базис.

35 Найти матрицу билинейной формы при замене базиса

Дано Векторные пространства V и U над полем F . Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ – базисы пространства V , а $f = (f_1, \dots, f_m)$ и $f' = (f'_1, \dots, f'_m)$ – базисы пространства U . Кроме того, известны матрицы перехода от e к e' и от f к f' , т.е. $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)C$ и $(f'_1, \dots, f'_m) = (f_1, \dots, f_m)D$, где $C \in M_n(F)$ и $D \in M_m(F)$ две обратимые матрицы. Дана билинейная форма $\beta: V \times U \rightarrow F$ заданная в базисах e и f матрицей $B \in M_{nm}(F)$, т.е. $b_{ij} = \beta(e_i, f_j)$.

Задача Найти матрицу билинейной формы β в базисах e' и f' .

Алгоритм

1. Пусть в базисах e' и f' мы имеем $\beta(x, y) = x^t B' y$, где B' – искомая матрица. Тогда $B' = C^t B D$.

36 Найти правое ортогональное дополнение к подпространству

Дано Дана билинейная форма $\beta: F^n \times F^m \rightarrow F$ по правилу $\beta(x, y) = x^t B y$, где $B \in M_{nm}(F)$ и подпространство $V \subseteq F^n$, заданное образующими $V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

Задача Найти $V^\perp = \{y \in F^m \mid \beta(V, y) = 0\}$.

Алгоритм

1. Составить вектора v_i в столбцы матрицы $D = (v_1 \mid \dots \mid v_k) \in M_{nk}(F)$.
2. Найти ФСР СЛУ $D^t B y = 0$. Данная ФСР дает базис V^\perp .

37 Найти левое ортогональное дополнение к подпространству

Дано Дана билинейная форма $\beta: F^n \times F^m \rightarrow F$ по правилу $\beta(x, y) = x^t B y$, где $B \in M_{nm}(F)$ и подпространство $V \subseteq F^m$, заданное образующими $V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

Задача Найти ${}^\perp V = \{x \in F^n \mid \beta(x, V) = 0\}$.

Алгоритм

1. Составить вектора v_i в столбцы матрицы $D \in M_{mk}(F)$.
2. Найти ФСР СЛУ $D^t B^t x = 0$. Данная ФСР дает базис ${}^\perp V$.

38 Симметричный Гаусс

Дано Симметричная билинейная форма $\beta: F^n \times F^n \rightarrow F$ по правилу $(x, y) \mapsto x^t B y$, где $B \in M_n(F)$ – симметричная матрица и при этом $2 \neq 0$ в поле F .

Задача Диагонализировать β , то есть найти матрицу перехода к новому базису C такую, чтобы $B' = C^t B C$ была диагональная, и посчитать саму матрицу B' .

Алгоритм

1. Чтобы найти матрицу B' будем приводить ее к диагональному виду симметричными элементарными преобразованиями, то есть допускаются следующие преобразования:
 - Прибавить i -ю строку умноженную на λ к j -ой строке и сразу же прибавление i -го столбца умноженного на λ к j -ому столбцу.
 - Поменять местами i -ю и j -ю строку и тут же поменять местами i -ый и j -ый столбец.
 - Умножить i -ю строку на ненулевое λ и тут же умножить i -ый столбец на то же самое λ .

Получившаяся диагональная матрица будет искомая B' .

2. Если при этом надо восстановить матрицу C , то рассматриваем $(B|E)$ и делаем симметричные элементарные преобразования над ней в том смысле, что преобразования над строками выполняются над всей матрицей, а преобразования над столбцами только над частью, где лежит B . Тогда матрица приведется к виду $(B'|C^t)$.

39 Метод Якоби

Дано Симметричная билинейная форма $\beta: V \times V \rightarrow F$, базис e_1, \dots, e_n пространства V , такой, что $\det \beta|_{\langle e_1, \dots, e_k \rangle} \neq 0$.

Задача Найти базис e'_1, \dots, e'_n такой, что $e'_i - e_i \in \langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle = \langle e'_1, \dots, e'_{i-1} \rangle$ такой, что $\beta(e'_i, e'_j) = 0$ при $i \neq j$.

Алгоритм

1. В начале положим $e'_1 = e_1$.
2. Пусть мы нашли вектора e'_1, \dots, e'_{i-1} . Тогда положим вектор e'_i в виде¹⁰

$$e'_i = e_i - \frac{\beta(e_i, e'_1)}{\beta(e'_1, e'_1)} e'_1 - \dots - \frac{\beta(e_i, e'_{i-1})}{\beta(e'_{i-1}, e'_{i-1})} e'_{i-1}$$

40 Алгоритм диагонализации на основе метода Якоби

Дано Симметрическая матрица $B \in M_n(F)$.

Задача Проверить, что все ее угловые подматрицы B_k невырождены и если это так, то найти их значения, а также найти верхнетреугольную матрицу с единицами на диагонали $C \in M_n(F)$ и диагональную матрицу $D \in M_n(F)$ такие, что $B = C^t D C$.

Алгоритм

1. Начнем приводить матрицу B к верхнетреугольному виду элементарными преобразованиями первого типа, когда нам разрешено прибавлять строку с коэффициентом только к более низкой строке. Возможны два исхода:
 - На каком-то этапе получили, что на диагонали на k -ом месте стоит 0, а под диагональю есть ненулевой элемент. Это значит, что $\Delta_k = 0$. Условие на матрицу не выполнено.
 - Мы привели матрицу B к верхнетреугольной матрице U . Переходим к следующему шагу.
2. Восстановим все необходимые данные по матрице U следующим образом:
 - (a) D – диагональ матрицы U .
 - (b) $C = D^{-1}U$.
 - (c) Δ_k – произведение первых k элементов диагонали матрицы D .

41 Алгоритм диагонализации унитарного оператора

Дано Унитарная матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Задача Найти разложение вида $A = U D U^*$, где $U = (u_1 | \dots | u_n) \in M_n(\mathbb{C})$ – унитарная матрица и $D \in M_n(\mathbb{C})$ – диагональная матрица с числами равными по модулю 1.

¹⁰В силу условия $\det \beta|_{\langle e_1, \dots, e_k \rangle} \neq 0$ выражения вида $\beta(e'_k, e'_k)$ будут всегда отличны от нуля.

Алгоритм

1. Найти характеристический многочлен $\chi_A(t)$. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – его корни с кратностями n_1, \dots, n_k .¹¹
2. Для каждого λ_i найдем ортонормированный базис собственного подпространства:
 - (a) найдем базисные собственные векторы, решив систему $(A - \lambda_i E)x = 0$ в \mathbb{C}^n .
 - (b) К полученным векторам применим алгоритм Грама-Шмидта используя стандартное скалярное произведение $(x, y) = \bar{x}^t y$.
 - (c) Нормируем каждый вектор, поделив на его длину.
3. Тогда матрица D будет $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_k)$, где каждое λ_i встречается n_i раз.
4. Матрица U будет составлена из базисных векторов собственных подпространств. Сначала идут n_1 векторов для λ_1 , потом n_2 для λ_2 и т.д.

42 Алгоритм приведения произвольного ортогонального оператора к каноническому виду

Дано Ортогональная матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Задача Найти разложение $A = UDU^t$, где $U = (u_1 | \dots | u_n) \in M_n(\mathbb{R})$ – ортогональная матрица и D – блочно диагональная матрица, где на диагонали стоят:

$$1, \quad -1, \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Алгоритм

1. Найти характеристический многочлен $\chi_A(t)$. Пусть кратность корня 1 равна n_1 , кратность корня -1 равна n_{-1} . Остальные комплексные корни имеют вид $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ и $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_k$, при этом кратности их будут m_1, \dots, m_k (и у сопряженных такие же).¹²
2. Надо найти ортонормированные базисы для блоков.
 - (a) Блоки 1 и -1 . Опишем процесс для 1.
 - i. Найдем базисные собственные векторы, решив систему $(A - E)x = 0$.
 - ii. Применим Грама-Шмидта для стандартного скалярного произведения $(x, y) = x^t y$ к базису собственных векторов.
 - iii. Нормируем базисные векторы, поделив на их длину.
 - (b) Блоки размера 2.
 - i. За каждый такой блок отвечает пара комплексно сопряженных корней. Возьмем $\lambda_i = \cos \alpha_i + i \sin \alpha_i$.
 - ii. Найдем комплексные базисные собственные векторы для $\bar{\lambda}_i$,¹³ решив систему $(A - \bar{\lambda}_i E)x = 0$.
 - iii. Применим к базисным векторам Грама-Шмидта для стандартного скалярного произведения $(x, y) = \bar{x}^t y$.
 - iv. Пусть получилась последовательность w_1, \dots, w_{m_i} . Каждый их этих векторов имеет вид $w_s = u_s + i v_s$, при этом мы знаем, что $|u_s| = |v_s|$ и $u_s \perp v_s$.
 - v. Заменим каждый w_i на пару векторов $u_i/|u_i|, v_i/|v_i|$. Тогда набор этих пар будет ортонормированным базисом отвечающим набору блоков вида¹⁴

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix}$$

¹¹ Должно получиться, что $|\lambda_i| = 1$ для всех i .

¹² Таким образом имеем $n = n_1 + n_{-1} + 2m_1 + \dots + 2m_k$.

¹³ Причина почему я беру именно $\bar{\lambda}_i$ связана с тем, где я хочу получить минус в блоке.

¹⁴ Если бы мы решали систему для λ_i , то минус был бы в левом нижнем углу.

3. Теперь в качестве матрицы D выберем матрицу такую, что она блочно диагональная. В начале идут 1 в количестве n_1 , потом -1 в количестве n_{-1} . Потом идут блоки 2 на 2 вида

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix}$$

которые повторяются m_i раз.

4. В качестве U надо выбрать матрицу из построенных базисных векторов. Сначала n_1 векторов для 1, потом n_{-1} векторов для -1 . А потом векторы соответствующие блокам 2 на 2. Сначала $2m_1$ пар полученных из λ_1 , потом $2m_2$ пар полученных из λ_2 и т.д.

43 Алгоритм приведения ортогонального оператора \mathbb{R}^3 к каноническому виду

Дано Ортогональная матрица $A \in M_3(\mathbb{R})$.

Задача Найти разложение $A = UDU^t$, где $U = (u_1|u_2|u_3) \in M_3(\mathbb{R})$ – ортогональная матрица и D одна из следующих матриц¹⁵

$$(I) \quad D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad (II) \quad D = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Алгоритм

- Ищем матрицу U . Начинаем с поиска образующего оси. Решаем систему $(A - E)x = 0$. Возможны следующие случаи:
 - ФСР пустое.
Это значит, что у нас случай (II) и ось надо искать из уравнения $(A + E)x = 0$. Приведем матрицу $A + E$ к улучшенному ступенчатому виду $(v_1|v_2)^t$. Тогда ее ФСР будет из одного вектора, нормируем его и обозначим за u_1 – это образующий оси. Векторы v_1, v_2 образуют базис $\langle u_1 \rangle^\perp$. Ортогонализуем и нормируем векторы v_1, v_2 . Полученные векторы будут u_2 и u_3 .
 - ФСР из одного вектора u . Нормируем его и обозначим через u_1 .
Это значит, что у нас случай (I) и вектор u_1 – образующий оси. Когда мы решали $(A - E)x = 0$ мы привели матрицу $A - E$ к улучшенному ступенчатому виду $(v_1|v_2)^t$. Тогда v_1, v_2 – базис $\langle u_1 \rangle^\perp$. Ортогонализуем v_1, v_2 и потом нормируем. Полученные векторы будут u_2 и u_3 .
 - ФСР из двух векторов v_1 и v_2 .
Это значит, что у нас случай (II). Пусть v – любая ненулевая строка матрицы $A - E$, тогда нормируем v и обозначим получившийся вектор u_1 – это будет образующий оси. Ортогонализуем и нормируем векторы v_1 и v_2 . Полученные векторы будут u_2 и u_3 .
 - ФСР из трех векторов.
Это значит, что у нас случай (I). Такое возможно только если $A = E$. В этом случае $U = E$, $\alpha = 0$.
- Теперь найдем $\cos \alpha$. Возможны два случая.
 - Случай (I). Тогда $\text{tr } A = 1 + 2 \cos \alpha$.
 - Случай (II). Тогда $\text{tr } A = -1 + 2 \cos \alpha$.
- Теперь найдем $\sin \alpha$. Для этого заметим, что $(Au_2, u_3) = \sin \alpha$.

44 Алгоритм разложения симметрических матриц

Дано Матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ такая, что $A^t = A$.

Задача Найти разложение $A = C\Lambda C^t$, где $C \in M_n(\mathbb{R})$ – ортогональная матрица, $\Lambda \in M_n(\mathbb{R})$ – диагональная матрица.

¹⁵Прямая натянутая на вектор u_1 называется осью для A .

Алгоритм

1. Найти собственные значения матрицы A .
 - (а) Составить характеристический многочлен $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E)$.
 - (б) Найти корни $\chi(\lambda)$ с учетом кратностей: $\{(\lambda_1, n_1), \dots, (\lambda_k, n_k)\}$, где λ_i – корни, n_i – кратности.
2. Для каждого λ_i найти ортонормированный базис в пространстве собственных векторов отвечающему λ_i .
 - (а) Найти ФСР системы $(A - \lambda_i E)x = 0$. Пусть это будет $v_1^i, \dots, v_{n_i}^i$. Обратите внимание, что их количество будет в точности равно кратности n_i .
 - (б) Ортогонализировать $v_1^i, \dots, v_{n_i}^i$ методом Грама-Шмидта. Обратите внимание, после ортогонализации останется ровно n_i векторов.
 - (в) Сделать каждый вектор длинны один: $v_j^i \mapsto \frac{v_j^i}{|v_j^i|}$.
3. Матрица Λ будет диагональной с числами $\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_k$ на диагонали, где каждое λ_i повторяется n_i раз. Обратите внимание, всего получится n чисел.
4. Матрица C будет составлена из столбцов $v_1^1, \dots, v_{n_1}^1, v_1^2, \dots, v_{n_2}^2, \dots, v_1^k, \dots, v_{n_k}^k$. Обратите внимание, порядок собственных векторов соответствует порядку собственных значений в матрице Λ .

45 Алгоритм нахождения сингулярного разложения

Дано Матрица $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.¹⁶

Задача Найти разложение $A = U\Lambda V^t$, где $U \in M_m(\mathbb{R})$ ортогональная, $V \in M_n(\mathbb{R})$ ортогональная, $\Lambda \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ содержит на диагонали элементы $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_s > 0$, а все остальные нули.

Алгоритм

1. Составим матрицу $S = AA^t \in M_m(\mathbb{R})$. Тогда $S = U\Lambda\Lambda^t U^t$.
2. Так как $S^t = S$. То с помощью алгоритма для симметрических матриц найдем ее разложение $S = CDC^t$. Причем, обязательно получится, что диагональная матрица $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ состоит из неотрицательных элементов.
3. Тогда $U = C$, а $\Lambda\Lambda^t = D$. То есть $\sigma_i^2 = \lambda_i$. Так как $\sigma_i \geq 0$, то они находятся как $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$.
4. Теперь надо найти V из условия $A = U\Lambda V^t$.¹⁷ Пусть $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_s > 0$. Положим $U = (u_1 | \dots | u_m)$ и $V = (v_1 | \dots | v_n)$. Тогда $A^t U = V\Lambda^t$, то есть $v_i = \frac{1}{\sigma_i} A^t u_i$ при $1 \leq i \leq s$.
5. Теперь найдем оставшиеся v_{s+1}, \dots, v_n . Для этого дополним v_1, \dots, v_s до базиса \mathbb{R}^n и ортонормируем полученное семейство.¹⁸

46 Алгоритм нахождения компактного сингулярного разложения

Дано Матрица $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.¹⁹

Задача Найти разложение $A = U\Sigma V^t$, где $U \in M_m(\mathbb{R})$, $V \in M_n(\mathbb{R})$ – матрицы с ортонормированными столбцами, $\Sigma \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ – диагональная матрица с элементами $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_s > 0$ на диагонали.

¹⁶Этот алгоритм рекомендуется применять при $m \leq n$, в противном случае, применить его к матрице A^t , а потом транспонировать полученное разложение.

¹⁷Обратите внимание Λ не обязательно квадратная и тем более не обязательно обратимая.

¹⁸Можно заметить, что v_{s+1}, \dots, v_n будут базисом ядра A , потому можно найти ФСР для $\{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\}$ и ортонормировать его.

¹⁹Этот алгоритм рекомендуется применять при $m \leq n$, в противном случае, применить его к матрице A^t , а потом транспонировать полученное разложение.

Алгоритм

1. Составим матрицу $S = AA^t \in M_m(\mathbb{R})$. Тогда $S = U\Sigma^2U^t$.
2. Так как $S^t = S$. То с помощью алгоритма для симметрических матриц найдем ее разложение $S = CDC^t$.²⁰ Причем, обязательно получится, что диагональная матрица $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ состоит из неотрицательных элементов и мы можем выбрать порядок так, чтобы $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 0$.
3. Пусть $C = (C_1 | \dots | C_m)$, тогда положим $U = (C_1 | \dots | C_s) \in M_{m \times s}(\mathbb{R})$. А матрица $\Sigma \in M_s(\mathbb{R})$ будет диагональной с числами $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ на диагонали, то есть $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_s)$.
4. Теперь надо найти V из условия $A = U\Sigma V^t$.²¹ Положим $U = (u_1 | \dots | u_s)$ и $V = (v_1 | \dots | v_s)$. Тогда $A^t U \Sigma^{-t} = V$, то есть $v_i = \frac{1}{\sigma_i} A^t u_i$ при $1 \leq i \leq s$.

²⁰Здесь D будет диагональной матрицей, а C ортогональной.

²¹Обратите внимание, что Σ квадратная и обратимая матрица.