

# Formfaktoren des semileptonischen $D \rightarrow Kl^+\nu$ Zerfalls

Bachelorarbeit  
zur Erlangung des akademischen Grades  
Bachelor of Science

vorgelegt von  
Dimitrios Skodras  
geboren in Aschaffenburg

Lehrstuhl für Theoretische Physik IV  
Fakultät Physik  
Technische Universität Dortmund  
2014

1. Gutachter : Prof. Dr. Gudrun Hiller

2. Gutachter : Dr. Martin Jung

Datum des Einreichens der Arbeit: 14. Juli, 2014

*“Es gibt nichts Praktischeres, als eine gute Theorie.”*

*- Kant, Immanuel*

## Kurzfassung

Im Zuge dieser Arbeit sollen dimensionslose Formfaktoren ermittelt werden, die eine Darstellung eines zerfallrelevanten Matrixelements bilden. Sie werden durch eine  $z$ -Reihenentwicklung parametrisiert und anhand von Daten der CLEO Collaboration unter Minimierung einer  $\chi^2$ -Funktion bis zur zweiten Ordnung gefittet. Die Fitparameter für  $D^0 \rightarrow K^- l \nu$  sind  $a_0 = 0,726$ ,  $a_1 = 0,140$ ,  $a_2 = 9,548$  und der Wert für den verbleibenden Formfaktor ist  $|V_{cs}|f_+(q^2 = 0) = 0,762$ , wobei  $q^2$  der Impulsübertrag des Leptonpaares ist. Und für  $D^+ \rightarrow \bar{K}^0 l \nu$  sind  $a_0 = 0,708$ ,  $a_1 = -1,263$ ,  $a_2 = -10,95$ , sowie  $|V_{cs}|f(0) = 0,708$ .

## Abstract

As part of this thesis form factors get ascertained, which build an exposition of a matrix element pertinent to the decay. They are parameterised by a series expansion of the  $z$ -expansion and fitted to the second order by data of the CLEO Collaboration under minimizing a  $\chi^2$ -function. The resulting fit parameters for  $D^0 \rightarrow K^- l \nu$  are  $a_0 = 0,726$ ,  $a_1 = 0,140$ ,  $a_2 = 9,548$  and the value for the form factor is  $|V_{cs}|f_+(q^2 = 0) = 0,762$ , where  $q^2$  is the momentum transfer carried by the lepton pair. And for  $D^+ \rightarrow \bar{K}^0 l \nu$  are  $a_0 = 0,708$ ,  $a_1 = -1,263$ ,  $a_2 = -10,95$  and  $|V_{cs}|f(0) = 0,708$ .

# Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	VII	
Tabellenverzeichnis	VIII	
<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>2</b>
2.1	Voraussetzungen moderner Physik . . . . .	2
2.1.1	Relativistische Kinematik . . . . .	2
2.1.2	Dirac-Gleichung . . . . .	3
2.1.3	Fermis Goldene Regel . . . . .	5
2.2	Standardmodell der Elementarteilchenphysik . . . . .	7
2.2.1	Teilcheninhalt . . . . .	7
2.2.2	Schwache Wechselwirkung . . . . .	9
2.2.2.1	Parität . . . . .	9
2.2.2.2	Fermi-Wechselwirkung . . . . .	9
2.2.2.3	CKM-Matrix . . . . .	11
2.3	Parametrisieren von Formfaktoren . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>15</b>
3.1	Kinematische Größen . . . . .	15
3.2	Die Axialvektorformfaktoren und $f_-$ . . . . .	16
3.3	Fit des Formfaktors $f_+$ . . . . .	18
3.3.1	Methode der kleinsten Quadrate . . . . .	18
3.3.2	Der Minimierungsprozess durch <b>Minuit</b> . . . . .	19
3.3.3	Resultate unter Variation von $t_0$ und der Polynomordnung . . .	20
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>24</b>



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Feynman-Diagramme für GSW-Theorie (l.) und Fermi-Wechselwirkung (r.) . . . . .	10
2.2	Feynmangraph zum $D \rightarrow \bar{K}l^+\nu_l$ Zerfall. . . . .	13
3.1	Zwei Zerfallsmöglichkeiten des $D^+$ -Mesons mit extremen $q^2$ -Werten. . .	16
3.2	$D^0 \rightarrow K^-l^+\nu$ : $t_0 = 0$ , $\mathcal{O} = 1$ . . . . .	20
3.3	$D^0 \rightarrow K^-l^+\nu$ : $t_0 = 0$ , $\mathcal{O} = 2$ . . . . .	20
3.4	$D^0 \rightarrow K^-l^+\nu$ : $t_0 = t_{\text{opt}}$ , $\mathcal{O} = 1$ . . . . .	21
3.5	$D^0 \rightarrow K^-l^+\nu$ : $t_0 = t_{\text{opt}}$ , $\mathcal{O} = 2$ . . . . .	21
3.6	$D^+ \rightarrow \bar{K}^0l^+\nu$ : $t_0 = 0$ , $\mathcal{O} = 1$ . . . . .	21
3.7	$D^+ \rightarrow \bar{K}^0l^+\nu$ : $t_0 = 0$ , $\mathcal{O} = 2$ . . . . .	21
3.8	$D^+ \rightarrow \bar{K}^0l^+\nu$ : $t_0 = t_{\text{opt}}$ , $\mathcal{O} = 1$ . . . . .	21
3.9	$D^+ \rightarrow \bar{K}^0l^+\nu$ : $t_0 = t_{\text{opt}}$ , $\mathcal{O} = 2$ . . . . .	21

# Tabellenverzeichnis

2.1	Kenndaten elementarer Fermionen (ohne Antiteilchen) . . . . .	8
2.2	Kenndaten der im Zerfall beteiligten Mesonen . . . . .	8
3.1	z-bereiche . . . . .	16
3.2	Gemessene partielle Zerfallsraten bei entsprechenden Impulsüberträgen und zugehörigen systematischen und statistischen Kovarianzen in % für beide Zerfallskanäle . . . . .	20
3.3	Reihenkoeffizienten, das minimierte $\chi^2$ , sowie der Startwert des Form- faktors $f_+(0) V_{cs} $ . Die statistischen Fehler werden in Klammern angegeben	22
3.4	Verlgeich der gefitteten Formfaktoren mit denen des PDG . . . . .	23



# Kapitel 1

## Einleitung

Wie es Johann Wolfgang von Goethe in Faust I schreibt, versucht der Mensch, zu erkennen, was die Welt im Innersten zusammenhält. Im vergangenen Jahrhundert sind sehr viele Aufwendungen getätigt worden, diese metaphorische Frage zu beantworten, also die grundlegenden Bestandteile der Natur zu identifizieren. Die Teilchen und die sie beschreibenden Kräfte werden im sogenannten Standardmodell (SM) zusammengefasst, welches stetig ausgeweitet und verbessert wird. Teil dieses Modells ist die Beschreibung von flavourändernden Zerfällen von aus Quarks zusammengesetzten Hadronen im Zuge der schwachen Wechselwirkung. Der hierbei auftretende Teilchenstrom der Quarks wird durch ein Matrixelement beschrieben, welches sich durch den großen Einfluss der starken Wechselwirkung sich nicht mehr störungstheoretisch bestimmen lässt und daher eine Darstellung von Formfaktoren verwandt wird. Diese einheitenlosen Größen enthalten sämtliche theoretisch nicht zugängliche Parameter und sind durch die Verwendung experimenteller Daten berechenbar.

Zu Beginn dieser Arbeit werden die theoretischen Grundlagen der Relativistik, der Quantenmechanik, sowie des Standardmodells mit spezieller Betrachtung der schwachen Wechselwirkung und schließlich einer näher diskutierten Parametrisierung für Formfaktoren näher gebracht. Hier ermittelte Ergebnisse umfassen die Bestimmung des physikalisch relevanten Bereichs des betrachteten Zerfalls, sowie die Vorstellung des zum Fit des Formfaktors benutzten Skripts und die daraus resultierenden Größen der Formfaktoren.

# Kapitel 2

## Theorie

Um Kenntnis über die Formfaktoren zu erlangen, ist es erforderlich, zuvor beteiligte Zusammenhänge zu beleuchten. Ein Einblick in die historische Physik des 20. Jahrhunderts soll die Grundlage für die den Zerfall entscheidende Schwache Wechselwirkung schaffen. Zuletzt wird eine Parametrisierung von Formfaktoren vorgestellt.

### 2.1 Voraussetzungen moderner Physik

Die physikalischen Errungenschaften aus der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts stellen aus heutiger Sicht aufgrund ihrer Richtigkeit und Exaktheit die Bedingung ihrer Gültigkeit an moderne Theorien. Hiermit sind die spezielle Relativitätstheorie und die Quantenmechanik gemeint(\*). Davon sind im Rahmen dieser Arbeit die relativistische Kinematik, die Dirac-Gleichung sowie die störungstheoretische “Goldene Regel” von Fermi von Bedeutung.

#### 2.1.1 Relativistische Kinematik

Die SRT stellt die fundamentale Forderung, dass die Form der Naturgesetze unabhängig vom Inertialsystem gleich ist. Die Lichtgeschwindigkeit  $c$  als größte vorkommende Geschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich groß. Die relativistische Energie-Impuls Beziehung  $E^2 = (mc^2)^2 + (\vec{p}c)^2$  beschreibt einen allgemeinen Zusammenhang zwischen der Energie  $E$ , der Masse  $m$  und dem Impuls  $\vec{p}$ . Zur Beschreibung der Bewegung von relativistischen Teilchen wird wegen der Energie-Impuls-Beziehung und der Verknüpfung von Raum und Zeit ( $x = t$ ) das Konzept der Vierer-Vektoren eingeführt. Es gestaltet sich so, dass die Zeit als 0. Komponente des Raums und die Energie als 0.

Komponente des Impulses angesehen werden kann, was die 4-Dimensionalität zeigt [1].

$$x^\mu = (t, x, y, z)^\mu \quad \text{Vierer-Ort} \quad (2.1)$$

$$p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z)^\mu \quad \text{Vierer-Impuls} \quad (2.2)$$

Der Index  $\mu$  kann ganzzahlige Werte zwischen 0 und 3 annehmen und steht für die jeweilige Komponente des Vektors. Im Gegensatz zu euklidischen Räumen kann ein Skalarprodukt zweier Vierer-Vektoren nur dann beschrieben werden, wenn einer kovariant (Index unten) und der andere kontravariant (Index oben) ist. Diese Überführung geschieht durch die Minkowskimetrik  $\eta$ , die die Norm unter Lorentz-Transformationen invariant lässt

$$p^2 = p^\mu \eta_{\mu\nu} p^\nu = p^\mu p_\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2, \quad (2.3)$$

was wieder die relativistische Energie-Impuls-Beziehung ist. Die Einsteinsche Summenkonvention wird hierbei angewandt.

### 2.1.2 Dirac-Gleichung

Die bekannte Schrödinger-Gleichung zur Beschreibung quantenmechanischer Prozesse zeigt keine Invarianz unter Lorentztransformationen, da sie nicht der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung genügt. Eine Gleichung, die lorentzinvariant und zudem eine positive Wahrscheinlichkeitsdichte aufweist, ist die Dirac-Gleichung, die für Spin<sup>1/2</sup>-Teilchen, die Fermionen, gilt. Um dies zu gewährleisten, müssen die partiellen Zeit- und Ortsableitungen in jeweils erster Ordnung sein und damit folgender Schrödinger-Form genügen [3]

$$i\partial_t \psi = \left( -i\alpha^k \partial_k + \beta m \right) \psi = \mathcal{H}_D \psi, \quad (2.4)$$

mit  $\hbar = 1$  und  $\mathcal{H}_D$  dem diracschen Hamiltonian.  $\alpha^k = \gamma^0 \gamma^k$  und  $\beta = \gamma^0$  sind die historischen Dirac-Matrizen. Gelöst wird diese Schrödinger-Form von der folgenden Dirac-Gleichung

$$(\not{p} - m)\psi = 0, \quad (2.5)$$

mit  $\not{p}$  als Impulsoperator in der Feynman-Slash-Notation

$$\not{A} := \gamma^\mu A_\mu = \gamma^0 A_0 - \gamma^i \cdot A_i \quad (2.6)$$

und  $\psi$  als Wellenfunktion, mit den vier Freiheitsgraden (da  $\gamma^\mu \in M^{4 \times 4}$ ): Teilchen, Antiteilchen, Spin-Up, Spin-Down. Die  $\gamma$ -Matrizen in der Dirac-Pauli-Notation lauten

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

mit  $\mathbb{1}$  als 2x2-Einheitsmatrix und den  $\sigma^i$  als Paulimatrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen der freien Dirac-Gleichung sind folgende Wellenfunktionen

$$\psi_+(x) = u(p)^{(1,2)} e^{-ip^\mu x_\mu} \quad \text{und} \quad \psi_-(x) = v(p)^{(1,2)} e^{+ip^\mu x_\mu}, \quad (2.7)$$

die eingesetzt in (2.5) die Gleichungen für die Spinoren  $u$  und  $v$

$$(\not{p} - m)u^{(1,2)} = \bar{u}^{(1,2)}(\not{p} - m) = 0 \quad (2.8)$$

$$(\not{p} + m)v^{(1,2)} = \bar{v}^{(1,2)}(\not{p} + m) = 0, \quad (2.9)$$

ergeben, wobei  $\not{p}$  hier nun kein Operator, sondern der Eigenwert des Viererimpulses der ebenen Welle (2.7) ist und  $\bar{a} = a^\dagger \gamma^0$ , mit  $\dagger$  als komplexe Konjugation und Transposition. Die Energieeigenwerte der freien Lösungen für Teilchen  $\psi_+$  sind positiv und die der Antiteilchen  $\psi_-$  negativ, was mit der Löchertheorie interpretiert wird. Wie bereits erwähnt, existiert bei der Dirac-Gleichung ein Wahrscheinlichkeitsstrom  $j^\mu$ , der der lorentzinvarianten Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (2.10)$$

genügt. Zur Ermittlung wird (2.4) von links mit der komplex konjugierten Wellenfunktion und die komplex konjugierte Form von (2.4) von rechts mit der nicht komplex konjugierten Wellenfunktion multipliziert. Hierzu dient die Gleichheit  $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$ . Die daraus resultierenden Gleichungen voneinander abgezogen ergeben die eben genannte Kontinuitätsgleichung. Der Wahrscheinlichkeitsstrom lautet somit

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (2.11)$$

### 2.1.3 Fermis Goldene Regel

In der Elementarteilchenphysik werden unter anderem Zerfälle untersucht, deren Edukte sehr kurze Lebenszeiten  $\tau$  haben und diese sich daher nicht sehr präzise bestimmen lassen. Mit der Heisenbergschen Unschärferelation gelingt es, eine sogenannte Zerfallsrate  $\Gamma$  als bestimmbare Größe zu erheben

$$\Gamma\tau = 1 \quad \leftrightarrow \quad \Gamma = \frac{1}{\tau}. \quad (2.12)$$

Für einen beliebigen Zerfall ist es von Interesse, eben diese Zerfallsrate auszurechnen und dazu benötigt man im Allgemeinen eine Zerfallsamplitude  $M$  (auch Matrixelement genannt) und einen verfügbaren lorentzinvarianten Phasenraum  $\Phi$  [2][4]. Die Amplitude, die mithilfe der Feynman Regeln berechenbar ist, enthält hierbei die dynamischen Informationen, der Phasenraum die kinematischen, also die Massen, Energien und Impulse der beteiligten Teilchen. Nach Fermis goldener Regel lässt sich die differentielle Zerfallsbreite ausdrücken durch

$$d\Gamma(D \rightarrow Kl\nu) = \frac{|M|^2}{2m_D} d\Phi(K, l, \nu), \quad (2.13)$$

mit  $m_D$  der Masse des D-Mesons. Der Phasenraum lässt sich schreiben als

$$d\Phi = (2\pi)^4 \frac{d^3p_K}{2(2\pi)^3 E_K} \frac{d^3k_l}{2(2\pi)^3 E_l} \frac{d^3k_\nu}{2(2\pi)^3 E_\nu} \delta^4(p_D - p_K - k_l - k_\nu), \quad (2.14)$$

wobei  $k_i$  fortan Leptonimpulse,  $p_i$  Hadronimpulse,  $P$  kurz die Summe  $p_D + p_K$  und  $q$  die Differenz  $p_D - p_K$  bezeichnet. Dabei ist  $\delta$  die diracsche Deltafunktion, deren Aufgabe die Erhaltung von Energie und Impuls ist. Ziel ist es nun einen Ausdruck zu finden, theoretisch die differentielle Zerfallsbreite zu berechnen(\*). Das hierzu benötigte Matrixelement wird über den Erwartungswert eines Hamiltonians berechnet, der sich in einen Quark- und einen Leptonenstrom aufteilen lässt. Deren Struktur wird durch (2.11) und die V-A-Theorie aus Abschnitt 2.2.2.2 vorgegeben. Da der leptonische Anteil nicht stark wechselwirkt, ist eine explizite Darstellung des Erwartungswert möglich. Anders hingegen verhält es sich beim Quarkstrom, der nach Abschnitt 2.3 durch Formfaktoren  $f_\pm$  ausgedrückt werden kann.

$$M = \langle Kl\nu | \mathcal{H} | D \rangle$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{G_F V}{\sqrt{2}} \langle K | j_{\text{quark}}^\mu | D \rangle \cdot \langle l\nu | j_{\mu}^{\text{lepton}} | 0 \rangle \\
 &= \frac{G_F V}{\sqrt{2}} \langle K(p_K) | \bar{s} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) c | D(p_D) \rangle \cdot \bar{u}(k_l) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v(k_\nu) \\
 &:= \frac{G_F V}{\sqrt{2}} \langle K(p_K) | V^\mu - A^\mu | D(p_D) \rangle \cdot \bar{u}(k_l) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v(k_\nu) \\
 &= \frac{G_F V}{\sqrt{2}} [f_+(q^2) P^\mu + f_-(q^2) q^\mu] \bar{u} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Im Vorfaktor gehen die Fermikonstante  $G_F$  und ein ebenfalls in 2.2.2 wiederkommendes Matrixelement  $V$  ein.  $\bar{s}$  und  $c$  sind quantenfeldtheoretische Vernichtungs- bzw. Erzeugungsoperatoren der jeweiligen Quarks.  $V^\mu$  und  $A^\mu$  sind der vektorielle und axialvektorielle Anteil des Quarkstroms, der in Abschnitt 2.2.2.2 beschrieben wird. Weiterhin sind  $f(*)$  (meinst du  $f_\pm$ ) die noch zu diskutierenden Formfaktoren, von denen an dieser Stelle nur  $f_+$  weiter betrachtet werden soll, da in Abschnitt 2.3 gezeigt wird, dass dieser der einzig verbleibende ist. Nach der Quadratur von  $M$  wird der leptonische Anteil über Casimirs Trick [4] umgeformt

$$\begin{aligned}
 |M|^2 &= \frac{G_F^2 |V|^2}{2} |f_+(q^2)|^2 P^\mu P^\nu \cdot 8(k_{l,\mu} k_{\nu,\nu} - g_{\mu\nu} k_l k_\nu + k_{l,\nu} k_{\nu,\mu}) \\
 &= 4G_F^2 |V|^2 |f_+(q^2)|^2 (2P^\mu P^\nu - P^2 g^{\mu\nu}) k_{l,\nu} k_{\nu,\mu},
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

wobei die Indizes  $k_{\text{lepton,lorentzindex}}$  bedeuten. Für die Phasenraumbetrachtung sind im Ruhesystem des D-Mesons die Gleichheiten

$$\frac{d^3 p_K}{2E_K} = 2\pi |p_K| dE_K \quad \text{und} \quad |p_K| = \frac{\sqrt{\lambda(m_D^2, m_K^2, q^2)}}{2m_D}, \tag{2.17}$$

sowie die Integration

$$\int \frac{d^3 k_l}{2E_l} \frac{d^3 k_\nu}{2E_\nu} \delta^4(q - k_l - k_\nu) k_\mu k_\nu = \frac{\pi}{24} (q^2 g_{\mu\nu} + 2q_\mu q_\nu) \tag{2.18}$$

gegeben. Es ergibt sich für das Phasenraumvolumen mit Übernahme von  $k_{l,\nu}$  und  $k_{\nu,\mu}$  aus (2.16) somit

$$\begin{aligned}
 d\Phi &= (2\pi)^4 \frac{dp_K}{(2\pi)^9 2E} \int \frac{d^3 k_l}{2E_l} \frac{d^3 k_\nu}{2E_\nu} \delta^4(q - k_l - k_\nu) k_\mu k_\nu \\
 &= \frac{|p_K| dE}{(2\pi)^4} \frac{\pi}{24} (q^2 g_{\mu\nu} + 2q_\mu q_\nu)
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Um nun schließlich die differentielle Zerfallsbreite zusammenzufassen, werden (2.16) und (2.19) angepasst verwendet. Im folgenden Ausdruck wird die Gleichheit

$$(2P^\mu P^\nu - P^2 g^{\mu\nu})(2q_\mu q_\nu + q^2 g_{\mu\nu}) = 4\lambda(m_D^2, m_K^2, q^2) = 16m_D^2 |p_K|^2 \quad (2.20)$$

und der aus der Kinematik ableitbarer Zusammenhang  $dE = dq^2/2m_D$  benutzt. Die zu Beginn genannte Gleichung (2.13) wird nun abschließend ausgedrückt als

$$d\Gamma = \frac{G_F^2 |V|^2}{24\pi^3} |f_+(q^2)|^2 |p_K|^3 dq^2. \quad (2.21)$$

Da im weiteren Verlauf  $|f_+(q^2)|V$  berechnet werden soll, jedoch die komplette von  $q^2$  abhängige Zerfallsbreite gemessen wird, ist dieser eben hergeleitete Zusammenhang dieser Größen von Bedeutung.

## 2.2 Standardmodell der Elementarteilchenphysik

Das SM setzt sich aus zwei definierenden Eigenschaften zusammen, den Teilchen und den Eichtheorien, die diese beschreiben. Die sichtbare Materie wird aus Fermionen zusammengesetzt. Zu den Quantenfeldtheorien des SMs, denen jeweils Bosonen als Austauschteilchen zugeordnet werden, gehören die Quantenelektrodynamik (QED), die Quantenchromodynamik (QCD) und die schwache Wechselwirkung, die hier näher beleuchtet wird.

### 2.2.1 Teilcheninhalt

Seit Langem ist bekannt, dass die als unteilbar angenommenen Atome aus Konstituenten bestehen. Die Elektronenhülle und der Atomkern, der seinerseits aus Protonen und Neutronen zusammengesetzt ist, die ihrerseits wiederum aus Quarks bestehen(\*). Nach derzeitigem Stand gelten Elektronen und die anderen geladenen Leptonen  $l$  und Quarks als punktförmige Teilchen, die keine Substruktur aufweisen. Antiteilchen gibt es zu jedem Teilchen. Sie gleichen sich zwar in ihrer Masse, tragen jedoch in allen ladungsartigen Quantenzahlen, wie der Leptonenzahl oder der elektrischen Ladung und Parität ein entgegengesetztes Vorzeichen. Die stabilen, sehr leichten Neutrinos  $\nu$  existieren zwar nicht in gebundenen Zuständen, gelten jedoch als elementar und sind daher ebenfalls im elementaren Teilchenzoo [5] in Tabelle 2.1 aufgeführt.

Generation		$m$ in MeV	$\tau$ in s	$q$ in e		$m$ in MeV	$q$ in e
1	$e$	0,511	stabil	-1	$u$	2,3	$+\frac{2}{3}$
	$\nu_e$	$<10^{-6}$		0	$d$	4,8	$-\frac{1}{3}$
2	$\mu$	105,7	$2,2 \cdot 10^{-6}$	-1	$c$	1275	$+\frac{2}{3}$
	$\nu_\mu$			0	$s$	95	$-\frac{1}{3}$
3	$\tau$	1777	$2,9 \cdot 10^{-13}$	-1	$t$	173500	$+\frac{2}{3}$
	$\nu_\tau$			0	$b$	4180	$-\frac{1}{3}$

**Tabelle 2.1:** Kenndaten elementarer Fermionen (ohne Antiteilchen)

Aus Quarks  $q$  und ihren Partnern, den Antiquarks  $\bar{q}$  ist es nun möglich, verschiedene Kombinationen zu bilden, die jedoch nach außen hin immer eine ganzzahlige Ladung tragen müssen. Diese Quarkkombinationen werden Hadronen genannt und werden durch die Anzahl an Valenzquarks in (Anti-)Baryonen ( $\bar{q}\bar{q}\bar{q}/qqq$ ) und in Mesonen ( $q\bar{q}$ ) unterklassifiziert. Hier interessant sind die Mesonen, die je aus mindestens einem Quark der 2. Generation bestehen. Für diese Arbeit relevant sind ein  $D$ -Meson, welches unter schwacher Wechselwirkung in ein  $K$ -Meson übergeht unter Abstrahlung eines  $W$ -Bosons, welches wiederum in ein Leptonenpaar zerfällt(\*). In Tabelle 2.2 sind ihre Attribute [5] aufgeführt.

	$q\bar{q}$	$m$ in MeV	$\tau$ in s	$I(J^P)$	$I_z$	$S$	$C$
$D^+$	$c\bar{d}$	1869	$1,0 \cdot 10^{-12}$	$\frac{1}{2}(0^-)$	$+\frac{1}{2}$	0	+1
$D^0$	$c\bar{u}$	1865	$1,0 \cdot 10^{-12}$	$\frac{1}{2}(0^-)$	$-\frac{1}{2}$	0	+1
$\bar{K}^0$	$s\bar{d}$	497	$1,0 \cdot 10^{-12}$	$\frac{1}{2}(0^-)$	$+\frac{1}{2}$	-1	0
$K^-$	$s\bar{u}$	493	$1,0 \cdot 10^{-12}$	$\frac{1}{2}(0^-)$	$-\frac{1}{2}$	-1	0

**Tabelle 2.2:** Kenndaten der im Zerfall beteiligten Mesonen

Die hier neu auftauchenden Größen sind im Einzelnen der starke Isospin  $I$ , seine dritte Komponente  $I_z$ , der Gesamtdrehimpuls  $J$ , die Parität  $P$ , die Strangeness  $S$ , sowie die Charmeness  $C$ . Da es sich beim Spectatorquark um ein Teilchen der 1. Generation handelt ( $\bar{u}, \bar{d}$ ), gilt  $I = \frac{1}{2}$ . Mesonen tragen ganzzahligen Gesamtdrehimpuls und da hier die Spinrichtungen ihrer Valenzquarks entgegengesetzt ausgerichtet sind, verschwindet dieser. Weil  $D^+$  und  $\bar{K}^0$  pseudoskalar sind, also unter Raumspiegelung ihre Wellenfunktion das Vorzeichen ändern, ergibt sich  $P = -1$ .



### 2.2.2 Schwache Wechselwirkung

Die schwache Wechselwirkung gilt als die Einzige der vier fundamentalen Kräfte, die beispielsweise Paritäts- und Flavoureigenschaften von Teilchen verändert. Als niederenergetischen Grenzfall der modernen, quantenfeldtheoretischen Glashow-Weinberg-Salam Theorie (GWS) wird die klassische Theorie von Fermi reproduziert. Diese beinhaltet die sogenannte Vier-Fermionen-Punkt-Wechselwirkung (oder Fermi-Wechselwirkung), die Zerfälle mit vier beteiligten Fermionen beschreiben kann. Bei solchen flavourändernden Übergängen gibt die unitäre  $3 \times 3$ -CKM-Matrix die Wahrscheinlichkeit dazu an.

#### 2.2.2.1 Parität

Wenn ein Prozess vor und nach einer Symmetrieoperation dieselben physikalischen Eigenschaften zeigt, gilt dieser als invariant. Mathematisch zeigt sich dies, indem der zugehörige, quantenmechanische Operator mit dem den Prozess charakterisierenden Hamiltonoperator vertauscht. Das bedeutet, dass beide eine gemeinsame Basis aus Eigenzuständen mit zugehörigen Eigenwerten, auch Quantenzahlen genannt, haben. Die Parität, als diskrete Symmetrie, wechselt bezüglich eines beliebigen Ursprungs das Vorzeichen vektorieller oder pseudoskalarer Größen eines physikalischen Zustands [6]. Axialvektorielle oder skalare Größen bleiben hingegen unberührt. Somit ergeben sich als Quantenzahlen für den Paritätsoperator  $\mathcal{P}$  die Werte  $\pi = \pm 1$ . Bei zweifacher Ausführung entsteht der ursprüngliche Zustand, da Eigenwerte diskreter Symmetrien multiplikativ sind. Unter Berücksichtigung einer sogenannten Eigenparität, die eine feste Teilcheneigenschaft ist, zeigt sich experimentell die Erhaltung der Parität bei elektromagnetischen und starken Wechselwirkungen.

#### 2.2.2.2 Fermi-Wechselwirkung

Zur Beschreibung der schwachen Wechselwirkung wird eine hadronische Stromdichte  $V_\mu^{c\dagger}$  eingeführt [6], die eine Form wie (2.11) besitzt.  $c$  steht hierbei für charged und bedeutet, dass Ladung übertragen wird. Die hier nicht näher beschriebenen Austausch-Teilchen müssen daher selbst Ladung tragen und werden  $W^\pm$ -Bosonen genannt, an die zwei geladene Ströme koppeln. Durch ihre hohe Masse von 82 GeV, kommt die kurze Reichweite zustande, was die Fermi-Wechselwirkung in einem Punkt erklärt. In Abbildung 2.1 sind die Feynman-Diagramme beider Darstellungen gezeigt.

Abbildungen/4fermi.jpg

**Abbildung 2.1:** Feynman-Diagramme für GSW-Theorie (l.) und Fermi-Wechselwirkung (r.)

Zum hadronischen Strom kommt natürlich auch ein leptonischer Strom  $l_\mu^c$ , der im Aussehen seinem Pendant gleicht. Aus ihnen wird über eine Kopplungskonstante ein hermitescher Hamiltonian konstruiert, der bereits in Abschnitt 2.1.3 vorweg genommen wurde

$$\mathcal{H} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} (V^{c,\mu} l_\mu^{c\dagger} + l^{c,\mu} V_\mu^{c\dagger}), \quad (2.22)$$

dessen Raumzeitstruktur als Vektor-Vektor-Kopplung (VV) bezeichnet wird. Die auftretenden Ströme verhalten sich unter Lorentz-Transformationen wie ein Raumzeit-Vektor. Es zeigt sich, dass diese Art der Kopplung nicht die einzig lorentzinvariante ist. Aus bilinearen Kombinationen 4-komponentiger Spinoren ergeben sich 16 Freiheitsgrade, die sich auf vektorielle (V), skalare (S), tensorielle (T), pseudoskalare (P) und axialvektorielle (A) Ströme verteilen. Bei den möglichen Kombinationen, Strom-Strom-Kopplungen zu erzeugen, gilt zu beachten, dass der Hamiltonian (pseudo-)skalar sein muss, was die Kontrahierbarkeit beider Ströme erfordert. Eine dieser Kopplungen (VA) würde eine Paritätsverletzung erfordern, da der Hamiltonian pseudoskalar ist und daher nicht mit dem Paritätsoperator vertauscht. Durch die Klärung des  $\theta - \tau$ -Rätsels und dem Experiment von Wu, konnte die lang auf wissenschaftlichen Widerstand gestoßene Paritätsverletzung bestätigt werden.

Der Helizitätsoperator für Fermionen  $H$  als Skalarprodukt des Impulsoperators  $\vec{p}$ , der eine vektorielle Größe ist und dem Spinoperator  $\vec{\sigma}$ , der seinerseits ein Axialvektor ist, zeigt ebenfalls für Neutrinos die Paritätsverletzung. Positive und negative Helizität wären unter Paritätsinvarianz gleich wahrscheinlich, jedoch ergibt sich aus dem Goldhaber-Experiment stets eine Helizität von  $\langle H_\nu \rangle = -1$ . Für relativistische Invarianz muss ein entsprechender Operator gefunden werden. Bei masselosen, wie bei massiven Teilchen ergibt sich ein Projektionsoperator, der aus Spinoren die linkshändige Komponente extrahiert:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad (2.23)$$

mit den Eigenschaften

$$\mathcal{P}u_- = -u_- \quad \text{und} \quad \mathcal{P}u_+ = 0. \quad (2.24)$$

Hieraus ergibt sich eine Erweiterung des bisher benutzten Leptonenstroms um links-händige Neutrinos, die sich, wie in Abschnitt 2.1.3, schreiben lässt als

$$l_\mu^c = \bar{\psi}_l \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_\nu. \quad (2.25)$$

Ebenfalls folgt eine Erweiterung des gesamten hadronischen Stroms  $h_\mu^{c\dagger}$  in gleicher Form wie des leptonischen als

$$h_\mu^{c\dagger} = \bar{\psi}_p \gamma_\mu (1 - c_A \gamma_5) \psi_n, \quad (2.26)$$

mit  $c_A$  als ein von der inneren Struktur der nicht punktförmigen Hadronen abhängiger Faktor, der durch Renormierungseffekte der starken Wechselwirkung entsteht. Der Faktor  $1/2$  fällt bei beiden schwachen Strömen nach Konvention weg. Beide Ströme enthalten neben dem ursprünglich allein gedachten Vektoranteil nun noch einen Axialvektoranteil, was sich in der Bezeichnung V-A-Struktur niederschlägt.

### 2.2.2.3 CKM-Matrix

Durch die Paritätsverletzung zeigt sich, dass die geladenen, schwachen Ströme an links-händige Teilchen und rechtshändige Antiteilchen koppeln [7][8]. So liegt der Schluss nahe, Dubletts von Teilchen zu erzeugen, die in gleicher Stärke koppeln. Diese werden aus den zwei Leptonen aus je einer Generation ( $e$  und  $\nu_e$ , sowie  $\mu$  und  $\nu_\mu$ ) und dem Up- und Down-Quark gebildet. Das zu Beginn der CKM-Matrix-Entwicklung (Cabibbo, Kobayashi, Maskawa) bereits bekannte Strange-Quark mit einem damals noch hypothetischen Charm-Quark zu einem Dublett zusammenzufassen, birgt Schwierigkeiten, da Mesonen mit einem  $s$  bei einem leptonischen Zerfall, beispielsweise  $K^+(u\bar{s}) \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ , dem damaligen Verständnis widersprechen. Mit der von Cabibbo entworfenen Idee, das  $d$ - und das  $s$ -Quark als gedrehte Quarkzustände

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \\ -d \sin \theta_c + s \cos \theta_c \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

zu betrachten, ist die Erklärung dieses Flavourwechsels möglich und lässt sich in folgendem Strom ausdrücken

$$j^\mu = (\bar{u} \bar{c}) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) U \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Die Universalität der Zerfallsamplitude  $M$  aus (2.15), die bisher nur die Kopplungskonstante  $G_F$  besessen hat, hat nun noch den neuen Parameter  $\theta_c$ , der Cabibbo-Winkel genannt wird. Dieser Winkel beschreibt den zusätzlichen Kopplungsfaktor der  $W^\pm$ -Bosonen an die schwachen Wechselwirkungseigenzustände  $u, d', c, s'$  des  $u, d, s$ -, bzw.  $c$ -Quarks. Aus der Betrachtung von Zerfällen  $u \rightarrow d$  und  $c \rightarrow d$  lässt sich  $\theta_c \approx 13^\circ$  bestimmen. Die zweidimensionale Matrix  $U$  ist zwar wegen Erhaltung der euklidischen Norm unitär, kann jedoch nicht die gefundene CP-Verletzung (Charge, Parity) erklären. Nach Kobayashi und Maskawa muss folglich eine dritte Fermionengeneration existieren, die  $U$  in eine  $3 \times 3$ -Matrix erweitern würde, die zwar weiterhin unitär aber nun zusätzlich eine komplexe Phase  $e^{i\phi}$  enthalte.  $V_{\text{CKM}}$  ist ausdrückbar in der Standardparametrisierung, bei der die vier freien Parameter die eben genannte komplexe Phase und drei Eulerwinkel  $\theta_{12} = \theta_c, \theta_{13}$  und  $\theta_{23}$  sind. Die Wolfenstein-Parametrisierung beschreibt die CKM-Matrix ihrerseits mit den vier Parametern  $\lambda, A, \rho$  und  $\eta$ , welche die Verbindungen  $\lambda = \sin \theta_{12}, A\lambda^2 = \sin \theta_{23}$  und  $A\lambda^3(\rho - i\eta) = \sin \theta_{13} e^{-i\phi}$  haben.

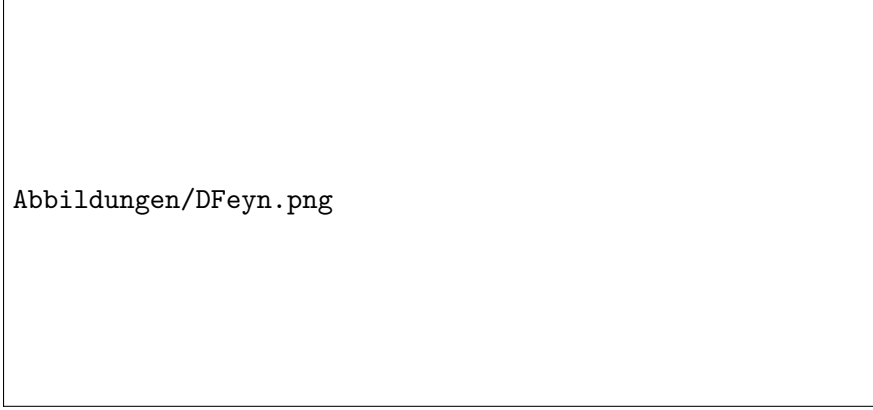
$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 & \lambda & \lambda^3 A(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 & \lambda^2 A \\ \lambda^3 A(1 - \rho - i\eta) & -\lambda^2 A & 1 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Sollte die CP-Verletzung einzig aus der komplexen Phase kommen, lässt sich zeigen, dass CP-verletzende Amplituden proportional zur Fläche des sogenannten Unitaritätsdreiecks sind. Es handelt sich hierbei um ein Dreieck in der komplexen Ebene mit  $\rho$  und  $\eta$  als Achsen. Die Seiten werden durch Komponenten von  $V_{\text{CKM}}$  repräsentiert.

## 2.3 Parametrisieren von Formfaktoren

Der wie in Abschnitt 2.2.2.2 dargestellte hadronischen Strom  $h_\mu^{c\dagger}$  lässt sich aufgrund von starken Wechselwirkungen zwischen den Hadronkonstituenten nicht so einfach schreiben, sondern wird wie in Abschnitt 2.1.3 bereits vorweggenommen, durch einheitenlose

Formfaktoren ausgedrückt[9]. Der Sachverhalt wird am für den betrachteten Zerfall relevanten Feynmangraphen in Abbildung 2.2 dargestellt.



**Abbildung 2.2:** Feynmangraph zum  $D \rightarrow \bar{K}l^+\nu_l$  Zerfall.

So ist die Betrachtung einer Vier-Fermionen-Wechselwirkung unzureichend, da die Austauschbosonen der QCD, die Gluonen  $g$ , einen störungstheoretisch nicht ermittelbaren Einfluss auf den schwachen Zerfall haben. In einem Zweikörper-Zerfall  $E \rightarrow PQ$  sind zwei Freiheitsgrade möglich, die den Prozess charakterisieren. Dies sind die Viererimpulse des Eduktteilchens  $p_E$  und des Produktteilchens  $p_P$ , da der Viererimpuls des verbliebenen Produktteilchens  $q$  von den vorigen determiniert wird. Da der vektorielle Anteil des schwachen Stroms  $V^\mu$  aus (2.15) nicht erhalten ist (WAS HEISST DAS GENAU?), gibt es hierbei zwei Formfaktoren  $f_\pm$ , die der Beschreibung der allgemeinsten Form dienen

$$\langle K(p_K) | V^\mu | D(p_D) \rangle = f_+(q^2)(p_D + p_K)^\mu + f_-(q^2)(p_D - p_K)^\mu. \quad (2.31)$$

Es gibt viele Ansätze, diese Formfaktoren zu bestimmen. Neben dem theoretischen Weg über die Gitterquantenchromodynamik, existieren einige Parametrisierungen, die anhand experimenteller Daten einen Zugang ermöglichen. Die Pol-Parametrisierungen weisen ein schlechtes Konvergenzverhalten nahe der semileptonischen Bereiche des Impulsübertrags  $q^2$  auf, was Zweifel an einer korrekten Berechnung des Formfaktors aufkommen lässt [10]. Eine Darstellung, die ein solches Problem nicht hat, ist eine sogenannte  $z$ -Reihenentwicklung [11]

$$f(q^2) = \frac{1}{1 - \frac{q^2}{m_D^{*2}}} \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i(t_0, q^2). \quad (2.32)$$

Die Koeffizienten  $a_i$  sind aus einem Fit zu bestimmende Größen. die Konvergenz der Reihe wird dadurch gesichert, dass  $|z| < 1$  im physikalischen Bereich. Sie wird dargestellt durch

$$z(t_0, q^2) = \frac{\sqrt{t_+ - q^2} - \sqrt{t_+ - t_0}}{\sqrt{t_+ - q^2} + \sqrt{t_+ - t_0}}, \quad (2.33)$$

worin  $t_{\pm}$  bestimmt sind durch  $t_{\pm} = (m_D \pm m_K)$  und  $t_0$  als ein konstantes Optimum gewählt wird, was klassischerweise zu  $t_0 = t_+(1 - (1 - t_-/t_+)^{1/2}) := t_{\text{opt}}$  bestimmt wird, da es den Maximalwert von  $z(t_0, q^2)$  minimiert.

Bei Übergängen mit nicht verschwindendem Axialvektorstrom  $A^\mu$ , wie zum Beispiel von einem pseudoskalaren zu einem vektoriellen Teilchen, treten weitere Formfaktoren auf. Die Ausdrücke für diesen Strom und die Abhängigkeiten der Formfaktoren  $A_i(q^2)$  sind teilweise sehr komplex, sodass wegen der hier nicht bestehenden Relevanz nicht näher darauf eingegangen wird.

## Kapitel 3

# Ergebnisse

Die möglichen Formfaktoren des betrachteten Zerfalls werden im Folgenden diskutiert, nachdem der physikalisch mögliche Bereich des Impulsübertrags berechnet worden ist. So werden die Axialvektorformfaktoren unter Paritätsbetrachtungen und  $f_-$  aufgrund von vernachlässigbarer Leptonenmassen verschwinden. Schließlich wird der einzig verbliebene Formfaktor  $f_+$  unter Minimierung einer  $\chi^2$ -Funktion bestimmt.

### 3.1 Kinematische Größen

Die Formfaktoren werden allgemein in Abhängigkeit des Impulsübertrags  $q^2$  angegeben. Da dieser nicht beliebige Werte annehmen kann, ist es sinnvoll, den möglichen Wertebereich zu ermitteln. In Abbildung 3.1 sind die beiden Randbereiche dargestellt. Im linken Teil des Bildes ( $q^2 = q_{\max}^2$ ) befindet sich das entstehende Kaon wieder in Ruhe und im rechten Teil ( $q^2 = q_{\max}^2$ ) nimmt es die gleiche Menge an Impuls auf, wie das Leptonenpaar. Zur Berechnung wird entsprechend den Regeln der Vierer-Impuls-Algebra die Vierer-Impuls-Erhaltung im Ruhesystem des D-Mesons betrachtet

$$\begin{aligned} p_D^\mu &= p_K^\mu + p_l^\mu + p_\nu^\mu \\ p_D^\mu - p_K^\mu &= q^\mu = p_l^\mu + p_\nu^\mu \\ (p_D^\mu - p_K^\mu)^2 &= q^2 = (p_l^\mu + p_\nu^\mu)^2 \\ m_D^2 + m_K^2 - 2m_D E_K &= q^2 = m_l^2 + m_\nu^2 + E_l E_\nu - |\vec{p}_l| |\vec{p}_\nu| \cos(\xi). \end{aligned} \quad (3.1)$$

An diesem Ausdruck lässt sich der in Abschnitt 2.1.3 verwandte Zusammenhang  $dE = dq^2/2m_D$  erkennen. Sollte das Kaon sich nach dem Zerfall in Ruhe befinden, so ist  $E_K = m_K$ , woraufhin  $q^2 = (m_D - m_K)^2$  wäre. Für vernachlässigbare Leptonmassen

Abbildungen/DZerfall.png

**Abbildung 3.1:** Zwei Zerfallsmöglichkeiten des  $D^+$ -Mesons mit extremen  $q^2$ -Werten.

( $m_l = m_\nu = 0$ ), gilt  $E = |\vec{p}|$  und  $q^2$  verschwindet, falls die Impulsrichtungen der Leptonen in die gleiche Richtung zeigen, also der Zwischenwinkel  $\xi = 0$ . Es resultiert ein Wertebereich von

$$0 \leq q^2 \leq (m_D - m_K)^2. \quad (3.2)$$

Mit diesen Randwerten für den physikalischen Bereich kann man nun den Wertebereich der  $z$ -Entwicklung (2.33) für beliebige  $t_0$  bestimmen. Da eine hinreichend schnelle Konvergenz zur Fehlerminimierung förderlich ist, ist es wünschenswert, dass ihr Betrag immer möglichst gering ist. In folgender Tabelle sind für drei Wahlen von  $t_0$  die Randwerte angegeben

$$t_0 \quad | \quad z_{\min} \quad z_{\max}$$

**Tabelle 3.1:**  $z$ -bereiche

## 3.2 Die Axialvektorformfaktoren und $f_-$

Wie an manchen Stellen bereits erwähnt und vorausgesetzt, verschwinden die Formfaktoren des Axialvektorstroms. Formfaktoren beschreiben starke Wechselwirkungen zwischen dem zerfallenden Quark (hier  $c$ ) und dem Spectatorquark (hier  $\bar{d}$ ,  $\bar{u}$ ), was heißt, dass die Parametrisierung des Vektor- bzw. des Axialvektorstroms dasselbe Paritätstransformationsverhalten haben müssen. Die Ströme besitzen ein Paritätsverhalten



von

$$\begin{aligned}\mathcal{P} \langle \bar{K}^0 | V^\mu | D^+ \rangle &= (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1 \\ \mathcal{P} \langle \bar{K}^0 | A^\mu | D^+ \rangle &= (-1) \cdot (+1) \cdot (-1) = +1.\end{aligned}$$

Aus den beiden einzigen Freiheitsgraden des Zerfalls, den Impulsen  $p$  und  $p'$ , und dem Levi-Civita-Symbol  $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$  lassen sich alle möglichen Darstellungen von Strömen mit unbestimmten Vorfaktoren schreiben als

$$\underbrace{p^\mu}_V; \underbrace{p'^\mu}_V; \underbrace{p^\mu p'_\mu}_S; \underbrace{\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha p'_\beta}_T, \quad (3.3)$$

wobei die Größen unter den Klammern das entsprechende Transformationsverhalten angeben. Daraus ergibt sich, dass die einzigen vektoriellen Beiträge wie Vektoren  $V$  und keiner wie Axialvektoren  $A$  transformieren. Damit ein solcher Beitrag existieren könne, müsse er aufgrund seiner Eigenschaft  $J^P = 1^+$  eine Struktur haben, wie  $A^\mu = \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} p_\alpha p'_\beta p''_\gamma$  mit einem weiteren Freiheitsgrad  $p''$ . Da dieser zur Konstruktion jedoch nicht vorhanden ist, verschwindet der Axialvektoranteil.

Um nachzuvollziehen, was mit  $f_-$  geschieht, wird das Matrixelement aus (2.15) ohne  $f_+$  betrachtet. Der Impulsübertrag  $q$  ist nicht nur die Differenz der mesonischen Viererimpulse, sondern auch die Summe der leptonischen

$$\begin{aligned}M_- &= \frac{G_F V}{\sqrt{2}} f_-(q^2) (p_D - p_K)^\mu u_\nu \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v_l \\ &= \frac{G_F V}{\sqrt{2}} f_-(q^2) (k_\nu + k_l)^\mu u_\nu \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v_l.\end{aligned}$$

Unter Einbezug des leptonischen Stroms ersetzt die Dirac-Gleichung (2.5) die  $k_i$  durch die zugehörigen Massen

$$\begin{aligned}&= \frac{G_F V}{\sqrt{2}} f_-(q^2) u_\nu (\not{k}_\nu + \not{k}_l) (1 - \gamma_5) v_l \\ &= \frac{G_F V}{\sqrt{2}} f_-(q^2) u_\nu (m_\nu + m_l) (1 - \gamma_5) v_l,\end{aligned}$$

die im Verhältnis zur  $D$ -Mesonmasse für  $l = \mu$  oder  $l = e$  vernachlässigbar sind, woraufhin  $M_-$  verschwindet.

### 3.3 Fit des Formfaktors $f_+$

In Abschnitt 2.1.3 ist ein kompakter Ausdruck für den Zusammenhang der differentiellen Zerfallsrate und dem Formfaktor  $f_+$  hergeleitet worden. Da der Formfaktor nicht leicht analytisch berechenbar ist, wird er entsprechend der Parametrisierung (2.32) nach der Methode der kleinsten Quadrate an den experimentell erhobenen Daten für die partiellen Zerfallsraten gefittet. Im Rahmen der Messmethoden, ist es nicht möglich, eine genaue Zuordnung eines gemessenen Zerfalls zum entsprechenden Impulsübertrag zu erreichen, weshalb die Zerfallsraten für diskrete Bereiche angegeben werden.

#### 3.3.1 Methode der kleinsten Quadrate

Es ist praktisch nie der Fall, dass eine Fitfunktion alle Messwerte genau erfasst. Die entstehenden Diskrepanzen zwischen Messpunkt und Fitfunktion werden quadriert, damit sie immer einen positiven Wert haben und bei der Methode der kleinsten Quadrate geht es darum, eben die Funktion zu extrahieren, die die kleinsten quadratischen Abweichungen zu den Messpunkte hat. Die zu minimierende Funktion wird als  $\chi^2$  bezeichnet, die durch die Summe über die Anzahl diskreter Intervalle  $m$  vom Produkt aus Differenzen experimenteller Daten  $\Delta\Gamma$  und zugehörigen, theoretischen Vorhersagen  $g$ , verknüpft über die Inverse einer Kovarianzmatrix  $C$ , gegeben ist:

$$\chi^2 = \sum_{i,j=1}^m (\Delta\Gamma_i - g_i(f_+)) C_{ij}^{-1} (\Delta\Gamma_j - g_j(f_+)). \quad (3.4)$$

Durch die nie ganz abschirmbare Hintergrundstörung, Strahlungen der Endteilchen (FSR) oder Monte Carlo Simulationen (MC), die zur Rekonstruktion von Teilchenpfaden in Detektoren genutzt werden, entstehen unter anderem und neben statistischen Unsicherheiten Fehlerquellen  $\sigma$  für die individuellen Zerfallsraten, die ebenso, wie die Messwerte  $\Delta\Gamma$  in [10] mit den zugehörigen  $q^2$ -Intervallen angegeben sind. Die Zuordnung der Zerfallsraten zu den  $q_i^2$  erfolgt leider ebenfalls nicht fehlerfrei. Die dadurch entstehenden Korrelationen zwischen diesen Intervallen sind teils statistischer und teils systematischer Natur, deren Matrixdarstellungen ebenfalls in [10] zu finden sind. Die zu invertierende Kovarianzmatrix setzt sich additiv aus den Kovarianzmatrizen mit den statistischen bzw. den systematischen Beiträgen zusammen

$$C = C^{\text{stat}} + C^{\text{sys}}. \quad (3.5)$$

Ihre jeweiligen Einträge ergeben sich aus den kennzeichnenden Korrelationsmatrixeinträgen  $\rho_{ij}$  und den entsprechenden Kovarianzen

$$C_{ij}^\alpha = \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha \cdot \rho_{ij}^\alpha, \quad \alpha = \text{stat, sys.} \quad (3.6)$$

Die Funktion des hier verwandten, theoretischen Modells stellt das Integral der differentiellen Zerfallsbreite über  $q^2$  dar und berechnet sich aus (2.21) zu

$$g_i(f_+) = \Gamma_{\text{theo},i} = \frac{G_F^2 |V_{cs}|^2}{24\pi^3} \int |p_K(q_i^2)|^3 \cdot |f_+(q_i^2)|^2 dq_i^2, \quad (3.7)$$

das sich zwar nicht analytisch, jedoch aufgrund der guten Konvergenzeigenschaften der beitragenden Terme auf numerischem Weg lösen lässt.

### 3.3.2 Der Minimierungsprozess durch Minuit

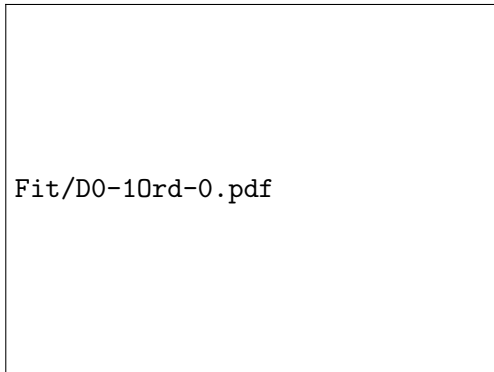
Nun da alle Größen zur Bestimmung der  $\chi^2$ -Funktion bekannt sind, wird ein Algorithmus benötigt, der unter der Minimierung die Reihenkoeffizienten des in (3.7) auftauchenden und in (2.32) definierten Formfaktors berechnet. Wegen der komplizierten Zusammenhänge, die hier existieren, wird der Computer diesen Prozess durchführen, welcher in einem **Python**-Skript unter Zuhilfenahme des am CERN erstellten Minimierungswerkzeug **Minuit** dargestellt ist. Für das Skript die folgend genannten Module importiert. Vom Modul **scipy** wird die Integrationsmethode benötigt, um das Integral von (3.7) zu berechnen. Das Modul **numpy** stellt hier mathematische Operationen, wie die Quadratwurzel oder die Erstellung und Manipulation von Matrizen. Das im Formfaktor auftauchende Polynom in  $z$  wird ebenfalls hierdurch erstellt. Durch **uncertainties** werden mit der Funktion **std\_dev(a)** die Standardabweichung der Koeffizienten  $a$  bestimmt. **iminuit** ist das Modul zur Minimierung von Funktionen, welches die Funktion **migrad()**, als tatsächlichen Minimierungsalgorithmus zur Verfügung hat. Im Quellcode selbst werden Funktionen implementiert, die teils eben genannte anwenden. Das Ergebnis des Integrals von  $g$  wird in einer Funktion aufgerufen, die  $\chi^2$  nach der Definition (3.4) bestimmt. Da  $\chi^2$  für sich gesehen nur eine Zahl ist, wird eine Funktion mit ihr als zu minimierenden Parameter, den  $\Delta\Gamma$ , den  $q^2$ -Bins und einigen anderen Argumenten generiert. Die Fitroutine erstellt einen Konstruktor des **Minuit**-Moduls mit der generierten  $\chi^2$ -Funktion, woraufhin die beiden oben genannte Funktionen aufgerufen und aus ihnen die Reihenkoeffizienten und ihre Fehler extrahiert werden. Schließlich erstellt eine Plotfunktion einen Graphen für  $f_+$  in Abhängigkeit von  $q^2$  mit den eben gefundenen  $a_i$ .

### 3.3.3 Resultate unter Variation von $t_0$ und der Polynomordnung

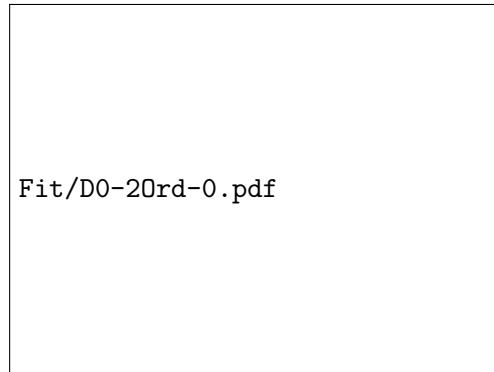
Mit dem eben dargestellten Skript, ist es nun möglich, den Fit der Formfaktoren durchzuführen. Der als Optimum frei wählbare Parameter  $t_0$  und die Ordnung des Polynoms bis zu der die Reihenkoeffizienten berechnet werden gelten hier als Größen, die variiert werden können, um ihren Einfluss auf das Ergebnis zu prüfen. Aus [10] werden die nötigen Werte entnommen, also die Zerfallsraten  $\Delta\Gamma$  mit den zugehörigen  $q^2$ -Bins, sowie die entsprechenden statistischen und systematischen  $\sigma$ , sowie die Korrelationsmatrizen  $\rho$ . In den folgenden Bildern sind nacheinander für beide Zerfallskanäle gleiche  $t_0$ -Werte nebeneinander aufgetragen, während die Polynomordnung  $\mathcal{O}$  entweder eins oder zwei ist.

$q^2$ in $\text{GeV}^2$	$D^+ \rightarrow \bar{K}_0 l^+ \nu$			$D^0 \rightarrow K^- l^+ \nu$		
	$\Delta\Gamma$ in $\text{ns}^{-1}$	$\sigma^{\text{sys}}$	$\sigma^{\text{stat}}$	$\Delta\Gamma$ in $\text{ns}^{-1}$	$\sigma^{\text{sys}}$	$\sigma^{\text{stat}}$
[0,0 - 0,4)	17,82(36)	2,03	1,26	17,79(47)	2,63	2,52
[0,2 - 0,4)	15,83(35)	2,19	1,10	15,62(45)	2,90	2,42
[0,4 - 0,6)	13,91(32)	2,31	1,12	14,02(43)	3,04	2,36
[0,6 - 0,8)	11,69(29)	2,47	1,15	12,28(40)	3,23	2,33
[0,8 - 1,0)	9,36(26)	2,73	1,20	8,92(34)	3,82	2,47
[1,0 - 1,2)	7,08(22)	3,14	1,36	8,17(32)	3,98	2,23
[1,2 - 1,4)	5,34(19)	3,63	1,35	4,96(25)	5,04	2,08
[1,4 - 1,6)	3,09(15)	4,90	1,63	2,67(18)	6,88	2,16
[1,6 - $q_{\text{max}}^2$ )	1,28(11)	8,43	2,55	1,19(13)	10,63	3,03

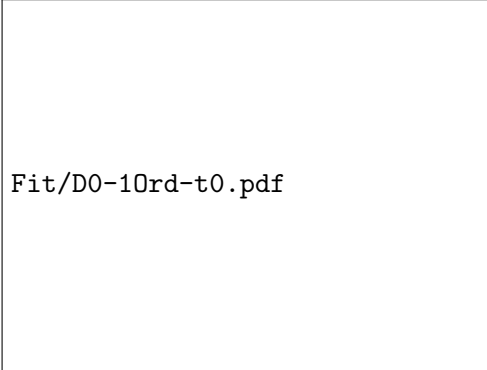
**Tabelle 3.2:** Gemessene partielle Zerfallsraten bei entsprechenden Impulsüberträgen und zugehörigen systematischen und statistischen Kovarianzen in % für beide Zerfallskanäle



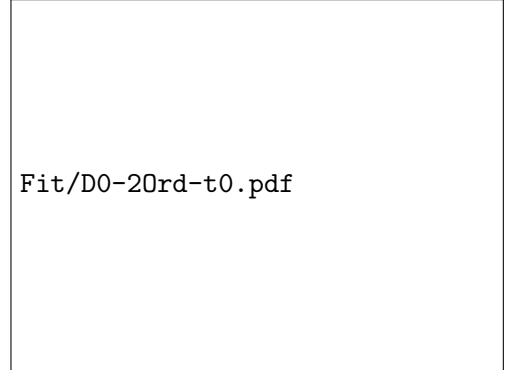
**Abbildung 3.2:**  $D^0 \rightarrow K^- l^+ \nu$ :  
 $t_0 = 0$ ,  $\mathcal{O} = 1$



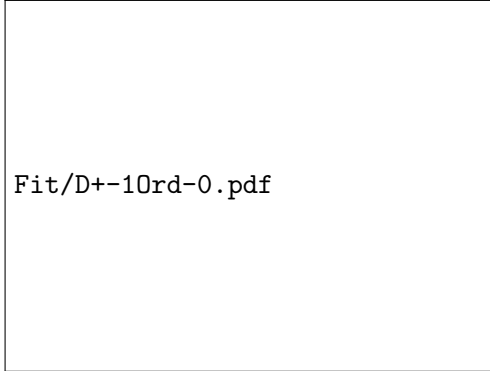
**Abbildung 3.3:**  $D^0 \rightarrow K^- l^+ \nu$ :  
 $t_0 = 0$ ,  $\mathcal{O} = 2$



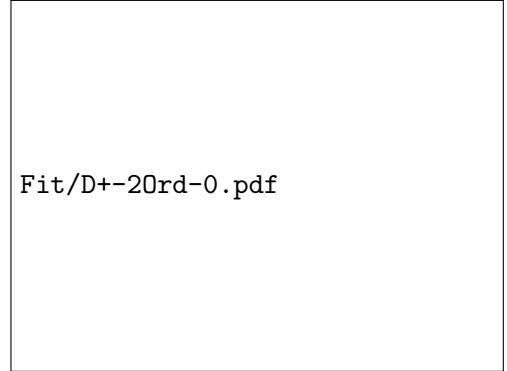
**Abbildung 3.4:**  $D^0 \rightarrow K^- l^+ \nu$ :  
 $t_0 = t_{\text{opt}}, \mathcal{O} = 1$



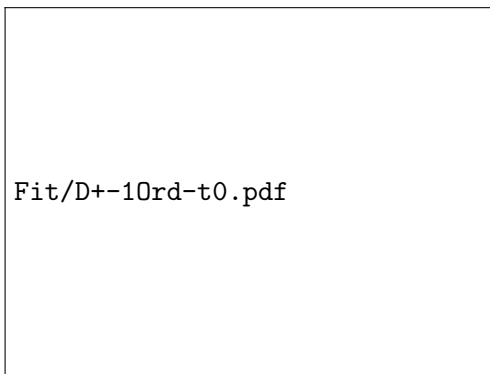
**Abbildung 3.5:**  $D^0 \rightarrow K^- l^+ \nu$ :  
 $t_0 = t_{\text{opt}}, \mathcal{O} = 2$



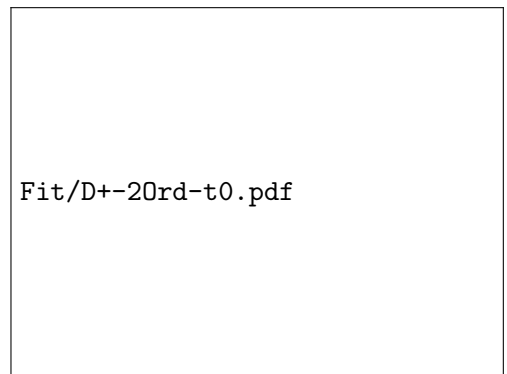
**Abbildung 3.6:**  $D^+ \rightarrow \bar{K}^0 l^+ \nu$ :  
 $t_0 = 0, \mathcal{O} = 1$



**Abbildung 3.7:**  $D^+ \rightarrow \bar{K}^0 l^+ \nu$ :  
 $t_0 = 0, \mathcal{O} = 2$



**Abbildung 3.8:**  $D^+ \rightarrow \bar{K}^0 l^+ \nu$ :  
 $t_0 = t_{\text{opt}}, \mathcal{O} = 1$



**Abbildung 3.9:**  $D^+ \rightarrow \bar{K}^0 l^+ \nu$ :  
 $t_0 = t_{\text{opt}}, \mathcal{O} = 2$

Die Reihenkoeffizienten, das Ergebnis für  $\chi^2$  und der Startwert des Formfaktors sind

in folgender Tabelle aufgeführt. Für die Wahl  $t_0 = 0$  entspricht  $a_0$  exakt dem Formfaktorstartwert, wie man mit (2.33) nachvollziehen kann.

$D^0 \rightarrow K^- l^+ \nu$						
$\mathcal{O}$	$t_0$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\chi^2$	$f_+(0) V_{cs} $
1	0	0.718(7)	-0.556(166)	-		
	$t_{\text{opt}}$	0.747(7)	-0.556(166)	-		
						0,718
2	0	0.726(9)	-0.140(524)	9.548(6.805)		
	$t_{\text{opt}}$	0.744(7)	-0.842(261)	9.507(6.784)		
						0,726

---

$D^+ \rightarrow \bar{K}^0 l^+ \nu$ NOT READY						
$\mathcal{O}$	$t_0$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\chi^2$	$f_+(0) V_{cs} $
1	0	0.718(7)	-0.556(166)	-		
	$t_{\text{opt}}$	0.747(7)	-0.556(166)	-		
						0,718
2	0	0.726(9)	-0.140(524)	9.548(6.805)		
	$t_{\text{opt}}$	0.744(7)	-0.842(261)	9.507(6.784)		
						0,726

**Tabelle 3.3:** Reihenkoeffizienten, das minimierte  $\chi^2$ , sowie der Startwert des Formfaktors  $f_+(0)|V_{cs}|$ . Die statistischen Fehler werden in Klammern angegeben

#### $t_0$ -Variation:

Für die Variation in  $t_0$  sind die Null und  $t_{\text{opt}}$  verwandt worden. Abhängig von der Polynomordnung kann man erkennen, dass für  $t_0 = t_{\text{opt}}$  die Fehler deutlich schwächer zunehmen im Verlauf der  $q^2$ -Achse, als im Fall für  $t_0 = 0$ . Besonders im Zerfallskanal  $D^+ \rightarrow \bar{K}^0 l^+ \nu$  in den Abbildungen 3.7 und 3.5 lässt sich das sehr gut erkennen, wo die Ordnung  $\mathcal{O} = 2$  ist. Für das Polynom erster Ordnung ist der Einfluss dieser Variation eher gering.

#### $\mathcal{O}$ -Variation:

Die Veränderung der Ordnung hat eine ähnliche Auswirkung. So nimmt die Standardabweichung für höhere  $q^2$ -Werte teils deutlich zu. Dies zeigt sich am deutlichsten im

selben Zerfallskanal, da seine Messwerte weniger einer monoton steigenden Funktion entsprechend verteilt sind, für die Abbildungen 3.6 und 3.7. Die Erklärung liegt darin, dass die sehr hohe Varianz des Koeffizienten  $a_2$  nach Tabelle 3.3 für den höher energetischen Bereich zunehmend an Gewicht gewinnt. Weiterhin kann man feststellen, dass die Polynomordnung  $f_+(0)$  nur geringfügig manipuliert. Wie Tabelle 3.3 ebenfalls entnehmbar ist, sind Veränderungen des Formfaktorstartwerts durch Erhöhung der Ordnung erst in der zweiten Nachkommastelle feststellbar.

### Formfaktorvergleich und Extraktion des CKM-Elements

Der Vergleich der ermittelten Formfaktoren mit denen der Particle Data Group [5] weisen eine hohe Übereinstimmung auf, was dafür spricht, dass die hier verwandte Parametrisierung sehr gut die Formfaktoren beschreibt. In nachfolgender Tabelle kann der Vergleich gesehen werden.

	$f_{+,fit}  V_{cs} $	$f_{+,PDG}  V_{cs} $	Verhältnis
$D^0 \rightarrow K^- l^+ \nu$	0,726	0,727	99,8%
$D^+ \rightarrow \bar{K}^0 l^+ \nu$	0,708	0,707	99,9%

**Tabelle 3.4:** Vergleich der gefitteten Formfaktoren mit denen des PDG

Mit den Ergebnissen der LQCD [10] lässt sich das CKM-Element durch Division aus dem gefitteten Wert errechnen, wodurch sich mit der hier verwandten Parametrisierung ein Wert ergibt von

$$V_{cs} = 0,97 \quad \text{bzw.} \quad V_{cs} = 0,99 \quad (3.8)$$

was gemittelt für den Zerfall hier verglichen mit dem Wert des PDG sehr gut übereinstimmt.

## Kapitel 4

# Zusammenfassung und Ausblick

Nach einer Einführung in die Relativistik und die Quantenmechanik ist die differentielle Zerfallsrate für den betrachteten Zerfall als Ausdruck der Formfaktoren explizit ausgerechnet worden. In der Beschreibung des hadronischen Matrixelements ist der Begriff des Formfaktors eingeführt worden, der im weiteren Verlauf immer wieder auftaucht und gegen Ende der theoretischen Grundlagen eine Parametrisierung erfährt. Diese stellt eine Reihenentwicklung in einer Funktion dar, die recht kompliziert vom variablen Impulsübertrag  $q^2$  abhängt und verglichen mit anderen Parametrisierungen gute Konvergenzeigenschaften aufweist. Im physikalischen Bereich dieser Variablen ist der Formfaktor stetig und läuft außerhalb davon auf einen Pol zu. Nach der Ermittlung dieses Bereichs sind die meisten, allgemein auftauchenden Formfaktoren nicht weiter betrachtet worden, da sie für die vorliegende Struktur keinen Beitrag liefern, sodass ein einzelner übrig bleibt. Dieser wird durch ein `Python`-Skript durch Minimierung einer  $\chi^2$ -Funktion mithilfe des Moduls `Minuit` vom CERN an Messwerten der CLEO-Collaboration gefittet und ergibt einen Wert von  $f_+(q^2 = 0)|V_{cs}| = 0,708$  für den Zerfall des  $D^+$ -Mesons und einen Wert von  $f_+(0)|V_{cs}| = 0,726$  für ein zerfallendes  $D^0$ -Meson. Das hierbei auftauchende Matrixelement  $|V_{cs}|$  lässt sich hierbei durch Division eines Formfaktors ermitteln, der durch ein Verfahren der Gitterquantenchromodynamik bestimmt wird.

Da es ein Ziel der Elementarteilchenphysik ist, die Unitarität der CKM-Matrix zu bestimmen, ist es erforderlich, die anderen Elemente durch ähnliche Operationen zu bestimmen. Diese stellen die Größen, die nötig sind, um die Seitenlängen und Winkel des Unitaritätsdreiecks, gebildet aus freien Parametern der CKM-Matrix, auszurechnen. Der Flächeninhalt dieses Dreiecks gibt ein Maß für die CP-Verletzung an und dient der Überprüfung, ob sie ausreicht hat, das Materie-Antimaterie-Ungleichgewicht zu Beginn des Universums zu erzeugen.



# Literaturverzeichnis

- [1] Nedden zur, M.: *Detektoren der Elementarteilchenphysik*[pdf], 2006  
[http://www-hera-b.desy.de/people/nedden/lectures/05\\_06/dettph/dettph\\_cont.pdf](http://www-hera-b.desy.de/people/nedden/lectures/05_06/dettph/dettph_cont.pdf)
- [2] Schleper, P.: *Teilchenphysik für Fortgeschrittene*[pdf], 2011  
<http://www.desy.de/~schleper/lehre/>
- [3] Bjorken, J.D., Drell, S.D.: *Relativistic Quantum Mechanics*, 1964, 1st edition  
ISBN-13 978-0072320022
- [4] Griffiths, D.: *Introduction to Elementary Particles*, 2008, 1st edition  
ISBN-13 978-3527406012
- [5] Beringer, J. et al.: *Particle Data Group*, Phys. Rev. D86, 010001, 2012
- [6] Grotz, K., Klapdor H.V.: *Die schwache Wechselwirkung in Kern-, Teilchen- und Astrophysik*, 1989, 1st edition, ISBN-13 978-3519030355
- [7] Offen, N.: *B-Zerfallsformfaktoren aus QCD-Summenregeln*, 2008  
<http://d-nb.info/987811061>
- [8] Sibold, K.: *Theorie der Elementarteilchen*, 2001, 1st edition,  
ISBN-13: 978-3519032526
- [9] Ho-Kim, Q., Pham, X.: *Elementary Particles and Their Interactions*, 1998,  
ISBN-13: 978-3540636670
- [10] Besson, D., et al. (CLEO Collaboration), 2009, Phys. Rev. D 80, 032005
- [11] Bourrely, C., Caprini, I., Lellouch, L., 2009, Phys. Rev. D 79, 013008

## Eidesstattliche Versicherung

Ich versichere hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit mit dem Titel "Formfaktoren des semileptonischen  $D \rightarrow Kl^+\nu$  Zerfalls" selbständig und ohne unzulässige fremde Hilfe erbracht habe. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie wörtliche und sinngemäße Zitate kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

---

Ort, Datum

---

Unterschrift

### Belehrung

Wer vorsätzlich gegen eine die Täuschung über Prüfungsleistungen betreffende Regelung einer Hochschulprüfungsordnung verstößt handelt ordnungswidrig. Die Ordnungswidrigkeit kann mit einer Geldbuße von bis zu 50.000,00 € geahndet werden. Zuständige Verwaltungsbehörde für die Verfolgung und Ahndung von Ordnungswidrigkeiten ist der Kanzler/die Kanzlerin der Technischen Universität Dortmund. Im Falle eines mehrfachen oder sonstigen schwerwiegenden Täuschungsversuches kann der Prüfling zudem exmatrikuliert werden (§ 63 Abs. 5 Hochschulgesetz - HG - ).

Die Abgabe einer falschen Versicherung an Eides statt wird mit Freiheitsstrafe bis zu 3 Jahren oder mit Geldstrafe bestraft.

Die Technische Universität Dortmund wird ggf. elektronische Vergleichswerkzeuge (wie z.B. die Software "turnitin") zur Überprüfung von Ordnungswidrigkeiten in Prüfungsverfahren nutzen.

## *LITERATURVERZEICHNIS*

---

Die oben stehende Belehrung habe ich zur Kenntnis genommen.

---

Ort, Datum

---

Unterschrift